

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

B. TORTOLINI E F. BRIOSCHI

DIRETTORE **Francesco Severi in Roma**
CONDIRETTORE **Giovanni Sansone in Firenze**

COMITATO DI REDAZIONE

Enrico Bompiani in Roma	Antonio Signorini in Roma
Leonida Tonelli in Roma	Michele De Franchis in Palermo

SERIE QUARTA - TOMO XVIII
(LXXXX DELLA RACCOLTA)



NICOLA ZANICHELLI, EDITORE
BOLOGNA, 1939-XVIII

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzogni, 1939-XVIII

Su alcuni funzionali.

Memoria di LEONIDA TONELLI (a Pisa).

Sunto. - *Si studiano, coi procedimenti introdotti dall'A. nel Calcolo delle Variazioni, alcuni particolari funzionali e, fra l'altro, si ritrovano con metodo diretto taluni classici risultati relativi ai cosiddetti nuclei simmetrici.*

Mi propongo di mostrare, in ciò che segue, come i procedimenti da me introdotti nel Calcolo delle Variazioni, per lo studio dei classici funzionali che in esso si presentano, si possano applicare utilmente anche a funzionali che di solito non si considerano nel detto Calcolo, pur avendo importanza per certe teorie ed in particolare per quella delle equazioni integrali del tipo di FREDHOLM. Insieme con nuove proposizioni, dimostrerò così, per via diretta, alcuni ormai classici risultati relativi ai noti *nuclei simmetrici*.

Il presente lavoro va considerato come un primo avviamento allo studio dei funzionali della forma

$$\int_0^1 \int_0^1 F(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) dx dz.$$

§ 1.

1. Considerato in un piano π un sistema (x, z) di assi cartesiani ortogonali, indicheremo sempre con Q il quadrato di tale piano che ha per vertici opposti i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Sia $K(x, z)$ una funzione (reale e ad un valore) definita in Q ed ivi integrabile (nel senso del LEBESGUE ⁽¹⁾) insieme con il suo quadrato $K^2(x, z)$. Sia poi (\mathcal{C}) la classe di tutte le funzioni $\varphi(x)$ (reali e ad un valore) definite sull'intervallo $(0, 1)$, ivi integrabili insieme con i loro quadrati $\varphi^2(x)$ e tali che risulti sempre

$$(1) \quad \int_0^1 \varphi^2(x) dx = 1.$$

(1) Intenderemo sempre, nel seguito, l'integrabilità nel senso del LEBESGUE.

Per ogni funzione $\varphi(x)$ della classe (\mathcal{C}) , consideriamo il funzionale

$$\mathfrak{J}[\varphi] = \iint_Q K(x, z)\varphi(x)\varphi(z)dx dz,$$

il quale, in virtù delle ipotesi fatte, ha — per ognuna delle $\varphi(x)$ indicate — un valore finito, risultando integrabile in Q il prodotto $K(x, z)\varphi(x)\varphi(z)$.

2. Per studiare gli estremi di $\mathfrak{J}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) , consideriamo la classe (\mathcal{A}) di tutte le funzioni $y(x)$ (reali e ad un valore) definite sull'intervallo $(0, 1)$, ivi assolutamente continue e con derivata prima, considerata soltanto là dove esiste finita (e quindi quasi-ovunque), a quadrato integrabile, e soddisfacenti alle condizioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \int_0^1 y'^2(x) dx \leq 1. \end{array} \right.$$

Corrispondentemente ad ogni $y(x)$ della classe (\mathcal{A}) , costruiamo il funzionale

$$I[y] = \iint_Q K(x, z)y'(x)y'(z)dx dz,$$

che, per ogni $y(x)$ di (\mathcal{A}) , ha sempre un valore finito.

Dalla nota disuguaglianza di BUNIKOWSKY-SCHWARZ, segue, se $y(x)$ appartiene ad (\mathcal{A}) ,

$$(3) \quad \begin{aligned} I^2[y] &\leq \left[\iint_Q K^2(x, z) dx dz \right] \left[\iint_Q y'^2(x)y'^2(z) dx dz \right] \\ &= \left[\iint_Q K^2(x, z) dx dz \right] \left[\int_0^1 y'^2(x) dx \right]^2 \\ &\leq \iint_Q K^2(x, z) dx dz. \end{aligned}$$

Pertanto $I[y]$ risulta *limitato* in tutto (\mathcal{A}) , ed ha perciò *finiti* i suoi estremi in tale classe.

3. Dimostriamo che:

$I[y]$ è in (\mathcal{A}) un funzionale continuo, anzi uniformemente continuo,

nel senso che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può sempre trovare un $\delta > 0$ in modo che, se $y(x)$ e $y_0(x)$ sono due qualunque funzioni di (\mathcal{A}) soddisfacenti in tutto l'intervallo $(0, 1)$ alla disuguaglianza

$$|y_0(x) - y(x)| < \delta,$$

risulti

$$|I[y] - I[y_0]| < \varepsilon.$$

Per ogni numero intero positivo n , definiamo in Q la funzione $K_n(x, z)$ ponendo

$$\begin{aligned} K_n(x, z) &= K(x, z) \quad \text{ove è } |K(x, z)| \leq n, \\ K_n(x, z) &= -n \quad \text{» » } K(x, z) < -n, \\ K_n(x, z) &= n \quad \text{» » } K(x, z) > n. \end{aligned}$$

Abbiamo allora, qualunque sia la $y(x)$ di (\mathcal{A}) ,

$$\begin{aligned} & \left| I[y] - \iint_Q K_n(x, z) y'(x) y'(z) dx dz \right| \\ &= \left| \iint_Q \{ K(x, z) - K_n(x, z) \} y'(x) y'(z) dx dz \right| \\ &\leq \left[\iint_Q \{ K(x, z) - K_n(x, z) \}^2 dx dz \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\iint_{E_n} K^2(x, z) dx dz \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con E_n , l'insieme dei punti di Q in cui è $|K(x, z)| > n$. Siccome la misura di E_n tende a zero al tendere di n all'infinito, per un \bar{n} sufficientemente grande è

$$\iint_{E_{\bar{n}}} K^2(x, z) dx dz < \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^2,$$

e perciò, per tutte le $y(x)$ di (\mathcal{A}) ,

$$\left| I[y] - \iint_Q K_{\bar{n}}(x, z) y'(x) y'(z) dx dz \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Sia ora $P_\nu(x, z)$, $\nu = 1, 2, \dots$, una successione di polinomi tale che sia sempre

$$|P_\nu(x, z)| < \bar{n} + 1$$

e che $P_\nu(x, z)$ converga quasi-ovunque in Q , per $\nu \rightarrow +\infty$, verso $K_{\bar{n}}(x, z)$ ⁽²⁾.

(2) Per una successione come la $P_\nu(x, z)$, $\nu = 1, 2, \dots$, vedi L. TONELLI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », T. XXIX (1910, 1° sem.), pp. 1-36).

