ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

50

TOME SEPTIÈME.

T 7 –

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

M DCCC LXXXVI

Premier fascicule.

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ŒUVRES

COMPLÈTES

DE LAPLACE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR

MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXXVI

Premier Fascicule.

AVERTISSEMENT

MIS A LA TÊTE

DE LA SECONDE ÉDITION.

Cet Ouvrage a paru dans le cours de 1812, savoir, la première Partie vers le commencement de l'année, et la seconde Partie quelques mois après la première. Depuis ce temps, l'Auteur s'est occupé spécialement à le perfectionner, soit en corrigeant de légères fautes qui s'y étaient glissées, soit par des additions utiles. La principale est une Introduction fort étendue, dans laquelle les principes de la Théorie des Probabilités et leurs applications les plus intéressantes sont exposés sans le secours du calcul. Cette Introduction, qui sert de préface à l'Ouvrage, paraît encore séparément sous ce titre : *Essai philosophique sur les Probabilités*. La théorie de la probabilité des témoignages, omise dans la première édition, est ici présentée avec le développement qu'exige son importance. Plusieurs théorèmes analytiques, auxquels l'Auteur était arrivé par des voies indirectes, sont démontrés directement dans les Additions, qui renferment, de plus, un court extrait de l'*Arithmétique des infinis* de Wallis, l'un des Ouvrages qui ont le plus contribué aux progrès de l'Analyse et où l'on trouve le germe de la théorie des intégrales définies, l'une des bases de ce nouveau Calcul des Probabilités. L'Auteur désire que son Ouvrage, accru d'un tiers au moins par ces diverses Additions, mérite l'attention des géomètres, et les excite à cultiver une branche aussi curieuse et aussi importante des connaissances humaines.

AVERTISSEMENT

MIS A LA TÊTE

DE LA SECONDE ÉDITION.

Cet Ouvrage a paru dans le cours de 1812, savoir, la première Partie vers le commencement de l'année, et la seconde Partie quelques mois après la première. Depuis ce temps, l'Auteur s'est occupé spécialement à le perfectionner, soit en corrigeant de légères fautes qui s'y étaient glissées, soit par des additions utiles. La principale est une Introduction fort étendue, dans laquelle les principes de la Théorie des Probabilités et leurs applications les plus intéressantes sont exposés sans le secours du calcul. Cette Introduction, qui sert de préface à l'Ouvrage, paraît encore séparément sous ce titre : *Essai philosophique sur les Probabilités*. La théorie de la probabilité des témoignages, omise dans la première édition, est ici présentée avec le développement qu'exige son importance. Plusieurs théorèmes analytiques, auxquels l'Auteur était arrivé par des voies indirectes, sont démontrés directement dans les Additions, qui renferment, de plus, un court extrait de l'*Arithmétique des Infinis* de Wallis, l'un des Ouvrages qui ont le plus contribué aux progrès de l'Analyse et où l'on trouve le germe de la théorie des intégrales définies, l'une des bases de ce nouveau Calcul des Probabilités. L'Auteur désire que son Ouvrage, accru d'un tiers au moins par ces diverses Additions, mérite l'attention des géomètres, et les excite à cultiver une branche aussi curieuse et aussi importante des connaissances humaines.

AVERTISSEMENT

MIS A LA TÊTE

DE LA TROISIÈME ÉDITION (¹).

Cette troisième Édition diffère de la précédente : 1° par une nouvelle Introduction qui a paru l'année dernière, sous ce titre : *Essai philosophique sur les Probabilités*, quatrième Édition; 2° par trois Suppléments qui se rapportent à l'application du Calcul des Probabilités aux sciences naturelles et aux opérations géodésiques. Les deux premiers ont été déjà publiés séparément; le troisième, relatif aux opérations du nivellement, est terminé par l'exposition d'une méthode générale du Calcul des Probabilités, quel que soit le nombre des sources d'erreur.

(¹) Un quatrième Supplément a été ajouté, en 1825, par Laplace, aux exemplaires de cette troisième Édition qui étaient encore à sa disposition. Nous l'avons reproduit à la fin de ce Volume.

T.

INTRODUCTION.

Cette Introduction est le développement d'une Leçon sur les Probabilités, que je donnai en 1795, aux Écoles Normales, où je fus appelé comme professeur de Mathématiques avec Lagrange, par un décret de la Convention nationale. Je vais y présenter, sans le secours de l'Analyse, les principes et les résultats généraux de la théorie des probabilités exposée dans cet Ouvrage, en les appliquant aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité. On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, l'induction et l'analogie, se fondent sur les probabilités, en sorte que le système entier des connaissances humaines se rattache à la théorie exposée dans cet essai. On y verra sans doute avec intérêt qu'en ne considérant même dans les principes éternels de la raison, de la justice et de l'humanité, que les chances heureuses qui leur sont constamment attachées, il y a un grand avantage à suivre ces principes et de graves inconvénients à s'en écarter, leurs chances, comme celles qui sont favorables aux loteries, finissant toujours par prévaloir au milieu des oscillations du hasard. Je désire que les réflexions répandues dans cette Introduction puissent mériter l'attention des philosophes et la diriger vers un objet si digne de les occuper.

De la Probabilité.

Tous les événements, ceux même qui par leur petitesse semblent ne pas tenir aux grandes lois de la nature, en sont une suite aussi nécessaire que les révolutions du Soleil. Dans l'ignorance des liens qui les unissent au système entier de l'univers, on les a fait dépendre des causes finales ou du hasard, suivant qu'ils arrivaient et se succédaient avec régularité ou sans ordre apparent; mais ces causes imaginaires ont été successivement reculées avec les bornes de nos connaissances, et disparaissent entièrement devant la saine philosophie, qui ne voit en elles que l'expression de l'ignorance où nous sommes des véritables causes.

Les événements actuels ont avec les précédents une liaison fondée sur le principe évident, qu'une chose ne peut pas commencer d'être sans une cause qui la produise. Cet axiome, connu sous le nom de *principe de la raison suffisante,* s'étend aux actions même que l'on juge indifférentes. La volonté la plus libre ne peut sans un motif déterminant leur donner naissance; car si, toutes les circonstances de deux positions étant exactement semblables, elle agissait dans l'une et s'abstenait d'agir dans l'autre, son choix serait un effet sans cause; elle serait alors, dit Leibnitz, le hasard aveugle des épicuriens. L'opinion contraire est une illusion de l'esprit, qui, perdant de vue les raisons fugitives du choix de la volonté dans les choses indifférentes, se persuade qu'elle s'est déterminée d'elle-même et sans motifs.

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celles de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques les états passés et futurs du Système du monde. En appliquant la même méthode à quelques autres objets de ses connaissances, il est parvenu à ramener à des lois générales les phénomènes observés et à prévoir ceux que des circonstances données doivent faire éclore. Tous ses efforts dans la recherche de la vérité tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné. Cette tendance propre à l'espèce humaine est ce qui la rend supérieure aux animaux, et ses progrès en ce genre distinguent les nations et les siècles, et font leur véritable gloire.

Rappelons-nous qu'autrefois, et à une époque qui n'est pas encore bien reculée, une pluie ou une sécheresse extrême, une comète traînant après elle une queue fort étendue, les éclipses, les aurores boréales et généralement tous les phénomènes extraordinaires étaient regardés comme autant de signes de la colère céleste. On invoquait le ciel pour détourner leur funeste influence. On ne le priait point de suspendre le cours des planètes et du Soleil : l'observation eût bientôt fait sentir l'inutilité de ces prières. Mais parce que ces phénomènes, arrivant et disparaissant à de longs intervalles, semblaient contrarier l'ordre de la nature, on supposait que le ciel les faisait naître et les modifiait à son gré pour punir les crimes de la Terre. Ainsi la longue queue de la comète de 1456 répandit la terreur dans l'Europe, déjà consternée par les succès rapides des Turcs qui venaient de renverser le Bas-Empire. Cet astre, après quatre de ses révolutions, a excité parmi nous un intérêt bien différent. La connaissance des lois du Système du monde, acquise dans cet intervalle, avait dissipé les craintes enfantées par l'ignorance des vrais rapports de l'homme avec l'univers, et Halley, ayant reconnu l'identité de la comète avec celles des années 1531, 1607 et 1682, annonça son prochain retour pour la fin de 1758 ou le commencement de 1759. Le monde savant attendit avec impatience ce retour, qui devait confirmer l'une des plus grandes découvertes que l'on eût faites dans les sciences, et accomplir la prédiction de Sénèque, lorsqu'il a dit, en parlant de la révolution de ces astres qui descendent d'une énorme distance : « Le jour viendra que, par une étude suivie, de plusieurs siècles, les choses actuellement cachées paraîtront avec évidence, et la postérité s'étonnera que des vérités si claires nous aient échappé. » Clairaut entreprit alors de soumettre à l'Analyse les perturbations que la comète avait éprouvées par l'action des deux plus grosses planètes, Jupiter et Saturne : après d'immenses calculs, il fixa son prochain passage au périhélie vers le commencement d'avril 1759, ce que l'observation ne tarda pas à vérifier. La régularité que l'Astronomie nous montre dans le mouvement des comètes a lieu, sans aucun doute, dans tous les phénomènes. La courbe décrite par une simple molécule d'air ou de vapeurs est réglée d'une manière aussi certaine que les orbites planétaires : il n'y a de différence entre elles que celle qu'y met notre ignorance.

La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances. Nous savons que, sur trois ou un plus grand nombre d'événements, un seul doit arriver; mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision, il nous est impossible de prononcer avec certitude sur leur arrivée. Il est cependant probable qu'un de ces événements pris à volonté n'arrivera pas, parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.

La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans le même rapport le nombre des cas favorables et celui de tous les cas possibles, la probabilité reste la même. Pour s'en convaincre, que l'on considère deux urnes A et B, dont la première contienne quatre boules blanches et deux noires, et dont la seconde ne renferme que deux boules blanches et une noire. On peut imaginer les deux boules noires de la première urne attachées à un fil qui se rompt au moment où l'on saisit l'une d'elles pour l'extraire, et les quatre boules blanches formant deux systèmes semblables. Toutes les chances qui feront saisir l'une des boules du système noir amèneront une boule noire. Si l'on conçoit maintenant que les fils qui unissent les boules ne se rompent point, il est clair que le nombre des chances possibles ne changera pas, non plus que celui des chances favorables à l'extraction des boules noires; seulement on tirera de l'urne deux boules à la fois; la probabilité d'extraire une boule noire de l'urne sera donc la même qu'auparavant. Mais alors on a évidemment le cas de l'urne B, avec la seule différence que les trois boules de cette dernière urne sont remplacées par trois systèmes de deux boules invariablement unies.

Quand tous les cas sont favorables à un événement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité. Sous ce rapport, la certitude et la probabilité sont comparables, quoiqu'il y ait une différence essentielle entre les deux états de l'esprit, lorsqu'une vérité lui est rigoureusement démontrée, ou lorsqu'il aperçoit encore une petite source d'erreurs.

Dans les choses qui ne sont que vraisemblables, la différence des données que chaque homme a sur elles est une des causes principales de la diversité des opinions que l'on voit régner sur les mêmes objets. Supposons, par exemple, que l'on ait trois urnes A, B, C, dont une ne contienne que des boules noires, tandis que les deux autres ne renferment que des boules blanches; on doit tirer une boule de l'urne C et l'on demande la probabilité que cette boule sera noire. Si l'on ignore quelle est celle des trois urnes qui ne renferme que des boules noires, en sorte que l'on n'ait aucune raison de croire qu'elle est plutôt C que B ou A, ces trois hypothèses paraîtront également possibles ; et comme une boule noire ne peut être extraite que dans la première hypothèse, la probabilité de l'extraire est égale à un tiers. Si l'on sait que l'urne A ne contient que des boules blanches, l'indécision ne porte plus alors que sur les urnes B et C, et la probabilité que la boule extraite de l'urne C sera noire est un demi. Enfin cette probabilité se change en certitude, si l'on est assuré que les urnes A et B ne contiennent que des boules blanches.

C'est ainsi que le même fait, récité devant une nombreuse assemblée, obtient divers degrés de croyance, suivant l'étendue des connaissances des auditeurs. Si l'homme qui le rapporte en est intimement persuadé, et si par son état et par son caractère il inspire une grande confiance, son récit, quelque extraordinaire qu'il soit, aura pour les auditeurs dépourvus de lumières le même degré de vraisemblance qu'un fait ordinaire rapporté par le même homme, et ils lui ajouteront une foi entière. Cependant, si quelqu'un d'eux sait que le même fait est rejeté par d'autres hommes également respectables, il sera dans le doute, et le fait sera jugé faux par les auditeurs éclairés qui le trouveront contraire soit à des faits bien avérés, soit aux lois immuables de la nature.

C'est à l'influence de l'opinion de ceux que la multitude juge les plus instruits, et à qui elle a coutume de donner sa confiance sur les plus importants objets de la vie, qu'est due la propagation de ces erreurs qui, dans les temps d'ignorance, ont couvert la face du monde. La Magie et l'Astrologie nous en offrent deux grands exemples. Ces erreurs, inculquées dès l'enfance, adoptées sans examen et n'ayant pour base que la croyance universelle, se sont maintenues pendant très longtemps, jusqu'à ce qu'enfin le progrès des sciences les ait détruites dans l'esprit des hommes éclairés, dont ensuite l'opinion les a fait disparaître chez le peuple même, par le pouvoir de l'imitation et de l'habitude qui les avait si généralement répandues. Ce pouvoir, le plus puissant ressort du monde moral, établit et conserve dans toute une nation des idées entièrement contraires à celles qu'il maintient ailleurs avec le même empire. Quelle indulgence ne devons-nous donc pas avoir pour les opinions différentes des nôtres, puisque cette différence ne dépend souvent que des points de vue divers où les circonstances nous ont placés! Éclairons ceux que nous ne jugeons pas suffisamment instruits; mais auparavant examinons sévèrement nos propres opinions, et pesons avec impartialité leurs probabilités respectives.

La différence des opinions dépend encore de la manière dont on détermine l'influence des données qui sont connues. La Théorie des Probabilités tient à des considérations si délicates, qu'il n'est pas surprenant qu'avec les mêmes données deux personnes trouvent des résultats différents, surtout dans les questions très compliquées. Exposons ici les principes généraux de cette Théorie.

Principes généraux du Calcul des Probabilités.

Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité, qui, comme on l'a vu, est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles. Ier principe.

Mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives, dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. Éclaircissons ce principe par un exemple. IIe principe.

Supposons que l'on projette en l'air une pièce large et très mince dont les deux grandes faces opposées, que nous nommerons *croix* et *pile*, soient parfaitement semblables. Cherchons la probabilité d'amener *croix* une fois au moins en deux coups. Il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles, savoir, *croix* au premier et au second coup; *croix* au premier coup et *pile* au second; *pile* au premier coup et *croix* au second; enfin *pile* aux deux coups. Les trois premiers cas sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité, qui, par conséquent, est égale à $\frac{3}{4}$; en sorte qu'il y a trois contre un à parier que *croix* arrivera au moins une fois en deux coups.

On peut ne compter à ce jeu que trois cas différents, savoir, *croix* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second; *pile* au premier coup et *croix* au second; enfin *pile* au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$, si l'on considérait, avec d'Alembert, ces trois cas comme également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, tandis que celle des deux autres cas est $\frac{1}{4}$; le premier cas étant un événement simple qui correspond aux deux événements composés, *croix* au premier et au second coup, et *croix* au premier coup, *pile* au second. Maintenant si, conformément au second principe, on ajoute la possibilité $\frac{1}{2}$ de *croix* au premier coup à la possibilité $\frac{1}{4}$ de *pile* arrivant au premier coup et *croix* au second, on aura $\frac{3}{4}$ pour la probabilité cherchée, ce qui s'accorde avec ce que l'on trouve dans la supposition où l'on joue les deux coups. Cette supposition ne change point le sort de celui qui parie pour cet événement; elle sert seulement à réduire les divers cas à des cas également possibles.

IIIe principe. Un des points les plus importants de la Théorie des Probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles. Si les événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières. Ainsi la probabilité d'amener un as avec un seul dé étant un sixième, celle d'amener deux as en projetant deux dés à la fois est un trente-sixième. En effet, chacune des faces de l'un pouvant se combiner avec les six faces de l'autre, il y a trente-six cas également possibles, parmi lesquels un seul donne les deux as. Généralement, la probabilité qu'un événement simple, dans les mêmes circonstances, arrivera de suite un nombre donné de fois est égale à la probabilité de cet événement simple, élevée à une puissance indiquée par ce nombre. Ainsi, les puissances successives d'une fraction moindre que l'unité diminuant sans cesse, un événement qui dépend d'une suite de probabilités fort grandes peut devenir extrêmement peu vraisemblable. Supposons qu'un fait nous soit transmis par vingt témoins, de manière que le premier l'ait transmis au second, le second au troisième, et ainsi de suite; supposons encore que la probabilité de chaque témoignage soit égale à $\frac{9}{10}$: celle du fait, résultante des témoignages, en sera moindre qu'un huitième. On ne peut mieux comparer cette diminution de la probabilité qu'à l'extinction de la clarté des objets par l'interposition de plusieurs morceaux de verre, un nombre de morceaux peu considérable suffisant pour dérober la vue d'un objet qu'un seul morceau laisse apercevoir d'une manière distincte. Les historiens ne paraissent pas avoir fait assez d'attention à cette dégradation de la probabilité des faits, lorsqu'ils sont vus à travers un grand nombre de générations successives; plusieurs événements historiques, réputés certains, seraient au moins douteux, si on les soumettait à cette épreuve.

Dans les sciences purement mathématiques, les conséquences les plus éloignées participent de la certitude du principe dont elles dérivent. Dans les applications de l'Analyse à la Physique, les conséquences ont toute la certitude des faits ou des expériences. Mais dans les sciences morales, où chaque conséquence n'est déduite de ce qui la précède que d'une manière vraisemblable, quelque probables que soient ces déductions, la chance de l'erreur croît avec leur nombre, et finit par surpasser la chance de la vérité dans les conséquences très éloignées du principe.

Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement par la probabilité que, cet événement étant arrivé, l'autre arrivera. Ainsi, dans le cas précédent de trois urnes A, B, C, dont deux ne contiennent que des boules blanches et dont une ne renferme que des boules noires, la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C est $\frac{2}{3}$, puisque, sur trois urnes, deux ne contiennent que des boules de cette couleur. Mais, lorsqu'on a extrait une boule blanche de l'urne C, l'indécision relative à celle des urnes qui ne renferme que des boules noires ne portant plus que sur les urnes A et B, la proba- IVe principe.

bilité d'extraire une boule blanche de l'urne B est $\frac{1}{2}$; le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, est donc la probabilité d'extraire à la fois des urnes B et C deux boules blanches. En effet, il est nécessaire pour cela que l'urne A soit celle des trois urnes qui contient des boules noires, et la probabilité de ce cas est évidemment $\frac{1}{3}$.

On voit par cet exemple l'influence des événements passés sur la probabilité des événements futurs. Car la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne B, qui primitivement est $\frac{2}{3}$, se réduit à $\frac{1}{2}$ lorsqu'on a extrait une boule blanche de l'urne C; elle se changerait en certitude, si l'on avait extrait une boule noire de la même urne. On déterminera cette influence au moyen du principe suivant, qui est un corollaire du précédent.

Ve principe. Si l'on calcule *a priori* la probabilité de l'événement arrivé, et la probabilité d'un événement composé de celui-ci et d'un autre qu'on attend, la seconde probabilité, divisée par la première, sera la probabilité de l'événement attendu, tirée de l'événement observé.

Ici se présente la question agitée par quelques philosophes, touchant l'influence du passé sur la probabilité de l'avenir. Supposons qu'au jeu de *croix ou pile*, *croix* soit arrivé plus souvent que *pile* : par cela seul, nous serons portés à croire que, dans la constitution de la pièce, il existe une cause constante qui le favorise. Ainsi, dans la conduite de la vie, le bonheur constant est une preuve d'habileté, qui doit faire employer de préférence les personnes heureuses. Mais si, par l'instabilité des circonstances, nous sommes ramenés sans cesse à l'état d'une indécision absolue; si, par exemple, on change de pièce à chaque coup, au jeu de *croix ou pile*, le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir, et il serait absurde d'en tenir compte.

VIe principe. Chacune des causes auxquelles un événement observé peut être attribué est indiquée avec d'autant plus de vraisemblance, qu'il est plus probable que, cette cause étant supposée exister, l'événement aura lieu; la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes est donc une fraction, dont le numérateur est la probabilité de l'événement résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes. Si ces diverses causes, considérées *a priori*, sont inégalement probables, il faut, au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité par celle de la cause elle-même. C'est le principe fondamental de cette branche de l'Analyse des hasards qui consiste à remonter des événements aux causes.

Ce principe donne la raison pour laquelle on attribue les événements réguliers à une cause particulière. Quelques philosophes ont pensé que ces événements sont moins possibles que les autres, et qu'au jeu de *croix ou pile*, par exemple, la combinaison dans laquelle *croix* arrive vingt fois de suite est moins facile à la nature que celles où *croix* et *pile* sont entremêlés d'une façon irrégulière. Mais cette opinion suppose que les événements passés influent sur la possibilité des événements futurs, ce qui n'est point admissible. Les combinaisons régulières n'arrivent plus rarement que parce qu'elles sont moins nombreuses. Si nous recherchons une cause là où nous apercevons de la symétrie, ce n'est pas que nous regardions un événement symétrique comme moins possible que les autres; mais, cet événement devant être l'effet d'une cause régulière ou celui du hasard, la première de ces suppositions est plus probable que la seconde. Nous voyons sur une table des caractères d'imprimerie, disposés dans cet ordre, *Constantinople*, et nous jugeons que cet arrangement n'est pas l'effet du hasard, non parce qu'il est moins possible que les autres, puisque si ce mot n'était employé dans aucune langue, nous ne lui soupçonnerions point de cause particulière; mais, ce mot étant en usage parmi nous, il est incomparablement plus probable qu'une personne aura disposé ainsi les caractères précédents qu'il ne l'est que cet arrangement est dû au hasard.

C'est ici le lieu de définir le mot *extraordinaire*. Nous rangeons, par la pensée, tous les événements possibles en diverses classes, et nous regardons comme *extraordinaires* ceux des classes qui en comprennent un très petit nombre. Ainsi, au jeu de *croix ou pile*, l'arrivée de *croix* cent fois de suite nous paraît extraordinaire, parce que le nombre presque infini des combinaisons qui peuvent arriver en cent coups, étant partagé en séries régulières ou dans lesquelles nous voyons régner un ordre facile à saisir, et en séries irrégulières, celles-ci sont incomparablement plus nombreuses. La sortie d'une boule blanche d'une urne qui, sur un million de boules, n'en contient qu'une seule de cette couleur, les autres étant noires, nous paraît encore extraordinaire, parce que nous ne formons que deux classes d'événements, relatives aux deux couleurs. Mais la sortie du n° 475813, par exemple, d'une urne qui renferme un million de numéros nous semble un événement ordinaire, parce que, comparant individuellement les numéros les uns aux autres, sans les partager en classes, nous n'avons aucune raison de croire que l'un d'eux sortira plutôt que les autres.

De ce qui précède, nous devons généralement conclure que, plus un fait est extraordinaire, plus il a besoin d'être appuyé de fortes preuves; car, ceux qui l'attestent pouvant ou tromper ou avoir été trompés, ces deux causes sont d'autant plus probables que la réalité du fait l'est moins en elle-même. C'est ce que l'on verra particulièrement lorsque nous parlerons de la probabilité des témoignages.

VIIe principe. La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que, cette cause existant, l'événement futur aura lieu. L'exemple suivant éclaircira ce principe.

Imaginons une urne qui ne renferme que deux boules dont chacune soit ou blanche, ou noire. On extrait une de ces boules, que l'on remet ensuite dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage. Supposons que, dans les deux premiers tirages, on ait amené des boules blanches; on demande la probabilité d'amener encore une boule blanche au troisième tirage.

On ne peut faire ici que ces deux hypothèses : ou l'une des boules est blanche et l'autre noire, ou toutes deux sont blanches. Dans la première hypothèse, la probabilité de l'événement observé est $\frac{1}{4}$: elle est l'unité ou la certitude dans la seconde. Ainsi, en regardant ces hypothèses comme autant de causes, on aura, par le sixième principe, $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$

pour leurs probabilités respectives. Or, si la première hypothèse a lieu, la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage est $\frac{1}{2}$; elle égale l'unité, dans la seconde hypothèse; en multipliant donc ces dernières probabilités par celles des hypothèses correspondantes, la somme des produits ou $\frac{9}{10}$ sera la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage.

Quand la probabilité d'un événement simple est inconnue, on peut lui supposer également toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'unité. La probabilité de chacune de ces hypothèses, tirée de l'événement observé, est, par le sixième principe, une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement dans cette hypothèse, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les hypothèses. Ainsi la probabilité que la possibilité de l'événement est comprise dans des limites données est la somme des fractions comprises dans ces limites. Maintenant, si l'on multiplie chaque fraction par la probabilité de l'événement futur, déterminée dans l'hypothèse correspondante, la somme des produits relatifs à toutes les hypothèses sera, par le septième principe, la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé. On trouve ainsi qu'un événement étant arrivé de suite un nombre quelconque de fois, la probabilité qu'il arrivera encore la fois suivante est égale à ce nombre augmenté de l'unité, divisé par le même nombre augmenté de deux unités. En faisant, par exemple, remonter la plus ancienne époque de l'histoire à cinq mille ans ou à 1826213 jours, et le Soleil s'étant levé constamment, dans cet intervalle, à chaque révolution de vingt-quatre heures, il y a 1826214 à parier contre un qu'il se lèvera encore demain. Mais ce nombre est incomparablement plus fort pour celui qui, connaissant par l'ensemble des phénomènes le principe régulateur des jours et des saisons, voit que rien dans le moment actuel ne peut en arrêter le cours.

Buffon, dans son *Arithmétique politique*, calcule différemment la probabilité précédente. Il suppose qu'elle ne diffère de l'unité que d'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le nombre 2 élevé à une puissance égale au nombre des jours écoulés depuis l'époque. Mais la vraie manière de remonter des événements passés à la probabilité des causes et des événements futurs était inconnue à cet illustre écrivain.

De l'Espérance.

La probabilité des événements sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions : il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans des suppositions qui ne sont que probables. Cet avantage, dans la théorie des hasards, est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir lorsqu'on ne veut pas courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette répartition est la seule équitable, lorsqu'on fait abstraction de toutes circonstances étrangères, parce qu'un égal degré de probabilité donne un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage *espérance mathématique*.

VIII^e principe. Lorsque l'avantage dépend de plusieurs événements, on l'obtient en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque événement par le bien attaché à son arrivée.

Appliquons ce principe à des exemples. Supposons qu'au jeu de *croix ou pile* Paul reçoive 2^{fr} s'il amène *croix* au premier coup, et 5^{fr} s'il ne l'amène qu'au second. En multipliant 2^{fr} par la probabilité $\frac{1}{2}$ du premier cas, et 5^{fr} par la probabilité $\frac{1}{4}$ du second cas, la somme des produits, ou 2^{fr} et un quart, sera l'avantage de Paul. C'est la somme qu'il doit donner d'avance à celui qui lui a fait cet avantage; car, pour l'égalité du jeu, la mise doit être égale à l'avantage qu'il procure.

Si Paul reçoit 2^{fr} en amenant *croix* au premier coup, et 5^{fr} en l'amenant au second coup, dans le cas même où il l'aurait amené au premier, alors la probabilité d'amener *croix* au second coup étant $\frac{1}{2}$, en multipliant 2^{fr} et 5^{fr} par $\frac{1}{2}$, la somme de ces produits donnera 3^{fr} et demi pour l'avantage de Paul et par conséquent pour sa mise au jeu.

Dans une série d'événements probables, dont les uns produisent un bien et les autres une perte, on aura l'avantage qui en résulte, en faisant une somme des produits de la probabilité de chaque événement favorable par le bien qu'il procure, et en retranchant de cette somme celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable par la perte qui y est attachée. Si la seconde somme l'emporte sur la première, le bénéfice devient perte, et l'espérance se change en crainte. IXe principe.

On doit toujours, dans la conduite de la vie, faire en sorte d'égaler au moins le produit du bien que l'on espère par sa probabilité, au produit semblable relatif à la perte. Mais il est nécessaire, pour y parvenir, d'apprécier exactement les avantages, les pertes et leurs probabilités respectives. Il faut pour cela une grande justesse d'esprit, un tact délicat et une grande expérience des choses; il faut savoir se garantir des préjugés, des illusions de la crainte et de l'espérance, et de ces fausses idées de fortune et de bonheur, dont la plupart des hommes bercent leur amour-propre.

L'application des principes précédents à la question suivante a beaucoup exercé les géomètres. Paul joue à *croix ou pile,* avec la condition de recevoir 2^{fr} s'il amène *croix* au premier coup, 4^{fr} s'il ne l'amène qu'au second; 8^{fr} s'il ne l'amène qu'au troisième, et ainsi de suite. Sa mise au jeu doit être, par le huitième principe, égale au nombre des coups; en sorte que si la partie continue à l'infini, la mise doit être infinie. Cependant, aucun homme raisonnable ne voudrait exposer à ce jeu une somme même modique, 50^{fr} par exemple. D'où vient cette différence entre le résultat du calcul et l'indication du sens commun? On reconnut bientôt qu'elle tenait à ce que l'avantage moral qu'un bien nous procure n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances souvent très difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet, il est visible que 1^{fr} a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que 100 que pour un millionnaire. On doit donc distinguer, dans le bien espéré, sa valeur absolue de sa valeur relative : celle-ci se règle sur les motifs qui le font désirer, au lieu que la première en est indépendante. On ne peut donner de principe général pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas.

Xe principe. La valeur relative d'une somme infiniment petite est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée. Cela suppose que tout homme a un bien quelconque dont la valeur ne peut jamais être supposée nulle. En effet, celui même qui ne possède rien donne toujours au produit de son travail et à ses espérances une valeur au moins égale à ce qui lui est rigoureusement nécessaire pour vivre.

Si l'on applique l'analyse au principe que nous venons d'exposer, on obtient la règle suivante :

En désignant par l'unité la partie de la fortune d'un individu indépendante de ses expectatives, si l'on détermine les diverses valeurs que cette fortune peut recevoir en vertu de ces expectatives, et leurs probabilités, le produit de ces valeurs élevées respectivement aux puissances indiquées par ces probabilités sera la fortune physique qui procurerait à l'individu le même avantage moral qu'il reçoit de la partie de sa fortune, prise pour unité, et de ses expectatives; en retranchant donc l'unité de ce produit, la différence sera l'accroissement de la fortune physique, dû aux expectatives : nous nommerons cet accroissement *espérance morale*. Il est facile de voir qu'elle coïncide avec l'espérance mathématique, lorsque la fortune prise pour unité devient infinie par rapport aux variations qu'elle reçoit des expectatives. Mais, lorsque ces variations sont une partie sensible de cette unité, les deux espérances peuvent différer très sensiblement entre elles.

Cette règle conduit à des résultats conformes aux indications du sens commun, que l'on peut par ce moyen apprécier avec quelque exactitude. Ainsi, dans la question précédente, on trouve que, si la fortune de Paul est de 200^{fr}, il ne doit pas raisonnablement mettre au jeu plus de 9^{fr}. La même règle conduit encore à répartir le danger sur plusieurs parties d'un bien que l'on attend, plutôt que d'exposer ce bien tout entier au même danger. Il en résulte pareillement qu'au jeu le plus égal, la perte est toujours relativement plus grande que le gain. En supposant, par exemple, qu'un joueur, ayant une fortune de 100^{fr}, en expose 50 au jeu de *croix ou pile*, sa fortune après sa mise au jeu sera réduite à 87^{fr}, c'est-à-dire que cette dernière somme procurerait au joueur le même avantage moral que l'état de sa fortune après sa mise. Le jeu est donc désavantageux, dans le cas même où la mise est égale au produit de la somme espérée par sa probabilité. On peut juger par là de l'immoralité des jeux dans lesquels la somme espérée est au-dessous de ce produit. Ils ne subsistent que par les faux raisonnements et par la cupidité qu'ils fomentent, et qui, portant le peuple à sacrifier son nécessaire à des espérances chimériques dont il est hors d'état d'apprécier l'invraisemblance, sont la source d'une infinité de maux.

Le désavantage des jeux, l'avantage de ne pas exposer au même danger tout le bien qu'on attend, et tous les résultats semblables indiqués par le bon sens subsistent, quelle que soit la fonction de la fortune physique qui, pour chaque individu, exprime sa fortune morale. Il suffit que le rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement de la fortune physique diminue à mesure que celle-ci augmente.

Des méthodes analytiques du Calcul des probabilités.

L'application des principes que nous venons d'exposer aux diverses questions de probabilité exige des méthodes dont la recherche a donné naissance à plusieurs branches de l'Analyse, et spécialement à la Théorie des combinaisons et au Calcul des différences finies.

Si l'on forme le produit des binômes, l'unité plus une première lettre, l'unité plus une seconde lettre, l'unité plus une troisième lettre, et ainsi de suite jusqu'à n lettres; en retranchant l'unité de ce produit développé, on aura la somme des combinaisons de toutes ces lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois, ..., chaque combinaison ayant l'unité pour coefficient. Pour avoir le nombre des combinaisons de ces n lettres prises s à s, on observera que, si l'on suppose ces lettres égales entre elles, le produit précédent deviendra la puissance n du binôme, un plus la première lettre : ainsi le nombre des combinaisons des n lettres prises s à s sera le coefficient de la puissance s de la première lettre dans le développement de ce binôme : on aura donc ce nombre par la formule connue du binôme.

On aura égard à la situation respective des lettres dans chaque combinaison en observant que, si l'on joint une seconde lettre à la première, on peut la placer au premier et au second rang, ce qui donne deux combinaisons. Si l'on joint à ces combinaisons une troisième lettre, on peut lui donner dans chaque combinaison le premier, le second et le troisième rang, ce qui forme trois combinaisons relatives à chacune des deux autres, en tout, six combinaisons. De là il est facile de conclure que le nombre des arrangements dont s lettres sont susceptibles est le produit des nombres depuis l'unité jusqu'à s; il faut donc, pour avoir égard à la situation respective des lettres, multiplier par ce produit le nombre des combinaisons des n lettres prises s à s, ce qui revient à supprimer le dénominateur du coefficient du terme du binôme qui exprime ce nombre.

Imaginons une loterie composée de n numéros, dont r sortent à chaque tirage : on demande la probabilité de la sortie de s numéros donnés dans un tirage. Pour y parvenir, on déterminera le nombre des combinaisons des n numéros pris s à s. Ensuite on déterminera le nombre des combinaisons de r numéros pris semblablement s à s. Le rapport de ce dernier nombre au précédent est évidemment la probabilité que les s numéros donnés seront compris dans les r numéros qui doivent sortir; ce rapport est donc la probabilité demandée. Ainsi, dans la loterie de France, formée, comme on sait, de 90 numéros dont 5 sortent à chaque tirage, la probabilité de la sortie d'un extrait donné est $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$; la loterie devrait donc alors, pour l'égalité du jeu, rendre 18 fois la mise. Le nombre total des combinaisons 2 à 2 de 90 numéros est 4005, et il en sort 10 à chaque tirage. La probabilité de la sortie d'un ambe donné est donc $\frac{1}{400,5}$, et la loterie devrait rendre alors 400 fois et demie la mise; elle devrait la rendre 11748 fois pour un terne, 511038 fois pour un quaterne, et 43949268 fois pour un quine. La loterie est loin de faire aux joueurs ces avantages.

Supposons dans une urne a boules blanches et b boules noires, et qu'après en avoir extrait une boule on la remette dans l'urne : on demande la probabilité que, dans le nombre n de tirages, on amènera m boules blanches et $n-m$ boules noires. Il est clair que le nombre de cas qui peuvent arriver à chaque tirage est $a+b$. Chaque cas du second tirage pouvant se combiner avec tous les cas du premier, le nombre de cas possibles en deux tirages est le carré du binôme $a+b$. Dans le développement de ce carré, le carré de a exprime le nombre des cas dans lesquels on amène deux fois une boule blanche; le double produit de a par b exprime le nombre des cas dans lesquels une boule blanche et une boule noire sont amenées; enfin le carré de b exprime le nombre des cas dans lesquels on amène deux boules noires. En continuant ainsi, on voit généralement que la puissance n du binôme $a+b$ exprime le nombre de tous les cas possibles dans n tirages, et que, dans le développement de cette puissance, le terme multiplié par la puissance m de a exprime le nombre des cas dans lesquels on peut amener m boules blanches et $n-m$ boules noires. En divisant donc ce terme par la puissance entière du binôme, on aura la probabilité d'amener m boules blanches et $n-m$ boules noires. Le rapport des nombres a et $a+b$ étant la probabilité d'amener une boule blanche dans un tirage, et le rapport des nombres b et $a+b$ étant la probabilité d'amener une boule noire, si l'on nomme p et q ces probabilités, la probabilité d'amener m boules blanches dans n tirages sera le terme multiplié par la puissance m de p dans le développement de la puissance n du binôme $p+q$: on peut observer que la somme $p+q$ est l'unité. Cette propriété remarquable du binôme est très utile dans la théorie des probabilités.

Mais la méthode la plus générale et la plus directe pour résoudre les questions de probabilité consiste à les faire dépendre d'équations aux différences. En comparant les états successifs de la fonction qui exprime la probabilité, lorsque l'on fait croître les variables de leurs différences respectives, la question proposée fournit souvent un rapport très simple entre ces états. Ce rapport est ce que l'on nomme *équation aux diffé-*

rences ordinaires ou partielles : ordinaires, lorsqu'il n'y a qu'une variable ; partielles, lorsqu'il y en a plusieurs. Donnons-en quelques exemples.

Trois joueurs, dont les forces sont supposées les mêmes, jouent ensemble aux conditions suivantes. Celui des deux premiers joueurs qui gagne son adversaire joue avec le troisième, et, s'il le gagne, la partie est finie. S'il est vaincu, le vainqueur joue avec l'autre, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un des joueurs ait gagné consécutivement les deux autres, ce qui termine la partie. On demande la probabilité que la partie sera finie dans un nombre quelconque n de coups. Cherchons d'abord la probabilité qu'elle finira précisément au coup n. Pour cela, le joueur qui gagne doit entrer au jeu au coup $n-1$ et le gagner, ainsi que le coup suivant. Mais si, au lieu de gagner le coup $n-1$, il était vaincu par son adversaire, celui-ci venant de gagner l'autre joueur, la partie finirait à ce coup. Ainsi la probabilité qu'un des joueurs entrera au jeu au coup $n-1$ et le gagnera est égale à celle que la partie finira précisément à ce coup ; et comme ce joueur doit gagner le coup suivant pour que la partie se termine au coup n, la probabilité de ce dernier cas ne sera qu'un demi de la précédente. Cette probabilité est évidemment une fonction du nombre n ; cette fonction est donc égale à la moitié de la même fonction, lorsqu'on y diminue n de l'unité. Cette égalité forme une de ces équations que l'on nomme *équations aux différences finies ordinaires*.

On peut déterminer facilement, à son moyen, la probabilité que la partie finira précisément à un coup quelconque. Il est visible que la partie ne peut finir au plus tôt qu'au second coup, et pour cela il est nécessaire que celui des deux premiers joueurs qui a gagné son adversaire gagne au second coup le troisième joueur ; la probabilité que la partie finira à ce coup est donc $\frac{1}{2}$. De là, en vertu de l'équation précédente, on conclut que les probabilités successives de la fin de la partie sont $\frac{1}{4}$ pour le troisième coup, $\frac{1}{8}$ pour le quatrième, ..., et généralement $\frac{1}{2}$ élevé à la puissance $n-1$ pour le $n^{\text{ième}}$ coup. La somme de toutes ces puissances de $\frac{1}{2}$ est l'unité moins la dernière de ces puissances : c'est la probabilité que la partie sera terminée au plus tard dans n coups.

Considérons encore le premier problème un peu difficile que l'on ait résolu sur les probabilités, et que Pascal proposa de résoudre à Fermat. Deux joueurs A et B, dont les adresses sont égales, jouent ensemble avec la condition que celui qui le premier aura vaincu l'autre un nombre donné de fois gagnera la partie, et emportera la somme des mises au jeu; après quelques coups, les joueurs conviennent de se retirer sans avoir terminé la partie; on demande de quelle manière cette somme doit être partagée entre eux. Il est visible que les parts doivent être proportionnelles aux probabilités respectives de gagner la partie; la question se réduit donc à déterminer ces probabilités. Elles dépendent évidemment des nombres de points qui manquent à chaque joueur pour atteindre le nombre donné. Ainsi la probabilité de A est une fonction de ces deux nombres que nous nommerons *indices*. Si les deux joueurs convenaient de jouer un coup de plus (convention qui ne change point leur sort, pourvu qu'après ce nouveau coup le partage se fasse toujours proportionnellement aux nouvelles probabilités de gagner la partie), alors, ou A gagnerait ce coup, et dans ce cas le nombre des points qui lui manquent serait diminué d'une unité; ou le joueur B le gagnerait, et dans ce cas le nombre des points manquant à ce dernier joueur deviendrait moindre d'une unité. Mais la probabilité de chacun de ces cas est $\frac{1}{2}$; la fonction cherchée est donc égale à la moitié de cette fonction, dans laquelle on diminue de l'unité le premier indice, plus à la moitié de la même fonction dans laquelle le second indice est diminué de l'unité. Cette égalité est une de ces équations que l'on nomme *équations aux différences partielles*.

On peut déterminer, à son moyen, les probabilités de A en partant des plus petits nombres, et en observant que la probabilité ou la fonction qui l'exprime est égale à l'unité, lorsqu'il ne manque aucun point au joueur A, ou lorsque le premier indice est nul, et que cette fonction devient nulle avec le second indice. En supposant ainsi qu'il ne manque qu'un point au joueur A, on trouve que sa probabilité est $\frac{1}{2}$,

$\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, ..., suivant qu'il manque à B un point, ou deux, ou trois, etc. Généralement, elle est alors égale à l'unité moins la puissance de $\frac{1}{2}$, égale au nombre des points qui manquent à B. On supposera ensuite qu'il manque deux points au joueur A, et l'on trouvera sa probabilité égale à $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{16}$, ..., suivant qu'il manque à B un point, ou deux, ou trois, etc. On supposera encore qu'il manque trois points au joueur A, et ainsi de suite.

Cette manière d'obtenir les valeurs successives d'une quantité au moyen de son équation aux différences est longue et pénible. Les géomètres ont cherché des méthodes pour avoir la fonction générale des indices qui satisfait à cette équation, en sorte que l'on n'ait besoin, pour chaque cas particulier, que de substituer dans cette fonction les valeurs correspondantes des indices. Considérons cet objet d'une manière générale. Pour cela, concevons une suite de termes disposés sur une ligne horizontale, et tels que chacun d'eux dérive des précédents suivant une loi donnée. Supposons cette loi exprimée par une équation entre plusieurs termes consécutifs et leur indice ou le nombre qui indique le rang qu'ils occupent dans la série. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies à un seul indice*. L'ordre ou le degré de cette équation est la différence du rang de ses deux termes extrêmes. On peut, à son moyen, déterminer successivement les termes de la série et la continuer indéfiniment; mais il faut pour cela connaître un nombre de termes de la série égal au degré de l'équation. Ces termes sont les constantes arbitraires de l'expression du terme général de la série, ou de l'intégrale de l'équation aux différences.

Concevons maintenant, au-dessus des termes de la série précédente, une seconde série de termes disposés horizontalement; concevons encore, au-dessus des termes de la seconde série, une troisième série horizontale, et ainsi de suite à l'infini, et supposons les termes de toutes ces séries, liés par une équation générale entre plusieurs termes consécutifs, pris tant dans le sens horizontal que dans le sens vertical, et les nombres qui indiquent leur rang dans les deux sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à deux indices*.

Concevons pareillement, au-dessus du plan des séries précédentes, un second plan de séries semblables, dont les termes soient placés respectivement au-dessus de ceux du premier plan; concevons ensuite, au-dessus de ce second plan, un troisième plan de séries semblables, et ainsi à l'infini; supposons tous les termes de ces séries liés par une équation entre plusieurs termes consécutifs, pris dans les sens de la longueur, de la largeur et de la profondeur, et les trois nombres qui indiquent leur rang dans ces trois sens. Cette équation est ce que je nomme *équation aux différences finies partielles à trois indices*.

Enfin, en considérant la chose, d'une manière abstraite et indépendante des dimensions de l'espace, concevons généralement un système de grandeurs qui soient fonctions d'un nombre quelconque d'indices, et supposons, entre ces grandeurs, leurs différences relatives à ces indices et les indices eux-mêmes, autant d'équations qu'il y a de ces grandeurs : ces équations seront aux différences finies partielles à un nombre quelconque d'indices.

On peut, à leur moyen, déterminer successivement ces grandeurs. Mais de même que l'équation à un seul indice exige pour cela que l'on connaisse un certain nombre de termes de la série, de même l'équation à deux indices exige que l'on connaisse une ou plusieurs lignes de séries dont les termes généraux puissent être exprimés chacun par une fonction arbitraire d'un des indices. Pareillement, l'équation à trois indices exige que l'on connaisse un ou plusieurs plans de séries dont les termes généraux puissent être exprimés chacun par une fonction arbitraire de deux indices, ainsi de suite. Dans tous ces cas, on pourra, par des éliminations successives, déterminer un terme quelconque des séries. Mais toutes les équations entre lesquelles on élimine étant comprises dans un même système d'équations, toutes les expressions des termes successifs que l'on obtient par ces éliminations doivent être comprises dans une expression générale, fonction des indices qui déterminent le rang du terme. Cette expression est l'intégrale de l'équation proposée aux différences, et sa recherche est l'objet du Calcul intégral.

Taylor est le premier qui, dans son Ouvrage intitulé *Methodus incre-*

mentorum, ait considéré les équations linéaires aux différences finies. Il y donne la manière d'intégrer celles du premier ordre, avec un coefficient et un dernier terme, fonctions de l'indice. A la vérité, les relations des termes des progressions arithmétiques et géométriques que l'on a considérées de tout temps sont les cas les plus simples des équations linéaires aux différences; mais on ne les avait pas envisagées sous ce point de vue, l'un de ceux qui, se rattachant à des théories générales, conduisent à ces théories, et sont par là de véritables découvertes.

Vers le même temps, Moivre considéra sous la dénomination de *suites récurrentes* les équations aux différences finies d'un ordre quelconque, à coefficients constants. Il parvint à les intégrer d'une manière très ingénieuse. Comme il est toujours intéressant de suivre la marche des inventeurs, je vais exposer celle de Moivre, en l'appliquant à une suite récurrente dont la relation entre trois termes consécutifs est donnée. D'abord, il considère la relation entre les termes consécutifs d'une progression géométrique, ou l'équation à deux termes qui l'exprime. En la rapportant aux termes inférieurs d'une unité, il la multiplie dans cet état par un facteur constant, et il retranche le produit de l'équation primitive. Par là, il obtient une équation entre trois termes consécutifs de la progression géométrique. Moivre considère ensuite une seconde progression dont la raison des termes est le facteur même qu'il vient d'employer. Il diminue pareillement d'une unité l'indice des termes de l'équation de cette nouvelle progression; dans cet état, il la multiplie par la raison des termes de la première progression, et il retranche le produit de l'équation de la seconde progression, ce qui lui donne entre trois termes consécutifs de cette progression une relation entièrement semblable à celle qu'il a trouvée pour la première progression. Puis il observe que, si l'on ajoute terme à terme les deux progressions, la même relation subsiste entre trois quelconques de ces sommes consécutives. Il compare les coefficients de cette relation à ceux de la relation des termes de la suite récurrente proposée, et il trouve, pour déterminer les rapports des deux progressions géométriques, une équation du second degré dont les racines sont ces rapports. Par là, Moivre décompose la suite récurrente en deux progressions géométriques, multipliées chacune par une constante arbitraire, qu'il détermine au moyen des deux premiers termes de la suite récurrente. Ce procédé ingénieux est au fond celui que d'Alembert a depuis employé pour l'intégration des équations linéaires aux différences infiniment petites à coefficients constants, et que Lagrange a transporté aux équations semblables à différences finies.

Ensuite, j'ai considéré les équations linéaires aux différences partielles finies, d'abord sous la dénomination de *suites récurro-récurrentes*, et après, sous leur dénomination propre. La manière la plus générale et la plus simple d'intégrer toutes ces équations me paraît être celle que j'ai fondée sur la considération des fonctions génératrices, dont voici l'idée.

Si l'on conçoit une fonction A, d'une variable t, développée dans une série ascendante par rapport aux puissances de cette variable, le coefficient de l'une quelconque de ces puissances sera une fonction de l'exposant ou indice de cette puissance. A est ce que je nomme *fonction génératrice* de ce coefficient ou de la fonction de l'indice.

Maintenant, si l'on multiplie la série A par une fonction linéaire de la même variable t, telle, par exemple, que l'unité plus deux fois cette variable, le produit sera une nouvelle fonction génératrice, dans laquelle le coefficient d'une puissance quelconque de la variable sera égal au coefficient de la même puissance dans A, plus au double du coefficient de la puissance inférieure d'une unité. Ainsi la fonction de l'indice, dans le produit, égalera la fonction de l'indice dans A, plus le double de cette même fonction dans laquelle l'indice est diminué de l'unité. Cette fonction de l'indice dans le développement du produit est ainsi une dérivée de la fonction de l'indice dans A, dérivée que l'on peut exprimer par une caractéristique δ placée devant cette dernière fonction. La dérivation indiquée par la caractéristique dépend du multiplicateur de A, que nous désignerons par B et que nous supposerons développé, comme A, par rapport aux puissances de la variable t.

Si l'on multiplie de nouveau par B le produit de A par B, ce qui revient à multiplier A par le carré de B, on formera une troisième fonction génératrice, dans laquelle le coefficient d'une puissance quelconque de t sera une dérivée semblable du coefficient correspondant du produit précédent; on pourra donc l'exprimer par la même caractéristique δ, placée devant la dérivée précédente, et alors cette caractéristique sera deux fois écrite devant le coefficient correspondant de la série A. Mais, au lieu de l'écrire ainsi deux fois, on lui donne pour exposant le nombre deux.

En continuant ainsi, on voit généralement que, si l'on multiplie A par la puissance n de B, on aura le coefficient d'une puissance quelconque de la variable t dans le produit en plaçant devant le coefficient correspondant de A la caractéristique δ avec n pour exposant.

Supposons que B soit l'unité divisée par t; alors, dans le produit de A par B, le coefficient d'une puissance de cette variable sera le coefficient d'une puissance supérieure d'une unité dans A, d'où il suit que, dans le produit de A par la puissance n de B, ce coefficient sera celui de la puissance supérieure de n unités dans A.

Désignons par C l'unité divisée par la variable t, moins un; alors, dans le produit de A par C, le coefficient d'une puissance de la variable sera le coefficient de sa puissance supérieure d'une unité dans la série A, moins le coefficient de cette puissance dans la même série; il sera donc la différence finie de ce dernier coefficient dans lequel on fait varier l'indice de l'unité. Ainsi, dans le produit de A par la puissance n de C, le coefficient sera la différence $n^{\text{ième}}$ du coefficient correspondant de A.

B étant ici égal à l'unité plus C, la puissance n de B est identiquement égale à la même puissance du binôme un plus C. En multipliant donc par A ces deux puissances, les deux produits seront identiques. Or, dans le produit de A par la puissance n de B, le coefficient d'une puissance quelconque de la variable t est, comme on l'a vu, le coefficient de la puissance supérieure de n unités dans A; il est donc la fonction de l'indice augmenté du nombre n. Dans le produit de A par le développement du binôme un plus C, on aura, par ce qui précède, les coefficients correspondants en écrivant, au lieu des produits de A par les puissances successives de C, les différences successives de la fonction de l'indice dans A, et en multipliant par cette fonction le terme indépendant de C. On aura donc une fonction quelconque de l'indice augmentée de l'indéterminée n, exprimée par les coefficients de la puissance n du binôme un plus un, multipliés respectivement par la fonction elle-même et par ses différences successives, ce qui donne l'interpolation des séries au moyen des différences de leurs termes consécutifs, en considérant l'indéterminée n comme fractionnaire.

L'équation identique B égale C plus un donne l'équation identique C égale B moins un. En élevant à la puissance n les deux membres de cette dernière égalité et multipliant par A ces deux puissances, dans le produit de A par la puissance n de C, le coefficient d'une puissance donnée de la variable t sera la différence finie $n^{\text{ième}}$ du coefficient de la même puissance dans A. Dans le produit de A par le développement de la puissance n du binôme B moins un, le coefficient de la puissance donnée de la variable sera la somme des termes de ce développement multipliés respectivement par les valeurs du coefficient de la même puissance dans A, lorsqu'on fait croître successivement l'indice de ce coefficient des quantités n, n moins un, n moins deux, etc., ce qui donne la différence finie $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de l'indice, au moyen des valeurs successives de cette fonction.

δ désignant la dérivée du coefficient d'une puissance donnée de la variable t dans A, relative au multiplicateur B, désignons par la caractéristique Δ la dérivée relative au multiplicateur C. Si dans l'équation B égale C plus un on substitue δ au lieu de B, et Δ au lieu de C, par ce qui précède, en élevant les deux membres de cette équation à la puissance n, il y aura toujours égalité, pourvu que dans chaque terme du développement on place le coefficient de la puissance donnée de la variable dans A, ou la fonction de l'indice, à la suite de chaque puissance des caractéristiques, et que l'on multiplie par cette fonction le terme indépendant des caractéristiques. La même chose a lieu dans l'équation C égale B moins un, et encore dans l'équation B moins C égale un. En substituant δ et Δ au lieu de B et de C, et élevant les deux membres de cette dernière équation à la puissance n, en développant ensuite le premier membre, l'égalité subsistera, pourvu que dans chaque terme on place la fonction de l'indice à la suite des puissances des caractéristiques δ et Δ et des produits de ces puissances, et que l'on écrive cette fonction au lieu de l'unité dans le second membre, ce qui donne une expression de cette fonction au moyen de ses valeurs successives et de ses différences.

Si l'on applique les mêmes considérations à d'autres valeurs des multiplicateurs B et C, on est conduit à ce résultat général : quelles que soient les fonctions de la variable t représentées par B et C, on peut, dans le développement de toutes les équations identiques qui peuvent être formées entre elles, substituer, au lieu de ces fonctions, les caractéristiques correspondantes δ et Δ, pourvu que l'on écrive la fonction de l'indice à la suite des puissances ou des produits de puissances des caractéristiques, et que l'on multiplie par cette fonction les termes indépendants des caractéristiques. En effet, il est visible que si, dans un terme quelconque du développement de l'équation entre B et C dont il s'agit, r est la puissance de B et r' celle de C, il faut, pour repasser des fonctions génératrices à leurs coefficients, écrire δ au lieu de B, Δ au lieu de C, et placer le produit des puissances r et r' de ces caractéristiques devant la fonction de l'indice.

On doit observer ici que les équations entre les caractéristiques sont identiques, comme les équations correspondantes entre B et C. Ainsi la fonction de l'indice augmenté de l'indéterminée n par une série de différences est identique avec cette série : elle n'est au fond que cette fonction transformée. Mais c'est dans ces transformations que résident le pouvoir de l'Analyse et ses avantages. Si, par exemple, la nature d'une question conduit à regarder comme nulle la différence troisième d'une fonction, alors la série précédente se termine, et devient la fonction de n qui satisfait à cette condition et qui, par conséquent, est l'intégrale de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro la troisième différence de la fonction. Cette intégrale renferme, comme constantes arbitraires, la fonction de l'indice et ses différences première et seconde, relatives au cas de n nul.

Concevons maintenant que A soit une fonction de deux variables t et t', développée dans une série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de puissances de ces variables ; le coefficient du produit de deux puissances quelconques sera une fonction des indices de ces puissances, dont A sera la fonction génératrice.

Multiplions A par une fonction B des deux variables t et t', développée par rapport aux puissances et aux produits de ces variables, telle, par exemple, que la première variable, plus la seconde, moins deux ; le produit sera une nouvelle fonction génératrice, dans laquelle le coefficient du produit de deux puissances quelconques n et n' des mêmes variables sera égal à ce même coefficient dans A, en y diminuant d'une unité l'indice n de la première variable, plus à ce même coefficient dans lequel on diminue d'une unité l'indice n' de la seconde variable, moins le double de ce coefficient. On pourra exprimer ce nouveau coefficient par une caractéristique δ placée devant le coefficient de A. On verra, comme ci-dessus, que le coefficient correspondant dans le produit de A par une puissance quelconque de B sera exprimé par cette caractéristique toujours placée devant le coefficient de A, et à laquelle on donne pour exposant celui de la puissance de B. De là résultent des théorèmes analogues à ceux qui sont relatifs aux fonctions d'une seule variable.

On pourra développer d'une manière semblable une fonction quelconque de deux indices augmentés respectivement des indéterminées n et n', dans une série ordonnée par rapport aux puissances d'une caractéristique : montrons-le par un exemple. Pour cela, conservons à B la valeur que nous venons de lui supposer. Dans ce cas, la première variable sera identiquement égale au trinôme deux moins la seconde variable plus B ; la première variable, élevée à la puissance n prise en moins, sera donc égale à ce trinôme élevé à la même puissance. Multiplions les deux membres de cette égalité par la série A divisée par la puissance n' de la seconde variable, et développons le second membre. En repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients, celui du produit de deux puissances données des variables dans le premier membre sera ce que devient le coefficient du même produit dans A, lorsqu'on augmente ses indices respectivement des indéterminées n et n'. Dans un terme quelconque du développement du second membre, le coefficient du même produit sera ce que ce terme devient en y substituant, au lieu de B, δ affecté du même exposant et placé devant le coefficient de A, dans lequel on diminue le second indice, de l'exposant de la seconde variable que l'on supprime. Chaque terme indépendant de B doit être multiplié par le coefficient de A, dans lequel le second indice est pareillement diminué de l'exposant de la seconde variable que l'on supprime encore. On aura ainsi une fonction des indices augmentés respectivement de n et de n', par une suite de puissances successives de δ placées devant la fonction dans laquelle le second indice sera seul variable.

Si la fonction des indices est telle que, affectée de la caractéristique δ, elle devienne nulle, alors le second membre se réduit à une suite de termes multipliés par la fonction des indices dont le second varie seul. Cette fonction est le développement du binôme deux moins un, élevé à la puissance n prise en moins, les termes successifs de ce développement devant être multipliés respectivement par la fonction des indices, dans laquelle on fait croître successivement le second indice des quantités n', n' moins un, n' moins deux, etc. En considérant donc comme fonction des deux indéterminées n et n' la fonction précédente, dans laquelle les indices sont augmentés de n et de n', cette fonction sera donnée par le développement du binôme deux moins un, élevé à la puissance n prise en moins, en multipliant respectivement les termes de ce développement par la même fonction dans laquelle on doit faire n nul, et n' successivement égal à n', n' moins un, n moins deux, etc. : la fonction de n nul et de n' est une fonction arbitraire de n', qui doit être déterminée par les conditions du problème.

Telle est donc l'intégrale de l'équation aux différences partielles, représentée par l'égalité à zéro de δ placé devant une fonction de n et de n', et il est clair que, pour cette égalité, la fonction des indices dans A doit être telle qu'en y diminuant l'indice n de l'unité, en l'ajoutant à cette fonction dans laquelle n' est diminué de l'unité et en retranchant de cette somme le double de la fonction elle-même, le reste soit nul ; ce qui donne la fonction de n et de n' égale à la moitié de cette fonction dans laquelle n est diminué de l'unité, plus à la moitié de la même fonction dans laquelle n' est diminué de l'unité. C'est l'équation aux différences partielles, représentée par la condition de δ nul.

Cette équation est celle à laquelle on est conduit par la considération du problème proposé par Pascal à Fermat, et dont nous avons parlé ci-dessus ; n et n' sont ici les coups qui manquent au premier et au second joueur pour gagner la partie, et la fonction de ces indices est la probabilité qu'elle sera gagnée par le premier joueur. Cette probabilité devient l'unité, lorsque n est nul, et jamais, n étant nul, n' ne peut être zéro ou négatif, en sorte qu'il faut rejeter de l'intégrale précédente tous les termes dans lesquels cela existe. De là il suit que la probabilité du premier joueur pour gagner la partie est égale aux n' premiers termes du binôme deux moins un, élevé à la puissance n prise en moins. Telle est la solution générale de ce problème.

De plus amples développements de la méthode que nous venons d'exposer seraient difficilement entendus sans le secours de l'Analyse. Nous observerons seulement que, A exprimant une fonction de la variable t, développée en série; B étant l'unité divisée par la variable, moins un, et C étant l'unité divisée par la puissance i de la variable, moins un; le produit de A par une puissance quelconque n de B sera la fonction génératrice des différences $n^{\text{ièmes}}$ des coefficients de la série A, l'indice variant de l'unité; le produit de A par une puissance n' de C sera la fonction génératrice des différences $n^{\text{ièmes}}$ des mêmes coefficients, l'indice variant de i. Ainsi, δ et Δ étant supposés être les caractéristiques correspondantes à B et à C, toutes les équations identiques que l'on peut former entre B et C donneront, en y changeant ces quantités dans leurs caractéristiques, autant d'équations identiques entre ces caractéristiques, pourvu que dans le développement de ces équations on place les puissances et les produits de puissances de ces caractéristiques devant la fonction de l'indice.

Si ce développement donne aux caractéristiques des exposants négatifs, elles indiqueront alors des intégrales finies. En effet, le produit de A par la puissance n de B étant la fonction génératrice des différences $n^{\text{ièmes}}$ des coefficients de A, ces coefficients sont les intégrales $n^{\text{ièmes}}$ des coefficients de la fonction génératrice que forme ce produit; d'où il suit qu'une fonction génératrice, multipliée par B élevé à la puissance n prise en moins, est la fonction génératrice des intégrales $n^{\text{ièmes}}$ des coefficients de cette fonction. Les puissances négatives de δ, placées devant ces coefficients, indiquent par conséquent des intégrales, ce qui donne la raison de l'analogie observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales.

Il est facile de voir que C est égal à la puissance i du binôme un plus B, en retranchant l'unité, de cette puissance. Si l'on élève à la puissance n les deux membres de cette égalité, elle subsistera toujours, quels que soient n et son signe; en changeant B et C dans leurs caractéristiques δ et Δ, et en observant que les caractéristiques négatives expriment des intégrales, on aura par le développement du second membre les différences et les intégrales dans lesquelles l'indice varie d'une quantité quelconque i, par une suite de différences et d'intégrales dans lesquelles l'indice varie de l'unité. Si l'on suppose i infiniment petit, les résultats subsisteront toujours et se simplifieront en rejetant les infiniment petits d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve. Ces passages du fini à l'infiniment petit ont l'avantage d'éclairer les points délicats de l'Analyse infinitésimale qui ont été l'objet de grandes discussions parmi les géomètres. C'est ainsi que j'ai démontré la possibilité d'introduire des fonctions discontinues dans les intégrales des équations aux différentielles partielles, pourvu que la discontinuité n'ait lieu que pour les différentielles des fonctions, de l'ordre de ces équations. Les résultats transcendants du calcul sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut connaître la véritable étendue qu'en remontant par l'analyse métaphysique aux idées élémentaires qui y ont conduit, ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant qu'à se replier sur lui-même.

Le passage du fini à l'infiniment petit répand un grand jour sur la métaphysique du Calcul différentiel. On voit clairement par ce passage que ce calcul n'est que la comparaison des coefficients des mêmes puissances des différentielles, dans le développement en série de fonctions identiquement égales des indices augmentés respectivement de différentielles indéterminées. Les quantités que l'on néglige comme infiniment petites d'un ordre supérieur à celui que l'on conserve, et qui semblent par cette omission ôter à ce calcul la rigueur de l'Algèbre, ne sont que des puissances de ces différentielles, supérieures aux puissances dont on compare les coefficients, et qui par là doivent être rejetées de cette comparaison, en sorte que le Calcul différentiel a toute l'exactitude des autres opérations algébriques. Mais dans ses applications à la Géométrie et à la Mécanique, il est indispensable d'introduire le principe des limites. Par exemple, la sous-tangente d'une courbe étant la limite géométrique de la sous-sécante, ou la ligne dont celle-ci approche sans cesse à mesure que les points d'intersection de la sécante avec la courbe se rapprochent, l'expression analytique de la sous-tangente doit être pareillement la limite de l'expression analytique de la sous-sécante; elle est par conséquent égale au premier terme de cette dernière expression développée suivant les puissances de l'intervalle qui sépare les ordonnées des deux points d'intersection.

On peut encore envisager la tangente comme la droite dont l'équation approche le plus de celle de la courbe près du point de contingence. L'ordonnée de cette courbe étant une fonction de l'abscisse, si à partir de ce point on fait croître l'abscisse d'une quantité indéterminée, suivant les puissances de laquelle la fonction soit développée, il est visible que la somme des deux premiers termes de ce développement sera l'ordonnée de la droite la plus approchante de la courbe; elle sera, conséquemment, l'ordonnée de la tangente, et le coefficient de l'indéterminée dans le second terme exprimera le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente. Il est facile de prouver par le principe des limites que toute autre droite menée par le point de contingence entrerait dans la courbe près de ce point.

Cette manière singulièrement heureuse de parvenir à l'expression des sous-tangentes est due à Fermat, qui l'a étendue aux courbes transcendantes. Ce grand géomètre exprime par la caractéristique E l'accroissement de l'abscisse, et en ne considérant que la première puissance de cet accroissement, il détermine, exactement comme on le fait par le Calcul différentiel, les sous-tangentes des courbes, leurs points d'inflexion, les maxima et minima de leurs ordonnées, et généralement ceux des fonctions rationnelles. On voit même par sa belle solution du problème de la réfraction de la lumière, insérée dans le Recueil des *Lettres de Descartes*, qu'il savait étendre sa méthode aux fonctions irrationnelles, en se débarrassant des irrationnalités par l'élévation des radicaux aux puissances. On doit donc regarder Fermat comme le véritable inventeur du Calcul différentiel. Newton a depuis rendu ce Calcul plus analytique dans sa méthode des Fluxions, et il en a simplifié et généralisé les procédés par son beau théorème du binôme. Enfin, presqu'en même temps, Leibnitz a enrichi le Calcul différentiel d'une notation qui, en indiquant le passage du fini à l'infiniment petit, réunit à l'avantage d'exprimer les résultats généraux de ce calcul celui de donner les premières valeurs approchées des différences et des sommes des quantités, notation qui s'est adaptée d'elle-même au calcul des différentielles partielles.

On est souvent conduit à des expressions qui contiennent tant de termes et de facteurs que les substitutions numériques y sont impraticables. C'est ce qui a lieu dans les questions de probabilité, lorsque l'on considère un grand nombre d'événements. Cependant il importe alors d'avoir la valeur numérique des formules, pour connaître avec quelle probabilité les résultats que les événements développent en se multipliant sont indiqués. Il importe surtout d'avoir la loi suivant laquelle cette probabilité approche sans cesse de la certitude qu'elle finirait par atteindre, si le nombre des événements devenait infini. Pour y parvenir, je considérai que les intégrales définies de différentielles, multipliées par des facteurs élevés à de grandes puissances, donnaient, par l'intégration, des formules composées d'un grand nombre de termes et de facteurs. Cette remarque me fit naître l'idée de transformer dans de semblables intégrales les expressions compliquées de l'Analyse et les intégrales des équations aux différences. J'ai rempli cet objet, par une méthode qui donne à la fois la fonction comprise sous le signe intégral et les limites de l'intégration. Elle offre cela de remarquable, savoir, que cette fonction est la fonction même génératrice des expressions et des équations proposées, ce qui rattache cette méthode à la théorie des fonctions génératrices, dont elle est ainsi le complément. Il ne s'agissait plus ensuite que de réduire l'intégrale définie en série convergente. C'est ce que j'ai obtenu par un procédé qui fait converger la série avec d'autant plus de rapidité que la formule qu'elle représente est plus compliquée, en sorte qu'il est d'autant plus exact qu'il devient plus nécessaire. Le plus souvent, la série a pour facteur la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre; quelquefois elle dépend d'autres transcendantes, dont le nombre est infini.

Une remarque importante, qui tient à la grande généralité de l'Analyse et qui permet d'étendre cette méthode aux formules et aux équations à différences que la théorie des probabilités présente le plus fréquemment, est que les séries auxquelles on parvient, en supposant réelles et positives les limites des intégrales définies, ont également lieu dans le cas où l'équation qui détermine ces limites n'a que des racines négatives ou imaginaires. Ces passages du positif au négatif et du réel à l'imaginaire, dont j'ai le premier fait usage, m'ont conduit encore aux valeurs de plusieurs intégrales définies singulières, que j'ai ensuite démontrées directement. On peut donc considérer ces passages comme un moyen de découverte, pareil à l'induction et à l'analogie, employées depuis longtemps par les géomètres, d'abord avec une extrême réserve, ensuite avec une entière confiance, un grand nombre d'exemples en ayant justifié l'emploi. Cependant il est toujours nécessaire de confirmer par des démonstrations directes les résultats obtenus par ces divers moyens.

J'ai nommé *Calcul des fonctions génératrices* l'ensemble des méthodes précédentes; ce calcul sert de fondement à l'Ouvrage que j'ai publié sous ce titre : *Théorie analytique des Probabilités*. Il se rattache à l'idée simple d'indiquer les multiplications répétées d'une quantité par elle-même ou ses puissances entières et positives, en écrivant vers le haut de la lettre qui l'exprime les nombres qui marquent les degrés de ces puissances. Cette notation, employée par Descartes dans sa Géométrie et généralement adoptée depuis la publication de cet important Ouvrage, est peu de chose, surtout quand on la compare à la théorie des courbes et des fonctions variables, par laquelle ce grand géomètre a posé les fondements des calculs modernes. Mais la langue de l'Analyse, la plus parfaite de toutes, étant par elle-même un puissant instrument de découvertes, ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont autant de germes de nouveaux calculs. C'est ce que cet exemple rend sensible.

Wallis, qui, dans son Ouvrage intitulé : *Arithmetica infinitorum*, l'un de ceux qui ont le plus contribué aux progrès de l'Analyse, s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, considéra que, si l'on divise l'exposant d'une lettre par deux, par trois, etc., le quotient sera, suivant la notation cartésienne et lorsque la division est possible, l'exposant de la racine carrée, cubique, etc., de la quantité que représente la lettre élevée à l'exposant dividende. En étendant, par analogie, ce résultat au cas où la division n'est pas possible, il considéra une quantité élevée à un exposant fractionnaire comme la racine du degré indiqué par le dénominateur de cette fraction de la quantité élevée à la puissance indiquée par le numérateur. Il observa ensuite que, suivant la notation cartésienne, la multiplication de deux puissances d'une même lettre revient à ajouter leurs exposants, et que leur division revient à soustraire l'exposant de la puissance diviseur de celui de la puissance dividende, lorsque le second de ces exposants surpasse le premier. Wallis étendit ce résultat au cas où le premier exposant égale ou surpasse le second, ce qui rend la différence nulle ou négative. Il supposa donc qu'un exposant négatif indique l'unité divisée par la quantité élevée au même exposant pris positivement. Ces remarques le conduisirent à intégrer généralement les différentielles monômes, d'où il conclut les intégrales définies d'un genre particulier de différentielles binômes dont l'exposant est un nombre entier positif. En observant ensuite la loi des nombres qui expriment ces intégrales, une série d'interpolations et d'inductions heureuses, où l'on aperçoit le germe du calcul des intégrales définies, qui a tant exercé les géomètres, et l'une des bases de ma nouvelle Théorie des Probabilités, lui donna le rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre, exprimé par un produit infini qui, lorsqu'on l'arrête, resserre ce rapport dans des limites de plus en plus rapprochées, résultat l'un des plus singuliers de l'Analyse. Mais il est remarquable que Wallis, qui avait si bien considéré les exposants fractionnaires des puissances radicales, ait continué de noter ces puissances comme on l'avait fait avant lui. Newton, si je ne me trompe, employa, le premier, dans ses Lettres à Oldenburg, la notation de ces puissances par des exposants fractionnaires. En comparant par la voie de l'induction, dont Wallis avait fait un si bel usage, les exposants des puissances du binôme avec les coefficients des termes de son développement dans le cas où cet exposant est entier et positif, il détermina la loi de ces coefficients, et il l'étendit, par analogie, aux puissances fractionnaires et négatives. Ces divers résultats, fondés sur la notation de Descartes, montrent son influence sur les progrès de l'Analyse. Elle a encore l'avantage de donner l'idée la plus simple et la plus juste des logarithmes, qui ne sont, en effet, que les exposants d'une grandeur dont les puissances successives, en croissant par degrés infiniment petits, peuvent représenter tous les nombres.

Mais l'extension la plus importante que cette notation ait reçue est celle des exposants variables, ce qui constitue le calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué, le premier, les transcendantes à exposants variables, et par là il a complété le système des éléments dont une fonction finie peut être composée; car toute fonction finie explicite d'une variable se réduit, en dernière analyse, à des grandeurs simples, combinées par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, et élevées à des puissances constantes ou variables. Les racines des équations formées de ces éléments sont des fonctions implicites de la variable. C'est ainsi qu'une variable ayant pour logarithme l'exposant de la puissance qui lui est égale dans la série des puissances du nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, le logarithme d'une variable en est une fonction implicite.

Leibnitz imagina de donner à sa caractéristique différentielle les mêmes exposants qu'aux grandeurs; mais alors ces exposants, au lieu d'indiquer les multiplications répétées d'une même grandeur, indiquent les différentiations répétées d'une même fonction. Cette extension nouvelle de la notation cartésienne conduisit Leibnitz à l'analogie des puissances positives avec les différentielles et des puissances négatives avec les intégrales. Lagrange a suivi cette analogie singulière dans tous ses développements, et par une suite d'inductions, qui peut être regardée comme l'une des plus belles applications que l'on ait faites de cette méthode, il est parvenu à des formules générales, aussi curieuses qu'utiles, sur les transformations des différences et des intégrales les unes dans les autres, lorsque les variables ont des accroissements finis divers et lorsque ces accroissements sont infiniment petits. Mais il n'en a point donné les démonstrations qu'il jugeait difficiles. La théorie des fonctions génératrices étend à des caractéristiques quelconques la notation cartésienne; elle montre avec évidence l'analogie des puissances et des opérations indiquées par ces caractéristiques, en sorte qu'elle peut encore être envisagée comme le calcul exponentiel des caractéristiques. Tout ce qui concerne les séries et l'intégration des équations aux différences en découle avec une extrême facilité.

APPLICATIONS DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Des jeux.

Les combinaisons que les jeux présentent ont été l'objet des premières recherches sur les probabilités. Dans l'infinie variété de ces combinaisons, plusieurs d'entre elles se prêtent avec facilité au calcul ; d'autres exigent des calculs plus difficiles, et les difficultés croissant à mesure que les combinaisons deviennent plus compliquées, le désir de les surmonter et la curiosité ont excité les géomètres à perfectionner de plus en plus ce genre d'analyse. On a vu précédemment que l'on pouvait facilement déterminer par la théorie des combinaisons les bénéfices d'une loterie. Mais il est plus difficile de savoir en combien de tirages on peut parier un contre un, par exemple, que tous les numéros seront sortis. n étant le nombre des numéros, r celui des numéros sortants à chaque tirage, et i le nombre inconnu de tirages, l'expression de la probabilité de la sortie de tous les numéros dépend de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de la puissance i d'un produit de r nombres consécutifs. Lorsque le nombre n est considérable, la recherche de la valeur de i, qui rend cette probabilité égale à $\frac{1}{2}$, devient impossible, à moins qu'on ne convertisse cette différence dans une série très convergente. C'est ce que l'on fait heureusement par la méthode ci-dessus indiquée pour les approximations des fonctions de très grands nombres. On trouve ainsi que, la loterie étant composée de dix mille numéros dont un seul sort à chaque tirage, il y a du désavantage à parier un contre un que tous les numéros sortiront dans 95767 tirages, et de l'avantage à faire le même pari pour 95768 tirages. A la loterie de France, ce pari est désavantageux pour 85 tirages, et avantageux pour 86 tirages.

Considérons encore deux joueurs A et B jouant ensemble à *croix ou pile*, de manière qu'à chaque coup, si *croix* arrive, A donne un jeton à B qui lui en donne un, si *pile* arrive : le nombre des jetons de B est limité, celui des jetons de A est illimité, et la partie ne doit finir que lorsque B n'aura plus de jetons. On demande en combien de coups on peut parier un contre un que la partie sera terminée. L'expression de la probabilité que la partie sera terminée dans un nombre i de coups est donnée par une suite qui renferme un grand nombre de termes et de facteurs, si le nombre des jetons de B est considérable; la recherche de la valeur de l'inconnue i qui rend cette suite égale à $\frac{1}{2}$ serait donc alors impossible, si l'on ne parvenait pas à réduire la suite dans une série très convergente. En lui appliquant la méthode dont on vient de parler, on trouve une expression fort simple de l'inconnue, de laquelle il résulte que si, par exemple, B a cent jetons, il y a un peu moins d'un contre un à parier que la partie sera finie en 23780 coups, et un peu plus d'un contre un à parier qu'elle sera finie dans 23781 coups.

Ces deux exemples, joints à ceux que nous avons déjà donnés, suffisent pour faire voir comment les problèmes sur les jeux ont pu contribuer à la perfection de l'Analyse.

Des inégalités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales.

Les inégalités de ce genre ont sur les résultats du Calcul des Probabilités une influence sensible, qui mérite une attention particulière. Considérons le jeu de *croix ou pile,* et supposons qu'il soit également facile d'amener l'une ou l'autre face de la pièce. Alors la probabilité d'amener *croix* au premier coup est $\frac{1}{2}$, et celle de l'amener deux fois de suite est $\frac{1}{4}$. Mais s'il existe dans la pièce une inégalité qui fasse paraître une des faces plutôt que l'autre, sans que l'on connaisse quelle est la face favorisée par cette inégalité, la probabilité d'amener *croix* au premier coup sera toujours $\frac{1}{2}$, parce que, dans l'ignorance où l'on est de la face que cette inégalité favorise, autant la probabilité de l'événement simple est augmentée, si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée, si l'inégalité lui est contraire. Mais, dans cette ignorance même, la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite est augmentée.