Avremo allora, per ogni v e per qualsiasi $y(x)$ di (\mathcal{E}) ,

$$\left| \iint_{\mathcal{Q}} K_n(x, z) y'(x) y'(z) dx dz - \iint_{\mathcal{Q}} P_v(x, z) y'(x) y'(z) dx dz \right| \\ \leq \left[\iint_{\mathcal{Q}} \{ K_n(x, z) - P_v(x, z) \}^2 dx dz \right]^{\frac{1}{2}}.$$

E siccome per un \bar{v} sufficientemente grande è

$$\iint_{\mathcal{Q}} \{ K_n(x, z) - P_{\bar{v}}(x, z) \}^2 dx dz < \left(\frac{\varepsilon}{6} \right)^2,$$

per tutte le $y(x)$ di (\mathcal{E}) risulta

$$\left| \iint_{\mathcal{Q}} K_n(x, z) y'(x) y'(z) dx dz - \iint_{\mathcal{Q}} P_{\bar{v}}(x, z) y'(x) y'(z) dx dz \right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

ed anche

$$\left| I[y] - \iint_{\mathcal{Q}} P_{\bar{v}}(x, z) y'(x) y'(z) dx dz \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dopo di ciò, consideriamo due qualsiasi funzioni di (\mathcal{E}) , $y(x)$ e $y_0(x)$, tali che, in tutto l'intervallo $(0, 1)$, risulti

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta,$$

δ essendo un numero positivo che determineremo fra poco. È

$$\begin{aligned} \Delta &= \iint_{\mathcal{Q}} P_v(x, z) y'(x) y'(z) dx dz - \iint_{\mathcal{Q}} P_v(x, z) y_0'(x) y_0'(z) dx dz \\ &= \iint_{\mathcal{Q}} P_v(x, z) \{ y'(x) y'(z) - y_0'(x) y_0'(z) + y_0'(x) y'(z) - y_0'(x) y_0'(z) \} dx dz \\ &= \iint_{\mathcal{Q}} P_v(x, z) y'(z) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dx dz + \iint_{\mathcal{Q}} P_v(x, z) y_0'(x) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dx dz \\ &= \int_0^1 y'(z) dz \int_0^1 P_v(x, z) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dx + \int_0^1 y_0'(x) dx \int_0^1 P_v(x, z) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dz. \end{aligned}$$

Integrando per parti, si ha

$$\int_0^1 P_v(x, z) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dx = \{ y(1) - y_0(1) \} P_v(1, z) - \\ - \int_0^1 \{ y(x) - y_0(x) \} \frac{\partial}{\partial x} P_v(x, z) dx,$$

da cui

$$\left| \int_0^1 P_{\nu}(x, z) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dx \right| < 2\delta L,$$

dove con L si è indicato un numero positivo maggiore dei massimi di $|P_{\nu}(x, z)|$, $\left| \frac{\partial}{\partial x} P_{\nu}(x, z) \right|$, $\left| \frac{\partial}{\partial z} P_{\nu}(x, z) \right|$ in tutto Q . Abbiamo allora

$$|\Delta| < 2\delta L \left\{ \int_0^1 |y'(z)| dz + \int_0^1 |y_0'(x)| dx \right\}$$

ed anche, per essere

$$\left\{ \int_0^1 |y'(z)| dz \right\}^2 \leq \left\{ \int_0^1 y'^2(z) dz \right\} \left\{ \int_0^1 dz \right\} \leq 1$$

e analogamente per l'integrale di $|y_0'(x)|$,

$$|\Delta| < 4\delta L.$$

Perciò, se è

$$\delta < \frac{\varepsilon}{12L},$$

abbiamo $|\Delta| < \frac{\varepsilon}{3}$, e quindi

$$|I[y] - I[y_0]| < \varepsilon,$$

e l'uniforme continuità del funzionale $I[y]$ è provata.

4. Indichiamo ora con M l'estremo (o confine, o limite) superiore di $I[y]$ in (\mathcal{A}) , estremo superiore che, per la (3), è finito, e sia

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

una successione massimante per $I[y]$ in (\mathcal{A}) , tale cioè che, per $n \rightarrow \infty$, risulti

$$(4) \quad I[y_n] \rightarrow M.$$

Essendo, per tutte le $y_n(x)$, verificate le (2), le $y_n(x)$ sono, nell'intervallo $(0, 1)$, tutte equiassolutamente continue ⁽³⁾ ed egualmente limitate.

Si può dunque estrarre dalla successione delle $y_n(x)$ un'altra successione (che, per semplicità di scrittura, supporremo coincidere con quella delle $y_n(x)$) convergente uniformemente, in tutto l'intervallo $(0, 1)$, verso una funzione $y_{\infty}(x)$ assolutamente continua ⁽⁴⁾ e tale che $y_{\infty}(0) = 0$.

⁽³⁾ V. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 283 e seguenti.

⁽⁴⁾ Loc. cit. in ⁽³⁾.

Per la semicontinuità inferiore dell'integrale

$$\int_0^1 y'^2(x) dx \quad (5),$$

dalla seconda delle (2) segue

$$\int_0^1 y'_{\infty}{}^2(x) dx \leq 1,$$

e $y_{\infty}(x)$ appartiene perciò alla classe (\mathcal{A}) . Dalla continuità del funzionale $I[y]$ in (\mathcal{A}) (n.º 3) segue poi, in virtù della (4),

$$I[y_{\infty}] = M.$$

Dunque $y_{\infty}(x)$ dà effettivamente il massimo assoluto di $I[y]$ in (\mathcal{A}) .

5. *Supponiamo che sia $M > 0$. Allora se fosse*

$$\int_0^1 y'_{\infty}{}^2(x) dx < 1,$$

osservando che non potrebbe mai essere

$$\int_0^1 y'_{\infty}{}^2(x) dx = 0,$$

perchè da questa uguaglianza seguirebbe $y'_{\infty}(x) = 0$ quasi ovunque nell'intervallo $(0, 1)$ e quindi $M = I[y_{\infty}] = 0$, posto

$$c^2 = 1; \int_0^1 y'_{\infty}{}^2(x) dx,$$

onde $c^2 > 1$, ne verrebbe

$$I[cy_{\infty}] = c^2 I[y_{\infty}] = c^2 M > M,$$

il che è impossibile perchè anche la funzione $cy_{\infty}(x)$ appartiene alla classe (\mathcal{A}) . Dunque è

$$\int_0^1 y'_{\infty}{}^2(x) dx = 1;$$

e poichè la $y_{\infty}(x)$ dà il massimo di $I[y]$ in (\mathcal{A}) , la $y'_{\infty}(x)$, assunta come fun-

(5) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, pp. 397 e 443.

zione $\varphi(x)$ (la quale si porrà uguale a 0 ove la $y'_\infty(x)$ non esiste finita) dà il massimo di $\mathfrak{J}[\varphi]$ nella classe (\mathcal{C}) , perchè ogni elemento $\varphi(x)$ di (\mathcal{C}) dà un elemento

$$y(x) = \int_0^x \varphi(x) dx$$

della classe (\mathcal{A}) e di conseguenza l'estremo superiore di $\mathfrak{J}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) non può superare quello di $I[y]$ in (\mathcal{A}) .

È così dimostrata l'esistenza del massimo di $\mathfrak{J}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) , nell'ipotesi $M > 0$.

Possiamo dunque concludere che:

Se l'estremo superiore di $\mathfrak{J}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) è maggiore di zero ⁽⁶⁾, esiste in (\mathcal{C}) il massimo (assoluto) di $\mathfrak{J}[\varphi]$.

In particolare, abbiamo:

Se la funzione $K(x, z)$ costituisce un nucleo definito positivo od anche soltanto semidefinito positivo, nel senso noto della teoria delle equazioni integrali di Fredholm, il funzionale $\mathfrak{J}[\varphi]$ ammette nella classe (\mathcal{C}) il massimo (assoluto).

A conclusioni analoghe si giunge per il minimo (assoluto), se l'estremo inferiore di $\mathfrak{J}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) è minore di zero e, in particolare, se $K(x, z)$ è un nucleo definito negativo od anche soltanto semidefinito negativo.

Se poi il funzionale $\mathfrak{J}[\varphi]$ non è in (\mathcal{C}) nè sempre > 0 nè sempre < 0 , allora tale funzionale ammette in (\mathcal{C}) tanto il massimo (assoluto) quanto il minimo (assoluto).

⁽⁶⁾ L'estremo superiore di $\mathfrak{J}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) non può mai essere negativo. Infatti, posto $\varphi_n(x) = \sqrt{n}$ per $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ e $\varphi_n(x) = 0$ per $\frac{1}{n} < x \leq 1$, questa $\varphi_n(x)$ appartiene alla classe (\mathcal{C}) e si ha

$$\mathfrak{J}[\varphi_n] = \iint_{Q_n} K(x, z) \varphi_n(x) \varphi_n(z) dx dz = n \iint_{q_n} K(x, z) dx dz,$$

dove con q_n si è indicato il quadrato di vertici opposti $(0, 0)$, $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ma è

$$\left(\iint_{q_n} K(x, z) dx dz \right)^2 \leq \left[\iint_{q_n} K^2(x, z) dx dz \right] \cdot \frac{1}{n^2}$$

e perciò

$$|\mathfrak{J}[\varphi_n]| \leq \left\{ \iint_{q_n} K^2(x, z) dx dz \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e $\mathfrak{J}[\varphi_n] \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

6. Sia $\varphi_0(x)$ una funzione della classe (C) massimante (o minimante) $\mathfrak{J}[\varphi]$ nella classe stessa.

Considerata una qualsiasi funzione $g(x)$, definita sull'intervallo $(0, 1)$, ivi integrabile insieme con il suo quadrato $g^2(x)$, formiamo la nuova funzione

$$\varphi_0(x) + \eta\varphi_0(x) + \varepsilon g(x),$$

dove η e ε sono due parametri indipendenti da x . Questa funzione risulta integrabile insieme col suo quadrato, in tutto $(0, 1)$, e ciò qualunque siano i valori di η e ε . Determiniamo η in funzione di ε , $\eta = \eta(\varepsilon)$, in tutto un intorno di $\varepsilon = 0$, in modo che si abbia sempre

$$(5) \quad \int_0^1 \{ \varphi_0(x) + \eta\varphi_0(x) + \varepsilon g(x) \}^2 dx = 1$$

e che risulti $\eta(0) = 0$. Ciò è possibile perchè è

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \{ \varphi_0(x) + \eta\varphi_0(x) + \varepsilon g(x) \}^2 dx &= 2 \int_0^1 \varphi_0(x) \{ \varphi_0(x) + \eta\varphi_0(x) + \varepsilon g(x) \} dx \\ &= 2 \left\{ 1 + \eta + \varepsilon \int_0^1 \varphi_0(x) g(x) dx \right\}, \end{aligned}$$

e questa derivata per $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$, è $= 2 (\neq 0)$. Dunque la funzione $\eta = \eta(\varepsilon)$ si può determinare, e in modo unico, in tutto un intorno di $\varepsilon = 0$; e tale funzione risulta continua e derivabile. È poi

$$\eta'(0) = - \left(\frac{\int_0^1 g \{ \varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g \} dx}{\int_0^1 \varphi_0 \{ \varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g \} dx} \right)_{\substack{\varepsilon=0 \\ \eta=0}} = - \int_0^1 \varphi_0(x) g(x) dx.$$

Siccome, in un certo intorno di $\varepsilon = 0$, la funzione $\varphi_0(x) + \eta(\varepsilon)\varphi_0(x) + \varepsilon g(x)$ appartiene, in virtù della (5), alla classe (C), e per $\varepsilon = 0$ essa si riduce alla $\varphi_0(x)$, dalla proprietà massimante (o minimante) della $\varphi_0(x)$ segue

$$\left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \mathfrak{J}[\varphi_0(x) + \eta(\varepsilon)\varphi_0(x) + \varepsilon g(x)] \right\}_{\varepsilon=0} = 0$$

e perciò

$$\begin{aligned} \iint_Q K(x, z) \{ \varphi_0(x)g(z) + \varphi_0(z)g(x) + 2\varphi_0(x)\varphi_0(z)\eta'(0) \} dx dz &= 0, \\ \iint_Q \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_0(z)g(x) dx dz - \left\{ \int_0^1 \varphi_0(x)g(x) dx \right\} \iint_Q K(x, z)\varphi_0(x)\varphi_0(z) dx dz &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$(6) \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_0(z) dz - \mathfrak{I}[\varphi_0] \varphi_0(x) \left\{ g(x) dx = 0.$$

Per l'arbitrarietà della $g(x)$, questa uguaglianza richiede che sia, quasi ovunque nell'intervallo $(0, 1)$,

$$(7) \quad \int_0^1 \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_0(z) dz = \mathfrak{I}[\varphi_0] \varphi_0(x).$$

Infatti, se su un insieme E di $(0, 1)$, di misura positiva, fosse

$$(8) \quad \int_0^1 \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_0(z) dz - \mathfrak{I}[\varphi_0] \varphi_0(x) > 0,$$

assumendo $g(x)$ uguale al primo membro di questa disuguaglianza su E e nulla altrove (⁷), il primo membro della (6) sarebbe maggiore di zero e la (6) non potrebbe esser soddisfatta. E nello stesso modo si vede che il primo membro della (8) non può esser minore di zero in un insieme di misura positiva. Così la (7) è provata quasi-ovunque su $(0, 1)$.

Se è $\mathfrak{I}[\varphi_0] \neq 0$, la (7) mostra che $1:\mathfrak{I}[\varphi_0]$ e $\varphi_0(x)$ sono, rispettivamente, un autovalore ed un'autofunzione (corrispondente all'autovalore) relativi al nucleo $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$. Sotto la stessa ipotesi, e se, in più, $K(x, z)$ è simmetrica rispetto ad x e z , essi sono anche un autovalore ed un'autofunzione relativi al nucleo $K(x, z)$.

Osserviamo ora che, per ogni funzione $\varphi(x)$ della classe (\mathfrak{C}) , vale l'uguaglianza

$$\iint_Q \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi(x) \varphi(z) dx dz = \iint_Q K(x, z) \varphi(x) \varphi(z) dx dz.$$

Se perciò λ_* è un autovalore per il nucleo $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$ e $\varphi_*(x)$ è l'autofunzione corrispondente, appartenente alla classe (\mathfrak{C}) , si ha, quasi-ovunque sull'intervallo $(0, 1)$,

$$\lambda_* \int_0^1 \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_*(z) dz = \varphi_*(x)$$

(⁷) La funzione $g(x)$ così definita risulterebbe evidentemente integrabile su $(0, 1)$ insieme col suo quadrato $g^2(x)$.

e quindi

$$(9) \quad \lambda_* \iint_Q \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_*(x) \varphi_*(z) dx dz = 1,$$

con

$$\iint_Q \frac{K(x, z) + K(z, x)}{2} \varphi_*(x) \varphi_*(z) dx dz \leq \mathfrak{I}[\varphi_0],$$

se $\varphi_0(x)$ è una massimante assoluta per $\mathfrak{I}[\varphi]$. Ne segue che:

Supposto che $\varphi_0(x)$ sia una massimante assoluta per $\mathfrak{I}[\varphi]$, con $\mathfrak{I}[\varphi_0] > 0$, il rapporto $1:\mathfrak{I}[\varphi_0]$ dà il minore degli autovalori positivi per il nucleo $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$ (e quindi anche per $K(x, z)$, se questo nucleo è simmetrico).

Analogamente:

supposto che $\varphi_0(x)$ sia una minimante assoluta per $\mathfrak{I}[\varphi]$, con $\mathfrak{I}[\varphi_0] < 0$, il rapporto $1:\mathfrak{I}[\varphi_0]$ dà il maggiore degli autovalori negativi per il nucleo $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$ (e quindi per $K(x, z)$, se questo nucleo è simmetrico).

Viceversa:

se il nucleo $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$ ammette un autovalore λ_* maggiore di zero, fra questi autovalori maggiori di zero ne esiste uno minimo λ_0 , ed il rapporto $1:\lambda_0$ dà il massimo assoluto di $\mathfrak{I}[\varphi]$ in (\mathcal{C}) .

Infatti, nell'ipotesi qui posta, detta $\varphi_*(x)$ l'autofunzione corrispondente a λ_* e appartenente a (\mathcal{C}) , vale la (9) e l'integrale che figura in tale uguaglianza è maggiore di zero. Dunque l'estremo superiore di $\mathfrak{I}[\varphi]$ è maggiore di zero e, per il n.º 5, $\mathfrak{I}[\varphi]$ ammette il massimo (assoluto) in (\mathcal{C}) ; l'inverso di questo massimo dà, per quanto precede, il minore degli autovalori positivi di $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$.

Analogamente, se $\frac{K(x, z) + K(z, x)}{2}$ ammette un autovalore minore di zero.

7. Dai risultati dei n.º 5 e 6 segue che:

Se $K(x, z)$ non è nullo quasi dappertutto in Q ed è un nucleo simmetrico, esso ammette almeno un autovalore reale ⁽⁸⁾.