En effet, cette probabilité est celle d'amener *croix* au premier coup, multipliée par la probabilité que, l'ayant amené au premier coup, on l'amènera au second; or son arrivée au premier coup est un motif de croire que l'inégalité de la pièce le favorise; l'inégalité inconnue augmente donc alors la probabilité d'amener *croix* au second coup; elle accroît par conséquent le produit des deux probabilités. Pour soumettre cet objet au calcul, supposons que cette inégalité augmente d'un vingtième la probabilité de l'événement simple qu'elle favorise. Si cet événement est *croix*, sa probabilité sera $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{20}$ ou $\frac{11}{20}$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera le carré de $\frac{11}{20}$ ou $\frac{121}{400}$. Si l'événement favorisé est *pile*, la probabilité de *croix* sera $\frac{1}{2}$ moins $\frac{1}{20}$ ou $\frac{9}{20}$, et la probabilité de l'amener deux fois de suite sera $\frac{81}{400}$. Comme on n'a d'avance aucune raison de croire que l'inégalité favorise l'un de ces événements plutôt que l'autre, il est clair que, pour avoir la probabilité de l'événement composé *croix croix*, il faut ajouter les deux probabilités précédentes et prendre la moitié de leur somme, ce qui donne $\frac{101}{400}$ pour cette probabilité, qui surpasse $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{400}$ ou du carré de l'accroissement $\frac{1}{20}$ que l'inégalité ajoute à la possibilité de l'événement qu'elle favorise. La probabilité d'amener *pile pile* est pareillement $\frac{101}{400}$; mais les probabilités d'amener *croix pile* ou *pile croix* ne sont chacune que $\frac{99}{400}$; car la somme de ces quatre probabilités doit égaler la certitude ou l'unité. On trouve ainsi généralement que les causes constantes et inconnues qui favorisent les événements simples que l'on juge également possibles accroissent toujours la probabilité de la répétition d'un même événement simple.

Dans un nombre pair de coups, *croix* et *pile* doivent arriver tous deux, ou un nombre pair ou un nombre impair de fois. La probabilité de chacun de ces cas est $\frac{1}{2}$ si les possibilités des deux faces sont égales; mais s'il existe entre elles une inégalité inconnue, cette inégalité est toujours favorable au premier cas.

Deux joueurs, dont on suppose les adresses égales, jouent avec les conditions qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie dure jusqu'à ce que l'un des joueurs n'ait plus de jetons. Le Calcul des Probabilités nous montre que, pour l'égalité du jeu, les mises des joueurs doivent être en raison inverse de leurs jetons. Mais s'il existe entre leurs adresses une petite inégalité inconnue, elle favorise celui des joueurs qui a le plus petit nombre de jetons. Sa probabilité de gagner la partie augmente, si les joueurs conviennent de doubler, de tripler leurs jetons, et elle serait $\frac{1}{2}$ ou la même que la probabilité de l'autre joueur, dans le cas où les nombres de leurs jetons deviendraient infinis, en conservant toujours le même rapport.

On peut corriger l'influence de ces inégalités inconnues en les soumettant elles-mêmes aux chances du hasard. Ainsi au jeu de *croix* ou *pile,* si l'on a une seconde pièce que l'on projette chaque fois avec la première et que l'on convienne de nommer constamment *croix* la face amenée par cette seconde pièce, la probabilité d'amener *croix* deux fois de suite avec la première pièce approchera beaucoup plus d'un quart que dans le cas d'une seule pièce. Dans ce dernier cas, la différence est le carré du petit accroissement de possibilité que l'inégalité inconnue donne à la face de la première pièce qu'elle favorise ; dans l'autre cas, cette différence est le quadruple produit de ce carré par le carré correspondant relatif à la seconde pièce.

Que l'on jette dans une urne cent numéros depuis un jusqu'à cent, dans l'ordre de la numération, et qu'après avoir agité l'urne pour mêler ces numéros on en tire un, il est clair que, si le mélange a été bien fait, les probabilités de sortie des numéros seront les mêmes. Mais si l'on craint qu'il n'y ait entre elles de petites différences dépendantes de l'ordre suivant lequel les numéros ont été jetés dans l'urne, on diminuera considérablement ces différences en jetant dans une seconde urne ces numéros suivant leur ordre de sortie de la première urne et en agitant ensuite cette seconde urne pour mêler ces numéros. Une troisième urne, une quatrième, etc. diminueraient de plus en plus ces différences, déjà insensibles dans la seconde urne.

Des lois de la Probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événements.

Au milieu des causes variables et inconnues que nous comprenons sous le nom de *hasard*, et qui rendent incertaine et irrégulière la marche des événements, on voit naître, à mesure qu'ils se multiplient, une régularité frappante, qui semble tenir à un dessein et que l'on a considérée comme une preuve de la providence. Mais, en y réfléchissant, on reconnaît bientôt que cette régularité n'est que le développement des possibilités respectives des événements simples, qui doivent se présenter plus souvent lorsqu'ils sont plus probables. Concevons, par exemple, une urne qui renferme des boules blanches et des boules noires, et supposons qu'à chaque fois que l'on en tire une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage. Le rapport du nombre des boules blanches extraites au nombre des boules noires extraites sera le plus souvent très irrégulier dans les premiers tirages; mais les causes variables de cette irrégularité produisent des effets alternativement favorables et contraires à la marche régulière des événements, et qui, se détruisant mutuellement dans l'ensemble d'un grand nombre de tirages, laissent de plus en plus apercevoir le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne, ou les possibilités respectives d'en extraire une boule blanche ou une boule noire à chaque tirage. De là résulte le théorème suivant :

La probabilité que le rapport du nombre des boules blanches extraites au nombre total des boules sorties ne s'écarte pas au delà d'un intervalle donné du rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules contenues dans l'urne, approche indéfiniment de la certitude par la multiplication indéfinie des événements, quelque petit que l'on suppose cet intervalle.

Ce théorème, indiqué par le bon sens, était difficile à démontrer par l'Analyse. Aussi l'illustre géomètre Jacques Bernoulli, qui s'en est occupé le premier, attachait-il une grande importance à la démonstration qu'il en a donnée. Le calcul des fonctions génératrices, appliqué à cet objet, non seulement démontre avec facilité ce théorème, mais, de plus, il donne la probabilité que le rapport des événements observés ne s'écarte que dans certaines limites du vrai rapport de leurs possibilités respectives.

On peut tirer du théorème précédent cette conséquence, qui doit être regardée comme une loi générale, savoir, que les rapports des effets de la nature sont à fort peu près constants, quand ces effets sont considérés en grand nombre. Ainsi, malgré la variété des années, la somme des productions, pendant un nombre d'années considérable, est sensiblement la même; en sorte que l'homme, par une utile prévoyance, peut se mettre à l'abri de l'irrégularité des saisons, en répandant également sur tous les temps les biens que la nature distribue d'une manière inégale. Je n'excepte pas de la loi précédente les effets dus aux causes morales. Le rapport des naissances annuelles à la population et celui des mariages aux naissances n'éprouvent que de très petites variations; à Paris, le nombre des naissances annuelles est à peu près le même, et j'ai ouï dire qu'à la poste, dans les temps ordinaires, le nombre des lettres mises au rebut par les défauts des adresses change peu chaque année, ce qui a été pareillement observé à Londres.

Il suit encore de ce théorème que, dans une série d'événements indéfiniment prolongée, l'action des causes régulières et constantes doit l'emporter à la longue sur celle des causes irrégulières. C'est ce qui rend les gains des loteries aussi certains que les produits de l'Agriculture, les chances qu'elles se réservent leur assurant un bénéfice dans l'ensemble d'un grand nombre de mises. Ainsi, des chances favorables et nombreuses étant constamment attachées à l'observation des principes éternels de raison, de justice et d'humanité qui fondent et maintiennent les sociétés, il y a un grand avantage à se conformer à ces principes et de graves inconvénients à s'en écarter. Que l'on consulte les histoires et sa propre expérience; on y verra tous les faits venir à l'appui de ce résultat du calcul. Considérez les heureux effets des institutions fondées sur la raison et sur les droits naturels de l'homme, chez les peuples qui ont su les établir et les conserver. Considérez encore les avantages que la bonne foi a procurés aux gouvernements qui en ont fait la base de leur conduite, et comme ils ont été dédommagés des sacrifices qu'une scrupuleuse exactitude à tenir ses engagements leur a coûté. Quel immense crédit au dedans! quelle prépondérance au dehors! Voyez, au contraire, dans quel abîme de malheurs les peuples ont été souvent précipités par l'ambition et par la perfidie de leurs chefs. Toutes les fois qu'une grande puissance, enivrée de l'amour des conquêtes, aspire à la domination universelle, le sentiment de l'indépendance produit entre les nations menacées une coalition, dont elle devient presque toujours la victime. Pareillement, au milieu des causes variables qui étendent ou qui resserrent les divers États, les limites naturelles, en agissant comme causes constantes, doivent finir par prévaloir. Il importe donc à la stabilité comme au bonheur des empires de ne pas les étendre au delà de ces limites dans lesquelles ils sont ramenés sans cesse par l'action de ces causes, ainsi que les eaux des mers, soulevées par de violentes tempêtes, retombent dans leurs bassins par la pesanteur. C'est encore un résultat du Calcul des Probabilités, confirmé par de nombreuses et funestes expériences. L'histoire, traitée sous le point de vue de l'influence des causes constantes, unirait à l'intérêt de la curiosité celui d'offrir aux hommes les plus utiles leçons. Quelquefois on attribue les effets inévitables de ces causes à des circonstances accidentelles qui n'ont fait que développer leur action. Il est, par exemple, contre la nature des choses qu'un peuple soit à jamais gouverné par un autre qu'une vaste mer ou une grande distance en sépare. On peut affirmer qu'à la longue cette cause constante, se joignant sans cesse aux causes variables qui agissent dans le même sens et que la suite des temps développe, finira par en trouver d'assez fortes pour rendre au peuple soumis son indépendance naturelle, ou pour le réunir à un état puissant qui lui soit contigu.

Dans un grand nombre de cas, et ce sont les plus importants de l'Analyse des hasards, les possibilités des événements simples sont inconnues, et nous sommes réduits à chercher dans les événements passés des indices qui puissent nous guider dans nos conjectures sur les causes dont ils dépendent. En appliquant l'analyse des fonctions génératrices au principe, exposé ci-devant, sur la probabilité des causes tirée des événements observés, on est conduit au théorème suivant :

Lorsqu'un événement simple, ou composé de plusieurs événements simples, tel qu'une partie de jeu, a été répété un grand nombre de fois, les possibilités des événements simples, qui rendent ce que l'on a observé le plus probable, sont celles que l'observation indique avec le plus de vraisemblance; à mesure que l'événement observé se répète, cette vraisemblance augmente, et finirait par se confondre avec la certitude, si le nombre des répétitions devenait infini.

Il y a ici deux sortes d'approximations : l'une d'elles est relative aux limites prises de part et d'autre des possibilités qui donnent au passé le plus de vraisemblance; l'autre approximation se rapporte à la probabilité que ces possibilités tombent dans ces limites. La répétition de l'événement composé accroît de plus en plus cette probabilité, les limites restant les mêmes; elle resserre de plus en plus l'intervalle de ces limites, la probabilité restant la même; dans l'infini, cet intervalle devient nul, et la probabilité se change en certitude.

Si l'on applique ce théorème au rapport des naissances des garçons à celles des filles, observé dans les diverses contrées de l'Europe, on trouve que ce rapport, partout à peu près égal à celui de 22 à 21, indique avec une extrême probabilité une plus grande facilité dans les naissances des garçons. En considérant ensuite qu'il est le même à Naples et à Pétersbourg, on verra qu'à cet égard l'influence du climat est insensible. On pouvait donc soupçonner, contre l'opinion commune, que cette supériorité des naissances masculines subsiste dans l'Orient même. J'avais en conséquence invité les savants français envoyés en Égypte à s'occuper de cette question intéressante; mais la difficulté d'obtenir des renseignements précis sur les naissances ne leur a pas permis de la résoudre. Heureusement, Humboldt n'a point négligé cet objet dans l'immensité des choses nouvelles qu'il a observées et recueillies en Amérique, avec tant de sagacité, de constance et de courage. Il a retrouvé entre les tropiques le même rapport des naissances des garçons à celles des filles que l'on observe à Paris, ce qui doit faire regarder la supériorité des naissances masculines comme une loi générale de l'espèce humaine. Les lois que suivent à cet égard les diverses espèces d'animaux me paraissent dignes de l'attention des naturalistes.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles différant très peu de l'unité, des nombres même assez grands de naissances observées dans un lieu pourraient offrir à cet égard un résultat contraire à la loi générale, sans que l'on fût en droit d'en conclure que cette loi n'y existe pas. Pour tirer cette conséquence, il faut employer de très grands nombres et s'assurer qu'elle est indiquée avec une grande probabilité. Buffon cite, par exemple, dans son Arithmétique politique, plusieurs communes de Bourgogne où les naissances des filles ont surpassé celles des garçons. Parmi ces communes, celle de Carcelle-le-Grignon présente sur 2009 naissances, pendant cinq années, 1026 filles et 983 garçons. Quoique ces nombres soient considérables, cependant ils n'indiquent une plus grande possibilité dans les naissances des filles qu'avec la probabilité $\frac{9}{10}$, et cette probabilité, plus petite que celle de ne pas amener *croix* quatre fois de suite au jeu de *croix* ou *pile*, n'est pas suffisante pour rechercher la cause de cette anomalie, qui, selon toute vraisemblance, disparaîtrait si l'on suivait pendant un siècle les naissances dans cette commune.

Les registres des naissances, que l'on tient avec soin pour assurer l'état des citoyens, peuvent servir à déterminer la population d'un grand empire, sans recourir au dénombrement de ses habitants, opération pénible et difficile à faire avec exactitude. Mais il faut pour cela connaître le rapport de la population aux naissances annuelles. Le moyen d'y parvenir le plus précis consiste : 1° à choisir, dans l'empire, des départements distribués d'une manière à peu près égale sur toute sa surface, afin de rendre le résultat général indépendant des circonstances locales; 2° à dénombrer avec soin, pour une époque donnée, les habitants de plusieurs communes dans chacun de ces départements; 3° à déterminer, par le relevé des naissances durant plusieurs années qui précèdent et suivent cette époque, le nombre moyen correspondant des naissances annuelles. Ce nombre, divisé par celui des habitants, donnera le rapport des naissances annuelles à la population, d'une manière d'autant plus sûre que le dénombrement sera plus considérable. Le gouvernement, convaincu de l'utilité d'un semblable dénombrement, a bien voulu en ordonner l'exécution, à ma prière. Dans trente départements répandus également sur toute la France, on a fait choix des communes qui pouvaient fournir les renseignements les plus précis. Leurs dénombrements ont donné 2037615 individus pour la somme totale de leurs habitants au 23 septembre 1802. Le relevé des naissances dans ces communes, pendant les années 1800, 1801 et 1802, a donné :

Naissances.	Mariages.	Décès.
110312 garçons.	46037.	103659 hommes.
105287 filles.		99443 femmes.

Le rapport de la population aux naissances annuelles est donc $28\frac{352845}{1000000}$; il est plus grand qu'on ne l'avait estimé jusqu'ici. En multipliant par ce rapport le nombre des naissances annuelles en France, on aura la population de ce royaume. Mais quelle est la probabilité que la population ainsi déterminée ne s'écartera pas de la véritable au delà d'une limite donnée? En résolvant ce problème, et appliquant à sa solution les données précédentes, j'ai trouvé que le nombre des naissances annuelles en France étant supposé d'un million, ce qui porte sa population à 28352845 habitants, il y a près de trois cent mille à parier contre un que l'erreur de ce résultat n'est pas d'un demi-million.

Le rapport des naissances des garçons à celles des filles, qu'offre le relevé précédent, est celui de 22 à 21, et les mariages sont aux naissances comme 3 est à 14.

A Paris, les baptêmes des enfants des deux sexes s'écartent un peu du rapport de 22 à 21. Depuis 1745, époque à laquelle on a commencé à distinguer les sexes sur les registres des naissances, jusqu'à la fin de 1784, on a baptisé dans cette capitale 393386 garçons et 377555 filles. Le rapport de ces deux nombres est à peu près celui de 25 à 24; il paraît donc qu'à Paris une cause particulière rapproche de l'égalité les baptêmes des deux sexes. Si l'on applique à cet objet le Calcul des Probabilités, on trouve qu'il y a deux cent trente-huit à parier contre un en faveur de l'existence de cette cause, ce qui suffit pour en autoriser la recherche. En y réfléchissant, il m'a paru que la différence observée tient à ce que les parents de la campagne et des provinces, trouvant quelque avantage à retenir près d'eux les garçons, en avaient envoyé à l'hospice des Enfants-Trouvés de Paris, moins relativement aux filles que suivant le rapport des naissances des deux sexes. C'est ce que le relevé des registres de cet hospice m'a prouvé. Depuis le commencement de 1745 jusqu'à la fin de 1809, il y est entré 163499 garçons et 159405 filles. Le premier de ces nombres n'excède que d'un trente-huitième le second, qu'il aurait dû surpasser au moins d'un vingt-quatrième. Ce qui confirme l'existence de la cause assignée, c'est qu'en n'ayant point égard aux enfants trouvés, le rapport des naissances des garçons à celles des filles est à Paris, comme dans le reste de la France, celui de 22 à 21.

La constance de la supériorité des naissances des garçons sur celles des filles à Paris et à Londres, depuis qu'on les observe, a paru à quelques savants être une preuve de la providence, sans laquelle ils ont pensé que les causes irrégulières qui troublent sans cesse la marche des événements auraient dû plusieurs fois rendre les naissances annuelles des filles supérieures à celles des garçons.

Mais cette preuve est un nouvel exemple de l'abus que l'on a fait si souvent des causes finales, qui disparaissent toujours par un examen approfondi des questions, lorsqu'on a les données nécessaires pour les résoudre. La constance dont il s'agit est un résultat des causes régulières qui donnent la supériorité aux naissances des garçons, et qui l'emportent sur les anomalies dues au hasard, lorsque le nombre des naissances annuelles est considérable. La recherche de la probabilité que cette constance se maintiendra pendant un long espace de temps appartient à cette branche de l'Analyse des hasards qui remonte des événements passés à la probabilité des événements futurs, et il en résulte que, en partant des naissances observées depuis 1745 jusqu'en 1784, il y a près de quatre à parier contre un qu'à Paris les naissances annuelles des garçons surpasseront constamment pendant un siècle les naissances des filles; il n'y a donc aucune raison de s'étonner que cela ait eu lieu pendant un demi-siècle.

Donnons encore un exemple du développement des rapports constants que les événements présentent, à mesure qu'ils se multiplient. Concevons une série d'urnes disposées circulairement, et renfermant chacune un très grand nombre de boules blanches et noires, les rapports des boules blanches aux noires, dans ces urnes, pouvant être très différents à l'origine, et tels, par exemple, que l'une de ces urnes ne renferme que des boules blanches, tandis qu'une autre ne contient que des boules noires. Si l'on tire une boule de la première urne pour la mettre dans la seconde; que, après avoir agité cette seconde urne, afin de bien mêler la boule ajoutée avec les autres, on en tire une boule pour la mettre dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'à la dernière urne dont on extrait une boule pour la mettre dans la première, et que l'on recommence indéfiniment cette série de tirages; l'Analyse des Probabilités nous montre que les rapports des boules blanches aux noires, dans ces urnes, finiront par être les mêmes et égaux au rapport de la somme de toutes les boules blanches à la somme de toutes les boules noires contenues dans les urnes. Ainsi, par ce mode régulier de changement, l'irrégularité primitive de ces rapports disparaît à la longue pour faire place à l'ordre le plus simple. Maintenant si, entre ces urnes, on en intercale de nouvelles dans lesquelles le rapport de la somme des boules blanches à la somme des boules noires qu'elles contiennent diffère du précédent, en continuant indéfiniment sur l'ensemble de ces urnes les extractions que nous venons d'indiquer, l'ordre simple établi dans les anciennes urnes sera d'abord troublé, et les rapports des boules blanches aux boules noires deviendront irréguliers; mais peu à peu cette irrégularité disparaîtra pour faire place à un nouvel ordre, qui sera enfin celui de l'égalité des rapports des boules blanches aux boules noires contenues dans les urnes. On peut étendre ces résultats à toutes les combinaisons de la nature, dans lesquelles les forces constantes dont leurs éléments sont animés établissent des modes réguliers d'action, propres à faire éclore du sein même du chaos des systèmes régis par des lois admirables.

Les phénomènes qui semblent le plus dépendre du hasard présentent donc, en se multipliant, une tendance à se rapprocher sans cesse de rapports fixes, de manière que, si l'on conçoit de part et d'autre de chacun de ces rapports un intervalle aussi petit que l'on voudra, la probabilité que le résultat moyen des observations tombe dans cet intervalle finira par ne différer de la certitude que d'une quantité au-dessous de toute grandeur assignable. On peut ainsi, par le Calcul des Probabilités, appliqué à un grand nombre d'observations, reconnaître l'existence de ces rapports. Mais, avant que d'en rechercher les causes, il est nécessaire, pour ne point s'égarer dans de vaines spéculations, de s'assurer qu'ils sont indiqués avec une probabilité qui ne permet point de les regarder comme des anomalies dues au hasard. La théorie des fonctions génératrices donne une expression très simple de cette probabilité, que l'on obtient en intégrant le produit de la différentielle de la quantité dont le résultat, déduit d'un grand nombre d'observations, s'écarte de la vérité, par une constante moindre que l'unité, dépendante de la nature du problème et élevée à une puissance dont l'exposant est le rapport du carré de cet écart au nombre des observations. L'intégrale prise entre des limites données et divisée par la même intégrale étendue à l'infini positif et négatif exprimera la probabilité que l'écart de la vérité est compris entre ces limites. Telle est la loi générale de la probabilité des résultats indiqués par un grand nombre d'observations.

Application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle.

Les phénomènes de la nature sont le plus souvent enveloppés de tant de circonstances étrangères, un si grand nombre de causes perturbatrices y mêlent leur influence qu'il est très difficile de les reconnaître. On ne peut y parvenir qu'en multipliant les observations ou les expériences, afin que, les effets étrangers venant à se détruire réciproquement, les résultats moyens mettent en évidence ces phénomènes et leurs éléments divers. Plus les observations sont nombreuses et moins elles s'écartent entre elles, plus leurs résultats approchent de la vérité. On remplit cette dernière condition par le choix des méthodes d'observation, par la précision des instruments et par le soin que l'on met à bien observer; ensuite on détermine par la théorie des probabilités les résultats moyens les plus avantageux ou ceux qui donnent le moins de prise à l'erreur. Mais cela ne suffit pas : il est, de plus, nécessaire d'apprécier la probabilité que les erreurs de ces résultats sont comprises dans des limites données; sans cela, on n'a qu'une connaissance imparfaite du degré d'exactitude obtenu. Des formules propres à ces objets sont donc un vrai perfectionnement de la méthode des sciences, et qu'il est bien important d'ajouter à cette méthode. L'analyse qu'elles exigent est la plus délicate et la plus difficile de la théorie des probabilités; c'est un des principaux objets de l'ouvrage que j'ai publié sur cette théorie, et dans lequel je suis parvenu à des formules de ce genre, qui ont l'avantage remarquable d'être indépendantes de la loi de probabilité des erreurs, et de ne renfermer que des quantités données par les observations mêmes et par leurs expressions.

Chaque observation a pour expression analytique une fonction des éléments que l'on veut déterminer, et si ces éléments sont à peu près connus, cette fonction devient une fonction linéaire de leurs corrections. En l'égalant à l'observation même, on forme ce que l'on nomme *équation de condition*. Si l'on a un grand nombre d'équations semblables, on les combine de manière à obtenir autant d'équations finales qu'il y a d'éléments, dont on détermine ensuite les corrections, en résolvant ces équations. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition pour obtenir les équations finales? Quelle est la loi de probabilité des erreurs dont les éléments que l'on en tire sont encore susceptibles? C'est ce que la Théorie des Probabilités fait connaître. La formation d'une équation finale au moyen des équations de condition revient à multiplier chacune de celles-ci par un facteur indéterminé et à réunir ces produits : il faut donc choisir le système de facteurs qui donne la plus petite erreur à craindre. Or il est visible que, si l'on multiplie les erreurs possibles d'un élément par leurs probabilités respectives, le système le plus avantageux sera celui dans lequel la somme de ces produits, tous pris positivement, est un minimum; car une erreur positive ou négative doit être considérée comme une perte. En formant donc cette somme de produits, la condition du minimum déterminera le système de facteurs qu'il convient d'adopter, ou le système le plus avantageux. On trouve ainsi que ce système est celui des coefficients des éléments dans chaque équation de condition, en sorte que l'on forme une première équation finale en multipliant respectivement chaque équation de condition par son coefficient du premier élément et en réunissant toutes ces équations ainsi multipliées. On forme une seconde équation finale, en employant de même les coefficients du second élément, et ainsi de suite. De cette manière, les éléments et les lois des phénomènes, renfermés dans le recueil d'un grand nombre d'observations, se développent avec le plus d'évidence.

La probabilité des erreurs que chaque élément laisse encore à craindre est proportionnelle au nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, élevé à une puissance égale au carré de l'erreur, pris en moins, et multiplié par un coefficient constant qui peut être considéré comme le module de la probabilité des erreurs, parce que, l'erreur restant la même, sa probabilité décroît avec rapidité quand il augmente, en sorte que l'élément obtenu pèse, si je puis ainsi dire, vers la vérité d'autant plus que ce module est plus grand. Je nommerai, par cette raison, ce module *poids* de l'élément ou du résultat. Ce poids est le plus grand possible dans le système de facteurs le plus avantageux; c'est ce qui donne à ce système la supériorité sur les autres. Par une analogie remarquable de ce poids avec ceux des corps comparés à leur centre commun de gravité, il arrive que, si un même élément est donné par divers systèmes, composés chacun d'un grand nombre d'observations, le résultat moyen le plus avantageux de leur ensemble est la somme des produits de chaque résultat partiel par son poids, cette somme étant divisée par celle de tous les poids. De plus, le poids total du résultat des divers systèmes est la somme de leurs poids partiels, en sorte que la probabilité des erreurs du résultat moyen de leur ensemble est proportionnelle au nombre qui a l'unité pour logarithme hyperbolique, élevé à une puissance égale au carré de l'erreur pris en moins et multiplié par la somme de tous les poids. Chaque poids dépend, à la vérité, de la loi de probabilité des erreurs de chaque système, et presque toujours cette loi est inconnue; mais je suis heureusement parvenu à éliminer le facteur qui la renferme, au moyen de la somme des carrés des écarts des observations du système, de leur résultat moyen. Il serait donc à désirer, pour compléter nos connaissances sur les résultats obtenus par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, qu'on écrivît à côté de chaque résultat le poids qui lui correspond; l'Analyse fournit pour cet objet des méthodes générales et simples. Quand on a ainsi obtenu l'exponentielle qui représente la loi de probabilité des erreurs, on aura la probabilité que l'erreur du résultat est comprise dans des limites données, en prenant dans ces limites l'intégrale du produit de cette exponentielle par la différentielle de l'erreur, et en la multipliant par la racine carrée du poids du résultat, divisé par la circonférence dont le diamètre est l'unité. De là il suit que, pour une même probabilité, les erreurs des résultats sont réciproques aux racines carrées de leurs poids, ce qui peut servir à comparer leurs précisions respectives.

Pour appliquer cette méthode avec succès, il faut varier les circonstances des observations ou des expériences, de manière à éviter les causes constantes d'erreur. Il faut que les observations soient nombreuses, et qu'elles le soient d'autant plus qu'il y a plus d'éléments à déterminer; car le poids du résultat moyen croît comme le nombre des observations, divisé par le nombre des éléments. Il est encore nécessaire que les éléments suivent dans ces observations une marche différente; car, si la marche de deux éléments était rigoureusement la même, ce qui rendrait leurs coefficients proportionnels dans les équations de condition, ces éléments ne formeraient qu'une seule inconnue, et il serait impossible de les distinguer par ces observations. Enfin il faut que les observations soient précises : cette condition, la première de toutes, augmente beaucoup le poids du résultat, dont l'expression a pour diviseur la somme des carrés des écarts des observations de ce résultat. Avec ces précautions, on pourra faire usage de la méthode précédente et mesurer le degré de confiance que méritent les résultats déduits d'un grand nombre d'observations.

La règle que nous venons de donner pour conclure des équations de condition les équations finales revient à rendre un minimum la somme des carrés des erreurs des observations; car chaque équation de condition devient rigoureuse, en y substituant l'observation plus son erreur; et, si l'on en tire l'expression de cette erreur, il est facile de voir que la condition du minimum de la somme des carrés de ces expressions donne la règle dont il s'agit. Cette règle est d'autant plus précise que les observations sont plus nombreuses; mais, dans le cas même où leur nombre est petit, il paraît naturel d'employer la même règle, qui, dans tous les cas, offre un moyen simple d'obtenir sans tâtonnements les corrections que l'on cherche à déterminer. Elle peut servir encore à comparer la précision de diverses Tables astronomiques d'un même astre. Ces Tables peuvent toujours être supposées réduites à la même forme, et alors elles ne diffèrent que par les époques, les moyens mouvements et les coefficients des arguments; car, si l'une d'elles contient un argument qui ne se trouve point dans les autres, il est clair que cela revient à supposer nul, dans celles-ci, le coefficient de cet argument. Si maintenant on rectifiait ces Tables par la totalité des bonnes observations, elles satisferaient à la condition que la somme des carrés des erreurs soit un minimum; les Tables qui, comparées à un nombre considérable d'observations, approchent le plus de cette condition méritent donc la préférence.

C'est principalement dans l'Astronomie que la méthode exposée ci-dessus peut être employée avec avantage. Les Tables astronomiques doivent l'exactitude vraiment étonnante qu'elles ont atteinte à la précision des observations et des théories et à l'usage des équations de condition, qui font concourir un grand nombre d'excellentes observations à la correction d'un même élément. Mais il restait à déterminer la probabilité des erreurs que cette correction laisse encore à craindre : c'est ce que la méthode que je viens d'exposer fait connaître. Pour en donner quelques applications intéressantes, j'ai profité de l'immense travail que Bouvard vient de terminer sur les mouvements de Jupiter et de Saturne, dont il a construit des Tables très précises. Il a discuté avec le plus grand soin les oppositions et les quadratures de ces deux planètes, observées par Bradley et par les astronomes qui l'ont suivi, jusqu'à ces dernières années; il en a conclu les corrections des éléments de leur mouvement et leurs masses comparées à celle du Soleil, prise pour unité. Ses calculs lui donnent la masse de Saturne égale à la 3512^e partie de celle du Soleil. En leur appliquant mes formules de probabilité, je trouve qu'il y a onze mille à parier contre un que l'erreur de ce résultat n'est pas un centième de sa valeur, ou, ce qui revient à très peu près au même, qu'après un siècle de nouvelles observations ajoutées aux précédentes et discutées de la même manière, le nouveau résultat ne différera pas d'un centième de celui de Bouvard. Ce savant astronome trouve encore la masse de Jupiter égale à la 1071^e partie du Soleil, et ma méthode de probabilité donne un million à parier contre un que ce résultat n'est pas d'un centième en erreur.

Cette méthode peut être encore appliquée avec succès aux opérations géodésiques. On détermine la longueur d'un grand arc à la surface de la Terre par une chaîne de triangles qui s'appuient sur une base mesurée avec exactitude. Mais quelque précision que l'on apporte dans la mesure des angles, les erreurs inévitables peuvent, en s'accumulant, écarter sensiblement de la vérité la valeur de l'arc que l'on a conclu d'un grand nombre de triangles. On ne connaît donc qu'imparfaitement cette valeur, si l'on ne peut pas assigner la probabilité que son erreur est comprise dans des limites données. L'erreur d'un résultat géodésique est une fonction des erreurs des angles de chaque triangle. J'ai donné, dans l'Ouvrage cité, des formules générales pour avoir la probabilité des valeurs d'une ou de plusieurs fonctions linéaires d'un grand nombre d'erreurs partielles dont on connaît la loi de probabilité; on peut donc, au moyen de ces formules, déterminer la probabilité que l'erreur d'un résultat géodésique est contenue dans des limites assignées, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs partielles. Il est d'autant plus nécessaire de se rendre indépendant de cette loi que les lois les plus simples sont toujours infiniment peu probables, vu le nombre infini de celles qui peuvent exister dans la nature. Mais la loi inconnue des erreurs partielles introduit dans les formules une indéterminée, qui ne permettrait point de les réduire en nombres, si l'on ne parvenait pas à l'éliminer. On a vu que, dans les questions astronomiques, où chaque observation fournit une équation de condition pour avoir les éléments, on élimine cette indéterminée au moyen de la somme des carrés des restes, lorsqu'on a substitué dans chaque équation les valeurs les plus probables des éléments. Les questions géodésiques n'offrant point de semblables équations, il faut chercher un autre moyen d'élimination. La quantité dont la somme des angles de chaque triangle observé surpasse deux angles droits plus l'excès sphérique fournit ce moyen. Ainsi l'on remplace par la somme des carrés de ces quantités la somme des carrés des restes des équations de condition, et l'on peut assigner en nombres la probabilité que l'erreur du résultat final d'une suite d'opérations géodésiques n'excède pas une quantité donnée. Mais quelle est la manière la plus avantageuse de répartir entre les trois angles de chaque triangle la somme observée de leurs erreurs? L'Analyse des Probabilités fait voir que chaque angle doit être diminué du tiers de cette somme, pour que le poids d'un résultat géodésique soit le plus grand qu'il est possible, ce qui rend une même erreur moins probable. Il y a donc beaucoup d'avantage à observer les trois angles de chaque triangle et à les corriger comme on vient de le dire. Le simple bon sens fait pressentir cet avantage; mais le Calcul des Probabilités peut seul l'apprécier et faire voir que, par cette correction, il devient le plus grand qu'il est possible.

Pour s'assurer de l'exactitude de la valeur d'un grand arc qui s'appuie sur une base mesurée à l'une de ses extrémités, on mesure une seconde base vers l'autre extrémité, et l'on conclut de l'une de ces bases la longueur de l'autre. Si cette longueur s'écarte très peu de l'observation, il y a tout lieu de croire que la chaîne des triangles qui unit ces bases est exacte à fort peu près, ainsi que la valeur du grand arc qui en résulte. On corrige ensuite cette valeur, en modifiant les angles des triangles de manière que les bases calculées s'accordent avec les bases mesurées. Mais cela peut se faire d'une infinité de manières, parmi lesquelles on doit préférer celle dont le résultat géodésique a le plus grand poids, puisque la même erreur devient moins probable. L'Analyse des Probabilités donne des formules pour avoir directement la correction la plus avantageuse qui résulte des mesures de plusieurs bases et les lois de probabilité que fait naître la multiplicité des bases, lois qui deviennent plus rapidement décroissantes par cette multiplicité.

Généralement, les erreurs des résultats déduits d'un grand nombre d'observations sont des fonctions linéaires des erreurs partielles de chaque observation. Les coefficients de ces fonctions dépendent de la nature du problème et du procédé suivi pour obtenir les résultats. Le procédé le plus avantageux est évidemment celui dans lequel une même erreur dans les résultats est moins probable que suivant tout autre procédé. L'application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle consiste donc à déterminer analytiquement la probabilité des valeurs de ces fonctions, et à choisir leurs coefficients indéterminés de manière que la loi de cette probabilité soit le plus rapidement décroissante. En éliminant ensuite des formules, par les données de la question, le facteur qu'introduit la loi, presque toujours inconnue, de la probabilité des erreurs partielles, on pourra évaluer numériquement la probabilité que les erreurs des résultats n'excèdent pas une quantité donnée. On aura ainsi tout ce que l'on peut désirer touchant les résultats déduits d'un grand nombre d'observations.

On peut encore obtenir des résultats fort approchés par d'autres considérations. Supposons, par exemple, que l'on ait mille et une observations d'une même grandeur. La moyenne arithmétique de toutes ces observations est le résultat donné par la méthode la plus avantageuse. Mais on pourrait choisir le résultat d'après la condition que la somme de ses écarts de chaque valeur partielle, pris tous positivement, soit un minimum. Il paraît, en effet, naturel de regarder comme très approché le résultat qui satisfait à cette condition. Il est facile de voir que, si l'on dispose les valeurs données par les observations suivant l'ordre de grandeur, la valeur qui occupera le milieu remplira la condition précédente, et le calcul fait voir que, dans le cas d'un nombre infini d'observations, elle coïnciderait avec la vérité. Mais le résultat donné par la méthode la plus avantageuse est encore préférable.

La considération des probabilités peut servir à démêler les petites inégalités des mouvements célestes, enveloppées dans les erreurs des observations, et à remonter à la cause des anomalies observées dans ces mouvements. Ce fut en comparant entre elles toutes ses observations que Tycho Brahe reconnut la nécessité d'appliquer à la Lune une équation du temps différente de celle que l'on appliquait au Soleil et aux planètes. Ce fut pareillement l'ensemble d'un grand nombre d'observations qui fit connaître à Mayer que le coefficient de l'inégalité de la précession doit être un peu diminué pour la Lune. Mais, comme cette diminution, quoique confirmée et même augmentée par Mason, ne paraissait pas résulter de la gravitation universelle, la plupart des astronomes la négligèrent dans leurs calculs. Ayant soumis au Calcul des Probabilités un nombre considérable d'observations lunaires, choisies dans cette vue, et que Bouvard voulut bien discuter à ma prière, elle me parut indiquée avec une probabilité si forte que je crus devoir en rechercher la cause. Je vis bientôt qu'elle ne pouvait être que l'ellipticité du sphéroïde terrestre, négligée jusqu'alors dans la théorie du mouvement lunaire, comme ne devant y produire que des termes insensibles. J'en conclus que ces termes deviennent sensibles par les intégrations successives des équations différentielles. Je déterminai donc ces termes par une analyse particulière, et je découvris d'abord l'inégalité du mouvement lunaire en latitude, qui est proportionnelle au sinus de la longitude de la Lune et qu'aucun astronome n'avait encore soupçonnée. Je reconnus ensuite, au moyen de cette inégalité, qu'il en existe une autre dans le mouvement lunaire en longitude, qui produit la diminution observée par Mayer dans l'équation de la précession, applicable à la Lune. La quantité de cette diminution et le coefficient de l'inégalité précédente en latitude sont très propres à fixer l'aplatissement de la Terre. Ayant fait part de mes recherches à Bürg, qui s'occupait alors à perfectionner les Tables de la Lune par la comparaison de toutes les bonnes observations, je le priai de déterminer avec un soin particulier ces deux quantités. Par un accord très remarquable, les valeurs qu'il a trouvées donnent à la Terre le même aplatissement, $\frac{1}{305}$, aplatissement qui diffère peu du milieu conclu des mesures des degrés du méridien et du pendule, mais qui, vu l'influence des erreurs des observations et des causes perturbatrices sur ces mesures, me paraît plus exactement déterminé par ces inégalités lunaires.

Ce fut encore par la considération des probabilités que je reconnus la cause de l'équation séculaire de la Lune. Les observations modernes de cet astre, comparées aux anciennes éclipses, avaient indiqué aux astronomes une accélération dans le mouvement lunaire; mais les géomètres, et particulièrement Lagrange, ayant inutilement cherché, dans les perturbations que ce mouvement éprouve, les termes dont cette accélération dépend, ils la rejetèrent. Un examen attentif des observations anciennes et modernes et des éclipses intermédiaires observées par les Arabes me fit voir qu'elle était indiquée avec une grande probabilité. Je repris alors sous ce point de vue la théorie lunaire, et je reconnus que l'équation séculaire de la Lune est due à l'action du Soleil sur ce satellite, combinée avec la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre; ce qui me fit découvrir les équations séculaires des mouvements des nœuds et du périgée de l'orbite lunaire, équations qui n'avaient pas même été soupçonnées par les astronomes. L'accord très remarquable de cette théorie avec toutes les observations anciennes et modernes l'a portée au plus haut degré d'évidence.

Le Calcul des Probabilités m'a conduit pareillement à la cause des grandes irrégularités de Jupiter et de Saturne. En comparant les observations modernes aux anciennes, Halley trouva une accélération dans le mouvement de Jupiter et un ralentissement dans celui de Saturne. Pour concilier les observations, il assujettit ces mouvements à deux équations séculaires de signes contraires, et croissantes comme les carrés des temps écoulés depuis 1700. Euler et Lagrange soumirent à l'Analyse les altérations que devait produire dans ces mouvements l'attraction mutuelle des deux planètes. Ils y trouvèrent des équations séculaires; mais leurs résultats étaient si différents que l'un deux au moins devait être erroné. Je me déterminai donc à reprendre ce problème important de la Mécanique céleste, et je reconnus l'invariabilité des moyens mouvements planétaires, ce qui fit disparaître les équations séculaires introduites par Halley dans les Tables de Jupiter et de Saturne. Il ne restait ainsi, pour expliquer les grandes irrégularités de ces planètes, que les attractions des comètes, auxquelles plusieurs astronomes eurent effectivement recours, ou l'existence d'une inégalité à longue période, produite dans les mouvements des deux planètes par leur action réciproque et affectée de signes contraires pour chacune d'elles. Un théorème que je trouvai sur les inégalités de ce genre me rendit cette inégalité très vraisemblable. Suivant ce théorème, si le mouvement de Jupiter s'accélère, celui de Saturne se ralentit, ce qui est déjà conforme à ce que Halley avait remarqué; de plus l'accélération de Jupiter, résultant du même théorème, est au ralentissement de Saturne à très peu près dans le rapport des équations séculaires proposées par Halley. En considérant les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne, il me fut aisé de reconnaître que deux fois celui de Jupiter ne surpasse que d'une très petite quantité, cinq fois celui de

Saturne. La période d'une inégalité qui aurait cet argument serait d'environ neuf siècles. A la vérité, son coefficient serait de l'ordre des cubes des excentricités des orbites; mais je savais qu'en vertu des intégrations successives, il acquiert pour diviseur le carré du très petit multiplicateur du temps dans l'argument de cette inégalité, ce qui peut lui donner une grande valeur; l'existence de cette inégalité me parut donc très probable. La remarque suivante accrut encore sa probabilité. En supposant son argument nul vers l'époque des observations de Tycho Brahe, je vis que Halley avait dû trouver, par la comparaison des observations modernes aux anciennes, les altérations qu'il avait indiquées, tandis que la comparaison des observations modernes entre elles devait offrir des altérations contraires et pareilles à celles que Lambert avait conclues de cette comparaison. Je n'hésitai donc point à entreprendre le calcul long et pénible, nécessaire pour m'assurer de l'existence de cette inégalité. Elle fut entièrement confirmée par le résultat de ce calcul, qui, de plus, me fit connaître un grand nombre d'autres inégalités dont l'ensemble a porté les Tables de Jupiter et de Saturne à la précision des observations mêmes.

Ce fut encore au moyen du Calcul des Probabilités que je reconnus la loi remarquable des mouvements moyens des trois premiers satellites de Jupiter, suivant laquelle la longitude moyenne du premier, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est rigoureusement égale à la demi-circonférence. L'approximation avec laquelle les moyens mouvements de ces astres satisfont à cette loi depuis leur découverte indiquait son existence avec une vraisemblance extrême; j'en cherchai donc la cause dans leur action mutuelle. L'examen approfondi de cette action me fit voir qu'il a suffi qu'à l'origine les rapports de leurs moyens mouvements aient approché de cette loi, dans certaines limites, pour que leur action mutuelle l'ait établie et la maintienne en rigueur. Ainsi ces trois corps se balanceront éternellement dans l'espace suivant la loi précédente, à moins que des causes étrangères, telles que les comètes, ne viennent changer brusquement leurs mouvements autour de Jupiter.

On voit par là combien il faut être attentif aux indications de la nature, lorsqu'elles sont le résultat d'un grand nombre d'observations, quoique d'ailleurs elles soient inexplicables par les moyens connus. L'extrême difficulté des problèmes relatifs au Système du monde a forcé les géomètres de recourir à des approximations qui laissent toujours à craindre que les quantités négligées n'aient une influence sensible. Lorsqu'ils ont été avertis de cette influence par les observations, ils sont revenus sur leur analyse; en la rectifiant, ils ont toujours retrouvé la cause des anomalies observées; ils en ont déterminé les lois, et souvent ils ont devancé l'observation, en découvrant des inégalités qu'elle n'avait pas encore indiquées. Ainsi l'on peut dire que la nature elle-même a concouru à la perfection analytique des théories fondées sur le principe de la pesanteur universelle, et c'est, à mon sens, une des plus fortes preuves de la vérité de ce principe admirable.

L'un des phénomènes les plus remarquables du Système du monde est celui de tous les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites dans le sens de la rotation du Soleil et à peu près dans le plan de son équateur. Un phénomène aussi remarquable n'est point l'effet du hasard; il indique une cause générale qui a déterminé tous ces mouvements. Pour avoir la probabilité avec laquelle cette cause est indiquée, nous observerons que le système planétaire, tel que nous le connaissons aujourd'hui, est composé de onze planètes et de dix-huit satellites, du moins si l'on attribue, avec Herschel, six satellites à la planète Uranus. On a reconnu les mouvements de rotation du Soleil, de six planètes, de la Lune, des satellites de Jupiter, de l'anneau de Saturne et d'un de ses satellites. Ces mouvements forment, avec ceux de révolution, un ensemble de quarante-trois mouvements dirigés dans le même sens; or on trouve, par l'Analyse des Probabilités, qu'il y a plus de quatre mille milliards à parier contre un que cette disposition n'est pas l'effet du hasard, ce qui forme une probabilité bien supérieure à celle des événements historiques sur lesquels on ne se permet aucun doute. Nous devons donc croire, au moins avec la même confiance, qu'une cause primitive a dirigé les mouvements planétaires, surtout si nous considérons que l'inclinaison du plus grand nombre de ces mouvements à l'équateur solaire est fort petite.

Un autre phénomène également remarquable du système solaire est le peu d'excentricité des orbes des planètes et des satellites, tandis que ceux des comètes sont très allongés, les orbes de ce système n'offrant point de nuances intermédiaires entre une grande et une petite excentricité. Nous sommes encore forcés de reconnaître ici l'effet d'une cause régulière; le hasard n'eût point donné une forme presque circulaire aux orbes de toutes les planètes et de leurs satellites; il est donc nécessaire que la cause qui a déterminé les mouvements de ces corps les ait rendus presque circulaires. Il faut encore que les grandes excentricités des orbes des comètes résultent de l'existence de cette cause, sans qu'elle ait influé sur les directions de leurs mouvements; car on trouve qu'il y a presque autant de comètes rétrogrades que de comètes directes, et que l'inclinaison moyenne de tous leurs orbes à l'écliptique approche très près d'un demi-angle droit, comme cela doit être si ces corps ont été lancés au hasard.

Quelle que soit la nature de la cause dont il s'agit, puisqu'elle a produit ou dirigé les mouvements des planètes, il faut qu'elle ait embrassé tous ces corps, et, vu les distances qui les séparent, elle ne peut avoir été qu'un fluide d'une immense étendue; pour leur avoir donné, dans le même sens, un mouvement presque circulaire autour du Soleil, il faut que ce fluide ait environné cet astre comme une atmosphère. La considération des mouvements planétaires nous conduit donc à penser qu'en vertu d'une chaleur excessive, l'atmosphère du Soleil s'est primitivement étendue au delà des orbes de toutes les planètes, et qu'elle s'est resserrée successivement jusqu'à ses limites actuelles.

Dans l'état primitif où nous supposons le Soleil, il ressemblait aux nébuleuses que le télescope nous montre composées d'un noyau plus ou moins brillant, entouré d'une nébulosité qui, en se condensant à la surface du noyau, doit le transformer, un jour, en étoile. Si l'on conçoit, par analogie, toutes les étoiles formées de cette manière, on peut imaginer leur état antérieur de nébulosité précédé lui-même par d'autres états dans lesquels la matière nébuleuse était de plus en plus diffuse, le noyau étant de moins en moins lumineux et dense. On arrive ainsi, en remontant aussi loin qu'il est possible, à une nébulosité tellement diffuse que l'on pourrait à peine en soupçonner l'existence.

Tel est, en effet, le premier état des nébuleuses que Herschel a observées avec un soin particulier au moyen de ses puissants télescopes, et dans lesquelles il a suivi les progrès de la condensation, non sur une seule, ces progrès ne pouvant devenir sensibles pour nous qu'après des siècles, mais sur leur ensemble, à peu près comme on peut, dans une vaste forêt, suivre l'accroissement des arbres sur les individus de divers âges qu'elle renferme. Il a d'abord observé la matière nébuleuse répandue en amas divers, dans les différentes parties du ciel dont elle occupe une grande étendue. Il a vu, dans quelques-uns de ces amas, cette matière faiblement condensée autour d'un ou de plusieurs noyaux peu brillants. Dans d'autres nébuleuses, ces noyaux brillent davantage relativement à la nébulosité qui les environne. Les atmosphères de chaque noyau venant à se séparer par une condensation ultérieure, il en résulte des nébuleuses multiples formées de noyaux brillants très voisins et environnés chacun d'une atmosphère; quelquefois la matière nébuleuse, en se condensant d'une manière uniforme, a produit les nébuleuses que l'on nomme *planétaires*. Enfin un plus grand degré de condensation transforme toutes ces nébuleuses en étoiles. Les nébuleuses, classées d'après cette vue philosophique, indiquent avec une extrême vraisemblance leur transformation future en étoiles et l'état antérieur de nébulosité des étoiles existantes. Les considérations suivantes viennent à l'appui des preuves tirées de ces analogies.

Depuis longtemps la disposition particulière de quelques étoiles visibles à la vue simple a frappé des observateurs philosophes. Mitchell a déjà remarqué combien il est peu probable que les étoiles des Pléiades, par exemple, aient été resserrées dans l'espace étroit qui les renferme par les seules chances du hasard, et il en a conclu que ce groupe d'étoiles et les groupes semblables que le ciel nous présente sont les effets d'une cause primitive ou d'une loi générale de la nature. Ces groupes sont un résultat nécessaire de la condensation des nébuleuses à plusieurs noyaux; car il est visible que, la matière nébuleuse étant sans cesse attirée par ces noyaux divers, ils doivent former à la longue un groupe d'étoiles, pareil à celui des Pléiades. La condensation des nébuleuses à deux noyaux forme semblablement des étoiles très rapprochées tournant l'une autour de l'autre, pareilles à celles dont Herschel a déjà considéré les mouvements respectifs. Telles sont encore la soixante-unième du Cygne et sa suivante, dans lesquelles Bessel vient de reconnaître des mouvements propres, si considérables et si peu différents, que la proximité de ces astres entre eux et leur mouvement autour de leur centre commun de gravité ne doivent laisser aucun doute. Ainsi l'on descend par les progrès de condensation de la matière nébuleuse à la considération du Soleil environné autrefois d'une vaste atmosphère, considération à laquelle on remonte, comme on l'a vu, par l'examen des phénomènes du système solaire. Une rencontre aussi remarquable donne à l'existence de cet état antérieur du Soleil une probabilité fort approchante de la certitude.

Mais comment l'atmosphère solaire a-t-elle déterminé les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites? Si ces corps avaient pénétré profondément dans cette atmosphère, sa résistance les aurait fait tomber sur le Soleil; on est donc conduit à croire, avec beaucoup de vraisemblance, que les planètes ont été formées aux limites successives de l'atmosphère solaire, qui, en se resserrant par le refroidissement, a dû abandonner dans le plan de son équateur des zones de vapeurs que l'attraction mutuelle de leurs molécules a changées en divers sphéroïdes.

J'ai développé avec étendue, dans mon *Exposition du Système du monde*, cette hypothèse qui me paraît satisfaire à tous les phénomènes que ce système nous présente.

Dans cette hypothèse, les comètes sont étrangères au système planétaire. En rattachant leur formation à celle des nébuleuses, on peut les regarder comme de petites nébuleuses à noyaux, errantes de systèmes en systèmes solaires et formées par la condensation de la matière nébuleuse répandue avec tant de profusion dans l'univers. Les comètes seraient ainsi, par rapport à notre système, ce que les aérolithes sont relativement à la Terre, à laquelle ils paraissent étrangers. Lorsque ces astres deviennent visibles pour nous, ils offrent une ressemblance si parfaite avec les nébuleuses, qu'on les confond souvent avec elles, et ce n'est que par leur mouvement ou par la connaissance de toutes les nébuleuses renfermées dans la partie du ciel où ils se montrent, qu'on parvient à les en distinguer. Cette supposition explique d'une manière heureuse la grande extension que prennent les têtes et les queues des comètes, à mesure qu'elles approchent du Soleil, et l'extrême rareté de ces queues qui, malgré leur immense profondeur, n'affaiblissent point sensiblement l'éclat des étoiles que l'on voit à travers.

Lorsque de petites nébuleuses parviennent dans la partie de l'espace où l'attraction du Soleil est prédominante, et que nous nommerons *sphère d'activité* de cet astre, il les force à décrire des orbes elliptiques ou hyperboliques. Mais leur vitesse étant également possible suivant toutes les directions, elles doivent se mouvoir indifféremment dans tous les sens et sous toutes les inclinaisons à l'écliptique, ce qui est conforme à ce qu'on observe.

La grande excentricité des orbes cométaires résulte encore de l'hypothèse précédente. En effet, si ces orbes sont elliptiques, ils sont très allongés, puisque leurs grands axes sont au moins égaux au rayon de la sphère d'activité du Soleil. Mais ces orbes peuvent être hyperboliques, et si les axes de ces hyperboles ne sont pas très grands par rapport à la moyenne distance du Soleil à la Terre, le mouvement des comètes qui les décrivent paraîtra sensiblement hyperbolique. Cependant, sur cent comètes dont on a déjà les éléments, aucune n'a paru certainement se mouvoir dans une hyperbole ; il faut donc que les chances qui donnent une hyperbole sensible soient extrêmement rares par rapport aux chances contraires.

Les comètes sont si petites que, pour devenir visibles, leur distance périhélie doit être peu considérable. Jusqu'à présent cette distance n'a surpassé que deux fois le diamètre de l'orbe terrestre, et le plus souvent elle a été au-dessous du rayon de cet orbe. On conçoit que pour approcher si près du Soleil, leur vitesse au moment de leur entrée dans sa sphère d'activité doit avoir une grandeur et une direction comprises dans d'étroites limites. En déterminant par l'analyse des probabilités le rapport des chances qui, dans ces limites, donnent une hyperbole sensible, aux chances qui donnent un orbe que l'on puisse confondre avec une parabole, j'ai trouvé qu'il y a six mille au moins à parier contre l'unité qu'une nébuleuse qui pénètre dans la sphère d'activité du Soleil de manière à pouvoir être observée décrira ou une ellipse très allongée, ou une hyperbole qui par la grandeur de son axe se confondra sensiblement avec une parabole, dans la partie que l'on observe; il n'est donc pas surprenant que jusqu'ici l'on n'ait point reconnu de mouvements hyperboliques.

L'attraction des planètes, et peut-être encore la résistance des milieux éthérés, a dû changer plusieurs orbes cométaires dans des ellipses dont le grand axe est moindre que le rayon de la sphère d'activité du Soleil, ce qui augmente les chances des orbes elliptiques. On peut croire que ce changement a eu lieu pour la comète de 1759 et pour quelques autres dont on a constaté la révolution.

Je vais présentement considérer la Terre et les fluides qui la recouvrent. Le phénomène qui peut répandre le plus de lumière sur la régularité de ses couches est la variation de la pesanteur à sa surface. On détermine cette variation soit en transportant dans des lieux divers le même pendule, et en comptant le nombre de ses oscillations dans un temps donné, soit en y mesurant directement la longueur du pendule à secondes. Ces expériences sont faciles et maintenant susceptibles d'une extrême précision; vu leur importance dans la théorie de la Terre, elles doivent être spécialement recommandées aux navigateurs. Celles que l'on a déjà faites, quoiqu'elles laissent beaucoup à désirer, suivent cependant une marche très régulière et fort approchante de la loi de variation la plus simple, celle du carré du sinus de la latitude; les deux hémisphères boréal et austral ne présentent point à cet égard de différence sensible, ou du moins qui ne puisse être attribuée aux erreurs des observations. Si l'on prend pour unité la longueur du pendule à secondes à l'équateur, l'ensemble de ces observations donne cinquante-quatre dix-millièmes pour le coefficient du terme proportionnel au carré du sinus de latitude. Mes formules de probabilité, appliquées à ce résultat, donnent plus de deux mille à parier contre un que le vrai coefficient est compris dans les limites cinq millièmes et six millièmes. Si la Terre est un ellipsoïde de révolution, on a son aplatissement, en retranchant le coefficient de la loi de la pesanteur de 875 cent-millièmes. Le coefficient cinq millièmes répond ainsi à l'aplatissement $\frac{1}{272}$; il y a donc plus de quatre mille à parier contre un que l'aplatissement de la Terre est au-dessous de cette fraction. Il y a des millions de milliards à parier contre un qu'il est moindre que celui qui répond à l'homogénéité de la Terre, et que les couches terrestres augmentent de densité à mesure qu'elles approchent du centre de cette planète. La régularité de la pesanteur à sa surface prouve qu'elles sont disposées symétriquement autour de ce point. Ces deux conditions, suites nécessaires de l'état fluide, indiquent avec une grande vraisemblance que la Terre entière a eu primitivement cet état, qu'une chaleur excessive a pu seule lui donner, ce qui vient à l'appui de l'hypothèse que nous avons émise sur la formation des corps célestes.

A l'invitation de l'Académie des Sciences, on fit à Brest, au commencement du dernier siècle, des observations de marées, qui furent continuées pendant six années consécutives. La situation de ce port est très favorable à ce genre d'observations. Il communique avec la mer par un canal qui aboutit à une rade fort vaste, au fond de laquelle le port a été construit. Les irrégularités du mouvement de la mer parviennent ainsi dans ce port très affaiblies, à peu près comme les oscillations que le mouvement irrégulier d'un vaisseau produit dans le baromètre sont atténuées par un étranglement fait au tube de cet instrument. D'ailleurs, les marées étant considérables à Brest, les variations accidentelles causées par les vents n'en sont qu'une faible partie. Aussi l'on remarque, dans les observations de ces marées, une grande régularité, que ne doit point altérer la petite rivière qui vient se perdre dans la rade immense de ce port. Frappé de cette régularité, je priai le Gouvernement d'ordonner à Brest une nouvelle série d'observations pendant une période entière du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire : c'est ce que l'on a bien voulu faire. Ces observations datent du 1er juin 1806, et depuis cette époque elles ont été continuées sans interruption jusqu'à ce jour, ce qui excède déjà la moitié de la période dont je viens de parler. Elles m'offraient une occasion trop favorable d'appliquer mes formules de probabilité à l'un des plus grands phénomènes de la nature, pour ne pas la saisir : j'ai trouvé qu'elles indiquaient, avec une extrême probabilité, les lois des hauteurs et des intervalles des marées, relatives aux phases de la Lune, aux saisons et aux distances de la Lune et du Soleil à la Terre. Ces observations présentent à cet égard le plus parfait accord avec les observations faites un siècle auparavant. Elles s'accordent également bien avec la loi générale de la pesanteur, à laquelle on eût pu remonter par leur seul moyen.

La théorie des marées, que j'ai donnée d'après cette loi, dans le Livre IV de la *Mécanique céleste*, repose sur un principe de Dynamique, qui la rend très simple et indépendante des circonstances locales du port, circonstances trop compliquées pour qu'il soit possible de les soumettre au calcul. Au moyen de ce principe, elles entrent comme arbitraires dans les résultats de l'Analyse, qui doivent ainsi représenter les observations, si la gravitation universelle est en effet la véritable cause du flux et du reflux de la mer. Voici quel est ce principe, qui peut s'appliquer à beaucoup d'autres phénomènes : *L'état d'un système de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent*. En réunissant ce principe à celui de la coexistence des oscillations très petites, je suis parvenu à une expression de la hauteur des marées, dont les arbitraires comprennent l'effet des circonstances locales du port. Les nombreuses variétés des marées et les modifications qu'elles reçoivent de ces circonstances sont toutes représentées par cette expression, avec une singulière exactitude. L'une de ces modifications les plus remarquables est le retard d'un jour et demi des plus grandes et des plus petites marées sur les instants des syzygies et des quadratures. L'expression dont il s'agit fait voir qu'il dépend de la rapidité du mouvement de l'astre qui agit sur l'Océan, combinée avec les circonstances locales, et que la même cause produit à Brest un accroissement dans le rapport des actions du Soleil et de la Lune. L'Analyse fournit divers moyens pour déterminer cet accroissement par les observations, qui le donnent égal à un huitième à peu près du vrai rapport.

L'action du Soleil et de la Lune produit sans doute dans notre atmosphère, qu'elle traverse pour arriver à l'Océan, des oscillations analogues à celles du flux et du reflux. Mais elles sont très faibles, et, pour les démêler au milieu des mouvements de l'atmosphère, il faudra une longue suite d'observations faites avec d'excellents baromètres, principalement à l'équateur, où les changements irréguliers de l'atmosphère sont peu considérables.

Le principe qui sert de base à ma théorie des marées peut, en le généralisant, s'étendre à tous les effets du hasard auquel se joignent des causes variables suivant des lois régulières. L'action de ces causes produit, dans les résultats d'un grand nombre d'effets, des variétés qui suivent les mêmes lois et que l'on peut reconnaître par l'Analyse des Probabilités; à mesure que les effets se multiplient, ces variétés se manifestent avec une probabilité toujours croissante, et qui se confondrait avec la certitude, si le nombre des effets était infini. Ce théorème est analogue à celui que j'ai développé précédemment sur l'action des causes constantes. Toutes les fois donc que nous voyons qu'une cause, dont la marche est régulière, peut influer sur un genre d'événements, nous pouvons chercher à reconnaître son influence en multipliant les observations, et, quand cette influence paraît se manifester, l'Analyse des Probabilités détermine la probabilité de son existence et celle de son intensité. Ainsi, la variation de la température du jour à la nuit pouvant modifier la pression de l'atmosphère et par conséquent les hauteurs du baromètre, il est naturel de penser que des observations multipliées de ces hauteurs doivent manifester l'influence de la chaleur solaire. En effet, on a depuis longtemps reconnu à l'équateur, où cette influence paraît être la plus grande, une petite variation diurne du baromètre, dont le maximum a lieu vers 9 heures du matin et le minimum vers 4 heures du soir. Un second maximum a lieu vers 11 heures du soir et le second minimum vers 4 heures du matin. Les oscillations de la nuit sont moindres que celles du jour, dont l'étendue est de deux millimètres. L'inconstance de nos climats n'a point dérobé cette variation à nos observateurs, quoiqu'elle y soit moins sensible qu'entre les tropiques. En appliquant les formules de probabilité aux observations nombreuses et précises faites par Ramond pendant plusieurs années consécutives, on voit qu'elles indiquent l'existence de ce phénomène avec une extrême probabilité. Ces observations lui ont fait découvrir encore une variation dans le baromètre, dépendante des saisons. Il trouve sa hauteur moyenne de chaque mois, à son premier maximum peu après le solstice d'hiver, et à son premier minimum en avril; un second maximum a lieu vers le solstice d'été, et le second minimum en septembre. L'Analyse nous montre que ces résultats sont déjà indiqués avec vraisemblance; ils sont confirmés d'ailleurs par d'autres observations. La suite des temps fera connaître si les mois des plus grandes et des plus petites hauteurs sont les mêmes dans les climats divers. Ces variations annuelles et diurnes du baromètre sont dues sans doute, ainsi que les vents alizés et les moussons, à la chaleur solaire combinée avec le mouvement de rotation de la Terre. Mais il est presque impossible de soumettre au calcul des effets aussi compliqués.

On peut encore, par l'Analyse des Probabilités, vérifier l'existence ou l'influence de certaines causes dont on a cru remarquer l'action sur les êtres organisés. De tous les instruments que nous pouvons employer pour connaître les agents imperceptibles de la nature, les plus sensibles sont les nerfs, surtout lorsque des causes particulières exaltent leur sensibilité. C'est par leur moyen qu'on a découvert la faible électricité que développe le contact de deux métaux hétérogènes, ce qui a ouvert un champ vaste aux recherches des physiciens et des chimistes. Les phénomènes singuliers qui résultent de l'extrême sensibilité des nerfs dans quelques individus ont donné naissance à diverses opinions sur l'existence d'un nouvel agent, que l'on a nommé *magnétisme animal*, sur l'action du magnétisme ordinaire, et sur l'influence du Soleil et de la Lune, dans quelques affections nerveuses, enfin sur les impressions que peut faire éprouver la proximité des métaux ou d'une eau courante. Il est naturel de penser que l'action de ces causes est très faible, et qu'elle peut être facilement troublée par des circonstances accidentelles; ainsi, parce que dans quelques cas elle ne s'est point manifestée, on ne doit pas rejeter son existence. Nous sommes si loin de connaître tous les agents de la nature et leurs divers modes d'action qu'il serait peu philosophique de nier les phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement, nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse qu'il paraît plus difficile de les admettre, et c'est ici que le Calcul des Probabilités devient indispensable pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences, afin d'obtenir en faveur des agents qu'elles indiquent une probabilité supérieure aux raisons que l'on peut avoir d'ailleurs de ne pas les admettre.

Le Calcul des Probabilités peut faire apprécier les avantages et les inconvénients des méthodes employées dans les sciences conjecturales. Ainsi, pour reconnaître le meilleur des traitements en usage dans la guérison d'une maladie, il suffit d'éprouver chacun d'eux sur un même nombre de malades, en rendant toutes les circonstances parfaitement semblables; la supériorité du traitement le plus avantageux se manifestera de plus en plus, à mesure que ce nombre s'accroîtra, et le calcul fera connaître la probabilité correspondante de son avantage, et du rapport suivant lequel il est supérieur aux autres.

Application du Calcul des Probabilités aux sciences morales.

On vient de voir les avantages qu'offre l'Analyse des Probabilités, dans la recherche des lois des phénomènes naturels dont les causes sont inconnues, ou trop compliquées pour que leurs effets puissent être soumis au calcul. C'est le cas de presque tous les objets des sciences morales. Tant de causes imprévues, ou cachées, ou inappréciables influent sur les institutions humaines, qu'il est impossible d'en juger *a priori* les résultats. La série des événements que le temps amène développe ces résultats et indique les moyens de remédier à ceux qui sont nuisibles. On a souvent fait à cet égard des lois sages; mais, parce que l'on avait négligé d'en conserver les motifs, plusieurs ont été abrogées comme inutiles, et il a fallu, pour les rétablir, que de fâcheuses expériences en aient fait de nouveau sentir le besoin. Il est donc bien important de tenir, dans chaque branche de l'administration publique, un registre exact des effets qu'ont produits les divers moyens dont on a fait usage, et qui sont autant d'expériences faites en grand par les gouvernements. Appliquons aux sciences politiques et morales la méthode fondée sur l'observation et sur le calcul, méthode qui nous a si bien servi dans les sciences naturelles. N'opposons point une résistance inutile et souvent dangereuse aux effets inévitables du progrès des lumières; mais ne changeons qu'avec une circonspection extrême nos institutions et les usages auxquels nous sommes depuis longtemps pliés. Nous connaissons bien, par l'expérience du passé, les inconvénients qu'ils présentent; mais nous ignorons quelle est l'étendue des maux que leur changement peut produire. Dans cette ignorance, la théorie des probabilités prescrit d'éviter tout changement; surtout il faut éviter les changements brusques, qui, dans l'ordre moral comme dans l'ordre physique, ne s'opèrent jamais sans une grande perte de force vive.

Déjà le Calcul des Probabilités a été appliqué avec succès à plusieurs objets des sciences morales. Je vais en présenter ici les principaux résultats.

De la Probabilité des témoignages.

La plupart de nos jugements étant fondés sur la probabilité des témoignages, il est bien important de la soumettre au calcul. La chose, il est vrai, devient souvent impossible, par la difficulté d'apprécier la véracité des témoins, et par le grand nombre de circonstances dont les faits qu'ils attestent sont accompagnés. Mais on peut, dans plusieurs cas, résoudre des problèmes qui ont beaucoup d'analogie avec les questions qu'on se propose, et dont les solutions peuvent être regardées comme des approximations propres à nous guider et à nous garantir des erreurs et des dangers auxquels de mauvais raisonnements nous exposent. Une approximation de ce genre, lorsqu'elle est bien conduite, est toujours préférable aux raisonnements les plus spécieux. Essayons donc de donner quelques règles générales pour y parvenir.

On a extrait un seul numéro d'une urne qui en renferme mille. Un témoin de ce tirage annonce que le n° 79 est sorti; on demande la probabilité de cette sortie. Supposons que l'expérience ait fait connaître que ce témoin trompe une fois sur dix, en sorte que la probabilité de son témoignage soit $\frac{1}{10}$. Ici, l'événement observé est le témoin attestant que le n° 79 est sorti. Cet événement peut résulter des deux hypothèses suivantes, savoir que le témoin énonce la vérité, ou qu'il trompe. Suivant le principe que nous avons exposé sur la probabilité des causes, tirée des événements observés, il faut d'abord déterminer *a priori* la probabilité de l'événement dans chaque hypothèse. Dans la première, la probabilité que le témoin annoncera le n° 79 est la probabilité même de la sortie de ce numéro, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{9}{10}$ de la véracité du témoin; on aura donc $\frac{9}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse. Si le témoin trompe, le n° 79 n'est pas sorti, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Mais, pour annoncer la sortie de ce numéro, le témoin doit le choisir parmi les 999 numéros non sortis, et, comme il est supposé n'avoir aucun motif de préférence pour les uns plutôt que pour les autres, la probabilité qu'il choisira le n° 79 est $\frac{1}{999}$; en multipliant donc cette probabilité par la précédente, on aura $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité que le témoin annoncera le n° 79 dans la seconde hypothèse. Il faut encore multiplier cette probabilité par la probabilité $\frac{1}{10}$ de l'hypothèse elle-même, ce qui donne $\frac{1}{10000}$ pour la probabilité de l'événement relative à cette hypothèse. Présentement, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit la probabilité relative à la première hypothèse, et dont le dénominateur soit la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses, on aura, par le sixième principe, la probabilité de la première hypothèse, et cette probabilité sera $\frac{9}{10}$, c'est-à-dire la véracité même du témoin. C'est aussi la probabilité de la sortie du n° 79. La probabilité du mensonge du témoin et de la non-sortie de ce numéro est $\frac{1}{10}$.

Si le témoin, voulant tromper, avait quelque intérêt à choisir le n° 79 parmi les numéros non sortis, s'il jugeait, par exemple, qu'ayant placé sur ce numéro une mise considérable, l'annonce de sa sortie augmentera son crédit, la probabilité qu'il choisira ce numéro ne sera plus, comme auparavant, $\frac{1}{999}$; elle pourra être alors $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc., suivant l'intérêt qu'il aura d'annoncer sa sortie. En la supposant $\frac{1}{9}$, il faudra multiplier par cette fraction la probabilité $\frac{999}{1000}$ pour avoir, dans l'hypothèse du mensonge, la probabilité de l'événement observé, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{10}$, ce qui donne $\frac{111}{10000}$ pour la probabilité de l'événement dans la seconde hypothèse. Alors la probabilité de la première hypothèse, ou de la sortie du n° 79, se réduit, par la règle précédente, à $\frac{9}{120}$. Elle est donc très affaiblie par la considération de l'intérêt que le témoin peut avoir à annoncer la sortie du n° 79. A la vérité, ce même intérêt augmente la probabilité $\frac{9}{10}$ que le témoin dira la vérité, si le n° 79 sort. Mais cette probabilité ne peut excéder l'unité ou $\frac{10}{10}$; ainsi la probabilité de la sortie du n° 79 ne surpassera pas $\frac{10}{121}$. Le bon sens nous dicte que cet intérêt doit inspirer de la défiance, mais le calcul en apprécie l'influence.

La probabilité *a priori* du numéro énoncé par le témoin est l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne; elle se transforme, en vertu du témoignage, dans la véracité même du témoin; elle peut donc être affaiblie par ce témoignage. Si, par exemple, l'urne ne renferme que deux numéros, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la probabilité *a priori* de la sortie du n° 1, et si la véracité d'un témoin qui l'annonce est $\frac{4}{10}$, cette sortie en devient moins probable. En effet, il est visible que, le témoin ayant alors plus de pente vers le mensonge que vers la vérité, son témoignage doit diminuer la probabilité du fait attesté, toutes les fois que cette probabilité égale ou surpasse $\frac{1}{2}$. Mais, s'il y a trois numéros dans l'urne, la probabilité *a priori* de la sortie du n° 1 est accrue par l'affirmation d'un témoin dont la véracité surpasse $\frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme 999 boules noires et une boule blanche, et qu'une boule en ayant été extraite, un témoin du tirage annonce que cette boule est blanche. La probabilité de l'événement observé, déterminée *a priori* dans la première hypothèse, sera ici, comme dans la question précédente, égale à $\frac{9}{10000}$. Mais, dans l'hypothèse où le témoin trompe, la boule blanche n'est pas sortie, et la probabilité de ce cas est $\frac{999}{1000}$. Il faut la multiplier par la probabilité $\frac{1}{10}$ du mensonge, ce qui donne $\frac{999}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à la seconde hypothèse. Cette probabilité n'était que $\frac{1}{10000}$ dans la question précédente; cette grande différence tient à ce qu'une boule noire étant sortie, le témoin qui veut tromper n'a point de choix à faire parmi les 999 boules non sorties, pour annoncer la sortie d'une boule blanche. Maintenant, si l'on forme deux fractions dont les numérateurs soient les probabilités relatives à chaque hypothèse, et dont le dénominateur commun soit la somme de ces probabilités, on aura $\frac{9}{1008}$ pour la probabilité de la première hypothèse et de la sortie d'une boule blanche, et $\frac{999}{1008}$ pour la probabilité de la seconde hypothèse et de la sortie d'une boule noire. Cette dernière probabilité est fort approchante de la certitude : elle en approcherait beaucoup plus encore, et deviendrait $\frac{999999}{1000008}$, si l'urne renfermait un million de boules, dont une seule serait blanche, la sortie d'une boule blanche devenant alors beaucoup plus extraordinaire. On voit ainsi comment la probabilité du mensonge croît à mesure que le fait devient plus extraordinaire.

Nous avons supposé jusqu'ici que le témoin ne se trompait point; mais, si l'on admet encore la chance de son erreur, le fait extraordinaire devient plus invraisemblable. Alors, au lieu de deux hypothèses, on aura les quatre suivantes, savoir : celle du témoin ne trompant point et ne se trompant point; celle du témoin ne trompant point et se trompant; l'hypothèse du témoin trompant et ne se trompant point; enfin celle du témoin trompant et se trompant. En déterminant *a priori*, dans chacune de ces hypothèses, la probabilité de l'événement observé, on trouve, par le sixième principe, la probabilité que le fait attesté est faux égale à une fraction dont le numérateur est le nombre des boules noires de l'urne, multiplié par la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et se trompe, ou qu'il trompe et ne se trompe point, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté de la somme des probabilités que le témoin ne trompe point et ne se trompe point, ou qu'il trompe et se trompe à la fois. On voit par là que, si le nombre des boules noires de l'urne est très grand, ce qui rend extraordinaire la sortie de la boule blanche, la probabilité que le fait attesté n'est pas approche extrêmement de la certitude.

En étendant cette conséquence à tous les faits extraordinaires, il en résulte que la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin devient d'autant plus grande que le fait attesté est plus extraordinaire. Quelques auteurs ont avancé le contraire, en se fondant sur ce que, la vue d'un fait extraordinaire étant parfaitement semblable à celle d'un fait ordinaire, les mêmes motifs doivent nous porter à croire également le témoin, quand il affirme l'un ou l'autre de ces faits. Le simple bon sens repousse une aussi étrange assertion; mais le Calcul des Probabilités, en confirmant l'indication du sens commun, apprécie, de plus, l'invraisemblance des témoignages sur les faits extraordinaires.

On insiste et l'on suppose deux témoins également dignes de foi, dont le premier atteste qu'il a vu mort, il y a quinze jours, un individu que le second témoin affirme avoir vu hier plein de vie. L'un ou l'autre de ces faits n'offre rien d'invraisemblable. La résurrection de l'individu est une conséquence de leur ensemble; mais, les témoignages ne portant point directement sur elle, ce qu'elle a d'extraordinaire ne doit point affaiblir la croyance qui leur est due. (*Encyclopédie,* art. *Certitude.*)

Cependant, si la conséquence qui résulte de l'ensemble des témoignages était impossible, l'un d'eux serait nécessairement faux; or une conséquence impossible est la limite des conséquences extraordinaires, comme l'erreur est la limite des invraisemblances; la valeur des témoignages, qui devient nulle dans le cas d'une conséquence impossible, doit donc être très affaiblie dans celui d'une conséquence extraordinaire. C'est, en effet, ce que le Calcul des Probabilités confirme.

Pour le faire voir, considérons deux urnes A et B, dont la première contienne un million de boules blanches, et la seconde un million de boules noires. On tire de l'une de ces urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne dont on extrait ensuite une boule. Deux témoins, l'un du premier tirage et l'autre du second, attestent que la boule qu'ils ont vu extraire est blanche. Chaque témoignage, pris isolément, n'a rien d'invraisemblable, et il est facile de voir que la probabilité du fait attesté est la véracité même du témoin. Mais il suit, de l'ensemble des témoignages, qu'une boule blanche a été extraite de l'urne A au premier tirage, et qu'ensuite, mise dans l'urne B, elle a reparu au second tirage, ce qui est fort extraordinaire; car cette seconde urne renfermant alors une boule blanche sur un million de boules noires, la probabilité d'en extraire la boule blanche est $\frac{1}{1000001}$. Pour déterminer l'affaiblissement qui en résulte dans la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, nous remarquerons que l'événement observé est ici l'affirmation par chacun d'eux que la boule qu'il a vu extraire est blanche. Représentons par $\frac{9}{10}$ la probabilité qu'il énonce la vérité, ce qui peut avoir lieu dans le cas présent, lorsque le témoin ne trompe point et ne se trompe point, et lorsqu'il trompe et se trompe à la fois. On peut former les quatre hypothèses suivantes.

1° Le premier et le second témoin disent la vérité. Alors une boule blanche a d'abord été extraite de l'urne A, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$, puisque la boule extraite au premier tirage a pu sortir également de l'une ou de l'autre urne. Ensuite, la boule extraite mise dans l'urne B a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement est $\frac{1}{1000001}$; la probabilité du fait énoncé est donc $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{9}{10}$ que les témoins disent la vérité, on aura $\frac{81}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette première hypothèse.

2° Le premier témoin dit la vérité, et le second ne la dit point, soit qu'il trompe et ne se trompe point, soit qu'il ne trompe point et se trompe. Alors une boule blanche est sortie de l'urne A au premier tirage, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$. Ensuite cette boule ayant été mise dans l'urne B, une boule noire en a été extraite : la probabilité de cette extraction est $\frac{1000000}{1000001}$; on a donc $\frac{1000000}{2000002}$ pour la probabilité de l'événement composé. En la multipliant par le produit des deux probabilités $\frac{9}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que le premier témoin dit la vérité et que le second ne la dit point, on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse.

3° Le premier témoin ne dit pas la vérité, et le second l'énonce. Alors une boule noire est sortie de l'urne B au premier tirage, et après avoir été mise dans l'urne A, une boule blanche a été extraite de cette urne. La probabilité du premier de ces événements est $\frac{1}{2}$, et celle du second est $\frac{1000000}{1000001}$; la probabilité de l'événement composé est donc $\frac{1000000}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{9}{10}$, que le premier témoin ne dit pas la vérité et que le second l'énonce, on aura $\frac{9000000}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, relative à cette hypothèse.

4° Enfin aucun des témoins ne dit la vérité. Alors une boule noire a été extraite de l'urne B au premier tirage; ensuite, ayant été mise dans l'urne A, elle a reparu au second tirage : la probabilité de cet événement composé est $\frac{1}{2000002}$. En la multipliant par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ que chaque témoin ne dit pas la vérité, on aura

$\frac{1}{200000200}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse.

Maintenant, pour avoir la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins, savoir, qu'une boule blanche a été extraite à chacun des tirages, il faut diviser la probabilité correspondante à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux quatre hypothèses, et alors on a pour cette probabilité $\frac{81}{18000082}$, fraction extrêmement petite.

Si les deux témoins affirmaient, le premier qu'une boule blanche a été extraite de l'une des deux urnes A et B, le second qu'une boule blanche a été pareillement extraite de l'une des deux urnes A′ et B′, en tout semblables aux premières, la probabilité de la chose énoncée par les deux témoins serait le produit des probabilités de leurs témoignages ou $\frac{81}{100}$; elle serait donc cent quatre-vingt mille fois, au moins, plus grande que la précédente. On voit par là combien, dans le premier cas, la réapparition au second tirage de la boule blanche extraite au premier, conséquence extraordinaire des deux témoignages, en affaiblit la valeur.

Nous n'ajouterions point foi au témoignage d'un homme qui nous attesterait qu'en projetant cent dés en l'air ils sont tous retombés sur la même face. Si nous avions été nous-mêmes spectateurs de cet événement, nous n'en croirions nos propres yeux qu'après en avoir scrupuleusement examiné toutes les circonstances, et après en avoir rendu d'autres yeux témoins, pour être bien sûrs qu'il n'y a eu ni hallucination ni prestige. Mais, après cet examen, nous ne balancerions point à l'admettre, malgré son extrême invraisemblance, et personne ne serait tenté, pour l'expliquer, de recourir à un renversement des lois de la vision. Nous devons en conclure que la probabilité de la constance des lois de la nature est pour nous supérieure à celle que l'événement dont il s'agit ne doit point avoir lieu, probabilité supérieure elle-même à celle de la plupart des faits historiques que nous regardons comme incontestables. On peut juger par là du poids immense de témoignages nécessaire pour admettre une suspension des lois naturelles, et combien il serait abusif d'appliquer à ce cas les règles ordinaires de la critique. Tous ceux qui, sans offrir cette immensité de témoignages, étayent ce qu'ils avancent de récits d'événements contraires à ces lois, affaiblissent plutôt qu'ils n'augmentent la croyance qu'ils cherchent à inspirer; car alors ces récits rendent très probable l'erreur ou le mensonge de leurs auteurs. Mais ce qui diminue la croyance des hommes éclairés accroît souvent celle du vulgaire, toujours avide du merveilleux.

Il y a des choses tellement extraordinaires, que rien ne peut en balancer l'invraisemblance. Mais celle-ci, par l'effet d'une opinion dominante, peut être affaiblie au point de paraître inférieure à la probabilité des témoignages, et quand cette opinion vient à changer, un récit absurde, admis unanimement dans le siècle qui lui a donné naissance, n'offre aux siècles suivants qu'une nouvelle preuve de l'extrême influence de l'opinion générale, sur les meilleurs esprits. Deux grands hommes du siècle de Louis XIV, Racine et Pascal, en sont des exemples frappants. Il est affligeant de voir avec quelle complaisance Racine, ce peintre admirable du cœur humain et le poète le plus parfait qui fut jamais, rapporte comme miraculeuse la guérison de la jeune Perrier, nièce de Pascal et pensionnaire à l'abbaye de Port-Royal; il est pénible de lire les raisonnements par lesquels Pascal cherche à prouver que ce miracle devenait nécessaire à la religion, pour justifier la doctrine des religieuses de cette abbaye, alors persécutées par les Jésuites. La jeune Perrier était depuis trois ans et demi affligée d'une fistule lacrymale; elle toucha de son œil malade une relique que l'on prétendait être une des épines de la couronne du Sauveur, et elle se crut à l'instant guérie. Quelques jours après, les médecins et les chirurgiens constatèrent la guérison, et ils jugèrent que la nature et les remèdes n'y avaient eu aucune part. Cet événement, arrivé en 1656, ayant fait un grand bruit, « tout Paris se porta », dit Racine, « à Port-Royal. La foule croissait de jour en jour, et Dieu même semblait prendre plaisir à autoriser la dévotion des peuples par la quantité de miracles qui se firent en cette église. » A cette époque, les miracles et les sortilèges ne paraissaient pas encore invraisemblables, et l'on n'hésitait point à leur attribuer les singularités de la nature, que l'on ne pouvait autrement expliquer.

Cette manière d'envisager les effets extraordinaires se retrouve dans les ouvrages les plus remarquables du siècle de Louis XIV, dans l'*Essai* même *sur l'entendement humain* du sage Locke, qui dit en parlant des degrés d'assentiment : « Quoique la commune expérience et le cours ordinaire des choses aient avec raison une grande influence sur l'esprit des hommes, pour les porter à donner ou à refuser leur consentement à une chose qui leur est proposée à croire, il y a pourtant un cas où ce qu'il y a d'étrange dans un fait n'affaiblit point l'assentiment que nous devons donner au témoignage sincère sur lequel il est fondé. Lorsque des événements surnaturels sont conformes aux fins que se propose celui qui a le pouvoir de changer le cours de la nature, dans un tel temps et dans de telles circonstances, ils peuvent être d'autant plus propres à trouver créance dans nos esprits qu'ils sont plus au-dessus des observations ordinaires, ou même qu'ils y sont plus opposés. » Les vrais principes de la probabilité des témoignages ayant été ainsi méconnus des philosophes auxquels la raison est principalement redevable de ses progrès, j'ai cru devoir exposer avec étendue les résultats du calcul sur cet important objet.

Ici se présente naturellement la discussion d'un argument fameux de Pascal, que Craig, mathématicien anglais, a reproduit sous une forme géométrique. Des témoins attestent qu'ils tiennent de la Divinité même qu'en se conformant à telle chose on jouira, non pas d'une ou de deux, mais d'une infinité de vies heureuses. Quelque faible que soit la probabilité des témoignages, pourvu qu'elle ne soit pas infiniment petite, il est clair que l'avantage de ceux qui se conforment à la chose prescrite est infini, puisqu'il est le produit de cette probabilité par un bien infini; on ne doit donc point balancer à se procurer cet avantage.

Cet argument est fondé sur le nombre infini des vies heureuses promises au nom de la Divinité par les témoins; il faudrait donc faire ce qu'ils prescrivent, précisément parce qu'ils exagèrent leurs promesses au delà de toutes limites, conséquence qui répugne au bon sens. Aussi le calcul nous fait-il voir que cette exagération même affaiblit la probabilité de leur témoignage, au point de la rendre infiniment petite ou nulle. En effet, ce cas revient à celui d'un témoin qui annoncerait la sortie du numéro le plus élevé, d'une urne remplie d'un grand nombre de numéros dont un seul a été extrait, et qui aurait un grand intérêt à annoncer la sortie de ce numéro. On a vu précédemment combien cet intérêt affaiblit son témoignage. En n'évaluant qu'à $\frac{1}{2}$ la probabilité que si le témoin trompe, il choisira le plus grand numéro, le calcul donne la probabilité de son annonce plus petite qu'une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est l'unité plus la moitié du produit du nombre des numéros, par la probabilité du mensonge, considérée *a priori* ou indépendamment de l'annonce. Pour assimiler ce cas à celui de l'argument de Pascal, il suffit de représenter par les numéros de l'urne tous les nombres possibles de vies heureuses, ce qui rend le nombre de ces numéros infini, et d'observer que, si les témoins trompent, ils ont le plus grand intérêt, pour accréditer leur mensonge, à promettre une éternité de bonheur. L'expression de la probabilité de leur témoignage devient alors infiniment petite. En la multipliant par le nombre infini de vies heureuses promises, l'infini disparaît du produit qui exprime l'avantage résultant de cette promesse, ce qui détruit l'argument de Pascal.

Considérons présentement la probabilité de l'ensemble de plusieurs témoignages sur un fait déterminé. Pour fixer les idées, supposons que ce fait soit la sortie d'un numéro d'une urne qui en renferme cent, et dont on a extrait un seul numéro. Deux témoins de ce tirage annoncent que le n° 1 est sorti, et l'on demande la probabilité résultante de l'ensemble de ces témoignages. On peut former ces deux hypothèses : les témoins disent la vérité; les témoins trompent. Dans la première hypothèse, le n° 1 est sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{1}{100}$. Il faut la multiplier par le produit des véracités des témoins, véracités que nous supposerons être $\frac{9}{10}$ et $\frac{7}{10}$; on aura donc $\frac{63}{10000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans cette hypothèse. Dans la seconde, le n° 1 n'est pas sorti, et la probabilité de cet événement est $\frac{99}{100}$. Mais l'accord des témoins exige alors qu'en cherchant à tromper, ils choisissent tous deux le n° 1, sur les 99 numéros non sortis : la probabilité de ce choix est le produit de la fraction $\frac{1}{99}$ par elle-même ; il faut ensuite multiplier ces deux probabilités ensemble et par le produit des probabilités $\frac{1}{10}$ et $\frac{3}{10}$ que les témoins trompent; on aura ainsi $\frac{1}{330000}$ pour la probabilité de l'événement observé, dans la seconde hypothèse. Maintenant on aura la probabilité du fait attesté ou de la sortie du n° 1, en divisant la probabilité relative à la première hypothèse par la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses; cette probabilité sera donc $\frac{2079}{2080}$, et la probabilité de la non-sortie de ce numéro et du mensonge des témoins sera $\frac{1}{2080}$.

Si l'urne ne renfermait que les n^{os} 1 et 2, on trouverait de la même manière $\frac{21}{22}$ pour la probabilité de la sortie n° 2, et par conséquent $\frac{1}{22}$ pour la probabilité du mensonge des témoins, probabilité quatre-vingt-quatorze fois au moins plus grande que la précédente. On voit par là combien la probabilité du mensonge des témoins diminue, quand le fait qu'ils attestent est moins probable en lui-même. En effet, on conçoit qu'alors l'accord des témoins, lorsqu'ils trompent, devient plus difficile, à moins qu'ils ne s'entendent, ce que nous ne supposons pas ici.

Dans le cas précédent, où, l'urne ne renfermant que deux numéros, la probabilité *a priori* du fait attesté est $\frac{1}{2}$, la probabilité résultante des témoignagnes est le produit des véracités des témoins, divisé par ce produit ajouté à celui des probabilités respectives de leur mensonge.

Il nous reste à considérer l'influence du temps sur la probabilité des faits transmis par une chaîne traditionnelle de témoins. Il est clair que cette probabilité doit diminuer à mesure que la chaîne se prolonge. Si le fait n'a aucune probabilité par lui-même, celle qu'il acquiert par les témoignages décroît suivant le produit continu de la véracité des témoins. Si le fait a par lui-même une probabilité, si, par exemple, ce fait est la sortie du n° 2 d'une urne qui en renferme un nombre fini et dont il est certain qu'on a extrait un seul numéro, ce que la chaîne traditionnelle ajoute à cette probabilité décroît suivant un produit continu, dont le premier facteur est le rapport du nombre des numéros de l'urne moins un à ce même nombre, et dont chaque autre facteur est la véracité de chaque témoin, diminuée du rapport de la probabilité de son mensonge au nombre des numéros de l'urne moins un; en sorte que la limite de la probabilité du fait est celle de ce fait considéré *a priori* ou indépendamment des témoignages, probabilité égale à l'unité divisée par le nombre des numéros de l'urne.

L'action du temps affaiblit donc sans cesse la probabilité des faits historiques, comme elle altère les monuments les plus durables. On peut, à la vérité, la ralentir en multipliant et conservant les témoignages et les monuments qui les étayent. L'imprimerie offre pour cet objet un grand moyen, malheureusement inconnu des anciens. Malgré les avantages infinis qu'elle procure, les révolutions physiques et morales dont la surface de ce globe sera toujours agitée finiront, en se joignant à l'effet inévitable du temps, par rendre douteux, après des milliers d'années, les faits historiques aujourd'hui les plus certains.

Craig a essayé de soumettre au calcul l'affaiblissement graduel des preuves de la religion chrétienne : en supposant que le monde doit finir à l'époque où elle cessera d'être probable, il trouve que cela doit arriver 1454 ans après le moment où il écrit. Mais son analyse est aussi fautive que son hypothèse sur la durée du monde est bizarre.

Des choix et des décisions des assemblées.

La probabilité des décisions d'une assemblée dépend de la pluralité des voix, des lumières et de l'impartialité des membres qui la composent. Tant de passions et d'intérêts particuliers y mêlent si souvent leur influence, qu'il est impossible de soumettre au calcul cette probabilité. Il y a cependant quelques résultats généraux dictés par le simple bon sens, et que le calcul confirme. Si, par exemple, l'assemblée est très peu éclairée sur l'objet soumis à sa décision, si cet objet exige des considérations délicates, ou si la vérité sur ce point est contraire à des préjugés reçus, en sorte qu'il y ait plus d'un contre un à parier que chaque votant s'en écartera, alors la décision de la majorité sera probablement mauvaise, et la crainte à cet égard sera d'autant plus juste que l'assemblée sera plus nombreuse. Il importe donc à la chose publique que les assemblées n'aient à prononcer que sur des objets à la portée du plus grand nombre; il lui importe que l'instruction soit généralement répandue, et que de bons ouvrages, fondés sur la raison et sur l'expérience, éclairent ceux qui sont appelés à décider du sort de leurs semblables ou à les gouverner, et les prémunissent d'avance contre les faux aperçus et les préventions de l'ignorance. Les savants ont de fréquentes occasions de remarquer que les premiers aperçus trompent souvent, et que le vrai n'est pas toujours vraisemblable.

Il est difficile de connaître et même de définir le vœu d'une assemblée, au milieu de la variété des opinions de ses membres. Essayons de donner sur cela quelques règles, en considérant les deux cas les plus ordinaires, l'élection entre plusieurs candidats, et celle entre plusieurs propositions relatives au même objet.

Lorsqu'une assemblée doit choisir entre plusieurs candidats qui se présentent pour une ou plusieurs places du même genre, ce qui paraît le plus simple est de faire écrire à chaque votant, sur un billet, les noms de tous les candidats, suivant l'ordre du mérite qu'il leur attribue. En supposant qu'il les classe de bonne foi, l'inspection de ces billets fera connaître les résultats des élections, de quelque manière que les candidats soient comparés entre eux, en sorte que de nouvelles élections ne peuvent apprendre rien de plus à cet égard. Il s'agit présentement d'en conclure l'ordre de préférence que les billets établissent entre les candidats. Imaginons que l'on donne à chaque électeur une urne qui contienne une infinité de boules, au moyen desquelles il puisse nuancer tous les degrés de mérite des candidats; concevons encore qu'il tire de son urne un nombre de boules proportionnel au mérite de chaque candidat, et supposons ce nombre écrit sur un billet, à côté du nom du candidat. Il est clair qu'en faisant une somme de tous les nombres relatifs à chaque candidat sur chaque billet, celui de tous les candidats qui aura la plus grande somme sera le candidat que l'assemblée préfère, et qu'en général l'ordre de préférence des candidats sera celui des sommes relatives à chacun d'eux. Mais les billets ne marquent point le nombre des boules que chaque électeur donne aux candidats; ils indiquent seulement que le premier en a plus que le second, le second plus que le troisième, et ainsi de suite. En supposant donc au premier, sur un billet donné, un nombre quelconque de boules, toutes les combinaisons des nombres inférieurs, qui remplissent les conditions précédentes, sont également admissibles, et l'on aura le nombre de boules relatif à chaque candidat en faisant une somme de tous les nombres que chaque combinaison lui donne et en la divisant par le nombre entier des combinaisons. Une analyse fort simple fait voir que les nombres qu'il faut écrire sur chaque billet à côté du dernier nom, de l'avant-dernier, etc., sont proportionnels aux termes de la progression arithmétique 1, 2, 3, ... En écrivant donc ainsi, sur chaque billet, les termes de cette progression, et ajoutant les termes relatifs à chaque candidat sur ces billets, les diverses sommes indiqueront par leur grandeur l'ordre de préférence qui doit être établi entre les candidats. Tel est le mode d'élection qu'indique la Théorie des Probabilités. Sans doute il serait le meilleur, si chaque électeur inscrivait sur son billet les noms des candidats dans l'ordre du mérite qu'il leur attribue. Mais les intérêts particuliers et beaucoup de considérations étrangères au mérite doivent troubler cet ordre, et faire placer quelquefois au dernier rang le candidat le plus redoutable à celui que l'on préfère, ce qui donne trop d'avantage aux candidats d'un médiocre mérite. Aussi l'expérience a-t-elle fait abandonner ce mode d'élection, dans les établissements qui l'avaient adopté.

L'élection à la majorité absolue des suffrages réunit à la certitude de n'admettre aucun des candidats que cette majorité rejette, l'avantage d'exprimer, le plus souvent, le vœu de l'assemblée. Elle coïncide toujours avec le mode précédent, lorsqu'il n'y a que deux candidats. A la vérité, elle expose à l'inconvénient de rendre les élections interminables. Mais l'expérience a fait voir que cet inconvénient est nul, et que le désir général de mettre fin aux élections réunit bientôt la majorité des suffrages sur un des candidats.

Le choix entre plusieurs propositions relatives au même objet semble devoir être assujetti aux mêmes règles que l'élection entre plusieurs candidats. Mais il existe entre ces deux cas cette différence, savoir, que le mérite d'un candidat n'exclut point celui de ses concurrents, au lieu que, si les propositions entre lesquelles il faut choisir sont contraires, la vérité de l'une exclut la vérité des autres. Voici comme on doit alors envisager la question.

Donnons à chaque votant une urne qui renferme un nombre infini de boules et supposons qu'il les distribue sur les diverses propositions, en raison des probabilités respectives qu'il leur attribue. Il est clair que, le nombre total des boules exprimant la certitude, et le votant étant, par l'hypothèse, assuré que l'une des propositions doit être vraie, il répartira ce nombre en entier sur les propositions. Le problème se réduit donc à déterminer les combinaisons dans lesquelles les boules seront réparties de manière qu'il y en ait plus sur la première proposition du billet que sur la deuxième, plus sur la deuxième que sur la troisième, etc.: à faire les sommes de tous les nombres de boules, relatifs à chaque proposition dans ces diverses combinaisons, et à diviser cette somme par le nombre des combinaisons : les quotients seront les nombres de boules que l'on doit attribuer aux propositions sur un billet quelconque. On trouve par l'Analyse qu'en partant de la dernière proposition pour remonter à la première, ces quotients sont entre eux comme les quantités suivantes : 1° l'unité divisée par le nombre des propositions; 2° la quantité précédente augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins une; 3° cette seconde quantité augmentée de l'unité divisée par le nombre des propositions moins deux, et ainsi du reste. On écrira donc, sur chaque billet, ces quantités à côté des propositions correspondantes, et en ajoutant les quantités relatives à chaque proposition sur les divers billets, les sommes indiqueront par leur grandeur l'ordre de préférence que l'assemblée donne à ces propositions.

Disons un mot de la manière de renouveler les assemblées qui doivent changer en totalité, dans un nombre d'années déterminé. Le renouvellement doit-il se faire à la fois, ou convient-il de le partager entre ces années? D'après ce dernier mode, l'assemblée serait formée sous l'influence des diverses opinions dominantes pendant la durée de son renouvellement; l'opinion qui y régnerait alors serait donc très probablement la moyenne de toutes ces opinions. L'assemblée recevrait ainsi du temps le même avantage que lui donne l'extension des élections de ses membres à toutes les parties du territoire qu'elle représente. Maintenant, si l'on considère ce que l'expérience n'a que trop fait connaître, savoir, que les élections sont toujours dirigées dans le sens le plus exagéré des opinions dominantes, on sentira combien il est utile de tempérer ces opinions les unes par les autres, au moyen d'un renouvellement partiel.

De la probabilité des jugements des tribunaux.

L'Analyse confirme ce que le simple bon sens nous dicte, savoir, que la bonté des jugements est d'autant plus probable que les juges sont plus nombreux et plus éclairés. Il importe donc que les tribunaux d'appel remplissent ces deux conditions. Les tribunaux de première instance, plus rapprochés des justiciables, leur offrent l'avantage d'un premier jugement déjà probable, et dont ils se contentent souvent, soit en transigeant, soit en se désistant de leurs prétentions. Mais si l'incertitude de l'objet en litige et son importance déterminent un plaideur à recourir au tribunal d'appel, il doit trouver dans une plus grande probabilité d'obtenir un jugement équitable, plus de sûreté pour sa fortune, et la compensation des embarras et des frais qu'une nouvelle procédure entraîne. C'est ce qui n'avait point lieu dans l'institution de l'appel réciproque des tribunaux de département, institution par là très préjudiciable aux intérêts des citoyens. Il serait, peut-être convenable et conforme au Calcul des probabilités d'exiger une majorité de deux voix au moins, dans un tribunal d'appel, pour infirmer la sentence du tribunal inférieur. On obtiendrait ce résultat, si, le tribunal d'appel étant composé d'un nombre pair de juges, la sentence subsistait dans le cas de l'égalité des voix.

Je vais considérer particulièrement les jugements en matière criminelle.

Il faut sans doute aux juges, pour condamner un accusé, les plus fortes preuves de son délit. Mais une preuve morale n'est jamais qu'une probabilité, et l'expérience n'a que trop fait connaître les erreurs dont les jugements criminels, ceux mêmes qui paraissent être les plus justes, sont encore susceptibles. La possibilité de réparer ces erreurs est le plus solide argument des philosophes qui ont voulu proscrire la peine de mort. Nous devrions donc nous abstenir de juger, s'il nous fallait attendre l'évidence mathématique. Mais le jugement est commandé par le danger qui résulterait de l'impunité du crime. Ce jugement se réduit, si je ne me trompe, à la solution de la question suivante. La preuve du délit de l'accusé a-t-elle le haut degré de probabilité nécessaire, pour que les citoyens aient moins à redouter les erreurs des tribunaux, s'il est innocent et condamné, que ses nouveaux attentats et ceux des malheureux qu'enhardirait l'exemple de son impunité, s'il était coupable et absous? La solution de cette question dépend de plusieurs éléments très difficiles à connaître. Telle est l'imminence du danger qui menacerait la société, si l'accusé criminel restait impuni. Quelquefois ce danger est si grand que le magistrat se voit contraint de renoncer aux formes sagement établies pour la sûreté de l'innocence. Mais ce qui rend presque toujours la question dont il s'agit insoluble est l'impossibilité d'apprécier exactement la probabilité du délit et de fixer celle qui est nécessaire pour la condamnation de l'accusé. Chaque juge, à cet égard, est forcé de s'en rapporter à son propre tact. Il forme son opinion, en comparant les divers témoignages et les circonstances dont le délit est accompagné, aux résultats de ses réflexions et de son expérience, et, sous ce rapport, une longue habitude d'interroger et de juger les accusés donne beaucoup d'avantages pour saisir la vérité au milieu d'indices souvent contradictoires.

La question précédente dépend encore de la grandeur de la peine appliquée au délit, car on exige naturellement, pour prononcer la mort, des preuves beaucoup plus fortes que pour infliger une détention de quelques mois. C'est une raison de proportionner la peine au délit, une peine grave appliquée à un léger délit devant inévitablement faire absoudre beaucoup de coupables. Le produit de la probabilité du délit par sa gravité étant la mesure du danger que l'absolution de l'accusé peut faire éprouver à la société, on pourrait penser que la peine doit dépendre de cette probabilité. C'est ce que l'on fait indirectement dans les tribunaux, où l'on retient pendant quelque temps l'accusé contre lequel s'élèvent des preuves très fortes, mais insuffisantes pour le condamner; dans la vue d'acquérir de nouvelles lumières, on ne le remet point sur-le-champ au milieu de ses concitoyens, qui ne le reverraient pas sans de vives alarmes. Mais l'arbitraire de cette mesure et l'abus qu'on peut en faire l'ont fait rejeter dans les pays où l'on attache le plus grand prix à la liberté individuelle.

Maintenant, quelle est la probabilité que la décision d'un tribunal, qui ne peut condamner qu'à une majorité donnée, sera juste, c'est-à-dire conforme à la vraie solution de la question posée ci-dessus? Ce problème important, bien résolu, donnera le moyen de comparer entre eux les tribunaux divers. La majorité d'une seule voix dans un nombreux tribunal indique que l'affaire dont il s'agit est à fort peu près douteuse; la condamnation de l'accusé serait donc alors contraire aux principes d'humanité, protecteurs de l'innocence. L'unanimité des juges donnerait une très grande probabilité d'une décision juste, mais en s'y astreignant, trop de coupables seraient absous. Il faut donc, ou limiter le nombre des juges si l'on veut qu'ils soient unanimes, ou accroître la majorité nécessaire pour condamner lorsque le tribunal devient plus nombreux. Je vais essayer d'appliquer le calcul à cet objet, persuadé qu'il est toujours le meilleur guide, lorsqu'on l'appuie sur les données que le bon sens nous suggère.

La probabilité que l'opinion de chaque juge est juste entre comme élément principal dans ce calcul. Cette probabilité est évidemment relative à chaque affaire. Si, dans un tribunal de mille et un juges, cinq cent un sont d'une opinion et cinq cents sont de l'opinion contraire, il est visible que la probabilité de l'opinion de chaque juge surpasse bien peu $\frac{1}{2}$; car, en la supposant sensiblement plus grande, une seule voix de différence serait un événement invraisemblable. Mais, si les juges sont unanimes, cela indique dans les preuves ce degré de force qui entraîne la conviction; la probabilité de l'opinion de chaque juge est donc alors très près de l'unité ou de la certitude, à moins que des passions ou des préjugés communs n'égarent à la fois tous les juges. Hors de ces cas, le rapport des voix pour ou contre l'accusé doit seul déterminer cette probabilité. Je suppose ainsi qu'elle peut varier depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à l'unité, mais qu'elle ne peut être au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si cela n'était pas, la décision du tribunal serait insignifiante comme le sort; elle n'a de valeur qu'autant que l'opinion du juge a plus de tendance à la vérité qu'à l'erreur. C'est ensuite par le rapport des nombres de voix favorables et contraires à l'accusé que je détermine la probabilité de cette opinion.

Ces données suffisent pour avoir l'expression générale de la probabilité que la décision d'un tribunal, jugeant à une majorité connue, est juste. Dans les tribunaux où, sur huit juges, cinq voix seraient nécessaires pour la condamnation d'un accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la justesse de la décision surpasserait $\frac{1}{4}$. Si le tribunal était réduit à six membres qui ne pourraient condamner qu'à la pluralité de quatre voix, la probabilité de l'erreur à craindre serait au-dessous de $\frac{1}{4}$; il y aurait donc pour l'accusé un avantage à cette réduction du tribunal. Dans l'un et l'autre cas, la majorité exigée est la même et égale à deux. Ainsi, cette majorité demeurant constante, la probabilité de l'erreur augmente avec le nombre des juges; cela est général, quelle que soit la majorité requise, pourvu qu'elle reste la même. En prenant donc pour règle le rapport arithmétique, l'accusé se trouve dans une position de moins en moins avantageuse, à mesure que le tribunal devient plus nombreux. On pourrait croire que dans un tribunal où l'on exigerait une majorité de douze voix, quel que fût le nombre des juges, les voix de la minorité neutralisant un pareil nombre des voix de la majorité, les douze voix restantes représenteraient l'unanimité d'un jury de douze membres, requise en Angleterre pour la condamnation d'un accusé. Mais on serait dans une grande erreur. Le bon sens fait voir qu'il y a une différence entre la décision d'un tribunal de deux cent douze juges, dont cent douze condamnent l'accusé, tandis que cent l'absolvent, et celle d'un tribunal de douze juges unanimes pour la condamnation. Dans le premier cas, les cent voix favorables à l'accusé autorisent à penser que les preuves sont loin d'atteindre le degré de force qui entraîne la conviction; dans le second cas, l'unanimité des juges porte à croire qu'elles ont atteint ce degré. Mais le simple bon sens ne suffit point pour apprécier l'extrême différence de la probabilité de l'erreur dans ces deux cas. Il faut alors recourir au calcul, et l'on trouve un cinquième à peu près pour la probabilité de l'erreur dans le premier cas, et seulement $\frac{1}{8192}$ pour cette probabilité dans le second cas, probabilité qui n'est pas un millième de la première. C'est une confirmation du principe, que le rapport arithmétique est défavorable à l'accusé quand le nombre des juges augmente. Au contraire, si l'on prend pour règle le rapport géométrique, la probabilité de l'erreur de la décision diminue quand le nombre des juges s'accroît. Par exemple, dans les tribunaux qui ne peuvent condamner qu'à la pluralité des deux tiers des voix, la probabilité de l'erreur à craindre est à peu près un quart, si le nombre des juges est six; elle est au-dessous de $\frac{1}{7}$, si ce nombre s'élève à douze. Ainsi l'on ne doit se régler ni sur le rapport arithmétique ni sur le rapport géométrique, si l'on veut que la probabilité de l'erreur ne soit jamais au-dessus ni au-dessous d'une fraction déterminée.

Mais à quelle fraction doit-on se fixer? C'est ici que l'arbitraire commence, et les tribunaux offrent à cet égard de grandes variétés. Dans les tribunaux spéciaux où cinq voix sur huit suffisent pour la condamnation de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur la bonté du jugement est $\frac{65}{256}$, ou au-dessus de $\frac{1}{4}$. La grandeur de cette fraction est effrayante; mais ce qui doit rassurer un peu est la considération que le plus souvent le juge qui absout un accusé ne le regarde pas comme innocent; il prononce seulement qu'il n'est pas atteint par des preuves suffisantes pour qu'il soit condamné. On est surtout rassuré par la pitié que la nature a mise dans le cœur de l'homme, et qui dispose l'esprit à voir difficilement un coupable dans l'accusé soumis à son jugement. Ce sentiment, plus vif dans ceux qui n'ont point l'habitude des jugements criminels, compense les inconvénients attachés à l'inexpérience des jurés. Dans un jury de douze membres, si la pluralité exigée pour la condamnation est de huit voix sur douze, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1093}{8192}$, ou un peu plus grande qu'un huitième; elle est à peu près $\frac{1}{22}$, si cette pluralité est de neuf voix. Dans le cas de l'unanimité, la probabilité de l'erreur à craindre est $\frac{1}{8192}$, c'est-à-dire plus de mille fois moindre que dans nos jurys. Cela suppose que l'unanimité résulte uniquement des preuves favorables ou contraires à l'accusé; mais des motifs entièrement étrangers doivent souvent concourir à la produire, lorsqu'elle est imposée au jury comme une condition nécessaire de son jugement. Alors, ses décisions dépendant du tempérament, du caractère et des habitudes des jurés, elles sont quelquefois contraires aux décisions que la majorité du jury aurait prises s'il n'eût écouté que les preuves, ce qui me paraît être un grand défaut de cette manière de juger.

La probabilité des décisions est trop faible dans nos jurys, et je pense que, pour donner une garantie suffisante à l'innocence, on doit exiger au moins la pluralité de neuf voix sur douze.

Des Tables de mortalité, et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.

La manière de former les Tables de mortalité est fort simple. On prend dans les registres civils un grand nombre d'individus dont la naissance et la mort soient indiquées. On détermine combien de ces individus sont morts dans la première année de leur âge, combien dans la seconde année, et ainsi de suite. On en conclut le nombre d'individus vivants au commencement de chaque année, et l'on écrit ce nombre dans la Table à côté de celui qui indique l'année. Ainsi l'on écrit à côté de zéro le nombre des naissances, à côté de l'année 1 le nombre des enfants qui ont atteint une année, à côté de l'année 2 le nombre des enfants qui ont atteint deux années, et ainsi du reste. Mais, comme dans les deux premières années de la vie la mortalité est très rapide, il faut, pour plus d'exactitude, indiquer dans ce premier âge le nombre des survivants à la fin de chaque demi-année.

Si l'on divise la somme des années de la vie de tous les individus inscrits dans une Table de mortalité par le nombre de ces individus, on aura la durée moyenne de la vie qui correspond à cette Table. Pour cela, on multipliera par une demi-année le nombre des morts dans la première année, nombre égal à la différence des nombres d'individus inscrits à côté des années 0 et 1. Leur mortalité devant être répartie sur l'année entière, la durée moyenne de leur vie n'est qu'une demi-année. On multipliera par une année et demie le nombre des morts dans la seconde année, par deux années et demie le nombre des morts dans la troisième année, et ainsi de suite. La somme de ces produits, divisée par le nombre des naissances, sera la durée moyenne de la vie. Il est facile d'en conclure que l'on aura cette durée, en formant la somme des nombres inscrits dans la Table à côté de chaque année, en la divisant par le nombre des naissances, et en retranchant un demi du quotient, l'année étant prise pour unité. La durée moyenne de ce qui reste à vivre, en partant d'un âge quelconque, se détermine de la même manière, en opérant sur le nombre des individus qui sont parvenus à cet âge comme on vient de le faire sur le nombre des naissances. Ce n'est point au moment de la naissance que la durée moyenne de la vie est la plus grande; c'est lorsqu'on a échappé aux dangers de la première enfance, et alors elle est d'environ quarante-trois ans. La probabilité d'arriver à un âge quelconque en partant d'un âge donné est égale au rapport des deux nombres d'individus indiqués dans la Table à ces deux âges.

La précision de ces résultats exige que, pour la formation des Tables, on emploie un très grand nombre de naissances. L'analyse donne alors des formules très simples pour apprécier la probabilité que les nombres indiqués dans ces Tables ne s'écarteront de la vérité que dans d'étroites limites. On voit par ces formules que l'intervalle des limites diminue et que la probabilité augmente à mesure que l'on considère plus de naissances, en sorte que les Tables représenteraient exactement la vraie loi de la mortalité, si le nombre des naissances employées devenait infini.

Une Table de mortalité est donc une Table des probabilités de la vie humaine. Le rapport des individus inscrits à côté de chaque année au nombre des naissances est la probabilité qu'un nouveau-né atteindra cette année. Comme on estime la valeur de l'espérance en faisant une somme des produits de chaque bien espéré par la probabilité de l'obtenir, on peut également évaluer la durée moyenne de la vie en ajoutant les produits de chaque année par la demi-somme des probabilités d'en atteindre le commencement et la fin, ce qui conduit au résultat trouvé ci-dessus. Mais cette manière d'envisager la durée moyenne de la vie a l'avantage de faire voir que, dans une population stationnaire, c'est-à-dire telle que le nombre des naissances égale celui des morts, la durée moyenne de la vie est le rapport même de la population aux naissances annuelles; car, la population étant supposée stationnaire, le nombre des individus d'un âge compris entre deux années consécutives de la Table est égal au nombre des naissances annuelles multiplié par la demi-somme des probabilités d'atteindre ces années; la somme de tous ces produits sera donc la population entière; or il est aisé de voir que cette somme, divisée par le nombre des naissances annuelles, coïncide avec la durée moyenne de la vie telle que nous venons de la définir.

Il est facile, au moyen d'une Table de mortalité, de former la Table correspondante de la population supposée stationnaire. Pour cela, on prend des moyennes arithmétiques entre les nombres de la Table de mortalité correspondants aux âges, zéro et un an, un et deux ans, deux et trois ans, etc. La somme de toutes ces moyennes est la population entière : on l'écrit à côté de l'âge zéro. On retranche de cette somme la première moyenne, et le reste est le nombre des individus d'un an et au-dessus : on l'écrit à côté de l'année 1. On retranche de ce premier reste la seconde moyenne; ce second reste est le nombre des individus de deux années et au-dessus; on l'écrit à côté de l'année 2, et ainsi de suite.

Tant de causes variables influent sur la mortalité, que les Tables qui la représentent doivent changer suivant les lieux et les temps. Les divers états de la vie offrent à cet égard des différences sensibles relatives aux fatigues et aux dangers inséparables de chaque état, et dont il est indispensable de tenir compte dans les calculs fondés sur la durée de la vie. Mais ces différences n'ont pas encore été suffisamment observées. Elles le seront un jour; alors on saura quel sacrifice de la vie chaque profession exige, et l'on profitera de ces connaissances pour en diminuer les dangers.

La salubrité plus ou moins grande du sol, son élévation, sa température, les mœurs des habitants et les opérations des gouvernements ont sur la mortalité une influence considérable. Mais il faut toujours faire précéder la recherche de la cause des différences observées par celle de la probabilité avec laquelle cette cause est indiquée. Ainsi le rapport de la population aux naissances annuelles, que l'on a vu s'élever en France à vingt-huit et un tiers, n'est pas égal à vingt-cinq dans l'ancien duché de Milan. Ces rapports, établis l'un et l'autre sur un grand nombre de naissances, ne permettent pas de révoquer en doute l'existence dans le Milanais d'une cause spéciale de mortalité, qu'il importe au gouvernement de ce pays de rechercher et de faire disparaître.

Le rapport de la population aux naissances s'accroîtrait encore, si l'on parvenait à diminuer ou à éteindre quelques maladies dangereuses et très répandues. C'est ce que l'on a fait heureusement pour la petite vérole, d'abord par l'inoculation de cette maladie, ensuite d'une manière beaucoup plus avantageuse, par l'inoculation de la vaccine, découverte inestimable de Jenner, qui par là s'est rendu l'un des plus grands bienfaiteurs de l'humanité.

La petite vérole a cela de particulier, savoir, que le même individu n'en est pas deux fois atteint, ou du moins ce cas est si rare que l'on peut en faire abstraction dans le calcul. Cette maladie, à laquelle peu de monde échappait avant la découverte de la vaccine, est souvent mortelle et fait périr un septième environ de ceux qu'elle attaque. Quelquefois elle est bénigne, et l'expérience a fait connaître qu'on lui donnait ce dernier caractère en l'inoculant sur des personnes saines, préparées par un bon régime, et dans une saison favorable. Alors le rapport des individus qu'elle fait périr aux inoculés n'est pas un trois-centième. Ce grand avantage de l'inoculation, joint à ceux de ne point altérer la beauté et de préserver des suites fâcheuses que la petite vérole naturelle entraîne souvent après elle, la fit adopter par un grand nombre de personnes. Sa pratique fut vivement recommandée ; mais, ce qui arrive presque toujours dans les choses sujettes à des inconvénients, elle fut vivement combattue. Au milieu de cette dispute, Daniel Bernoulli se proposa de soumettre au Calcul des probabilités l'influence de l'inoculation sur la durée moyenne de la vie. Manquant de données précises sur la mortalité produite par la petite vérole aux divers âges de la vie, il supposa que le danger d'avoir cette maladie et celui d'en périr sont les mêmes à tout âge. Au moyen de ces suppositions, il parvint, par une analyse délicate, à convertir une Table ordinaire de mortalité, dans celles qui auraient lieu si la petite vérole n'existait pas ou si elle ne faisait périr qu'un très petit nombre de malades, et il en conclut que l'inoculation augmenterait de trois ans au moins la durée moyenne de la vie, ce qui lui parut mettre hors doute l'avantage de cette opération. D'Alembert attaqua l'analyse de Bernoulli, d'abord sur l'incertitude de ses deux hypothèses, ensuite sur son insuffisance en ce que l'on n'y faisait point entrer la comparaison du danger prochain, quoique très petit, de périr par l'inoculation, au danger beaucoup plus grand, mais plus éloigné, de succomber à la petite vérole naturelle. Cette considération, qui disparaît lorsque l'on considère un grand nombre d'individus, est par là indifférente aux gouvernements, et laisse subsister pour eux les avantages de l'inoculation ; mais elle est d'un grand poids pour un père de famille qui doit craindre, en faisant inoculer ses enfants, de voir bientôt périr ce qu'il a de plus cher au monde et d'en être cause. Beaucoup de parents étaient retenus par cette crainte, que la découverte de la vaccine a heureusement dissipée. Par un de ces mystères que la nature nous offre si fréquemment, le vaccin est un préservatif de la petite vérole, aussi sûr que le virus variolique, et il n'a aucun danger ; il n'expose à aucune maladie et ne demande que très peu de soins. Aussi sa pratique s'est-elle promptement répandue, et, pour la rendre universelle, il ne reste plus à vaincre que l'inertie naturelle du peuple, contre laquelle il faut lutter sans cesse, même lorsqu'il s'agit de ses plus chers intérêts.

Le moyen le plus simple de calculer l'avantage que produirait l'extinction d'une maladie consiste à déterminer par l'observation le nombre d'individus d'un âge donné qu'elle fait périr chaque année, et à le retrancher du nombre des morts au même âge. Le rapport de la différence au nombre total d'individus de l'âge donné serait la probabilité de périr dans l'année, à cet âge, si la maladie n'existait pas. En faisant donc une somme de ces probabilités depuis la naissance jusqu'à un âge quelconque, et retranchant cette somme de l'unité, le reste sera la probabilité de vivre jusqu'à cet âge, correspondante à l'extinction de la maladie. La série de ces probabilités sera la Table de mortalité, relative à cette hypothèse, et l'on en conclura, par ce qui précède, la durée moyenne de la vie. C'est ainsi que Duvillard a trouvé que l'accroissement de la durée moyenne de la vie, dû à l'inoculation de la vaccine, est de trois ans au moins. Un accroissement aussi considérable en produirait un fort grand dans la population, si d'ailleurs elle n'était pas restreinte par la diminution relative des subsistances.

C'est principalement par le défaut des subsistances que la marche progressive de la population est arrêtée. Dans toutes les espèces d'animaux et de végétaux, la nature tend sans cesse à augmenter le nombre des individus, jusqu'à ce qu'ils soient au niveau des moyens de subsister. Dans l'espèce humaine, les causes morales ont une grande influence sur la population. Si le sol, par de faciles défrichements, peut fournir une nourriture abondante à des générations nouvelles, la certitude de faire vivre une nombreuse famille encourage les mariages et les rend plus précoces et plus féconds. Sur un sol pareil, la population et les naissances doivent croître à la fois en progression géométrique. Mais, quand les défrichements deviennent plus difficiles et plus rares, alors l'accroissement de la population diminue; elle se rapproche continuellement de l'état variable des subsistances, en faisant autour de lui des oscillations, à peu près comme un pendule, dont on promène d'un mouvement retardé le point de suspension, oscille autour de ce point par sa pesanteur. Il est difficile d'évaluer le maximum d'accroissement de la population; il paraît, d'après quelques observations, que dans de favorables circonstances la population de l'espèce humaine pourrait doubler tous les quinze ans. On estime que, dans l'Amérique septentrionale, la période de ce doublement est de vingt-deux années. Dans cet état de choses, la population, les naissances, les mariages, la mortalité, tout croît suivant la même progression géométrique dont on a le rapport constant des termes consécutifs par l'observation des naissances annuelles à deux époques.

Une Table de mortalité représentant les probabilités de la vie humaine, on peut déterminer à son moyen la durée des mariages. Supposons, pour simplifier, que la mortalité soit la même pour les deux sexes, on aura la probabilité que le mariage subsistera un an, ou deux, ou trois, ..., en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun soit le produit des deux nombres de la Table, correspondants aux âges des conjoints, et dont les numérateurs soient les produits successifs des nombres correspondants à ces âges augmentés d'une, de deux, de trois, ... années. La somme de ces fractions, augmentée d'un demi, sera la durée moyenne du mariage, l'année étant prise pour unité. Il est facile d'étendre la même règle à la durée moyenne d'une association formée de trois ou d'un plus grand nombre d'individus.

Des bénéfices des établissements qui dependent de la probabilité des événements.

Rappelons ici ce que nous avons dit en parlant de l'espérance. On a vu que, pour obtenir l'avantage qui résulte de plusieurs événements simples, dont les uns produisent un bien, et les autres une perte, il faut ajouter les produits de la probabilité de chaque événement favorable par le bien qu'il procure, et retrancher de leur somme celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable par la perte qui y est attachée. Mais, quel que soit l'avantage exprimé par la différence de ces sommes, un seul événement composé de ces événements simples ne garantit point de la crainte d'éprouver une perte réelle. On conçoit que cette crainte doit diminuer lorsque l'on multiplie l'événement composé. L'Analyse des Probabilités conduit à ce théorème général :

Par la répétition d'un événement avantageux, simple ou composé, le bénéfice réel devient de plus en plus probable et s'accroît sans cesse : il devient certain dans l'hypothèse d'un nombre infini de répétitions, et, en le divisant par ce nombre, le quotient ou le bénéfice moyen de chaque événement est l'espérance mathématique elle-même ou l'avantage relatif à l'événement. Il en est de même de la perte qui devient certaine à la longue, pour peu que l'événement soit désavantageux.

Ce théorème sur les bénéfices et les pertes est analogue à ceux que nous avons donnés précédemment sur les rapports qu'indique la répétition indéfinie des événements simples ou composés, et, comme eux, il prouve que la régularité finit par s'établir dans les choses même les plus subordonnées à ce que nous nommons *hasard*.

Lorsque les événements sont en grand nombre, l'Analyse donne encore une expression fort simple de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites déterminées, expression qui rentre dans la loi générale de la probabilité que nous avons donnée ci-dessus, en parlant des probabilités qui résultent de la multiplication indéfinie des événements.

C'est de la vérité du théorème précédent que dépend la stabilité des établissements fondés sur les probabilités. Mais, pour qu'il puisse leur être appliqué, il faut que ces établissements, par de nombreuses affaires, multiplient les événements avantageux.

On a fondé sur les probabilités de la vie humaine divers établissements, tels que les rentes viagères et les tontines. La méthode la plus générale et la plus simple de calculer les bénéfices et les charges de ces établissements consiste à les réduire en capitaux actuels. L'intérêt annuel de l'unité est ce que l'on nomme *taux de l'intérêt*. A la fin de chaque année, un capital acquiert pour facteur l'unité plus le taux de l'intérêt; il croît donc suivant une progression géométrique dont ce facteur est la raison. Ainsi, par l'effet du temps, il devient immense. Si, par exemple, le taux de l'intérêt est $\frac{1}{20}$ ou de cinq pour cent, le capital double à fort peu près en quatorze ans, quadruple en vingt-neuf ans, et dans moins de trois siècles, il devient deux millions de fois plus considérable.

Un accroissement aussi prodigieux a fait naître l'idée de s'en servir, pour amortir la dette publique. Si l'on crée un premier fonds d'amortissement que l'on place sans cesse avec les intérêts, sur les effets publics, en profitant surtout des moments de baisse, et si, lorsque les besoins de l'État obligent à faire des emprunts, on en consacre une partie à l'accroissement du fonds d'amortissement, il est visible que ces opérations auront le double avantage d'accroître ce fonds et de soutenir le crédit et les effets publics, et qu'à la longue, la caisse d'amortissement absorbera une grande partie de la dette nationale. D'heureuses expériences ont pleinement confirmé ces avantages. Mais la fidélité dans les engagements et la stabilité, si nécessaires au succès de pareils établissements, ne peuvent être bien garanties que par un gouvernement dans lequel la puissance législative est divisée en plusieurs pouvoirs indépendants. La confiance qu'inspire le concours nécessaire de ces pouvoirs double la force de l'État, et le Souverain lui-même gagne alors en puissance légale beaucoup plus qu'il ne perd en puissance arbitraire.

Il résulte de ce qui précède que le capital actuel, équivalent à une somme qui ne doit être payée qu'après un certain nombre d'années, est égal à cette somme multipliée par la probabilité qu'elle sera payée à cette époque, et divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt et élevée à une puissance exprimée par le nombre de ces années.

Il est facile d'appliquer ce principe aux rentes viagères sur une ou sur plusieurs têtes, et aux caisses d'épargne et d'assurance d'une nature quelconque. Supposons que l'on se propose de former une Table de rentes viagères, d'après une Table donnée de mortalité. Une rente viagère payable au bout de cinq ans, par exemple, et réduite en capital actuel, est, par ce principe, égale au produit des deux quantités suivantes, savoir, la rente divisée par la cinquième puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et la probabilité de la payer. Cette probabilité est le rapport inverse du nombre des individus inscrits dans la Table, vis-à-vis de l'âge de celui qui constitue la rente, au nombre inscrit vis-à-vis de cet âge augmenté de cinq années. En formant donc une suite de fractions dont les dénominateurs soient les produits du nombre de personnes indiquées dans la Table de mortalité comme vivantes à l'âge de celui qui constitue la rente, par les puissances successives de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont les numérateurs soient les produits de la rente par le nombre des personnes vivantes au même âge augmenté successivement d'une année, de deux années, ..., la somme de ces fractions sera le capital requis pour la rente viagère à cet âge.

Supposons maintenant qu'une personne veuille, au moyen d'une rente viagère, assurer à ses héritiers un capital payable à la fin de l'année de sa mort. Pour déterminer la valeur de cette rente, on peut imaginer que la personne emprunte en viager à une caisse ce capital divisé par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et qu'elle le place à intérêt perpétuel à la même caisse. Il est clair que ce capital sera dû par la caisse à ses héritiers, à la fin de l'année de sa mort; mais elle n'aura payé, chaque année, que l'excès de l'intérêt viager sur l'intérêt perpétuel. La Table des rentes viagères fera donc connaître ce que la personne doit payer annuellement à la caisse, pour assurer ce capital après sa mort.

Les assurances maritimes, celles contre les incendies et les orages, et généralement tous les établissements de ce genre, se calculent par les mêmes principes. Un négociant a des vaisseaux en mer, il veut assurer leur valeur et celle de leur cargaison contre les dangers qu'ils peuvent courir; pour cela, il donne une somme à une compagnie qui lui répond de la valeur estimée de ses cargaisons et de ses vaisseaux. Le rapport de cette valeur à la somme qui doit être donnée pour prix de l'assurance dépend des dangers auxquels les vaisseaux sont exposés, et ne peut être apprécié que par des observations nombreuses sur le sort des vaisseaux partis du port pour la même destination.

Si les personnes assurées ne donnaient à la compagnie d'assurances que la somme indiquée par le Calcul des Probabilités, cette compagnie ne pourrait pas subvenir aux dépenses de son établissement; il faut donc qu'elles payent d'une somme plus forte le prix de leur assurance. Mais alors quel est leur avantage? C'est ici que la considération du désavantage moral attaché à l'incertitude devient nécessaire. On conçoit que le jeu le plus égal devenant, comme on l'a vu précédemment, désavantageux parce que le joueur échange une mise certaine contre un bénéfice incertain, l'assurance par laquelle on échange l'incertain contre le certain doit être avantageuse. C'est, en effet, ce qui résulte de la règle que nous avons donnée ci-dessus pour déterminer l'espérance morale, et par laquelle on voit, de plus, jusqu'où peut s'étendre le sacrifice que l'on doit faire à la compagnie d'assurances, en conservant toujours un avantage moral. Cette compagnie peut donc, en procurant cet avantage, faire elle-même un grand bénéfice, si le nombre des assurés est très considérable, condition nécessaire à son existence durable. Alors son bénéfice devient certain, et ses espérances mathématique et morale coïncident. Car l'Analyse conduit à ce théorème général, savoir, que si les expectatives sont très nombreuses, les deux espérances approchent sans cesse l'une de l'autre, et finissent par coïncider dans le cas d'un nombre infini d'expectatives.

Nous avons dit, en parlant des espérances mathématique et morale, qu'il y a un avantage moral à répartir les risques d'un bien que l'on attend sur plusieurs de ses parties. Ainsi, pour faire parvenir une somme d'argent d'un port éloigné, il vaut mieux la répartir sur plusieurs vaisseaux que de l'exposer sur un seul. C'est ce que l'on fait au moyen des assurances mutuelles. Si deux personnes ayant chacune la même somme sur deux vaisseaux différents, partis du même port pour la même destination, conviennent de partager également tout l'argent qui leur arrivera, il est clair que, par cette convention, chacune d'elles répartit également sur les deux vaisseaux la somme qu'elle attend. A la vérité, ce genre d'assurances laisse toujours de l'incertitude sur la perte que l'on peut craindre. Mais cette incertitude diminue à mesure que le nombre des associés augmente; l'avantage moral s'accroît de plus en plus, et finit par coïncider avec l'avantage mathématique, sa limite naturelle. Cela rend l'association d'assurances mutuelles, lorsqu'elle est très nombreuse, plus avantageuse aux assurés que les compagnies d'assurances qui, à raison du bénéfice qu'elles font, donnent un avantage moral toujours inférieur à l'avantage mathématique. Tous ces résultats sont, comme on l'a vu précédemment, indépendants de la loi qui exprime l'avantage moral.

On peut envisager un peuple libre comme une grande association dont les membres se garantissent mutuellement leurs propriétés, en supportant proportionnellement les charges de cette garantie. La confédération de plusieurs peuples leur donnerait des avantages analogues à ceux que chaque individu retire de la Société. Un Congrès de leurs représentants discuterait les objets d'une utilité commune à tous, et sans doute alors le système des poids, des mesures et des monnaies, proposé par les savants français, serait adopté dans ce Congrès, comme une des choses les plus utiles aux relations commerciales.

Parmi les établissements fondés sur les probabilités de la vie humaine, les meilleurs sont ceux dans lesquels, au moyen d'un léger sacrifice de son revenu, on assure son existence et celle de sa famille pour un temps où l'on doit craindre de ne plus suffire à ses besoins. Autant le jeu est immoral, autant ces établissements sont avantageux aux mœurs, en favorisant les plus doux penchants de la nature. Le Gouvernement doit donc les encourager et les respecter dans les vicissitudes de la fortune publique; car les espérances qu'ils présentent portant sur un avenir éloigné, ils ne peuvent prospérer qu'à l'abri de toute inquiétude sur leur durée. C'est un avantage que l'institution du Gouvernement représentatif leur assure.

Disons un mot des emprunts. Il est clair que, pour emprunter en perpétuel, il faut payer, chaque année, le produit du capital par le taux de l'intérêt. Mais on peut vouloir acquitter ce capital en payements égaux faits pendant un nombre déterminé d'années, payements que l'on nomme *annuités*, et dont on obtient ainsi la valeur. Chaque annuité, pour être réduite au moment actuel, doit être divisée par une puissance de l'unité augmentée du taux de l'intérêt, égale au nombre des années après lesquelles on doit payer cette annuité. En formant donc une progression géométrique dont le premier terme soit l'annuité divisée par l'unité augmentée du taux de l'intérêt, et dont le dernier soit cette annuité divisée par la même quantité élevée à une puissance égale au nombre des années pendant lesquelles le payement doit avoir lieu, la somme de cette progression sera équivalente au capital emprunté, ce qui détermine la valeur de l'annuité. Si l'on veut faire un emprunt viager, on observera que, les Tables de rentes viagères donnant le capital requis pour constituer une rente viagère à un âge quelconque, une simple proportion donnera la rente que l'on doit faire à l'individu dont on emprunte un capital. On peut calculer par ces principes tous les modes possibles d'emprunt.

Des illusions dans l'estimation des probabilites.

L'esprit a ses illusions, comme le sens de la vue, et de même que le toucher corrige celles-ci, la réflexion et le calcul corrigent les premières. La probabilité fondée sur une expérience journalière, ou exagérée par la crainte et l'espérance, nous frappe plus qu'une probabilité supérieure, mais qui n'est qu'un simple résultat du calcul. Ainsi nous ne craignons point, pour de faibles avantages, d'exposer notre vie à des dangers beaucoup moins invraisemblables que la sortie d'un quine à la loterie de France, et cependant personne ne voudrait se procurer les mêmes avantages, avec la certitude de perdre la vie, si ce quine arrivait.

Nos passions, nos préjugés et les opinions dominantes, en exagérant les probabilités qui leur sont favorables et en atténuant les probabilités contraires, sont des sources abondantes d'illusions dangereuses.

Les maux présents et la cause qui les fait naître nous affectent beaucoup plus que le souvenir des maux produits par la cause contraire; ils nous empêchent d'apprécier avec justesse les inconvénients des uns et des autres et la probabilité des moyens propres à nous en préserver. C'est ce qui porte alternativement vers le despotisme et vers l'anarchie les peuples sortis de l'état de repos, dans lequel ils ne rentrent jamais qu'après de longues et cruelles agitations.

Cette impression vive que nous recevons de la présence des événements, et qui nous laisse à peine remarquer les événements contraires observés par d'autres, est une cause principale d'erreur, dont on ne peut trop se garantir.

C'est principalement au jeu qu'une foule d'illusions entretiennent l'espérance et la soutiennent contre les chances défavorables. La plupart de ceux qui mettent aux loteries ne savent pas combien de chances sont à leur avantage, combien leur sont contraires. Ils n'envisagent que la possibilité, pour une mise légère, de gagner une somme considérable, et les projets que leur imagination enfante exagèrent à leurs yeux la probabilité de l'obtenir; le pauvre surtout, excité par le désir d'un meilleur sort, expose à ce jeu son nécessaire, en s'attachant aux combinaisons les plus défavorables qui lui promettent un grand bénéfice. Tous seraient sans doute effrayés du nombre immense des mises perdues, s'ils pouvaient les connaître; mais on prend soin, au contraire, de donner aux gains une grande publicité, qui devient une nouvelle cause d'excitation à ce jeu funeste.

Lorsqu'à la loterie de France un numéro n'est pas sorti depuis longtemps, la foule s'empresse de le couvrir de mises. Elle juge que le numéro resté longtemps sans sortir doit, au premier tirage, sortir de préférence aux autres. Une erreur aussi commune me paraît tenir à une illusion par laquelle on se reporte involontairement à l'origine des événements. Il est, par exemple, très peu vraisemblable qu'au jeu de *croix* ou *pile* on amènera *croix* dix fois de suite. Cette invraisemblance qui nous frappe encore, lorsqu'il est arrivé neuf fois, nous porte à croire qu'au dixième coup *pile* arrivera. Cependant le passé, en indiquant dans la pièce une plus grande pente pour *croix* que pour *pile*, rend le premier de ces événements plus probable que l'autre; il augmente, comme on l'a vu, la probabilité d'amener *croix* au coup suivant. Une illusion semblable persuade à beaucoup de monde que l'on peut gagner sûrement à la loterie, en plaçant, chaque fois, sur un même numéro jusqu'à sa sortie, une mise dont le produit surpasse la somme de toutes les mises. Mais, quand même de semblables spéculations ne seraient pas souvent arrêtées par l'impossibilité de les soutenir, elles ne diminueraient point le désavantage mathématique des spéculateurs et elles accroîtraient leur désavantage moral, puisqu'à chaque tirage ils exposeraient une plus grande partie de leur fortune.

J'ai vu des hommes, désirant ardemment d'avoir un fils, n'apprendre qu'avec peine les naissances des garçons dans le mois où ils allaient devenir pères. S'imaginant que le rapport de ces naissances à celles des filles devait être le même à la fin de chaque mois, ils jugeaient que les garçons déjà nés rendaient plus probables les naissances prochaines des filles. Ainsi l'extraction d'une boule blanche, d'une urne qui renferme un nombre limité de boules blanches et noires dans un rapport donné, accroît la probabilité d'extraire une boule noire au tirage suivant. Mais cela cesse d'avoir lieu, quand le nombre des boules de l'urne est illimité, comme on doit le supposer, pour assimiler ce cas à celui des naissances. Si dans le cours d'un mois il était né beaucoup plus de garçons que de filles, on pourrait soupçonner que, vers le temps de leur conception, une cause générale a favorisé les conceptions masculines, ce qui rendrait la naissance prochaine d'un garçon plus probable. Les événements irréguliers de la nature ne sont pas exactement comparables à la sortie des numéros d'une loterie dans laquelle tous les numéros sont mêlés à chaque tirage, de manière à rendre les chances de leur sortie parfaitement égales. La fréquence d'un de ces événements semble indiquer une cause un peu durable qui le favorise, ce qui augmente la probabilité de son prochain retour, et sa répétition longtemps prolongée, telle qu'une longue suite de jours pluvieux, peut développer des causes inconnues de son changement; en sorte qu'à chaque événement attendu nous ne sommes point, comme à chaque tirage d'une loterie, ramenés au même état d'indécision sur ce qui doit arriver. Mais, à mesure que l'on multiplie les observations de ces événements, la comparaison de leurs résultats avec ceux des loteries devient plus exacte.

Par une illusion contraire aux précédentes, on cherche dans les tirages passés de la loterie de France les numéros le plus souvent sortis, pour en former des combinaisons sur lesquelles on croit placer sa mise avec avantage. Mais, vu la manière dont le mélange des numéros se fait à cette loterie, le passé ne doit avoir sur l'avenir aucune influence. Les sorties plus fréquentes d'un numéro ne sont que des anomalies du hasard : j'en ai soumis plusieurs au calcul, et j'ai constamment trouvé qu'elles étaient renfermées dans des limites que la supposition d'une égale possibilité de sortie de tous les numéros permet d'admettre sans invraisemblance.

Dans une longue série d'événements du même genre, les seules chances du hasard doivent quelquefois offrir ces veines singulières de bonheur ou de malheur, que la plupart des joueurs ne manquent pas d'attribuer à une sorte de fatalité. Il arrive souvent, dans les jeux qui dépendent à la fois du hasard et de l'habileté des joueurs, que celui qui perd, troublé par sa perte, cherche à la réparer par des coups hasardeux qu'il éviterait dans une autre situation : il aggrave ainsi son propre malheur, et il en prolonge la durée. C'est cependant alors que la prudence devient nécessaire, et qu'il importe de se convaincre que le désavantage moral attaché aux chances défavorables s'accroit par le malheur même.

Le sentiment par lequel l'homme s'est placé longtemps, au centre de l'univers, en se considérant comme l'objet spécial des soins de la nature, porte chaque individu à se faire le centre d'une sphère plus ou moins étendue, et à croire que le hasard a pour lui des préférences. Soutenus par cette opinion, les joueurs exposent souvent des sommes considérables à des jeux dont ils savent que les chances leur sont contraires. Dans la conduite de la vie, une semblable opinion peut quelquefois avoir des avantages; mais le plus souvent elle conduit à des entreprises funestes. Ici, comme en tout, les illusions sont dangereuses et la vérité seule est généralement utile.

Un des grands avantages du Calcul des Probabilités est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnait qu'ils trompent souvent lorsqu'on peut les soumettre au calcul, on doit en conclure que sur d'autres objets il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême. Prouvons cela par des exemples.

Une urne renferme quatre boules noires ou blanches, mais qui ne sont pas toutes de la même couleur. On a extrait une de ces boules. dont la couleur est blanche, et que l'on a remise dans l'urne pour procéder encore à de semblables tirages. On demande la probabilité de n'extraire que des boules noires, dans les quatre tirages suivants.

Si les boules blanches et noires étaient en nombre égal, cette probabilité serait la quatrième puissance de la probabilité $\frac{1}{2}$ d'extraire une boule noire à chaque tirage; elle serait donc $\frac{1}{16}$. Mais l'extraction d'une boule blanche au premier tirage indique une supériorité dans le nombre des boules blanches de l'urne; car, si l'on suppose dans l'urne trois boules blanches et une noire, la probabilité d'en extraire une boule blanche est $\frac{3}{4}$; elle est $\frac{2}{4}$ si l'on suppose deux boules blanches et deux noires; enfin elle se réduit à $\frac{1}{4}$ si l'on suppose trois boules noires et une blanche. Suivant le principe de la probabilité des causes, tirée des événements, les probabilités de ces trois suppositions sont entre elles comme les quantités $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; elles sont par conséquent égales à $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$. Il y a ainsi cinq contre un à parier que le nombre des boules noires est inférieur ou tout au plus égal à celui des blanches. Il semble donc que, d'après l'extraction d'une boule blanche au premier tirage, la probabilité d'extraire de suite quatre boules noires doive être moindre que dans le cas de l'égalité des couleurs, ou plus petite que $\frac{1}{16}$. Cependant cela n'est pas, et l'on trouve, par un calcul fort simple, cette probabilité plus grande que $\frac{1}{14}$. En effet, elle serait la quatrième puissance de $\frac{1}{4}$, de $\frac{2}{4}$ et de $\frac{3}{4}$ dans la première, la seconde et la troisième des suppositions précédentes sur les couleurs des boules de l'urne. En multipliant respectivement chaque puissance par la probabilité de la supposition correspondante, ou par $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$, la somme des produits sera la probabilité d'extraire de suite quatre boules noires. On a ainsi pour cette probabilité $\frac{29}{384}$, fraction plus grande que $\frac{1}{14}$. Ce paradoxe s'explique en considérant que l'indication de la supériorité des boules blanches sur les noires par le premier tirage n'exclut point la supériorité des boules noires sur les blanches, supériorité qu'exclut la supposition de l'égalité des couleurs. Or cette supériorité, quoique peu vraisemblable, doit rendre la probabilité d'amener de suite un nombre donné de boules noires plus grande que dans cette supposition, si ce nombre est considérable, et l'on vient de voir que cela commence lorsque le nombre donné est égal à quatre.

Considérons encore une urne qui renferme plusieurs boules blanches et noires. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une boule blanche et une noire. On peut alors parier, avec égalité, d'extraire une boule blanche dans un tirage. Mais il semble que, pour l'égalité du pari, on doive donner, à celui qui parie d'extraire la boule blanche, deux tirages, si l'urne renferme deux boules blanches et une noire; trois tirages, si elle renferme trois boules blanches et une noire, et ainsi du reste; on suppose qu'après chaque tirage la boule extraite est remise dans l'urne.

Mais il est facile de se convaincre que ce premier aperçu est erroné. En effet, dans le cas de deux boules noires sur une blanche, la probabilité d'extraire de l'urne deux boules noires en deux tirages est la seconde puissance de $\frac{2}{3}$, ou $\frac{4}{9}$; mais cette probabilité, ajoutée à celle d'amener une boule blanche en deux tirages, est la certitude ou l'unité, puisqu'il est certain que l'on doit amener deux boules noires, ou au moins une boule blanche; la probabilité de ce dernier cas est donc $\frac{5}{9}$, fraction plus grande que $\frac{1}{2}$. Il y aurait plus d'avantage encore à parier d'amener une boule blanche en cinq tirages, lorsque l'urne contient cinq boules noires et une blanche; ce pari est même avantageux en quatre tirages : il revient alors à celui d'amener six en quatre coups avec un seul dé.

Le chevalier de Méré, ami de Pascal, et qui fit naître le Calcul des Probabilités en excitant ce grand géomètre à s'en occuper, lui disait « qu'il avait trouvé fausseté dans les nombres par cette raison. Si l'on entreprend de faire six avec un dé, il y a de l'avantage à l'entreprendre en quatre coups, comme de 671 à 625. Si l'on entreprend de faire sonnez avec deux dés, il y a désavantage à l'entreprendre en vingt-quatre coups. Néanmoins 24 est à 36, nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6, nombre des faces d'un dé. » « Voilà », écrivait Pascal à Fermat, « quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se démentait..... Il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre : c'est, comme vous savez, un grand défaut. » Le chevalier de Méré, trompé par une fausse analogie, pensait que, dans le cas de l'égalité des paris, le nombre des coups doit croître proportionnellement au nombre de toutes les chances possibles, ce qui n'est pas exact, mais ce qui approche d'autant plus de l'être, que ce nombre est plus grand.

On a essayé d'expliquer la supériorité des naissances des garçons sur les naissances des filles, par le désir général des pères, d'avoir un fils qui perpétue leur nom. Ainsi, en imaginant une urne remplie d'une infinité de boules blanches et noires en nombre égal, et supposant un grand nombre de personnes dont chacune tire une boule de cette urne et continue ce tirage avec l'intention de s'arrêter quand elle aura extrait une boule blanche, on a cru que cette intention devait rendre le nombre des boules blanches extraites supérieur à celui des noires. En effet, elle donne nécessairement, après tous les tirages, un nombre de boules blanches au moins égal à celui des personnes, et il est possible que ces tirages n'amènent aucune boule noire. Mais il est facile de reconnaître que cet aperçu n'est qu'une illusion; car, si l'on conçoit que dans un premier tirage toutes les personnes tirent à la fois une boule de l'urne, il est évident que leur intention ne peut avoir aucune influence sur la couleur des boules qui doivent sortir à ce tirage. Son unique effet sera d'exclure du second tirage les personnes qui auront amené une boule blanche au premier. Il est pareillement visible que l'intention des personnes qui prendront part au nouveau tirage n'influera point sur la couleur des boules qui sortiront, et qu'il en sera de même des tirages suivants. Cette intention n'influera donc point sur la couleur des boules extraites dans l'ensemble des tirages : seulement elle fera participer plus ou moins de personnes à chacun d'eux. Le rapport des boules blanches extraites, aux noires, sera ainsi très peu différent de l'unité. Il suit de là que, le nombre des personnes étant supposé fort grand, si l'observation donne entre les couleurs extraites un rapport qui diffère sensiblement de l'unité, il est très probable que la même différence a lieu à fort peu près entre l'unité et le rapport des boules blanches aux boules noires contenues dans l'urne.

Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibnitz et Daniel Bernoulli ont faite du Calcul des Probabilités à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable, il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient *plus un*, *moins un*, *plus un*, *moins un*, etc. En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivants, et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création, parce que, la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros, ou du néant. Ce fut ainsi que Leibnitz crut voir l'image de la création dans son Arithmétique binaire, où il n'employait que les deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu, et zéro le néant, et que l'Être suprême avait tiré du néant tous les êtres, comme l'unité avec le zéro exprime tous les nombres dans ce système d'Arithmétique. Cette idée plut tellement à Leibnitz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal de Mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblême de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors, qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

Leibnitz, toujours conduit par une métaphysique singulière et très déliée, considéra que la suite *plus un*, *moins un*, *plus un*, etc., devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair, et comme dans l'infini il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité, et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces fractions la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais, lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessent d'être convergentes : elles n'ont de valeurs qu'autant qu'on les arrête. Le rapport remarquable de cette application du Calcul des Probabilités avec les limites des valeurs des séries périodiques suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série *plus un, moins un, plus un*, etc., peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat, ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les Sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.

Nous sommes portés naturellement à croire que l'ordre suivant lequel nous voyons les choses se renouveler sur la Terre a existé de tout temps et subsistera toujours. En effet, si l'état présent de l'univers était entièrement semblable à l'état antérieur qui l'a produit, il ferait naître à son tour un état pareil; la succession de ces états serait donc alors éternelle. J'ai reconnu, par l'application de l'Analyse à la loi de la pesanteur universelle, que les mouvements de rotation et de révolution des planètes et des satellites, et la position de leurs orbites et de leurs équateurs ne sont assujettis qu'à des inégalités périodiques. En comparant aux anciennes éclipses la théorie de l'équation séculaire de la Lune, j'ai trouvé que depuis Hipparque la durée du jour n'a pas varié d'un centième de seconde, et que la température moyenne de la Terre n'a pas diminué d'un centième de degré. Ainsi la stabilité de l'ordre actuel paraît établie à la fois par la théorie et par les observations. Mais cet ordre est troublé par diverses causes qu'un examen attentif fait apercevoir, et qu'il est impossible de soumettre au calcul.

Les actions de l'Océan, de l'atmosphère et des météores, les tremblements de terre et les éruptions de volcans agitent sans cesse la surface terrestre et doivent y opérer à la longue des changements considérables. La température des climats, le volume de l'atmosphère et la proportion des gaz qui la constituent peuvent varier d'une manière insensible. Les instruments et les moyens propres à déterminer ces variations étant nouveaux, l'observation n'a pu jusqu'ici rien nous apprendre à cet égard. Mais il est très peu vraisemblable que les causes qui absorbent et renouvellent les gaz constitutifs de notre air en maintiennent exactement les quantités respectives. Une longue suite de siècles fera connaître les altérations qu'éprouvent tous ces éléments si essentiels à la conservation des êtres organisés. Quoique les monuments historiques ne remontent pas à une très haute antiquité, ils nous offrent cependant d'assez grands changements survenus par l'action lente et continue des agents naturels. En fouillant dans les entrailles de la Terre, on découvre de nombreux débris d'une nature jadis vivante et toute différente de la nature actuelle. D'ailleurs, si la Terre entière a été primitivement fluide, comme tout paraît l'indiquer, on conçoit qu'en passant de cet état à celui qu'elle a maintenant, sa surface a dû éprouver de prodigieux changements. Le ciel même, malgré l'ordre de ses mouvements, n'est pas inaltérable. La résistance de la lumière et des autres fluides éthérés et l'attraction des étoiles doivent, après un très grand nombre de siècles, considérablement altérer les mouvements planétaires. Les variations déjà observées dans les étoiles et dans la forme des nébuleuses font pressentir celles que le temps développera dans le système de ces grands corps. On peut représenter les états successifs de l'univers par une courbe dont le temps serait l'abscisse, et dont les ordonnées exprimeraient ces divers états. Connaissant à peine un élément de cette courbe, nous sommes loin de pouvoir remonter à son origine, et si, pour reposer l'imagination toujours inquiète d'ignorer la cause des phénomènes qui l'intéressent, on hasarde quelques conjectures, il est sage de ne les présenter qu'avec une extrême réserve.

Il existe dans l'estimation des probabilités un genre d'illusions qui, dépendant spécialement des lois de l'organisation intellectuelle, exige pour s'en garantir un examen approfondi de ces lois. Le désir de pénétrer dans l'avenir, et les rapports de quelques événements remarquables avec les prédictions des astrologues, des devins et des augures, avec les pressentiments et les songes, avec les nombres et les jours réputés heureux ou malheureux, ont donné naissance à une foule de préjugés encore très répandus. On ne réfléchit point au grand nombre de non-coïncidences qui n'ont fait aucune impression ou que l'on ignore. Cependant il est nécessaire de les connaître, pour apprécier la probabilité des causes auxquelles on attribue les coïncidences. Cette connaissance confirmerait, sans doute, ce que la raison nous dicte à l'égard de ces préjugés. Ainsi le philosophe de l'antiquité auquel on montrait dans un temple, pour exalter la puissance du dieu qu'on y adorait, les *ex-voto* de tous ceux qui, après l'avoir invoqué, s'étaient sauvés du naufrage, fit une remarque conforme au Calcul des Probabilités, en observant qu'il ne voyait point inscrits les noms de ceux qui, malgré cette invocation, avaient péri. Cicéron a réfuté tous ces préjugés avec beaucoup de raison et d'éloquence, dans son *Traité de la divination*, qu'il termine par un passage que je vais citer; car on aime à retrouver chez les anciens les traits de la raison universelle qui, après avoir dissipé tous les préjugés par sa lumière, deviendra l'unique fondement des institutions humaines.

« Il faut », dit l'orateur romain, « rejeter la divination par les songes, et tous les préjugés semblables. La superstition partout répandue a subjugué la plupart des esprits et s'est emparée de la faiblesse des hommes. C'est ce que nous avons développé dans nos Livres sur la nature des dieux, et spécialement dans cet Ouvrage, persuadés que nous ferons une chose utile aux autres et à nous-même, si nous parvenons à détruire la superstition. Cependant (et je désire surtout qu'à cet égard ma pensée soit bien comprise), en détruisant la superstition, je suis loin de vouloir ébranler la religion. La sagesse nous prescrit de maintenir les institutions et les cérémonies de nos ancêtres touchant le culte des dieux. D'ailleurs, la beauté de l'univers et l'ordre des choses célestes nous forcent à reconnaître quelque nature supérieure qui doit être remarquée et admirée du genre humain. Mais, autant il convient de propager la religion qui est jointe à la connaissance de la nature, autant il faut travailler à extirper la superstition. Car elle vous tourmente, vous presse et vous poursuit sans cesse en tous lieux. Si vous consultez un devin ou un présage, si vous immolez une victime, si vous regardez le vol d'un oiseau, si vous rencontrez un chaldéen ou un aruspice, s'il éclaire, s'il tonne, si la foudre tombe, enfin s'il naît ou se manifeste une espèce de prodige, toutes choses dont souvent quelqu'une doit arriver, alors la superstition qui vous domine ne vous laisse point de repos. Le sommeil même, ce refuge des mortels dans leurs peines et dans leurs travaux, devient par elle un nouveau sujet d'inquiétudes et de frayeurs. »

Tous ces préjugés et les frayeurs qu'ils inspirent tiennent à des causes physiologiques qui continuent quelquefois d'agir fortement, après que la raison nous a désabusés. Mais la répétition d'actes contraires à ces préjugés peut toujours les détruire. C'est ce que nous allons établir par les considérations suivantes.

Aux limites de la Physiologie visible commence une autre Physiologie dont les phénomènes, beaucoup plus variés que ceux de la première, sont, comme eux, assujettis à des lois qu'il est très important de connaître. Cette Physiologie, que nous désignerons sous le nom de *Psychologie*, est sans doute une continuation de la Physiologie visible. Les nerfs, dont les filaments se perdent dans la substance médullaire du cerveau, y propagent les impressions qu'ils reçoivent des objets extérieurs, et ils y laissent des impressions permanentes qui modifient d'une manière inconnue le *sensorium* ou siège de la pensée. Les sens extérieurs ne peuvent rien apprendre sur la nature de ces modifications étonnantes par leur infinie variété et par la distinction et l'ordre qu'elles conservent dans le petit espace qui les renferme, modifications dont les phénomènes si variés de la lumière et de l'électricité nous donnent quelque idée. Mais, en appliquant aux observations du sens interne, qui peut seul les apercevoir, la méthode dont on a fait usage pour les observations des sens externes, on pourra porter dans la théorie de l'entendement humain la même exactitude que dans les autres branches de la Philosophie naturelle.

Déjà quelques-uns des principes [1] de Psychologie ont été reconnus et développés avec succès. Telle est la tendance de tous les êtres semblablement organisés à se mettre entre eux en harmonie. Cette tendance, qui constitue la *sympathie,* existe même entre des animaux d'espèces diverses; elle diminue à mesure que leur organisation est plus dissemblable. Parmi les êtres doués d'une même organisation, quelques-uns se coordonnent plus promptement entre eux qu'avec les autres. La nature inorganique nous offre de semblables phénomènes : deux pendules ou deux montres dont la marche est très peu différente, étant placées sur un même support, finissent par avoir exactement la même marche, et dans un système de cordes sonores, les vibrations de l'une d'elles font résonner toutes ses harmoniques. Ces effets, dont les causes bien connues ont été soumises au calcul, donnent une idée juste de la sympathie qui dépend de causes bien plus compliquées.

Un sentiment agréable accompagne presque toujours les mouvements sympathiques. Dans la plupart des espèces d'animaux, les individus s'attachent ainsi les uns aux autres et se réunissent en sociétés. Dans l'espèce humaine, les imaginations fortes ressentent un vrai bonheur à dominer les imaginations faibles, qui n'en ressentent pas moins à leur obéir. Les sentiments sympathiques excités à la fois dans un grand nombre d'individus s'accroissent par leur réaction mutuelle, comme on l'observe au théâtre. Le plaisir qui en résulte rapproche les personnes d'opinions semblables, que leur réunion exalte quelquefois jusqu'au fanatisme. De là naissent les sectes, la ferveur qu'elles excitent et la rapidité de leur propagation. Elles offrent dans l'histoire les plus

[1] Je désigne ici par la dénomination de *principes* les rapports généraux des phénomènes.