Infatti ciò è evidente, in virtù dei n.º 5 e 6, se $\mathfrak{I}[\varphi]$ ha in (\mathcal{C}) un estremo superiore maggiore di zero, oppure un estremo inferiore minore di zero.

⁽⁸⁾ Questa proposizione e alcune di quelle stabilite nei n.º precedenti sono di solito dimostrate per altra via.

Resterebbe il caso del funzionale $\mathcal{J}[\varphi]$ sempre nullo; ma questo caso non può verificarsi essendosi supposto che $K(x, z)$ non è nullo quasi dappertutto in Q . Ed invero, se fosse sempre, in (\mathcal{C}) , $\mathcal{J}[\varphi] = 0$, ogni funzione $\varphi(x)$ di (\mathcal{C}) sarebbe una funzione massimante per $\mathcal{J}[\varphi]$ e varrebbe per essa la (7), vale a dire, trattandosi di un nucleo simmetrico, si avrebbe quasi dappertutto sull'intervallo $(0, 1)$,

$$\int_0^1 K(x, z)\varphi(z)dz = 0.$$

Questa uguaglianza sarebbe allora soddisfatta quasiovunque anche da ogni funzione $\psi(x)$ definita su $(0, 1)$ ed ivi integrabile insieme col suo quadrato $\psi^2(x)$:

$$(10) \quad \int_0^1 K(x, z)\psi(z)dz = 0.$$

Detto E l'insieme dei punti di Q in cui è $K(x, z) > 0$ e supposto che la misura di E sia > 0 , scegliendo un n intero positivo sufficientemente grande anche l'insieme E_n dei punti di Q in cui è $0 < K(x, z) \leq n$ risulta di misura > 0 . Indichiamo con E_x l'insieme dei punti ξ dell'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle x tali che l'intersezione di E_n con la retta $x = \xi$ sia un insieme linearmente non misurabile, oppure tale che la funzione $K(\xi, z)$, della z , non sia integrabile su tutto l'intervallo $0 \leq z \leq 1$. La misura (lineare) di E_x risulta nulla.

Consideriamo tutti i polinomi nella z , a coefficienti (reali e) *razionali*: essi costituiscono un insieme numerabile e possiamo perciò ordinarli in una successione

$$(11) \quad P_1(z), P_2(z), \dots, P_m(z), \dots$$

Dovrà essere, per ciascun $P_m(z)$,

$$(12) \quad \int_0^1 K(x, z)P_m(z)dz = 0$$

per quasitutti gli x dell'intervallo $(0, 1)$. E se indichiamo con $E_{x, m}$ l'insieme dei punti x di $(0, 1)$ in cui non vale la (12), l'insieme somma di tutti gli $E_{x, m}$, per $m = 1, 2, \dots$, sarà un insieme E_x' di misura (lineare) nulla.

Sia ora \hat{x}_0 un punto dell'intervallo $(0, 1)$ non appartenente nè a E_x nè a E_x' e tale che l'insieme $E_n^{(0)}$ dei punti di E_n che si trovano sulla retta $x = \hat{x}_0$, abbia una misura lineare > 0 ; e formiamo la funzione $\psi(z)$ ponendola

uguale ad 1 nei punti dell'asse delle z che sono proiezioni ortogonali su tale asse dei punti di $E_n^{(0)}$, ed uguale a 0 altrove. È, evidentemente,

$$(13) \quad \int_0^1 K(x_0, z)\psi(z)dz > 0.$$

D'altra parte, si può scegliere, come è noto, una successione parziale della (11):

$$P_{m_1}(z), P_{m_2}(z), \dots, P_{m_r}(z), \dots$$

la quale verifichi in tutto l'intervallo $(0, 1)$ la disuguaglianza

$$|P_{m_r}(z)| < 2$$

e converga quasidappertutto in $(0, 1)$ verso la $\psi(z)$. È allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 K(x_0, z)P_{m_r}(z)dz = \int_0^1 K(x_0, z)\psi(z)dz,$$

e per la (12)

$$\int_0^1 K(x_0, z)\psi(z)dz = 0,$$

contro la (13). Dunque la misura dell'insieme E non può essere > 0 ; e con lo stesso ragionamento si dimostra che, supposta valida la (10) nel senso detto, non può essere > 0 neppure la misura dell'insieme dei punti di Q in cui è $K(x, z) < 0$ ⁽⁹⁾.

Ciò prova che, nelle ipotesi fatte, il funzionale $\mathfrak{I}[\varphi]$ non può esser sempre nullo in (C).

Possiamo aggiungere che:

Se $K(x, z)$ è un nucleo simmetrico e il funzionale $\mathfrak{I}[\varphi]$ può assumere in (C) valori positivi (negativi), il nucleo $K(x, z)$ ammette almeno un autovalore reale positivo (negativo).

§ 2.

8. Sia $H(x)$ una funzione (reale e ad un valore) definita sull'intervallo $(0, 1)$ ed ivi integrabile insieme con il suo quadrato $H^2(x)$, e per ogni fun-

⁽⁹⁾ Il ragionamento qui fatto prova che, se $K(x, z)$ è una qualsiasi funzione integrabile in Q , e se per ogni funzione $\psi(x)$ integrabile e limitata in $(0, 1)$ la (10) vale per quasi tutti gli x di $(0, 1)$, la $K(x, z)$ è nulla quasi dappertutto in Q .

zione $\varphi(x)$ della classe (\mathcal{C}) consideriamo il funzionale

$$\mathfrak{J}_1[\varphi] = \int_0^1 H(x)\varphi(x)dx + \iint_Q K(x, z)\varphi(x)\varphi(z)dx dz,$$

il quale, per ciascuna delle $\varphi(x)$ indicate, ha sempre un valore finito.

Consideriamo pure, per ogni funzione $y(x)$ della classe (\mathcal{A}) , il funzionale

$$I_1[y] = \int_0^1 H(x)y'(x)dx + \iint_Q K(x, z)y'(x)y'(z)dx dz,$$

il quale ha anch'esso un valore finito per ogni $y(x)$ di (\mathcal{A}) .

Come il funzionale $I[y]$ considerato nel § 1, anche $I_1[y]$ risulta *limitato* in (\mathcal{A}) , ed i suoi estremi, in (\mathcal{A}) , sono pertanto ambedue finiti.

Inoltre, un ragionamento analogo a quello del n.º 3 mostra che il funzionale

$$\int_0^1 H(x)y'(x)dx$$

è uniformemente continuo in (\mathcal{A}) , nel senso indicato nel n.º rammentato; perciò anche $I_1[y]$ risulta, in (\mathcal{A}) , uniformemente continuo.

Se M_1 è l'estremo superiore di $I_1[y]$ in (\mathcal{A}) , con considerazioni analoghe a quelle del n.º 4 si prova che esso è un *massimo (assoluto)*, vale a dire, che esiste in (\mathcal{A}) (almeno) una funzione $y_0(x)$ tale che sia

$$I_1[y_0(x)] = M_1.$$

9. Supponiamo ora che la funzione $K(x, z)$ costituisca un nucleo (definito positivo o anche soltanto) semidefinito positivo e che $H(x)$ non sia nullo quasi-dappertutto ⁽¹⁰⁾. In questa ipotesi, risulta $M_1 > 0$, perchè esistono sicuramente in (\mathcal{A}) delle $y(x)$ per cui è

$$\int_0^1 H(x)y'(x)dx \neq 0$$

e quindi anche di quelle per cui l'integrale scritto è > 0 ; e pertanto, se fosse

$$\int_0^1 y_0'(x)^2 dx < 1,$$

⁽¹⁰⁾ Se $H(x)$ fosse nullo quasi dappertutto i funzionali $\mathfrak{J}_1[\varphi]$ e $I_1[y]$ coinciderebbero rispettivamente con $\mathfrak{J}[\varphi]$ e $I[y]$.

indicato con c il numero positivo tale che

$$c^2 = 1 : \int_0^1 y_0'^2(x) dx \quad (11).$$

ne seguirebbe

$$\begin{aligned} I_1[cy_0] &= c \int_0^1 H(x) y_0'(x) dx + c^2 \iint_Q K(x, z) y_0'(x) y_0'(z) dx dz \\ &\geq c I_1[y_0] = c M_1 > M_1. \end{aligned}$$

Dunque, nelle ipotesi sopra poste, è

$$\int_0^1 y_0'^2(x) dx = 1,$$

e si ha l'esistenza del massimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_1[\varphi]$ in (\mathcal{C}) .