étonnants et les plus funestes exemples du pouvoir de la sympathie. On a souvent lieu de remarquer la facilité avec laquelle les mouvements sympathiques, tels que le rire, se communiquent par la simple vue, sans le concours d'aucune autre cause dans ceux qui les reçoivent. L'influence de la sympathie sur le sensorium est incomparablement plus puissante : les vibrations qu'elle y excite, lorsqu'elles sont extrêmes, produisent, en réagissant sur l'économie animale, des effets extraordinaires que l'on a, dans les siècles de superstition, attribués à des agents surnaturels, et qui par leur singularité méritent l'attention des observateurs.

La commisération, la bienveillance et beaucoup d'autres sentiments dérivent de la sympathie. Par elle on ressent les maux d'autrui, et l'on partage le contentement du malheureux qu'on soulage. Mais je ne veux ici qu'exposer les principes de Psychologie, sans entrer dans le développement de leurs conséquences.

L'un de ces principes, le plus fécond de tous, est celui de la liaison de toutes les choses qui ont eu dans le sensorium une existence simultanée ou régulièrement successive, liaison qui par le retour de l'une d'elles rappelle les autres. A ce principe se rattache l'emploi des signes et des langues pour le rappel des sensations et des idées, pour la formation et l'analyse des idées complexes, abstraites et générales, et pour le raisonnement. Plusieurs philosophes ont bien développé cet objet, qui, jusqu'à présent, constitue la partie réelle de la Métaphysique.

On peut encore établir en principe de Psychologie que les impressions souvent répétées d'un même objet sur divers sens modifient le sensorium, de manière que l'impression intérieure correspondante à l'impression extérieure de l'objet sur un seul sens devient très différente de ce qu'elle était à l'origine. Développons ce principe et pour cela considérons un aveugle de naissance, auquel on vient d'abaisser la cataracte. L'image de l'objet qui se peint sur sa rétine produit dans son sensorium une impression que je nommerai *seconde image*, sans prétendre l'assimiler à la première, ni rien affirmer sur sa nature. Cette seconde image n'est pas d'abord une représentation fidèle de l'objet. Mais la comparaison habituelle des impressions de cet objet par le tact, avec celles qu'il produit par la vue, finit, en modifiant le sensorium, par rendre la seconde image conforme à la nature représentée fidèlement par le toucher. L'image peinte sur la rétine ne change point; mais l'image intérieure qu'elle fait naître n'est plus la même, comme les expériences faites sur plusieurs aveugles de naissance auxquels on avait rendu la vue l'ont prouvé.

C'est principalement dans l'enfance que le sensorium acquiert ces modifications. L'enfant comparant sans cesse les impressions qu'il reçoit d'un même objet, par les organes de la vue et du toucher, rectifie les impressions de la vue. Il dispose son sensorium à donner aux objets visibles la forme indiquée par le tact dont les impressions s'associent intimement avec celles de la vue, qui les rappellent toujours. Alors les objets visibles sont aussi fidèlement représentés que les objets tangibles. Un rayon lumineux devient pour la vue ce qu'est un bâton pour le toucher. Par ce moyen, le premier de ces sens étend beaucoup plus loin que le second la sphère des objets de ses impressions. Mais la voûte céleste elle-même, à laquelle nous attachons les astres, est encore très bornée, et ce n'est que par une longue suite d'observations et de calculs que nous sommes parvenus à reconnaître les grandes distances de ces corps et à les éloigner indéfiniment dans l'immensité de l'espace.

Il paraît que, dans plusieurs espèces d'animaux, la disposition du sensorium qui nous fait apprécier les distances est naturelle. Mais l'homme, pour lequel la nature a remplacé presque en tout l'instinct par l'intelligence, a besoin, pour le suppléer, d'observations et de comparaisons, qui servent merveilleusement à développer ses facultés intellectuelles et à lui assurer par ce développement l'empire de la Terre.

Les images intérieures ne sont donc pas les effets d'une cause unique; elles résultent soit des impressions reçues simultanément par le même sens ou par des sens différents, soit des impressions intérieures rappelées par la mémoire. L'influence réciproque de ces impressions est un principe psychologique fécond en conséquences. Développons quelques-unes des principales.

Qu'un observateur, placé dans une profonde obscurité, voie à des distances différentes deux globes lumineux d'un même diamètre, ils lui paraîtront d'inégale grandeur. Leurs images intérieures seront proportionnelles aux images correspondantes, peintes sur la rétine. Mais si, l'obscurité venant à cesser, il aperçoit, en même temps que les globes, tout l'espace intermédiaire, cette vue agrandit l'image intérieure du globe le plus éloigné, et la rend presque égale à celle de l'autre globe. C'est ainsi qu'un homme, vu aux distances de 2^m et de 4^m, nous paraît de la même grandeur; son image intérieure ne varie point, quoique l'une des images peintes sur la rétine soit double de l'autre. C'est encore par l'impression des objets intermédiaires que la Lune à l'horizon nous semble plus grande qu'au zénith. On aperçoit au-dessus d'une branche voisine de l'œil un objet que l'on rapporte au loin et qui paraît fort grand. On vient ensuite à reconnaître le lien qui l'unit à la branche : sur-le-champ, la perception de ce lien change l'image intérieure, et la réduit à une dimension beaucoup moindre. Toutes ces choses ne sont point de simples jugements, comme quelques métaphysiciens l'ont pensé; elles sont des effets physiologiques dépendants des dispositions que le sensorium a contractées par la comparaison habituelle des impressions d'un même objet sur les organes de plusieurs sens, et spécialement sur ceux du toucher et de la vue.

L'influence des traces rappelées par la mémoire sur les impressions qu'excitent les objets extérieurs se fait remarquer dans un grand nombre de cas. On voit de loin des lettres, sans pouvoir distinguer le mot qu'elles expriment. Si quelqu'un prononce ce mot, ou si quelque circonstance en rappelle la mémoire, aussitôt l'image intérieure de ces lettres ainsi rappelées se superpose, si je puis ainsi dire, à l'image confuse produite par l'impression des caractères extérieurs et la rend distincte. La voix d'un acteur que vous entendez confusément devient distincte lorsque vous lisez ce qu'il récite. La vue des caractères rappelle les traces des sons qui leur répondent, ces traces, se mêlant aux sons confus de la voix, les font distinguer. La peur transforme souvent de cette manière les objets qu'une trop faible lumière ne fait pas reconnaître en objets effrayants qui ont avec eux de l'analogie. L'image de ces derniers objets, fortement retracée dans le sensorium par la crainte, se rend propre l'impression des objets extérieurs. Il est important de se garantir de cette cause d'illusion, dans les conséquences que l'on tire d'observations de choses qui ne font qu'une impression très légère; telles sont les observations de la dégradation de la lumière à la surface des planètes et des satellites, d'où l'on a conclu l'existence et l'intensité de leurs atmosphères et leurs mouvements de rotation. Il est souvent à craindre que des images intérieures ne s'assimilent ces impressions et le penchant qui nous porte à croire à l'existence des choses que représentent les impressions reçues par les sens.

Ce penchant remarquable tient à un caractère particulier qui distingue les impressions venant du dehors des traces produites par l'imagination ou rappelées par la mémoire. Mais il arrive quelquefois, par un désordre du sensorium ou des organes qui agissent sur lui, que ces traces ont le caractère et la vivacité des impressions extérieures; alors on juge présents leurs objets, on est visionnaire. Le calme et les ténèbres de la nuit favorisent ces illusions, qui dans le sommeil sont complètes et forment les rêves, dont on aura une juste idée, si l'on conçoit que les traces des objets qui se présentent à notre imagination dans l'obscurité acquièrent une grande intensité pendant le sommeil.

Tout porte à croire que, dans les somnambules, quelques-uns des sens ne sont pas complètement endormis. Si le sens du toucher, par exemple, reste encore un peu sensible au contact des objets extérieurs, les impressions faibles qu'il en reçoit, transmises au sensorium, peuvent, en se combinant avec les images du rêve d'un somnambule, les modifier et diriger ses mouvements. En examinant d'après cette considération les récits bien avérés des choses singulières opérées par les somnambules, il m'a paru que l'on pouvait en donner une explication fort simple.

Quelquefois les visionnaires croient entendre parler les personnages qu'ils se figurent, et ils ont avec eux une conversation suivie; les Ouvrages des médecins sont remplis de faits de ce genre.

Bonnet cite, comme l'ayant souvent observé, son aïeul maternel, « vieillard », dit-il, « plein de santé, qui, indépendamment de toute impression du dehors, aperçoit de temps en temps devant lui des figures d'hommes, de femmes, d'oiseaux, de voitures, de bâtiments, etc. Il voit ces figures se donner différents mouvements, s'approcher, s'éloigner, fuir, diminuer et augmenter de grandeur, paraître, disparaître, reparaître. Il voit les bâtiments s'élever sous ses yeux, etc. Mais il ne prend point ses visions pour des réalités; sa raison s'en amuse. Il ignore d'un moment à l'autre quelle vision va s'offrir à lui. Son cerveau est un théâtre qui exécute des scènes d'autant plus surprenantes pour le spectateur, qu'il ne les a point prévues. » En lisant l'histoire de Jeanne d'Arc, on est forcé de reconnaître une visionnaire de bonne foi dans cette fille admirable, dont l'exaltation courageuse contribua si puissamment à délivrer la France de ses ennemis. Il est vraisemblable que plusieurs de ceux qui se sont annoncés comme ayant reçu leurs doctrines d'un être surnaturel étaient visionnaires; ils ont d'autant mieux persuadé les autres, qu'ils étaient eux-mêmes persuadés. Les fraudes pieuses et les moyens violents, dont ensuite ils ont fait usage, leur ont paru justifiés par l'intention de propager ce qu'ils jugeaient être des vérités nécessaires aux hommes.

Un caractère particulier distingue des produits de l'imagination les traces rappelées par la mémoire et qui sont dues aux impressions des objets extérieurs. Il nous porte, comme par instinct, à reconnaître l'existence passée de ces objets, dans l'ordre que la mémoire nous présente. Les expériences que nous faisons à chaque instant de la vérité des conséquences que nous en tirons pour nous conduire fortifient ce penchant. Quel est le mécanisme qui dans cette opération du sensorium détermine notre jugement? Nous l'ignorons, et nous ne pouvons en observer que les effets. En vertu de ce mécanisme, les traces de la mémoire, quoique faibles, nous font apprécier leur intensité primitive, que nous pouvons ainsi comparer aux impressions semblables d'objets présents. Nous jugeons de cette manière qu'une couleur, que nous avons vue la veille, était plus vive que celle qui frappe maintenant notre vue.

Les impressions qui accompagnent les traces de la mémoire servent à nous en rappeler les causes. Ainsi, lorsqu'au souvenir d'une chose qui nous a été dite se joint le souvenir de la confiance que nous avons donnée au narrateur, si son nom nous échappe, nous le retrouvons en rappelant successivement les noms de ceux qui nous ont entretenus, jusqu'à ce que nous parvenions au nom qui nous a inspiré cette confiance.

Les objets présents que nous avons déjà vus réveillent les traces des choses qui dans la première vue leur étaient associées. Ces traces réveillent semblablement celles d'autres objets, et ainsi de suite, en sorte qu'à l'occasion d'une chose présente nous pouvons en rappeler une infinité d'autres et arrêter notre attention sur celles que nous voulons considérer.

Les impressions reçues dans l'enfance se conservent jusque dans l'extrême vieillesse, et se renouvellent, alors même que des impressions profondes de l'âge mûr sont entièrement effacées. Il semble que les premières impressions gravées profondément dans le sensorium n'attendent pour reparaître que l'affaiblissement des impressions subséquentes par l'âge ou par la maladie, à peu près comme les astres qu'effaçait la clarté du jour se montrent dans la nuit ou dans les éclipses de soleil.

Les traces de la mémoire acquièrent de l'intensité par l'effet du temps et à notre insu. Les choses que l'on apprend le soir se gravent dans le sensorium pendant le sommeil et se retiennent facilement par ce moyen. J'ai observé plusieurs fois qu'en cessant de penser pendant quelques jours à des matières très compliquées, elles me devenaient faciles lorsque je les considérais de nouveau.

Si nous revoyons un objet qui nous avait frappés par sa grandeur, longtemps après que la vue fréquente d'objets du même genre, beaucoup plus grands, a diminué l'impression de grandeur qu'ils font éprouver, nous sommes surpris de le trouver fort au-dessous de son impression conservée dans la mémoire.

Quelques hommes sont doués d'une mémoire prodigieuse. L'exactitude avec laquelle ils répètent de longs discours qu'ils viennent d'entendre nous étonne. Mais, lorsqu'on réfléchit à tout ce que renferme la mémoire de la plupart des hommes, on est bien plus étonné que tant de choses y soient placées sans confusion. Considérez un chanteur sur la scène : sa mémoire lui rappelle chaque mot de son rôle, le ton, la mesure et le geste qui doivent l'accompagner. Un nouveau rôle succède-t-il au premier, celui-ci semble comme effacé de sa mémoire, qui retrace dans l'ordre convenable toutes les parties du second rôle et qui rappellerait de la même manière les divers rôles que le chanteur a étudiés. Ces traces, dont le nombre est immense, ou du moins les dispositions propres à les faire naître, existent à la fois dans son sensorium sans se confondre, et l'acteur peut les rappeler à sa volonté. Je dois répéter ici que, par les mots : *trace, image, vibrations*, etc., je n'entends exprimer que des phénomènes du sensorium, sans rien affirmer sur leur nature et sur leurs causes, comme en Mécanique on n'exprime que des effets par les mots : *force, attraction, affinité*, etc.

Les opérations du sensorium et les mouvements qu'il fait exécuter deviennent plus faciles et comme naturels par de fréquentes répétitions. De ce principe psychologique découlent nos habitudes. En se combinant avec la sympathie, il produit les coutumes, les mœurs et leurs étranges variétés. Il fait qu'une chose généralement reçue chez un peuple est regardée par un autre avec horreur. Les combats de gladiateurs, dont les Romains aimaient passionnément le spectacle, et les sacrifices humains qui souillent les annales des nations nous paraîtraient horribles. Quand on considère l'état déplorable des esclaves, l'avilissement des Parias dans l'Inde et l'absurdité de tant de croyances contraires à la raison et au témoignage de tous nos sens, on est affligé de voir jusqu'à quel point l'habitude de l'esclavage et les préjugés ont dégradé l'espèce humaine.

Cette disposition, que la fréquence des répétitions donne au sensorium, rend très difficile la distinction des habitudes acquises d'avec les penchants qui, dans l'homme, tiennent à son organisation; car il est naturel de penser que l'instinct, si étendu et si puissant chez les animaux, n'est pas nul dans l'espèce humaine, et que l'attachement d'une mère à son enfant en dérive. La double influence de l'habitude et de la sympathie modifie ses penchants, souvent elle les fortifie; quelquefois elle les dénature au point de leur substituer des penchants contraires. Quelques observations faites sur l'homme et sur les animaux, et qu'il est intéressant de continuer, nous portent à soupçonner que les modifications du sensorium, auxquelles l'habitude a donné une grande consistance, sont transmises des pères aux enfants par voie de génération, comme plusieurs dispositions organiques.

La facilité qu'un exercice fréquent donne aux organes est telle qu'ils continuent souvent d'eux-mêmes les mouvements que la volonté leur imprime. Lorsqu'en marchant nous sommes fortement occupés d'une idée, la cause qui renouvelle à chaque instant notre mouvement agit sans le concours de notre volonté et sans que nous en ayons la conscience. On a vu des personnes, surprises en marchant par le sommeil, continuer leur route et ne se réveiller que par la rencontre d'un obstacle. Il paraît qu'en vertu d'une disposition que la volonté de marcher donne au système moteur, la marche continue, à peu près comme le mouvement d'une montre est entretenu par le développement de son ressort spiral. Un dérangement dans l'économie animale peut produire cette disposition. Alors la marche est involontaire, et je tiens d'un médecin éclairé que, dans une maladie de ce genre qu'il avait traitée, le malade ne pouvait s'arrêter qu'en se retenant à un point fixe. Les observations des maladies peuvent ainsi répandre un grand jour sur la Psychologie, quand les médecins joignent aux connaissances de leur art et des sciences accessoires l'esprit d'exactitude et de critique que donne l'étude des Mathématiques et spécialement de la science des Probabilités.

D'après ce que nous avons dit sur l'influence réciproque des traces du sensorium, on conçoit que la musique, par de fréquentes répétitions, peut communiquer à nos mouvements la régularité de sa mesure. C'est ce que l'on observe dans la danse et dans divers exercices où la précision des mouvements ainsi régularisés nous semble extraordinaire. Par cette régularité, la musique rend généralement plus faciles les mouvements que plusieurs personnes exécutent à la fois.

Un phénomène psychologique très remarquable est la grande influence de l'attention sur les traces du sensorium. Elle en accroît la vivacité, en même temps qu'elle affaiblit les impressions concomitantes. Si nous regardons fixement un objet pour y démêler quelques particularités, l'attention peut nous rendre insensibles aux impressions que d'autres objets font en même temps sur la rétine. Par elle, les images des choses que nous voulons comparer acquièrent l'intensité nécessaire pour que leurs rapports occupent seuls notre pensée. Elle réveille les traces de la mémoire qui peuvent servir à cette comparaison, et par là elle devient le plus puissant ressort de l'intelligence humaine.

L'attention donnée fréquemment à une qualité particulière des objets finit par douer les organes d'une exquise sensibilité qui fait reconnaître cette qualité, lorsqu'elle devient insensible au commun des hommes.

Ces principes expliquent les singuliers effets des panoramas. Quand les règles de la perspective y sont bien observées, les objets se peignent sur la rétine comme s'ils étaient réels. Le spectateur est donc alors dans l'état que ferait naître la réalité des objets. Mais la perspective n'est jamais assez exacte pour que l'identité soit parfaite. D'ailleurs les impressions étrangères, quoique faibles, se mêlant aux sensations principales que produit la perspective, nuisent d'abord à l'illusion. L'attention donnée au panorama les efface; mais il faut pour cela un temps plus ou moins long, dépendant des dispositions du sensorium et de la perfection du panorama. Dans tous ceux que j'ai vus, un intervalle de quelques minutes m'a été nécessaire pour acquérir une illusion complète.

Le principe suivant de Psychologie explique un grand nombre de phénomènes qui ont un rapport direct avec l'objet de cet Ouvrage : *Si l'on exécute fréquemment les actes qui découlent d'une modification particulière du sensorium, leur réaction sur cet organe peut, non seulement accroître cette modification, mais quelquefois lui donner naissance*. Ainsi le mouvement de la main qui tient une longue chaîne suspendue se propage le long de la chaîne jusqu'à son extrémité inférieure, et si, la chaîne étant parvenue au repos, on met en mouvement cette extrémité, la vibration remonte jusqu'à la main qu'elle fait mouvoir à son tour. Ces mouvements réciproques deviennent faciles par la fréquence de leurs répétitions.

Les effets de ce principe sur la croyance sont remarquables. La croyance ou l'adhésion que nous donnons à une proposition est ordinairement fondée sur l'évidence, sur le témoignage des sens ou sur des probabilités : dans ce dernier cas, son degré de force dépend de celui de la probabilité, qui dépend elle-même des données que chaque individu peut avoir sur l'objet de son jugement.

Nous agissons souvent en vertu de notre croyance, sans avoir besoin d'en appeler les preuves. La croyance est donc une modification du sensorium, qui subsiste indépendamment de ces preuves quelquefois entièrement oubliées, et qui nous détermine à produire les actes qui en sont les conséquences. Suivant le principe que nous venons d'exposer, une répétition fréquente de ces actes peut faire naître cette modification, surtout s'ils sont répétés à la fois par un grand nombre de personnes; car alors à la force de leur réaction se joint le pouvoir de l'imitation, suite nécessaire de la sympathie. Quand ces actes sont un devoir que les circonstances nous imposent, la tendance de l'économie animale à prendre l'état le plus favorable à notre bien-être nous dispose encore à la croyance qui les fait exécuter avec plaisir. Peu d'hommes résistent à l'action de toutes ces causes.

Pascal a bien développé ces effets, dans un article de ses *Pensées*, qui a ce singulier titre, *qu'il est difficile de démontrer l'existence de Dieu par les lumières naturelles, mais que le plus sûr est de la croire*. Il s'exprime ainsi en s'adressant à un incrédule : « Vous voulez aller à la foi, et vous n'en savez pas le chemin; vous voulez guérir de l'infidélité, et vous en demandez le remède. Apprenez-le de ceux qui ont été tels que vous et qui n'ont présentement aucun doute. Ils savent ce chemin que vous voudriez suivre, et ils sont guéris d'un mal dont vous voulez guérir. Suivez la manière par où ils ont commencé. Imitez leurs actions extérieures, si vous ne pouvez encore entrer dans leurs dispositions intérieures; quittez ces vains amusements qui vous occupent tout entier. J'aurais bientôt quitté ces plaisirs, dites-vous, si j'avais la foi. Et moi je vous dis que vous auriez bientôt la foi, si vous aviez quitté ces plaisirs. Or c'est à vous à commencer. Si je pouvais, je vous donnerais la foi : je ne le puis, ni par conséquent éprouver la vérité de ce que vous dites; mais vous pouvez bien quitter ces plaisirs et éprouver si ce que je vous dis est vrai.

» Il ne faut pas se méconnaître : nous sommes corps autant qu'esprit, et de là vient que l'instrument par lequel la persuasion se fait n'est pas la seule démonstration. Combien y a-t-il peu de choses démontrées? Les preuves ne convainquent que l'esprit; la coutume fait nos preuves les plus fortes. Elle incline les sens qui entraînent l'esprit sans qu'il y pense. Qui a démontré qu'il fera demain jour, et que nous mourrons? et qu'y a-t-il de plus universellement cru? C'est donc la coutume qui nous en persuade; c'est elle qui fait tant de turcs et de payens; c'est elle qui fait les métiers, les soldats, etc. Il est vrai qu'il ne faut pas commencer par elle, pour trouver la vérité [1]; mais il faut avoir recours à elle, quand une fois l'esprit a vu où est la vérité, afin de nous abreuver et de nous teindre de cette croyance qui nous échappe à toute heure; car d'en avoir toujours les preuves présentes, c'est trop d'affaires. Il faut acquérir une croyance plus facile, qui est celle de l'habitude, qui, sans violence, sans art, sans argument, nous fait croire les choses, et incline toutes nos puissances à cette croyance, en sorte que notre âme y tombe naturellement. Ce n'est pas assez de ne croire que par la force de la conviction, si les sens nous portent à croire le con-

[1] Pascal perd ici de vue ce qu'il vient de recommander pour acquérir la foi : savoir, de commencer par les actes extérieurs.

traire. Il faut donc faire marcher nos deux pièces ensemble : l'esprit par les raisons qu'il suffit d'avoir vues une fois en sa vie, et les sens par la coutume et en ne leur permettant pas de s'incliner au contraire. »

Le moyen que Pascal propose pour la conversion d'un incrédule peut être employé avec succès pour détruire un préjugé reçu dès l'enfance et enraciné par l'habitude. Ces sortes de préjugés naissent souvent de la plus faible cause, dans les imaginations actives. Qu'une personne, attachant au mot *gauche* une idée de malheur, fasse journellement de la main droite une chose que l'on puisse exécuter indifféremment de l'une ou de l'autre main; cette habitude peut accroitre la répugnance à se servir pour cela, de la main gauche, au point de rendre la raison impuissante contre ce préjugé. Il est naturel de croire qu'Auguste, doué d'une raison supérieure à tant d'égards, s'est reproché quelquefois sa faiblesse de n'oser se mettre en route le lendemain d'un jour de foire, et qu'il a voulu la surmonter. Mais, au moment d'entreprendre un voyage dans l'un de ces jours réputés malheureux, il a pu se dire que *le plus sûr* était de le différer, augmentant ainsi sa répugnance par l'habitude d'y céder. La répétition fréquente d'actes contraires à ces préjugés doit à la longue les affaiblir et les faire entièrement disparaître.

L'attachement que l'on porte aux personnes qu'on a souvent obligées découle du principe que nous venons de développer. La répétition fréquente d'actes en leur faveur accroît et fait même naître quelquefois le sentiment dont ils sont la suite naturelle. Les actes que le goût d'une chose nous fait exécuter fréquemment augmentent l'intensité de ce goût, et le transforment souvent en passion.

On voit, par ce qui précède, combien notre croyance dépend de nos habitudes. Accoutumés à juger et à nous conduire d'après un certain genre de probabilités, nous donnons à ces probabilités notre assentiment, comme par instinct, et elles nous déterminent avec plus de force que des probabilités bien supérieures, résultats de la réflexion ou du calcul. Une chose invraisemblable nous laisse souvent dans le doute : nous ne balançons point à la rejeter, si elle est contraire à nos probabilités habituelles. Pour diminuer autant qu'il est possible cette cause d'illusion, il faut appeler l'imagination et les sens au secours de la raison. Que l'on figure par des *lignes* les probabilités respectives, on sentira beaucoup mieux leur différence. Une ligne qui représenterait la probabilité du témoignage sur lequel un fait extraordinaire est appuyé, placée à côté de la ligne qui représenterait l'invraisemblance de ce fait, rendrait très sensible la probabilité de l'erreur du témoignage, comme un tableau, dans lequel les hauteurs des montagnes sont rapprochées, donne une idée frappante des rapports de ces hauteurs. Ce moyen peut être employé dans plusieurs cas avec succès. Pour rendre sensible l'immensité de l'univers, que l'on représente par une quantité presque imperceptible, par un dixième de millimètre, la plus grande étendue de la France en longueur : la distance du Soleil à la Terre sera de quatorze mètres; celle de l'étoile la plus proche surpassera un million et demi de mètres, c'est-à-dire sept ou huit fois le rayon du plus grand horizon que l'œil puisse embrasser du point le plus élevé. On n'aura encore ainsi qu'une très faible image de la grandeur de l'univers qui s'étend infiniment au delà des plus brillantes étoiles, comme le prouve ce nombre prodigieux d'étoiles placées les unes au delà des autres et se dérobant à la vue dans la profondeur des cieux. Mais, toute faible qu'elle est, cette image suffit pour nous faire sentir l'absurdité des idées de prééminence de l'homme sur toute la nature, idées dont on a tiré de si étranges conséquences.

Nous établirons enfin, comme principe de Psychologie, l'exagération des probabilités par les passions. La chose que l'on craint ou que l'on désire vivement nous semble, par cela même, plus probable. Son image, fortement retracée dans le sensorium, affaiblit l'impression des probabilités contraires, et quelquefois les efface au point de faire croire la chose arrivée. La réflexion et le temps, en diminuant la vivacité de ces sentiments, rendent à l'esprit le calme nécessaire pour bien apprécier la probabilité des choses.

Les vibrations du sensorium doivent être, comme tous les mouvements, assujetties aux lois de la Dynamique, et cela est confirmé par l'expérience. Les mouvements qu'elles impriment au système musculaire et que ce système communique aux corps étrangers sont, comme dans le développement des ressorts, tels que le centre commun de gravité de notre corps et de ceux qu'il fait mouvoir reste immobile. Ces vibrations se superposent les unes aux autres, comme on voit les ondulations des fluides se mêler sans se confondre. Elles se communiquent aux individus comme les vibrations d'un corps sonore aux corps qui l'environnent. Les idées complexes se forment de leurs idées simples, comme le flux de la mer se forme des flux partiels que produisent le Soleil et la Lune. L'hésitation entre des motifs opposés est un équilibre de forces égales. Les changements brusques que l'on produit dans le sensorium éprouvent la résistance qu'un système matériel oppose à des changements semblables, et si l'on veut éviter les secousses et ne pas perdre de force vive, il faut agir, comme dans ce système, par nuances insensibles. Une attention forte et continue épuise le sensorium, comme une longue suite de commotions épuise une pile voltaïque, ou l'organe électrique des poissons. Presque toutes les comparaisons que nous tirons des objets matériels, pour rendre sensibles les choses intellectuelles, sont au fond des identités.

Je désire que les considérations précédentes, tout imparfaites qu'elles sont, puissent attirer l'attention des observateurs philosophes sur les lois du sensorium ou du monde intellectuel, lois qu'il nous importe autant d'approfondir que celles du monde physique. On a imaginé des hypothèses à peu près semblables, pour expliquer les phénomènes de ces deux mondes. Mais, les fondements de ces hypothèses échappant à tous nos moyens d'observation et de calcul, on peut à leur égard dire avec Montaigne que *l'ignorance et l'incuriosité sont deux oreillers bien doux pour reposer une tête bien faite.*

Des divers moyens d'approcher de la certitude.

L'induction, l'analogie des hypothèses fondées sur les faits et rectifiées sans cesse par de nouvelles observations, un tact heureux donné par la nature et fortifié par des comparaisons nombreuses de ses indications avec l'expérience, tels sont les principaux moyens de parvenir à la vérité.

Si l'on considère avec attention la série des objets de même nature, on aperçoit entre eux et dans leurs changements des rapports qui se manifestent de plus en plus à mesure que la série se prolonge, et qui, en s'étendant et se généralisant sans cesse, conduisent enfin au principe dont ils dérivent. Mais souvent ces rapports sont enveloppés de tant de circonstances étrangères, qu'il faut une grande sagacité pour les démêler et pour remonter à ce principe : c'est en cela que consiste le véritable génie des sciences. L'Analyse et la Philosophie naturelle doivent leurs plus importantes découvertes à ce moyen fécond que l'on nomme *induction*. Newton lui a été redevable de son théorème du binôme et du principe de la gravitation universelle. Il est difficile d'apprécier la probabilité des résultats de l'induction qui se fonde sur ce que les rapports les plus simples sont les plus communs : c'est ce qui se vérifie dans les formules de l'Analyse, et ce que l'on retrouve dans les phénomènes naturels, dans la cristallisation et dans les combinaisons chimiques. Cette simplicité de rapports ne paraîtra point étonnante, si l'on considère que tous les effets de la nature ne sont que les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois immuables.

Cependant l'induction, en faisant découvrir les principes généraux des sciences, ne suffit pas pour les établir en rigueur. Il faut toujours les confirmer par des démonstrations ou par des expériences décisives; car l'histoire des sciences nous montre que l'induction a quelquefois conduit à des résultats inexacts. Je citerai, pour exemple, un théorème de Fermat sur les nombres premiers. Ce grand géomètre, qui avait profondément médité sur leur théorie, cherchait une formule qui, ne renfermant que des nombres premiers, donnât directement un nombre premier plus grand qu'aucun nombre assignable. L'induction le conduisit à penser que deux, élevé à une puissance qui était elle-même une puissance de deux, formait avec l'unité un nombre premier. Ainsi deux élevé au carré, plus un, forme le nombre premier cinq; deux élevé à la seconde puissance de deux, ou seize, forme avec un, le nombre premier dix-sept. Il trouva que cela était encore vrai pour la huitième et la seizième puissance de deux, augmentées de l'unité, et cette induction, appuyée de plusieurs considérations arithmétiques, lui fit regarder ce résultat comme général. Cependant il avoue qu'il ne l'avait pas démontré. En effet, Euler a reconnu que cela cesse d'avoir lieu pour la trente-deuxième puissance de deux, qui, augmentée de l'unité, donne 4294967297, nombre divisible par 641.

Nous jugeons par induction que, si des événements divers, des mouvements par exemple, paraissent constamment et depuis longtemps liés par un rapport simple, ils continueront sans cesse d'y être assujettis, et nous en concluons, par la théorie des probabilités, que ce rapport est dû, non au hasard, mais à une cause régulière. Ainsi l'égalité des mouvements de rotation et de révolution de la Lune, celle des mouvements des nœuds de l'orbite et de l'équateur lunaires et la coïncidence de ces nœuds, le rapport singulier des mouvements des trois premiers satellites de Jupiter, suivant lequel la longitude moyenne du premier satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est égale à deux angles droits; l'égalité de l'intervalle des marées à celui des passages de la Lune au méridien, le retour des plus grandes marées avec les syzygies et des plus petites avec les quadratures : toutes ces choses, qui se maintiennent depuis qu'on les observe, indiquent avec une vraisemblance extrême l'existence de causes constantes que les géomètres sont heureusement parvenus à rattacher à la loi de la pesanteur universelle, et dont la connaissance rend certaine la perpétuité de ces rapports.

Le chancelier Bacon, promoteur si éloquent de la vraie méthode philosophique, a fait de l'induction un abus bien étrange pour prouver l'immobilité de la Terre. Voici comme il raisonne dans le *Novum Organum*, son plus bel Ouvrage. Le mouvement des astres, d'orient en occident, est d'autant plus prompt, qu'ils sont plus éloignés de la Terre. Ce mouvement est le plus rapide pour les étoiles; il se ralentit un peu pour Saturne, un peu plus pour Jupiter, et ainsi de suite, jusqu'à la

Lune et aux comètes les moins élevées. Il est encore perceptible dans l'atmosphère, surtout entre les tropiques, à cause des grands cercles que les molécules de l'air y décrivent; enfin il est presque insensible pour l'Océan; il est donc nul pour la Terre. Mais cette induction prouve seulement que Saturne et les astres qui lui sont inférieurs ont des mouvements propres, contraires au mouvement réel ou apparent qui emporte toute la sphère céleste d'orient en occident, et que ces mouvements paraissent plus lents pour les astres plus éloignés, ce qui est conforme aux lois de l'Optique. Bacon aurait dû être frappé de l'inconcevable vitesse qu'il faut supposer aux astres pour accomplir leur révolution diurne, si la Terre est immobile, et de l'extrême simplicité avec laquelle sa rotation explique comment des corps aussi distants les uns des autres que les étoiles, le Soleil, les planètes et la Lune, semblent tous assujettis à cette révolution. Quant à l'Océan et à l'atmosphère, il ne devait point assimiler leur mouvement à celui des astres, qui sont détachés de la Terre, au lieu que, l'air et la mer faisant partie du globe terrestre, ils doivent participer à son mouvement ou à son repos. Il est singulier que Bacon, porté aux grandes vues par son génie, n'ait pas été entraîné par l'idée majestueuse que le système de Copernic offre de l'univers. Il pouvait cependant trouver en faveur de ce système de fortes analogies dans les découvertes de Galilée, qui lui étaient connues. Il a donné pour la recherche de la vérité le précepte et non l'exemple. Mais en insistant avec toute la force de la raison et de l'éloquence sur la nécessité d'abandonner les subtilités insignifiantes de l'école pour se livrer aux observations et aux expériences, et en indiquant la vraie méthode de s'élever aux causes générales des phénomènes, ce grand philosophe a contribué aux progrès immenses que l'esprit humain a faits dans le beau siècle où il a terminé sa carrière.

L'analogie est fondée sur la probabilité que les choses semblables ont des causes du même genre et produisent les mêmes effets. Plus la similitude est parfaite, plus cette probabilité augmente. Ainsi nous jugeons sans aucun doute que des êtres pourvus des mêmes organes, exécutant les mêmes choses, éprouvent les mêmes sensations et sont mus par les mêmes désirs. La probabilité que les animaux qui se rapprochent de nous par leurs organes ont des sensations analogues aux nôtres, quoique un peu inférieure à celle qui est relative aux individus de notre espèce, est encore excessivement grande, et il a fallu toute l'influence des préjugés religieux pour faire penser à quelques philosophes que les animaux sont de purs automates. La probabilité de l'existence du sentiment décroît à mesure que la similitude des organes avec les nôtres diminue; mais elle est toujours très forte, même pour les insectes. En voyant ceux d'une même espèce exécuter des choses fort compliquées, exactement de la même manière, de générations en générations et sans les avoir apprises, on est porté à croire qu'ils agissent par une sorte d'affinité, analogue à celle qui rapproche les molécules des cristaux, mais qui, se mêlant au sentiment attaché à toute organisation animale, produit, avec la régularité des combinaisons chimiques, des combinaisons beaucoup plus singulières : on pourrait peut-être nommer *affinité animale* ce mélange des affinités électives et du sentiment. Quoiqu'il existe beaucoup d'analogie entre l'organisation des plantes et celle des animaux, elle ne paraît pas cependant suffisante pour étendre aux végétaux la faculté de sentir; mais rien n'autorise à la leur refuser.

Le Soleil faisant éclore, par l'action bienfaisante de sa lumière et de sa chaleur, les animaux et les plantes qui couvrent la Terre, nous jugeons par l'analogie qu'il produit des effets semblables sur les autres planètes; car il n'est pas naturel de penser que la matière, dont nous voyons l'activité se developper en tant de façons, soit stérile sur une aussi grosse planète que Jupiter qui, comme le globe terrestre, a ses jours, ses nuits et ses années, et sur lequel les observations indiquent des changements qui supposent des forces très actives. Cependant ce serait donner trop d'extension à l'analogie que d'en conclure la similitude des habitants des planètes et de la Terre. L'homme, fait pour la température dont il jouit et pour l'élément qu'il respire, ne pourrait pas, selon toute apparence, vivre sur les autres planètes. Mais ne doit-il pas y avoir une infinité d'organisations relatives aux diverses constitutions des globes de cet univers? Si la seule différence des éléments et des climats met tant de variété dans les productions terrestres, combien plus doivent différer celles des diverses planètes et de leurs satellites! L'imagination la plus active ne peut s'en former aucune idée, mais leur existence est très vraisemblable.

Nous sommes conduits par une forte analogie à regarder les étoiles comme autant de soleils doués, ainsi que le nôtre, d'un pouvoir attractif proportionnel à la masse et réciproque au carré des distances. Car, ce pouvoir étant démontré par tous les corps du système solaire et pour leurs plus petites molécules, il paraît appartenir à toute la matière. Déjà les mouvements des petites étoiles que l'on a nommées *doubles*, à cause de leur rapprochement, paraissent l'indiquer; un siècle au plus d'observations précises, en constatant leurs mouvements de révolution les unes autour des autres, mettra hors de doute leurs attractions réciproques.

L'analogie qui nous porte à faire de chaque étoile le centre d'un système planétaire est beaucoup moins forte que la précédente; mais elle acquiert de la vraisemblance par l'hypothèse que nous avons proposée sur la formation des étoiles et du Soleil; car dans cette hypothèse, chaque étoile ayant été, comme le Soleil, primitivement environnée d'une vaste atmosphère, il est naturel d'attribuer à cette atmosphère les mêmes effets qu'à l'atmosphère solaire et de supposer qu'elle a produit, en se condensant, des planètes et des satellites.

Un grand nombre de découvertes dans les sciences sont dues à l'analogie. Je citerai comme une des plus remarquables la découverte de l'électricité atmosphérique, à laquelle on a été conduit par l'analogie des phénomènes électriques avec les effets du tonnerre.

La méthode la plus sûre qui puisse nous guider dans la recherche de la vérité consiste à s'élever par induction des phénomènes aux lois et des lois aux forces. Les lois sont les rapports qui lient entre eux les phénomènes particuliers: quand elles ont fait connaître le principe général des forces dont elles dérivent, on le vérifie soit par des expériences directes, lorsque cela est possible, soit en examinant s'il satisfait aux phénomènes connus; et si, par une rigoureuse analyse, on les voit tous découler de ce principe jusque dans leurs moindres détails, si d'ailleurs ils sont très variés et très nombreux, la Science alors acquiert le plus haut degré de certitude et de perfection qu'elle puisse atteindre. Telle est devenue l'Astronomie par la découverte de la pesanteur universelle. L'histoire des sciences fait voir que cette marche lente et pénible de l'induction n'a pas toujours été celle des inventeurs. L'imagination, impatiente de remonter aux causes, se plaît à créer des hypothèses, et souvent elle dénature les faits pour les plier à son ouvrage; alors les hypothèses sont dangereuses. Mais, quand on ne les envisage que comme des moyens de lier entre eux les phénomènes pour en découvrir les lois, lorsqu'en évitant de leur attribuer de la réalité on les rectifie sans cesse par de nouvelles observations, elles peuvent conduire aux véritables causes, ou du moins nous mettre à portée de conclure des phénomènes observés ceux que des circonstances données doivent faire éclore.

Si l'on essayait toutes les hypothèses que l'on peut former sur la cause des phénomènes, on parviendrait, par voie d'exclusion, à la véritable. Ce moyen a été employé avec succès : quelquefois on est arrivé à plusieurs hypothèses qui expliquaient également bien tous les faits connus, et entre lesquelles les savants se sont partagés, jusqu'à ce que des observations décisives aient fait connaître la véritable. Alors il est intéressant pour l'histoire de l'esprit humain de revenir sur ces hypothèses, de voir comment elles parvenaient à expliquer un grand nombre de faits et de rechercher les changements qu'elles doivent subir pour rentrer dans celle de la nature. C'est ainsi que le système de Ptolémée, qui n'est que la réalisation des apparences célestes, se transforme dans l'hypothèse du mouvement des planètes autour du Soleil, en y rendant égaux et parallèles à l'orbe solaire les cercles et les épicycles que Ptolémée fait décrire annuellement et dont il laisse la grandeur indéterminée. Il suffit ensuite, pour changer cette hypothèse dans le vrai système du monde, de transporter en sens contraire à la Terre le mouvement apparent du Soleil.

Il est presque toujours impossible de soumettre au calcul la probabilité des résultats obtenus par ces divers moyens : c'est ce qui a lieu pareillement pour les faits historiques. Mais l'ensemble des phénomènes expliqués ou des témoignages est quelquefois tel que, sans pouvoir en apprécier la probabilité, on ne peut raisonnablement se permettre aucun doute à leur égard. Dans les autres cas, il est prudent de ne les admettre qu'avec beaucoup de réserve.

Notice historique sur le Calcul des Probabilités.

Depuis longtemps on a déterminé, dans les jeux les plus simples, les rapports des chances favorables ou contraires aux joueurs : les enjeux et les paris étaient réglés d'après ces rapports. Mais personne avant Pascal et Fermat n'avait donné des principes et des méthodes pour soumettre cet objet au calcul et n'avait résolu des questions de ce genre un peu compliquées. C'est donc à ces deux grands géomètres qu'il faut rapporter les premiers éléments de la science des probabilités, dont la découverte peut être mise au rang des choses remarquables qui ont illustré le XVII^e siècle, celui de tous qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain. Le principal problème, qu'ils résolurent par des voies différentes, consiste, comme on l'a vu précédemment, à partager équitablement l'enjeu entre des joueurs dont les adresses sont égales, et qui conviennent de quitter une partie avant qu'elle finisse, la condition du jeu étant que, pour gagner la partie, il faut atteindre le premier un nombre donné de points. Il est clair que le partage doit se faire proportionnellement aux probabilités respectives des joueurs de gagner cette partie, probabilités dépendantes des nombres de points qui leur manquent encore. La méthode de Pascal est fort ingénieuse et n'est au fond que l'équation aux différences partielles de ce problème, appliquée à déterminer les probabilités successives des joueurs, en allant des nombres les plus petits aux suivants. Cette méthode est limitée au cas de deux joueurs : celle de Fermat, fondée sur les combinaisons, s'étend à un nombre quelconque de joueurs. Pascal crut d'abord qu'elle devait être comme la sienne, restreinte à deux joueurs, ce qui établit entre eux une discussion à la fin de laquelle Pascal reconnut la généralité de la méthode de Fermat.

Huygens réunit les divers problèmes que l'on avait déjà résolus, et en ajouta de nouveaux, dans un petit Traité, le premier qui ait paru sur cette matière et qui a pour titre *De ratiociniis in ludo aleæ*. Plusieurs géomètres s'en occupèrent ensuite : Huddes et le grand pensionnaire de Witt en Hollande, et Halley en Angleterre appliquèrent le calcul aux probabilités de la vie humaine, et Halley publia pour cet objet la première Table de mortalité. Vers ce même temps, Jacques Bernoulli proposa aux géomètres divers problèmes de probabilité dont il donna, depuis, des solutions. Enfin il composa son bel Ouvrage intitulé *Ars conjectandi*, qui ne parut que sept ans après sa mort, arrivée en 1706. La science des probabilités est beaucoup plus approfondie dans cet Ouvrage que dans celui d'Huygens; l'auteur y donne une théorie générale des combinaisons et des suites, et l'applique à plusieurs questions difficiles, concernant les hasards. Cet Ouvrage est encore remarquable par la justesse et la finesse des vues, par l'emploi de la formule du binôme dans ce genre de questions, et par la démonstration de ce théorème, savoir, qu'en multipliant indéfiniment les observations et les expériences, le rapport des événements de diverses natures approche de celui de leurs possibilités respectives dans des limites dont l'intervalle se resserre de plus en plus à mesure qu'ils se multiplient, et devient moindre qu'aucune quantité assignable. Ce théorème est très utile pour reconnaître par les observations les lois et les causes des phénomènes. Bernoulli attachait avec raison une grande importance à sa démonstration qu'il dit avoir méditée pendant vingt années.

Dans l'intervalle de la mort de Jacques Bernoulli à la publication de son Ouvrage, Montmort et Moivre firent paraître deux traités sur le Calcul des Probabilités. Celui de Montmort a pour titre : *Essai sur les Jeux de hasard* : il contient de nombreuses applications de ce calcul aux divers jeux. L'auteur y a joint, dans la seconde édition, quelques lettres dans lesquelles Nicolas Bernoulli donne des solutions ingénieuses de plusieurs problèmes difficiles. Le Traité de Moivre, postérieur à celui de Montmort, parut d'abord dans les *Transactions philosophiques* de l'année 1711. Ensuite l'auteur le publia séparément, et il l'a perfectionné successivement dans les trois éditions qu'il en a données. Cet Ouvrage est principalement fondé sur la formule du binôme, et les problèmes qu'il contient ont, ainsi que leurs solutions, une grande généralité. Mais ce qui le distingue est la théorie des suites récurrentes et leur usage dans ces matières. Cette théorie est l'intégration des équations linéaires aux différences finies à coefficients constants, intégration à laquelle Moivre parvient d'une manière très heureuse.

Moivre a repris dans son Ouvrage le théorème de Jacques Bernoulli sur la probabilité des résultats déterminés par un grand nombre d'observations. Il ne se contente pas de faire voir, comme Bernoulli, que le rapport des événements qui doivent arriver approche sans cesse de celui de leurs possibilités respectives; il donne de plus une expression élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rapports est contenue dans des limites données. Pour cela, il détermine le rapport du plus grand terme du développement d'une puissance très élevée du binôme à la somme de tous ses termes, et le logarithme hyperbolique de l'excès de ce terme sur les termes qui en sont très voisins. Le plus grand terme étant alors le produit d'un nombre considérable de facteurs, son calcul numérique devient impraticable. Pour l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un théorème de Stirling sur le terme moyen du binôme élevé à une haute puissance, théorème remarquable surtout en ce qu'il introduit la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre fut-il extrêmement frappé de ce résultat, que Stirling avait déduit de l'expression de la circonférence en produits infinis, expression à laquelle Wallis était parvenu par une singulière analyse qui contient le germe de la théorie si curieuse et si utile des intégrales définies.

Plusieurs savants, parmi lesquels on doit distinguer Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Sussmilch, Messène, Moheau, Price, Baily et Duvillard, ont réuni un grand nombre de données précieuses, sur la population, les naissances, les mariages et la mortalité. Ils ont donné des formules et des Tables relatives aux rentes viagères, aux tontines, aux assurances, etc. Mais, dans cette courte Notice, je ne puis qu'indiquer ces travaux utiles, pour m'attacher aux idées originales. De ce nombre est la distinction des espérances mathématique et morale, et le principe ingénieux que Daniel Bernoulli a donné pour soumettre celle-ci à l'Analyse. Telle est encore l'application heureuse qu'il a faite du Calcul des Probabilités à l'inoculation. On doit surtout placer au nombre de ces idées originales la considération directe des possibilités des événements, tirées des événements observés. Jacques Bernoulli et Moivre supposaient ces possibilités connues, et ils cherchaient la probabilité que le résultat des expériences à faire approchera de plus en plus de les représenter. Bayes, dans les *Transactions philosophiques* de l'année 1763, a cherché directement la probabilité que les possibilités indiquées par des expériences déjà faites sont comprises dans des limites données, et il y est parvenu d'une manière fine et très ingénieuse, quoiqu'un peu embarrassée. Cet objet se rattache à la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, conclue des événements observés, théorie dont j'exposai quelques années après les principes, avec la remarque de l'influence des inégalités qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose égales. Quoique l'on ignore quels sont les événements simples que ces inégalités favorisent, cependant cette ignorance même accroît souvent la probabilité des événements composés.

En généralisant l'Analyse et les problèmes concernant les probabilités, je fus conduit au Calcul des différences finies partielles, que Lagrange a traité depuis par une méthode fort simple et dont il a fait d'élégantes applications à ce genre de problèmes. La théorie des fonctions génératrices, que je donnai vers le même temps, comprend ces objets parmi ceux qu'elle embrasse, et s'adapte d'elle-même et avec la plus grande généralité aux questions de probabilité les plus difficiles. Elle détermine encore, par des approximations très convergentes, les valeurs des fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs, et, en faisant voir que la racine carrée du rapport de la circonférence au rayon entre le plus souvent dans ces valeurs, elle montre qu'une infinité d'autres transcendantes peuvent s'y introduire.

On a encore soumis au calcul la probabilité des témoignages, les votes et les décisions des assemblées électorales et délibérantes et les jugements des tribunaux. Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets qu'elles sont presque toujours insolubles. Mais la solution de problèmes plus simples et qui ont avec elles beaucoup d'analogie peut souvent répandre sur ces questions difficiles et importantes de grandes lumières, que la sûreté du calcul rend toujours préférables aux raisonnements les plus spécieux.

L'une des plus intéressantes applications du Calcul des Probabilités concerne les milieux qu'il faut choisir entre les résultats des observations. Plusieurs géomètres s'en sont occupés, et Lagrange a publié dans les *Mémoires* de Turin une belle méthode pour déterminer ces milieux, quand la loi des erreurs des observations est connue. J'ai donné pour le même objet une méthode fondée sur un artifice singulier, qui peut être employé avec avantage dans d'autres questions d'Analyse, et qui, en permettant d'étendre indéfiniment dans tout le cours d'un long calcul des fonctions qui doivent être limitées par la nature du problème, indique les modifications que chaque terme du résultat final doit recevoir en vertu de ces limitations. On a vu précédemment que chaque observation fournit une équation de condition, du premier degré, qui peut toujours être disposée de manière que tous ses termes soient dans le premier membre, le second étant zéro. L'usage de ces équations est une des causes principales de la grande précision de nos Tables astronomiques, parce que l'on a pu ainsi faire concourir un nombre immense d'excellentes observations à la fixation de leurs éléments. Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément à déterminer, Cotes avait prescrit de préparer les équations de condition de sorte que le coefficient de l'élément inconnu fût positif dans chacune d'elles, et d'ajouter ensuite toutes ces équations, pour former une équation finale d'où l'on tire la valeur de cet élément. La règle de Cotes fut suivie par tous les calculateurs. Mais quand il fallait déterminer plusieurs éléments, on n'avait aucune règle fixe pour combiner les équations de condition de manière à obtenir les équations finales nécessaires : seulement, on choisissait pour chaque élément les observations les plus propres à le déterminer. Ce fut pour obvier à ces tâtonnements que Legendre et Gauss imaginèrent d'ajouter les carrés des premiers membres des équations de condition, et d'en rendre la somme un minimum, en y faisant varier chaque élément inconnu : par ce moyen, on obtient directement autant d'équations finales qu'il y a d'éléments. Mais les valeurs déterminées par ces équations méritent-elles la préférence sur toutes celles que l'on peut obtenir par d'autres moyens? C'est ce que le Calcul des Probabilités pouvait seul apprendre. Je l'appliquai donc à cet objet important, et je parvins, par une analyse délicate, à une règle qui renferme la précédente, et qui réunit, à l'avantage de donner par un procédé régulier les éléments cherchés, celui de les faire sortir avec le plus d'évidence de l'ensemble des observations, et d'en déterminer les valeurs qui ne laissent à craindre que les plus petites erreurs possibles.

On n'a cependant encore qu'une connaissance imparfaite des résultats obtenus, tant que la loi des erreurs dont ils sont susceptibles n'est pas connue; il faut pouvoir assigner la probabilité que ces erreurs sont contenues dans des limites données, ce qui revient à déterminer ce que j'ai nommé *poids* d'un résultat. L'Analyse conduit à des formules générales et simples pour cet objet. J'ai appliqué cette analyse aux résultats des observations géodésiques. Le problème général consiste à déterminer les probabilités que les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions linéaires des erreurs d'un très grand nombre d'observations sont renfermées dans des limites quelconques.

La loi de possibilité des erreurs des observations introduit dans les expressions de ces probabilités une constante, dont la valeur semble exiger la connaissance de cette loi presque toujours inconnue. Heureusement, cette constante peut être déterminée par les observations mêmes. Dans la recherche des éléments astronomiques, elle est donnée par la somme des carrés des différences entre chaque observation et le calcul. Les erreurs également probables étant proportionnelles à la racine carrée de cette somme, on peut par la comparaison de ces carrés apprécier l'exactitude relative des diverses Tables d'un même astre. Dans les opérations géodésiques, ces carrés sont remplacés par les carrés des erreurs des sommes observées des trois angles de chaque triangle. La comparaison des carrés de ces erreurs fera donc juger de la précision relative des instruments avec lesquels on a mesuré les angles. On voit par cette comparaison l'avantage du cercle répétiteur sur les instruments qu'il a remplacés dans la Géodésie.

Il existe souvent dans les observations plusieurs sources d'erreurs : ainsi, les positions des astres étant déterminées au moyen de la lunette méridienne et du cercle, tous deux susceptibles d'erreurs dont la loi de probabilité ne doit pas être supposée la même, les éléments que l'on déduit de ces positions sont affectés de ces erreurs. Les équations de condition que l'on forme pour avoir ces éléments contiennent les erreurs de chaque instrument, et elles y ont des coefficients différents. Le système le plus avantageux des facteurs par lesquels on doit multiplier respectivement ces équations, pour obtenir, par la réunion des produits, autant d'équations finales qu'il y a d'éléments à déterminer, n'est plus alors celui des coefficients des éléments dans chaque équation de condition. L'analyse dont j'ai fait usage conduit facilement, quel que soit le nombre des sources d'erreur, au système de facteurs qui donne les résultats les plus avantageux, ou dans lesquels une même erreur est moins probable que dans tout autre système. La même analyse détermine les lois de probabilité des erreurs de ces résultats. Ces formules renferment autant de constantes inconnues qu'il y a de sources d'erreur, et qui dépendent des lois de probabilité de ces erreurs. On a vu que, dans le cas d'une source unique, on peut déterminer cette constante en formant la somme des carrés des résidus de chaque équation de condition, lorsqu'on y a substitué les valeurs trouvées pour les éléments. Un procédé semblable donne généralement les valeurs de ces constantes, quel que soit leur nombre, ce qui complète l'application du Calcul des Probabilités aux résultats des observations.

Je dois ici faire une remarque importante. La petite incertitude que les observations, quand elles ne sont pas très multipliées, laissent sur les valeurs des constantes dont je viens de parler, rend un peu incertaines les probabilités déterminées par l'Analyse. Mais il suffit presque toujours de connaître si la probabilité que les erreurs des résultats obtenus sont renfermées dans d'étroites limites approche extrêmement de l'unité, et quand cela n'est pas, il suffit de savoir jusqu'à quel point on doit multiplier les observations pour acquérir une probabilité telle qu'il ne reste sur la bonté des résultats aucun doute raisonnable. Les formules analytiques des probabilités remplissent parfaitement cet objet, et sous ce rapport elles peuvent être envisagées comme le complément nécessaire des sciences fondées sur un ensemble d'observations susceptibles d'erreur. Elles sont même indispensables pour résoudre un grand nombre de questions dans les sciences naturelles et morales. Les causes régulières des phénomènes sont le plus souvent ou inconnues ou trop compliquées pour être soumises au calcul; souvent encore leur action est troublée par des causes accidentelles et irrégulières; mais elle reste toujours empreinte dans les événements produits par toutes ces causes, et elle y apporte des modifications qu'une longue suite d'observations peut déterminer. L'Analyse des Probabilités développe ces modifications et assigne leurs degrés de vraisemblance. Ainsi, au milieu des causes irrégulières qui agitent l'atmosphère, les changements périodiques de la chaleur solaire du jour à la nuit et de l'hiver à l'été produisent, dans la pression de cette grande masse fluide et dans la hauteur correspondante du baromètre, des oscillations diurnes et annuelles, que de nombreuses observations barométriques ont fait connaître avec une probabilité au moins égale à celle des faits que nous regardons comme certains. C'est encore ainsi que la série des événements historiques nous montre l'action constante des grands principes de la morale, au milieu des passions et des intérêts divers qui agitent en tous sens les sociétés. Il est remarquable qu'une science, qui a commencé par la considération des jeux, se soit élevée aux plus importants objets des connaissances humaines.

J'ai rassemblé toutes ces méthodes dans ma *Théorie analytique des Probabilités,* où je me suis proposé d'exposer, de la manière la plus générale, les principes et l'analyse du Calcul des Probabilités, ainsi que les solutions des problèmes les plus intéressants et les plus difficiles que ce Calcul présente.

On voit, par cet Essai, que la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte. Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base, la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, les établissements d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore par son application aux questions les plus importantes de la Philosophie naturelle et des Sciences morales; si l'on observe ensuite que, dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul, elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements, et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE SEPTIÈME VOLUME.

INTRODUCTION.

LIVRE I.

CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉLÉMENTS DES GRANDEURS.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DES APPROXIMATIONS DES FORMULES QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES.

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

ADDITIONS.

SUPPLÉMENTS.

THÉORIE ANALYTIQUE
DES PROBABILITÉS.

LIVRE PREMIER.

CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES ÉLÉMENTS DES GRANDEURS.

1. Les grandeurs, considérées en général, s'expriment communément par les lettres de l'alphabet, et c'est à Viète qu'est due cette notation commode qui transporte à la langue analytique les alphabets des langues connues. L'application que Viète fit de cette notation à la Géométrie, à la théorie des équations et aux sections angulaires, forme une des époques remarquables de l'histoire des Mathématiques. Des signes très simples expriment les corrélations des grandeurs. La position d'une grandeur à la suite d'une autre suffit pour exprimer leur produit. Si ces grandeurs sont la même, ce produit est le carré ou la seconde puissance de cette grandeur. Mais, au lieu de l'écrire deux fois, Descartes imagina de ne l'écrire qu'une fois, en lui donnant le nombre 2 pour exposant, et il exprima les puissances successives, en augmentant successivement cet exposant d'une unité. Cette notation,

en ne la considérant que comme une manière abrégée de représenter ces puissances, semble peu de chose; mais tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes, et c'est ce qui a eu lieu pour les exposants de Descartes. Wallis, qui s'est attaché spécialement à suivre le fil de l'induction et de l'analogie, a été conduit par ce moyen à exprimer les puissances radicales par des exposants fractionnaires; et de même que Descartes exprimait par les exposants 2, 3, ... les puissances secondes, troisièmes, ... d'une grandeur, il exprima ses racines secondes, troisièmes, ... par les exposants fractionnaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... En général, il exprima par l'exposant $\frac{m}{n}$ la racine n d'une grandeur élevée à la puissance m. En effet, suivant la notation de Descartes, cette expression a lieu dans le cas où m est divisible par n, et Wallis, par analogie, l'étendit à tous les cas. Il remarqua ensuite que la multiplication des puissances d'une même grandeur revient à ajouter les exposants de ces puissances, qu'il faut retrancher dans leur division, en sorte que l'exposant $n - m$ indique le quotient de la puissance n d'une grandeur, divisée par sa puissance m; d'où il suit que ce quotient devenant l'unité, lorsque m est égal à n, toute grandeur ayant zéro pour exposant est l'unité même. Si m surpasse n, l'exposant $n - m$ devient négatif, et le quotient devient l'unité divisée par la puissance $m - n$ de la grandeur. Wallis supposa donc généralement que l'exposant négatif $-\frac{m}{n}$ exprime l'unité divisée par la racine $n^{\text{ième}}$ de la grandeur élevée à la puissance m.

Ce fut dans son Ouvrage intitulé *Arithmetica infinitorum* que Wallis exposa ces remarques qui le conduisirent à sommer x^n, x étant supposé formé d'une infinité d'éléments pris pour unité, ce qui, suivant les notations actuelles, revient à intégrer la différentielle $x^n dx$. Il fit voir que cette intégrale, prise depuis x nul, est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ce qui lui donna l'intégrale d'une suite formée de différentielles semblables. En considérant ainsi l'intégrale $\int dx\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^s$, lorsque n et s sont des nombres entiers, et lorsqu'elle est prise depuis x nul jusqu'à $x = 1$, il trouva qu'elle est égale à $\frac{1.2.3\ldots n}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}$. Si les indices n et s sont fractionnaires et égaux à $\frac{1}{2}$, cette intégrale exprime le rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre. Wallis s'attacha donc à interpoler le produit précédent, dans le cas où n et s sont des nombres fractionnaires, problème entièrement nouveau à l'époque où cet illustre géomètre s'en occupa, et qu'il parvint à résoudre par une méthode fort ingénieuse qui contient les germes des théories des interpolations et des intégrales définies, dont les géomètres se sont tant occupés, et qui sont l'objet d'une grande partie de cet Ouvrage. Il obtint de cette manière l'expression du rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre, par un produit d'une infinité de facteurs, qui donne des valeurs de plus en plus approchées de ce rapport, à mesure que l'on considère un plus grand nombre de ces facteurs, résultat l'un des plus singuliers de l'Analyse. Mais il est remarquable que Wallis, qui avait si bien considéré les indices fractionnaires des puissances radicales, ait continué de noter ces puissances comme on l'avait fait avant lui. On voit la notation des puissances radicales par les exposants fractionnaires employée pour la première fois dans les lettres de Newton à Oldenburg, insérées dans le *Commercium epistolicum*. En comparant par la voie de l'induction, dont Wallis avait fait un si bel usage, les exposants des puissances du binôme avec les coefficients des termes de son développement, dans le cas où ces exposants sont des nombres entiers, il détermina la loi de ces coefficients, et il l'étendit, par analogie, aux puissances fractionnaires et aux puissances négatives. Ces divers résultats, fondés sur la notation de Descartes, montrent l'influence d'une notation heureuse sur toute l'Analyse.

Cette notation a encore l'avantage de donner l'idée la plus simple et la plus juste des logarithmes, qui ne sont en effet que les exposants entiers et fractionnaires d'une même grandeur dont les diverses puissances représentent tous les nombres. Mais l'extension la plus importante que cette notation ait reçue est celle des exposants variables, ce qui constitue le Calcul exponentiel, l'une des branches les plus fécondes de l'Analyse moderne. Leibnitz a indiqué le premier, dans les *Actes de Leipzig* pour 1682, les transcendantes à exposants variables, et par là il a complété le système des éléments dont une fonction finie peut être composée; car toute fonction finie explicite se réduit, en dernière analyse, à des grandeurs simples, ajoutées ou soustraites les unes des autres, multipliées ou divisées entre elles, élevées à des puissances constantes ou variables. Les racines des équations formées de ces éléments en sont des fonctions implicites. C'est ainsi que, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, le logarithme de a est la racine de l'équation transcendante $c^x - a = 0$. On peut considérer encore les quantités logarithmiques comme des fonctions exponentielles dont les exposants sont infiniment petits. Ainsi $\mathrm{X}\log \mathrm{X}'$ est égal à $\frac{\mathrm{X}'^{\mathrm{X}\,dx} - 1}{dx}$. Toutes les modifications de grandeur que l'on peut concevoir aux exposants se trouvent donc représentées par les quantités exponentielles, algébriques et logarithmiques. Ces quantités et leurs fonctions embrassent, par conséquent, toutes les fonctions finies explicites, et les racines des équations formées de fonctions semblables embrassent toutes les fonctions finies implicites.

Ces quantités sont essentiellement distinctes : l'exponentielle a^x, par exemple, ne peut jamais être identique avec une fonction algébrique de x. Car toute fonction algébrique est réductible dans une série descendante de la forme $kx^n + k'x^{n-n'} + \ldots$; or il est facile de démontrer que, a étant supposé plus grand que l'unité et x étant infini, a^x est infiniment plus grand que kx^n, quelque grands que l'on suppose k et n. Pareillement, il est aisé de voir que, dans le cas de x infini, x est infiniment plus grand que $k(\log x)^n$. Les fonctions exponentielles, algébriques et logarithmiques d'une variable indéterminée ne peuvent donc pas rentrer les unes dans les autres; les quantités algébriques tiennent le milieu entre les exponentielles et les logarithmiques, les exposants, lorsque la variable est infinie, pouvant être considérés comme infinis dans les exponentielles, finis dans les quantités algébriques, et infiniment petits dans les quantités logarithmiques.

On peut encore établir en principe qu'une fonction radicale d'une variable ne peut pas être identique avec une fonction rationnelle de la même variable ou avec une autre fonction radicale. Ainsi $(1+x^3)^{\frac{1}{4}}$ est essentiellement distinct de $(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$ et de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Ces principes, fondés sur la nature même des fonctions, peuvent être d'une grande utilité dans les recherches analytiques, en indiquant les formes dont les fonctions que l'on se propose de trouver sont susceptibles, et en démontrant leur impossibilité dans un grand nombre de cas; mais alors il faut être bien sûr de n'omettre aucune des formes possibles. Ainsi la différentiation laissant subsister les quantités exponentielles et radicales, et ne faisant disparaître les quantités logarithmiques qu'autant qu'elles sont multipliées par des constantes, on doit en conclure que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut renfermer d'autres quantités exponentielles et radicales que celles qui sont contenues dans cette fonction. Par ce moyen, j'ai reconnu que l'on ne peut pas obtenir en fonction finie, explicite ou implicite, de la variable x, l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2+6x^4}}$. J'ai démontré pareillement que les équations linéaires aux différences partielles du second ordre entre trois variables ne sont pas, le plus souvent, susceptibles d'être intégrées sous une forme finie, ce qui m'a conduit à une méthode générale pour les intégrer sous cette forme, lorsqu'elle est possible. Dans les autres cas, on ne peut obtenir une intégrale finie qu'au moyen d'intégrales définies.

Leibnitz ayant adapté au Calcul différentiel une caractéristique très commode, il imagina de lui donner les mêmes exposants qu'aux grandeurs; mais alors ces exposants, au lieu d'indiquer les multiplications répétées d'une même grandeur, indiquent les différentiations répétées d'une même fonction. Cette extension nouvelle de la notation cartésienne conduisit Leibnitz à ce théorème remarquable, savoir, que la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'un produit $xyz\ldots$ est égale à $(dx+dy+dz+\ldots)^n$, pourvu que, dans le développement de ce polynôme, on applique à la caractéristique d les exposants des puissances de dx, dy, dz, ..., et qu'ainsi l'on écrive $d^r x\, d^{r'} y\, d^{r''} z \ldots$, au lieu de $(dx)^r (dy)^{r'} (dz)^{r''} \ldots$, en ayant soin de changer $d^0 x$, $d^0 y$, $d^0 z$, ..., en x, y, z, ... Ce grand géomètre observa de plus que ce théorème subsiste en y supposant n négatif, pourvu que l'on change les différentielles négatives en intégrales. Lagrange a suivi cette analogie singulière des puissances et des différences dans tous ses développements, et, par une suite d'inductions très fines et très heureuses, il en a déduit des formules générales aussi curieuses qu'utiles, sur les transformations des différences et des intégrales les unes dans les autres, lorsque les variables ont des accroissements finis divers, et lorsque ces accroissements sont infiniment petits. Son Mémoire sur cet objet, inséré dans le Recueil de l'Académie de Berlin pour l'année 1772, peut être regardé comme une des plus belles applications que l'on ait faites de la méthode des inductions. La théorie des fonctions génératrices étend à des caractéristiques quelconques la notation cartésienne; elle montre en même temps avec évidence l'analogie des puissances et des opérations indiquées par ces caractéristiques, et nous allons voir tout ce qui concerne les séries et l'intégration des équations linéaires aux différences en découler avec une extrême facilité.

CHAPITRE PREMIER.

DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES A UNE VARIABLE.

2. Soit y_x une fonction quelconque de x; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \ldots + y_\infty t^\infty,$$

on peut toujours concevoir une fonction de t qui, développée suivant les puissances de t, donne cette suite : cette fonction est ce que je nomme *fonction génératrice* de y_x.

La fonction génératrice d'une variable quelconque y_x est donc généralement une fonction de t qui, développée suivant les puissances de t, a cette variable pour coefficient de t^x; et réciproquement, la variable correspondante d'une fonction génératrice est le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction suivant les puissances de t; en sorte que l'exposant de la puissance de t indique le rang que la variable y_x occupe dans la série, que l'on peut concevoir prolongée indéfiniment à gauche, relativement aux puissances négatives de t.

Il suit de ces définitions que, u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y_{x+r} est $\frac{u}{t^r}$; car il est visible que le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^r}$ est égal à celui de t^{x+r} dans u; par conséquent il est égal à y_{x+r}.

Le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ est donc égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à la différence des deux quantités consécutives y_{x+1} et y_x, différence que nous désignerons par Δy_x, Δ étant la caractéristique des différences finies. On a donc la fonction génératrice de la différence finie d'une quantité variable, en multipliant par $\frac{1}{t} - 1$ la fonction génératrice de la quantité elle-même. La fonction génératrice de la différence finie de Δy_x, différence que l'on désigne par $\Delta^2 y_x$, est ainsi $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$; celle de la différence finie de $\Delta^2 y_x$, ou $\Delta^3 y_x$, est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$, d'où l'on peut généralement conclure que la fonction génératrice de la différence finie $\Delta^i y_x$ est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$.

Pareillement, le coefficient de t^x dans le développement de

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)$$

est

$$ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}+ey_{x+3}+\ldots+qy_{x+n};$$

en nommant donc ∇y_x cette quantité, sa fonction génératrice sera

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right).$$

Si l'on nomme $\nabla^2 y_x$ ce que devient ∇y_x lorsqu'on y change y_x dans ∇y_x; si l'on nomme pareillement $\nabla^3 y_x$ ce que devient $\nabla^2 y_x$ lorsqu'on y change ∇y_x dans $\nabla^2 y_x$, et ainsi de suite, leurs fonctions génératrices correspondantes seront

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^2,$$

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et généralement la fonction génératrice de $\nabla^i y_x$ sera

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^i.$$

De là il est facile de conclure généralement que la fonction génératrice de $\Delta^i\nabla^s y_{x+r}$ est

$$\frac{u}{t^r}\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)^s\left(\frac{1}{t}-1\right)^i.$$

On peut généraliser encore ces résultats, en supposant que ∇y_x représente une fonction quelconque linéaire, finie ou infinie, de y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ...; que $\nabla^2 y_x$ soit ce que devient ∇y_x lorsqu'on y change y_x dans ∇y_x; que $\nabla^3 y_x$ soit ce que devient $\nabla^2 y_x$ lorsqu'on y change ∇y_x dans $\nabla^2 y_x$, et ainsi de suite; u étant la fonction génératrice de y_x, us^i sera la fonction génératrice de $\nabla^i y_x$, s étant ce que devient ∇y_x, lorsqu'on y change y_x dans l'unité, y_{x+1} dans $\frac{1}{t}$, y_{x+2} dans $\frac{1}{t^2}$, ... Cela est encore vrai lorsque i est un nombre négatif ou même fractionnaire et incommensurable, en faisant toutefois à ce résultat des modifications convenables.

Représentons par Σ la caractéristique des intégrales finies, et nommons z la fonction génératrice de $\Sigma^i y_x$, u étant la fonction génératrice de y_x; $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ sera, par ce qui précède, la fonction génératrice de y_x. Mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives de t, se réduire à u, qui ne renferme que des puissances positives de t, si l'on n'étend l'intégrale multiple $\Sigma_i y_x$ qu'aux valeurs positives de x; on aura donc alors

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \ldots + \frac{F}{t^i},$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{ut^i + At^{i-1} + Bt^{i-2} + Ct^{i-3} + \ldots + F}{(1-t)^i},$$

A, B, C, ..., F étant des constantes arbitraires qui répondent aux i constantes arbitraires qu'introduisent les i intégrations successives de $\Sigma^i y_x$.

En faisant abstraction de ces constantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i y_x$ est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$; en sorte que l'on obtient cette fonction génératrice en changeant i dans $-i$ dans la fonction génératrice de $\Delta^i y_x$; $\Delta^{-i} y_x$ est donc alors égale à $\Sigma^i y_x$, c'est-à-dire que les différences négatives se changent en intégrales. Mais, si l'on a égard aux constantes arbitraires, il faut, en passant des puissances positives de $\frac{1}{t}-1$ à ses puissances négatives, augmenter u de la série $\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\ldots$, prolongée jusqu'à ce que le nombre de ses termes soit égal à l'exposant de ces puissances. On peut appliquer des considérations semblables à la fonction génératrice de $\nabla^i y_x$.

On voit par ce qui précède de quelle manière les fonctions génératrices se forment de la loi des variables correspondantes. Voyons maintenant comment les variables se déduisent de leurs fonctions génératrices; s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^n}$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de t^x dans $\frac{ku}{t^n}$ sera ky_{x+n}; on aura donc le coefficient de t^x dans us^i, coefficient que nous avons désigné précédemment par $\nabla^i y_x$: 1° en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$; 2° en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de y_x, et en transportant à l'indice x l'exposant de la puissance de y_x, c'est-à-dire en écrivant y_{x+1} au lieu de $(y_x)^1$, y_{x+2} au lieu de $(y_x)^2$, etc., et en multipliant les termes indépendants de y_x, et qui peuvent être censés avoir $(y_x)^0$ pour facteur, par y_x. Lorsque la caractéristique ∇ se change en Δ, s est, par ce qui précède, égal à $\frac{1}{t}-1$; on a donc alors

$$\Delta^i y_x = y_{x+i} - i y_{x+i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2} y_{x+i-2} - \ldots.$$

Si, au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, et que l'on désigne par $k\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de t^x dans $ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ sera $k\Delta^n y_x$; on aura donc $\nabla^i y_x$: 1° en substituant, dans s, Δy_x au lieu de $\frac{1}{t}-1$, ou, ce qui revient au même, $1+\Delta y_x$ au lieu de $\frac{1}{t}$; 2° en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de Δy_x, et en appliquant à la caractéristique Δ les exposants des puissances de Δy_x, c'est-à-dire en écrivant Δy_x au lieu de $(\Delta y_x)^1$, $\Delta^2 y_x$ au lieu de $(\Delta y_x)^2$, etc., et en multipliant par $(\Delta y_x)^0$, ou, ce qui est la même chose, par y_x les termes indépendants de Δy_x.

Généralement, si l'on considère s comme une fonction de r, r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coefficient de t_x dans ur soit $\square y_x$, on aura $\nabla^i y_x$, en substituant, dans s, $\square y_x$, au lieu de r; en développant ensuite s^i suivant les puissances de $\square y_x$ et en appliquant à la caractéristique $\square$ les exposants de $\square y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\square y_x$ au lieu de $(\square y_x)$, $\square^2 y_x$ au lieu de $(\square y_x)^2$, etc., et en multipliant par y_x les termes indépendants de $\square y_x$.

Le développement de $\nabla^i y_x$ par une série ordonnée suivant les variations successives $\square y_x$, $\square^2 y_x$, etc., se réduit donc à la formation de la fonction génératrice de y_x, au développement de cette fonction suivant les puissances d'une fonction donnée; enfin, au retour de la fonction génératrice ainsi développée, aux coefficients variables correspondants, les exposants des puissances du développement de la fonction génératrice devenant ceux de la caractéristique de ces coefficients. On voit ainsi l'analogie des puissances avec les différences, ou avec toute autre combinaison des coefficients variables consécutifs. Le passage de ces coefficients à leurs fonctions génératrices, et le retour de ces fonctions développées aux coefficients constituent le *Calcul des fonctions génératrices*. Les applications suivantes en feront connaître l'esprit et les avantages.

De l'interpolation des suites à une variable, et de l'intégration des équations différentielles linéaires.

3. Toute la théorie de l'interpolation des suites se réduit à déterminer, quel que soit i, la valeur de y_{x+i} en fonction des termes qui précèdent ou qui suivent y_x. Pour cela, on doit observer que y_{x+i} est égal au coefficient de t_{x+i} dans le développement de u, et par conséquent égal au coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i = u\left\{\begin{array}{l} 1 + i\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{i(i-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \\ + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \ldots \end{array}\right\}.$$

De plus, le coefficient de t^x, dans le développement de u, est y_x; ce coefficient dans le développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ est Δy_x; dans le développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$, il est égal à $\Delta^2 y_x$, et ainsi de suite; l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x+i} = y_x + i\Delta y_x + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_x + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x + \ldots.$$

Cette équation, ayant lieu quel que soit i, en le supposant même fractionnaire, sert à interpoler les suites dont les différences successives vont en décroissant.

Si l'on a l'équation aux différences finies

$$\Delta^n y_x = 0,$$

la série précédente se termine, et l'on a, quel que soit i, en faisant x nul,

$$y_i = y_0 + i\Delta y_0 + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots(i-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}\Delta^{n-1} y_0.$$

C'est l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences, y_0, Δy_0, $\ldots$, $\Delta^{n-1} y_0$ étant les n constantes arbitraires de cette intégrale.

Toutes les manières de développer la puissance $\frac{1}{t^i}$ donnent autant de manières différentes d'interpoler les suites. Soit, par exemple,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha}{t^r};$$

en développant $\frac{1}{t^i}$ suivant les puissances de α, par la formule (p) du n° 21 du second livre de la *Mécanique céleste*, on aura

$$\frac{u}{t_i} = u\left\{\begin{array}{l} 1 + i\alpha + \dfrac{i(i+2r-1)}{1.2}\alpha^2 + \dfrac{i(i+3r-1)(i+3r-2)}{1.2.3}\alpha^3 \\ + \dfrac{i(i+4r-1)(i+4r-2)(i+4r-3)}{1.2.3.4}\alpha^4 + \ldots \end{array}\right\}.$$

α étant égal à $t^r\left(\frac{1}{t}-1\right)$, le coefficient de t^x dans le développement de $u\alpha$ est, par le n° **2**, Δy_{x-r}; ce même coefficient dans $u\alpha^2$ est $\Delta^2 y_{x-2r}$, et ainsi de suite. L'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$y_{x+i} = y_x + i\Delta y_{x-r} + \frac{i(i+2r-1)}{1.2}\Delta^2 y_{x-2r} + \frac{i(i+3r-1)(i+3r-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_{x-3r} + \ldots.$$

4. Voici maintenant une méthode générale d'interpolation, qui a l'avantage de s'appliquer, non seulement aux séries dont les différences des termes finissent par être nulles, mais encore aux séries dont la dernière raison des termes est celle d'une suite quelconque récurrente.

Supposons d'abord que l'on ait

$$t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 = z, \tag{1}$$

et cherchons la valeur de $\frac{1}{t^i}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z. Il est clair que $\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1-\theta t$, on aura celle-ci

$$\frac{1-\theta t}{1-\theta\left(\frac{1}{t}+t\right)+\theta^2}.$$

L'équation (1) donne

$$\frac{1}{t}+t = 2+z,$$

ce qui change la fraction précédente dans celle-ci,

$$\frac{1-\theta t}{(1-\theta)^2 - z\theta},$$

or on a

$$\frac{1}{(1-\theta)^2 - z\theta} = \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{z\theta}{(1-\theta)^4} + \frac{z^2\theta^2}{(1-\theta)^6} + \ldots;$$

d'ailleurs le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^s}$ est

$$\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+r-1)}{1.2.3\ldots r},$$

d'où il suit que le coefficient de θ^i est : 1° $i+1$ dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^2}$; 2° $\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}$ dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^4}$; 3° $\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5}$ dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1-\theta)^6}$, et ainsi du reste; donc, si l'on nomme Z le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{(1-\theta)^2 - z\theta},$$

on aura

$$Z = i+1+\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}z+\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{(i-2)(i-1)(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\ldots,$$

ou

$$Z = (i+1)\left\{1+\frac{[(i+1)^2-1]z}{1.2.3}+\frac{[(i+1)^2-1][(i+1)^2-4]z^2}{1.2.3.4.5}+\ldots\right\};$$

si l'on nomme ensuite Z′ le coefficient de θ^i dans le développement de

$$\frac{\theta}{(1-\theta)^2 - z\theta},$$

on aura Z′ en changeant i en $i-1$ dans Z, ce qui donne

$$Z' = i\left[1+\frac{(i^2-1)z}{1.2.3}+\frac{(i^2-1)(i^2-4)z^2}{1.2.3.4.5}+\ldots\right],$$

on aura ainsi $Z - tZ'$ pour le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction

$$\frac{1 - \theta t}{(1-\theta)^2 - z\theta};$$

ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{t^i}$; partant,

$$\frac{u}{t^i} = u(Z - tZ').$$

Cela posé, le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^i}$ est y_{x+i}. Ce même coefficient, dans un terme quelconque de uZ tel que kuz^r ou $kut^r\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{2r}$, est, par le n° **2**, $k\Delta^{2r} y_{x-r}$. Dans un terme quelconque de uZ', tel que $kutz^r$ ou $kut^{r+1}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{2r}$, ce coefficient est $k\Delta^{2r} y_{x-r-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$y_{x+i} = (i+1)\left\{\begin{aligned} & y_x + \frac{(i+1)^2 - 1}{1.2.3}\Delta^2 y_{x-1} \\ & + \frac{[(i+1)^2 - 1][(i+1)^2 - 4]}{1.2.3.4.5}\Delta^4 y_{x-2} + \ldots \end{aligned}\right\}$$
$$- i\left[y_{x-1} + \frac{i^2 - 1}{1.2.3}\Delta^2 y_{x-2} + \frac{(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^4 y_{x-3} + \ldots\right].$$

On peut donner les formes suivantes à l'expression précédente. Soit Z'' ce que devient Z' lorsqu'on y change i dans $i - 1$, et par conséquent ce que devient Z lorsqu'on y change i dans $i - 2$. L'équation

$$\frac{1}{t^i} = Z - tZ'$$

donnera

$$\frac{1}{t^{i-1}} = Z' - tZ'';$$

par conséquent,

$$\frac{1}{t^i} = \frac{Z'}{t} - Z''.$$

En ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{t^i}$ et prenant la moitié de leur somme,

on aura

$$\frac{1}{t^i} = \tfrac{1}{2}Z - \tfrac{1}{2}Z'' + \tfrac{1}{2}(1+t)\left(\frac{1}{t}-1\right)Z';$$

or on a

$$\tfrac{1}{2}Z - \tfrac{1}{2}Z'' = 1 + \frac{i^2}{1.2}z + \frac{i^2(i^2-1)}{1.2.3.4}z^2 + \frac{i^2(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}z^3 + \ldots;$$

partant,

$$\begin{aligned}\frac{u}{t^i} &= u\left[1 + \frac{i^2}{1.2}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \frac{i^2(i^2-1)}{1.2.3.4}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^4 + \ldots\right]\\ &\quad + \frac{i}{2}u(1+t)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{t} - 1 + \frac{i^2-1}{1.2.3}t\left(\frac{1}{t}-1\right)^3\\ &\qquad + \frac{(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5}t^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^5 + \ldots\end{aligned}\right\};\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\begin{aligned}y_{x+i} = y_x &+ \frac{i^2}{1.2}\Delta^2 y_{x-1} + \frac{i^2(i^2-1)}{1.2.3.4}\Delta^4 y_{x-2}\\ &+ \frac{i^2(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6}\Delta^6 y_{x-3} + \ldots\\ &+ \frac{i}{2}(\Delta y_x + \Delta y_{x-1}) + \frac{i}{2}\,\frac{i^2-1}{1.2.3}(\Delta^3 y_{x-1} + \Delta^3 y_{x-2})\\ &+ \frac{i}{2}\,\frac{(i^2-1)(i^2-4)}{1.2.3.4.5}(\Delta^5 y_{x-2} + \Delta^5 y_{x-3}) + \ldots.\end{aligned}$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre impair $2x+1$ de quantités équidistantes; l'intervalle commun qui les sépare étant pris pour unité, y_x est la moyenne des grandeurs $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2x}$, et i est la distance de y_{x+i} à cette moyenne. L'expression précédente est alors symétrique relativement à ces grandeurs; car $\Delta^2 y_{x-1}$, par exemple, est égal à $y_{x+1} - 2y_x + y_{x-1}$, et $\Delta y_x + \Delta y_{x-1}$ est égal à $y_{x+1} - y_{x-1}$. Ainsi les quantités placées au-dessus et au-dessous de la moyenne y_x entrent de la même manière dans cette expression.

Si l'on change i en $i+1$ dans la dernière expression de $\frac{u}{t^i}$, et si l'on en retranche cette expression elle-même, on aura l'expression de

$\frac{u}{t^{i+1}} - \frac{u}{t^i}$ ou de $\frac{u}{t^i}\left(\frac{1}{t} - 1\right)$; en divisant ensuite cette valeur par $\frac{1}{t} - 1$, on aura

$$\frac{u}{t^i} = \frac{u}{2}(1+t)\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{1.2}\, t\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \\ &\quad + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1.2.3.4}\, t^2\left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 + \ldots \end{aligned}\right\}$$

$$+ (i+\tfrac{1}{2})\, ut\left(\frac{1}{t} - 1\right)\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{1.2.3}\, t\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \\ &\quad + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1.2.3.4.5}\, t^2\left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 + \ldots \end{aligned}\right\}.$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i} = {} & \tfrac{1}{2}(y_x + y_{x-1}) + \frac{(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{1.2}\, \tfrac{1}{2}(\Delta^2 y_{x-1} + \Delta^2 y_{x-2}) \\ & + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1.2.3.4}\, \tfrac{1}{2}(\Delta^4 y_{x-2} + \Delta^4 y_{x-3}) + \ldots \\ & + (i+\tfrac{1}{2})\left\{\begin{aligned} &\Delta y_{x-1} + \frac{(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{1.2.3}\, \Delta^3 y_{x-2} \\ &\quad + \frac{[(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}][(i+\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}]}{1.2.3.4.5}\, \Delta^5 y_{x-3} + \ldots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}$$

Cette formule sert à interpoler entre un nombre pair $2x$ de quantités équidistantes, y_x et y_{x+1} étant les deux quantités moyennes. Elle est disposée d'une manière symétrique relativement aux quantités également distantes du milieu de l'intervalle qui sépare les quantités extrêmes : ce milieu est l'origine des valeurs de $i+\frac{1}{2}$, qui sont positives au-dessus et négatives au-dessous.

Toutes ces expressions de y_{x+i} sont identiques et telles que, si l'on conçoit une courbe parabolique dont i soit l'abscisse et y_{x+i} l'ordonnée, et dont l'équation soit celle qui donne l'expression de y_{x+i}, cette courbe passera par les extrémités des ordonnées y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ..., y_{x-1}, y_{x-2}, ... On peut ainsi, en prenant les différences finies successives d'un nombre quelconque de coordonnées, faire passer une courbe parabolique par les extrémités de ces coordonnées.

5. Supposons généralement

$$(a) \qquad z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n};$$

on aura

$$\frac{1}{t^n} = \frac{z-a}{q} - \frac{b}{qt} - \frac{c}{qt^2} - \ldots - \frac{p}{qt^{n-1}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^{n+1}} = \frac{z-a}{qt} - \frac{b}{qt^2} - \frac{c}{qt^3} - \ldots - \frac{p}{qt^n};$$

éliminant $\frac{1}{t^n}$ du second membre de cette équation au moyen de la proposée (a), on aura

$$\frac{1}{t^{n+1}} = -\frac{p(z-a)}{q^2} + \frac{pb + q(z-a)}{q^2 t} + \ldots.$$

Cette expression de $\frac{1}{t^{n+1}}$ ne renferme que des puissances de $\frac{1}{t}$ d'un ordre inférieur à n. En la multipliant par $\frac{1}{t}$, on aura une expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$, qui renfermera la puissance $\frac{1}{t^n}$; mais, en éliminant encore cette puissance au moyen de la proposée (a), on réduira l'expression de $\frac{1}{t^{n+2}}$ à ne contenir que des puissances de $\frac{1}{t}$ inférieures à n. En continuant ainsi, on parviendra à une expression de $\frac{1}{t^i}$, qui ne renfermera que des puissances de $\frac{1}{t}$ moindres que n, et qui sera par conséquent de la forme

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t} Z^{(1)} + \frac{1}{t^2} Z^{(2)} + \ldots + \frac{1}{t^{n-1}} Z^{(n)},$$

$Z, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ étant des fonctions rationnelles et entières de z, dans lesquelles la plus haute puissance de z ne surpasse pas $\frac{i}{n}$.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{t^i}$ serait très pénible si i était un grand nombre; elle conduirait d'ailleurs difficilement à l'expression générale de cette quantité. On y parviendra directement de la manière suivante.

$\frac{1}{t^i}$ est égal au coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$. Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par

$$(a-z)\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q,$$

et si dans le numérateur on substitue au lieu de z sa valeur $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots$, on aura

$$\frac{b\theta^{n-1}\left(1-\frac{\theta}{t}\right) + c\theta^{n-2}\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right) + e\theta^{n-3}\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right) + \ldots + q\left(1-\frac{\theta^n}{t^n}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right)(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n)};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $1-\frac{\theta}{t}$, elle devient

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} + \ldots + q \\ + \frac{\theta}{t}(c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} + \ldots + q) \\ + \frac{\theta^2}{t^2}(e\theta^{n-3} + \ldots + q) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t^{n-1}} q \end{array}\right\}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

La recherche du coefficient de θ^i dans le développement de cette fraction se réduit à déterminer, quel que soit r, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions rationnelles et entières de θ, la première étant d'un ordre inférieur à la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - \alpha$ élevé à la puissance s, en sorte que l'on ait

$$Q = (\theta - \alpha)^s R,$$

R étant une fonction rationnelle et entière de θ. On pourra décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s} + \frac{B}{R}$, A et B étant des fonctions rationnelles et entières de θ, la première de l'ordre $s - 1$, et la seconde d'un ordre inférieur à celui de R; car il est visible qu'en substituant pour A et B des fonctions de cette nature, avec des coefficients indéterminés, en réduisant ensuite les deux fractions au même dénominateur, qui devient alors égal à Q, en égalant enfin la somme de leurs numérateurs à P, la comparaison des puissances semblables de θ donnera autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. Cela posé, l'équation

$$\frac{A}{(\theta-\alpha)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\theta-\alpha)^s R}$$

donne

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B(\theta-\alpha)^s}{R}.$$

Si l'on considère A, B, P et R comme des fonctions rationnelles et entières de $\theta - \alpha$, A sera une fonction de l'ordre $s - 1$, et par conséquent il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\theta - \alpha$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s - 1$ inclusivement. Soit donc

$$\frac{P}{R} = u_0 + u_1(\theta-\alpha) + u_2(\theta-\alpha)^2 + \ldots;$$

on aura

$$\frac{A}{(\theta-\alpha)^s} = \frac{u_0}{(\theta-\alpha)^s} + \frac{u_1}{(\theta-\alpha)^{s-1}} + \frac{u_2}{(\theta-\alpha)^{s-2}} + \ldots,$$

en rejetant les puissances positives de $\theta - \alpha$; $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$ est, par conséquent, égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de la fonction

$$\frac{u_0 + u_1 t + u_2 t + \ldots}{\theta - \alpha - t}.$$

Si l'on nomme P′ et R′ ce que deviennent P et R lorsqu'on y change $\theta - \alpha$ en t, ou, ce qui revient au même, θ en $t + \alpha$, on aura

$$\frac{P'}{R'} = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots;$$

partant, $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ est égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de

$$\frac{P'}{R'(\theta - \alpha - t)};$$

il est donc égal à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{P'}{R'(\theta - \alpha - t)},$$

pourvu que l'on suppose t nul après les différentiations. Maintenant le coefficient de θ^r dans

$$\frac{P'}{R'(\theta - \alpha - t)}$$

étant égal à

$$-\frac{P'}{R'(\alpha + t)^{r+1}},$$

ce même coefficient dans

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{P'}{R'(\theta - \alpha - t)}$$

sera

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} \frac{P'}{R'(\alpha + t)^{r+1}},$$

t étant supposé nul après les différentiations; cette dernière quantité est donc le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$. Si l'on restitue, dans P′ et R′, $\theta - \alpha$ au lieu de t, ce qui les change en P et R, on aura

$$\frac{d^{s-1} \frac{P'}{R'(\alpha + t)^{r+1}}}{dt^{s-1}} = \frac{d^{s-1} \frac{P}{R\theta^{r+1}}}{d\theta^{s-1}},$$

pourvu que l'on suppose $\theta = \alpha$ après les différentiations, dans le second membre de cette équation; la fonction

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)}\,\frac{d^{s-1}\dfrac{P}{R\theta^{r+1}}}{d\theta^{s-1}}$$

est donc, avec cette condition, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$.

Il suit de là que, si l'on suppose

$$Q = a(\theta-\alpha)^s(\theta-\alpha')^{s'}(\theta-\alpha'')^{s''}\ldots,$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$ sera

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)}\,\frac{d^{s-1}}{d\theta^{s-1}}\,\frac{P}{a\theta^{r+1}(\theta-\alpha')^{s'}(\theta-\alpha'')^{s''}\ldots}\\
&-\frac{1}{1.2.3\ldots(s'-1)}\,\frac{d^{s'-1}}{d\theta^{s'-1}}\,\frac{P}{a\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^{s}(\theta-\alpha'')^{s''}\ldots}\\
&-\frac{1}{1.2.3\ldots(s''-1)}\,\frac{d^{s''-1}}{d\theta^{s''-1}}\,\frac{P}{a\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^{s}(\theta-\alpha')^{s'}\ldots}\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

en faisant $\theta=\alpha$ dans le premier terme, $\theta=\alpha'$ dans le second terme, $\theta=\alpha''$ dans le troisième terme, et ainsi de suite.

Maintenant, soit

$$V = a(\theta-\alpha)(\theta-\alpha')(\theta-\alpha'')\ldots.$$

En développant la fraction

$$\frac{1}{V-z\theta^n}$$

dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z, on aura

$$\frac{1}{V}+\frac{z\theta^n}{V^2}+\frac{z^2\theta^{2n}}{V^3}+\frac{z^3\theta^{3n}}{V^4}+\ldots;$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V^s}$ est, par ce qui précède, égal à

$$(o)\qquad -\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1)\,a^s}\,\frac{d^{s-1}}{d\theta^{s-1}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha')^s(\theta-\alpha'')^s\ldots}\\ +\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\alpha'')^s\ldots}\\ +\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\alpha')^s\ldots}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

pourvu qu'après les différentiations on suppose $\theta=\alpha$ dans le premier terme, $\theta=\alpha'$ dans le second terme, $\theta=\alpha''$ dans le troisième terme, etc. S'il n'y a qu'un seul facteur $\theta-\alpha$, la fonction renfermée entre les deux parenthèses se réduit à $\frac{1}{\theta^{r+1}}$, θ devant être changé en α après les différentiations, ce qui réduit la quantité (o) à

$$(-1)^s\frac{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+s-1)}{1.2.3\ldots(s-1)\,a^s}\,\frac{1}{\alpha^{r+s}}.$$

Si dans l'expression de V quelques-uns des facteurs $\theta-\alpha$, $\theta-\alpha'$, ... sont élevés à des puissances plus hautes que l'unité; par exemple, si $\theta-\alpha$ est élevé à la puissance m, il sera élevé à la puissance $-ms$ dans $\frac{1}{V^s}$, et alors il faut changer le premier terme de la quantité (o) dans le suivant :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(ms-1)\,a^s}\,\frac{d^{ms-1}}{d\theta^{ms-1}}\,\frac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha')^s(\theta-\alpha'')^s\ldots},$$

et dans les autres termes, il faut changer $(\theta-\alpha)^s$ dans $(\theta-\alpha)^{ms}$.

Représentons généralement par $Z_r^{(s-1)}$ la quantité (o); le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{V-z\theta^n}$ sera

$$Z_i^{(0)}+Z_{i-n}^{(1)}z+Z_{i-2n}^{(2)}z^2+Z_{i-3n}^{(3)}z^3+\ldots;$$

on aura donc, pour le coefficient de θ^i dans le développement de la deuxième fraction de la page 19, ou pour la valeur de $\frac{1}{t^i}$,

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{t^i} = {} & b[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+1} + z^3Z^{(3)}_{i-4n+1} + \ldots] \\
& + c[Z^{(0)}_{i-n+2} + zZ^{(1)}_{i-2n+2} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+2} + z^3Z^{(3)}_{i-4n+2} + \ldots] \\
& + e[Z^{(0)}_{i-n+3} + zZ^{(1)}_{i-2n+3} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+3} + z^3Z^{(3)}_{i-4n+3} + \ldots] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{t}\left\{\begin{aligned} & c[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z_1Z^{(2)}_{i-3n+1} + \ldots] \\ & + e[Z^{(0)}_{i-n+2} + zZ^{(1)}_{i-2n+2} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+2} + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \\
& + \frac{1}{t^2}\left\{\begin{aligned} & e[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+1} + \ldots] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{t^{n-1}}q[Z^{(0)}_{i-n+1} + zZ^{(1)}_{i-2n+1} + z^2Z^{(2)}_{i-3n+1} + \ldots].
\end{aligned}\right.$$

Présentement, si l'on désigne par ∇y_x la quantité

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + qy_{x+n},$$

par $\nabla^2 y_x$ ce que devient ∇y_x lorsqu'on y change y_x dans ∇y_x, par $\nabla^3 y_x$ ce que devient $\nabla^2 y_x$ lorsqu'on y change ∇y_x dans $\nabla^2 y_x$, et ainsi de suite, il est visible, par le n° 2, que le coefficient de t^x dans le développement de $\frac{uz^s}{t^r}$ sera $\nabla^s y_{x+r}$; en multipliant donc l'équation précédente par u et en ne considérant dans chaque terme que le coefficient de t^x, c'est-à-dire en repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned}
y_{x+i} = {} & y_x\ [bZ^{(0)}_{i-n+1} + cZ^{(0)}_{i-n+2} + eZ^{(0)}_{i-n+3} + \ldots + qZ^{(0)}_i] \\
& + \nabla y_x\ [bZ^{(1)}_{i-2n+1} + cZ^{(1)}_{i-2n+2} + eZ^{(1)}_{i-2n+3} + \ldots + qZ^{(1)}_{i-n}] \\
& + \nabla^2 y_x\ [bZ^{(2)}_{i-3n+1} + cZ^{(2)}_{i-3n+2} + eZ^{(2)}_{i-3n+3} + \ldots + qZ^{(2)}_{i-2n}] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_{x+1}\ [cZ^{(0)}_{i-n+1} + eZ^{(0)}_{i-n+2} + \ldots + qZ^{(0)}_{i-1}] \\
& + \nabla y_{x+1}[cZ^{(1)}_{i-2n+1} + eZ^{(1)}_{i-2n+2} + \ldots + qZ^{(1)}_{i-n-1}] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_{x+2}\ [eZ^{(0)}_{i-n+1} + \ldots + qZ^{(0)}_{i-2}] \\
& + \nabla y_{x+2}[eZ^{(1)}_{i-2n+1} + \ldots + qZ^{(1)}_{i-n-2}] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + qy_{x+n-1}Z^{(0)}_{i-n+1} + q\nabla y_{x+n-1}Z^{(1)}_{i-2n+1} + q\nabla^2 y_{x+n-1}Z^{(2)}_{i-3n+1} + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente; car il est clair que, dans ce cas, $\nabla y_x, \nabla^2 y_x, \ldots$ vont toujours en diminuant et finissent par être nuls dans l'infini.

6. La formule (B) s'arrête lorsque l'on a $\nabla^r y_x = 0$, r étant un nombre entier positif quelconque, et alors l'expression précédente de y_{x+i} devient l'intégrale de l'équation aux différences finies $\nabla^r y_i = 0$, ce qui est analogue à ce qu'on a vu dans le n° 3, relativement à l'équation $\Delta^r y_i = 0$. Supposons $\nabla y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = a y_i + b y_{i+1} + c y_{i+2} + \ldots + q y_{i+n};$$

si l'on fait x nul dans la formule (B) du numéro précédent, elle devient

$$\begin{aligned} y_i = {} & y_0 (b Z_{i-n+1}^{(0)} + c Z_{i-n+2}^{(0)} + e Z_{i-n+3}^{(0)} + \ldots + q Z_i^{(0)}) \\ & + y_1 (c Z_{i-n+1}^{(0)} + e Z_{i-n+2}^{(0)} + \ldots + q Z_{i-1}^{(0)}) \\ & + y_2 (e Z_{i-n+1}^{(0)} + \ldots + q Z_{i-2}^{(0)}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + q y_{n-1} Z_{i-n+1}^{(0)}; \end{aligned}$$

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sont les n premières valeurs de y_i; ce sont les n constantes arbitraires que l'intégrale de l'équation $\nabla y_i = 0$ introduit.

La valeur de $Z_{i-n+1}^{(0)}$ est égale à

$$-\frac{1}{a\alpha^{i-n+2}(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')\ldots} - \frac{1}{a\alpha'^{i-n+2}(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')\ldots} - \ldots.$$

Ainsi, V étant égal à $a(\theta-\alpha)(\theta-\alpha')(\theta-\alpha'')$, ..., le premier de ces termes devient

$$-\frac{\alpha^{n-2}}{\alpha^i \dfrac{dV}{d\theta}},$$

pourvu que l'on change θ en α dans $\dfrac{dV}{d\theta}$; en n'ayant donc égard qu'au terme multiplié par $\frac{1}{\alpha^i}$, l'expression précédente de y_i deviendra

$$y_i = -\frac{1}{\alpha^{i+1}\frac{dV}{d\theta}}\left(\begin{array}{l} y_0(b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+e\alpha^{n-3}+\ldots+q)\\ +y_1(c\alpha^{n-1}+e\alpha^{n-2}+\ldots+q\alpha)\\ +y_2(e\alpha^{n-1}+\ldots+q\alpha^2\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +y_{n-1}q\alpha^{n-1}\end{array}\right)$$

En changeant successivement, dans le second membre de cette équation, α en α', α'', ..., et réciproquement, on aura autant de termes qui, ajoutés au précédent, formeront l'expression complète de y_i.

Nommons k la fonction comprise entre les deux parenthèses, en sorte que ce second membre soit $-\frac{k}{\alpha^{i+1}\frac{dV}{d\theta}}$. Si les deux racines α et α' sont égales, V sera de cette forme $(\theta-\alpha)^2 L$. On supposera que α et α', au lieu d'être rigoureusement égaux, diffèrent infiniment peu, et que l'on a $\alpha' = \alpha + d\alpha$. Alors la somme des deux termes de y_i relatifs aux racines α et α' sera

$$-\frac{1}{d\alpha}\left(\frac{k'}{\alpha'^{i+1}L'} - \frac{k}{\alpha^{i+1}L}\right),$$

k' étant ce que devient k lorsqu'on y change α en α'; L et L' étant ici ce que devient L lorsqu'on y change θ en α et α'. Cette quantité est donc égale à

$$-\frac{d\frac{k}{\alpha^{i+1}L}}{d\alpha};$$

mais on a

$$L = \frac{1}{2}\frac{d^2V}{d\theta^2},$$

θ devant être changé en α après les différentiations. La somme des termes de l'expression de y_i, relatifs aux deux racines égales, est donc

$$-\frac{1}{1.2}\frac{d}{d\alpha}\frac{k}{\alpha^{i+1}\frac{d^2V}{d\theta^2}}.$$

On trouvera de la même manière que, si V contient trois facteurs égaux, la somme des termes de l'expression de y_i relatifs à ces trois facteurs est

$$-\frac{1}{1.2.1.2.3}\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{k}{\alpha^{i+1}\dfrac{d^3 V}{d\theta^3}},$$

et ainsi de suite. $Z_i^{(0)}$ étant, par ce qui précède, le coefficient de θ^i dans le développement de $\frac{1}{V}$, il en résulte que y_i est le coefficient de θ^i dans le développement de la fonction

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} y_0(b\theta^{n-1}+c\theta^{n-2}+\ldots+q) \\ +y_1(c\theta^{n-1}+e\theta^{n-2}+\ldots+q\theta) \\ +y_2(e\theta^{n-1}+\ldots+q\theta^2) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +y_{n-1}q\theta^{n-1} \end{array}\right\}}{a\theta^n+b\theta^{n-1}+c\theta^{n-2}+\ldots+p\theta+q}.$$

Cette fonction est donc la fonction génératrice de y_i ou de la variable principale de l'équation aux différences $\nabla y_i = 0$. La formule (B) du numéro précédent donnera pareillement la valeur de y_i ou l'intégrale complète de l'équation aux différences $\nabla^2 y_i = 0$; $y^0, \nabla y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, \nabla y_{n-1}$ seront les $2n$ arbitraires de cette intégrale. Le cas des racines égales se résoudra de la même manière que ci-dessus. On aura par la même formule l'intégrale des équations aux différences $\nabla^3 y_i = 0$, $\nabla^4 y_i = 0, \ldots$, ce qui montre l'analogie qui existe entre l'interpolation des suites et l'intégration des équations aux différences.

Soit $y_i = y'_i + y''_i$, et supposons que u' soit la fonction génératrice de y'_i, et u'' celle de y''_i, u étant celle de y_i; on aura $u = u' + u''$. Soit encore

$$u'' = \frac{\lambda}{z^s},$$

z ayant la signification que nous lui avons donnée dans le n° 5, et nommons X_i le coefficient de t^i dans le développement de λ; on aura, par le n° 2,

$$X_i = \nabla^s y''_i.$$

Maintenant on a, par le n° 5,

$$\frac{1}{z^s} = \frac{t^{ns}}{(at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \ldots + q)^s};$$

or le coefficient de t^i, dans le développement du second membre de cette équation, est égal à celui de θ^{i-ns} dans le développement de

$$\frac{1}{(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + q)^s},$$

et, par le numéro précédent, ce coefficient est égal à $Z_{i-ns}^{(s-1)}$; donc le coefficient de t^i dans le développement de $\frac{\lambda}{z^s}$ sera

$$X_{i-ns} Z_0^{(s-1)} + X_{i-ns-1} Z_1^{(s-1)} + X_{i-ns-2} Z_2^{(s-1)} + \ldots + X_0 Z_{i-ns}^{(s-1)}$$

ou $\Sigma X_r Z_{i-ns-r}^{(s-1)}$, l'intégrale étant prise relativement à r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i - ns$; ce sera la valeur de y''_i. Cela posé, si dans la formule (B) du numéro précédent on suppose $\nabla^s y_i = 0$, elle donnera, en observant que $y_i = y'_i + y''_i$,

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} y'_i + \Sigma X_r Z_{i-ns-r}^{(s-1)} = {} & y_0 (b Z_{i-n+1}^{(0)} + c Z_{i-n+2}^{(0)} + \ldots + q Z_i^{(0)}) \\ & + \nabla y_0 (b Z_{i-2n+1}^{(1)} + c Z_{i-2n+2}^{(1)} + \ldots + q Z_{i-n}^{(1)}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \nabla^{s-1} y_0 (b Z_{i-sn+1}^{(s-1)} + c Z_{i-sn+2}^{(s-1)} + \ldots + q Z_{i-sn+n}^{(s-1)}) \\ & + y_1 (c Z_{i-n+1}^{(0)} + \ldots + q Z_{i-1}^{(0)}) \\ & + \nabla y_1 (c Z_{i-2n+1}^{(1)} + \ldots + q Z_{i-n-1}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \nabla^{s-1} y_1 (c Z_{i-sn+1}^{(s-1)} + \ldots + q Z_{i-sn+n-1}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + q Z_{i-n+1}^{(0)} y_{n-1} + q Z_{i-2n+1}^{(1)} \nabla y_{n-1} + \ldots \\ & + q Z_{i-sn+1}^{(s-1)} \nabla^{s-1} y_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

$y_0, \nabla y_0, \ldots, \nabla^{s-1} y_0, y_1, \nabla y_1, \ldots$ étant les ns arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^s y_i = 0$ ou

$$\nabla^s y'_i + \nabla^s y''_i = 0;$$

or, $\nabla^s y''_i$ étant égale à X_i, cette équation devient

$$0 = \nabla^s y'_i + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale des équations linéaires aux différences finies dont les coefficients sont constants, dans le cas où elles ont un dernier terme fonction de i.

L'intégrale définie relative à r $\Sigma X_r Z^{(s-1)}_{i-ns-r}$ peut être facilement transformée dans une suite d'intégrales indéfinies relatives à i; car l'expression générale de $Z'^{(s-1)}_{i-ns-r}$ est formée de ns termes de la forme $\mathrm{I}r^{\mu}\alpha^r$, I étant une fonction de i indépendante de la variable r; l'intégrale précédente est donc composée d'intégrales de la forme $\mathrm{I}\Sigma r^{\mu}\alpha^r X_r$; cette dernière intégrale devant être prise depuis r nul jusqu'à $r = i - ns$, elle est égale à l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{I}\Sigma(i-ns)^{\mu}\alpha^{i-ns+1}X_{i-ns+1},$$

prise depuis $i = ns$.

7. On peut donner à l'expression de $\frac{1}{t^i}$ une infinité d'autres formes dont plusieurs peuvent être utiles. Donnons-lui, par exemple, cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z^{(0)} + \left(\frac{1}{t} - 1\right)Z^{(1)} + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 Z^{(2)} + \ldots + \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} Z^{(n-1)}.$$

On déterminera ainsi les valeurs de $Z^{(0)}$, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, ... On mettra d'abord l'équation

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots + \frac{q}{t^n}$$

sous cette forme, en y substituant $\left(\frac{1}{t} - 1 + 1\right)^r$ au lieu de $\frac{1}{t^r}$, et développant suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$,

$$z = a' + b'\left(\frac{1}{t} - 1\right) + c'\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \ldots + q\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
a' &= a + \ \ b + \ \ c + \ldots + q,\\
b' &= b + 2c + 3e + \ldots + nq,\\
c' &= c + 3e + \ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On multipliera ensuite, comme précédemment, le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$ par

$$(a-z)\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q,$$

en observant de substituer dans le numérateur : 1° au lieu de z,

$$a' + b'\left(\frac{1}{t}-1\right) + c'\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \ldots;$$

2° au lieu de $a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots$, la quantité

$$\theta^n\left[a' + b'\left(\frac{1}{\theta}-1\right) + c'\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 + \ldots\right];$$

si l'on fait de plus, pour abréger,

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{1}{t'},$$

on aura

$$\frac{b'\theta^{n-1}\left(1-\theta-\frac{\theta}{t'}\right) + c'\theta^{n-2}\left[(1-\theta)^2 - \frac{\theta^2}{t'^2}\right] + \ldots + q\left[(1-\theta)^n - \frac{\theta^n}{t'^n}\right]}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right)(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n)};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par $1-\frac{\theta}{t}$, elle se réduit à celle-ci,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} \theta^{n-1}\left[b' + c'\left(\frac{1}{\theta}-1\right) + e'\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^2 + \ldots + q\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{n-1}\right] \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'}\left[c' + e'\left(\frac{1}{\theta}-1\right) + \ldots + q\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{n-2}\right] \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'^2}\left[e' + \ldots + q\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{n-3}\right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\,\theta^{n-1}}{t'^{n-1}} \end{array}\right\}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

De là il est aisé de conclure que, si l'on conserve à $Z_r^{(s-1)}$ la même signification que nous lui avons donnée dans le n° 5, et que l'on considère qu'en désignant q_i le coefficient de θ^i dans le développement d'une fonction quelconque de θ, ce même coefficient dans le développement de cette fonction multipliée par $\left(\frac{1}{\theta}-1\right)^{\mu}$ sera, par le n° 2, égal à $\Delta^{\mu} q_i$, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^i} = {} & b' Z^{(0)}_{i-n+1} + b' z Z^{(1)}_{i-2n+1} + b' z^2 Z^{(0)}_{i-3n+1} + \dots \\
& + c' \Delta Z^{(0)}_{i-n+1} + c' z \Delta Z^{(1)}_{i-2n+1} + c' z^2 \Delta Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots \\
& + e' \Delta^2 Z^{(0)}_{i-n+1} + e' z \Delta^2 Z^{(1)}_{i-2n+1} + e' z^2 \Delta^2 Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + q \Delta^{n-1} Z^{(0)}_{i-n+1} + q z \Delta^{n-1} Z^{(1)}_{i-2n+1} + q z^2 \Delta^{n-1} Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots \\
& + \frac{1}{t'} \left\{ \begin{array}{l} \quad c' Z^{(0)}_{i-n+1} + c' z Z^{(1)}_{i-2n+1} + \dots \\ + e' \Delta Z^{(0)}_{i-n+1} + e' z \Delta Z^{(1)}_{i-2n+1} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \\
& + \frac{1}{t'^2} \left\{ \begin{array}{l} \quad e Z^{(0)}_{i-n+1} + e' z Z^{(1)}_{i-2n+1} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{q}{t'^{n-1}} \left\{ Z^{(0)}_{i-n+1} + z Z^{(1)}_{i-2n+1} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Présentement il est clair, par le n° 2, que le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $\frac{u z^s}{t'^r}$ est $\Delta^r \nabla^s y_x$; l'équation précédente donnera donc, en multipliant ses deux membres par u et repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\begin{aligned}
y_{x+i} = {} & y_x \left[b' Z^{(0)}_{i-n+1} + c' \Delta Z^{(0)}_{i-n+1} + e' \Delta^2 Z^{(0)}_{i-n+1} + \dots + q \Delta^{n-1} Z^{(0)}_{i-n+1} \right] \\
& + \nabla y_x \left(b' Z^{(1)}_{i-2n+1} + c' \Delta Z^{(1)}_{i-2n+1} + e' \Delta^2 Z^{(2)}_{i-2n+1} + \dots + q \Delta^{n-1} Z^{(1)}_{i-2n+1} \right) \\
& + \nabla^2 y_x \left(b' Z^{(2)}_{i-3n+1} + c' \Delta Z^{(2)}_{i-3n+1} + e' \Delta^2 Z^{(2)}_{i-3n+1} + \dots + q \Delta^{n-1} Z^{(2)}_{i-3n+1} \right) \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \Delta y_x \quad \left(c' Z^{(0)}_{i-n+1} + e' \Delta Z^{(0)}_{i-n+1} + \dots + q \Delta^{n-2} Z^{(0)}_{i-n+1} \right) \\
& + \Delta \nabla y_x \left(c' Z^{(1)}_{i-2n+1} + e' \Delta Z^{(1)}_{i-2n+1} + \dots + q \Delta^{n-2} Z^{(1)}_{i-2n+1} \right) \\
& + \Delta \nabla^2 y_x \left(c' Z^{(2)}_{i-3n+1} + e' \Delta Z^{(1)}_{i-3n+1} + \dots + q \Delta^{n-2} Z^{(2)}_{i-3n+1} \right) \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + q Z^{(0)}_{i-n+1} \Delta^{n-1} y_x + q Z^{(1)}_{i-2n+1} \Delta^{n-1} \nabla y_x + q Z^{(2)}_{i-3n+1} \Delta^{n-1} \nabla^2 y_x + \dots,
\end{aligned}$$

la caractéristique ∇ se rapportant à la variable x, et la caractéristique Δ se rapportant aux deux variables x et i.

8. Supposons, dans la formule précédente, x et i infiniment grands, de manière que l'on ait

$$i = \frac{x'}{dx'}, \qquad x = \frac{\varpi}{dx'};$$

y_{x+i} deviendra une fonction de $\varpi + x'$, fonction que nous désignerons par $\varphi(\varpi + x')$. Supposons, de plus,

$$a' = a'', \qquad b' = \frac{b''}{dx'}, \qquad c' = \frac{c''}{dx'^2}, \qquad \ldots, \qquad q = \frac{q''}{dx'^n};$$

l'équation

$$0 = a' + b'\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + c'\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \ldots$$

deviendra

$$0 = a'' + \frac{b''}{dx'}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \frac{c''}{dx'^2}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 + \ldots + \frac{q''}{dx'^n}\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^n.$$

Cette dernière équation donne, pour $\theta - 1$, n racines $f\,dx'$, $f'\,dx'$, $f''\,dx'$, ..., et par conséquent, pour θ, les n valeurs

$$\theta = 1 + f\,dx', \qquad \theta = 1 + f'\,dx', \qquad \theta = 1 + f''\,dx', \qquad \ldots.$$

Maintenant, si l'on suppose $\theta = 1 + h\,dx'$, on aura, i étant supposé infini,

$$\frac{1}{\theta^i} = \frac{1}{(1 + h\,dx')^i} = 1 - ih\,dx' + \frac{i^2}{1.2}h^2\,dx'^2 - \ldots = c^{-hx'},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. D'ailleurs la quantité a est, par le numéro précédent, égale à $a' - b' + c' - \ldots$, et par conséquent égale à $a'' - \frac{b''}{dx} + \ldots \pm \frac{q^n}{dx^n}$, valeur qui se réduit à son dernier terme, qui surpasse infiniment les autres; l'expression de $Z_r^{(s-1)}$ du n° 5 devient, en y changeant r dans $i-1$,

$$Z_{i-1}^{(s-1)} = -\frac{dx'}{1.2.3\ldots(s-1)(\pm q'')^s}\,\frac{d^{s-1}}{dh^{s-1}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{c^{-hx'}}{(h-f')^s(h-f'')^s\ldots}\\ +\dfrac{c^{-hx'}}{(h-f)^s(h-f'')^s\ldots}\\ +\dfrac{c^{-hx'}}{(h-f)^s(h-f')^s\ldots}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

la différence d^{s-1} étant prise en ne faisant varier que h et en substituant, après les différentiations, f au lieu de h dans le premier terme, f' au lieu de h dans le second terme, et ainsi de suite. Nommons $X^{(s-1)}dx'$ la quantité précédente; on aura, à l'infiniment petit près, μ étant un nombre fini,

$$Z_{i\pm\mu}^{(s-1)} = Z_{i-1}^{(s-1)} = X^{(s-1)}\,dx'.$$

D'ailleurs on a $y_x = \varphi(\varpi)$, et la caractéristique Δ des différences finies doit se changer dans la caractéristique d des différences infiniment petites, en sorte que l'équation

$$\nabla y_x = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci

$$\nabla y_x = a'' + \frac{b''}{dx'}\Delta y_x + \frac{c''}{dx'^2}\Delta^2 y_x + \ldots,$$

devient, en y changeant dx' en $d\varpi$,

$$\nabla y_x = a'' + b''\frac{d\,\varphi(\varpi)}{d\varpi} + c''\frac{d^2\,\varphi(\varpi)}{d\varpi^2} + \ldots + q''\frac{d^n\,\varphi(\varpi)}{d\varpi^n}.$$

L'expression de y_{x+i}, trouvée dans le numéro précédent, deviendra

donc

$$\begin{aligned}
\varphi(\varpi + x') = \varphi(\varpi) & \left(b''X^{(0)} + c''\frac{dX^{(0)}}{dx'} + e''\frac{d^2X^{(0)}}{dx'^2} + \ldots + q''\frac{d^{n-1}X^{(0)}}{dx'^{n-1}}\right) \\
& + \nabla\varphi(\varpi)\left(b''X^{(1)} + c''\frac{dX^{(1)}}{dx'} + e''\frac{d^2X^{(1)}}{dx'^2} + \ldots + q''\frac{d^{n-1}X^{(1)}}{dx'^{n-1}}\right) \\
& + \nabla^2\varphi(\varpi)\left(b''X^{(2)} + c''\frac{dX^{(2)}}{dx'} + e''\frac{d^2X^{(2)}}{dx'^2} + \ldots + q''\frac{d^{n-1}X^{(2)}}{dx'^{n-1}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{d\varphi(\varpi)}{d\varpi}\left(c''X^{(0)} + e''\frac{dX^{(0)}}{dx'} + \ldots + q''\frac{d^{n-2}X^{(0)}}{dx'^{n-2}}\right) \\
& + \frac{d\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi}\left(c''X^{(1)} + e''\frac{dX^{(1)}}{dx'} + \ldots + q''\frac{d^{n-2}X^{(1)}}{dx'^{n-2}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{d^2\varphi(\varpi)}{d\varpi^2}\left(e''X^{(0)} + \ldots + q''\frac{d^{n-3}X^{(0)}}{dx'^{n-3}}\right) \\
& + \frac{d^2\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi^2}\left(e''X^{(1)} + \ldots + q''\frac{d^{n-3}X^{(1)}}{dx'^{n-3}}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + q''\frac{d^{n-1}\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}X^{(0)} + q''\frac{d^{n-1}\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}X^{(1)} \\
& \qquad + q''\frac{d^{n-1}\nabla^2\varphi(\varpi)}{d\varpi^{n-1}}X^{(2)} + \ldots.
\end{aligned}$$

Cette formule servira à interpoler les suites dont la dernière raison des termes est celle d'une équation linéaire aux différences infiniment petites à coefficients constants.

Si l'on a

$$\nabla^s\varphi(\varpi + x') = 0,$$

la formule se termine et donne la valeur de $\varphi(\varpi + x')$, ou l'intégrale de l'équation différentielle précédente; $\varphi(\varpi)$, $\frac{d\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, ...; $\nabla\varphi(\varpi)$, $\frac{d\nabla\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, ...; $\nabla^2\varphi(\varpi)$, $\frac{d\nabla^2\varphi(\varpi)}{d\varpi}$, ... étant les ns arbitraires de l'intégrale.

Supposons que l'on ait l'équation différentielle

$$0 = \nabla^s \varphi(\varpi + x') - V_{x'},$$

$V_{x'}$ étant une fonction donnée de x'; il faut, par le n° 6, ajouter à l'expression précédente de $\varphi(\varpi + x')$ le terme $\int V_r X_{x'-r}^{(s-1)}\, dr$, $X_{x'}^{(s-1)}$ étant la même fonction de x' que $X^{(s-1)}$. L'intégrale relative à r doit être prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = x'$. Cette intégrale définie peut, par le numéro cité, être transformée en intégrales indéfinies relatives à x'.

De la transformation des suites.

9. La théorie des fonctions génératrices peut servir encore à transformer les suites en d'autres qui suivent une loi donnée. Considérons la suite infinie

$$(\mathrm{V}) \qquad y_0 + y_1\alpha + y_2\alpha^2 + \ldots + y_x\alpha^x + \ldots,$$

et nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série infinie

$$y_0 + y_1\alpha t + y_2\alpha^2 t^2 + \ldots + y_x\alpha^x t^x + \ldots,$$

le coefficient de t^x dans le développement de la fraction $\dfrac{u}{1 - \frac{1}{t}}$ sera égal à la somme de la suite proposée (V), prise depuis le terme $y_x\alpha^x$ inclusivement jusqu'à l'infini. Soit généralement z une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, et nommons $\Pi y_x\alpha^x$ le coefficient de t^x dans uz. Les coefficients de t^x dans uz^2, uz^3, ... seront $\Pi^2 y_x\alpha^x$, $\Pi^3 y_x\alpha^x$, ... Cela posé, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{u}{1 - \frac{1}{t}}$ par $k - z$, et l'on prendra pour k ce que devient z lorsqu'on y fait t égal à l'unité; $k - z$ sera divisible alors par $1 - \frac{1}{t}$. Soit

$$h + \frac{h^{(1)}}{t} + \frac{h^{(2)}}{t^2} + \frac{h^{(3)}}{t^3} + \ldots$$

le quotient de cette division; on aura

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}} = \frac{u.h}{k}\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\frac{z^2}{k^2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{u.h^{(1)}}{kt}\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{u.h^{(2)}}{kt^2}\left(1+\frac{z}{k}+\frac{z^2}{k^2}+\ldots\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$\mathrm{S}y_x\alpha^x = \frac{hy_x\alpha^x}{k}+\frac{h\Pi(y_x\alpha^x)}{k^2}+\frac{h\Pi^2(y_x\alpha^x)}{k^3}+\ldots$$
$$+\frac{h^{(1)}y_{x+1}\alpha^{x+1}}{k}+\frac{h^{(1)}\Pi(y_{x+1}\alpha^{x+1})}{k^2}+\ldots$$
$$+\frac{h^{(2)}y_{x+2}\alpha^{x+2}}{k}+\frac{h^{(2)}\Pi(y_{x+2}\alpha^{x+2})}{k^2}+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le signe S désigne la somme des termes depuis x inclusivement jusqu'à l'infini. Supposons maintenant

$$z = a+\frac{b}{\alpha t}+\frac{c}{\alpha^2 t^2}+\frac{e}{\alpha^3 t^3}+\ldots;$$

on aura

$$\Pi(y_x\alpha^x) = \alpha^x(ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}+ey_{x+3}+\ldots).$$

En désignant par ∇y_x la quantité $ay_x+by_{x+1}+\ldots$, on aura

$$\Pi(y_x\alpha^x) = \alpha^x\nabla y_x,$$

et généralement on aura

$$\Pi^r(y_x\alpha^x) = \alpha^x\nabla^r y_x.$$

On a ensuite

$$k = a+\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^3}+\ldots,$$

ce qui donne

$$h = \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^2} + \ldots,$$

$$h^{(1)} = \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^2} + \ldots,$$

$$h^{(2)} = \frac{e}{\alpha^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \mathrm{S} y^x \alpha^x = & \frac{\frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{e}{\alpha^3} + \ldots}{k} \alpha^x \left(y_x + \frac{\nabla y_x}{k} + \frac{\nabla^2 y_x}{k^2} + \ldots \right) \\ & + \frac{\frac{c}{\alpha} + \frac{e}{\alpha^2} + \ldots}{k} \alpha^x \left(y_{x+1} + \frac{\nabla y_{x+1}}{k} + \frac{\nabla^2 y_{x+1}}{k^2} + \ldots \right) \\ & + \frac{\frac{e}{\alpha} + \ldots}{k} \alpha^x \left(y_{x+2} + \frac{\nabla y_{x+2}}{k} + \frac{\nabla^2 y_{x+2}}{k^2} + \ldots \right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En faisant $x = 0$, on aura une transformée de la suite proposée, dont les termes suivront une autre loi, et si les quantités ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, ... vont en décroissant, cette suite sera convergente. Elle se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^r y_x = 0$, ce qui aura lieu lorsque la proposée sera une suite récurrente. On aura donc ainsi la somme des suites récurrentes, à compter d'un terme quelconque $y_x \alpha^x$, et par conséquent on aura aussi la somme de leurs termes, comprise entre deux termes quelconques $y_x \alpha^x$ et $y_{x'} \alpha^{x'}$.

Théorèmes sur le développement des fonctions et de leurs différences en séries.

10. En appliquant à des fonctions particulières les principes généraux exposés dans le n° 1, on aura une infinité de théorèmes sur le développement des fonctions en séries. Nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n = u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n.$$

Or il est clair que le coefficient de t^x dans le premier membre de cette équation est la différence $n^{\text{ième}}$ de y_x, x variant de i; car ce coefficient dans $u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)$ est $y_{x+i}-y_x$ ou $'\Delta y_x$, en désignant par la caractéristique $'\Delta$ les différences finies, lorsque x varie de la quantité i; d'où il est facile de conclure que ce même coefficient, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^n$, est $'\Delta^n y_x$. D'ailleurs, si l'on développe $u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, les coefficients de t^x dans les développements de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2, \ldots$ sont, par le n° 2, Δy_x, $\Delta^2 y_x, \ldots$; en sorte que ce coefficient, dans $u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^n$, est $[(1+\Delta y_x)^i-1]^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité on applique à la caractéristique Δ les exposants de puissances de Δy_x, et qu'ainsi, au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta y_x)^r$, on écrive $\Delta^r y_x$; on aura donc avec cette condition

$$(1) \qquad '\Delta^n y_x = [(1+\Delta y_x)^i - 1]^n.$$

Si l'on désigne par la caractéristique $'\Sigma$ l'intégrale finie, lorsque x varie de i, $'\Sigma^n y_x$ sera, par le n° 2, le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^{-n}$, en faisant abstraction des constantes arbitraires que l'intégration introduit; or on a

$$u\left(\frac{1}{t^i}-1\right)^{-n} = u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i-1\right]^{-n};$$

de plus, le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-r}$ est $\Sigma^r y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires; ce coefficient dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^r$ est $\Delta^r y_x$; on aura donc

$$(2) \qquad '\Sigma^n y_x = [(1+\Delta y_x)^i - 1]^{-n},$$

pourvu que, dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ les exposants des puissances de Δy_x, que l'on change les différences négatives en intégrales et que l'on substitue y_x au lieu de $\Delta^0 y_x$, et comme ce développement renferme l'intégrale $\Sigma^n y_x$, qui peut être censée renfermer n constantes arbitraires, l'équation (2) est encore vraie, en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer que cette équation se déduit de l'équation (1), en faisant dans celle-ci n négatif et en y changeant les différences négatives en intégrales, c'est-à-dire, en écrivant ${}'\Sigma^n y_x$ au lieu de ${}'\Delta^n y_x$ dans le premier membre; et généralement, dans le développement du second membre, $\Sigma^r y_x$ au lieu de $\Delta^{-r} y_x$.

Les équations (1) et (2) auraient également lieu, si x, au lieu de varier de l'unité dans Δy_x, variait d'une quantité quelconque ϖ, pourvu que la variation de x dans ${}'\Delta y_x$ soit égale à $i\varpi$. En effet, il est clair que, si dans y_x on fait $x = \frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ lorsque x variera de l'unité; Δy_x se changera dans $\Delta y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ, et ${}'\Delta y_x$ se changera dans ${}'\Delta y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Maintenant si, après avoir substitué ces quantités dans les équations (1) et (2), on suppose ϖ infiniment petit et égal à dx', $\Delta y_{x'}$ se changera dans la différence infiniment petite $dy_{x'}$. Si de plus on fait i infini et $i\,dx' = \alpha$, α étant une quantité finie, la variation de x' dans ${}'\Delta y_{x'}$ sera α; on aura donc

$$(q)\qquad \begin{cases} {}'\Delta^n y_{x'} = [(1 + dy_{x'})^i - 1]^n, \\ {}'\Sigma^n y_{x'} = \dfrac{1}{[(1 + dy_{x'})^i - 1]^n}. \end{cases}$$

Or on a

$$\log(1 + dy_{x'})^i = i \log(1 + dy_{x'}) = i\,dy_{x'} = \alpha\,\frac{dy_{x'}}{dx'},$$

ce qui donne

$$(1 + dy_{x'})^i = c^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on a

donc

$$(3) \qquad {}'\Delta^n y_{x'} = \left(c^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n,$$

$$(4) \qquad {}'\Sigma^n y_{x'} = \frac{1}{\left(c^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n},$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique d les exposants des puissances de $dy_{x'}$, de changer les différences négatives en intégrales et la quantité $d^0 y_{x'}$ en $y_{x'}$.

On peut donner à l'équation (3) cette forme singulière qui nous sera utile dans la suite,

$$'\Delta^n y_{x'} = \left(c^{\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}}\right)^n.$$

En effet, elle donne

$$'\Delta^n y_{x'} = c^{\frac{n\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}} \left(c^{\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n.$$

Considérons un terme quelconque du développement de

$$\left(c^{\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n,$$

tel que $k\left(\frac{dy_{x'}}{dx'}\right)^r$. En le multipliant par $c^{\frac{n\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}}$, et développant cette dernière quantité, on aura

$$k \frac{d^r}{dx'^r}\left[y_{x'} + \frac{n\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'} + \left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2 \frac{d^2 y_{x'}}{1.2.dx'^2} + \ldots\right];$$

cette quantité est égale à $k \frac{d^r y_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'^r}$, d'où il est facile de conclure

$$c^{\frac{n\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}} \left(c^{\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'}}{dx'}}\right)^n = \left(c^{\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}} - c^{-\frac{\alpha}{2} \frac{dy_{x'+\frac{n\alpha}{2}}}{dx'}}\right)^n = {}'\Delta^n y_{x'}.$$

Si dans les équations (1) et (2) on suppose encore i infiniment petit et égal à dx, on aura

$$'\Delta^n y_x = d^n y_x, \qquad '\Sigma^n y_x = \frac{1}{dx^n} \int^n y_x \, dx^n;$$

on a d'ailleurs

$$(1+\Delta y_x)^i = c^{dx\log(1+\Delta y_x)} = 1 + dx\log(1+\Delta y_x);$$

les équations (1) et (2) deviendront ainsi

$$(5)\qquad \frac{d^n y_x}{dx^n} = [\log(1+\Delta y_x)]^n,$$

$$(6)\qquad \textstyle\int^n y_x\,dx^n = \frac{1}{[\log(1+\Delta y_x)]^n}.$$

On peut observer ici une analogie singulière entre les puissances positives et les différences et entre les puissances négatives et les intégrales. L'équation

$$(o)\qquad {}'\Delta y_x = c^{\alpha\frac{dy_x}{dx}} - 1$$

est la traduction du théorème connu de Taylor, lorsque, dans le développement de son second membre suivant les puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, on applique à la caractéristique d les exposants de ces puissances. En élevant les deux membres de cette équation à la puissance n, et appliquant aux caractéristiques $'\Delta$ et d les exposants des puissances de $'\Delta y_x$ et de dy_x, on aura l'équation (3), d'où résulte l'équation (4) en changeant les différences négatives en intégrales.

L'équation précédente donne

$$c^{\alpha\frac{dy_x}{dx}} = 1 + {}'\Delta y_x.$$

En prenant les logarithmes de chaque membre, on aura

$$(r)\qquad \alpha\frac{dy_x}{dx} = \log(1+{}'\Delta y_x).$$

Supposant ensuite $\alpha = 1$, ce qui change $'\Delta y_x$ dans Δy_x, et élevant les deux membres de cette équation à la puissance n, on aura l'équation (5), pourvu que l'on applique les exposants des puissances aux caractéristiques. On aura l'équation (6) en faisant n négatif et changeant les puissances négatives en intégrales.

Si, dans l'équation précédente (r), on change α dans i, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log(1 + {}'\Delta y_x)^{\frac{1}{i}},$$

et si l'on y suppose $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{dy_x}{dx} = \log(1 + \Delta y_x).$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\frac{dy_x}{dx}$ donne

$$\log(1 + \Delta y_x) = \log(1 + {}'\Delta y_x)^{\frac{1}{i}},$$

d'où l'on tire

$$'\Delta y_x = (1 + \Delta y_x)^i - 1.$$

En élevant chaque membre à la puissance n et appliquant les exposants des puissances aux caractéristiques, on aura l'équation (1), d'où résulte l'équation (2), en changeant les différences négatives en intégrales. Les équations (1), (2), (3), (4), (5) et (6) résultent donc du théorème de Taylor, mis sous la forme de l'équation (o), en transformant cette équation suivant les règles de l'Analyse, pourvu que dans les résultats on applique aux caractéristiques les exposants des puissances, que l'on change les différences négatives en intégrales et que l'on substitue la variable elle-même y_x au lieu de ses différences zéro.

Cette analogie des puissances positives avec les différences et des puissances négatives avec les intégrales devient évidente par la théorie des fonctions génératrices. Elle tient, comme on l'a vu, à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puissances $\frac{1}{t^i} - 1$ sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x, x variant d'une quantité quelconque i, tandis que les quotients de u, divisés par ces mêmes puissances, sont les fonctions génératrices des intégrales de y_x.

En considérant, au lieu du facteur $\frac{1}{t^i} - 1$ et de ses puissances, les puissances d'une fonction quelconque rationnelle et entière de $\frac{1}{t}$, on peut en conclure des théorèmes analogues aux précédents, sur les *dérivées* successives des fonctions. Je nomme *dérivée* d'une fonction y_x toute quantité qui en dérive, telle que $ay_x + by_{x+1} + ey_{x+2} + \dots$. En regardant ensuite cette fonction dérivée comme une nouvelle fonction que je désigne par y'_x, la quantité $ay'_x + by'_{x+1} + ey'_{x+2} + \dots$ sera une seconde dérivée de la fonction y_x, et ainsi de suite. Lorsque la fonction $ay_x + by_{x+1} + \dots$ devient $-y_x + y_{x+1}$, la dérivée devient une différence finie.

Maintenant on a

$$(q)\quad \left\{\begin{aligned} & u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{e}{t^2} + \frac{h}{t^3} + \dots\right)^n \\ & = u\left[a + b\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{1}{dx}} + e\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{2}{dx}} + \dots\right]^n; \end{aligned}\right.$$

on a ensuite généralement, par le n° **2**, en désignant par ∇y_x la quantité $ay_x + by_{x+1} + ey_{x+2} + \dots$, $\nabla^n y_x$ pour le coefficient de la fonction génératrice du premier membre de cette équation ; de plus on a

$$u\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{r}{dx}} = u\left[1 + \frac{r}{dx}\left(\frac{1}{t^{dx}} - 1\right) + \frac{r^2}{1.2.dx^2}\left(\frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^2 + \dots\right].$$

Le second membre de cette équation est la fonction génératrice de

$$y_x + r\frac{dy_x}{dx} + \frac{r^2}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2} + \dots$$

ou de $c^{r\frac{dy_x}{dx}}$, en appliquant à la caractéristique d les exposants de puissances de $\frac{dy_x}{dx}$, et écrivant y_x au lieu de $\left(\frac{dy_x}{dx}\right)^0$. De là on conclut que, sous les mêmes conditions, le second membre de l'équation (q) est la fonction génératrice de

$$\left(a + bc^{\frac{dy_x}{dx}} + ec^{\frac{2dy_x}{dx}} + hc^{\frac{3dy_x}{dx}} + \dots\right)^n,$$

et qu'ainsi cette équation donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$(7)\qquad \nabla^n y_x = \left[a + bc^{\frac{dy_x}{dx}} + ec^{\frac{2dy_x}{dx}} + hc^{\frac{3dy_x}{dx}} + \dots\right]^n.$$

On peut ainsi obtenir une infinité de résultats semblables. Nous nous bornerons au suivant, qui nous sera utile dans la suite : $u\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^n$ est la fonction génératrice de

$$y_{x+\frac{n}{2}} - ny_{x+\frac{n}{2}-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{x+\frac{n}{2}-2} - \dots,$$

ou de $\Delta^n y_{x-\frac{n}{2}}$. De plus, on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^n = u\left[\left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{\frac{1}{2dx}} - \left(1 + \frac{1}{t^{dx}} - 1\right)^{-\frac{1}{2dx}}\right]^n,$$

d'où l'on tire, en repassant par l'analyse précédente des fonctions génératrices aux coefficients

$$\Delta^n y_{x-\frac{n}{2}} = \left(c^{\frac{dy_x}{2dx}} - c^{-\frac{dy_x}{2dx}}\right)^n.$$

11. Je n'ai considéré jusqu'ici qu'une seule fonction y_x de x; mais la considération du produit de plusieurs fonctions de la même variable conduit à divers résultats curieux et utiles d'analyse. Soit u une fonction de t, et y_x le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction ; soit u' une fonction de t', et y'_x le coefficient de t'^x dans le développement de cette fonction; soit encore u'' une fonction de t'', et y''_x le coefficient de t''^x dans son développement, et ainsi de suite. Il est clair que $y_x y'_x y''_x \dots$ sera le coefficient de $t^x t'^x t''^x \dots$ dans le développement du produit $uu'u'' \dots$; ce produit sera donc la fonction génératrice de $y_x y'_x y''_x \dots$. La fonction génératrice de $y_{x+1} y'_{x+1} y''_{x+1} \dots - y_x y'_x y''_x \dots$, ou de $\Delta y_x y'_x y''_x \dots$ sera ainsi

$$uu'u'' \dots \left(\frac{1}{tt't'' \dots} - 1\right),$$

et la fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x y''_x \ldots$ sera

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n.$$

On prouvera, comme dans le n° **2**, que la fonction génératrice de $\Sigma^n y_x y'_x y''_x \ldots$ sera

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^{-n},$$

c'est-à-dire que l'on peut changer n en $-n$ dans la fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x \ldots$, pourvu que l'on change Δ^{-n} dans Σ^n.

Appliquons ces résultats à deux fonctions y_x et y'_x. La fonction génératrice de $\Delta^n y_x y'_x$ sera $uu'\left(\frac{1}{tt'}-1\right)^n$. On peut la mettre sous cette forme

$$uu'\left[\frac{1}{t}-1+\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t'}-1\right)\right]^n;$$

en la développant, elle devient

$$uu'\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)^n+\frac{n}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'}-1\right)+\frac{n(n-1)}{1.2.t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2+\ldots\right];$$

les fonctions

$$uu'\left(\frac{1}{t}-1\right)^n,\quad uu'\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'}-1\right),\quad uu'\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2,\ \ldots$$

sont respectivement génératrices des produits $y'_x\Delta^n y_x$, $\Delta y'_x \Delta^{n-1} y_{x+1}$, $\Delta^2 y'_x \Delta^{n-2} y_{x+2}$, ... L'équation

$$uu'\left(\frac{1}{tt'}-1\right)^n = uu'\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)^n+\frac{n}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'}-1\right)+\ldots\right]$$

donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$(8)\quad \Delta^n y_x y'_x = y'_x \Delta^n y_x + n\,\Delta y'_x \Delta^{n-1} y_{x+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y'_x \Delta^{n-2} y_{x+2} + \ldots.$$

En changeant n dans $-n$, on aura

$$(9)\quad \Sigma^n y_x y'_x = y'_x \Sigma^n y_x - n\,\Delta y'_x \Sigma^{n+1} y_{x+1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^2 y'_x \Sigma^{n+2} y_{x+2} - \ldots.$$

En général, on a

$$uu'u''\dots\left(\frac{1}{tt't''\dots}-1\right)^n$$
$$=uu'u''\dots\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)\dots-1\right]^n,$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients,

$$(10)\qquad \Delta^n y_x y'_x y''_x\dots=[(1+\Delta)(1+\Delta')(1+\Delta'')\dots-1]^n,$$

pourvu que, dans chaque terme du développement du second membre de cette équation, on place immédiatement après chaque caractéristique $\Delta, \Delta', \Delta'', \dots$, respectivement $y_x, y'_x, y''_x, \dots$, et qu'on multiplie ce terme par le produit des fonctions dont il ne contient point la caractéristique. Ainsi, dans le cas de trois variables, on écrira, au lieu de Δ^r, la quantité $y'_x y''_x \Delta^r y_x$; au lieu de $\Delta^r \Delta'^{r'}$, on écrira $y_x \Delta^r y_x \Delta^r y'_x$, au lieu de $\Delta'^{r'}\Delta''^{r''}$, on écrira $y_x \Delta'^{r'} y'_x \Delta^{r''} y''_x$, et ainsi du reste.

En faisant n négatif, l'équation (10) subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Dans le cas des différences infiniment petites, les caractéristiques Δ, Δ', Δ'', ... se changent en d, d', d'', ... L'équation (10) devient ainsi, en négligeant les différentielles d'un ordre supérieur relativement à celles d'un ordre inférieur,

$$d^n y_x y'_x y''_x\dots=(d+d'+d''+\dots)^n.$$

Cette équation développée donne, relativement à deux fonctions y_x et y'_x,

$$d^n y_x y'_x = y'_x\, d^n y_x + n\, dy'_x\, d^{n-1} y_x + \frac{n(n-1)}{1.2}\, d^2 y'_x\, d^{n-2} y_x + \dots.$$

En faisant n négatif, les différences négatives se changeant en intégrales, on aura

$$\int^n y_x y'_x\, dx^n = y'_x \int^n y_x\, dx^n - n\,\frac{dy'_x}{dx}\int^{n+1} y_x\, dx^{n+1}$$
$$+\frac{n(n+1)}{1.2}\,\frac{d^2 y'_x}{dx^2}\int^{n+2} y_x\, dx^{n+2} - \dots.$$

On a

$$uu'u''\ldots\left(\frac{1}{t^i t'^i t''^i\ldots}-1\right)^n$$

$$=uu'u''\ldots\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^i\ldots-1\right]^n.$$

En désignant donc par ${}'\Delta^n y_x y'_x y''_x\ldots$ la différence finie du produit $y_x y'_x y''_x\ldots$, lorsque x varie de i, l'équation précédente donnera, en repassant des fonctions génératrices aux coefficients

$$(11)\qquad {}'\Delta^n y_x y'_x y''_x\ldots = [(1+\Delta)^i(1+\Delta')^i(1+\Delta'')^i\ldots-1]^n,$$

en observant les conditions prescrites ci-dessus relativement aux caractéristiques Δ, Δ', Δ'', ... et à leurs puissances. Cette dernière équation subsiste encore en faisant n négatif, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales.

Supposons

$$x=\frac{x'}{dx'},\qquad i=\frac{\alpha}{dx'};$$

y_x, y'_x, ... deviendront des fonctions de x', que nous désignerons par $y_{x'}$, $y'_{x'}$, ...; l'équation (11) donnera ainsi la suivante, en observant que les caractéristiques Δ, Δ', ... se changent en d, d', ..., et que l'on a

$$(1+dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}}=c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}},$$

$$(12)\qquad {}'\Delta^n y_{x'} y'_{x'} y''_{x'}\ldots=\left(c^{\alpha\frac{dy_{x'}}{dx'}+\alpha\frac{dy'_{x'}}{dx'}+\alpha\frac{dy''_{x'}}{dx'}+\ldots}-1\right)^n,$$

équation qui subsiste encore en faisant n négatif et changeant les différences négatives en intégrales.

Ne considérons que deux variables y_x et y'_x, et supposons $y'_x=p^x$; on aura

$$(1+\Delta')^i=p^x+i\,\Delta p^x+\frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 p^x+\ldots.$$

Or on a généralement, x variant de l'unité,

$$\Delta^r p^x=p^x(p-1)^r;$$

on aura donc

$$(1 + \Delta')^i = p^i p^x.$$

L'équation (11) deviendra ainsi

$$(13) \qquad '\Delta^n p^x y_x = p^x[p^i(1 + \Delta y_x)^i - 1]^n;$$

en faisant n négatif, on aura

$$(14) \qquad '\Sigma^n p^x y_x = \frac{p^x}{[p^i(1 + \Delta y_x)^i - 1]^n} + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \ldots,$$

a, b, ... étant des constantes arbitraires dues à l'intégration n fois répétée de $p^x y_x$. J'ajoute ici ces constantes au second membre de l'équation précédente, parce qu'elles ne sont implicitement renfermées dans son premier terme que lorsque $p = 1$.

Si l'on fait dans les deux équations précédentes $x = \frac{x'}{dx'}$, $i = \frac{\alpha}{dx'}$, $p = 1 + dx' \log h$, on aura

$$(15) \qquad '\Delta^n h^{x'} y_{x'} = h^{x'}\left(h^\alpha c^{\alpha \frac{dy_{x'}}{dx'}} - 1\right)^n,$$

$$(16) \qquad '\Sigma^n h^{x'} y_{x'} = \frac{h^{x'}}{\left(h^\alpha c^{\frac{dy_x}{dx'}} - 1\right)^n} + a' x'^{n-1} + b' x'^{n-2} + \ldots.$$

Si dans les équations (13) et (14) on suppose i infiniment petit et égal à dx, $'\Delta^n p^x y_x$ se changera dans $d^n p^x y_x$, et $'\Sigma^n p^x y_x$ se changera dans $\frac{1}{dx^n} \int^n p^x y_x \, dx^n$; on aura ensuite

$$p^i(1 + \Delta y_x)^i = c^{dx \log[p(1+\Delta y_x)]};$$

on aura donc

$$[p^i(1 + \Delta y_x)^i - 1]^n = dx^n \{\log[p(1 + \Delta y_x)]\}^n,$$

et les équations (13) et (14) deviendront

$$(17) \qquad \frac{d^n p^x y_x}{dx^n} = p^x \{\log[p(1 + \Delta y_x)]\}^n,$$

$$(18) \qquad \int^n p^x y_x \, dx^n = \frac{p^x}{\{\log[p(1 + \Delta y_x)]\}^n} + a x^{n-1} + b x^{n+2} + \ldots.$$

CHAPITRE II.

DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES A DEUX VARIABLES.

12 Nommons u une fonction de t et t'; supposons qu'en la développant suivant les puissances de t et t', elle donne la suite infinie

$$\begin{array}{l} y_{0,0} + y_{1,0}t + y_{2,0}t^2 + \ldots + y_{x,0}t^x + y_{x+1,0}t^{x+1} + \ldots + y_{\infty,0}t^\infty \\ + y_{0,1}t' + y_{1,1}tt' + y_{2,1}t^2t' + \ldots + y_{x,1}t^xt' + y_{x+1,1}t^{x+1}t' + \ldots + y_{\infty,1}t^\infty t' \\ + y_{0,2}t'^2 + y_{1,2}tt'^2 + y_{2,2}t^2t'^2 + \ldots + y_{x,2}t^xt'^2 + y_{x+1,2}t^{x+1}t'^2 + \ldots + y_{\infty,2}t^\infty t'^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le coefficient de $t^x t'^{x'}$ sera $y_{x,x'}$; u sera donc la fonction génératrice de $y_{x,x'}$.

Si l'on désigne par la caractéristique Δ les différences finies lorsque x seul varie de l'unité, et par la caractéristique $'\Delta$ les différences lorsque x' seul varie de la même quantité, la fonction génératrice de $\Delta y_{x,x'}$ sera, par le n° **1**, $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, et celle de $'\Delta y_{x,x'}$ sera $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)$; d'où il est facile de conclure que la fonction génératrice de $\Delta^i \Delta^{i'} y_{x,x'}$ sera

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}.$$

En général, si l'on désigne par $\nabla y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}y_{x,x'} + \mathrm{B}y_{x+1,x'} + \mathrm{C}\,y_{x+2,x'} + \ldots \\ \quad + \mathrm{B}'y_{x,x'+1} + \mathrm{C}'y_{x+1,x'+1} + \ldots \\ \quad\quad + \mathrm{C}''y_{x,x'+2} + \ldots \\ \quad\quad\quad + \ldots; \end{array}$$

si l'on désigne pareillement par $\nabla^2 y_{x,x}$ une fonction dans laquelle

$\nabla y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla y_{x,x'}$; si l'on désigne encore par $\nabla^3 y_{x,x'}$ une fonction dans laquelle $\nabla^2 y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla y_{x,x'}$, et ainsi de suite, la fonction génératrice de $\nabla^n y_{x,x'}$ sera

$$u\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{t} + \frac{\mathrm{C}}{t^2} + \ldots \\ \quad + \frac{\mathrm{B}'}{t'} + \frac{\mathrm{C}'}{tt'} + \ldots \\ \quad\quad + \frac{\mathrm{C}''}{t'^2} + \ldots \\ \quad\quad\quad + \ldots \end{array}\right\}^n;$$

partant, la fonction génératrice de $\Delta^i \Delta'^{i'} \nabla^x y_{x,x'}$ sera la fonction génératrice précédente, multipliée par $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$.

s étant supposée une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de ces variables, et que l'on désigne par $\frac{k}{t^m t'^{m'}}$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans $\frac{ku}{t^m t'^{m'}}$ étant $k y_{x+m,x'+m'}$, on aura celui de $t^x t'^{x'}$ dans us^i, ou, ce qui revient au même, on aura $\nabla^i y_{x,x'}$: 1° en substituant, dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$; 2° en développant ce que devient alors us^i suivant les puissances de y_x et de $y_{x'}$, et en appliquant respectivement aux indices x et x' les exposants de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant, au lieu d'un terme quelconque tel que $k(y_x)^m (y_{x'})^{m'}$, $k y_{x+m,x'+m'}$, et par conséquent $k y_{x,x'}$ au lieu du terme tout constant k, ou $k(y_{x'})^0 (y_{x'})^0$.

Si, au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$ et de $\frac{1}{t'} - 1$, et que l'on désigne par $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)^m \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ un terme quelconque de ce développement, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans $ku\left(\frac{1}{t} - 1\right)^m \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ étant $k\Delta^{m} \Delta'^{m'} y_{x,x'}$, on aura $\nabla^i y_{x,x'}$: 1° en substituant dans s, $\Delta y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t} - 1$ et $'\Delta y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'} - 1$; 2° en développant alors s' suivant les puissances de $\Delta y_{x,x'}$ et $'\Delta y_{x,x'}$, et en appliquant aux caractéristiques Δ et $'\Delta$ les exposants de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant, au lieu d'un terme quelconque tel que $k(\Delta y_{x,x'})^m('\Delta y_{x,x'})^{m'}$, celui-ci $k\Delta^{m}{}'\Delta^{m'} y_{x,x'}$, et par conséquent $ky_{x,x'}$ au lieu du terme constant k.

Soit Σ la caractéristique des intégrales finies relatives à x, et $'\Sigma$ celle des intégrales finies relatives à x'; soit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^{i}{}'\Sigma^{i'} y_{x,x'}$; on aura $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$. Cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t et de t', se réduire à u; on aura ainsi, par le n° 2,

$$z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'} = u + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} + \ldots + \frac{q}{t^i}$$
$$+ \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} + \ldots + \frac{q'}{t'^{i'}},$$

$a, b, c, \ldots, q$ étant des fonctions arbitraires de t', et $a', b', c', \ldots, q'$ étant des fonctions arbitraires de t; partant

$$z = \frac{ut^i t'^{i'} + at^{i-1} t'^{i'} + bt^{i-2} t'^{i'} + \ldots + qt'^{i'} + a' t^i t'^{i'-1} + b' t^i t'^{i'-2} + \ldots + q' t^i}{(1-t)^i (1-t')^{i'}}.$$

De l'interpolation des suites à deux variables, et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles.

13. $y_{x+i,x'+i'}$ est évidemment égal au coefficient de $t^x t^{x'}$ dans le développement de $\frac{u}{t^i t'^{i'}}$; or on a

$$\frac{u}{t^i t'^{i'}} = u\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i \left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right)^{i'};$$

on aura donc, par le numéro précédent,

$$y_{x+i,x'+i'} = (1 + \Delta y_{x,x'})^i (1 + '\Delta y_{x,x'})^{i'};$$

en développant le second membre de cette équation, on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i,x'+i'} = y_{x,x'} &+ i\Delta y_{x,x'} + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 y_{x,x'} + \ldots \\ &+ i'\,{}'\Delta y_{x,x'} + ii'\,\Delta'\Delta\, y_{x,x'} + \ldots \\ &+ \frac{i'(i'-1)}{1.2}\,{}'\Delta^2 y_{x,x'} + \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'interpoler suivant les différences de la fonction $y_{x,x'}$, on veuille interpoler suivant d'autres lois. Pour cela, soit

$$\begin{aligned} z = \mathrm{A} &+ \frac{\mathrm{B}}{t} + \frac{\mathrm{C}}{t^2} + \frac{\mathrm{D}}{t^3} + \ldots \\ &+ \frac{\mathrm{B}'}{t'} + \frac{\mathrm{C}'}{tt'} + \frac{\mathrm{D}'}{t^2t'} + \ldots \\ &+ \frac{\mathrm{C}''}{t'^2} + \frac{\mathrm{D}''}{tt'^2} + \ldots \\ &+ \frac{\mathrm{D}'''}{t'^3} + \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Si l'on fait

$$\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}'}{t'} + \frac{\mathrm{C}''}{t'^2} + \frac{\mathrm{D}'''}{t'^3} + \ldots = a,$$

$$\mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}'}{t'} + \frac{\mathrm{D}''}{t'^2} + \ldots = b,$$

$$\mathrm{C} + \frac{\mathrm{D}'}{t'} + \ldots = c,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura pour z une expression de cette forme

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \ldots + \frac{l}{t^n}.$$

Nous supposerons ici que le coefficient l de la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ est constant ou indépendant de t', et que cette puissance est égale ou plus grande que la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ dans chacun des autres termes de z. Il est facile de conclure de l'équation précédente, comme dans le n° 5, les valeurs successives de $\frac{1}{t^{n+1}}$, $\frac{1}{t^{n+2}}$, $\frac{1}{t^{n+3}}$, ..., en fonction de a, b, c, ..., et z, et il est visible que, dans chaque terme de l'expression de $\frac{1}{t^i}$, la puissance la plus élevée de $\frac{1}{t}$ sera moindre que n, et la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$ ne surpassera pas i.