Analogamente per il minimo assoluto.

§ 3.

10 Supporremo sempre, da ora in poi, che la funzione $K(x, z)$ sia continua in tutto il quadrato Q e sempre maggiore di zero. Esisteranno pertanto due costanti K_0 e K_1 , tali da aversi in tutto Q

$$(14) \quad 0 < K_0 \leq K(x, z) \leq K_1.$$

Per ogni funzione $\varphi(x)$ della classe (\mathcal{C}) , vale a dire (reale e ad un valore c) integrabile sull'intervallo $(0, 1)$, insieme col suo quadrato $\varphi^2(x)$, consideriamo il funzionale

$$\mathfrak{J}_2[\varphi] = \iint_Q K(x, z) \varphi^2(x) \varphi^2(z) dx dz,$$

che ha valore finito per ogni elemento della classe detta.

Indichiamo con (\mathcal{C}) la classe di tutte le funzioni $y(x)$ (reali e ad un valore) definite sull'intervallo $(0, 1)$, ivi assolutamente continue e con derivata prima, considerata soltanto là dove esiste finita, a quadrato integrabile, e soddisfacenti alla condizione $y(0) = 0$.

(11) Anche qui non può essere

$$\int_0^1 y_0'^2(x) dx = 0,$$

perchè da questa uguaglianza discenderebbe $y'(x) = 0$ quasi dappertutto e quindi $M_1 = 0$.

Consideriamo, per ogni funzione $y(x)$ della classe (\mathcal{A}') , il funzionale

$$I_2[y] = \iint_Q K(x, z) y'^2(x) y'^2(z) dx dz,$$

il cui valore è sempre finito per tutti gli elementi di (\mathcal{A}') .

È evidentemente, per ogni $y(x)$ di (\mathcal{A}') ,

$$(15) \quad K_0 \left[\int_0^1 y'^2(x) dx \right]^2 \leq I_2[y] \leq K_1 \left[\int_0^1 y'^2(x) dx \right]^2.$$

Dimostriamo che:

$I_2[y]$ è in (\mathcal{A}') un funzionale semicontinuo inferiormente, nel senso che, considerata una qualsiasi funzione $y_0(x)$ di (\mathcal{A}') e scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può sempre trovare un $\delta > 0$ in modo che, se $y(x)$ è una qualunque funzione di (\mathcal{A}') soddisfacente in tutto l'intervallo $(0, 1)$ alla disuguaglianza

$$|y(x) - y_0(x)| < \delta,$$

risulti

$$(16) \quad I_2[y] > I_2[y_0] - \varepsilon.$$

Fissiamo una $y_0(x)$ di (\mathcal{A}') . Siccome, qualunque sia $\varepsilon > 0$, la disuguaglianza (16) risulta immediatamente verificata da ogni $y(x)$ della classe (\mathcal{A}') tale che

$$I_2[y] \geq I_2[y_0],$$

basterà limitarci a considerare quelle $y(x)$ di (\mathcal{A}') per le quali è

$$(17) \quad I_2[y] < I_2[y_0],$$

supponendo $I_2[y_0] > 0$.

Per le $y(x)$ ora indicate è allora, in virtù della (15),

$$(18) \quad \int_0^1 y'^2(x) dx < \left\{ \frac{I_2[y_0]}{K_0} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Per le stesse $y(x)$ è poi

$$(19) \quad \begin{aligned} I_2[y] - I_2[y_0] &= \iint_Q K(x, z) \{ y'^2(x) y'^2(z) - y_0'^2(x) y_0'^2(z) \} dx dz \\ &= \iint_Q K(x, z) y'^2(x) \{ y'^2(z) - y_0'^2(z) \} dx dz + \iint_Q K(x, z) y_0'^2(z) \{ y'^2(x) - y_0'^2(x) \} dx dz \\ &= \int_0^1 y'^2(x) dx \int_0^1 K(x, z) \{ y'^2(z) - y_0'^2(z) \} dz + \int_0^1 y_0'^2(z) dz \int_0^1 K(x, z) \{ y'^2(x) - y_0'^2(x) \} dx \\ &\geq 2 \int_0^1 y'^2(x) dx \int_0^1 K(x, z) y_0'(z) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dz + \\ &\quad + 2 \int_0^1 y_0'^2(z) dz \int_0^1 K(x, z) y_0'(x) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dx. \end{aligned}$$

Considerato un numero positivo R , indichiamo con E_R l'insieme dei punti dell'intervallo $(0, 1)$ tali che per ogni x coincidente con uno di questi punti la derivata $y_0'(x)$ esista finita e soddisfi alla disuguaglianza $|y_0'(x)| \leq R$.

Indichiamo poi con C_R l'insieme complementare di E_R rispetto all'intervallo $(0, 1)$. Per $R \rightarrow \infty$, la misura di C_R tende a zero. Inoltre, dalla

$$\int_0^1 \int_{C_R} K(x, z) y_0'^2(x) y_0'^2(z) dx dz \leq K_1 \left[\int_0^1 y_0'^2(z) dz \right] \left[\int_{C_R} y_0'^2(x) dx \right],$$

segue, per $R \rightarrow \infty$,

$$\int_0^1 \int_{C_R} K(x, z) y_0'^2(x) y_0'^2(z) dx dz \rightarrow 0;$$

e quindi, fissato un $\varepsilon > 0$, si può determinare un R_0 in modo che sia

$$0 \leq I_2[y_0] - \int_{E_{R_0}} \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'^2(x) y_0'^2(z) dx dz < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ne viene

$$I_2[y] - I_2[y_0] \geq \int_{E_{R_0}} \int_{E_{R_0}} K(x, z) y'^2(x) y'^2(z) dx dz - \int_{E_{R_0}} \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'^2(x) y_0'^2(z) dx dz - \frac{\varepsilon}{2}$$

e perciò, analogamente a quanto si è fatto per la (19),

$$(20) \quad I_2[y] - I_2[y_0] \geq -\frac{\varepsilon}{2} + 2 \int_{E_{R_0}} y'^2(x) dx \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'(z) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dz + \\ + 2 \int_{E_{R_0}} y_0'^2(z) dz \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'(x) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dx.$$

Poniamo ora

$$g(x) = y_0'(x) \quad \text{in } E_{R_0}, \\ = 0 \quad \ll \quad C_{R_0},$$

donde, in tutto $(0, 1)$,

$$|g(x)| \leq R_0,$$

e fissiamo una successione di polinomi $Q_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, in modo che sia, in tutto $(0, 1)$,

$$|Q_n(x)| < R_0 + 1,$$

con

$$Q_n(x) \rightarrow g(x),$$

per $n \rightarrow \infty$, quasidappertutto in $(0, 1)$. Fissiamo, inoltre, un'altra successione

di polinomi (nelle due variabili x e z) $P_n(x, z)$, $n = 1, 2, \dots$, in modo che sia, in tutto Q ,

$$|P_n(x, z)| < K_1 + 1,$$

con

$$P_n(x, z) \rightarrow K(x, z),$$

uniformemente in tutto Q , per $n \rightarrow \infty$.