Considérons maintenant la formule (A) du n° 5, et supposons qu'en développant suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$ la quantité

$$\begin{aligned} &bZ^{(0)}_{i-n+1} + bzZ^{(1)}_{i-2n+1} + \ldots \\ &+ cZ^{(0)}_{i-n+2} + czZ^{(1)}_{i-2n+2} + \ldots \\ &+ eZ^{(0)}_{i-n+3} + ezZ^{(1)}_{i-2n+3} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} M + Nz + \ldots + \frac{1}{t'}\left(M^{(1)} + N^{(1)}z + \ldots\right) \\ + \frac{1}{t'^2}\left(M^{(2)} + N^{(2)}z + \ldots\right) + \ldots + \frac{1}{t'^i}M^{(i)}; \end{aligned}$$

les puissances ultérieures de $\frac{1}{t'}$ disparaissent d'elles-mêmes dans ce développement, puisque l'expression de $\frac{1}{t^i}$ ne doit point les contenir. Supposons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} &cZ^{(0)}_{i-n+1} + czZ^{(1)}_{i-2n+1} + \ldots \\ &+ eZ^{(0)}_{i-n+2} + ezZ^{(1)}_{i-2n+2} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on ait

$$M_1 + N_1 z + \ldots + \frac{1}{t'}\left(M_1^{(1)} + N_1^{(1)}z + \ldots\right) + \ldots + \frac{1}{t'^{i-1}}M_1^{(i-1)}.$$

Supposons encore qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} &eZ^{(0)}_{i-n+1} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on ait

$$M_2 + N_2 z + \ldots + \frac{1}{t'}\left(M_2^{(1)} + N_2^{(1)} z + \ldots\right) + \ldots + \frac{1}{t'^{i-2}} M_2^{(i-2)},$$

et ainsi de suite. La formule (A) du n° 5 donnera

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^i} = {} & M + N z + \ldots \\
& + \frac{1}{t'}\left(M^{(1)} + N^{(1)} z + \ldots\right) \\
& + \frac{1}{t'^2}\left(M^{(2)} + N^{(2)} z + \ldots\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{t'^i} M^{(i)} \\
& + \frac{1}{t}\left\{\begin{array}{l}
M_1 + N_1 z + \ldots \\
+ \frac{1}{t'}\left(M_1^{(1)} + N_1^{(1)} z + \ldots\right) \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{t'^{i-1}} M_1^{(i-1)}
\end{array}\right\} \\
& + \frac{1}{t^2}\left\{\begin{array}{l}
M_2 + N_2 z + \ldots \\
+ \frac{1}{t'} M_2^{(1)} + N_2^{(1)} z + \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{t'^{i-2}} M_2^{(i-2)}
\end{array}\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{t^{n-1}}\left\{\begin{array}{l}
M_{n-1} + N_{n-1} z + \ldots \\
+ \frac{1}{t'}\left(M_{n-1}^{(1)} + N_{n-1}^{(1)} z + \ldots\right) \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{t'^{i-n+1}} M_{n-1}^{(i-n+1)}
\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned} &A y_{x,x'} + B\, y_{x+1,x'} + C\, y_{x+2,x'} + \ldots \\ &\quad + B' y_{x,x'+1} + C' y_{x+1,x'+1} + \ldots \\ &\qquad + C'' y_{x,x'+2} + \ldots \\ &\qquad\qquad + \ldots, \end{aligned}$$

le coefficient $t^x t'^{x'}$ dans le développement de $\frac{u z^\mu}{t^r t'^{r'}}$ sera, par le numéro précédent, $\nabla^\mu y_{x+r,x'+r'}$; l'équation précédente donnera par conséquent, en la multipliant par u, et en passant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\begin{aligned} y_{x+i,x'} = &\left\{\begin{array}{l} M y_{x,x'} + N \nabla y_{x,x'} + \ldots \\ + M^{(1)} y_{x,x'+1} + N^{(1)} \nabla y_{x,x'+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M^{(i)} y_{x,x'+i} \end{array}\right\} \\ + &\left\{\begin{array}{l} M_1 y_{x+1,x'} + N_1 \nabla y_{x+1,x'} + \ldots \\ + M_1^{(1)} y_{x+1,x'+1} + N_1^{(1)} \nabla y_{x+1,x'+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M_1^{(i-1)} y_{x+1,x'+i-1} \end{array}\right\} \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + &\left\{\begin{array}{l} M_{n-1} y_{x+n-1,x'} + N_{n-1} \nabla y_{x+n-1,x'} + \ldots \\ + M_{n-1}^{(1)} y_{x+n-1,x'+1} + N_{n-1}^{(1)} \nabla y_{x+n-1,x'+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M_{n-1}^{(i-n+1)} y_{x+n-1,x'+i+n+1} \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

14. Si l'on suppose $\nabla y_{x,x'} = 0$, l'équation précédente donnera, en y faisant $x = 0$,

$$\begin{aligned} y_{i,x'} = {} & M y_{0,x'} + M^{(1)} y_{0,x'+1} + M^{(2)} y_{0,x'+2} + \ldots + M^{(i)} y_{0,x'+i} \\ & + M_1 y_{1,x'} + M_1^{(1)} y_{1,x'+1} + M_1^{(2)} y_{1,x'+2} + \ldots + M_1^{(i-1)} y_{1,x'+i-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + M_{n-1} y_{n-1,x'} + M_{n-1}^{(1)} y_{n-1,x'+1} + \ldots + M_{n-1}^{(i-n+1)} y_{n-1,x'+i-n+1}, \end{aligned}$$

$M^{(r)}$, $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$, ... étant des fonctions de i et de r. L'expression précédente de $y_{i,x'}$ peut être mise sous cette forme très simple,

$$(\lambda) \qquad y_{i,x'} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} M^{(r)} y_{0,x'+r} + M_1^{(r-1)} y_{1,x'+r-1} + M_2^{(r-2)} y_{2,x'+r-2} + \ldots \\ \qquad + M_{n-1}^{(r-n+1)} y_{n-1,x'+r-n+1} \end{array} \right\},$$

l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i$ par rapport au premier terme, depuis $r = 1$ jusqu'à $r = i$ par rapport au second terme, et ainsi de suite. Cette expression de $y_{i,x'}$ sera l'intégrale complète de l'équation $\nabla y_{i,x'} = 0$, ou

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{A} y_{i,x'} + \mathrm{B}\, y_{i+1,x'} + \mathrm{C}\, y_{i+2,x'} &+ \ldots + l y_{i+n,x'} \\ + \mathrm{B}' y_{i,x'+1} + \mathrm{C}' y_{i+1,x'+1} &+ \ldots + \ldots\ldots \\ + \mathrm{C}'' y_{i,x'+2} &+ \ldots + \ldots\ldots \\ &+ \ldots + h y_{i,x'+n}. \end{aligned}$$

Il est visible que $y_{0,x'}, y_{1,x'}, y_{2,x'}, \ldots, y_{n-1,x'}$ sont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla y_{i,x'} = 0$. Pour les déterminer, il faut connaître immédiatement ou du moins pouvoir conclure des conditions du problème les n premiers rangs verticaux de la table suivante :

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{\begin{array}{lllllllll}
y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0}, & \ldots, & y_{i,0}, & y_{i+1,0}, & \ldots, & y_{\infty,0}, \\
y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1}, & \ldots, & y_{i,1}, & y_{i+1,1}, & \ldots, & y_{\infty,1}, \\
y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2}, & \ldots, & y_{i,2}, & y_{i+1,2}, & \ldots, & y_{\infty,2}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
y_{0,x'}, & y_{1,x'}, & y_{2,x'}, & y_{3,x'}, & \ldots, & y_{i,x'}, & y_{i+1,x'}, & \ldots, & y_{\infty,x'}, \\
y_{0,x'+1}, & y_{1,x'+1}, & y_{2,x'+1}, & y_{3,x'+1}, & \ldots, & y_{i,x'+1}, & y_{i+1,x'+1}, & \ldots, & y_{\infty,x'+1}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
y_{0,\infty}, & y_{1,\infty}, & y_{2,\infty}, & y_{3,\infty}, & \ldots, & y_{i,\infty}, & y_{i+1,\infty}, & \ldots, & y_{\infty,\infty}.
\end{array}\right.$$

Dans un grand nombre de problèmes, les n premiers rangs verticaux sont donnés par des équations aux différences finies linéaires, et par conséquent par une suite de termes de la forme $\mathrm{A}p^{x'}$. Supposons que l'expression de $y_{0,x'}$ continue le terme $\mathrm{A}p^{x'}$; la partie correspondante de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) sera

$$\mathrm{A}p^{x'}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{(1)}p + \mathrm{M}^{(2)}p^2 + \ldots + \mathrm{M}^{(i)}p^i);$$

mais la fonction

$$\mathrm{M} + \frac{\mathrm{M}^{(1)}}{t'} + \frac{\mathrm{M}^{(2)}}{t'^2} + \ldots + \frac{\mathrm{M}^{(i)}}{t'^i}$$

est le développement de

$$b\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+1} + c\mathrm{Z}^{(0)}_{i-n+2} + \ldots,$$

suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$; en changeant donc, dans cette dernière quantité, $\frac{1}{t'}$ en p, et nommant P ce qu'elle devient alors, on aura $\mathrm{AP}p^{x'}$, pour la partie de $y_{i,x'}$ qui répond au terme $\mathrm{A}p^{x'}$. Il suit de là que, si la valeur de $y_{0,x'}$ est égale à $\mathrm{A}p^{x'} + \mathrm{A}'p'^{x'} + \mathrm{A}''p''^{x'} + \ldots$, et que l'on nomme P′, P″, ... ce que devient P, en y changeant p dans p', p'', ..., on aura, pour la partie correspondante de $y_{i,x'}$,

$$\mathrm{AP}p^{x'} + \mathrm{A'P'}p'^{x'} + \mathrm{A''P''}p''^{x'} + \ldots.$$

On trouvera pareillement que, si la valeur de $y_{1,x'}$ est exprimée par $\mathrm{B}q^{x'} + \mathrm{B}'q'^{x'} + \mathrm{B}''q''^{x'} + \ldots$ et si l'on nomme Q, Q′, Q″, ... ce que devient la quantité

$$c\mathrm{Z}_{i-n+1}^{(0)} + e\mathrm{Z}_{i-n+2}^{(0)} + \ldots,$$

lorsqu'on y change successivement $\frac{1}{t'}$ en q, q', q'', ..., la partie correspondante de $y_{i,x'}$ sera

$$\mathrm{BQ}q^{x'} + \mathrm{B'Q'}q'^{x'} + \mathrm{B''Q''}q''^{x'} + \ldots,$$

et ainsi de suite. La réunion de tous ces termes donnera l'expression de $y_{i,x'}$ la plus simple à laquelle on puisse parvenir.

15. La valeur de $y_{i,x'}$ donnée par la formule (λ) du numéro précédent dépendant de la connaissance de $\mathrm{M}^{(r)}$, $\mathrm{M}_1^{(r-1)}$, ..., il est visible que ces quantités seront connues, lorsque l'on aura le coefficient de $\frac{1}{t'^r}$ dans le développement de $\mathrm{Z}_i^{(0)}$; tout se réduit donc à déterminer ce coefficient. On a, par le n° 5,

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_i^{(0)} = &-\frac{1}{a\alpha^{i+1}(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')\ldots}\\ &-\frac{1}{a\alpha'^{i+1}(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')\ldots}\\ &-\frac{1}{a\alpha''^{i+1}(\alpha''-\alpha)(\alpha''-\alpha')\ldots}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ étant fonctions de $\frac{1}{t'}$. Si l'on fait $\frac{1}{t'} = s$, et que l'on différentie l'expression précédente de $Z_i^{(0)}$, n fois de suite par rapport à s, on aura, avec l'équation précédente, $n+1$ équations, au moyen desquelles, en éliminant les puissances indéterminées $\frac{1}{\alpha^{i+1}}, \frac{1}{\alpha'^{i+1}}, \frac{1}{\alpha''^{i+1}}, \ldots$, on parviendra à une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}, \frac{dZ_i^{(0)}}{ds}, \frac{d^2 Z_i^{(0)}}{ds^2}, \ldots$, dont les coefficients seront fonctions de $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ et de leurs différentielles prises par rapport à s; or il est clair que $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ doivent entrer de la même manière dans ces coefficients, que l'on pourra ainsi obtenir en fonctions rationnelles et entières des coefficients de l'équation qui donne les valeurs de $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ et des différences de ces coefficients, et par conséquent en fonctions rationnelles de s. En faisant ensuite disparaître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$ et ses différentielles, équation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles et entières de s. Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $ks^m \frac{d^\mu Z_i^{(0)}}{ds^\mu}$, et nommons λ_r le coefficient de $\frac{1}{t'^r}$ dans le développement de $Z_i^{(0)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$; ce coefficient dans le développement de $ks^m \frac{d^\mu Z_i^{(0)}}{ds^\mu}$ sera

$$k(r+\mu-m)(r+\mu-m-1)(r+\mu-m-2)\ldots(r-m+1)\lambda_{r+\mu-m}.$$

En repassant ainsi des fonctions génératrices à leurs coefficients, l'équation entre $Z_i^{(0)}$ et ses différences donnera une équation entre $\lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots$ dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de r et dont l'intégrale sera la valeur de λ_r.

Il suit de là que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coefficients sont constants, dépend : 1° de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies dont les coefficients sont variables; 2° d'une intégrale *définie*. L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i,x'}$ dans la formule (λ) est relative à r, et doit s'étendre jusqu'à $r = i+1$.

Relativement à l'équation aux différences partielles du premier ordre

$$o = A y_{i,x'} + B y_{i+1,x'} + B' y_{i,x'+1},$$

on a

$$Z_i^{(0)} = -\frac{1}{a\alpha^{i+1}};$$

on a de plus

$$a = A + B's,$$

$$\alpha = -\frac{B}{a},$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)} = -\frac{(A + B's)^i}{(-B)^{i+1}};$$

d'où l'on tire cette équation différentielle

$$o = \frac{dZ_i^{(0)}}{ds}(A + B's) - iB'Z_i^{(0)},$$

ce qui donne l'équation aux différences finies

$$o = (r+1)A\lambda_{r+1} - (i-r)B'\lambda_r;$$

on a ensuite

$$M^{(r)} = B\lambda_r.$$

La formule (λ) du numéro précédent deviendra donc

$$y_{i,x'} = B\Sigma\lambda_r y_{0,x'+r},$$

l'intégrale finie étant prise depuis $r = o$ jusqu'à $r = i$. C'est l'intégrale complète de l'équation précédente aux différences partielles du premier ordre.

L'équation aux différences en λ_r donne en l'intégrant

$$\lambda_r = \frac{Hi(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r}\,\frac{B'^r}{A^r},$$

H étant une constante arbitraire, et le dénominateur étant l'unité lorsque r est nul. Pour déterminer cette constante, on observera que le coefficient indépendant de $\frac{1}{t'}$ dans $Z_i^{(0)}$ est $-\frac{A^i}{(-B)^{i+1}}$; c'est la valeur de

λ_0 et par conséquent de H; on aura donc

$$y_{i,x'} = -\Sigma \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r} \frac{\mathrm{A}^{i-r}\mathrm{B}'^r}{(-\mathrm{B})^i} y_{0,x'+r}.$$

En passant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coefficients sont constants : 1° en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2° au moyen d'une intégrale définie. Mais ce n'est pas ici le lieu de m'étendre sur cet objet que j'ai considéré ailleurs avec étendue.

On doit faire ici une remarque importante, relative au nombre des fonctions arbitraires que renferme l'expression générale de $y_{i,x'}$. Ce nombre, dans la formule (λ) du numéro précédent, est égal à n; mais il devient plus petit dans le cas où, la valeur de z du n° 13 ne renfermant que des puissances de $\frac{1}{t'}$ moindres que n, la plus haute puissance n' de $\frac{1}{t'}$ a un coefficient constant ou indépendant de $\frac{1}{t}$. Alors, en suivant l'analyse précédente et déterminant à son moyen la valeur de $\frac{1}{t'^{x'}}$, comme nous avons déterminé celle de $\frac{1}{t^i}$, en repassant ensuite des fonctions génératrices à leurs coefficients, on parviendra à une formule analogue à la formule (λ); seulement, l'intégrale définie, au lieu de s'étendre jusqu'à $r = i + 1$ devra s'étendre jusqu'à $r = x' + 1$. Cette nouvelle expression de $y_{i,x'}$ ne dépendra plus que des n' fonctions arbitraires $y_{i,0}, y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,n'-1}$, et tandis que la première suppose la connaissance des n premiers rangs verticaux de la Table (Q) du n° 14, celle-ci n'exige que la connaissance des n' premiers rangs horizontaux de la même Table. Ainsi les n fonctions arbitraires $y_{0,x'}, y_{1,x'}, y_{2,x'}, \ldots, y_{n-1,x'}$ de la formule (λ) n'équivalent qu'à n' fonctions arbitraires distinctes. En effet, l'équation proposée aux différences partielles donne $y_{i,n'}$ au moyen des valeurs de $y_{i\pm r,0}, y_{i\pm r,1}, \ldots, y_{i\pm r,n'-1}$, r étant un nombre entier. Elle donne pareillement $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i\pm r,0}$, $y_{i\pm r,1}, \ldots, y_{i\pm r,n'}$, et éliminant $y_{i\pm r,n'}$ au moyen de son expression, on a $y_{i,n'+1}$ au moyen de $y_{i\pm r,0}$, ${}_{i\pm r,1}, \ldots, y_{i\pm r,n'-1}$. En continuant ainsi, on voit que l'expression générale de $y_{i,x}$ ne dépend que des arbitraires $y_{i\pm r,0}, y_{i\pm r,1}, \ldots, y_{i\pm r,n'-1}$; on peut donc, au moyen des n' premiers rangs horizontaux de la Table (Q), former tous ses rangs verticaux, qui sont, chacun, des fonctions de x' dans lesquelles i est invariable.

En passant du fini à l'infiniment petit, on voit avec évidence que le nombre des fonctions arbitraires des équations aux différentielles partielles peut être moindre que le plus haut degré de la différentielle dans ces équations.

16. Quoique les formules données dans les nos **13** et **14** aient une grande généralité, il y a cependant quelques cas qui n'y sont pas compris. Ces cas ont lieu lorsque l'équation $z = 0$ donne l'expression de $\frac{1}{t^i}$ en $\frac{1}{t'}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ est multipliée par une fonction rationnelle de $\frac{1}{t'}$. Pour avoir alors l'expression de $y_{x,x'}$ en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante :

$$(a) \qquad z = \frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c.$$

Cette équation donne

$$\frac{1}{t} = \frac{\frac{a}{t'} + c + z}{\frac{1}{t'} - b},$$

par conséquent

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u\left(\frac{a}{t'} + c + z\right)^x}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x t'^{x'}}.$$

En développant le second membre de cette dernière équation, et repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura l'expression de $y_{x,x'}$, car cette quantité est le coefficient de $t^0 t'^0$ dans le développement de la fonction génératrice $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$; et le coefficient $t^0 t'^0$, dans un terme quelconque du développement du second membre, tel que

$u\frac{kz^\mu}{t'^{x'+r}}$ est $k\nabla^\mu y_{0,x'+r}$, $\nabla y_{x,x'}$ étant le coefficient de la fonction génératrice uz, coefficient qui est ici égal à

$$y_{x+1,x'+1} - a y_{x,x'+1} - b y_{x+1,x'} - c y_{x',x}.$$

Si l'on a $0 = \nabla y_{x,x'}$, les coefficients des termes affectés de z disparaîtront, et alors on aura l'expression de $y_{x,x'}$ en fonction de $y_{0,x'}$, $y_{0,x'+1}$, $y_{0,x'+2}$, ... Cette expression sera l'intégrale de l'équation

$$(b) \qquad 0 = y_{x+1,x'+1} - a y_{x,x'+1} - b y_{x+1,x'} - c y_{x,x'}.$$

Pour avoir cette expression, z peut être considéré comme nul, puisque l'on ne doit avoir égard qu'aux termes indépendants de z; l'équation (a) devient ainsi

$$0 = \frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c;$$

c'est ce que je nomme *équation génératrice* de l'équation (b) aux différences partielles. En effet on obtient cette dernière équation en multipliant la précédente par u et repassant des fonctions génératrices aux coefficients.

L'expression que l'on obtient par l'analyse précédente pour $y_{x,x'}$ est une suite infinie. On parviendra de cette manière à une expression finie. Reprenons la valeur de $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$, et donnons-lui cette forme

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = \frac{u\left(\frac{1}{t'} - b + b\right)^{x'}\left[c + ab + a\left(\frac{1}{t'} - b\right)\right]^x}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^x}.$$

Si l'on développe le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $\frac{1}{t'} - b$, on aura

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u\left[\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + x'b\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} + \frac{x'(x'-1)}{1.2} b^2 \left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-2} + \ldots\right]$$
$$\times \left[a^x + x(c+ab)\frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2 \frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t'} - b\right)^2} + \ldots\right].$$

Soit

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= a^x,\\
\mathrm{V}^{(1)} &= x' b a^x + x(c+ab)a^{x-1},\\
\mathrm{V}^{(2)} &= \frac{x'(x'-1)}{1.2} b^2 a^x + x' x b (c+ab) a^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2 a^{x-2},\\
\mathrm{V}^{(3)} &= \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1.2.3} b^3 a^x + \frac{x'(x'-1)}{1.2} x b^2 (c+ab) a^{x-1}\\
&\quad + x' \frac{x(x-1)}{1.2} b (c+ab)^2 a^{x-2}\\
&\quad + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(c+ab)^3 a^{x-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{V}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'} + \mathrm{V}^{(1)}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1} + \mathrm{V}^{(2)}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-2} + \ldots + \mathrm{V}^{(x')} \\ + \dfrac{\mathrm{V}^{(x'+1)}}{\frac{1}{t'}-b} + \dfrac{\mathrm{V}^{(x'+2)}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^2} + \ldots + \dfrac{\mathrm{V}^{(x'+x)}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x} \end{array} \right\}.$$

Or l'équation

$$\frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0$$

donne

$$\frac{1}{\frac{1}{t'}-b} = \frac{\frac{1}{t}-a}{c+ab},$$

partant

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{V}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'} + \mathrm{V}^{(1)}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1} + \ldots + \mathrm{V}^{(x')} \\ + \dfrac{\mathrm{V}^{(x'+1)}}{c+ab}\left(\frac{1}{t}-a\right) + \dfrac{\mathrm{V}^{(x'+2)}}{(c+ab)^2}\left(\frac{1}{t}-a\right)^2 + \ldots + \dfrac{\mathrm{V}^{(x'+x)}}{(c+ab)^x}\left(\frac{1}{t}-a\right)^x \end{array} \right\}.$$

Pour repasser maintenant des fonctions génératrices aux coefficients, nous observerons : 1° que le coefficient de $t^0 t'^0$ dans $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$ est $y_{x,x'}$; 2° que ce même coefficient, dans un terme quelconque, tel que $u\left(\frac{1}{t'} - b\right)^r$ ou $ub^r\left(\frac{1}{bt'} - 1\right)^r$, est $br\ '\Delta^r\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)$, la caractéristique $'\Delta$ des différences se rapportant à la variabilité de x', et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations; 3° que ce coefficient dans $u\left(\frac{1}{t} - a\right)^r$ est $a^r\Delta^r\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$, la caractéristique Δ se rapportant à la variabilité de x, et cette variable devant être supposée nulle après les différentiations; on aura donc, avec ces conditions,

$$\begin{aligned} y_{x,x'} = {} & \mathrm{V} b^{x'}\ '\Delta^{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) + \mathrm{V}^{(1)} b^{x'-1}\ '\Delta^{x'-1}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) + \ldots + \mathrm{V}^{(x')} y_{0,0} \\ & + \frac{a}{c+ab}\mathrm{V}^{(x'+1)}\Delta\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) + \frac{a^2}{(c+ab)^2}\mathrm{V}^{(x'+2)}\Delta^2\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) + \ldots \\ & + \frac{a^x}{(c+ab)^x}\mathrm{V}^{(x'+x)}\Delta^x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right): \end{aligned}$$

c'est l'intégrale complète de l'équation (b) aux différences partielles. Il est clair que cette intégrale suppose que l'on connaît le premier rang horizontal et le premier rang vertical de la Table (Q) du n° **14**.

17. L'expression précédente de $y_{x,x'}$ offre cela de remarquable, savoir que les caractéristiques Δ et $'\Delta$ des différences finies ont pour exposants les variables x et x'. En voici un autre exemple. Considérons l'équation aux différences partielles

$$0 = \Delta^n y_{x,x'} + \frac{a}{\alpha}\Delta^{n-1}\ '\Delta y_{x,x'} + \frac{b}{\alpha^2}\Delta^{n-2}\ '\Delta y_{x,x'} + \ldots,$$

la caractéristique Δ se rapportant à la variable x dont l'unité est la différence, et la caractéristique $'\Delta$ se rapportant à la variable x' dont α est la différence. L'équation génératrice correspondante sera, par le numéro précédent,

$$0 = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{a}{\alpha}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{t'^{\alpha}} - 1\right) + \frac{b}{\alpha^2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-2}\left(\frac{1}{t'^{\alpha}} - 1\right)^2 + \ldots.$$

Cette équation donne les n suivantes :

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right),$$

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q'}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right),$$

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q''}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

q, q', q'', ... étant les n racines de l'équation

$$0=z^n-az^{n-1}+bz^{n-2}-\ldots.$$

L'équation

$$\frac{1}{t}-1=\frac{q}{\alpha}\left(1-\frac{1}{t'^{\alpha}}\right)$$

donne

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}}=\frac{u}{t'^{x'}}\left(1+\frac{q}{\alpha}-\frac{q}{\alpha}\frac{1}{t'^{\alpha}}\right)^x$$

$$=\frac{u}{t'^{x'}}(-1)^x\left\{\begin{array}{l}\dfrac{q^x}{\alpha^x}\dfrac{1}{t'^{\alpha x}}-x\dfrac{q^{x-1}}{\alpha^{x-1}}\left(1+\dfrac{q}{\alpha}\right)\dfrac{1}{t'^{\alpha(x-1)}}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

En repassant des fonctions génératrices aux coefficients, on aura

$$y_{x,x'}=(-1)^x\left[\frac{q^x}{\alpha^x}y_{0,x'+\alpha x}-x\frac{q^{x-1}}{\alpha^{x-1}}\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)y_{0,x'+\alpha(x-1)}+\ldots\right].$$

Le second membre de cette équation peut être mis sous la forme

$$\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}}\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x {}'\Delta^x\left[\left(\frac{q}{\alpha+q}\right)^{\frac{x'}{\alpha}}y_{0,x'}\right].$$

En désignant donc par la fonction arbitraire $\varphi(x')$ la quantité $\left(\frac{q}{\alpha+q}\right)^{\frac{x'}{\alpha}}y_{0,x'}$, l'expression de $y_{x,x'}$ deviendra

$$y_{x,x'}=\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}}\left(-\frac{q}{\alpha}\right)^x {}'\Delta^x\varphi(x').$$

Cette valeur satisfait donc à l'équation proposée aux différences partielles. Il est visible que chacune des racines q', q'', ... fournit une valeur semblable, dans laquelle on peut introduire une autre arbitraire. Nous désignerons par $\varphi_1(x')$, $\varphi_2(x')$, ... ces nouvelles arbitraires. La réunion de toutes ces valeurs satisfera à l'équation proposée, parce qu'elle est linéaire, et cette réunion en sera l'intégrale complète, qui est ainsi

$$\begin{aligned} y_{x,x'} = & \left(1+\frac{\alpha}{q}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}} \left(-\frac{q}{\alpha}\right)^{x'} \Delta^x \varphi(x') \\ & + \left(1+\frac{\alpha}{q'}\right)^{x+\frac{x'}{\alpha}} \left(-\frac{q'}{\alpha}\right)^{x'} \Delta^x \varphi_1(x') \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx'; si l'on observe d'ailleurs que

$$\left(1+\frac{dx'}{q}\right)^{x+\frac{x'}{dx'}} = c^{\frac{x'}{q}},$$

comme il est facile de s'en convaincre, en prenant les logarithmes de chaque membre de cette équation, on aura

$$y_{x,x'} = c^{\frac{x'}{q}} (-q)^x \left[\frac{d^x \varphi(x')}{dx'^x}\right] + c^{\frac{x'}{q'}} (-q')^x \left[\frac{d^x \varphi_1(x')}{dx'^x}\right] + \ldots;$$

c'est l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles finies et infiniment petites

$$0 = \Delta^n y_{x,x'} + a\Delta^{n-1}\left(\frac{dy_{x,x'}}{dx'}\right) + b\Delta^{n-2}\left(\frac{d^2 y_{x,x'}}{dx'^2}\right) + \ldots.$$

Toutes les équations aux différences partielles que nous avons examinées jusqu'ici n'ont point de dernier terme indépendant de la variable principale. Si elles en avaient, on y aurait égard, et l'on intégrerait ces équations par la méthode que nous avons donnée pour cet objet, relativement aux équations aux simples différences, et qu'il est facile d'appliquer aux équations à différences partielles.

Théorèmes sur le développement en séries des fonctions de plusieurs variables.

18. Si l'on applique aux fonctions de plusieurs variables la méthode du n° **11**, on aura sur le développement de ces fonctions en séries des théorèmes analogues à ceux du n° **10**. Considérons la fonction génératrice $u\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n$, et donnons-lui cette forme

$$u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)\ldots-1\right]^n,$$

u étant supposé une fonction de t, t', t'', ..., dans le développement de laquelle $y_{x,x',x'',\ldots}$ est le coefficient de $t^x t'^{x'} t''^{x''}\ldots$. Ce coefficient dans le développement de $u\left(\frac{1}{tt't''\ldots}-1\right)^n$ sera $\Delta^n y_{x,x',x'',\ldots}$, x, x', x'', ... étant supposés varier de l'unité dans $y_{x,x',x'',\ldots}$. Ce même coefficient, dans le développement de la fonction génératrice

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}\left(\frac{1}{t''}-1\right)^{r''}\ldots,$$

sera

$${}'\Delta^r\,{}''\Delta^{r'}\,{}'''\Delta^{r''}\ldots y_{x,x',x'',\ldots},$$

les caractéristiques ${}'\Delta$, ${}''\Delta$, ${}'''\Delta$, ... se rapportant respectivement aux variables x, x', x'', ...; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices à leurs coefficients,

$$\Delta^n y_{x,x',x'',\ldots} = [(1+{}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots})(1+{}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots})(1+{}'''\Delta y_{x,x',x'',\ldots})\ldots-1]^n,$$

pourvu que, dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques ${}'\Delta$, ${}''\Delta$, ... les exposants des puissances de ${}'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ${}''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ...

En changeant n dans $-n$, la même équation subsiste encore, pourvu que l'on change, comme dans les n^{os} **10** et **11**, les caractéristiques Δ, ${}'\Delta$, ${}''\Delta$, ..., lorsqu'elles ont un exposant négatif, en intégrales finies correspondantes, les signes Σ, $'\Sigma$, $''\Sigma$, ... étant les caractéristiques des intégrales, correspondantes aux caractéristiques Δ, $'\Delta$, $''\Delta$, ... des différences.

Il est clair que $u\left(\frac{1}{t^i t'^{i'} t''^{i''} \ldots} - 1\right)^n$ est la fonction génératrice de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $y_{x,x',x'',\ldots}$, x variant de i, x' variant de i', x'' variant de i'', ... Or on a

$$u\left(\frac{1}{t^i t'^{i'} t''^{i''} \ldots} - 1\right)^n = u\left[\left(1+\frac{1}{t}-1\right)^i\left(1+\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}\left(1+\frac{1}{t''}-1\right)^{i''}\ldots - 1\right]^n;$$

en désignant donc par $\overline{\Delta}$ la caractéristique des différences, lorsque x varie de i, x' de i', x'' de i'', ..., et par $\overline{\Sigma}$ la caractéristique intégrale correspondante, on aura

$$\overline{\Delta}^n y_{x,x',x'',\ldots} = [(1+'\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^i (1+''\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^{i'} \ldots - 1]^n,$$

$$\overline{\Sigma}^n y_{x,x',x'',\ldots} = \frac{1}{[(1+'\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^i (1+''\Delta y_{x,x',x'',\ldots})^{i'} \ldots - 1]^n},$$

pourvu que, dans le développement du second membre de ces équations, on applique aux caractéristiques $'\Delta$, $''\Delta$, ... les exposants des puissances de $'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, $''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ..., et que l'on change les différences négatives en intégrales. On peut ainsi se dispenser d'indiquer les arbitraires que l'intégrale finie $\overline{\Sigma}^n$ doit introduire, parce qu'elles sont censées renfermées dans les intégrales que donne le développement de son expression.

Les deux équations précédentes ont encore lieu en supposant que dans les différences $'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, $''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ..., x, x', x'', ..., au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ϖ, pourvu que, dans la différence $\overline{\Delta} y_{x,x',x'',\ldots}$, x varie de $i\varpi$, x' de $i'\varpi$, x'' de $i''\varpi$, ... Maintenant, si l'on suppose ϖ infiniment petit, les différences $'\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, $''\Delta y_{x,x',x'',\ldots}$, ... se changeront, la première dans $dx\,\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx}$, la seconde dans $dx'\,\frac{dy_{x,x',\ldots}}{dx'}$, ... De plus, si l'on fait i, i', i'', ... infiniment grands, et tels que l'on ait

$$i\,dx = \alpha, \qquad i'\,dx' = \alpha', \qquad \ldots,$$

on aura

$$(1 + {}'\Delta y_{x,x',\dots})^i = \left(1 + dx\,\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx}\right)^{\frac{\alpha}{dx}} = c^{\alpha\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx}},$$

c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura pareillement

$$(1 + {}''\Delta y_{x,x',\dots})^{i'} = c^{\alpha'\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx'}},$$

et ainsi de suite; partant

$$\overline{\Delta}^n y_{x,x',\dots} = \left(c^{\alpha\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx} + \alpha'\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx'} + \dots} - 1\right)^n,$$

$$\overline{\Sigma}^n y_{x,x',\dots} = \frac{1}{\left(c^{\alpha\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx} + \alpha'\frac{dy_{x,x',\dots}}{dx'} + \dots} - 1\right)^n},$$

x variant de α, x' de α', ..., dans les deux premiers membres de ces équations.

Si, au lieu de supposer ϖ infiniment petit, on le suppose égal à l'unité, et i infiniment petit et égal à dx; si l'on suppose encore i', i'', ... infiniment petits et respectivement égaux à dx', dx'', ..., on aura

$$(1 + {}'\Delta y_{x,x',\dots})^i = (1 + {}'\Delta y_{x,x',\dots})^{dx} = 1 + dx\log(1 + {}'\Delta y_{x,x',\dots});$$

on aura pareillement

$$(1 + {}''\Delta y_{x,x',\dots})^{i'} = 1 + dx'\log(1 + {}''\Delta y_{x,x',\dots}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

D'ailleurs $\overline{\Delta}^n y_{x,x',\dots}$ se change alors dans $d^n y_{x,x',\dots}$; on aura donc

$$d^n y_{x,x',\dots} = [dx\log(1 + {}'\Delta y_{x,x',\dots}) + dx'\log(1 + {}''\Delta y_{x,x',\dots}) + \dots]^n,$$

équation qui, en faisant n négatif, subsiste encore, pourvu que l'on change les différences négatives en intégrales. Ces divers résultats sont analogues à ceux que nous avons trouvés dans le n° **10**, relativement aux fonctions d'une seule variable, et l'on y retrouve l'analogie que nous avons observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales.

Considérations sur le passage du fini à l'infiniment petit.

19. Le passage du fini à l'infiniment petit consiste à négliger les différences infiniment petites par rapport aux quantités finies, et généralement les infiniment petits d'un ordre supérieur relativement à ceux d'un ordre inférieur. Cette omission semble ôter à ce passage la rigueur géométrique; mais, pour se convaincre de son entière exactitude, il suffit de le considérer comme le résultat de la comparaison des puissances homogènes d'une variable indéterminée, dans le développement des termes d'une équation qui subsiste, quelle que soit cette indéterminée; car il est clair que les termes affectés de la même puissance doivent se détruire mutuellement.

Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons l'équation suivante que donne l'équation (q) du n° **10**, en y faisant $n = 1$,

$$'\Delta y_{x'} = (1 + dy_{x'})^{\frac{\alpha}{dx'}} - 1.$$

$'\Delta$ est la caractéristique des différences finies, x' variant de α, et d est la caractéristique des différences, x' variant de dx'. L'équation précédente développée donne, en appliquant, conformément à l'analyse du numéro cité, les exposants des puissances de $dy_{x'}$ à la caractéristique d,

$$'\Delta y_{x'} = \frac{\alpha}{dx'}\, dy_{x'} + \frac{\alpha^2 - \alpha\, dx'}{1.2.dx'^2}\, d^2 y_{x'} + \ldots;$$

$dy_{x'}$ est égal à $y_{x'+dx'} - y_{x'}$. Supposons qu'en développant la fonction de $x' + dx'$, représentée par $y_{x'+dx'}$, on ait

$$y_{x'+dx'} = y_{x'} + dx'\, y'_{x'} + dx'^2\, z_{x'} + \ldots;$$

on aura

$$dy_{x'} = dx'\, y'_{x'} + dx'^2\, z_{x'} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$d^2 y_{x'} = dx'\, dy'_{x'} + dx'^2\, dz_{x'} + \ldots.$$

Développons pareillement $y'_{x'+dx'}$, $z_{x'+dx'}$, ... suivant les puissances de dx', et supposons que l'on ait

$$y'_{x'+dx'} = y'_{x'} + dx'\,y''_{x'} + dx'^2 s_{x'} + \ldots,$$

$$z_{x'+dx'} = z_{x'} + dx'\,z'_{x'} + \ldots,$$

on aura

$$dy'_{x'} = dx'\,y''_{x'} + dx'^2 s_{x'} + \ldots,$$

$$dz_{x'} = dx'\,z'_{x'} + \ldots,$$

partant

$$d^2 y_{x'} = dx'^2 y''_{x'} + dx'^3 s_{x'} + \ldots + dx'^3 z'_{x'} + \ldots.$$

L'expression précédente de $'\Delta y_{x'}$ deviendra ainsi

$$(o)\quad \left\{\begin{aligned} &'\Delta y_{x'} = \alpha y'_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2} y''_{x'} + \ldots \\ &\qquad + dx' \left\{\begin{aligned} &\alpha\ (z_{x'} - \tfrac{1}{2} y''_{x'} + \ldots) \\ &+ \alpha^2 (s_{x'} + z''_{x'} + \ldots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \\ &\qquad + dx'^2 \ldots, \end{aligned}\right.$$

dx' étant indéterminé; les termes indépendants de dx' doivent être égalés séparément entre eux; on a donc

$$\Delta y_{x'} = \alpha y_{x'} + \frac{\alpha^2}{1.2} y''_{x'} + \ldots.$$

Maintenant $y'_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne dans le Calcul différentiel par $\frac{dy_{x'}}{dx'}$. Pareillement $y''_{x'}$ est le coefficient de dx' dans le développement de $y'_{x'+dx'}$; c'est ce que l'on désigne par $\frac{dy'_{x'}}{dx'}$, ou par $\frac{d^2 y_{x'}}{dx'^2}$, et ainsi de suite; en substituant donc, dans l'équation précédente, $y_{x'+\alpha} - y_{x'}$ au lieu de $'\Delta y_{x'}$, on aura le théorème suivant :

$$y_{x'+\alpha} = y_{x'} + \alpha \frac{dy_{x'}}{dx'} + \frac{\alpha^2}{1.2} \frac{d^2 y_{x'}}{dx'^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \frac{d^3 y_{x'}}{dx'^3} + \ldots.$$

Considéré comme résultat de la comparaison des termes indépendants de dx', ce théorème ne laisse aucun doute sur son exactitude rigoureuse, et il est visible par l'analyse précédente que cette comparaison revient à négliger les termes multipliés par dx' et ses puissances, relativement aux quantités finies; cette omission n'ôte donc rien à la rigueur du Calcul différentiel. Mais on voit de plus, *a priori*, que les termes affectés de la même puissance de l'indéterminée dx' doivent se détruire mutuellement, ce que l'on peut vérifier *a posteriori*. Ainsi ce que l'on néglige comme infiniment petit est rigoureusement nul, en sorte que l'omission des infiniment petits, relativement aux quantités finies, n'est au fond qu'un moyen facile d'éliminer les termes superflus qui doivent disparaître dans le résultat final.

Ce rapprochement du Calcul aux différences finies et du Calcul différentiel met en évidence la rigueur des résultats de ce dernier calcul, et donne sa vraie métaphysique; mais ses applications à l'étendue, à la durée et au mouvement supposent de plus le principe des limites. On peut, par un rapprochement semblable, éclaircir divers points de l'Analyse infinitésimale, qui ont été des sujets de contestation parmi les géomètres : telle est la discontinuité des fonctions arbitraires dans les intégrales des équations aux différences partielles. Ceux qui ont rejeté cette discontinuité se fondaient sur ce que l'analyse ordinaire des différences infiniment petites suppose que les différentielles successives d'une fonction doivent être infiniment petites relativement aux précédentes, ce qui n'a point lieu lorsque la fonction est discontinue. Pour éclaircir cette question délicate, il faut la considérer dans les différences finies, et observer ce qui arrive dans le passage de ces différences aux différences infiniment petites.

Prenons pour exemple l'équation suivante aux différences finies partielles :

$$(a)\qquad (y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'}) - (y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1}) = 0;$$

son équation génératrice est, par le n° **16**,

$$t\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 - t'\left(\frac{1}{t'}-1\right)^2 = 0,$$

et, en suivant l'analyse donnée précédemment, il est facile d'en conclure que l'intégrale complète de l'équation proposée (a) est

$$y_{x,x'} = \varphi(x + x') + \psi(x - x'),$$

$\varphi(x + x')$ étant une fonction arbitraire de $x + x'$, et $\psi(x - x')$ étant une fonction arbitraire de $x - x'$. Il est facile d'ailleurs de s'assurer que cette valeur satisfait à la proposée, et qu'elle en est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme deux fonctions arbitraires.

Supposons présentement que, dans la Table suivante

$$(\mathrm{Z})\quad \left\{\begin{array}{lllllll} y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0}, & \ldots, & y_{n-1,0}, & y_{n,0}, \\ y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1}, & \ldots, & y_{n-1,1}, & y_{n,1}, \\ y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2}, & \ldots, & y_{n-1,2}, & y_{n,2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ y_{0,\infty}, & y_{1,\infty}, & y_{2,\infty}, & y_{3,\infty}, & \ldots, & y_{n-1,\infty}, & y_{n,\infty}, \end{array}\right.$$

on connaisse les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes

$$\begin{array}{lllll} y_{0,0}, & y_{0,1}, & y_{0,2}, & \ldots, & y_{0,\infty}, \\ y_{n,0}, & y_{n,1}, & y_{n,2}, & \ldots, & y_{n,\infty}, \end{array}$$

et que l'on connaisse de plus tous les termes de ces deux colonnes; on pourra déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$ qui tombent entre ces colonnes. Car, si l'on veut former le troisième rang horizontal, on observera que l'équation (a) donne

$$y_{x,x'+1} = y_{x+1,x'} + y_{x-1,x'} - y_{x,x'-1}.$$

En faisant, dans cette dernière équation, $x' = 1$, et successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $\ldots$, $x = n - 1$, on aura les valeurs de $y_{1,2}$, $y_{2,2}$, $y_{3,2}$, $\ldots$, $y_{n-1,2}$, ou le troisième rang horizontal, au moyen des deux premiers rangs horizontaux. On formera de la même manière le quatrième rang horizontal, et ainsi de suite à l'infini. Mais, si l'on veut déterminer les valeurs de $y_{x,x'}$, qui tombent hors de la Table (Z), les conditions précédentes ne suffisent pas, et il faut leur en ajouter d'autres.

Reprenons l'intégrale

$$y_{x,x'} = \varphi(x + x') + \psi(x - x'),$$

et supposons que le second rang horizontal, qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait

$$\psi(x - x') = \varphi(x - x');$$

on aura

$$y_{x,x'} = \varphi(x + x') + \varphi(x - x').$$

En faisant $x' = 0$, on a

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} y_{x,0};$$

partant

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2} y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x',0}.$$

Il est facile de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée (a); mais elle n'en est qu'une intégrale particulière, qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-1,0}.$$

Tant que $x + x'$ sera égal ou moindre que n, et que $x - x'$ sera positif ou nul, on aura la valeur de $y_{x,x'}$ au moyen du premier rang horizontal. Mais, lorsque, x croissant, $x + x'$ deviendra plus grand que n, ou lorsque $x - x'$ deviendra négatif, il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x',0}$ et de $y_{x-x',0}$ au moyen des deux colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces colonnes soient nuls, et que l'on ait ainsi $y_{0,x'} = 0$ et $y_{n,x'} = 0$. En faisant x nul dans l'équation

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2} y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x',0},$$

on aura

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

En faisant ensuite $x = n$ dans la même équation, on aura

$$y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

Si l'on change ensuite, dans cette dernière équation, x' en $n + x'$, on aura

$$y_{2n+x',0} = -y_{-x',0} = y_{x',0};$$

en changeant encore x' dans $n + x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = -y_{n-x',0},$$

et généralement on aura

$$y_{2rn+x',0} = y_{x',0},$$
$$y_{(2r+1)n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

On pourra ainsi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x,x'}$ à l'infini, du côté des valeurs positives de x, et l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}.$$

De là résulte la construction suivante. Représentons les valeurs de $y_{x,0}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, par les ordonnées menées aux angles d'un polygone dont l'abscisse soit x, et dont les deux extrémités, que je désigne par A et B, aboutissent aux points où $x = 0$ et $x = n$. On portera ce polygone depuis $x = n$ jusqu'à $x = 2n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, c'est-à-dire une position telle que les parties qui étaient au-dessus de l'axe des abscisses x se trouvent au-dessous, le point B restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la même place que dans la première, et le point A répondant ainsi à l'abscisse $x = 2n$. On placera ensuite ce même polygone depuis $x = 2n$ jusqu'à $x = 3n$, en lui donnant une position contraire à la seconde et par conséquent semblable à la première, de manière que le point A, dans cette troisième position, conserve la place qu'il avait dans la seconde, et qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$. En continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, les ordonnées menées aux angles de cette suite de polygones seront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avait depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, A restant d'ailleurs à la même place dans ces deux positions. On placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à

$x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B conservant la même place, et ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représentent les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x négatif. On aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$ en prenant la demi-somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ et $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer. Elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$ comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, et depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{0,x'} = 0$ et $y_{n,x'} = 0$, et que d'ailleurs le second rang horizontal de la Table (Z) soit tel, que l'on ait

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-1,0}.$$

On a, par ce qui précède,

$$y_{x,x'+n} = \tfrac{1}{2} y_{x+x'+n,0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x'-n,0};$$

de plus,

$$y_{x+x'+n,0} = -y_{n-x-x',0}, \qquad y_{x-x'-n,0} = -y_{n-x+x',0};$$

donc

$$y_{x,x'+n} = -\tfrac{1}{2} y_{n-x-x',0} - \tfrac{1}{2} y_{n-x+x',0} = -y_{n-x,x'}.$$

Il suit de là que, dans la Table (Z), le $(n + x')^{\text{ième}}$ rang horizontal est le $x'^{\text{ième}}$ rang pris avec un signe contraire et dans un ordre renversé, en sorte que le terme $r^{\text{ième}}$ du rang $(n + x')^{\text{ième}}$ est le même que le terme $(n - r)^{\text{ième}}$ du $x'^{\text{ième}}$ rang pris avec un signe contraire. On a ensuite

$$y_{x,2n+x'} = \tfrac{1}{2} y_{2n+x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x'-2n,0};$$

on a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$y_{2n+x+x',0} = y_{x+x',0},$$

$$y_{x-x'-2n,0} = -y_{2n+x'-x,0} = -y_{x'-x} = y_{x-x'};$$

partant

$$y_{n,2n+x'} = \tfrac{1}{2} y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} y_{x-x',0} = y_{x,x'},$$

d'où il suit que le $(2n + x')^{\text{ième}}$ rang horizontal est exactement égal au $x'^{\text{ième}}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde tendue, dont la figure initiale soit quelconque, pourvu qu'elle soit très rapprochée dans tous ses points de l'axe des abscisses. Nommons x l'abscisse, t le temps, $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde après le temps t. Concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de parties égales à dx, et que nous prendrons pour unité, ce qui revient à considérer x comme un nombre infini. Cela posé, on aura, par les principes de dynamique,

$$\frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2} = \frac{a^2}{dx^2}(y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t}),$$

a étant un coefficient constant dépendant de la tension et de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$, on aura $dt = \frac{dx'}{a}$, et $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x et de x', que nous désignons par $y_{x,x'}$; or, la grandeur de dt étant arbitraire, on peut la supposer telle que la variation de x' soit égale à celle de x, que nous avons prise pour l'unité; l'équation précédente devient ainsi

$$y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1} = y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'},$$

x et x' étant ici des nombres infinis. Cette équation est la même que celle que nous venons de considérer; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée précédemment peut être employée dans ce cas; le polygone dont les ordonnées des angles sont représentées par $y_{x,0}$ est ici la figure initiale de la corde; mais il faut pour cela supposer la longueur n divisée dans une infinité de parties égales à dx. Il faut de plus que la corde soit fixe à ses extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0$, $y_{n,x'} = 0$. D'ailleurs l'équation de condition

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2}y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2}y_{x-1,0}$$

ou, ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2}(y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

se change en celle-ci,

$$dt\,\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\,dx^2\,\frac{\partial^2 y_{x,0}}{\partial x^2},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = 0,$$

Or $\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t}$ est la vitesse initiale de la corde; cette vitesse doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la construction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que soit sa figure initiale, pourvu cependant que, dans tous ses points, $y_{x+2,0} - 2y_{x+1,0} + y_{x,0}$ soit un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que deux éléments contigus de la corde ne forment point un angle fini. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle du problème puisse subsister, et pour que celle-ci

$$dt\,\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = \tfrac{1}{2}(y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} = 0$. Mais d'ailleurs il est évident, par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être discontinue et formée d'un nombre quelconque d'arcs de courbes différentes, pourvu que ces arcs se touchent.

Les diverses situations de la corde dans son mouvement sont représentées par les rangs horizontaux de la table (Z), et comme les rangs qui correspondent aux valeurs de x', $x'+2n$, $x'+4n$, ... sont les mêmes par ce qui précède, il en résulte que la corde revient à la même situation après les temps t, $t+\frac{2n}{a}$, $t+\frac{4n}{a}$, ...

On voit encore, par la construction géométrique donnée ci-dessus, que, si l'on conçoit une suite de cordes liées entre elles et placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, comme dans cette construction, toutes ces cordes vibreront de la même manière, en sorte que, leurs figures initiales étant les mêmes, leurs figures seront constamment pareilles. On peut même ne fixer que les deux extrémités de cette suite, et laisser leurs nœuds entièrement libres;

car les éléments des deux cordes au point de leur jonction étant en ligne droite et également tendus, ce point n'a aucune tendance à se mouvoir et doit conséquemment rester immobile, ce que l'expérience confirme.

Cette analyse des cordes vibrantes établit d'une manière incontestable la possibilité d'admettre des fonctions discontinues dans ce problème, et l'on en doit généralement conclure que ces fonctions peuvent être employées dans tous les problèmes qui dépendent d'équations à différences partielles infiniment petites, pourvu qu'elles puissent subsister avec ces équations et avec les conditions du problème. On peut en effet considérer ces équations comme des cas particuliers d'équations aux différences finies, dans lesquelles on suppose que les variables deviennent infinies; or, rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies partielles, il est visible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales ne sont point assujetties à la loi de continuité, et que les constructions de ces équations au moyen de polygones ont lieu, quelle que soit la nature de ces polygones. Maintenant, lorsqu'on passe du fini à l'infiniment petit, ces polygones se changent dans des courbes qui, par conséquent, peuvent être discontinues; ainsi la loi de continuité n'est nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales, ni dans les constructions géométriques qui les représentent. Il faut seulement observer que, si l'équation aux différentielles partielles en $y_{x,x'}$ est de l'ordre n, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\frac{\partial^{n-r} y_{x,x'}}{\partial x^s\, \partial x'^{\,n-r-s}}$, r et s étant des nombres entiers positifs, s pouvant être nul; c'est-à-dire que la différentielle de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est indispensable pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister, parce que toute équation différentielle partielle suppose que les différentielles partielles de $y_{x,x'}$ dont elle est formée, et divisées par les puissances respectives de dx et de dx', sont des quantités finies et comparables entre elles; mais rien n'oblige d'admettre la même condition relativement aux différences de $y_{x,x'}$ de l'ordre n ou d'un ordre supérieur. En prenant pour fonctions arbitraires les différences les plus élevées des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles, cette intégrale ne renfermera plus alors que des fonctions arbitraires et leurs intégrales successives qui sont continues, parce qu'en général l'intégrale $\int ds\varphi(s)$ est continue dans le cas même où la fonction $\varphi(s)$ ne l'est pas. La condition précédente se réduit donc à ce que la différence $(n-1)^{\text{ième}}$ de chaque fonction arbitraire soit continue, c'est-à-dire que sa différentielle soit infiniment plus petite. Il ne doit donc point y avoir de saut entre deux tangentes consécutives de la courbe qui représente la fonction arbitraire de l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du second ordre; ainsi, dans le problème des cordes vibrantes que nous venons de discuter, il est nécessaire et il suffit que deux éléments quelconques contigus de la figure initiale de la corde forment entre eux un angle infiniment peu différent de deux angles droits. Il ne doit point y avoir de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs de la courbe qui représente la fonction arbitraire continue dans l'intégrale, si l'équation aux différences partielles est du troisième ordre, et ainsi de suite.

Considérations générales sur les fonctions génératrices.

20. Il est souvent inutile de connaître la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation aux différences finies, ordinaires ou partielles, parce que, l'Analyse offrant divers moyens pour développer les fonctions en séries, on peut ainsi obtenir d'une manière fort simple la valeur de la quantité cherchée. Il résulte du n° 5 que la quantité y_x, donnée par l'équation aux différences finies

$$0 = ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} + \ldots + py_{x+n-1} + qy_{x+n},$$

est le coefficient de t^x dans le développement de la fonction

$$\frac{A + Bt + Ct^2 + \ldots + Ht^{n-1}}{at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \ldots + pt + q},$$

A, B, C, ..., H étant des constantes arbitraires. En effet, si l'on compare cette fonction à celle-ci,

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1} + \ldots + y_\infty t^\infty,$$

on aura, en faisant disparaître le dénominateur et en vertu de l'équation aux différences en y_x,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} + \mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2 + \ldots + \mathrm{H}t^{n-1} = t^{n-1}(b y_0 + c y_1 + \ldots) \\ + t^{n-2}(c y_0 + e y_1 + \ldots) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

en égalant ensuite les puissances homogènes de t, on aura les valeurs de A, B, C, ... au moyen des n valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$; on aura donc ainsi la fonction génératrice de y_x.

Si l'on suppose $\Sigma^i y_x = y'_x$, on aura $y_x = \Delta^i y'_x$, et alors l'équation

$$0 = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + \ldots + q y_{x+n}$$

devient

$$0 = a \Delta^i y'_x + b \Delta^i y'_{x+1} + \ldots + q \Delta^i y'_{x+n},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$a y'_x + b y'_{x+1} + \ldots + q y_{x+n} = \mathrm{M} x^{i-1} + \mathrm{N} x^{i-2} + \ldots,$$

M, N, ... étant des constantes arbitraires. Par le n° 2, u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y'_x est

$$\frac{u t^i + \mathrm{A}' t^{i-1} + \mathrm{B}' t^{i-2} + \ldots}{(1-t)^i};$$

la fonction génératrice de y'_x ou de la quantité donnée par l'équation précédente en y'_x est donc

$$\frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2 + \ldots + \mathrm{H}t^{n-1}) t^i + (\mathrm{A}' t^{i-1} + \mathrm{B}' t^{i-2} + \ldots)(a t^n + b t^{n-1} + \ldots + q)}{(1-t)^i (a t^n + b t^{n-1} + c t^{n-2} + \ldots + p t + q)}.$$

Concevons maintenant que $a, b, c, \ldots$ soient des fonctions rationnelles et entières de t' de l'ordre n, et que A, B, C, ... soient des fonctions arbitraires de la même quantité ; y_x sera fonction de x et de t'.

En la développant par rapport aux puissances de t', nous nommerons $y_{x,x'}$ le coefficient de $t'^{x'}$ dans ce développement. Cela posé, si l'on suppose

$$\begin{aligned} a &= a' t'^n + b' t'^{n-1} + c' t'^{n-2} + \ldots, \\ b &= a'' t'^n + b'' t'^{n-1} + c'' t'^{n-2} + \ldots, \\ c &= a''' t'^n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

l'équation différentielle précédente en y_x donnera, en comparant les coefficients de la puissance $t'^{x'+n}$, l'équation suivante aux différences partielles en $y_{x,x'}$,

$$\begin{aligned} 0 = a' y_{x,x'} + b' y_{x,x'+1} + c' y_{x,x'+2} &+ \ldots \\ + a'' y_{x+1,x'} + b'' y_{x+2,x'+1} &+ \ldots \\ + a''' y_{x+2,x'} &+ \ldots \\ &+ \ldots; \end{aligned}$$

la fonction génératrice de la variable $y_{x,x'}$ de cette équation sera donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2 + \ldots + \mathrm{H}t^{n-1}}{a' t^n t'^n + b' t^n t'^{n-1} + c' t^n t'^{n-2} + \ldots} & \\ + a'' t^{n-1} t'^n + b'' t^{n-1} t'^{n-1} + \ldots & \\ + a''' t^{n-2} t'^n + \ldots & \\ + \ldots; & \end{aligned}$$

A, B, C, ... étant des fonctions arbitraires de t', elles donneront, par leur développement, les fonctions arbitraires qui doivent entrer dans l'expression de $y_{x,x'}$.

On peut encore déterminer les fonctions génératrices des équations aux différences finies, dans lesquelles les coefficients sont variables. Considérons pour cela l'équation aux différences

$$\begin{aligned} 0 = \quad & a\, y_x + b\, y_{x+1} + c\, y_{x+2} + \ldots + q\, y_{x+n} \\ & + x(a' y_x + b' y_{x+1} + c' y_{x+2} + \ldots + q' y_{x+n}) \\ & + x^2(a'' y_x + b'' y_{x+1} + c'' y_{x+2} + \ldots + q'' y_{x+n}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on nomme u la fonction génératrice de y_x, on aura, en vertu de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} & u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right) \\ & \quad +t\frac{d}{dt}\left[u\left(a'+\frac{b'}{t}+\frac{c'}{t^2}+\ldots+\frac{q}{t^n}\right)\right] \\ & \quad +t\frac{d}{dt}\left\{t\frac{d}{dt}\left[u\left(a''+\frac{b''}{t}+\frac{c''}{t^2}+\ldots+\frac{q''}{t^n}\right)\right]\right\} \\ & \quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & =\mathrm{A}+\mathrm{B}t+\mathrm{C}t^2+\ldots+\mathrm{H}t^{n-1}, \end{aligned}$$

A, B, C, ..., H étant des constantes arbitraires, qui dépendent des valeurs de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. En effet, si l'on substitue dans cette équation la valeur précédente de u en série, on voit qu'en vertu de l'équation différentielle proposée, tous les coefficients de la même puissance de t disparaissent lorsque cette puissance est égale ou plus grande que n, et la comparaison des puissances inférieures donne un nombre n d'équations, qui déterminent les constantes A, B, C, ..., au moyen des valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

L'équation différentielle précédente n'est intégrable généralement que dans le cas où elle est du premier ordre, et alors les coefficients de l'équation aux différences finies en y_x ne renferment que la première puissance de x; dans ce dernier cas, on peut obtenir la fonction génératrice u par des quadratures.

21. La connaissance des fonctions génératrices des équations différentielles donne l'expression des intégrales de ces équations au moyen de quadratures définies. Reprenons, pour cela, l'équation

$$u=y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots+y_xt^x+y_{x+1}t^{x+1}+\ldots+y_\infty t^\infty.$$

Substituons dans ses deux membres $c^{x\varpi\sqrt{-1}}$ au lieu de t^x, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et nommons U ce que devient alors u. En multipliant l'équation par

$c^{-x\varpi\sqrt{-1}}\,d\varpi$ et intégrant, on aura

$$\int \mathrm{U}\,d\varpi\, c^{-x\varpi\sqrt{-1}} = \int d\varpi \left\{ \begin{array}{l} y_0 c^{-x\varpi\sqrt{-1}} + y_1 c^{-(x-1)\varpi\sqrt{-1}} \quad + \ldots \\ \quad + y_x + y_{x+1} c^{\varpi\sqrt{-1}} + \ldots \end{array} \right\}.$$

Si l'on substitue, pour $c^{\pm r\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $\cos r\varpi \pm \sqrt{-1}\sin r\varpi$, et si l'on prend l'intégrale depuis $\varpi = -\pi$ jusqu'à $\varpi = \pi$, 2π étant la circonférence, le second membre se réduit à $2\pi y_x$; on a donc

$$y_x = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{U}\,d\varpi(\cos x\varpi - \sqrt{-1}\sin x\varpi);$$

mais cette formule a l'inconvénient d'introduire des imaginaires dont on peut se débarrasser de la manière suivante.

Considérons l'équation

$$\begin{aligned} 0 = a y_x + b y_{x+1} + \ldots + q y_{x+n} \\ + x(a' y_x + b' y_{x+1} + \ldots + q' y_{x+n}), \end{aligned}$$

et supposons

$$y_x = \int t^{-x-1}\mathrm{T}\,dt,$$

T étant une fonction de t qu'il s'agit de déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En substituant pour y_x cette valeur dans l'équation différentielle en y_x, et observant que l'on a

$$x\int t^{-x-1}\,dt\,\frac{\mathrm{T}}{t^r} = -t^{-x}\frac{\mathrm{T}}{t^r} + \int t^{-x}\,d\left(\frac{\mathrm{T}}{t^r}\right),$$

ce qui fait disparaître le coefficient variable x, on aura

$$(h)\qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\mathrm{T}t^{-x}\left(a' + \dfrac{b'}{t} + \ldots + \dfrac{q'}{t^n}\right) \\ \quad + \int t^{-x-1}\,dt \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}\left(a + \dfrac{b}{t} + \ldots + \dfrac{q}{t^n}\right) \\ + t\dfrac{d}{dt}\left[\mathrm{T}\left(a' + \dfrac{b'}{t} + \ldots + \dfrac{q'}{t^n}\right)\right] \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

En égalant à zéro la partie sous le signe $\int$, on aura

$$0 = \mathrm{T}\left(a + \frac{b}{t} + \ldots + \frac{q}{t^n}\right) + t\frac{d}{dt}\left[\mathrm{T}\left(a' + \frac{b'}{t} + \ldots + \frac{q'}{t^n}\right)\right].$$

Cette équation intégrée donne T en fonction de t. Elle est la même que l'équation différentielle en u du numéro précédent, en négligeant dans celle-ci le terme indépendant de u. La valeur de T est donc la partie de u qui est indépendante de ce terme.

Pour avoir les limites de l'intégrale $\int t^{-x-1}\mathrm{T}\,dt$, on égalera à zéro la partie hors du signe $\int$ dans l'équation (h), ce qui donne

$$0=\mathrm{T}t^{-x}\left(a'+\frac{b'}{t}+\ldots+\frac{q'}{t^n}\right).$$

Cette équation est satisfaite en supposant t infini, et en le supposant égal à l'une des racines de l'équation

$$0=a'+\frac{b'}{t}+\ldots+\frac{q'}{t^n};$$

on aura ainsi $n+1$ limites de l'intégrale $\int t^{-x-1}\mathrm{T}\,dt$; en multipliant ensuite chaque intégrale, comprise entre une de ces limites et les n autres limites, par une constante arbitraire, la somme de ces produits sera la valeur complète de y_x.

On peut étendre cette méthode aux équations à différences partielles finies et infiniment petites, comme nous le ferons voir dans la seconde partie de ce Livre.

On voit, par ce qui précède, l'analogie qui existe entre les fonctions génératrices des variables et les intégrales définies au moyen desquelles ces variables peuvent être exprimées. Pour la rendre encore plus sensible, considérons l'équation

$$y_x=\int \mathrm{T}\,dt\,t^{-x},$$

T étant une fonction de t, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées. On aura, x variant de α,

$$\Delta y_x=\int \mathrm{T}\,dt\,t^{-x}\left(\frac{1}{t^{\alpha}}-1\right),$$

et, généralement,

$$\Delta^i y_x=\int \mathrm{T}\,dt\,t^{-x}\left(\frac{1}{t^{\alpha}}-1\right)^i;$$

en faisant i négatif, la caractéristique Δ se change dans le signe intégral Σ. Si l'on suppose α infiniment petit et égal à dx, on aura

$$\frac{1}{t^{\alpha}} = 1 + dx \log \frac{1}{t};$$

on aura donc, en observant qu'alors $\Delta^i y_x$ se change dans $d^i y_x$,

$$\frac{d^i y_x}{dx^i} = \int \mathrm{T}\, dt\, t^{-x} \left(\log \frac{1}{t}\right)^i.$$

On trouvera de la même manière, et en adoptant les dénominations du nº 2,

$$\nabla^i y_x \int \mathrm{T}\, dt\, t^{-x} \left(a + \frac{b}{t} + \ldots + \frac{q}{t^n}\right)^i.$$

Ainsi la même analyse, qui donne les fonctions génératrices des dérivées successives des variables, donne les fonctions, sous le signe $\int$, des intégrales définies qui expriment ces dérivées. La caractéristique ∇^i n'exprime, à proprement parler, qu'un nombre i d'opérations consécutives : la considération des fonctions génératrices réduit ces opérations à des élévations d'un polynôme à ses diverses puissances, et la considération des intégrales définies donne directement l'expression de $\nabla^i y_x$, dans le cas même où l'on supposerait i un nombre fractionnaire.

Mais le grand avantage de cette transformation des expressions analytiques en intégrales définies est de fournir une approximation aussi commode que convergente de ces expressions, lorsqu'elles sont formées d'un grand nombre de termes et de facteurs ; c'est ce qui a lieu dans la théorie des probabilités, quand le nombre des événements que l'on considère est très grand. Alors le calcul numérique des résultats auxquels on est conduit par la solution des problèmes devient impraticable, et il est indispensable d'avoir pour ce calcul une méthode d'approximation d'autant plus convergente que ces résultats sont plus compliqués.

Leur expression en intégrales définies procure cet avantage, et celui de donner les lois suivant lesquelles la probabilité des résultats indiqués par les événements approche de la certitude à mesure que les événements se multiplient, lois dont la connaissance est l'un des objets les plus intéressants de la théorie des probabilités. Ce fut à l'occasion d'un problème de ce genre, dont la solution dépendait de l'expression du terme moyen du binôme élevé à une grande puissance, que Stirling transforma cette expression dans une série très convergente; son résultat peut être regardé comme une des choses les plus ingénieuses que l'on ait trouvées sur les suites. Il est surtout remarquable en ce que, dans une recherche qui semble n'admettre que des quantités algébriques, il introduit une quantité transcendante, savoir la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre. Mais la méthode de Stirling, fondée sur un théorème de Wallis et sur l'interpolation des suites, laissait à désirer une méthode directe qui s'étendît à toutes les fonctions composées d'un grand nombre de termes et de facteurs. Telle est la méthode dont je viens de parler, et que j'ai donnée d'abord dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1778 et ensuite, avec plus d'étendue, dans les Mémoires de la même Académie pour l'année 1782. Le développement de cette méthode va être l'objet de la seconde Partie de ce Livre, et complétera ainsi le Calcul des fonctions génératrices.

Les séries auxquelles cette méthode conduit renferment le plus souvent la racine carrée du rapport de la circonférence au diamètre, et c'est la raison pour laquelle Stirling l'a rencontrée dans le cas particulier qu'il a considéré; mais quelquefois elles dépendent d'autres transcendantes dont le nombre est infini.

Les limites des intégrales définies que cette méthode réduit en séries convergentes sont, comme on vient de le voir, données par les racines d'une équation que l'on peut nommer *équation des limites*. Mais une remarque très importante dans cette analyse, et qui permet de l'étendre aux fonctions que la Théorie des Probabilités présente le plus souvent, est que les séries auxquelles on parvient ont également lieu dans le cas même où, par des changements de signe dans les coefficients de l'équation des limites, ses racines deviennent imaginaires. Ces passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, dont les premières applications ont paru, si je ne me trompe, dans les Mémoires cités, m'ont conduit, dans ces Mémoires, aux valeurs de plusieurs intégrales définies, qui offrent cela de remarquable, savoir qu'elles dépendent à la fois de ces deux transcendantes, le rapport de la circonférence au diamètre et le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On peut donc considérer ces passages comme des moyens de découvertes, pareils à l'induction dont les géomètres font depuis longtemps usage. Mais ces moyens, quoique employés avec beaucoup de précautions et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats. Leur rapprochement des méthodes directes servant à les confirmer et à faire voir la grande généralité de l'analyse, et pouvant par cette raison intéresser les géomètres, j'ai insisté particulièrement sur ces passages qu'Euler considérait en même temps que moi, et dont il a fait plusieurs applications curieuses, mais qui n'ont paru que depuis la publication des Mémoires cités.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DES APPROXIMATIONS DES FORMULES QUI SONT FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'INTÉGRATION PAR APPROXIMATION DES DIFFÉRENTIELLES QUI RENFERMENT DES FACTEURS ÉLEVÉS A DE GRANDES PUISSANCES.

22. On vient de voir que l'on peut toujours ramener à l'intégration de semblables différentielles les formules données par la théorie des fonctions génératrices. Nous allons donc nous occuper d'abord avec étendue de l'approximation de ce genre d'intégrales.

Si l'on désigne par u, u', u'', ... et φ des fonctions quelconques de x, et par s, s', s'', ... de très grands nombres, toute fonction différentielle qui renferme des fonctions élevées à de grandes puissances sera comprise dans le terme $\varphi\, dx\, u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots$. Pour avoir en série convergente son intégrale prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \theta$, on fera

$$\varphi u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots = y,$$

et en désignant par Y ce que devient y lorsqu'on y change x en θ, on supposera

$$y = \mathrm{Y} c^{-t},$$

c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On aura ainsi

$$t = \log \frac{\mathrm{Y}}{y}.$$

Si l'on considère x comme une fonction de t donnée par cette équation, on aura, en supposant dt constant,

$$x = \theta + t\frac{dx}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^3x}{dt^3} + \ldots,$$

t devant être supposé nul après les différentiations, dans les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$ On a généralement

$$\frac{d^nx}{dt^n} = \frac{1}{dt}d\cdot\frac{1}{dt}d\cdot\frac{1}{dt}\ldots d\cdot\frac{dx}{dt},$$

la caractéristique différentielle se rapportant à tout ce qui la suit, et dt pouvant varier d'une manière quelconque dans le second membre de cette équation; de plus, si l'on différentie l'expression précédente de t en y, et si l'on désigne $-\frac{y\,dx}{dy}$ par υ, on aura $dt = \frac{dx}{\upsilon}$; on aura donc

$$\frac{d^nx}{dt^n} = \frac{\upsilon\, d\,\upsilon\, d\upsilon \ldots d\upsilon}{dx^{n-1}},$$

dx étant supposé constant dans le second membre de cette équation. Ainsi, en nommant U ce que devient υ lorsqu'on y change x en θ, la valeur de $\frac{d^nx}{dt^n}$ qui répond à $x = \theta$, ou, ce qui revient au même, à $t = 0$, sera égale à

$$\frac{\mathrm{U}\, d\,\mathrm{U}\, d\mathrm{U} \ldots d\mathrm{U}}{d\theta^{n-1}};$$

on aura donc

$$x = \theta + \mathrm{U}t + \frac{\mathrm{U}\, d\mathrm{U}}{1.2.d\theta}t^2 + \frac{\mathrm{U}\, d\,\mathrm{U}\, d\mathrm{U}}{1.2.3.d\theta^2}t^3 + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$dx = \mathrm{U}\,dt\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}t + \frac{d\,\mathrm{U}\, d\mathrm{U}}{1.2.d\theta^2}t^2 + \ldots\right);$$

par conséquent

$$\int y\,dx = \mathrm{UY}\int dt\, c^{-t}\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}t + \frac{d\,\mathrm{U}\, d\mathrm{U}}{1.2.d\theta^2}t^2 + \ldots\right).$$

Si l'on prend l'intégrale depuis $t = 0$ jusqu'à t infini, on aura généralement

$$\int t^n dt\, c^{-t} = 1.2.3\ldots n;$$

partant

$$\int y\,dx = \mathrm{UY}\left(1 + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta} + \frac{d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{d\theta^2} + \frac{d.\mathrm{U}\,d\,\mathrm{U}d\mathrm{U}}{d\theta^3} + \ldots\right),$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini.

Nommons Y′ et U′ ce que deviennent y et υ lorsqu'on y change x en θ'; on aura pareillement

$$\int y\,dx = \mathrm{U'Y'}\left(1 + \frac{d\mathrm{U'}}{d\theta'} + \frac{d\,\mathrm{U'}d\mathrm{U'}}{d\theta'^2} + \frac{d.\mathrm{U'}\,d\,\mathrm{U'}d\mathrm{U'}}{d\theta'^3} + \ldots\right),$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x = \theta'$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. En retranchant donc ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \int y\,dx = \mathrm{UY}\left(1 + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\theta} + \dfrac{d\,\mathrm{U}\,d\mathrm{U}}{d\theta^2} + \dfrac{d.\mathrm{U}\,d\,\mathrm{U}d\mathrm{U}}{d\theta^3} + \ldots\right) \\ \qquad - \mathrm{U'Y'}\left(1 + \dfrac{d\mathrm{U'}}{d\theta'} + \dfrac{d\,\mathrm{U'}d\mathrm{U'}}{d\theta'^2} + \dfrac{d.\mathrm{U'}\,d\,\mathrm{U'}d\mathrm{U'}}{d\theta'^3} + \ldots\right), \end{cases}$$

l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à $x = \theta'$, en sorte que la considération de t disparait dans cette formule. Si θ et θ' étaient primitivement renfermés dans y, il ne faudrait faire varier que les quantités θ et θ' qu'introduisent dans U et U′, les changements de x en θ et θ' dans la fonction υ.

La formule (A) sera très convergente, si υ ou $-\dfrac{y\,dx}{dy}$ est une très petite quantité; or y étant, par la supposition, égal à $\varphi u^s u'^{s'} u''^{s''}, \ldots,$ on a

$$\upsilon = -\frac{1}{\dfrac{s\,du}{u\,dx} + \dfrac{s'\,du'}{u'\,dx'} + \dfrac{s''\,du''}{u''\,dx} + \ldots + \dfrac{1}{\varphi}\dfrac{d\varphi}{dx}}.$$

Ainsi, dans le cas où $s, s', s'', \ldots$ sont de très grands nombres, υ sera fort petit, et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α étant une fraction très petite, la fonction υ sera de l'ordre α, et les termes successifs de la formule (A) seront respectivement des ordres α, α^2, α^3, ...

Cette formule cesserait d'être convergente, si la supposition de $x = \theta$ rendait très petit le dénominateur de l'expression de υ. Supposons, par exemple, que $(x-a)^\mu$ soit un facteur de ce dénominateur; il est clair que les termes successifs de la formule (A) sont respectivement divisés par $(\theta - a)^\mu$, $(\theta - a)^{2\mu+1}$, $(\theta - a)^{3\mu+2}$, ..., et deviendront très considérables, si θ est peu différent de a; la convergence de cette formule exige donc que $(\theta - a)^\mu$, $(\theta' - a)^\mu$ soient plus grands que α; elle ne peut conséquemment être employée dans l'intervalle où $(x-a)^\mu$ est égal ou moindre que α; mais, dans ce cas, on pourra faire usage de la méthode suivante.

23. Si l'on nomme Y ce que devient y lorsqu'on y change x en a, il est visible que $(x-a)^\mu$ étant un facteur de $-\dfrac{dy}{y\,dx}$, ou, ce qui revient au même, de $\dfrac{d\log\frac{Y}{y}}{dx}$, $(x-a)^{\mu+1}$ sera un facteur de $\log\dfrac{Y}{y}$. Soit donc

$$y = \mathrm{Y}c^{-t^{\mu+1}},$$

$$\upsilon = \frac{x-a}{(\log \mathrm{Y} - \log y)^{\frac{1}{\mu+1}}};$$

on aura

$$x = a + \upsilon t,$$

υ ne devenant point infini par la supposition de $x = a$. Si l'on désigne ensuite par U, $\dfrac{d\mathrm{U}^2}{dx}$, $\dfrac{d^2\mathrm{U}^3}{dx^2}$, ... ce que deviennent υ, $\dfrac{d\upsilon^2}{dx}$, $\dfrac{d^2\upsilon^3}{dx^2}$, ..., lorsqu'on y change x en a après les différentiations, on aura, par la formule (p) du n° **21** du Livre II de la *Mécanique céleste*,

$$x = a + \mathrm{U}t + \frac{d\mathrm{U}^2}{1.2.dx}t^2 + \frac{d^2\mathrm{U}^3}{1.2.3\,dx^2}t^3 + \ldots,$$

ce qui donne

$$\text{(B)} \qquad \int y\,dx = \mathrm{Y}\int dt\,c^{-t^{\mu+1}}\left(\mathrm{U} + \frac{d\mathrm{U}^2}{dx}t + \frac{d^2\mathrm{U}^3}{1.2.dx^2}t^2 + \ldots\right);$$

cette formule pourra être employée dans tout l'intervalle où x diffère très peu de a; elle peut conséquemment servir de supplément à la formule (A) du numéro précédent; mais, au lieu d'être ordonnée, comme elle, par rapport aux puissances de α, elle ne l'est que par rapport aux puissances de $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$; car il est visible que, dans ce dernier cas, υ n'est que de l'ordre $\alpha^{\frac{1}{\mu+1}}$.

Pour déterminer plus facilement les quantités U, $\frac{dU^2}{dx}$, ..., supposons

$$\log Y - \log y = (x - a)^{\mu+1}[A + B(x - a) + C(x - a)^2 + \ldots].$$

Nous aurons, en changeant x en a après les différentiations,

$$A = -\frac{d^{\mu+1}\log y}{1.2.3\ldots(\mu+1)\,dx^{\mu+1}},$$

$$B = -\frac{d^{\mu+2}\log y}{1.2.3\ldots(\mu+2)\,dx^{\mu+2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous aurons ensuite, quel que soit r,

$$\upsilon^r = [A + B(x - a) + C(x - a)^2 + \ldots]^{-\frac{r}{\mu+1}},$$

d'où il est facile de conclure, en développant cette expression de υ^r et nommant $Q(x - a)^{r-1}$ le terme de ce développement qui a pour facteur $(x - a)^{r-1}$,

$$\frac{d^{r-1}U^r}{1.2.3\ldots(r-1)\,dx^{r-1}} = Q.$$

La formule (B) ne présente plus ainsi d'autres difficultés que celles qui résultent de l'intégration des quantités de la forme $\int t^n\,dt\,c^{-t^{\mu+1}}$, et l'on a généralement

$$\int t^n\,dt\,c^{-t^{\mu+1}} = -\frac{c^{-t^{\mu+1}}}{\mu+1}\left\{\begin{array}{l} t^{n-\mu} + \dfrac{n-\mu}{\mu+1}t^{n-2\mu-1} + \dfrac{(n-\mu)(n-2\mu-1)}{(\mu+1)^2}t^{n-3\mu-2} + \ldots \\ \quad + \dfrac{(n-\mu)(n-2\mu-1)\ldots(n-r\mu+\mu-r+2)}{(\mu+1)^{r-1}}t^{n-r\mu-r+1} \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{(n-\mu)(n-2\mu-1)\ldots(n-r\mu-r+1)}{(\mu+1)^r}\int t^{n-r\mu-r}\,dt\,c^{-t^{\mu+1}},$$

r étant égal au quotient de la division de n par $\mu + 1$, si la division est possible, ou au nombre immédiatement inférieur, si elle ne l'est pas.

La détermination de l'intégrale $\int y\,dx$ dépend donc des intégrales de cette forme

$$\int dt\,c^{-t^{\mu+1}},\quad \int t\,dt\,c^{-t^{\mu+1}},\quad \ldots,\quad \int t^{\mu-1}\,dt\,c^{-t^{\mu+1}}.$$

Il n'est pas possible d'obtenir exactement ces intégrales par les méthodes connues, mais il sera facile dans tous les cas d'avoir leurs valeurs approchées.

24. Nous aurons principalement besoin, dans la suite, de la valeur de $\int y\,dx$, prise pour tout l'intervalle compris entre deux valeurs consécutives de x qui rendent y nul; nous allons conséquemment exposer les simplifications dont cette valeur est alors susceptible. La variable y ayant été supposée, dans le numéro précédent, égale à $Yc^{-t^{\mu+1}}$, il est visible que les deux valeurs de x qui rendent y nul rendent également nulle la quantité $c^{-t^{\mu+1}}$, ce qui exige que $\mu+1$ soit un nombre pair, et que l'une des valeurs de x réponde à $t=-\infty$ et l'autre à $t=\infty$; Y est donc alors le maximum de y compris entre ces valeurs. Soit $\mu+1=2i$; si l'on prend l'intégrale $\int t^{2n+1}\,dt\,c^{-t^{2i}}$ depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$, sa valeur sera nulle; car il est clair que les éléments de cette intégrale qui répondent aux valeurs négatives de t sont égaux et de signe contraire à ceux qui répondent aux mêmes valeurs prises positivement. L'intégrale $\int t^{2n}\,dt\,c^{-t^{2i}}$ est égale à $2\int t^{2n}\,dt\,c^{-t^{2i}}$, cette dernière intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini, et dans ce cas, on a, par le numéro précédent,

$$\int t^{2n}\,dt\,c^{-t^{2i}}=\frac{(2n-2i+1)(2n-4i+1)\ldots(2n-2ri+1)}{(2i)^r}\int t^{2n-2r}\,dt\,c^{-t^{2i}},$$

r étant égal au nombre entier du quotient de la division de n par i. Soit donc, en prenant les intégrales depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\begin{aligned}
k&=\int dt\,c^{-t^{2i}},\\
k^{(1)}&=\int t^2\,dt\,c^{-t^{2i}},\\
k^{(2)}&=\int t^4\,dt\,c^{-t^{2i}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
k^{(i-1)}&=\int t^{2i-2}\,dt\,c^{-t^{2i}};
\end{aligned}$$

la formule (B) du numéro précédent deviendra

$$\int y\,dx = 2k\quad Y\left\{ U + \frac{1}{2i}\,\frac{d^{2i}U^{2i+1}}{1.2.3\ldots 2i\,dx^{2i}} + \frac{2i+1}{4i^2}\,\frac{d^{4i}U^{4i+1}}{1.2.3\ldots 4i\,dx^{4i}} + \ldots \right\}$$

$$+ 2k^{(1)}\ Y\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2U^3}{1.2.dx^2} + \frac{3}{2i}\,\frac{d^{2i+2}U^{2i+2}}{1.2.3\ldots(2i+2)\,dx^{2i+3}} \\ &\quad + \frac{3(2i+3)}{4i^2}\,\frac{d^{4i+2}U^{4i+3}}{1.2.3\ldots(4i+2)\,dx^{4i+2}} + \ldots \end{aligned} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ 2k^{(i-1)}Y\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{2i-2}U^{2i-1}}{1.2.3(2i-2)\,dx^{2i-2}} + \frac{2i-1}{2i}\,\frac{d^{4i-2}U^{4i-1}}{1.2.3\ldots(4i-2)\,dx^{4i-2}} \\ &\quad + \frac{(2i-1)(4i-1)}{4i^2}\,\frac{d^{6i-2}U^{6i-1}}{1.2.3\ldots(6i-2)\,dx^{6i-2}} + \ldots \end{aligned} \right\}.$$

Cette formule est la somme d'un nombre i de suites différentes, décroissantes comme les puissances de α, puisque U est de l'ordre $\alpha^{\frac{1}{2i}}$, et multipliées respectivement par les transcendantes $k, k^{(1)}, \ldots$, qu'il est, par conséquent, important de connaître; mais il suffit pour cela d'en connaître un nombre égal au plus grand nombre entier compris dans $\frac{i}{2}$.

Considérons pour cela la double intégrale

$$\iint ds\,dx\,c^{-s(1+x^n)},$$

les intégrales étant prises depuis s et x nuls jusqu'à leurs valeurs infinies. En l'intégrant d'abord par rapport à s, elle se réduit à

$$\int \frac{dx}{1+x^n};$$

mais cette dernière intégrale est $\dfrac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$, n étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire; on a donc

$$\iint ds\,dx\,c^{-s(1+x^n)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Intégrons maintenant cette double intégrale, d'abord par rapport à x.

En faisant $sx^n = t^n$, elle devient

$$\int \frac{ds\, c^{-s}}{s^{\frac{1}{n}}} \int dt\, c^{-t^n},$$

et si l'on fait $s = t^n$, on aura

$$n \int dt\, c^{-t^n} \int t^{n-2}\, dt\, c^{-t^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}},$$

les intégrales étant prises depuis t nul jusqu'à t infini. Si l'on change n en $\frac{n}{r-1}$, cette équation devient

$$n^2 \int dt\, c^{-t^{\frac{n}{r-1}}} \int t^{\frac{n}{r-1}-2}\, dt\, c^{-t^{\frac{n}{r-1}}} = \frac{(r-1)^2 \pi}{\sin \frac{r-1}{n}\pi},$$

et si dans cette nouvelle équation on change t en t^{r-1}, on aura

$$\text{(T)} \qquad n^2 \int t^{r-2}\, dt\, c^{-t^n} \int t^{n-r}\, dt\, c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin \frac{r-1}{n}\pi}.$$

On aura, au moyen de cette formule, en y faisant $n = 2i$, toutes les valeurs de k, $k^{(1)}$, $\ldots$, $k^{(i-1)}$, lorsque l'on en connaîtra la moitié, si i est pair, ou la moitié moins un demi, si i est impair.

En faisant $n = 2$ et $r = 2$, cette formule donne ce résultat remarquable

$$\int dt\, c^{-t^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

25. On peut, en vertu de la généralité de l'analyse, étendre les résultats précédents au cas où t est imaginaire. Considérons l'intégrale $\int dx \cos rx\, c^{-a^2x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini. On peut la mettre sous cette forme

$$\tfrac{1}{2}\int dx\, c^{-a^2x^2 + rx\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}\int dx\, c^{-a^2x^2 - rx\sqrt{-1}}.$$

L'intégrale $\int dx\, c^{-a^2x^2 + rx\sqrt{-1}}$ est égale à

$$c^{-\frac{r^2}{4a^2}} \int dx\, c^{-\left(ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a}\right)^2}.$$

Si l'on fait

$$t = ax - \frac{r\sqrt{-1}}{2a},$$

elle devient

$$\frac{c^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \int dt\, c^{-t^2};$$

ici l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ jusqu'à t infini, parce que ces deux limites répondent à x nul et à x infini.

En faisant r négatif dans cette formule, on aura l'expression de l'intégrale $\int dx\, c^{-a^2x^2 - rx\sqrt{-1}}$; mais, dans ce cas, les limites de l'intégrale relative à t sont $t = \frac{r\sqrt{-1}}{2a}$ et t infini; la réunion de ces deux intégrales est donc égale à

$$\frac{c^{-\frac{r^2}{4a^2}}}{a} \int dt\, c^{-t^2},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$; car la première intégrale ajoute à la seconde ce qui lui manque pour former la moitié de l'intégrale prise entre les deux limites infinies; or cette dernière intégrale est $\frac{c^{-\frac{r^2}{4a^2}}\sqrt{\pi}}{a}$; on a donc

$$\int dx \cos rx . c^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

L'analyse qui vient de nous conduire à ce résultat est fondée sur le passage du réel à l'imaginaire; car on y traite les intégrales relatives à t et prises entre deux limites, dont une est imaginaire et l'autre est infinie, comme si ces limites étaient toutes réelles. Mais on peut parvenir à ce résultat de la manière suivante.

Nommons y l'intégrale $\int dx \cos rx . c^{-a^2x^2}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini; on aura

$$\frac{dy}{dr} = -\int x\, dx \sin rx . c^{-a^2x^2} = \frac{1}{2a^2} \sin rx . c^{-a^2x^2} - \frac{r}{2a^2} \int dx \cos rx . c^{-a^2x^2};$$

on aura donc, en prenant l'intégrale depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2}y = 0.$$

L'intégrale de cette équation est

$$y = Bc^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

B étant une constante arbitraire que l'on déterminera en observant que, r étant nul, on a

$$y = B = \int dx\, c^{-a^2x^2}.$$

Cette dernière intégrale est, par le numéro précédent, $\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; donc $B = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$; par conséquent

$$\int dx \cos rx . c^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} c^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

ce qui est conforme au résultat trouvé ci-dessus par le passage du réel à l'imaginaire.

En différentiant $2n$ fois par rapport à r, on aura

$$\int x^{2n}\, dx \cos rx\, c^{-a^2x^2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{d^{2n}}{dr^{2n}} c^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

le signe + ayant lieu si n est pair, et le signe − si n est impair. Cette dernière équation, différentiée par rapport à r, donne

$$\int x^{2n+1}\, dx \sin rx . c^{-a^2x^2} = \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{d^{2n+1}}{dr^{2n+1}} c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

En intégrant une fois par rapport à r l'expression de $\int dx \cos rx . c^{-a^2x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx \sin rx}{x} c^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int dr\, c^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Lorsque a est nul, $\frac{r}{a}$ devient infini, et l'intégrale $\int \frac{dr}{2a} c^{-\frac{r^2}{4a^2}}$, prise depuis r nul, devient $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; donc

$$\int \frac{dx \sin rx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

26. On peut de là conclure les valeurs de quelques intégrales définies singulières auxquelles j'ai été conduit, comme on le verra dans la suite, par le passage du réel à l'imaginaire.

Considérons la double intégrale

$$\iint 2\,dx\,y\,dy\,c^{-y^2(1+x^2)}\cos rx,$$

les intégrales étant prises depuis x et y nuls jusqu'à x et y infinis. En l'intégrant d'abord par rapport à y, elle devient

$$\int\frac{dx\cos rx}{1+x^2}.$$

Intégrons-la maintenant par rapport à x. On a, par le numéro précédent,

$$\int dx\cos rx\,c^{-y^2x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2y}c^{-\frac{r^2}{4y^2}},$$

ce qui donne

$$\iint 2y\,dy\,dx\cos rx\,.\,c^{-y^2(1+x^2)}=\sqrt{\pi}\int dy\,c^{-y^2-\frac{r^2}{4y^2}}.$$

Il s'agit maintenant d'avoir cette dernière intégrale, prise depuis y nul jusqu'à y infini.

Pour cela, donnons-lui cette forme

$$c^r\int dy\,c^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2};$$

r étant supposé positif, la quantité $\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2$ a un minimum qui répond à $y=\sqrt{\frac{r}{2}}$, ce qui donne $2r$ pour ce minimum; soit donc

$$y=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\sqrt{z^2+2r};$$

y devant s'étendre depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, z doit s'étendre depuis $z=-\infty$ jusqu'à $z=\infty$. Cette valeur de y donne

$$dy=\tfrac{1}{2}dz+\tfrac{1}{2}\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+2r}}.$$

En prenant les intégrales depuis $z = -\infty$ jusqu'à $z = \infty$, on a

$$\int dz\, c^{-z^2} = \sqrt{\pi}, \quad \int \frac{z\, dz\, c^{-z^2}}{\sqrt{z^2 + 2r}} = 0;$$

on a donc

$$\int dy\, c^{-\left(\frac{2y^2+r}{2y}\right)^2} = \int dy\, c^{-z^2-2r} = c^{-2r} \int \tfrac{1}{2}\, dz\, c^{-z^2} = \frac{c^{-2r}\sqrt{\pi}}{2};$$

partant

$$\int dy\, c^{-y^2 - \frac{r^2}{4y^2}} = \frac{c^{-r}\sqrt{\pi}}{2}.$$

On aura généralement, par la même analyse, l'intégrale

$$\int y^{\pm 2n}\, dy\, c^{-y^2 - \frac{r^2}{4y^2}},$$

prise depuis y nul jusqu'à y infini, et par conséquent aussi, dans les mêmes limites, l'intégrale

$$\int x^{\pm \frac{n}{2}}\, dx\, c^{-ax - \frac{b}{x}},$$

a et b étant positifs et n étant impair. Cela posé, on aura

$$\int\int 2y\, dy\, dx \cos rx \,.\, c^{-y^2(1+x^2)} = \frac{\pi}{2c^r};$$

on a donc

$$\int \frac{dx \cos rx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2c^r}.$$

En différentiant par rapport à r, on a

$$\int \frac{x\, dx \sin rx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2c^r};$$

de là il est facile de conclure la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{(a + bx)\, dx \cos rx}{m + 2nx + x^2},$$

prise depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, le dénominateur n'ayant point de facteurs réels en x du premier degré. Si l'on fait

$$x = -n + x' \sqrt{m - n^2},$$

cette intégrale devient, en supposant $\dfrac{a-bn}{\sqrt{m-n^2}}=a'$,

$$\int\frac{(a'+bx')\,dx'\left[\cos(rx'\sqrt{m-n^2})\cos rn+\sin(rx'\sqrt{m-n^2})\sin rn\right]}{1+x'^2}.$$

Cette intégrale doit être prise comme celle relative à x, depuis $x'=-\infty$ jusqu'à $x'=\infty$; or l'intégrale $\displaystyle\int\frac{x'\,dx'\cos(rx'\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2}$, prise dans ces limites, est nulle, parce que ses éléments négatifs détruisent ses éléments positifs correspondants ; il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int\frac{dx'\sin(rx'\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2}$; la fonction intégrale précédente se réduit donc à

$$\int\frac{\left[a'\cos rn\cos(rx'\sqrt{m-n^2})+b\sin rn\sin(rx'\sqrt{m-n^2})x'\right]dx'}{1+x'^2}.$$

On a, par ce qui précède,

$$\int\frac{dx'\cos(rx'\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2}=\pi c^{-r\sqrt{m-n^2}}.$$

En différentiant cette expression par rapport à r, on a

$$\int\frac{x'\,dx'\sin(rx'\sqrt{m-n^2})}{1+x'^2}=\pi c^{-r\sqrt{m-n^2}};$$

on a donc

$$\int\frac{(a+bx)\,dx\cos rx}{m+2nx+x^2}=(a'\cos rn+b\sin rn)\pi c^{-r\sqrt{m-n^2}}.$$

On trouvera, par la même analyse,

$$\int\frac{(a+bx)\,dx\sin rx}{m+2nx+x^2}=(b\cos rn-a'\sin rn)\pi c^{-r\sqrt{m-n^2}}.$$

Si l'on différentie la première de ces deux équations $i-1$ fois par rapport à m et ensuite $2s$ fois par rapport à r, on aura l'expression de l'intégrale

$$(i)\qquad\int\frac{x^{2s}\,dx(a+bx)\cos rx}{(m+2nx+x^2)^i}.$$

Maintenant, M et N étant des fonctions rationnelles et entières de x, le degré de la première étant supposé plus petit que celui de la seconde, et N étant supposé n'avoir aucun facteur réel du premier degré, on pourra, comme on sait, décomposer l'intégrale $\int \frac{M}{N} dx \cos rx$ en différents termes de la forme (i); on aura donc généralement l'expression de cette intégrale définie.

On aura de la même manière la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{M}{N} dx \sin rx.$$

27. Reprenons maintenant la formule (B) du n° **23**. Le cas de $\mu + 1 = 2$ étant le plus ordinaire, nous allons exposer ici les formules qui y sont relatives. La formule (B) devient, dans ce cas,

$$(b) \quad \int y\,dx = Y \int dt\, c^{-t^2} \left(U + t \frac{dU^2}{dx} + \frac{t^2}{1.2} \frac{d^2 U^3}{dx^2} + \frac{t^3}{1.2.3} \frac{d^3 U^4}{dx^3} + \ldots \right);$$

ici l'on a

$$t = \sqrt{\log Y - \log y}, \qquad \upsilon = \frac{x - a}{\sqrt{\log Y - \log y}},$$

Y étant le maximum de y, et a étant la valeur de x qui correspond à ce maximum; U, $\frac{dU}{dx}$, $\cdots$ sont ce que deviennent υ, $\frac{d\upsilon}{dx}$, lorsqu'on y change x en a. Cette formule donne, en l'intégrant depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$,

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} \int y\,dx = Y &\left[U + \frac{1}{2} \frac{d^2 U^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2} \frac{d^4 U^5}{1.2.3.4.dx^4} + \ldots \right] \int dt\, c^{-t^2} \\ &+ \frac{Y}{2} c^{-T^2} \left[\frac{dU^2}{dx} + \frac{T d^2 U^3}{1.2.dx^2} + \frac{(T^2+1) d^3 U^4}{1.2.3.dx^3} + \ldots \right] \\ &- \frac{Y}{2} c^{-T'^2} \left[\frac{dU^2}{dx} + \frac{T' d^2 U^3}{1.2\,dx^2} + \frac{(T'^2+1) d^3 U^4}{1.2.3.dx^3} + \ldots \right], \end{aligned} \right.$$

l'intégrale $\int dt\, c^{-t^2}$ étant prise depuis $t = T$ jusqu'à $t = T'$, et l'intégrale $\int y\,dx$ étant prise depuis la valeur de x qui convient à $t = T$ jusqu'à celle qui convient à $t = T'$.

Si l'on suppose $T = -\infty$ et $T' = \infty$, on aura généralement

$$T^n c^{-T^2} = 0, \qquad T'^n c^{-T'^2} = 0.$$

On a d'ailleurs par le n° 24 $\int dt\, c^{-t^2} = \sqrt{\pi}$; la formule précédente devient ainsi

$$(d) \qquad \int y\, dx = \mathrm{Y}\sqrt{\pi}\left(\mathrm{U} + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\mathrm{U}^3}{1.2.dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\,\frac{d^4\mathrm{U}^5}{1.2.3.4.dx^4} + \ldots\right),$$

l'intégrale $\int y\, dx$ étant prise entre les valeurs de x qui rendent y nul, et Y étant le maximum de y, compris entre ces valeurs. Les différents termes de cette formule se détermineront facilement par le n° 23, et l'on aura

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\sqrt{-\dfrac{d^2 \log y}{2\, dx^2}}},$$

x devant être changé en a, après les différentiations. On a

$$d^2 \log y = \frac{d^2 y}{y} - \frac{dy^2}{y^2};$$

la supposition de $x = a$ fait disparaître dy; on aura donc

$$\frac{d^2 \log y}{dx^2} = \frac{d^2\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}\, dx^2},$$

Y et $\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}$ étant ce que deviennent y et $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, lorsqu'on y change x en a. Ainsi, en ne considérant dans la formule (d) que le premier terme de la série, on aura à très peu près

$$\int y\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Y}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\dfrac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}}}.$$

Cette expression de $\int y\, dx$ sera d'autant plus approchée que les facteurs de y seront élevés à de plus hautes puissances.

La formule (c) renferme l'intégrale indéfinie $\int dt\, c^{-t^2}$ prise depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à $t = \mathrm{T}'$, ce qui revient à la prendre depuis $t = 0$ jusqu'aux limites T et T′, et à retrancher la première intégrale de la seconde. Il n'est pas possible d'obtenir en termes finis l'intégrale prise depuis t nul; mais on l'obtiendra d'une manière fort approchée, si T est peu considérable, par la série suivante :

$$\int dt\, c^{-t^2} = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{T^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{T^9}{9} - \ldots.$$

Cette série a l'avantage d'être alternativement plus petite ou plus grande que l'intégrale, suivant que l'on s'arrête à un terme positif ou négatif. Ce genre de séries, que l'on peut nommer *séries-limites*, a ainsi l'avantage de faire connaître les limites des erreurs des approximations. On a encore

$$\int dt\, c^{-t^2} = T c^{-T^2}\left[1 + \frac{2T^2}{1.3} + \frac{(2T^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2T^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right].$$

Ces deux séries finissent toujours par être convergentes, quelle que soit la valeur de T; mais leur convergence ne commence qu'à des termes éloignés du premier, si $2T^2$ a une valeur considérable; il convient donc de ne les employer que pour des valeurs égales ou moindres que quatre. Pour de plus grandes valeurs, on pourra faire usage de la série suivante, qui donne la valeur de l'intégrale $\int dt\, c^{-t^2}$ depuis $t = T$ jusqu'à t infini,

$$\int dt\, c^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \ldots\right).$$

Cette série est encore une série-limite. En la retranchant de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, valeur de l'intégrale $\int dt c^{-t^2}$ prise depuis t nul jusqu'à t infini, on aura la valeur de l'intégrale prise depuis t nul jusqu'à $t = T$. Mais la série a l'inconvénient de finir par être divergente : on obvie à cet inconvénient, en la transformant en fraction continue, comme je l'ai fait dans le Livre X de la *Mécanique céleste*, où j'ai trouvé qu'en faisant $q = \frac{1}{2T^2}$, on a, l'intégrale étant prise depuis $t = T$ jusqu'à l'infini,

$$\int dt\, c^{-t^2} = \frac{c^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \cfrac{4q}{1 + \cfrac{5q}{1 + \ldots}}}}}}$$

Pour faire usage de cette expression, il faut réduire la fraction continue

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\ldots}}}$$

en fractions alternativement plus grandes et plus petites que la fraction entière. Les deux premières fractions sont $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1+q}$; les numérateurs des fractions suivantes sont tels que le numérateur de la fraction $i^{\text{ième}}$ est égal au numérateur de la fraction $(i-1)^{\text{ième}}$ plus au numérateur de la fraction $(i-2)^{\text{ième}}$, multiplié par $(i-1)q$; les dénominateurs se forment de la même manière. Ces fractions successives sont

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+q},\quad \frac{1+2q}{1+3q},\quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2},\quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2},\quad \ldots.$$

Lorsque q ou $\frac{1}{2T^2}$ sera égal ou moindre que $\frac{1}{4}$, ces fractions donneront d'une manière prompte et approchée la valeur de la fraction entière.

28. On peut facilement étendre l'analyse précédente aux doubles, triples, etc. intégrales. Pour cela, considérons la double intégrale $\int\int y\,dx\,dx'$, y étant une fonction de x et de x', qui renferme des facteurs élevés à de grandes puissances. Supposons que l'intégrale relative à x' doive être prise depuis une fonction X de x jusqu'à une autre fonction $X'+X$ de la même variable. En faisant $x'=X+tX'$, l'intégrale $\int\int y\,dx\,dx'$ se changera dans celle-ci, $\int\int yX'dx\,dt$, l'intégrale relative à t devant être prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$: on peut donc réduire ainsi l'intégrale $\int\int y\,dx\,dx'$ à des limites constantes et indépendantes des variables qu'elle renferme. Nous supposerons qu'elle a cette forme, et que l'intégrale relative à x est prise depuis $x=\theta$ jusqu'à $x=\varpi$, et que l'intégrale relative à x' est prise depuis $x'=\theta'$ jusqu'à $x'=\varpi'$. Cela posé, en nommant Y ce que devient y lorsqu'on y change x et x' en θ et θ', on fera

$$y=Y\,c^{-t-t'};$$

en supposant ensuite

$$x = \theta + u, \qquad x' = \theta' + u',$$

on réduira $\log \frac{Y}{y}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de u et de u', et l'on aura une équation de cette forme

$$Mu + M'u' = t + t',$$

dans laquelle M est la partie du développement en série de $\log \frac{Y}{y}$, qui renferme tous les termes multipliés par u, et M′ est l'autre partie qui renferme les termes multipliés par u' et qui sont indépendants de u. On partagera l'équation précédente dans les deux suivantes

$$Mu = t, \qquad M'u' = t',$$

d'où l'on tirera celle-ci, par le retour des suites,

$$u = Nt, \qquad u' = N't',$$

N étant une suite ordonnée par rapport aux puissances de t et de t', et N′ étant uniquement ordonnée par rapport aux puissances de t', et étant indépendante de t; ces deux suites sont très convergentes, si y renferme des facteurs très élevés. Maintenant on a $dx\,dx' = du\,du'$; de plus on a

$$du = \frac{\partial.Nt}{\partial t}dt + \frac{\partial.Nt}{\partial t'}dt',$$

$$du' = \frac{\partial.N't'}{\partial t'}dt';$$

mais, dans le produit $du\,du'$, la différentielle du est prise en faisant u' constant, ce qui rend t' constant ou $dt' = 0$; on a donc

$$du = \frac{\partial.Nt}{\partial t}dt;$$

par conséquent

$$du\,du' = \frac{\partial.Nt}{\partial t}\frac{\partial.N't'}{\partial t'}dt\,dt',$$

ce qui donne

$$\int\int y\,dx\,dx' = Y\int\int\frac{\partial.Nt}{\partial t}\frac{\partial.N't'}{\partial t'}dt\,dt'\,c^{-t-t'}.$$

Il est facile d'intégrer les divers termes du second membre de cette équation, puisqu'il ne s'agit que d'intégrer des termes de la forme $\int t^n\,dt\,c^{-t}$.

Si l'on prend l'intégrale relative à t', depuis t' nul jusqu'à t' infini, et que l'on nomme Q le résultat de l'intégration, on aura

$$\int y\,dx' = \mathrm{YQ},$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x' = \theta'$ jusqu'à la valeur de x' qui répond à t' infini. Si l'on change ensuite, dans Y et Q, θ' en ϖ', et que l'on nomme Y′ et Q′ ce que deviennent alors ces quantités, on aura

$$\int y\,dx' = \mathrm{Y'Q'},$$

l'intégrale étant prise depuis $x' = \varpi'$ jusqu'à la valeur de x' qui répond à t' infini.

En nommant R et R′ les intégrales $\int \mathrm{Q}\,dt$ et $\int \mathrm{Q'}\,dt$ prises depuis t nul jusqu'à t infini, on aura

$$\int\int y\,dx\,dx' = \mathrm{YR} - \mathrm{Y'R'},$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis $x' = \theta'$ jusqu'à $x' = \varpi'$, et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \theta$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Si dans Y, R, Y′, R′, on change θ en ϖ, et que l'on nomme Y_1, R_1, Y'_1, R'_1 ce que deviennent alors ces quantités, on aura

$$\int\int y\,dx\,dx' = \mathrm{Y}_1\mathrm{R}_1 - \mathrm{Y}'_1\mathrm{R}'_1,$$

l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ', et l'intégrale relative à x étant prise depuis $x = \varpi$ jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini ; on aura donc

$$\int\int y\,dx\,dx' = \mathrm{YR} - \mathrm{Y'R'} - \mathrm{Y}_1\mathrm{R}_1 + \mathrm{Y}'_1\mathrm{R}'_1,$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites θ et ϖ, et l'intégrale relative à x' étant prise entre les limites θ' et ϖ'.

Cette formule répond à la formule (A) du n° 22, qui n'est relative qu'à une seule variable; elle a, comme elle, l'inconvénient de ne pouvoir s'étendre aux intervalles voisins du maximum de y. Il faut, pour ces intervalles, employer une méthode analogue à celle du n° 23. Ainsi, en supposant que, dans l'intervalle compris entre θ et ϖ, y devienne un maximum relativement à x, en sorte que la condition de ce maximum ne fasse disparaître que la différentielle de y, prise par rapport à x, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, c^{-t^2-t'},$$

Y étant la valeur de y qui convient à ce maximum et à $x' = \theta'$; et si, dans l'intervalle compris entre les limites des intégrations relatives à x et à x', y devient un maximum, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, c^{-t^2-t'^2}.$$

Comme nous aurons besoin principalement, dans la suite, de l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$ prise entre les limites de x et de x' qui rendent y nul, nous allons discuter ce cas.

Considérons l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$, y étant une fonction de x, x', qui renferme des facteurs élevés à de grandes puissances. Si l'on nomme a, a' les valeurs de x, x' qui répondent au maximum de y, et que l'on nomme Y ce maximum, on fera

$$y = \mathrm{Y}\, c^{-t^2-t'^2};$$

en supposant ensuite

$$x = a + \theta, \qquad x' = a' + \theta',$$

on substituera ces valeurs dans la fonction $\log \frac{\mathrm{Y}}{y}$, et, en la développant dans une suite ordonnée par rapport aux puissances et aux produits de θ, θ', on aura une équation de cette forme

$$\mathrm{M}\theta^2 + 2\mathrm{N}\theta\theta' + \mathrm{P}\theta'^2 = t^2 + t'^2.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\mathrm{M}\left(\theta + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\theta'\right)^2 + \left(\mathrm{P} - \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}}\right)\theta'^2 = t^2 + t'^2;$$

on fera donc

$$t = \theta\sqrt{\mathrm{M}} + \frac{\mathrm{N}\theta'}{\sqrt{\mathrm{M}}}, \qquad t' = \theta'\sqrt{\mathrm{P} - \frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{M}}}.$$

En différentiant ces équations, on aura des différentielles de cette forme

$$dt = \mathrm{L}\, d\theta + \mathrm{I}\, d\theta',$$
$$dt' = \mathrm{L}'\, d\theta + \mathrm{I}'\, d\theta'.$$

Maintenant on a

$$\int\!\!\int y\, dx\, dx' = \int\!\!\int y\, d\theta\, d\theta';$$

dans le produit $d\theta\, d\theta'$, $d\theta$ est pris en supposant θ' constant, et alors on a

$$dt = \mathrm{L}\, d\theta;$$

ensuite dt' doit être pris en regardant t constant dans le produit $dt\, dt'$; alors on a

$$\mathrm{o} = \mathrm{L}\, d\theta + \mathrm{I}\, d\theta',$$
$$dt' = \mathrm{L}'\, d\theta + \mathrm{I}'\, d\theta',$$

ce qui donne

$$dt' = \frac{\mathrm{LI}' - \mathrm{L}'\mathrm{I}}{\mathrm{L}}\, d\theta';$$

on a donc

$$dt\, dt' = d\theta\, d\theta'(\mathrm{LI}' - \mathrm{L}'\mathrm{I});$$

par ce moyen, l'intégrale $\int\!\!\int y\, d\theta\, d\theta'$ est transformée dans celle-ci :

$$\mathrm{Y}\int\!\!\int \frac{dt\, dt'\, c^{-t^2 - t'^2}}{\mathrm{LI}' - \mathrm{L}'\mathrm{I}}.$$

Le dénominateur $\mathrm{LI}' - \mathrm{L}'\mathrm{I}$ est une fonction de θ et de θ' que l'on réduira en fonction de t et de t', au moyen des valeurs de t et de t' en θ et θ'. On obtiendra ainsi l'intégrale précédente dans une suite de termes de la forme $\int\!\!\int t^n t'^{n'}\, dt\, dt'\, c^{-t^2 - t'^2}$, les intégrales étant prises depuis t et t' égaux à $-\infty$, jusqu'à leurs valeurs infinies positives. Ces intégrales sont nulles lorsque l'un des deux nombres n et n' est impair, et dans le cas où ils sont tous deux pairs, n étant égal à $2i$, et n' à $2i'$, on a

$$\int\!\!\int t^{2i} t'^{2i'}\, dt\, dt'\, c^{-t^2 - t'^2} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1).1.3.5\ldots(2i'-1)}{2^i.2^{i'}}\,\pi.$$

Si les puissances auxquelles les facteurs de y sont élevés sont très grandes, alors on a, à très peu près,

$$M = -\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}}{2Y}, \qquad 2N = -\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial x'}}{Y}, \qquad P = -\frac{\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2}}{2Y},$$

$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial x'}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2}$ étant ce que deviennent $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial x'}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}$ lorsqu'on y change x et x' en a et a'; l'intégrale $\int\int y\, dx\, dx'$ devient ainsi, à fort peu près,

$$\frac{2\pi Y^2}{\sqrt{\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial x'}\right)^2}}.$$

CHAPITRE II.

DE L'INTÉGRATION PAR APPROXIMATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES ET INFINIMENT PETITES.

29. On a vu, dans le n° **21**, que les intégrales des équations linéaires aux différences entre une variable s, dont la différence est supposée constante, et une fonction y_s de cette variable, peuvent être mises sous la forme $y_s = \int x^s \varphi\, dx$, φ étant une fonction de x de la même nature que la fonction génératrice de l'équation proposée aux différences, et l'intégrale étant prise dans des limites déterminées de x. En supposant s un très grand nombre, on aura, par l'analyse précédente, une valeur très approchée de cette intégrale et par conséquent de y_s. Mais cette méthode d'approximation étant très importante dans la Théorie des Probabilités, nous allons la développer avec étendue.

Considérons l'équation aux différences finies

$$S = Ay_s + B\,\Delta y_s + C\,\Delta^2 y_s + \ldots, \tag{1}$$

A, B, C, ... étant des fonctions rationnelles et entières de s, auxquelles nous donnerons cette forme

$$\begin{aligned}
A &= a + a^{(1)}s + a^{(2)}s(s-1) + a^{(3)}s(s-1)(s-2) + \ldots,\\
B &= b + b^{(1)}s + b^{(2)}s(s-1) + b^{(3)}s(s-1)(s-2) + \ldots,\\
C &= e + e^{(1)}s + e^{(2)}s(s-1) + e^{(3)}s(s-1)(s-2) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

Δy_s est la différence finie de y_s, s étant supposé varier de l'unité; $\Delta^2 y_s$,

$\Delta^3 y_s, \ldots$ sont les seconde, troisième, ... différences de y_s, et S est une fonction de s. Cela posé, représentons y_s par $\int x^s \varphi\, dx$, φ étant une fonction de x qu'il faut déterminer, ainsi que les limites de l'intégrale. En désignant x^s par δy, on aura

$$\Delta y_s = \int \delta y (x-1)\varphi\, dx, \qquad \Delta^2 y_s = \int \delta y (x-1)^2 \varphi\, dx, \qquad \ldots;$$

on aura ensuite

$$s x^s = x \frac{d\delta y}{dx}, \qquad s(s-1)x^s = x^2 \frac{d^2 \delta y}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

l'équation (1) aux différences devient ainsi

$$S = \int \varphi\, dx \left\{ \begin{array}{l} \delta y [a \quad + b \quad (x-1) + e \quad (x-1)^2 + \ldots] \\ + \dfrac{x\, d\delta y}{dx} [a^{(1)} + b^{(1)}(x-1) + e^{(1)}(x-1)^2 + \ldots] \\ + \dfrac{x^2\, d^2\delta y}{dx^2} [a^{(2)} + b^{(2)}(x-1) + e^{(2)}(x-1)^2 + \ldots] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Au lieu de faire y_s égal à $\int x^s \varphi\, dx$, on peut le supposer égal à $\int c^{-sx} \varphi\, dx$; alors on a

$$\Delta y_s = \int c^{-sx}(c^{-x} - 1)\varphi\, dx, \qquad \Delta^2 y_s = \int c^{-sx}(c^{-x}-1)^2 \varphi\, dx, \qquad \ldots.$$

De plus, si l'on désigne c^{-sx} par δy, on aura

$$s c^{-sx} = -\frac{d\delta y}{dx}, \qquad s^2 c^{-sx} = \frac{d^2 \delta y}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

en mettant donc les coefficients de l'équation (1) sous cette forme,

$$\begin{aligned} A &= a + a^{(1)} s + a^{(2)} s^2 + \ldots, \\ B &= b + b^{(1)} s + b^{(2)} s^2 + \ldots, \\ C &= e + e^{(1)} s + e^{(2)} s^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

cette équation prendra la forme

$$S = \int \varphi\, dx \left\{ \begin{array}{l} \delta y\,[a \;\; + b \;\;\; (c^{-x} - 1) + e \;\;\; (c^{-x} - 1)^2 + \ldots] \\ - \dfrac{d\delta y}{dx}\,[a^{(1)} + b^{(1)}(c^{-x} - 1) + e^{(1)}(c^{-x} - 1)^2 + \ldots] \\ + \dfrac{d^2\delta y}{dx^2}\,[a^{(2)} + b^{(2)}(c^{-x} - 1) + e^{(2)}(c^{-x} - 1)^2 + \ldots] \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

En représentant généralement y_s par $\int \delta y \varphi\, dx$, les deux formes que l'équation (1) prend dans les suppositions de $\delta y = x^s$ et de $\delta y = c^{-sx}$ seront comprises dans la suivante

$$S = \int \varphi\, dx \left(M\delta y + N\frac{d\delta y}{dx} + P\frac{d^2\delta y}{dx^2} + Q\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \ldots \right),$$

M, N, P, Q, ... étant des fonctions de x indépendantes de la variable s, qui n'entre dans le second membre de cette équation qu'autant que δy et ses différences en sont fonctions.

Maintenant, pour y satisfaire, on intégrera par parties ses différents termes; or on a

$$\int \frac{d\delta y}{dx} N\varphi\, dx = \delta y N\varphi - \int \delta y \frac{d(N\varphi)}{dx}\, dx,$$

$$\int \frac{d^2\delta y}{dx^2} P\varphi\, dx = \frac{d\delta y}{dx} P\varphi - \delta y \frac{d(P\varphi)}{dx} + \int \delta y \frac{d^2(P\varphi)}{dx^2}\, dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} S = \int \delta y\, dx &\left[M\varphi - \frac{d(N\varphi)}{dx} + \frac{d^2(P\varphi)}{dx^2} - \frac{d^3(Q\varphi)}{dx^3} + \ldots \right] \\ &+ C + \delta y \left[N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2(Q\varphi)}{dx^2} - \ldots \right] \\ &+ \frac{d\delta y}{dx}\left[P\varphi - \frac{d(Q\varphi)}{dx} + \ldots \right] \\ &+ \frac{d^2\delta y}{dx^2}(Q\varphi - \ldots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

C étant une constante arbitraire.

Puisque la fonction φ doit être indépendante de s et par conséquent de δy, on doit égaler séparément à zéro la partie de cette équation affectée du signe $\int$, ce qui partage l'équation précédente dans les deux suivantes :

$$(2)\qquad 0 = M\varphi - \frac{d(N\varphi)}{dx} + \frac{d^2(P\varphi)}{dx^2} - \frac{d^3(Q\varphi)}{dx^3} + \ldots,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} S = C &+ \delta y\left[N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2(Q\varphi)}{dx^2} - \ldots\right] \\ &+ \frac{d\,\delta y}{dx}\left[P\varphi - \frac{d(Q\varphi)}{dx} + \ldots\right] \\ &+ \frac{d^2\,\delta y}{dx^2}(Q\varphi - \ldots) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations sert à déterminer la fonction φ, et la seconde détermine les limites dans lesquelles l'intégrale $\int \delta y\,\varphi\,dx$ est comprise.

On peut observer que l'équation (2) est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que la fonction différentielle

$$\left(M\,\delta y + N\frac{d\,\delta y}{dx} + P\frac{d^2\,\delta y}{dx^2} + \ldots\right)\varphi\,dx$$

soit une différentielle exacte, quel que soit δy; et dans ce cas l'intégrale de cette fonction est égale au second membre de l'équation (3); φ est donc le facteur en x seul qui doit multiplier l'équation

$$0 = M\,\delta y + N\frac{d\,\delta y}{dx} + P\frac{d^2\,\delta y}{dx^2} + \ldots$$

pour la rendre intégrable. Si φ était connu, on pourrait abaisser cette équation d'un degré, et, réciproquement, si cette équation était abaissée d'un degré, le coefficient de δy, dans sa différentielle divisée par $M\,dx$, donnerait une valeur de φ; cette équation et l'équation (2) sont conséquemment liées entre elles, de manière qu'une intégrale de l'une donne une intégrale de l'autre.

La valeur de φ étant supposée connue, on aura celle de y, au moyen d'une intégrale définie. L'intégration de l'équation (1) aux différences finies est donc ainsi ramenée à l'intégration de l'équation (2) aux différences infiniment petites et à une intégrale définie.

Considérons présentement l'équation (3) et faisons d'abord $S = 0$. Si l'on suppose que $\delta y, \frac{d\,\delta y}{dx}, \frac{d^2\,\delta y}{dx^2}, \dots$ deviennent nuls au moyen d'une même valeur de x, que nous désignerons par h, et qui soit indépendante de s, il est clair qu'en supposant C nul, cette valeur satisfera à l'équation (3), et qu'ainsi elle sera une des limites entre lesquelles on doit prendre l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$. La supposition précédente a lieu visiblement dans les deux cas de $\delta y = x^s$ et de $\delta y = c^{-sx}$; dans le premier cas, l'équation $x = 0$, et dans le second cas, l'équation $x = \infty$ rendent nulles les quantités $\delta y, \frac{d\,\delta y}{dx}, \frac{d^2\,\delta y}{dx^2}, \dots$. Pour avoir d'autres limites de l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$, on observera que, ces limites devant être indépendantes de s, il faut, dans l'équation (3), égaler séparément à zéro les coefficients de $\delta y, \frac{d\,\delta y}{dx}, \dots$, ce qui donne les équations suivantes :

$$0 = N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \frac{d^2(Q\varphi)}{dx^2} - \dots,$$

$$0 = P\varphi - \frac{d(Q\varphi)}{dx} + \dots,$$

$$0 = Q\varphi - \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Ces équations sont au nombre de i, si i est l'ordre de l'équation différentielle (2); on pourra donc éliminer, à leur moyen, toutes les constantes arbitraires de la valeur de φ, moins une, et l'on aura une équation finale en x, dont les racines seront autant de limites de l'intégrale $\int \delta y \varphi\, dx$. On cherchera par cette équation un nombre de valeurs différentes de x, égal au degré de l'équation différentielle (1). Soient $q, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots$ ces valeurs; elles donneront autant de valeurs différentes de φ, puisque les constantes arbitraires de φ, moins une, sont déterminées en fonctions de ces valeurs. On pourra ainsi représenter les valeurs de φ correspondantes aux limites q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, ... par $B\lambda$, $B^{(1)}\lambda^{(1)}$, $B^{(2)}\lambda^{(2)}$, ..., B, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, ... étant des constantes arbitraires, et l'on aura, pour la valeur complète de y_s,

$$y_s = B\int \delta y\,\lambda\,dx + B^{(1)}\int \delta y\,\lambda^{(1)}\,dx + B^{(2)}\int \delta y\,\lambda^{(2)}\,dx + \ldots,$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q$, celle du second terme étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = q^{(1)}$, et ainsi du reste. On déterminera les constantes B, $B^{(1)}$, ... au moyen d'autant de valeurs particulières de y_s.

Supposons maintenant que, dans l'équation (3), S ne soit pas nul. Si l'on prend l'intégrale $\int \delta y\,\varphi\,dx$ depuis $x = h$ jusqu'à x égal à une quantité quelconque p, il est clair que l'on aura $C = 0$, et que S sera ce que devient la fonction

$$\begin{aligned}\delta y\left[N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \ldots\right]\\ + \frac{d\delta y}{dx}(P\varphi - \ldots)\\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

lorsqu'on y change x en p. Ainsi, pour le succès de la méthode précédente, il est nécessaire que S ait la forme de cette fonction. Faisons, par exemple, $\delta y = x^s$, et

$$S = p^s[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + l^{(3)}s(s-1)(s-2) + \ldots];$$

en comparant cette valeur de S à la précédente, on aura

$$\begin{aligned} l &= N\varphi - \frac{d(P\varphi)}{dx} + \ldots,\\ l^{(1)}p &= P\varphi - \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

x devant être changé en p dans les seconds membres de ces équations, dont le nombre est égal au degré de l'équation différentielle (2). On pourra donc, à leur moyen, déterminer les constantes arbitraires de la valeur de φ, et si l'on désigne par ψ ce que devient φ lorsqu'on a ainsi déterminé ses arbitraires, on aura

$$y_s = \int x^s \psi\, dx.$$

De là et de ce que l'équation (1) est linéaire, il est facile de conclure que, si S est égal à

$$\begin{aligned} &p^s[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + \ldots] \\ &+ p_1^s[l_1 + l_1^{(1)}s + l_1^{(2)}s(s-1) + \ldots] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

en nommant ψ', ... ce que devient ψ lorsqu'on y change successivement p, l, $l^{(1)}$, ... en p_1, l_1, $l_1^{(1)}$, ..., en p_2, ..., on aura

$$y_s = \int x^s \psi\, dx + \int x^s \psi'\, dx + \ldots,$$

la première intégrale étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = p$, la seconde étant prise depuis $x = h$ jusqu'à $x = p_1$, ... Cette valeur de y_s ne renferme aucune constante arbitraire; mais, en la joignant à celle que nous avons trouvée précédemment pour le cas de S nul, on aura l'expression complète de y_s.

30. Supposons maintenant que l'on ait un nombre quelconque d'équations linéaires aux différences finies entre un pareil nombre de variables y_s, y'_s, y''_s, ..., et dont les coefficients soient des fonctions rationnelles et entières de s. Faisons alors

$$y_s = \int x^s \varphi\, dx, \qquad y'_s = \int x^s \varphi'\, dx, \qquad y''_s = \int x^s \varphi''\, dx, \qquad \ldots,$$

ces diverses intégrales étant prises entre les mêmes limites déterminées et indépendantes de s. Nous aurons

$$\begin{aligned} &\Delta y_s = \int x^s(x-1)\varphi\, dx, &&\Delta^2 y_s = \int x^s(x-1)^2\varphi\, dx, &&\ldots, \\ &\Delta y'_s = \int x^s(x-1)\varphi'\, dx, &&\Delta^2 y'_s = \int x^s(x-1)^2\varphi'\, dx, &&\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\ldots. \end{aligned}$$

Les équations dont il s'agit pourront ainsi être mises sous les formes suivantes

$$S = \int x^s z\, dx, \qquad S' = \int x^s z'\, dx, \qquad S'' = \int x^s z''\, dx, \qquad \ldots,$$

S, S′, S″, ... étant des fonctions de s seul, et z, z', z'', ... étant des fonctions rationnelles et entières de la même variable, et de x, φ, φ', φ'', ..., dans lesquelles φ, φ' ... sont sous une forme linéaire.

Considérons d'abord l'équation

$$S = \int x^s z\, dx,$$

on a

$$z = Z + s\Delta Z + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 Z + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 Z + \ldots,$$

la caractéristique Δ des différences finies étant relative à la variable s, et Z, ΔZ, ... étant ce que deviennent z, Δz, ... lorsqu'on y suppose $s = 0$. On aura donc

$$S = \int x^s\, dx \left[Z + s\Delta Z + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 Z + \ldots\right].$$

Si l'on fait $x^s = \delta y$, on aura

$$s x^s = x\frac{d\,\delta y}{dx}, \qquad s(s-1)x^s = x^2\frac{d^2\,\delta y}{dx^2}, \qquad \ldots;$$

l'équation précédente devient ainsi

$$S = \int dx\left(Z\,\delta y + x\,\Delta Z\,\frac{d\,\delta y}{dx} + \frac{x^2\Delta^2 Z}{1.2}\,\frac{d^2\,\delta y}{dx^2} + \ldots\right),$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes

$$(a) \qquad 0 = Z - \frac{d(x\,\Delta Z)}{dx} + \frac{d^2(x^2\,\Delta^2 Z)}{1.2\,dx^2} - \ldots,$$

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} S = C + \delta y&\left[x\,\Delta Z - \frac{d(x^2\Delta^2 Z)}{1.2.dx} + \ldots\right] \\ &+ \frac{d\,\delta y}{dx}\left(\frac{x^2\Delta^2 Z}{1.2} - \ldots\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

C étant une constante arbitraire. L'équation

$$S' = \int x^s z'\, dx,$$

traitée de la même manière, donnera

$$(a')\qquad o = Z' - \frac{d(x\,\Delta Z')}{dx} + \frac{d^2(x^2\Delta^2 Z')}{1.2.dx^2} - \ldots,$$

$$(b')\qquad \left\{\begin{aligned} S' &= C' + \delta y\left[x\,\Delta Z' - \frac{d(x^2\Delta^2 Z')}{1.2.dx} + \ldots\right] \\ &\quad + \frac{d\,\delta y}{dx}\left(\frac{x^2\Delta^2 Z'}{1.2} - \ldots\right) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les équations $S'' = \int x^s z''\,dx$, $S''' = \int x^s z'''\,dx$, ... produiront des équations semblables, que nous désignerons par (a''), (b''); (a'''), (b'''); ....

Les équations (a), (a'), (a''), ... détermineront les variables φ, φ', φ'', ... en fonction de x, et les équations (b), (b'), (b''), ... détermineront les limites dans lesquelles on doit prendre les intégrales $\int x^s z\,dx$, $\int x^s z'\,dx$, ... L'une de ces limites est $x = o$. Pour avoir les autres, on supposera d'abord S, S', S'', ... nuls; les constantes C, C', C'', ... seront par conséquent nulles dans les équations (b), (b'), ..., puisque la supposition de $x = o$ rend nuls les autres termes de ces équations. En égalant ensuite séparément à zéro les coefficients de δy, $\frac{d\,\delta y}{dx}$, ... dans ces mêmes équations, on aura les suivantes :

$$o = x\,\Delta Z - \frac{d(x^2\Delta^2 Z)}{1.2.dx} + \ldots,$$

$$o = \frac{x^2\Delta^2 Z}{1.2} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$o = x\,\Delta Z' - \frac{d(x^2\Delta^2 Z')}{1.2.dx} + \ldots,$$

$$o = \frac{x^2\Delta^2 Z'}{1.2} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On éliminera, au moyen de ces équations, toutes les constantes arbitraires, moins une, des valeurs de φ, φ', φ'', ..., et l'on arrivera à une équation finale en x, dont les racines seront les limites des intégrales

$\int x^s \varphi\, dx$, $\int x^s \varphi'\, dx$, ... On déterminera autant de ces limites qu'il est nécessaire pour que les valeurs de y_s, y'_s, ... soient complètes.

Supposons maintenant que S ne soit pas nul, et qu'il soit égal à

$$p^s[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + \ldots].$$

En faisant $C = 0$ dans l'équation (b) et en y mettant x^s au lieu de δy, on aura

$$\begin{aligned} p^s[l + l^{(1)}s + l^{(2)}s(s-1) + \ldots] = x^s & \left[x\,\Delta Z - \frac{d(x^2\,\Delta^2 Z)}{1.2.dx} + \ldots\right] \\ & + s x^s \left(\frac{x\,\Delta^2 Z}{1.2} \ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut d'abord $x = p$, en sorte que les intégrales $\int x^s \varphi\, dx$, $\int x^s \varphi'\, dx$, ... doivent être prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p$. La comparaison des coefficients de s, $s(s-1)$, ... donnera ensuite autant d'équations entre l, $l^{(1)}$, ... et les constantes arbitraires des expressions de φ, φ', ... L'égalité à zéro de ces mêmes coefficients, dans les équations (b'), (b''), ..., donnera de nouvelles équations entre ces arbitraires que l'on pourra ainsi déterminer au moyen de toutes ces équations; on aura, par ce procédé, les valeurs particulières de y_s qui satisfont au cas où, S′, S″, ... étant nuls, S a la *forme* que nous venons de lui supposer, ou, plus généralement, est égal à un nombre quelconque de fonctions de la même forme.

Pareillement, si l'on suppose que, S, S″, ... étant nuls, S′ est la somme d'un nombre quelconque de fonctions semblables, on déterminera les valeurs particulières de y_s, y'_s, ... qui satisfont à ce cas, et ainsi du reste. En réunissant ensuite toutes ces valeurs à celles que l'on aura déterminées dans le cas où S, S′, ... sont nuls, on aura les expressions complètes de y_s, y'_s, ..., correspondantes au cas où S, S′, ... ont les formes précédentes.

Il est facile d'étendre cette méthode aux équations aux différences infiniment petites, ou en partie finies et en partie infiniment petites, et dans lesquelles les coefficients des variables principales et de leurs différences sont des fonctions rationnelles de s, que l'on peut toujours rendre entières en faisant disparaître les dénominateurs. Si l'on désigne, comme ci-dessus, par y_s, y'_s, ... les variables principales de ces équations, et si l'on fait

$$y_s=\int x^s\varphi\,dx,\qquad y'_s=\int x^s\varphi'\,dx,\qquad \ldots,$$

on aura

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{dy_s}{ds}=\int x^s\varphi\,dx\log x, & \dfrac{d^2y_s}{ds^2}=\int x^s\varphi\,dx\,(\log x)^2, & \ldots,\\
\Delta y_s=\int x^s(x-1)\,\varphi\,dx, & \Delta^2 y_s=\int x^s(x-1)^2\,\varphi\,dx, & \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots,\\
\dfrac{dy'_s}{ds}=\int x^s\varphi'\,dx\log x, & \ldots, & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots. &
\end{array}$$

Les équations proposées prendront ainsi les formes suivantes :

$$S=\int x^s z\,dx,\qquad S'=\int x^s z'\,dx,\qquad \ldots.$$

En les traitant par la méthode précédente, on déterminera les valeurs de φ, φ', ... en fonction de x, et les limites des intégrales $\int x^s\varphi\,dx$, $\int x^s\varphi'\,dx$, ...

En faisant

$$y_s=\int c^{-s.x}\varphi\,dx,\qquad y'_s=\int c^{-s.x}\varphi'\,dx,\qquad \ldots,$$

on parviendrait à des équations semblables. Dans plusieurs circonstances, ces formes de y_s, y'_s, ... seront plus commodes que les précédentes.

31. La principale difficulté que présente l'application de la méthode précédente consiste dans l'intégration des équations différentielles linéaires qui déterminent φ, φ', φ'', ... en x. Les degrés de ces équations ne dépendent point de ceux des équations aux différences en y_s, y'_s, ...; ils dépendent uniquement des puissances les plus élevées de s dans leurs coefficients. En ne considérant donc qu'une seule variable y_s, l'équation différentielle en φ sera d'un degré égal au plus haut exposant de s dans les coefficients de l'équation aux différences en y_s. L'équation différentielle en φ ne sera ainsi résoluble généralement que dans le cas où ce plus haut exposant est l'unité. Développons ce cas fort étendu.

Représentons l'équation différentielle en y_s par la suivante

$$0 = V + sT,$$

V et T étant des fonctions linéaires de la variable principale y_s et de ses différences, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on fait

$$y_s = \int \delta y \, \varphi \, dx,$$

δy étant égal à x^s ou à c^{-sx}, elle deviendra

$$0 = \int \varphi \, dx \left(M \, \delta y + N \, \frac{d \, \delta y}{dx} \right),$$

M et N étant des fonctions de x; on aura donc, en intégrant par parties comme dans le numéro précédent, les deux équations suivantes :

$$0 = M \varphi - \frac{d(N\varphi)}{dx},$$

$$0 = C + N \varphi \, \delta y.$$

La première donne, en l'intégrant,

$$\varphi = \frac{H}{N} c^{\int \frac{M}{N} dx},$$

H étant une constante arbitraire. Supposons C nul dans la seconde équation; $x = 0$ ou $x = \infty$ sera l'une des limites de l'intégrale $\int \delta y \, \varphi \, dx$, suivant que l'on prend x^s ou c^{-sx} pour δy. On déterminera les autres limites en résolvant l'équation $0 = N\varphi \, \delta y$.

Appliquons à cette intégrale la méthode d'approximation du n° 23. Si l'on désigne par a la valeur de x donnée par l'équation

$$0 = d(N \varphi \, \delta y),$$

et par Q ce que devient la fonction $N\varphi \, \delta y$, lorsqu'on y change x en a, on fera

$$N \varphi \, \delta y = Q \, c^{-t^2},$$

ce qui donne

$$t = \sqrt{\log Q - \log(N\varphi) - \log\delta y}.$$

$\log\delta y$ est de l'ordre s; si l'on suppose s très grand, et si l'on fait $\frac{1}{s} = \alpha$, α sera un très petit coefficient. La quantité sous le radical prendra cette forme $\frac{(x-a)^2}{\alpha}$ X, X étant une fonction de $x - a$ et de α; on aura donc, par le retour des suites, la valeur de x en t, par une série de cette forme

$$x = a + \alpha^{\frac{1}{2}} ht + \alpha h^{(1)} t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} h^{(2)} t^3 + \ldots.$$

Maintenant, y_s étant égal à $\int \delta y \varphi\, dx$, si l'on substitue dans cette intégrale au lieu de $\varphi\,\delta y$ sa valeur $\frac{Q\,c^{-t^2}}{N}$, elle deviendra $Q\int \frac{dx}{N} c^{-t^2}$; et si dans $\frac{dx}{N}$ on substitue pour x sa valeur précédente en t, on aura y_s par une suite de cette forme

$$y_s = \alpha^{\frac{1}{2}} Q \int dt . c^{-t^2} [l + \alpha^{\frac{1}{2}} l^{(1)} t + \alpha l^{(2)} t^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} l^{(3)} t^3 + \ldots],$$

les limites de l'intégrale relative à t devant se déterminer par la condition qu'à ces limites la quantité $N\varphi\,\delta y$ ou son équivalente $Q\,c^{-t^2}$ soit nulle, d'où il suit que ces limites sont $t = -\infty$ et $t = \infty$; on aura donc, par le n° **24**,

$$y_s = \alpha^{\frac{1}{2}} Q \sqrt{\pi} \left(l + \frac{1}{2} \alpha l^{(2)} + \frac{1.3}{2^2} \alpha^2 l^{(4)} + \frac{1.3.5}{2^3} \alpha^3 l^{(6)} + \ldots \right).$$

Cette expression a l'avantage d'être indépendante de la détermination des limites en x, qui rendent nulle la fonction $N\varphi\,\delta y$, en sorte qu'elle subsiste dans le cas même où cette fonction, égalée à zéro, n'a point de racines réelles; elle subsiste encore dans le cas de s négatif. Cette remarque, analogue à celle que nous avons faite dans le n° **25**, et qui tient comme elle à la généralité de l'analyse, est très remarquable en ce qu'elle donne le moyen d'étendre la formule précédente à un grand nombre de cas auxquels la méthode qui nous y a conduits semble d'abord se refuser.

Cette formule ne renferme que la constante arbitraire H, et par conséquent elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée en y_s, si cette équation est d'un ordre supérieur à l'unité. Pour avoir dans ce cas l'intégrale complète, il faudra chercher dans l'équation $o = d(N\varphi\,\delta y)$ autant de valeurs différentes de x qu'il y a d'unités dans cet ordre. Soient a, a', a'', ... ces valeurs; on changera successivement, dans l'expression précédente de y_s, a en a', a'', ..., et H en H', H'', ...; on aura autant de valeurs particulières qui renfermeront chacune une arbitraire, et dont la somme sera l'expression complète de y_s.

Quand les coefficients de la proposée en y_s renferment des puissances de s supérieures à l'unité, on peut quelquefois décomposer cette équation en plusieurs autres qui ne renferment que cette première puissance. Si l'on a, par exemple, l'équation

$$y_{s+1} = M y_s,$$

M étant une fonction rationnelle et entière de s, on mettra cette fonction sous la forme

$$\frac{q(s+b)(s+b')(s+b'')\ldots}{(s+f)(s+f')(s+f'')\ldots};$$

on fera ensuite

$$z_{s+1} = q(s+b)z_s, \qquad z'_{s+1} = (s+b')z'_s, \qquad \ldots,$$

$$t_{s+1} = (s+f)t_s, \qquad t'_{s+1} = (s+f')t'_s, \qquad \ldots.$$

Il est facile, par ce qui précède, de déterminer z_s, t_s, ... en intégrales définies, et de réduire ces intégrales en séries convergentes, lorsque s est un grand nombre. On aura ensuite

$$y_s = \frac{z_s z'_s \ldots}{t_s t'_s \ldots}.$$

Dans plusieurs cas où l'équation différentielle en φ, étant d'un ordre supérieur au premier, ne peut être intégrée rigoureusement, on peut déterminer φ par une approximation très convergente; en substituant ensuite cette valeur de φ dans l'intégrale $\int x^s \varphi\,dx$, on peut obtenir d'une manière fort approchée la valeur de cette intégrale.

32. L'analyse exposée dans les numéros précédents s'étend encore aux équations à différences partielles, finies et infiniment petites. Pour cela, considérons d'abord l'équation linéaire aux différentielles partielles dont les coefficients sont constants. En désignant par $y_{s,s'}$ la variable principale, s et s' étant les deux variables dont elle est fonction, et représentant cette équation par celle-ci, $V = o$, V étant une fonction linéaire de $y_{s,s'}$ et de ses différences partielles, on y supposera

$$y_{s,s'} = \int x^s x'^{s'} \varphi\, dx,$$

φ étant une fonction de x; alors l'équation $V = o$ prend cette forme

$$o = \int M x^s x'^{s'} \varphi\, dx,$$

M étant une fonction de x et de x', sans s ni s'. En égalant donc M à zéro, on aura la valeur de x' en x, et cette valeur, substituée dans l'intégrale $\int x^s x'^{s'} \varphi\, dx$, donnera l'expression générale $y_{s,s'}$, dans laquelle φ est une fonction arbitraire de x, les limites de l'intégrale étant indépendantes de x, mais d'ailleurs arbitraires. Si l'équation proposée $V = o$ est de l'ordre n, il faudra, au moyen de l'équation $M = o$, déterminer un nombre n de valeurs de x' en x. La somme des n valeurs de $\int x^s x'^{s'} \varphi dx$ qui en résulteront, et dans lesquelles on pourra mettre pour φ des fonctions arbitraires différentes de x, sera l'expression de $y_{s,s'}$.

Il résulte de ce que nous avons dit dans la première Partie de ce Livre que l'équation $M = o$ est l'équation génératrice de l'équation proposée $V = o$.

Considérons présentement l'équation aux différences partielles

$$o = V + sT + s'R,$$

dans laquelle V, T et R sont des fonctions quelconques linéaires de $y_{s,s'}$ et de ses différences partielles, soit finies, soit infiniment petites. Si l'on y suppose, comme ci-dessus,

$$y_{s,s'} = \int x^s x'^{s'} \varphi\, dx,$$

x' étant une fonction de x qu'il s'agit de déterminer, on aura une équation de cette forme

$$o = \int x^s x'^{s'} \varphi\, dx\, (M + Ns + Ps'),$$

M, N et P étant des fonctions de x et de x', sans s ni s'; or on a

$$\frac{d(x^s x'^{s'})}{dx} = x^s x'^{s'} \left(\frac{s}{x} + \frac{s'\,dx'}{x'\,dx}\right);$$

donc, si l'on détermine x' par cette équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{P\,dx}{N\,x},$$

on aura

$$x^s x'^{s'} (Ns + Ps') = Nx\,\frac{d(x^s x'^{s'})}{dx};$$

par conséquent, si l'on désigne $x^s x'^{s'}$ par δy, et si l'on suppose que l'on a substitué dans M et N pour x' sa valeur en x, on aura

$$o = \int \varphi\, dx \left(M\,\delta y + Nx\,\frac{d\,\delta y}{dx}\right).$$

Cette équation, intégrée par parties, comme dans les numéros précédents, donne les deux suivantes :

$$o = M\varphi - \frac{d(Nx\varphi)}{dx},$$

$$o = Nx\,\varphi\,\delta y.$$

La première détermine φ en x, et la seconde donne les limites de l'intégrale $\int \delta y\,\varphi\,dx$.

Cette valeur de $y_{s,s'}$ ne renfermant point de fonction arbitraire, elle n'est qu'une intégrale particulière de l'équation proposée aux différences partielles. Pour la rendre complète, on observera que l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{P\,dx}{N\,x},$$

qui détermine x' en x, est $x' = Q$, Q étant une fonction de x et d'une constante arbitraire que nous désignerons par u; en représentant donc par ψ une fonction arbitraire de u, l'équation proposée aux différences partielles sera satisfaite par cette valeur de $y_{s,s'}$,

$$y_{s,s'} = \int\int x^s Q^{s'} \psi \, dx \, du,$$

l'intégrale relative à x étant prise entre les limites déterminées par l'équation $o = N \varphi \delta y$, et l'intégrale relative à u étant prise entre des limites quelconques. Cette valeur de $y_{s,s'}$ sera donc l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences partielles, si celle-ci est du premier ordre; mais, si elle est d'un ordre supérieur, il faudra, au moyen de l'équation $o = N \varphi \delta y$, déterminer autant de valeurs de x en u qu'il y a d'unités dans cet ordre. La réunion des valeurs de $y_{s,s'}$ auxquelles on parviendra sera l'expression complète de $y_{s,s'}$.

CHAPITRE III.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES A L'APPROXIMATION DE DIVERSES FONCTIONS DE TRÈS GRANDS NOMBRES.

Parmi les diverses fonctions auxquelles ces méthodes peuvent s'appliquer, je vais considérer les produits des nombres, les développements des polynômes et les différences infiniment petites et finies des fonctions, ces diverses quantités étant celles qui se présentent le plus souvent dans l'Analyse des hasards.

De l'approximation des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et des termes des polynômes élevés à de grandes puissances.

33. Proposons-nous d'intégrer l'équation aux différences finies

$$o = (s+1)\,y_s - y_{s+1}.$$

Si l'on y suppose

$$y_s = \int x^s \varphi\, dx,$$

on aura, en désignant x^s par δy,

$$o = \int \varphi\, dx \left[(1-x)\,\delta y + x \frac{d\,\delta y}{dx} \right],$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties, suivant la méthode précédente, les deux équations suivantes :

$$o = \varphi(1-x) - \frac{d(x\varphi)}{dx},$$

$$o = x^{s+1}\varphi.$$

La première équation donne, en l'intégrant,

$$\varphi = \mathrm{A}\, c^{-x};$$

et la seconde donne, pour déterminer les deux limites de l'intégrale $\int x^s \varphi\, dx$,

$$0 = x^{s+1} c^{-x};$$

ces limites sont par conséquent $x = 0$ et $x = \infty$. Ainsi l'on a

$$y_s = \mathrm{A} \int x^s\, dx\, c^{-x},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à x infini, et A étant une constante arbitraire.

Pour avoir cette intégrale en série, on déterminera, conformément à la méthode exposée dans le n° 23, la valeur de x qui rend $x^s c^{-x}$ un maximum ; cette valeur est s. On fera donc, suivant la méthode citée,

$$x^s c^{-x} = s^s c^{-s} c^{-t^2}.$$

En supposant $x = s + \theta$, cette équation devient

$$\left(1 + \frac{\theta}{s}\right)^s c^{-\theta} = c^{-t^2};$$

partant,

$$t^2 = -s \log\left(1 + \frac{\theta}{s}\right) + \theta = \frac{\theta^2}{2s} - \frac{\theta^3}{3s^2} + \frac{\theta^4}{4s^3} - \ldots,$$

ce qui donne, par le retour des suites,

$$\theta = t\sqrt{2s} + \frac{2}{3}t^2 + \frac{t^3}{9\sqrt{2s}} + \ldots;$$

par conséquent,

$$dx = d\theta = dt\sqrt{2s}\left(1 + \frac{4t}{3\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6s} + \ldots\right);$$

la fonction $\int x^s\, dx\, c^{-x}$ deviendra donc

$$s^s c^{-s} \int dt\, c^{-t^2} \sqrt{2s}\left(1 + \frac{4t}{3\sqrt{2s}} + \frac{t^2}{6s} + \ldots\right).$$

L'intégrale relative à x devant être prise depuis x nul jusqu'à x infini, l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. En intégrant comme dans le n° 31, on aura

$$y_s = \mathrm{A}s^{s+\frac{1}{2}}c^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12s} + \ldots\right).$$

On peut déterminer fort simplement le facteur $1 + \frac{1}{12s} + \ldots$ de cette manière. Désignons-le par

$$1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots,$$

ce qui donne

$$y_s = \mathrm{A}s^{s+\frac{1}{2}}c^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots\right).$$

En substituant cette valeur de y_s dans l'équation proposée

$$y_{s+1} = (s+1)y_s,$$

on aura

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+\frac{1}{2}}c^{-1}\left[1 + \frac{\mathrm{B}}{s+1} + \frac{\mathrm{C}}{(s+1)^2} + \ldots\right] = 1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots,$$

ou

$$\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots\right)\left(c^{1-\left(s+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{s}\right)} - 1\right) = -\frac{\mathrm{B}}{s^2} + \frac{\mathrm{B} - 2\mathrm{C}}{s^3} - \ldots;$$

or on a

$$1 - \left(s + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{s}\right) = 1 - \left(s + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3s^3} - \frac{1}{4s^4} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{12s^2} + \frac{1}{12s^3} - \ldots.$$

On aura donc, en observant que $c^{-\frac{1}{12s^2}+\ldots} = 1 - \frac{1}{12s} + \frac{1}{12}s^3 + \ldots,$

$$\left(1 + \frac{\mathrm{B}}{s} + \frac{\mathrm{C}}{s^2} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{12s^2} + \frac{1}{12s^3} - \ldots\right) = -\frac{\mathrm{B}}{s^2} + \frac{\mathrm{B} - 2\mathrm{C}}{s^3} - \ldots,$$

ce qui donne, en comparant les puissances semblables de $\frac{1}{s}$,

$$\mathrm{B} = \frac{1}{12}, \quad \mathrm{C} = \frac{1}{288}, \quad \ldots;$$

donc

$$y_s = \mathrm{A} s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right).$$

On déterminera la constante arbitraire A au moyen d'une valeur particulière de y_s, en supposant, par exemple, que, s étant égal à μ, on ait $y_s = \mathrm{Y}$; on aura

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A} \int x^\mu \, dx \, c^{-x},$$

ce qui donne

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{Y}}{\int x^\mu \, dx \, c^{-x}};$$

par conséquent,

$$(q) \qquad y_s = \frac{\mathrm{Y} s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi}}{\int x^\mu \, dx \, c^{-x}} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right).$$

Voyons maintenant de quelle nature est la fonction y_s. Pour cela, il faut intégrer l'équation aux différences finies

$$y_{s+1} = (s+1) y_s.$$

On trouve facilement que son intégrale est

$$y_s = \mathrm{Y}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots s;$$

on aura donc, en comparant cette expression à la formule (q),

$$(q') \qquad (\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots s = \frac{s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right)}{\int x^\mu \, dx \, c^{-x}}.$$

Si l'on fait $\mu = 0$, on aura $\int x^\mu \, dx \, c^{-x} = 1$; partant

$$1.2.3\ldots s = s^{s+\frac{1}{2}} c^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} + \ldots\right).$$

Si l'on fait $\mu = \frac{m}{n}$, m étant moindre que n, on aura

$$s = s' + \frac{m}{n},$$

s' étant un nombre entier; ainsi

$$s^{s+\frac{1}{2}} = \left(s' + \frac{m}{n}\right)^{s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}} = s'^{\,s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}} c^{\left(s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{m}{ns'}\right)};$$

or on a

$$\left(s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{m}{ns'}\right) = \left(s' + \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m}{ns'} - \frac{m^2}{2n^2s'^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{m}{n} + \frac{m^2 + mn}{2n^2s'} + \ldots.$$

On a d'ailleurs, en faisant $x = t^n$,

$$\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,c^{-x} = \frac{m}{n}\int x^{\frac{m}{n}-1}\,dx\,c^{-x} = m\int t^{m-1}\,dt\,c^{-t^n},$$

l'intégrale relative à t étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à t infini. En substituant ces valeurs dans la formule (q'), elle donnera

$$(q'')\qquad \left\{\begin{aligned} &m(m+n)(m+2n)\ldots(m+s'n) \\ &\quad = \frac{n^{s'}s'^{\,s'+\frac{m}{n}+\frac{1}{2}}c^{-s'}\sqrt{2\pi}\left(1 + \dfrac{n^2+6mn+6m^2}{12n^2s'} + \ldots\right)}{\int t^{m-1}\,dt\,c^{-t^n}}; \end{aligned}\right.$$

en sorte que la valeur approchée du produit des termes de la progression arithmétique $m, m+n, m+2n, \ldots$ dépend des trois transcendantes c, π et $\int t^{m-1}\,dt\,c^{-t^n}$.

Si dans cette équation on fait, pour plus de simplicité, $n = 1$, ce qui change m en μ, et si l'on observe que $\int t^{\mu-1}\,dt\,c^{-t} = \frac{1}{\mu}\int t^{\mu}\,dt\,c^{-t}$, on aura

$$(1+\mu)(2+\mu)\ldots(s'+\mu) = s'^{\,s'+\mu+\frac{1}{2}}c^{-s'}\sqrt{2\pi}\,\frac{1 + \dfrac{1+6\mu+6\mu^2}{12s'} + \ldots}{\int t^{\mu}\,dt\,c^{-t}}.$$

En changeant μ dans $-\mu$, on aura

$$(1-\mu)(2-\mu)\ldots(s'-\mu) = s'^{\,s'-\mu+\frac{1}{2}}c^{-s'}\sqrt{2\pi}\,\frac{1 + \dfrac{1-6\mu+6\mu^2}{12s'} + \ldots}{\int t^{-\mu}\,dt\,c^{-t}}.$$

En multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$(1-\mu^2)(4-\mu^2)\ldots(s'^2-\mu^2)=\frac{s'^{2s'+1}c^{-2s'}.2\pi\left(1+\frac{1+6\mu^2}{6s'}+\ldots\right)}{\int t^{-\mu}\,dt\,c^{-t}\int t^{\mu}\,dt\,c^{-t}}.$$

L'équation (T) du n° 24 donne

$$n^3\int t^{n+r-2}\,dt\,c^{-t^n}\int t^{n-r}\,dt\,c^{-t^n}=\frac{(r-1)\pi}{\sin\frac{r-1}{n}\pi}.$$

En faisant $n=1$ et $\mu=r-1$, on a

$$\int t^{\mu}\,dt\,c^{-t}\int t^{-\mu}\,dt\,c^{-t}=\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi};$$

on a donc

$$\sin\mu\pi=\tfrac{1}{2}\mu(1-\mu^2)(4-\mu^2)\ldots(s'^2-\mu^2)\left(1-\frac{1+6\mu^2}{6s'}+\ldots\right)s'^{-2s'-1}c^{2s'}.$$

Si l'on fait μ infiniment petit, cette équation donne

$$2\pi=1^2.2^2.3^2\ldots s'^2\left(1-\frac{1}{6s'}+\ldots\right)s'^{-2s'-1}c^{2s'};$$

divisant donc l'équation précédente par celle-ci, on aura

$$\sin\mu\pi=\mu\pi(1-\mu^2)\left(1-\frac{\mu^2}{4}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu^2}{s'^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{s'}+\ldots\right).$$

Si l'on fait s' infini, on a pour l'expression de $\sin\varphi$, φ étant égal à $\mu\pi$, le produit infini

$$\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots;$$

l'expression de $\sin\varphi$ est ainsi décomposable dans une infinité de facteurs, ce que l'on sait d'ailleurs.

En supposant φ imaginaire et égal à $\varphi'\sqrt{-1}$, $\sin\varphi$ devient $\frac{c^{-\varphi'}-c^{\varphi'}}{2\sqrt{-1}}$; on a donc

$$c^{\varphi'}-c^{-\varphi'}=2\varphi'\left(1+\frac{\varphi'^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\varphi'^2}{s'^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{s'\pi^2}+\ldots\right),$$

et en faisant s' infini, on voit que $c^{\varphi'} - c^{-\varphi'}$ est égal au produit infini

$$2\varphi'\left(1+\frac{\varphi'^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi'^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots.$$

On aura, par un procédé semblable, le produit continu de facteurs dont le terme général est une fonction rationnelle entière ou fractionnaire de s. Mais l'expression à laquelle on parviendra pourra contenir d'autres transcendantes dépendantes d'intégrales définies de la forme $\int x^\mu\, dx\, c^{-x}$.

On peut observer ici que, ces produits étant mis sous la forme $\int x^s \varphi\, dx$, leur différentiation par rapport à la variable s présente une idée claire, et alors on a pour cette différentielle $\int x^s\varphi\, dx \log x$.

Les expressions de y_s données par les formules (q) et (q') du numéro précédent ont encore lieu, suivant la remarque du n° 30, dans le cas où s et μ sont négatifs, quoique dans ce cas l'équation

$$0 = x^{s+1}c^{-x},$$

qui détermine les limites de l'intégrale définie qui représente la valeur de y_s, n'ait pas plusieurs racines réelles. Si, dans la formule (q) du numéro précédent, on change s dans $-s$ et μ dans $-\mu$, elle devient

$$y_{-s} = \frac{\mathrm{Y}\sqrt{-1}\,c^s\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}-\ldots\right)}{(-1)^s s^{s+\frac{1}{2}}\int\frac{dx\,c^{-x}}{x^\mu}},$$

Y étant la valeur de y qui répond à $s=-\mu$. Toute la difficulté se réduit à intégrer $\int\frac{dx\,c^{-x}}{x^\mu}\cdot$ Pour y parvenir, il faut suivre le même procédé dont on a fait usage pour réduire en série l'intégrale $\int e^{-x}x^s\,dx$. On fera donc

$$x = -\mu + \varpi\sqrt{-1},$$

$-\mu$ étant la valeur de x donnée par l'équation

$$0 = d\,\frac{c^{-x}}{x^\mu};$$

on aura ainsi

$$\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{c^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \int \frac{d\varpi\, c^{-\varpi\sqrt{-1}}}{(\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}.$$

L'intégrale relative à x devant s'étendre entre les deux limites qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^{\mu}}$, il est clair que l'intégrale relative à ϖ doit s'étendre depuis $\varpi = -\infty$ jusqu'à $\varpi = \infty$; en réunissant donc les deux quantités $\frac{c^{-\varpi\sqrt{-1}}}{(\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}$ et $\frac{c^{\varpi\sqrt{-1}}}{(\mu + \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}$, qui répondent aux mêmes valeurs de ϖ affectées de signes contraires, on aura

$$\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{c^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \int d\varpi \left\{ \begin{array}{l} \cos\varpi\, \dfrac{(\mu + \varpi\sqrt{-1})^{\mu} + (\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}{(\mu^2 + \varpi^2)^{\mu}} \\ \quad + \sqrt{-1}\sin\varpi\, \dfrac{(\mu - \varpi\sqrt{-1})^{\mu} - (\mu + \varpi\sqrt{-1})^{\mu}}{(\mu^2 + \varpi^2)^{\mu}} \end{array} \right\},$$

l'intégrale relative à ϖ étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \infty$. Si l'on développe les quantités sous le signe $\int$, les imaginaires disparaissent, et il ne reste qu'une fonction réelle que nous désignerons par $Q\, d\varpi$; on aura ainsi

$$\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{c^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}} \int Q\, d\varpi;$$

partant

$$y_{-s} = \frac{Y c^{s-\mu} \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \ldots\right)}{(-1)^{s-\mu} s^{s-\frac{1}{2}} \int Q\, d\varpi}.$$

Voyons présentement quelle fonction de s est y_{-s}. Pour cela, reprenons l'équation primitive

$$0 = (s+1) y_s - y_{s+1};$$

en y changeant s dans $-s$, et faisant $y_{-s} = u_s$, elle devient

$$0 = (s-1) u_s + u_{s-1},$$

équation dont l'intégrale est

$$u_s = \frac{(-1)^{s-\mu} Y}{\mu(1+\mu)(2+\mu)\ldots(s-1)} = y_{-s},$$

Y étant, comme ci-dessus, égal à $y_{-\mu}$. Si l'on compare cette expression de y_{-s} à la précédente, et si l'on observe que $s-\mu$ est un nombre entier et qu'ainsi l'on a $(-1)^{2s-2\mu}=1$, on aura

$$\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(s-1)}=\frac{\mu\sqrt{2\pi}\,c^{s-\mu}\left(1-\frac{1}{12s}+\frac{1}{288s^2}-\ldots\right)}{s^{s-\frac{1}{2}}\int Q\,d\varpi}.$$

En divisant les deux membres de cette équation par s et les renversant ensuite, on aura

$$(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)\ldots s=\frac{s^{s+\frac{1}{2}}c^{\mu-s}}{\mu\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{1}{12s}+\ldots\right)\int Q\,d\varpi.$$

Si l'on compare cette équation à la formule (q') du numéro précédent, on a ce résultat remarquable

$$\text{(O)}\qquad \int Q\,d\varpi=\frac{2\mu\pi c^{-\mu}}{\int x^{\mu}\,dx\,c^{-x}}.$$

Je suis parvenu à cette équation générale dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1782, par l'analyse précédente, fondée, comme on voit, sur le passage du réel à l'imaginaire. En faisant successivement, dans Q, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, ..., on aura les valeurs d'un nombre infini d'intégrales définies; ainsi, dans le cas de $\mu=1$, l'équation (O) donne

$$\int\frac{d\varpi\,(\cos\varpi+\varpi\sin\varpi)}{1+\varpi^2}=\frac{\pi}{c},$$

formule que j'ai donnée pareillement dans les Mémoires cités. Cette formule et toutes celles du même genre peuvent se vérifier par les formules du n° 26; car on a, par ce numéro,

$$\int\frac{d\varpi\cos\varpi}{1+\varpi^2}=\frac{\pi}{2c}=\int\frac{\varpi\,d\varpi\sin\varpi}{1+\varpi^2}.$$

Nous observerons ici, comme dans les Mémoires cités, que $\int\frac{dx\,c^{-x}}{x^{\mu}}$ étant égal à $\frac{c^{\mu}\sqrt{-1}}{(-1)^{\mu}}\int Q\,d\varpi$, on a, en substituant au lieu de $\int Q\,d\varpi$ sa valeur donnée par l'équation (O),

$$\int \frac{dx\,c^{-x}}{x^{\mu}} = \frac{2\mu\pi(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu}\,dx\,c^{-x}} = \frac{2\pi(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\int x^{\mu-1}\,dx\,c^{-x}},$$

la première intégrale étant prise entre les deux valeurs imaginaires de x qui rendent nulle la quantité $\frac{c^{-x}}{x^{\mu}}$, et les deux autres intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini, ce qui donne un moyen facile de transformer dans celles-ci les intégrales $\int\frac{dx\sin x}{x^{\mu}}$ et $\int\frac{dx\cos x}{x^{\mu}}$.