È

$$\begin{aligned} & \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'(z) |y'(z) - y_0'(z)| dz = \int_0^1 K(x, z) g(z) |y'(z) - y_0'(z)| dz, \\ & \left| \int_0^1 K(x, z) g(z) |y'(z) - y_0'(z)| dz - \int_0^1 P_n(x, z) Q_n(z) |y'(z) - y_0'(z)| dz \right| \\ & \leq \int_0^1 |K(x, z) g(z) - P_n(x, z) Q_n(z)| |y'(z) - y_0'(z)| dz \\ & \leq \left\{ \int_0^1 [K(x, z) g(z) - P_n(x, z) Q_n(z)]^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ 2 \left(\int_0^1 y'^2(z) dz + \int_0^1 y_0'^2(z) dz \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2 \left\{ \frac{I_2[y_0]}{K_0} \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \int_0^1 [K(x, z) g(z) - P_n(x, z) Q_n(z)]^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2 \left\{ \frac{I_2[y_0]}{K_0} \right\}^{\frac{1}{4}} \int_0^1 [K_1 |g(z) - Q_n(z)| + |Q_n(z)| |K(x, z) - P_n(x, z)|]^2 dz \left\{ \right. \\ & < \varepsilon : 16 \left\{ \frac{I_2[y_0]}{K_0} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

per ogni n maggiore o uguale ad un certo n_0 . Ma si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 P_{n_0}(x, z) Q_{n_0}(z) |y'(z) - y_0'(z)| dz = P_{n_0}(x, 1) Q_{n_0}(1) |y(1) - y_0(1)| - \\ & \quad - \int_0^1 |y(z) - y_0(z)| \frac{\partial}{\partial z} |P_{n_0}(x, z) Q_{n_0}(z)| dz; \end{aligned}$$

e se è, in tutto $(0, 1)$,

$$(21) \quad |y(x) - y_0(x)| < \delta,$$

e si indica con L un numero positivo maggiore dei massimi moduli, in Q ,

di $P_{n_0}(x, z)Q_{n_0}(z)$, $P_{n_0}(x, z)Q_{n_0}(x)$, $\frac{\partial}{\partial z} \{ P_{n_0}(x, z)Q_{n_0}(z) \}$, $\frac{\partial}{\partial x} \{ P_{n_0}(x, z)Q_{n_0}(x) \}$, si può scrivere

$$\left| \int_0^1 P_{n_0}(x, z)Q_{n_0}(z) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dz \right| < 2L\delta$$

onde, per

$$(22) \quad \delta < \varepsilon : 32L \left\{ \frac{I_2[y_0]}{K_0} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left| \int_0^1 P_{n_0}(x, z)Q_{n_0}(z) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dz \right| < \varepsilon : 16 \left\{ \frac{I_2[y_0]}{K_0} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Supposte dunque verificate (21) e (22), si ha

$$\left| \int_{E_{R_0}} y'^2(x) dx \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'(z) \{ y'(z) - y_0'(z) \} dz \right| < \varepsilon : 8;$$

e analogamente

$$\left| \int_{E_{R_0}} y_0'^2(z) dz \int_{E_{R_0}} K(x, z) y_0'(x) \{ y'(x) - y_0'(x) \} dz \right| < \varepsilon : 8;$$

e perciò dalla (20) si deduce

$$I_2[y] - I_2[y_0] > -\varepsilon.$$

Così è provata la semicontinuità inferiore del funzionale $I_2[y]$ sulla funzione $y_0(x)$.

11. Consideriamo ora, per ogni $\varphi(x)$ della classe (\mathcal{C}) , il funzionale

$$\mathfrak{J}_\alpha[\varphi] = \iint_{\mathcal{Q}} K(x, z) \varphi^\alpha(x) \varphi^\alpha(z) dx dz - \left[\int_0^1 P(x) \varphi(x) dx \right]^\alpha,$$

dove α è un numero tale che $0 \leq \alpha < 4$ e $P(x)$ è una funzione (reale e ad un valore) definita sull'intervallo $(0, 1)$ ed ivi integrabile insieme col suo

quadrato $P^2(x)$, e dove si intende di considerare per $\left[\int_0^1 P(x) \varphi(x) dx \right]^\alpha$ sempre un

valore reale, e precisamente: se è $\alpha = 0$, costantemente il valore 1; se α è razionale e > 0 , l'unico valore reale di tale potenza qualora essa ne ammetta uno solo, e sempre quello di segno positivo (o sempre quello di segno negativo)

qualora ne ammetta due; e in ogni altro caso di prendere il valore reale positivo di $\left| \int_0^1 P(x)\varphi(x)dx \right|^\alpha$. $\mathfrak{J}_\alpha[\varphi]$ ha un valore finito per ogni elemento di (\mathcal{C}) .

Insieme con questo funzionale, consideriamo anche l'altro

$$I_3[y] = \iint_Q K(x, z)y'^2(x)y'^2(z)dx dz - \left[\int_0^1 P(x)y'(x)dx \right]^\alpha$$

(dove conserviamo per la potenza α *esima* qui indicata lo stesso significato detto più sopra) il quale ha, per ogni $y(x)$ della classe (\mathcal{C}') , un valore finito.

Dimostriamo che $I_3[y]$ ha in (\mathcal{C}') un minimo assoluto.

Poichè, per $y(x) \equiv 0$, è $I_3[y] = 0$, se $\alpha > 0$, e $I_3[y] = -1$, se $\alpha = 0$, l'estremo inferiore di $I_3[y]$ in (\mathcal{C}') non può essere positivo. Questo estremo inferiore è poi finito, perchè, avendosi sempre

$$(23) \quad \iint_Q K(x, z)y'^2(x)y'^2(z)dx dz \geq K_0 \left[\int_0^1 y'^2(x)dx \right]^2,$$

$$\left| \int_0^1 P(x)y'(x)dx \right| \leq \left\{ \int_0^1 P^2(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 y'^2(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

ne risulta

$$(24) \quad \left| \int_0^1 P(x)y'(x)dx \right| \leq \left\{ \int_0^1 P^2(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}} K_0^{-\frac{1}{4}} \left| \iint_Q K(x, z)y'^2(x)y'^2(z)dx dz \right|^{\frac{1}{4}},$$

ed è $0 \leq \alpha < 4$.

Detto i l'estremo inferiore di $I_3[y]$ in (\mathcal{C}') , sia

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

una successione di funzioni di (\mathcal{C}') tali che risulti, per ogni n ,

$$(25) \quad I_3[y_n] < i + \frac{1}{n}$$

e quindi, per $n \rightarrow \infty$,

$$(26) \quad I_3[y_n] \rightarrow i.$$

Da (25) segue, per ogni n , $I_3[y_n] < 1$, e di qui e da (23) e (24) si deduce l'esistenza di un numero positivo H tale che sia, per tutti gli n ,

$$(27) \quad \int_0^1 y_n'^2(x)dx < H.$$

Le $y_n(x)$ risultano perciò tutte equiassolutamente continue ed equilimitate nell'intervallo $(0, 1)$, e si può pertanto estrarre dalla successione delle $y_n(x)$ un'altra successione (che, per semplicità di scrittura, supporremo coincidere con quella delle $y_n(x)$) convergente uniformemente, in tutto $(0, 1)$, verso una funzione $y_\infty(x)$ assolutamente continua e tale che $y_\infty(0) = 0$.

Inoltre, dalla (27) segue (come al n.º 4) che è

$$\int_0^1 y_\infty'^2(x) dx \leq H,$$

il che assicura che la $y_\infty(x)$ appartiene alla classe (\mathcal{A}') .

Con un ragionamento analogo a quello del n.º 3, si prova che l'integrale

$$\int_0^1 P(x)y'(x) dx$$

è uniformemente continuo nella classe di tutte le funzioni $y(x)$ di (\mathcal{A}') che soddisfano alla disuguaglianza

$$\int_0^1 y'^2(x) dx \leq H;$$

e da ciò e dalla proposizione dimostrata nel n.º 10 sul funzionale $I_2[y]$ si trae

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_3[y_n] \geq I_3[y_\infty],$$

e per la (26) e per il significato di i ,

$$I_3[y_\infty] = i.$$

Così è provato che $I_3[y]$ ha in (\mathcal{A}') un minimo assoluto.

Ma ogni funzione $y(x)$ di (\mathcal{A}') dà, ponendo $\varphi(x) = y'(x)$ là dove la $y'(x)$ esiste finita e $\varphi(x) = 0$ altrove, una funzione $\varphi(x)$ della classe (\mathcal{C}) , con

$$I_3[y] = \mathcal{I}_3[\varphi];$$

e viceversa, ogni funzione $\varphi(x)$ di (\mathcal{C}) dà, ponendo

$$y(x) = \int_0^x \varphi(x) dx,$$

una funzione $y(x)$ della classe (\mathcal{A}') , con

$$\mathcal{I}_3[\varphi] = I_3[y].$$

Pertanto risulta provato che anche il funzionale $\mathcal{I}_3[\varphi]$ ha, nella classe (\mathcal{C}) , il minimo assoluto.