34. Considérons maintenant l'équation générale

$$0 = (a' + b's)y_{s+1} - (a + bs)y_s.$$

Si l'on fait

$$\frac{a}{b} = n, \qquad \frac{a'}{b'} = n' + 1, \qquad \frac{b}{b'} = p,$$

elle prend cette forme

$$0 = (n' + s + 1)y_{s+1} - (n + s)py_s.$$

Supposons

$$y_s = \int x^{s-1}\,\varphi\,dx;$$

nous aurons, en intégrant par parties,

$$0 = x^s\,\varphi(x-p) + \int x^{s-1}[\,\varphi\,dx\,(n'x - np) + (p - x)x\,d\varphi\,].$$

Cette équation donne, pour déterminer φ, la suivante

$$0 = (n'x - np)\,\varphi\,dx + (p - x)x\,d\varphi,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\varphi = \mathrm{A}x^n(p - x)^{n'-n},$$

A étant une constante arbitraire. On aura ensuite, pour déterminer les limites de l'intégrale, l'équation

$$0 = x^s\,\varphi(p - x)$$

ou

$$0 = x^{n+s}(p - x)^{n'+1-n}.$$

Ces limites sont donc $x=0$ et $x=p$, si $n+s$ et $n'+1-n$ sont des quantités positives. Ainsi l'on aura, en prenant l'intégrale dans ces limites,

$$y_s = \mathrm{A}\int x^{n+s-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}.$$

On déterminera la constante A, au moyen d'une valeur particulière de y_s. Soit y_μ cette valeur ; on aura

$$\mathrm{A} = \frac{y_\mu}{\int x^{n+\mu-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}};$$

par conséquent,

$$y_s = \frac{y_\mu \int x^{n+s-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}{\int x^{n+\mu-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}.$$

Intégrons présentement l'équation proposée aux différences en y_s. Son intégrale est

$$y_s = \frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)}\,y_\mu\,p^{s-\mu}.$$

Dans cette expression, comme dans toutes celles formées de produits, les facteurs du numérateur ne commencent que pour la valeur de s qui rend le dernier facteur égal au premier, ce qui a lieu ici lorsque s est égal à $\mu+1$; il en est de même des facteurs du dénominateur. Pour la valeur de s égale à μ, le numérateur et le dénominateur se réduisent à l'unité qui est censée les multiplier l'un et l'autre. Si l'on compare les deux expressions précédentes de y_s, on aura

$$\frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)}\,p^{s-\mu} = \frac{\int x^{n+s-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}{\int x^{n+\mu-1}\,dx\,(p-x)^{n'-n}}.$$

Faisons $p-x=pu^2$; le second membre de cette équation deviendra

$$p^{s-\mu}\frac{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+\mu-1}},$$

les intégrales étant prises depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, parce que ces limites répondent aux limites $x=p$ et $x=0$. On a donc

$$\frac{(n+\mu)(n+\mu+1)\ldots(n+s-1)}{(n'+\mu+1)(n'+\mu+2)\ldots(n'+s)} = \frac{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+s-1}}{\int u^{2n'-2n+1}\,du\,(1-u^2)^{n+\mu-1}}.$$

Supposons $n=\frac{1}{2}$, $n'=0$ et $\mu=1$; si l'on observe que

$$\int du\sqrt{1-u^2}=\tfrac{1}{4}\pi,$$

on aura

$$\frac{(s+1)(s+2)\ldots 2s}{1.2.3\ldots s}=\frac{2^{2s+1}}{\pi}\int du\,(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}.$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient du terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$; on aura donc, au moyen des méthodes précédentes, ce coefficient par une approximation rapide, lorsque s est un grand nombre. Pour cela, nous ferons

$$\frac{1}{s-\frac{1}{2}}=\alpha,\qquad 1-u^2=c^{-\alpha t^2},$$

ce qui donne

$$u=\sqrt{1-c^{-\alpha t^2}}$$

et

$$\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}}=\int du\,c^{-t^2}.$$

Supposons

$$\sqrt{1-c^{-\alpha t^2}}=\alpha^{\frac{1}{2}}t(1+\alpha q^{(1)}t^2+\alpha^2 q^{(2)}t^4+\alpha^3 q^{(3)}t^6+\ldots).$$

En prenant les différences logarithmiques des deux membres de cette équation, on aura

$$\frac{1+3\alpha q^{(1)}t^2+5\alpha^2 q^{(2)}t^4+7\alpha^3 q^{(3)}t^6+\ldots}{t+\alpha q^{(1)}t^3+\alpha^2 q^{(2)}t^5+\alpha^3 q^{(3)}t^7+\ldots}=\frac{\alpha t c^{-\alpha t^2}}{1-c^{-\alpha t^2}},$$

et ce dernier membre est égal à

$$\frac{1-\alpha t^2+\dfrac{\alpha^2}{1.2}t^4-\dfrac{\alpha^3}{1.2.3}t^6+\ldots}{t\left(1-\dfrac{\alpha t^2}{1.2}+\dfrac{\alpha^2 t^4}{1.2.3}-\dfrac{\alpha^3 t^6}{1.2.3.4}+\ldots\right)}.$$

On aura donc, en comparant cette quantité au premier membre et réduisant au même dénominateur, l'équation générale

$$0=2i\,q^{(i)}-\frac{2i-3}{1.2}q^{(i-1)}+\frac{2i-6}{1.2.3}q^{(i-2)}-\frac{2i-9}{1.2.3.4}q^{(i-3)}$$
$$+\frac{2i-12}{1.2.3.4.5}q^{(i-4)}-\ldots,$$

$q^{(0)}$ étant égal à l'unité. Si l'on fait successivement dans cette équation $i=1$, $i=2$, $i=3$, ..., on aura les valeurs successives $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$, ..., et l'on trouvera

$$q^{(1)} = -\frac{1}{4}, \quad q^{(2)} = \frac{5}{96}, \quad \ldots.$$

On aura ensuite

$$\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} \int dt\, c^{-t^2}(1+3\alpha q^{(1)} t^2 + 5\alpha^2 q^{(2)} t^4 + 7\alpha^3 q^{(3)} t^6 + \ldots).$$

L'intégrale relative à u devant être prise depuis $u=0$ jusqu'à $u=1$, l'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; on aura donc, par le n° **24**,

$$\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\pi}\left(1+\frac{1.3}{2}\alpha q^{(1)} + \frac{1.3.5}{2^2}\alpha^2 q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3}\alpha^3 q^{(3)} + \ldots\right);$$

partant,

$$\frac{(s+1)(s+2)(s+3)\ldots 2s}{1.2.3\ldots s} = \frac{2^{2s}}{\sqrt{(s-\frac{1}{2})\pi}}\left(1+\frac{1.3}{2}\alpha q^{(1)} + \frac{1.3.5}{2^2}\alpha^2 q^{(2)} + \frac{1.3.5.7}{2^3}\alpha^3 q^{(3)} + \ldots\right).$$

Ainsi l'on aura, par une suite très convergente, le terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$.

On parviendra plus simplement à ce résultat par la méthode suivante, qui peut s'étendre à un polynôme quelconque.

35. Nommons y_s le terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a}+a\right)^{2s}$, ou, ce qui revient au même, le terme indépendant de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement du binôme $(c^{\varpi\sqrt{-1}}+c^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2s}$. Si l'on multiplie ce développement par $d\varpi$ et qu'on l'intègre depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\frac{1}{2}\pi$, il est facile de voir que cette intégrale sera $\frac{1}{2}\pi y_s$, et qu'ainsi l'on a

$$y_s = \frac{2}{\pi}\int d\varpi\,(c^{\varpi\sqrt{-1}}+c^{-\varpi\sqrt{-1}})^{2s}.$$

En effet, en développant le binôme renfermé sous le signe $\int$, et substituant, au lieu de $c^{\pm 2r\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $\cos 2r\varpi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2r\varpi$, on aura le terme moyen du binôme, plus une suite de cosinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples; en les multipliant par $d\varpi$ et les intégrant, cette suite se transformera dans une suite de sinus de l'angle 2ϖ et de ses multiples, sinus qui sont nuls aux deux limites $\varpi = 0$ et $\varpi = \frac{1}{2}\pi$. Il ne restera ainsi dans l'intégrale que le terme moyen du binôme, multiplié par $\frac{1}{2}\pi$. Cela posé, si l'on substitue, au lieu du binôme $c^{\varpi\sqrt{-1}} + c^{-\varpi\sqrt{-1}}$, sa valeur $2\cos\varpi$, on aura

$$y_s = \frac{2^{2s+1}}{\pi}\int d\varpi \cos^{2s}\varpi;$$

en supposant $\sin\varpi = u$, on aura

$$y_s = \frac{2^{2s+1}}{\pi}\int du(1-u^2)^{s-\frac{1}{2}},$$

l'intégrale étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$, ce qui coïncide avec ce que l'on a trouvé dans le numéro précédent.

Considérons maintenant le trinôme $\left(\frac{1}{a} + 1 + a\right)^s$, et nommons y_s le terme moyen, ou indépendant de a, dans le développement de ce trinôme. Ce terme sera le terme indépendant de $c^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$ dans le développement du trinôme $(c^{\varpi\sqrt{-1}} + 1 + c^{-\varpi\sqrt{-1}})^s$; on aura conséquemment, en appliquant ici le raisonnement qui précède,

$$y_s = \frac{1}{\pi}\int d\varpi(1 + 2\cos\varpi)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$. La condition du maximum de la fonction $(1 + 2\cos\varpi)^s$ donne $\sin\varpi = 0$, en sorte que les deux limites de l'intégrale, $\varpi = 0$ et $\varpi = \pi$, répondent à des maxima de cette fonction; on partagera donc l'intégrale précédente dans les deux suivantes

$$\int d\varpi(1 + 2\cos\varpi)^s, \quad (-1)^s\int d\varpi(2\cos\varpi - 1)^s,$$

la première de ces intégrales étant prise depuis ϖ nul jusqu'à la valeur de ϖ qui rend nulle la quantité $2\cos\varpi + 1$, et la seconde intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à sa valeur qui rend nulle la quantité $2\cos\varpi - 1$.

Pour obtenir la première intégrale en série convergente, on fera

$$(1 + 2\cos\varpi)^s = 3^s c^{-t^2};$$

en supposant $\alpha = \frac{1}{s}$, extrayant la racine s de chaque membre, et développant $\cos\varpi$ et $c^{-\alpha t^2}$, on aura

$$3 - \varpi^2 + \frac{\varpi^4}{12} - \ldots = 3 - 3\alpha t^2 + \frac{3\alpha^2 t^4}{2} - \ldots,$$

d'où l'on tire, par le retour des suites,

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}} t \sqrt{3}\left(1 - \frac{\alpha t^2}{8} + \ldots\right);$$

partant,

$$\int d\varpi (1 + 2\cos\varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}} \int dt\, c^{-t^2}\left(1 - \frac{3t^2}{8s} + \ldots\right).$$

L'intégrale relative à t doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini ; on aura donc

$$\int d\varpi (1 + 2\cos\varpi)^s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}\left(1 - \frac{3}{16s} + \ldots\right).$$

On trouvera de la même manière

$$\int d\varpi (2\cos\varpi - 1)^s = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s}}\left(1 - \frac{5}{16s} + \ldots\right);$$

on aura donc

$$y_s = \frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s\pi}}\left(1 - \frac{3}{16s} + \ldots\right) + \frac{(-1)^s}{2\sqrt{s\pi}}\left(1 - \frac{5}{16s} + \ldots\right);$$

s étant supposé un très grand nombre, cette quantité se réduit à très peu près à $\frac{3^{s+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{s\pi}}$. C'est l'expression fort approchée du terme moyen, ou indépendant de a, du binôme $\left(\frac{1}{a} + 1 + a\right)^s$.

On déterminera de la même manière le terme moyen d'un polynôme quelconque, élevé à une très haute puissance. Supposons d'abord le nombre des termes du polynôme impair et égal à $2n+1$, et représentons ce polynôme par

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a} + 1 + a + \ldots + a^{n-1} + a^n.$$

En substituant $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ pour a, ce polynôme devient

$$1 + 2\cos\varpi + 2\cos 2\varpi + \ldots + 2\cos n\varpi;$$

or cette fonction est égale à $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$; la puissance s du polynôme est donc

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

Le terme moyen de cette puissance est le terme indépendant de ϖ dans son développement en cosinus de l'angle ϖ et de ses multiples. On aura évidemment ce terme en multipliant la puissance par $d\varpi$, en prenant ensuite l'intégrale depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$ et en la divisant par π. Ce terme est donc égal à

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi \left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

La condition du maximum de $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ donne l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi = (2n+1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varpi.$$

Il y a, depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi = \pi$, plusieurs maxima, alternativement positifs et négatifs. Le premier répond à ϖ nul et donne

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = (2n+1)^s.$$

Pour avoir l'intégrale précédente, depuis ce maximum jusqu'au point où $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ est nul, ce qui a lieu d'abord lorsque $\varpi = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, on fera

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = (2n+1)^s c^{-t^2}.$$

En prenant les logarithmes et réduisant en série, relativement aux puissances de ϖ, la fonction

$$s \log \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi},$$

on aura

$$\frac{n(n+1)}{6} s\varpi^2 + \ldots = t^2,$$

ce qui donne

$$d\varpi = \frac{dt\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}} + \ldots;$$

l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi} \int \frac{dt\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}} c^{-t^2} + \ldots.$$

Elle doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini; car à l'origine, ou lorsque ϖ est nul, t est nul, et à la limite, où $\varpi = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, t est infini; cette intégrale devient donc, en ne considérant que le premier terme et négligeant les suivants, qui sont par rapport à lui de l'ordre $\frac{1}{s}$,

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}}.$$

Le second maximum est négatif, et répond à une valeur de $\frac{2n+1}{2}\varpi$ comprise entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. En effet, l'équation du maximum

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi = (2n+1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varpi$$

donne

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi > \frac{2n+1}{2}\varpi.$$

Ainsi, $\frac{2n+1}{2}\varpi$ étant compris dans le second maximum entre π et 2π, $\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\varpi$ surpasse π; par conséquent $\frac{2n+1}{2}\varpi$ surpasse $\pi+\frac{1}{4}\pi$; il est donc compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$. L'équation précédente du maximum donne

$$\frac{-\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi} = \frac{2n+1}{\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\varpi + (2n+1)^2\sin^2\frac{1}{2}\varpi}}.$$

Ce dernier membre est plus petit que

$$\frac{2n+1}{\frac{2n+1}{2}\varpi\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varpi}{\frac{1}{2}\varpi}};$$

$\frac{1}{2}\varpi$ ne surpassant pas $\frac{1}{2}\pi$, il est facile de s'assurer que $\frac{\sin\frac{1}{2}\varpi}{\frac{1}{2}\varpi}$ n'est jamais moindre que sa valeur qui répond à $\varpi=\pi$, et qui est égale à $\frac{2}{\pi}$; le second membre dont il s'agit est donc généralement plus petit que

$$\frac{2n+1}{\frac{2n+1}{2}\varpi}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Relativement au second maximum, $\frac{2n+1}{2}\varpi$ étant compris entre $\frac{5}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$, ce membre sera plus petit que $(2n+1)\frac{2}{5}$; ainsi la puissance s de $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpassera point $(2n+1)^s(\frac{2}{5})^s$; elle sera donc, lorsque s est un très grand nombre, incomparablement plus petite que la même puissance correspondante au premier maximum, et qui est égale à $(2n+1)^s$.

On verra de la même manière que le troisième maximum est compris entre $\frac{2n+1}{2}\varpi=\frac{9}{4}\varpi$, et $\frac{2n+1}{2}\varpi=\frac{5}{2}\varpi$, et qu'à ce maximum la puissance s de $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpasse pas $(2n+1)^s(\frac{2}{9})^s$; que le quatrième maximum est compris entre $\frac{2n+1}{2}\varpi = \frac{13}{4}\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\varpi = \frac{7}{2}\pi$, et qu'à ce maximum la puissance s de $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ ne surpasse point $(2n+1)^s(\frac{2}{13})^s$, et ainsi de suite.

Maintenant, si, à partir de l'un quelconque de ces maxima, on fait

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s = \left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}\right)^s c^{-t^2},$$

Π étant la valeur de ϖ qui correspond à ce maximum, et si l'on fait

$$\varpi = \Pi + \varpi',$$

on aura, en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation précédente entre ϖ et t,

$$s\log\sin\frac{2n+1}{2}(\Pi+\varpi') - s\log\sin\tfrac{1}{2}(\Pi+\varpi')$$

$$= s\left(\log\sin\frac{2n+1}{2}\Pi - \log\sin\tfrac{1}{2}\Pi\right) - t^2.$$

En développant le premier membre de cette équation suivant les puissances de ϖ', la comparaison de la première puissance donnera d'abord l'équation du maximum

$$\operatorname{tang}\frac{2n+1}{2}\Pi = (2n+1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi.$$

En ne considérant ensuite que la seconde puissance de ϖ', on aura

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)s\varpi'^2 = t^2,$$

ce qui donne

$$d\varpi' = \frac{2\,dt}{\sqrt{n(n+1)2s}};$$

l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s,$$

prise entre les deux limites entre lesquelles $\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$ est nul de part et d'autre du maximum de cette fonction, est donc à très peu près

$$\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}\right)^s.$$

Cette expression a généralement lieu pour les intégrales relatives à tous les maxima qui suivent le premier; seulement il faut n'en prendre que la moitié relativement au dernier qui correspond à $\Pi = \pi$. Il résulte de ce qui précède que cette expression, par rapport au second maximum, est moindre, abstraction faite du signe, que

$$\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}}\left(\frac{2}{5}\right)^s;$$

que, relativement au troisième maximum, elle est moindre que

$$\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}}\left(\frac{2}{9}\right)^s,$$

et ainsi de suite. Lorsque s est un très grand nombre, ces quantités décroissent avec une extrême rapidité, et elles sont incomparablement plus petites que la quantité relative au premier maximum, et qui, comme on l'a vu, est

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{2n(n+1)s\pi}};$$

on peut donc n'avoir égard qu'à cette dernière intégrale, et l'on voit que cela est rigoureux dans le cas de n infini; car l'équation de condition du maximum donne alors $\frac{2n+1}{2}\Pi = \frac{2r+1}{2}\pi$, r étant un nombre entier, ce qui rend $\dfrac{\sin \frac{2n+1}{2}\Pi}{\sin\frac{1}{2}\Pi}$ fini, excepté lorsque Π est zéro, ce qui répond au premier maximum.

Si le polynôme est composé d'un nombre de termes pair et égal à $2n$, tel que

$$\frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{a^{n-\frac{3}{2}}}+\ldots+\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}+a^{\frac{1}{2}}+\ldots+a^{n-\frac{3}{2}}+a^{n-\frac{1}{2}},$$

en y substituant $c^{\varpi\sqrt{-1}}$ au lieu de a, il devient

$$2\cos\tfrac{1}{2}\varpi+2\cos\tfrac{3}{2}\varpi+\ldots+2\cos\frac{2n-1}{2}\varpi,$$

ou $\dfrac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$. Ce polynôme, élevé à une puissance entière et positive, ne peut avoir de terme moyen ou indépendant des cosinus de $\frac{1}{2}\varpi$ et de ses multiples, qu'autant que cette puissance est paire ; représentons-la par $2s$: alors le terme moyen sera

$$\frac{1}{\pi}\int d\varpi\left(\frac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^{2s},$$

l'intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à $\varpi=\pi$. Cette intégrale se compose de diverses intégrales partielles, relatives aux divers maxima de la fonction $\dfrac{\sin n\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}$; mais on s'assurera facilement, par l'analyse précédente, que toutes ces intégrales, lorsque $2s$ est un très grand nombre et lorsque n est plus grand que l'unité, sont incomparablement plus petites que celle qui est relative au premier maximum, qui correspond à ϖ nul ; et alors on trouve à très peu près le terme moyen de la puissance $2s$ du polynôme égal à

$$\frac{(2n)^{2s}\sqrt{3}}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)s\pi}}.$$

En rapprochant ce résultat du précédent, on voit que, si l'on nomme généralement n' le nombre des termes du polynôme et s' la puissance à laquelle il est élevé, le terme moyen du développement sera, lorsqu'il y en a un,

$$\frac{n'^{s'}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{n'^2-1}{2}s'\pi}},$$

et, pour qu'il y ait un terme moyen, $(n'-1)s'$ doit être un nombre pair, c'est-à-dire que l'un ou l'autre au moins des nombres $n'-1$ et s' doit être pair.

36. L'analyse précédente donne encore le coefficient de $a^{\pm l}$ dans le développement du polynôme

$$(a^{-n}+a^{-n+1}+\ldots+a^{-1}+1+a+\ldots+a^{n-1}+a^n)^s.$$

Pour l'obtenir, on observera que le coefficient de a^r dans le développement de ce polynôme est le même que celui de a^{-r}; en nommant donc A_r ce coefficient, en faisant $a=c^{\varpi\sqrt{-1}}$ et réunissant les deux termes du développement relatifs à a^r et a^{-r}, on aura $2A_r\cos r\varpi$ pour leur somme. Maintenant, si l'on multiplie ce polynôme ou sa valeur $\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s$ par $d\varpi\cos l\varpi$, et qu'on intègre le produit depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=\pi$, il est clair que tous les termes disparaîtront, excepté celui où r est égal à l; l'intégrale se réduira donc à $2A_l\int d\varpi\cos^2 l\varpi$, ce qui donne

$$A_l=\frac{1}{\pi}\int d\varpi\cos l\varpi\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s.$$

Pour intégrer cette fonction, on fera, comme ci-dessus,

$$\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varpi}{\sin\frac{1}{2}\varpi}\right)^s=(2n+1)^s c^{-t^2}.$$

En prenant les logarithmes et développant par rapport aux puissances de ϖ, on aura, par le retour des suites, pour ϖ, une expression de cette forme,

$$\varpi = \frac{t\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}(1 + At^2 + \ldots),$$

ce qui transforme l'intégrale précédente dans celle-ci

$$\frac{(2n+1)^s}{\pi}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}\int dt \cos\left[\frac{lt\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s}}\right] c^{-t^2}(1 + 3At^2 + \ldots),$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini. On peut facilement l'obtenir par le n° 26, et l'on trouve, en n'ayant égard qu'à son premier terme, pour sa valeur,

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1).2s\pi}}\, c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}}.$$

C'est la valeur cherchée du coefficient de $a^{\pm l}$ dans le développement du polynôme, lorsque sa puissance s est très élevée.

Cherchons maintenant la somme de tous ces coefficients, depuis celui de a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui de a^l inclusivement, l étant un grand nombre, mais d'un ordre inférieur à s. Pour cela, nous observerons que l'on a, par le n° 10,

$$\Sigma y_l = \frac{1}{c^{\frac{dy_l}{dl}} - 1} = \frac{1}{\frac{dy_l}{dl}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{dy_l}{dl} + \frac{1}{6}\left(\frac{dy_l}{dl}\right)^2 + \ldots\right]}$$

$$= \left(\frac{dy_l}{dl}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{dy_l}{dl}\right)^0 + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} + \ldots;$$

d'où l'on tire, par le numéro cité,

$$\Sigma y_l = \int y_l\, dl - \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} + \ldots + \text{const.}$$

En prenant l'intégrale depuis le terme correspondant à t nul inclusivement, on aura la somme des valeurs de y_l, depuis cette origine jusqu'au terme y_l exclusivement. La constante arbitraire sera égale alors à $\frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{12}\frac{dy_0}{dl} - \ldots$; ainsi la somme des valeurs de y_l, depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement, sera

$$\int y_l\,dl + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_l + \frac{1}{12}\frac{dy_l}{dl} - \frac{1}{12}\frac{dy_0}{dl} + \ldots.$$

Supposons maintenant

$$y_l = \frac{(2n+1)^s\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+1)2s\pi}}\,c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}};$$

alors les différences de y_l seront successivement d'un ordre inférieur les unes aux autres; en ne considérant donc que les trois premiers termes de la série précédente, on aura

$$\int y\,dl + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_l$$

pour la somme des coefficients des termes du développement de la puissance s du polynôme, depuis l nul inclusivement jusqu'à y_l inclusivement. En doublant cette somme, et en retranchant de ce double le terme y_0, on aura pour la somme des coefficients, depuis celui du terme correspondant à a^{-l} inclusivement, jusqu'à celui du terme correspondant à a^l inclusivement,

$$\frac{(2n+1)^s\sqrt{6}}{\sqrt{n(n+1)s\pi}}\left(\int dl\,c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}} + \frac{1}{2}c^{-\frac{\frac{3}{2}l^2}{n(n+1)s}}\right).$$

37. Nous avons supposé dans les exemples précédents que les équations aux différences en y_s n'avaient point de dernier terme; donnons un exemple d'une équation jouissant d'un dernier terme, et pour cela considérons l'équation aux différences

$$p^s = sy_s + (s-i)y_{s+1}.$$

En faisant

$$y_s = \int x^{s-1}\varphi\,dx,$$

on aura

$$p^s = x^s\varphi(1+x) - \int x^s[(x+1)\,d\varphi + (i+1)\varphi\,dx],$$

ce qui donne d'abord, pour déterminer φ, l'équation

$$(1+x)\,d\varphi + (i+1)\varphi\,dx = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\varphi = \frac{A}{(1+x)^{i+1}},$$

A étant une constante arbitraire. Ensuite on a

$$p^s = x^s \varphi(1+x)$$

ou

$$p^s = \frac{A x^s}{(1+x)^i},$$

d'où l'on tire

$$x = p, \quad A = (1+p)^i,$$

en sorte que

$$y_s = (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = p$. En ajoutant à cette valeur de y_s celle-ci

$$B(1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et B étant une arbitraire; on aura pour l'intégrale complète de la proposée

$$y_s = B \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} + (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme

$$y_s = B' \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

la première intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et la seconde étant prise depuis $x = p$ jusqu'à x infini.

Maintenant l'intégrale de la proposée

$$p^s = s y_s + (s-i) y_{s+1}$$

est

$$y_s = \frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+1)} \left[Q - \sum \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s \right],$$

Q étant une arbitraire et $\sum$ étant la caractéristique des différences finies; en sorte que la fonction $\sum \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s$ est égale à

$$1 + ip + \frac{i(i-1)}{1.2} p^2 + \ldots + \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)} p^{s-1},$$

c'est-à-dire à la somme des s premiers termes du binôme $(1+p)^i$. Si l'on compare cette expression de y_s à la précédente, on aura

$$\text{B}' \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}} - (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)\ldots(i-s+1)} \left[\text{Q} - \sum \frac{i(i-1)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s \right].$$

Si l'on fait $s = 1$ dans cette équation et si l'on observe que le produit $1.2.3\ldots(s-1)$ se réduit alors à l'unité, comme on l'a vu dans le n° 34, on trouve, après les intégrations, $\text{B}' = \text{Q}$. Ainsi, B' étant une arbitraire, cette équation se partage dans les deux suivantes

$$\frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)\ldots(i-s+1)} = \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(s-1)}{i(i-1)\ldots(i-s+1)} \sum \frac{i(i-1)\ldots(i-s+1)}{1.2.3\ldots s} p^s = (1+p)^i \int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}};$$

d'où l'on tire

$$1 + ip + \frac{i(i-1)}{1.2} p^2 + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)} p^{s-1} = (1+p)^i \frac{\displaystyle\int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}}}{\displaystyle\int \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{i+1}}},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = p$ jusqu'à x infini, et celle du dénominateur étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Lorsque s et i sont de grands nombres, il sera facile de réduire ces deux intégrales en séries convergentes, par les formules des n^{os} 22 et 23. On aura ainsi la somme de s premiers termes du binôme élevé à une grande puissance, par une approximation d'autant plus rapide que cette puissance sera plus haute.

Si l'on effectue les intégrations, l'équation précédente devient

$$1 + ip + \frac{i(i-1)}{1.2}p^2 + \ldots + \frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-s+2)}{1.2.3\ldots(s-1)}p^{s-1}$$

$$= (1+p)^{s-1}\left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{i-s+1}{1}\,\dfrac{p}{1+p} + \dfrac{(i-s+1)(i-s+2)}{1.2}\,\dfrac{p^2}{(1+p)^2} + \ldots \\ + \dfrac{(i-s+1)\ldots(i-1)}{1.2.3\ldots(s-1)}\,\dfrac{p^{s-1}}{(1+p)^{s-1}} \end{array}\right\}.$$

Le second membre de cette équation est une transformation de la somme partielle des termes du binôme $(1+p)^i$, transformation qui peut être utile.

De l'approximation des différences infiniment petites et finies, très élevées, des fonctions.

38. Considérons une fonction quelconque de z, que nous représenterons par $\varphi(z)$. En y changeant z en $z+t$, désignons par y_s le coefficient de t^s dans le développement de cette fonction; nous aurons

$$\frac{d^s\varphi(z+t)}{dt^s} = 1.2.3\ldots s.y_s,$$

t étant supposé nul après les différentiations, et, comme on a

$$\frac{d\,\varphi(z+t)}{dt} = \frac{d\,\varphi(z)}{dz},$$

en supposant t nul, on aura

$$\frac{d^s\varphi(z)}{dz^s} = 1.2.3\ldots s.y_s.$$

Ainsi la recherche de la différence $s^{\text{ième}}$ de $\varphi(z)$ se réduit à développer la fonction $\varphi(z+t)$ en série.

Supposons que cette fonction de t soit une puissance d'un polynôme en t, que nous représenterons par

$$(a + bt + ct^2 + \ldots)^\mu.$$

En exprimant par

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_s t^s + \ldots$$

son développement en série, on aura, en prenant les différences logarithmiques,

$$\frac{\mu(b+2ct+\ldots)}{a+bt+ct^2+\ldots}=\frac{y_1+2y_2t+\ldots+sy_st^{s-1}+\ldots}{y_0+y_1t+y_2t^2+\ldots+y_st^s+\ldots}.$$

Multipliant en croix et comparant les termes multipliés par t^{s-1}, on aura

$$asy_s+b(s-1)y_{s-1}+c(s-2)y_{s-2}+\ldots=\mu by_{s-1}+2\mu cy_{s-2}+\ldots.$$

Représentons par $\int x^{s-1}\varphi\,dx$ l'expression de y_s; cette équation devient

$$\begin{aligned}0&=x^s\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)\varphi\\&\quad-\int x^s\left[d\varphi\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)+\mu\varphi\,dx\left(\frac{b}{x^2}+\frac{2c}{x^3}+\ldots\right)\right].\end{aligned}$$

En égalant séparément à zéro la partie de cette équation affectée du signe intégral, on a

$$0=d\varphi\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)+\mu\varphi\,dx\left(\frac{b}{x^2}+\frac{2c}{x^3}+\ldots\right);$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\varphi=\mathrm{A}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)^{\mu},$$

A étant une constante arbitraire. La partie de l'équation précédente hors du signe intégral donnera ensuite, pour déterminer les limites de l'intégrale,

$$0=x^s\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots\right)^{\mu+1};$$

ces limites sont donc $x=0$ et x égal aux diverses racines de l'équation

$$0=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\ldots.$$

On aura donc, par les méthodes précédentes et par une approximation très prompte, les coefficients des puissances très élevées de t dans le développement en série de la puissance

$$(a+bt+ct^2+\ldots)^\mu,$$

et par conséquent on aura les différentielles très élevées de la puissance

$$(a'+b'z+c'z^2+\ldots)^\mu,$$

qui se change dans la précédente en changeant z dans $z+t$ et faisant

$$\begin{aligned} a &= a' + b'z + c'z^2 + \ldots, \\ b &= b' + 2c'z + \ldots, \\ c &= c' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Appliquons cette analyse à un exemple.

z étant le sinus d'un angle θ, on aura

$$\frac{d^{s+1}\theta}{dz^{s+1}} = \frac{d^s}{dz^s}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Pour avoir l'expression du second membre de cette équation, nous observerons que l'on a, par ce qu'on vient de voir,

$$\frac{d^s}{dz^s}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1.2.3\ldots s.y_s,$$

y_s étant le coefficient de t^s dans le développement de $[1-(z+t)^2]^{\frac{1}{2}}$. On aura ensuite

$$y_s = \mathrm{A}\int x^{s-1}\,dx\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

les limites de l'intégrale étant données par l'équation

$$x^s\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces limites sont

$$x = -\frac{1}{1+z},\qquad x = 0,\qquad x = \frac{1}{1-z}.$$

Comme x a trois valeurs, l'expression de y_s prend cette forme, par le n° 29,

$$y_s = \mathrm{A}\int x^{s-1}\,dx\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{A}'\int x^{s-1}\,dx\left[1-\left(z+\frac{1}{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

A et A′ étant des constantes arbitraires, et la première intégrale étant prise depuis $x = -\frac{1}{1+z}$ jusqu'à $x = 0$, et la seconde étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{1-z}$. Si l'on fait

$$x = \frac{z+\cos\varpi}{1-z^2},$$

l'expression précédente de y_s devient

$$y_s = \mathrm{B}\int \frac{d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s}{(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}} + \mathrm{B}'\int \frac{d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s}{(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}},$$

la première intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde étant prise depuis ce dernier angle jusqu'à $\varpi = \pi$. Pour déterminer les arbitraires B et B′, on observera que

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad y_1 = \frac{z}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où il est facile de conclure

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}' = \frac{1}{\pi};$$

partant

$$y_s = \frac{1}{\pi(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}}\int d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s,$$

l'intégrale étant prise depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = \pi$. En prenant cette intégrale et observant que

$$\int d\varpi\cos^{2r}\varpi = \frac{1}{2^{2r}}\int d\varpi\left(c^{\varpi\sqrt{-1}} + c^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)^{2r}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots 2r}{2^{2r}(1.2.3\ldots r)^2}\pi = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r}\pi,$$

on aura

$$(a)\quad y_s = \frac{1}{(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}}\left(\begin{array}{l} z^s + \frac{1}{2}\,\frac{s(s-1)}{1.2}\,z^{s-2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}\,z^{s-4} \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)}{1.2.3.4.5.6}\,z^{s-6} + \ldots \end{array}\right).$$

Cette expression est fort composée, lorsque s est un grand nombre : mais alors on peut obtenir sa valeur d'une manière fort approchée, en appliquant à l'expression de y_s, sous forme d'intégrale définie, les méthodes exposées ci-dessus. La fonction sous le signe intégral ayant deux maxima, l'un à l'origine de l'intégrale et l'autre à son extrémité, nous la décomposerons dans les deux suivantes

$$y_s = \frac{1}{\pi(1-z^2)^{s+\frac{1}{2}}}\left[\int d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s + (-1)^s \int d\varpi\,(\cos\varpi - z)^s\right],$$

la première intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont le cosinus est $-z$, et la seconde intégrale étant prise depuis ϖ nul jusqu'à ϖ égal à l'angle dont z est le cosinus. Soit $\frac{1}{s} = \alpha$, et faisons

$$(z+\cos\varpi)^s = (1+z)^s c^{-t^2};$$

on aura, en prenant les logarithmes et réduisant $\cos\varpi$ en série,

$$\log\left[1 - \frac{\varpi^2}{2(1+z)} + \frac{\varpi^4}{24(1+z)} - \ldots\right] = -\alpha t^2,$$

d'où il est facile de conclure

$$\varpi = \alpha^{\frac{1}{2}} t\sqrt{2(1+z)}\left[1 - \frac{\alpha(2-z)}{12}\,t^2 + \ldots\right];$$

on aura ainsi, en observant que l'intégrale doit être prise depuis t nul jusqu'à t infini,

$$\int d\varpi\,(z+\cos\varpi)^s = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{2}(1+z)^{s+\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\alpha(2-z)}{8} + \ldots\right].$$

En changeant z dans $-z$, on aura

$$\int d\varpi(\cos\varpi - z)^s = \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{2}(1-z)^{s+\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\alpha(2+z)}{8} + \ldots\right];$$

partant

$$(b)\quad \begin{cases} y_s = \dfrac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2s\pi}}\left[1 - \dfrac{\alpha(2-z)}{8} + \ldots\right] \\ \quad + \dfrac{(-1)^s}{(1+z)^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2s\pi}}\left[1 - \dfrac{\alpha(2+z)}{8} + \ldots\right]; \end{cases}$$

dans le cas de s très grand, cette expression se réduit à fort peu près à ce terme très simple,

$$\frac{1}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2s\pi}}.$$

Si l'on multiplie l'expression (b) de y_s par le produit $1.2.3\ldots s$, produit qui, par le n° 33, est égal à

$$s^{s+\frac{1}{2}}c^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{12} + \ldots\right),$$

on aura à très peu près

$$\frac{d^{s+1}\theta}{dz^{s+1}} = \frac{d^s \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{dz^s} = \frac{s^s c^{-s}}{(1-z)^{s+\frac{1}{2}}}.$$

39. Lorsqu'une fonction y_s de s peut être exprimée par une intégrale définie de la forme $\int x^s \varphi\, dx$, les différences infiniment petites et finies d'un ordre quelconque n seront, par le n° 21,

$$\frac{d^n y_s}{ds^n} = \int x^s \varphi\, dx\, (\log x)^n,$$

$$\Delta^n y_s = \int x^s \varphi\, dx\, (x-1)^n.$$

Si, au lieu d'exprimer la fonction de s par l'intégrale $\int x^s \varphi\, dx$, on l'exprime par l'intégrale $\int c^{-sx}\varphi\, dx$, alors on a

$$\frac{d^n y_s}{ds^n} = (-1)^n \int x^n \varphi\, dx\, c^{-sx},$$

$$\Delta^n y_s = \int \varphi\, dx\, c^{-sx}(c^{-x} - 1)^n.$$

Pour avoir les intégrales $n^{\text{ièmes}}$, soit finies, soit infiniment petites, il suffira de faire n négatif dans ces expressions. On peut observer qu'elles sont généralement vraies, quel que soit n, en le supposant même fractionnaire, ce qui donne le moyen d'avoir les différences et les intégrales correspondantes à des indices fractionnaires. Toute la difficulté se réduit à mettre sous la forme d'intégrales définies une fonction de s, ce que l'on peut faire par les n^{os} 29 et 30, lorsque cette fonction est donnée par une équation linéaire aux différences infiniment petites ou finies. Comme on est principalement conduit dans l'analyse des hasards à des expressions qui ne sont que les différences finies des fonctions, ou une partie de ces différences, nous allons y appliquer les méthodes précédentes et déterminer leurs valeurs en séries convergentes.

40. Considérons d'abord la fonction $\frac{1}{s^i}$. En la désignant par y_s, elle sera déterminée par l'équation aux différences infiniment petites

$$o = s\frac{dy_s}{ds} + iy_s.$$

Si l'on suppose, dans cette équation,

$$y_s = \int c^{-sx}\varphi\, dx, \qquad c^{-sx} = \delta y,$$

elle deviendra

$$o = \int \varphi\, dx\left(i\,\delta y + x\frac{d\,\delta y}{dx}\right),$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties, conformément à la méthode du n° 29, les deux équations

$$o = i\varphi - \frac{d(x\varphi)}{dx},$$
$$o = x\varphi\,\delta y.$$

La première donne, en l'intégrant,

$$\varphi = \mathrm{A}x^{i-1},$$

A étant une arbitraire. La seconde équation donne pour les limites de l'intégrale $\int c^{-sx}\varphi\,dx$, $x=0$ et $x=\infty$. On aura donc, dans ces limites,

$$\frac{1}{s^i}=\mathrm{A}\int x^{i-1}\,dx\,c^{-sx}.$$

Pour déterminer la constante A, nous observerons que, s étant 1, le premier membre de cette équation se réduit à l'unité, ce qui donne

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x}},\qquad \text{partant}\qquad \frac{1}{s^i}=\frac{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-sx}}{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x}};$$

on aura donc par le numéro précédent

$$(\mu)\qquad \Delta^n\frac{1}{s^i}=\frac{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-sx}(c^{-x}-1)^n}{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x}},$$

les intégrales du numérateur et du dénominateur étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Pour développer cette expression en série, supposons

$$x^{i-1}c^{-sx}(c^{-x}-1)^n=a^{i-1}c^{-sa}(c^{-a}-1)^n c^{-t^2},$$

a étant la valeur de x qui répond au maximum du premier membre de cette équation. Si l'on fait $x=a+\theta$, on aura, en prenant les logarithmes de chaque membre, et en développant le logarithme du premier dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de θ,

$$h\theta^2+h'\theta^3+h''\theta^4+\ldots=t^2,$$

les quantités a, h, h', h'', ... étant données par les équations suivantes :

$$0=\frac{i-1}{a}-s-\frac{nc^{-a}}{c^{-a}-1},$$

$$h=\frac{i-1}{2a^2}-\frac{n}{2}\,\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}+\frac{n}{2}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2,$$

$$h'=-\frac{i-1}{3a^3}+\frac{n}{6}\,\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}-\frac{n}{2}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2+\frac{n}{3}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^3,$$

$$h''=\frac{i-1}{4a^4}-\frac{n}{24}\,\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}+\frac{7n}{24}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^2-\frac{n}{2}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^3+\frac{n}{4}\left(\frac{c^{-a}}{c^{-a}-1}\right)^4,$$

....

on aura donc, par le retour des suites,

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{h}}\left(1 - \frac{h't}{2h\sqrt{h}} + \frac{5h'^2 - 4hh''}{8h^3}t^2 + \ldots\right),$$

et cette suite sera d'autant plus convergente que le nombre n sera plus considérable. En substituant cette valeur de θ dans la fonction $\int d\theta c^{-t^2}$, et prenant l'intégrale dans les limites $t = -\infty$ et $t = \infty$, limites qui correspondent aux limites $x = 0$ et $x = \infty$, on aura

$$\int x^{i-1}\,dx\,c^{-sx}(c^{-x}-1)^n = a^{i-1}c^{-sa}(c^{-a}-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h}}\left(1 + \frac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3} + \ldots\right).$$

On a d'ailleurs

$$\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x} = \frac{1}{i}\int x^i\,dx\,c^{-x},$$

et lorsque i est très grand, on a, par le n° 32,

$$\int x^i\,dx\,c^{-x} = i^{i+\frac{1}{2}}c^{-i}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12i} + \ldots\right);$$

en divisant donc l'une par l'autre les deux valeurs de

$$\int x^{i-1}\,dx\,c^{-sx}(c^{-x}-1)^n \quad \text{et} \quad \int x^{i-1}\,dx\,c^{-x},$$

on aura

$$\Delta^n\frac{1}{s^i} = \frac{\left(\frac{a}{i}\right)^{i-1}c^{i-sa}(c^{-a}-1)^n}{\sqrt{2hi}}\left(\begin{array}{l}1 + \dfrac{15h'^2 - 12hh''}{16h^3}\\[2mm] -\dfrac{1}{12i} - \ldots\end{array}\right).$$

Pour avoir la différence finie $n^{\text{ième}}$ de la puissance positive s^i, il suffit, par le n° 30, de changer dans cette équation i dans $-i$, et l'on aura

$$(\mu')\quad\left\{\begin{array}{l}\Delta^n s^i = (s+n)^i - n(s+n-1)^i + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(s+n-2)^i - \ldots\\[3mm] \quad = \dfrac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1}c^{sa-i}(c^a-1)^n}{\sqrt{\dfrac{i(i+1)}{a^2} - ni\,.\,\dfrac{c^a}{(c^a-1)^2}}}\left(1 + \dfrac{15l'^2 - 12ll''}{16l^3} + \dfrac{1}{12i} + \ldots\right),\end{array}\right.$$

$a, l, l', l'', \ldots$ étant données par les équations

$$o = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a - 1},$$

$$l = -\frac{i+1}{2a^2} - \frac{n}{2}\frac{c^a}{c^a-1} + \frac{n}{2}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2,$$

$$l' = -\frac{i+1}{3a^3} + \frac{n}{6}\frac{c^a}{c^a-1} - \frac{n}{2}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2 + \frac{n}{3}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^3,$$

$$l'' = -\frac{i+1}{4a^4} - \frac{n}{24}\frac{c^a}{c^a-1} + \frac{7n}{24}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^3 + \frac{n}{4}\left(\frac{c^a}{c^a-1}\right)^4,$$

....

La série (μ') cesse d'être convergente lorsque a est une très petite fraction de l'ordre $\frac{1}{n}$; car il est visible que, les quantités $l, l', l'', \ldots$ formant alors une progression croissante, chaque terme de la série est du même ordre que celui qui le précède. Pour déterminer dans quel cas a est très petit, reprenons l'équation

$$o = \frac{i+1}{a} - s - \frac{nc^a}{c^a - 1}.$$

On peut la transformer dans la suivante, lorsque a est très petit,

$$o = \frac{i+1}{a} - s - \frac{n}{a}\left(1 + \frac{a}{2} + \ldots\right),$$

d'où l'on tire à très peu près, dans la supposition de a très petit,

$$a = \frac{i+1-n}{s+\frac{n}{2}};$$

ainsi a sera fort petit toutes les fois que $i - n$ sera peu considérable relativement à $s + \frac{n}{2}$. Dans ce cas, on déterminera $\Delta^n s^i$ par la méthode suivante.

Reprenons l'équation

$$\Delta^n s^i = \frac{\int \frac{dx}{x^{i+1}} c^{-sx}(c^{-x}-1)^a}{\int \frac{dx}{x^{i+1}} c^{-x}},$$

dans laquelle se change la formule (μ), lorsqu'on y fait i négatif et égal à $-i$. On peut mettre la fonction $(c^{-x}-1)^n$ sous cette forme

$$c^{-\frac{nx}{2}}\left(c^{-\frac{x}{2}}-c^{\frac{x}{2}}\right)^n=(-1)^n c^{-\frac{nx}{2}} x^n\left(1+\frac{1}{1.2.3}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{x^4}{2^4}+\ldots\right)^n$$
$$=(-1)^n c^{-\frac{nx}{2}} x^n\left[1+\frac{nx^2}{24}+\frac{n(5n-2)}{15.16.24}x^4+\ldots\right];$$

on aura donc

$$\int\frac{dx}{x^{i+1}}c^{-sx}(c^{-x}-1)^n=(-1)^n\int\frac{dx}{x^{i+1-n}}c^{-\left(s+\frac{n}{2}\right)x}\left(1+\frac{nx^2}{24}+\ldots\right).$$

Si l'on fait

$$\left(s+\frac{n}{2}\right)x=x',$$

on aura généralement

$$\int\frac{dx}{x^r}c^{-\left(s+\frac{n}{2}\right)x}=\left(s+\frac{n}{2}\right)^{r-1}\int\frac{dx'\,c^{-x'}}{x'^r};$$

or on a trouvé dans le n° 33, par le passage du réel à l'imaginaire,

$$\int\frac{dx'\,c^{-x'}}{x'^r}=\frac{2\pi(-1)^{r-\frac{1}{2}}}{\int x'^{r-1}dx'\,c^{-x'}}=\frac{2\pi(-1)^{r-\frac{1}{2}}}{(r-1)(r-2)(r-3)\ldots};$$

partant on aura

$$(\mu'')\quad\left\{\begin{aligned}&\Delta^n s^i=(i-n+1)(i-n+2)\ldots\left(s+\frac{n}{2}\right)^{i-n}\\&\times\left\{\begin{aligned}&1+(i-n)(i-n-1)\frac{n}{24\left(s+\frac{n}{2}\right)^2}\\&+(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)\frac{n(5n-2)}{15.16.24\left(s+\frac{n}{2}\right)^4}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Cette série sera très convergente si $i-n$ est peu considérable relativement à $s+\frac{n}{2}$; elle peut d'ailleurs être employée dans le cas où i est fractionnaire, comme il est facile de s'en convaincre. Quant au produit $(i-n+1)(i-n+2)\ldots i$, il est facile de l'obtenir en série convergente, par le n° 33.

La formule précédente est une application très simple de l'équation

$$\Delta^n y_s = \left(c^{\frac{dy_{s+\frac{n}{2}}}{ds}} - c^{-\frac{dy_{s+\frac{n}{2}}}{ds}}\right)^n,$$

que nous avons donnée dans le n° **10**; car, en développant le second membre de cette équation et faisant $y_s = s^i$, on obtient directement cette formule que nous avons conclue des passages du réel à l'imaginaire, ce qui confirme la justesse de ces passages.

41. Les formules (μ') et (μ'') des numéros précédents supposent n égal ou moindre que i. En effet, si l'on considère l'expression

$$\Delta^n s^i = \frac{\int \frac{dx\, c^{-sx}}{x^{i+1}}(c^{-x}-1)^n}{\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{i+1}}},$$

dont le développement a produit ces formules, on voit que, les limites des intégrales du numérateur et du dénominateur étant déterminées par le numéro précédent, en égalant à zéro le produit des quantités sous le signe intégral par x, ces limites seront toutes imaginaires lorsque i sera plus grand que n, au lieu que, dans le cas où i sera moindre que n, les limites de l'intégrale du numérateur seront réelles, tandis que celles du dénominateur seront imaginaires; il faut donc alors ramener ces dernières limites à l'état réel. Pour y parvenir, nous observerons que l'on a généralement

$$\int x^{i-1}\, dx\, c^{-x} = \frac{\int x^{i+r}\, dx\, c^{-x}}{i(i+1)(i+2)\ldots(i+r)}.$$

Si l'on fait dans cette expression i négatif et égal à $-r-\frac{m}{n}$, m étant moindre que n, on aura

$$\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1} \int x^{-\frac{m}{n}} dx\, c^{-x}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i};$$

or on a, par le n° 33, les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i = \frac{\int x^i\, dx\, c^{-x}}{\int x^{\frac{m}{n}} dx\, c^{-x}},$$

i étant ici positif : c'est l'expression de $\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{i+1}}$ dont on doit faire usage dans le cas que nous examinons ici. Si l'on fait $x = t^n$, on aura

$$\frac{n}{m}\int x^{-\frac{m}{n}} dx\, c^{-x} \int x^{\frac{m}{n}} dx\, c^{-x} = n^2 \int t^{n-m-1} dt\, c^{-t^n} \int t^{m-1} dt\, c^{-t^n},$$

et l'équation (T) du n° 24 donne, en y changeant r dans $m+1$,

$$n^2 \int t^{n-m-1} dt\, c^{-t^n} \int t^{m-1} dt\, c^{-t^n} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi};$$

on aura donc

$$\int \frac{dx\, c^{-x}}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1}\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi \int x^i\, dx\, c^{-x}};$$

d'où l'on tire, en substituant cette valeur dans l'expression précédente de $\Delta^n s^i$,

$$(\mu''') \qquad \Delta^n s^i = \frac{(-1)^{r+1}\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi}\int x^i\, dx\, c^{-x} \int \frac{dx}{x^{i+1}} c^{-sx}(c^{-x}-1)^n,$$

les intégrales étant prises depuis x nul jusqu'à x infini.

Le procédé qui vient de nous conduire à cette équation est fondé sur les passages réciproques du réel à l'imaginaire; mais on peut y parvenir directement par l'analyse suivante, qui confirmera ainsi la justesse de ces passages.

Si l'on prend l'intégrale $\int \frac{dx\, c^{-sx}}{x^{i+1}}$ depuis $x = \alpha$ jusqu'à x infini, on aura, en faisant $i = r + \frac{m}{n}$, la fonction

$$\frac{(-1)^r c^{-s\alpha}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i\alpha^{\frac{m}{n}}}\left\{\begin{array}{l} s^r - \frac{m}{n}\frac{s^{r-1}}{\alpha} + \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\frac{s^{r-2}}{\alpha^2} - \ldots \\ \quad + (-1)^r \frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i\frac{1}{\alpha^r} \end{array}\right\}$$
$$+ \frac{(-1)^{r+1} s^{r+1}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i}\int \frac{dx\, c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Or on a généralement, lorsque α est infiniment petit,

$$\frac{\Delta^n c^{-s\alpha} s^{r-f}}{\alpha^f} = 0,$$

f étant zéro ou un nombre entier positif; car, si l'on développe $c^{-s\alpha}$ en série, et que l'on désigne par $k\alpha^q s^q$ un terme quelconque de cette série, on aura

$$k\alpha^{q-f}\Delta^n s^{q+r-f} = 0.$$

En effet, si q surpasse f, ce terme devient nul par la supposition de α infiniment petit. Si q est égal ou moindre que f, $q + r - f$ sera égal ou moindre que r, et, par conséquent, il sera plus petit que n, et alors, par la propriété connue des différences finies, $\Delta^n s^{q+r-f}$ sera nul. Il suit de là que $\Delta^n \int \frac{dx\, c^{-sx}}{x^{i+1}}$ ou $\int \frac{dx\, c^{-sx}(c^{-x}-1)^n}{x^{i+1}}$ se réduit à

$$\frac{(-1)^{r+1}\Delta^n s^{r+1}\int \frac{dx\, c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}}}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à infini. Si l'on fait $x = \frac{x'}{s}$, on aura

$$\int \frac{dx\, c^{-sx}}{x^{\frac{m}{n}}} = s^{\frac{m}{n}-1}\int \frac{dx'\, c^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}},$$

les intégrales étant prises depuis x et x' nuls jusqu'à x et x' infinis; on aura donc

$$\int \frac{dx\, c^{-sx}(c^{-x}-1)^n}{x^{i+1}} = \frac{(-1)^{r+1}\int \frac{dx'\, c^{-x'}}{x'^{\frac{m}{n}}}\Delta^n s^i}{\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\cdots i}.$$

En substituant pour $\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\cdots i$ sa valeur $\frac{\int x^i\, dx\, c^{-x}}{\int x^{\frac{m}{n}}\, dx\, c^{-x}}$, et observant que l'on a, par ce qui précède,

$$\frac{n}{m}\int x'^{-\frac{m}{n}}\, dx'\, c^{-x'} \int x^{\frac{m}{n}}\, dx\, c^{-x} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi},$$

on aura la formule (μ''').

Si i est un très grand nombre, on aura, par le n° 33, l'intégrale

$$\int x^i\, dx\, c^{-x};$$

on aura ensuite, par ce qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{dx\, c^{-sx}(c^{-x}-1)^n}{x^{i+1}};$$

ainsi l'on obtiendra, par une série très convergente, la valeur du second membre de la formule citée.

Supposons i infiniment petit, r sera nul, et $\frac{m}{n}$ sera une fraction infiniment petite; on aura donc

$$\sin\frac{m}{n}\pi = \frac{m}{n}\pi = i\pi,$$

$$\Delta^n\left(\frac{s^i-1}{i}\right) = \Delta^n \log s.$$

La formule (μ''') donnera ainsi

$$\Delta^n \log s = -\int \frac{c^{-sx}\, dx}{x}(c^{-x}-1)^n,$$

expression que l'on réduira facilement en série convergente, lorsque n est un grand nombre.

42. On a souvent besoin, dans l'analyse des hasards, de ne considérer dans l'expression de $\Delta^n s^i$ que la partie dans laquelle les quantités élevées à la puissance i sont positives. Nous allons déterminer la somme de tous ces termes. Pour cela, reprenons la formule (μ''') du numéro précédent. Si l'on y substitue au lieu de $\Delta^n s^i$ sa valeur

$$(s+n)^i - n(s+n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s+n-2)^i - \ldots,$$

et si l'on y change ensuite s dans $-s$, on aura, en ne continuant les deux séries du premier membre de l'équation suivante que jusqu'aux termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i devient négative, et observant que le signe $+$ a lieu si n est pair et le signe $-$ si n est impair,

$$\begin{aligned}
&(1)^i\left[(n-s)^i - n(n-s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-s-2)^i - \ldots\right] \\
&\pm(-1)^i\left[s^i - n(s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s-2)^i - \ldots\right] \\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\pi}\sin\frac{m\pi}{n}\int x^i\,dx\,c^{-x}\int\frac{dx}{x^{i+1}}c^{sx}(c^{-x}-1)^n.
\end{aligned}$$

Si l'on change dans la dernière intégrale x en $-2x'\sqrt{-1}$, elle devient, après toutes les réductions,

$$2^{n-i}(-1)^{\frac{n+i}{2}}\int x'^{n-i-1}\,dx'\left[\cos(2s-n)x' - \sqrt{-1}\sin(2s-n)x'\right]\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n,$$

l'intégrale relative à x' étant prise depuis x' nul jusqu'à x' infini. On aura donc

$$(o)\quad\left\{\begin{aligned}
&(1)^i\left[(n-s)^i - n(n-s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-s-2)^i - \ldots\right] \\
&\pm(-1)^i\left[s^i - n(s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s-2)^i - \ldots\right] \\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\pi}2^{n-i}(-1)^{\frac{n+i}{2}}\sin\frac{m\pi}{n}\int x\,dx\,c^{-x} \\
&\quad\times\int x'^{n-i-1}\,dx'\left[\cos(2s-n)x' - \sqrt{-1}\sin(2s-n)x'\right]\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n.
\end{aligned}\right.$$

Supposons $r = n - 1$, ce qui donne $i = n - 1 + \frac{m}{n}$, et comparons séparément les parties réelles et les parties imaginaires de l'équation précédente. On a

$$(1)^i = (1)^{n-1}(1)^{\frac{m}{n}} = 1^{\frac{m}{n}};$$

or on a

$$1 = \cos 2l\pi + \sqrt{-1}\sin 2l\pi,$$

l étant un nombre entier; on aura donc

$$(1)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2lm\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2lm\pi}{n}.$$

Les valeurs correspondantes de $(-1)^{\frac{m}{n}}$ sont

$$\cos(2l+1)\frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin(2l+1)\frac{m\pi}{n}.$$

Maintenant $(1)^i$ devant être supposé égal à l'unité dans l'équation (o), il faut choisir l de manière que $\cos\frac{2lm\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2lm\pi}{n}$ soit 1, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{2lm\pi}{n} = 2f\pi,$$

f étant un nombre entier que nous pouvons supposer nul; alors on a

$$(-1)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{n};$$

mais on a

$$\pm(-1)^i = \pm(-1)^{n-1+\frac{m}{n}} = -(-1)^{\frac{m}{n}};$$

la partie imaginaire du premier membre de l'équation (o) est donc

$$-\sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{n}\left[s^i - n(s-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(s-2)^i - \ldots\right].$$

Déterminons la partie imaginaire du second membre de l'équation (o). On a

$$(-1)^{r+n-1} = (-1)^{2n-2} = 1;$$

on a ensuite

$$(-1)^{\frac{n+i}{2}+r+1} = -\sqrt{-1}\,(-1)^{\frac{m}{2n}},$$

à cause de $r = n - 1$ et de $i = n - 1 + \frac{m}{n}$; or on a, par ce qui précède,

$$(-1)^{\frac{m}{2n}} = \cos\frac{m\pi}{2n} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{2n};$$

on aura donc, pour la partie imaginaire du second membre de l'équation (o),

$$-2^{n-i}\sqrt{-1}\,\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\pi}\int dx'\,x'^{-\frac{m}{n}}\cos\left[(2s-n)x' - \frac{m\pi}{2n}\right]\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n \int x^i\,dx\,c^{-x}.$$

Si l'on égale cette fonction à la partie imaginaire du premier membre de cette équation ; si l'on observe de plus que

$$\begin{aligned}\int x^i\,dx\,c^{-x} &= \left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots i\int x^{\frac{m}{n}}\,dx\,c^{-x}\\ &= \left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots ink,\end{aligned}$$

en faisant $k = \int t^{n+m-1}\,dt\,c^{-t^n}$, l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t infini ; enfin, si l'on suppose $2s - n = z$, on aura

$$(p)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{(n+z)^{n-1+\frac{m}{n}} - n(n+z-2)^{n-1+\frac{m}{n}} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^{n-1+\frac{m}{n}} - \ldots}{\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(2+\frac{m}{n}\right)\ldots\left(n-1+\frac{m}{n}\right)}\\ &\quad= \frac{nk\,2^n}{\pi}\int x'^{-\frac{m}{n}}\,dx'\cos\left(zx' - \frac{m\pi}{2n}\right)\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n.\end{aligned}\right.$$

Dans le premier membre de cette formule, la série doit être continuée jusqu'à ce que l'on arrive à une quantité négative élevée à la puissance $n - 1 + \frac{m}{n}$, z ne surpassant point n ; dans le second membre, l'intégrale doit être prise depuis x' nul jusqu'à x' infini.

La comparaison des parties réelles des deux membres de l'équation (o) conduit au même résultat, et d'ailleurs elle prouve que, pour la coïncidence des deux résultats tirés de la comparaison des quantités réelles entre elles et des quantités imaginaires entre elles, il est nécessaire de supposer, comme nous l'avons fait, $f = 0$.

On peut encore parvenir à la formule (p) au moyen de l'équation suivante :

$$i[\varphi(z+2, n) - \varphi(z, n)] = (n+z+2)\,\varphi'(z+2, n) + (n-z)\,\varphi'(z, n),$$

$\varphi'(z, n)$ étant le coefficient de dz dans la différentielle de $\varphi(z, n)$, et $\varphi(z, n)$ étant égal à

$$(n+z)^i - n(n+z-2)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^i - \ldots,$$

tous les termes dans lesquels la quantité élevée à la puissance i est négative devant être rejetés, et z ne surpassant point n, en sorte que la quantité élevée à la puissance i ne surpasse jamais $2n$. En résolvant cette équation aux différences infiniment petites et finies, par la méthode du n° 30, et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on parvient à la forme (p).

Nous allons maintenant donner quelques applications de cette formule, qui vont nous conduire à plusieurs théorèmes curieux d'Analyse.

Supposons m nul; alors on a

$$k = \int t^{n+m-1}\,dt\,c^{-t^n} = \frac{1}{n};$$

la formule (p) devient ainsi

$$\frac{(n+z)^{n-1} - n(n+z-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+z-4)^{n-1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}$$

$$= \frac{\int dx' \cos zx' \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi}.$$

On a

$$\log\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n = n \log\left(1 - \frac{1}{6}x'^2 + \frac{1}{120}x'^4 - \ldots\right),$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n = c^{-\frac{n}{6}x'^2}\left(1 - \frac{nx'^4}{180} + \ldots\right);$$

on aura donc, par le n° 26, en faisant $z = r\sqrt{n}$,

$$(q)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\int dx' \cos zx' \left(\frac{\sin x'}{x'}\right)^n}{\pi} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2n\pi}}\, c^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20n}(1 - 6r^2 + 3r^4) + \ldots\right] \\ &= \frac{(n + r\sqrt{n})^{n-1} - n(n + r\sqrt{n} - 2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n + r\sqrt{n} - 4)^{n-1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}, \end{aligned}\right.$$

la série de ce dernier membre devant être arrêtée aux puissances des quantités négatives.

En différentiant cette équation par rapport à r, on aura, avec la condition de l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$\begin{aligned} &\frac{n}{1.2.3\ldots(n-2)2^n}\left[(n + r\sqrt{n})^{n-2} - n(n + r\sqrt{n} - 2)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n + r\sqrt{n} - 4)^{n-2} - \ldots\right] \\ &= -3r\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, c^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20n}(5 - 10r^2 + 3r^4) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

En continuant de différentier ainsi, on aura les valeurs des différences inférieures, pourvu cependant que le nombre de ces différentiations soit fort petit relativement au nombre n. On peut observer que ces équations subsistent, en y faisant r négatif; car $\cos zx'$ ou $\cos x' r\sqrt{n}$ est le même dans les deux cas de r positif et de r négatif.

On peut, en intégrant successivement l'équation (q), obtenir des théorèmes analogues sur les différences finies des puissances supérieures à n, en excluant toujours les puissances des quantités négatives. Ainsi on a, par une première intégration,

$$\begin{aligned} &\frac{(n + r\sqrt{n})^n - n(n + r\sqrt{n} - 2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n + r\sqrt{n} - 4)^n - \ldots}{1.2.3\ldots n.2^n} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int dr c^{-\frac{3}{2}r^2}\left[1 - \frac{3}{20n}(1 - 6r^2 + 3r^4) + \ldots\right] \\ &= C + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left[\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20n} r(1 - r^2) c^{-\frac{3}{2}r^2} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

On déterminera la constante arbitraire C en faisant commencer avec r l'intégrale $\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2}$, et en observant qu'alors, r étant nul, le dernier membre de l'équation se réduit à cette constante. Dans ce cas, le premier devient

$$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots.$$

Mais on a, comme on sait, sans l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n(n-2)^n + \ldots \mp n(2-n)^n \pm (-n)^n = 1.2.3\ldots n.2^n,$$

le signe supérieur ayant lieu si n est pair, et le signe inférieur si n est impair. Dans les deux cas, on voit que la somme des termes dans lesquels les quantités élevées à la puissance n sont négatives est égale à la somme des autres termes; on a donc, avec l'exclusion des puissances des quantités négatives,

$$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots = 1.2.3\ldots n.2^{n-1},$$

ce qui donne $C = \frac{1}{2}$; par conséquent,

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^n - n(n+r\sqrt{n}-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^n - \ldots}{1.2.3\ldots n.2^n}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left[\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2} - \frac{3}{20n}r(1-r^2)c^{-\frac{3}{2}r^2} + \ldots\right].$$

En intégrant de nouveau cette expression et déterminant convenablement la constante arbitraire, on trouve

$$\frac{(n+r\sqrt{n})^{n+1} - n(n+r\sqrt{n}-2)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+r\sqrt{n}-4)^{n+1} - \ldots}{1.2.3\ldots(n+1)2^n\sqrt{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left\{ r\int dr c^{-\frac{3}{2}r^2} + c^{-\frac{3}{2}r^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{60n}(1-3r^2)\right] + \ldots\right\} + \frac{1}{2}r.$$

43. On peut étendre les méthodes précédentes à la détermination de

la différence $n^{\text{ième}}$ d'une puissance quelconque d'une fonction rationnelle de s. Il suffit pour cela de réduire, par la méthode du n° 29, cette fonction à la forme $\int x^s \varphi\, dx$. Mais on a vu qu'alors on parvient, pour déterminer φ, à une équation différentielle d'un degré égal au plus haut exposant de s dans cette fonction, et qui le plus souvent n'est pas intégrable. On peut obvier à cet inconvénient au moyen de multiples intégrales, de la manière suivante.

Considérons généralement la fonction

$$\frac{1}{(s+p)^i(s+p')^{i'}(s+p'')^{i''}\ldots}.$$

Si dans l'intégrale $\int x^{i-1}\,dx\,c^{-(s+p)x}$, prise depuis x nul jusqu'à x infini, on change $(s+p)x$ en x', elle devient $\frac{1}{(s+p)^i}\int x'^{i-1}\,dx'\,c^{-x'}$, la nouvelle intégrale étant prise dans les limites précédentes. La comparaison des deux intégrales donnera

$$\frac{1}{(s+p)^i} = \frac{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-(s+p)x}}{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x}}.$$

Il suit de là que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(s+p)^i(s+p')^{i'}(s+p'')^{i''}\ldots}\\ &\quad = \frac{\int x^{i-1}x'^{i'-1}x''^{i''-1}\ldots dx\,dx'\,dx''\ldots c^{-px-p'x'-p''x''-\ldots-s(x+x'+x''+\ldots)}}{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x}\int x'^{i'-1}\,dx'\,c^{-x'}\int x''^{i''-1}\,dx''\,c^{-x''}\ldots},\end{aligned}$$

toutes les intégrales étant prises depuis $x, x', x'', \ldots$ nuls jusqu'à leurs valeurs infinies; on aura donc

$$\begin{aligned}&\Delta^n\frac{1}{(s+p)^i(s+p')^{i'}\ldots}\\ &\quad = \frac{\int x^{i-1}x'^{i'-1}\ldots dx\,dx'\ldots c^{-px-p'x'-\ldots-s(x+x'+\ldots)}(c^{-x-x'-\ldots}-1)^n}{\int x^{i-1}\,dx\,c^{-x}\int x'^{i'-1}\,dx'\,c^{-x'}\ldots}.\end{aligned}$$

On réduira facilement en séries convergentes, par la méthode du n° 40, le numérateur et le dénominateur de cette expression, et si l'on change dans ces séries les signes de $i, i', \ldots$, on aura la valeur très approchée de

$$\Delta^n (s+p)^i (s+p')^{i'} \ldots,$$

$n, i, i', \ldots$ étant supposés de très grands nombres. On trouvera par le numéro cité

$$\Delta^n (s+p)^i (s+p')^{i'} \ldots$$
$$= \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^{i+1} \left(\frac{i'}{a'}\right)^{i'+1} \ldots c^{(s+p)a+(s+p')a'+\ldots-i-i'-\ldots} (c^{a+a'+\ldots}-1)^n}{\sqrt{\left[\frac{i(i+1)}{a^2} - \frac{nic^{a+a'+\ldots}}{(c^{a+a'+\ldots}-1)^2}\right]\left[\frac{i'(i'+1)}{a'^2} - \frac{ni'c^{a+a'+\ldots}}{(c^{a+a'+\ldots}-1)^2}\right]\ldots}}.$$

$a, a', \ldots$ étant déterminés par les équations

$$0 = \frac{i+1}{a} + s - p - \frac{nc^{a+a'+\ldots}}{c^{a+a'+\ldots}-1},$$
$$\frac{i'+1}{a'} = \frac{i+1}{a} + p' - p,$$
$$\frac{i''+1}{a''} = \frac{i+1}{a} + p'' - p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le cas le plus ordinaire est celui dans lequel les exposants $i, i', i'', \ldots$ sont égaux, et $s+p, s+p', \ldots$ forment une progression arithmétique. On peut obtenir alors, par la méthode suivante, la différence finie de leur produit élevé à une haute puissance.

Considérons la différence $\Delta^n [s(s-1)]^i$. Si l'on fait $s = s' + \frac{1}{2}$, elle devient

$$\Delta^n s'^{2i} \left(1 - \frac{1}{4s'^2}\right)^i.$$

En développant cette fonction en série, on a

$$\Delta^n s'^{2i} - \frac{i}{4} \Delta^n s'^{2i-2} + \frac{i(i-1)}{1.2.4^2} \Delta^n s'^{2i-4} - \ldots.$$

Les formules du n° 40 donneront la valeur approchée de chacun des termes de cette série, et l'on voit, par ces formules, que, n et i étant de très grands nombres, $\Delta^n s^{2i-2}$ est d'un ordre moindre de deux unités que $\Delta^n s^{2i}$, d'où il suit que chaque terme de la série précédente est d'un ordre inférieur d'une unité à celui qui le précède, ce qui montre la convergence de la série.

On arriverait au même résultat en résolvant, par approximation, l'équation différentielle du second ordre en φ, à laquelle conduit la méthode du n° 29. Lorsqu'on suppose

$$\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = \int c^{-s'x}\varphi\, dx,$$

on a

$$2is'\int c^{-s'x}\varphi\, dx = \left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)\int c^{-s'x}x\varphi\, dx.$$

En faisant disparaître s' des coefficients de cette équation, par la méthode citée, dans les termes affectés du signe intégral, égalant ensuite à zéro la somme de ces termes et supposant ensuite, dans l'équation différentielle que l'on obtient ainsi, φ égal à une suite ascendante par rapport aux puissances de x, on aura une série convergente. On aura ensuite

$$\Delta^n\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i} = \int c^{-s'x}(c^{-x} - 1)^n\varphi\, dx,$$

d'où l'on tirera une valeur en série de $\Delta^n\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{-i}$, et dans laquelle il suffira de changer le signe de i pour avoir la valeur de $\Delta^n\left(s'^2 - \frac{1}{4}\right)^{i}$.

Cette manière de résoudre par approximation l'équation différentielle en φ, et que nous avons indiquée à la fin du n° 30, peut servir dans un grand nombre de cas où cette équation n'est pas intégrable exactement.

Remarque générale sur la convergence des séries.

44. Nous terminerons cette Introduction par une observation importante sur la convergence des séries dont nous avons fait un si fréquent usage. Ces séries convergent très rapidement dans leurs premiers termes; mais souvent cette convergence diminue et finit par se changer en divergence. Elle ne doit pas empêcher l'usage de ces séries, en n'employant que leurs premiers termes, dans lesquels la conver-

gence est rapide; car le reste de la série, que l'on néglige, est le développement d'une fonction algébrique ou intégrale, très petite par rapport à ce qui précède. Pour rendre cela sensible par un exemple, considérons le développement en série, de l'intégrale $\int dt\, c^{-t^2}$, prise depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à t infini. On a, par le n° 27,

$$\int dt\, c^{-t^2} = \frac{c^{-\mathrm{T}^2}}{2\mathrm{T}}\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{T}^2} + \frac{1.3}{2^2\mathrm{T}^4} - \frac{1.3.5}{2^3\mathrm{T}^6} + \ldots\right).$$

Cette série finit par être divergente, quelque grande que soit la valeur que l'on suppose à T; mais alors on peut employer sans erreur sensible ses premiers termes. En effet, si l'on considère, par exemple, ses quatre premiers termes, le reste de la série sera $\frac{1.3.5.7}{2^4}\int \frac{dt\, c^{-t^2}}{t^8}$; or cette quantité, abstraction faite du signe, est plus petite que le terme $-\frac{1.3.5.c^{-\mathrm{T}^2}}{2^4\mathrm{T}^7}$ qui précède, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{c^{-\mathrm{T}^2}}{\mathrm{T}^7} < 7\int \frac{dt\, c^{-t^2}}{t^8};$$

car on a

$$7\int \frac{dt\, c^{-t^2}}{t^8} = \text{const.} - \frac{c^{-t^2}}{t^7} - 2\int \frac{dt\, c^{-t^2}}{t^6}.$$

En déterminant la constante de manière que l'intégrale soit nulle lorsque $t = \mathrm{T}$, on aura $\frac{c^{-\mathrm{T}^2}}{\mathrm{T}^7}$ pour cette constante; on aura donc, en prenant l'intégrale depuis $t = \mathrm{T}$ jusqu'à t infini,

$$7\int \frac{dt\, c^{-t^2}}{t^8} = \frac{c^{-\mathrm{T}^2}}{\mathrm{T}^7} - 2\int \frac{dt\, c^{-t^2}}{t^6}.$$

La série précédente peut donc être employée tant qu'elle est convergente, puisque l'on est sûr que ce que l'on néglige est au-dessous du terme auquel on s'arrête.

Cette série jouit encore de cette propriété, savoir, qu'elle est alternativement plus grande et plus petite que sa valeur entière, suivant que l'on s'arrête à un terme positif ou à un terme négatif. On peut nommer, par cette raison, ce genre de séries, *séries limites*. Au reste, on a vu dans le n° 27 que, dans le cas où elles sont divergentes, on peut, en les réduisant en fractions continues, obtenir des approximations toujours convergentes.

Ce que nous venons de dire sur la série précédente peut s'étendre à toutes celles que nous avons considérées et doit ôter toute inquiétude sur les usages que nous en avons faits. En effet, on peut toujours arrêter ces séries au point où elles cessent d'être convergentes, et représenter le reste par une intégrale. C'est ce que nous allons faire voir sur la formule la plus générale du développement des fonctions en séries.

On a, en prenant l'intégrale depuis $z = 0$,

$$\int dz\, \varphi'(x-z) = \varphi(x) - \varphi(x-z),$$

$\varphi'(x)$ étant la différentielle de $\varphi(x)$ divisée par dx. Si l'on désigne pareillement par $\varphi''(x)$ la différentielle de $\varphi'(x)$ divisée par dx, par $\varphi'''(x)$ la différentielle de $\varphi''(x)$ divisée par dx et ainsi de suite, on aura

$$\begin{gathered}\int dz\, \varphi'(x-z) = z\,\varphi'(x-z) + \int z\, dz\, \varphi''(x-z),\\ \int z\, dz\, \varphi''(x-z) = \tfrac{1}{2} z^2\, \varphi''(x-z) + \int \tfrac{1}{2} z^2\, dz\, \varphi'''(x-z),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

En continuant ainsi, on trouvera généralement

$$\begin{aligned}\int dz\, \varphi'(x-z) = z\,\varphi'(x-z) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(x-z) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(x-z)&\\ + \int \frac{z^n\, dz}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n+1)}(x-z).&\end{aligned}$$

En comparant cette expression à la précédente, on aura

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(x-z) + z\,\varphi'(x-z) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(x-z) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(x-z)&\\ + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int z^n\, dz\, \varphi^{(n+1)}(x-z).&\end{aligned}$$

Faisons $x - z = t$, l'équation précédente prendra cette forme

$$\begin{aligned}\varphi(t+z) = \varphi(t) + z\,\varphi'(t) + \frac{z^2}{1.2}\varphi''(t) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(t)&\\ + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int z'^n\, dz'\, \varphi^{(n+1)}(t+z-z'),&\end{aligned}$$

l'intégrale étant prise depuis $z'=0$ jusqu'à $z'=z$. Il est clair que, si l'on faisait dans cette intégrale $\varphi^{(n+1)}(t+z-z')$ constant, on aurait un trop grand résultat si l'on prenait la plus grande valeur de cette quantité, et un trop petit résultat en prenant sa plus petite valeur. Il y a donc dans l'intervalle de $z'=0$ à $z'=z$ une valeur de z' telle qu'en supposant cette quantité constante, on aura un résultat exact. Soit u cette valeur; l'intégrale précédente devient ainsi

$$\frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(t+z-u),$$

ce qui donne

$$\varphi(t+z)=\varphi(t)+z\,\varphi'(t)+\ldots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(t)$$
$$+\frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(t+z-u),$$

$z-u$ étant compris entre zéro et z. On pourra ainsi juger de la convergence de la série et du degré d'approximation, lorsqu'on s'arrête à l'un de ses termes.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