12. In tutto il § 3 abbiamo supposto che $K(x, z)$ sia nel quadrato Q una funzione continua e sempre maggiore di zero. È facile persuadersi che questa condizione può esser notevolmente allargata senza nuocere alla verità delle proposizioni dimostrate nei n.º 10 e 11 sulla semicontinuità inferiore di $I_2[y]$ in (\mathcal{A}) e sull'esistenza del minimo assoluto di $I_3[y]$ e di $\mathcal{I}_3[\varphi]$, rispettivamente in (\mathcal{A}) e in (\mathcal{C}) . Per esempio, la condizione indicata può esser sostituita dalla seguente: « che esistano due costanti K_0 e K_1 in modo che, in tutto Q , valga sempre la (14), e che, scelto comunque un numero $\sigma > 0$, si possa trovare in Q un insieme chiuso di punti di continuità per $K(x, z)$ tale che le sue intersezioni con le parallele all'asse delle x e quelle con le parallele all'asse delle z abbiano tutte una misura lineare $> 1 - \sigma$ ».

La stessa condizione può anche esser sostituita dall'altra: « che esistano due costanti K_0 e K_1 in modo che, in tutto Q , valga sempre la (14), e che i punti di discontinuità di $K(x, z)$ giacciono tutti su un numero finito di rette parallele ».

Intorno ad una classe notevole di cicli formati da quattro trasformazioni di Laplace nello spazio ordinario.

Memoria di H. JONAS (a Berlino).

Alla memoria di LUIGI BIANCHI
nel decimo anniversario della sua morte.

Preliminari.

Preliminari. — Un *ciclo di LAPLACE*, nell' accennato senso ristretto che varrà pel seguito, comprende quattro superficie su cui si corrispondono i doppii sistemi (α, β) di curve fra loro coniugate, le rispettive tangenti, non omologhe s' intende, coincidendo a due a due secondo l'ordine del ciclo e formando così un quadrilatero sghembo variabile. Saranno dette, per brevità, *reti opposte* quelle descritte dai vertici opposti, le rette che li congiungono chiamandosi *diagonali* del ciclo. Nel presente lavoro riprendo a trattare la classe particolarmente interessante, già segnalata come un primo esempio nel 1922 ⁽¹⁾, dei cicli di LAPLACE connessi alla deformazione del paraboloide iperbolico equilatero, e che viene caratterizzata dal distendersi le reti opposte dell' una coppia sopra una medesima sfera, donde intanto, con una proiettività, si può passare ad una quadrica generale a punti ellittici ⁽²⁾. Tale ciclo di LAPLACE si genera in modo intuitivo nel rotolamento del paraboloide $z = xy$ su una sua deformata, tirandosi dal punto fisso O i raggi paralleli tanto all'asse trascinato nel movimento come al suo simmetrico rapporto al piano tangente. Questi sulla sfera rappresentativa di centro O , segnano due sistemi ortogonali (α, β) , corrispondenti alle asintotiche della deformata ed aventi a comune i loro trasformati di LAPLACE, talchè viene a nascerne il ciclo desiderato. Giova notar qui che il sistema differenziale da me preso a base analitica dell' indagine è dovuto al DARBOUX ⁽³⁾, il quale lo diede risolvendo un altro problema, bensì congenere, senza constatarne l' intimo legame colla

⁽¹⁾ JONAS, *Untersuchungen über die als Geerbe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen*, « Math. Annalen », 87 (1922), p. 157.

⁽²⁾ Pel caso della quadrica rigata veggasi una prima comunicazione: JONAS, *Ueber den Zusammenhang zweier Klassen viergliedriger Laplacescher Zyklen*, « Journal f. d. reine u. ang. Math. », 179 (1938), p. 22.

⁽³⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie gén. des surf.*, 3, p. 471.

deformazione paraboloidale. Io vi sono poi ritornato più volte, fra l'altro per dedurne sotto un nuovo aspetto la teoria delle trasformazioni B_k di BIANCHI per le superficie applicabili sul detto paraboloidale (4). L'argomento d'un ulteriore studio recente, riguardante il comportarsi dell'associato ciclo di LAPLACE nell'applicazione della B_k , mi fu porto dalla scoperta di un teorema generale che il sig. BACKES è stato il primo ad enunciare (5), la di lui pubblicazione avendo preceduto di poco la mia propria indipendente (6). Un ciclo di LAPLACE cioè gode della proprietà che le sue diagonali costituiscono due congruenze W , nelle quali le asintotiche delle falde focali (reali od immaginarie coniugate) corrispondono alle reti (α, β) del ciclo. Partendo da questo fatto fondamentale, ho mostrato che un ciclo della classe speciale in considerazione, se è assoggettato all'operazione B_k , si trasforma in maniera tale che le congruenze W formate dalle diagonali subiscono trasformazioni asintotiche simultanee delle falde focali. Sorse di qui spontanea la domanda se tali trasformazioni potevano estendersi ai cicli di LAPLACE in generale; il che giunsi a stabilire in una seguente Memoria (7), adattando a questo scopo le trasformazioni armoniche delle reti e la nozione di rete derivata.

In quanto all'attuale ricerca, avvertasi prima che nel ciclo di LAPLACE legato alla deformata del paraboloidale $z = xy$ vi è *corrispondenza fra le sviluppabili delle due congruenze di diagonali*, queste ultime essendo polari reciproche rispetto alla sfera cui può sostituirsi, come già si disse, una quadrica. Faremo vedere che la pensata proprietà riesce caratteristica pei cicli di LAPLACE aventi due reti opposte su una stessa quadrica. Dopo di ciò, tornando al caso della sfera per studiare nuovamente l'effetto del processo B_k , discorreremo della *stratificabilità* in un senso ossia *unilaterale*, avente luogo tra le congruenze Γ e C delle diagonali, il raggio generico di Γ , intersezione dei due piani tangenti alla sfera, ammettendo una semplice infinità di punti, per le superficie luogo dei quali i piani tangenti formano fascio col raggio di C , corda di contatto, com'asse. Rammentiamo che secondo FUBINI (8),

(4) JONAS, *Ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sul paraboloidale iperbolico equilatero*, « Annali di Mat. », (4) 2 (1924-25), p. 161.

(5) BACKES, *Sur les réseaux conjugués qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace*, « Bull. Ac. Roy. de Belg. », (5) 21 (1935), p. 883.

(6) JONAS, *Ein allgemeiner Satz über W -Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme*, « Math. Annalen », 114 (1937), p. 237.

(7) JONAS, *Allgemeine Transformationstheorie der konjugierten Systeme mit viergliedrigen Laplaceschen Zyklen*, « Math. Annalen », 114 (1937), p. 749.

(8) FUBINI, *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R* , « Annali di Mat. », (4) 1 (1923-24), p. 241.

mantenuta l'ipotesi che si corrispondano le sviluppabili, una siffatta relazione geometrica vige quando inoltre i piani focali della prima congruenza contengono i fuochi non omologhi della seconda. Orbene nel caso nostro presentasi il fatto assai singolare che tra le ∞^1 superficie della stratificazione ne esistono due segnalate, aventi le (α, β) per linee asintotiche, e che si trasformano appunto come le falde focali della congruenza Γ per trasformazioni asintotiche. È da osservarsi che la proprietà in questione sta fuor di quanto consegua dalla stratificabilità *bilaterale* da cui si trovano vincolate la Γ e la sua trasformata Γ_1 , essendo congruenze R nelle condizioni indicate dal FUBINI ⁽⁹⁾, cioè contigue per trasformazioni asintotiche delle falde focali. Dopo trattentici su questa stratificazione per esaminarne più da vicino l'assetto analitico, procediamo a determinare le più generali superficie che abbiano i loro punti situati sui raggi della congruenza Γ e prendano parte nel modo di sopra alla trasformazione. Sebbene, propriamente, tale problema pure rientri nella teoria generale delle congruenze R , le particolari circostanze che ne accompagnano la risoluzione appaiono degne d'attenzione, tanto più che c'imbattiamo così in un sistema differenziale, generalizzazione di quello di DARBOUX, al quale può ridursi, per conveniente scelta dei valori iniziali, la deformazione del paraboloido rigato generale. Anzi, con ciò, saremo in grado di dire da qual ente geometrico venga surrogato allora il ciclo di LAPLACE. Rimandando poi dettagli alle righe che seguono, basti qui avvertire che i nuovi sistemi di quadrilateri sghembi risultano identici a quelli ottenuti risolvendo il problema con cui termineremo la nostra ricerca, di trovare cioè le coppie di doppi sistemi di linee (α, β) , appartenenti ad una medesima sfera, e per cui si confondano i piani osculatori alle curve non omologhe nei punti corrispondenti.

1. **Generalità sui cicli di Laplace.** — Comincio coll'espore in succinto il metodo metrico di cui mi sono servito per la ricerca dei cicli di LAPLACE in due Memorie anteriori ⁽¹⁰⁾. Indichino x (cioè x, y, z) e x' i punti descriventi due opposte delle quattro reti (α, β) del ciclo domandato, essendo

$$(1) \quad x_{\alpha\beta} = ax_{\alpha} + bx_{\beta}, \quad x'_{\alpha\beta} = a'x'_{\alpha} + b'x'_{\beta}$$

le relative equazioni di LAPLACE. Sarà necessario in primo luogo che, posto;

$$(2) \quad a - \frac{b_{\beta}}{b} = A, \quad b - \frac{a_{\alpha}}{a} = B, \quad a' - \frac{b'_{\beta}}{b'} = A', \quad b' - \frac{a'_{\alpha}}{a'} = B',$$

⁽⁹⁾ Ibid.

⁽¹⁰⁾ Cf. il § 3 della Mem. citata in nota ⁽⁶⁾.

le quattro funzioni a, b, a', b' soddisfino alle condizioni seguenti:

$$(3) \quad A_x + bA = B'_\beta + a'B' = AB', \quad B_\beta + aB = A'_\alpha + b'A' = BA'.$$

In virtù di queste risultano illimitatamente integrabili le seguenti equazioni a derivate parziali (delle quali la seconda della (1) è conseguenza):

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_x = \frac{b'}{a} x_\beta + b'(x' - x), \quad x'_\beta = \frac{a'}{b} x_x + a'(x' - x), \\ x_{x\alpha} = \left(b + \frac{b_x}{b} + B' \right) x_x + bB'(x' - x), \\ x_{x\beta} = ax_x + bx_\beta, \\ x_{\beta\beta} = \left(a + \frac{a_\beta}{a} + A' \right) x_\beta + aA'(x' - x), \end{array} \right.$$

le quali, riguardate come sistema lineare ed omogeneo per la terna di funzioni incognite $x_x, x_\beta, x' - x$, posseggono tre soluzioni linearmente indipendenti, in guisa da definire un ciclo di LAPLACE in modo univoco a meno di trasformazioni affini. Per le reti intermedie (\tilde{x}) e (\tilde{x}') , trasformate comuni di LAPLACE delle superficie (x) e (x') , avremo:

$$(5) \quad \tilde{x} = x - \frac{x_x}{b} = x' - \frac{x'_\beta}{a'}, \quad \tilde{x}' = x - \frac{x_\beta}{a} = x' - \frac{x'_x}{b'}.$$

$$(6) \quad \tilde{x}_{\alpha\beta} = A\tilde{x}_x + B'\tilde{x}_\beta, \quad \tilde{x}'_{\alpha\beta} = A'\tilde{x}'_x + B\tilde{x}'_\alpha.$$

Dalle (2), (3) deduconsi le formule ausiliarie, utili più tardi:

$$(7) \quad (a + a' + A + A')_x = (b + b' + B + B')_\beta,$$

$$(8) \quad (aa'AA')_x = 0, \quad (bb'BB')_\beta = 0.$$

A proposito della relazione (7) notisi che, introducendo il determinante:

$$(9) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_x & x_\beta & x' - x \\ y_x & y_\beta & y' - y \\ z_x & z_\beta & z' - z \end{vmatrix},$$

viene:

$$(10) \quad \left(\log \frac{\Delta}{ab} \right)_x = b + b' + B + B', \quad \left(\log \frac{\Delta}{ab} \right)_\beta = a + a' + A + A'.$$

D'altra parte, in virtù delle (8), come facilmente confermasi col tener conto della forma del sistema differenziale (4), sarà sempre possibile disporre delle variabili α e β in modo da aversi con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ unità positive o negative:

$$(11) \quad aa'AA' = \varepsilon_1, \quad bb'BB' = \varepsilon_2.$$

Ricordiamo ancora l'importante proprietà dei cicli di LAPLACE che le diagonali xx' e $\widetilde{x}\widetilde{x}'$ formano due congruenze W con α, β parametri asintotici delle falde focali, le sviluppabili determinandosi rispettivamente dalle equazioni differenziali:

$$(12) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm \sqrt{\frac{bb'}{aa'}}, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm \sqrt{\frac{BB'}{AA'}}.$$

Per una ben nota proposizione di DARBOUX in ogni congruenza W le sei coordinate di retta soddisfano ad un'equazione di LAPLACE. Questa per la congruenza delle rette xx' , con $\theta = x' - x, \dots, yz' - zy', \dots$, assume la forma:

$$(13) \quad \theta_{\alpha\beta} = (a + a')\theta_\alpha + (b + b')\theta_\beta - (ab' + a'b)\theta,$$

valendo l'analogia per quella delle rette $\widetilde{x}\widetilde{x}'$:

$$(14) \quad \theta_{\alpha\beta} = (A + A')\theta_\alpha + (B + B')\theta_\beta - (AB + A'B)\theta.$$

2. Una proprietà caratteristica dei cicli di Laplace con due reti opposte sopra una medesima quadrica. — Ci proponiamo ora di dimostrare il teorema seguente: *Se in un ciclo di LAPLACE ha luogo corrispondenza fra le sviluppabili delle due congruenze W formate dalle diagonali, le reti opposte dell'una coppia appartengono ad una medesima quadrica.*

Poichè, nell'attuale ipotesi, dalla (12) si ha:

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{BB'}{AA'},$$

ammesse le (11) e cioè per causa di realtà con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, si ottiene:

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{BB'}{AA'} = \pm 1.$$

Sarà lecito, per semplificare la scrittura e senza pregiudicare l'esattezza dell'argomentazione, supporre *reali* nelle due congruenze W le sviluppabili, date allora da:

$$(15) \quad \alpha \pm \beta = \text{cost.}$$

Avendosi dunque

$$(16) \quad aa' = bb', \quad AA' = BB', \quad aa'AA' = bb'BB' = \varepsilon = \pm 1,$$

poniamo per un momento:

$$aa' = bb' = \rho.$$

Derivando coll'aver riguardo alla (2) troviamo:

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho} = b + b' - (B + B'), \quad \frac{\rho_\beta}{\rho} = a + a' - (A + A').$$

indi dal confronto colla (7):

$$(17) \quad (a + a')_{\alpha} = (b + b')_{\beta}, \quad (A + A')_{\alpha} = (B + B')_{\beta}.$$

È manifesto che nelle due congruenze W le curve $\alpha \pm \beta = \text{cost}$, intercettate dalle sviluppabili su ciascuna delle falde focali (anch'esse reali com'è ovvio), costituiscono un sistema *isotermo-coniugato*; ne segue che le diagonali xx' e $\widetilde{x} \widetilde{x}$ percorrono congruenze R . A conferma di ciò si osservi altresì che per le (17) le equazioni di LAPLACE (13), (14) risultano ad invarianti uguali. Segnaliamo di passaggio una proposizione generale che si deduce dalla sola (7): *Se in un ciclo di LAPLACE una delle due congruenze di diagonali è R , la proprietà sussiste per l'altra.* Tuttavia tale ipotesi sarebbe diversa dalla nostra, non discendendone generalmente la corrispondenza delle sviluppabili.

Eseguite le derivazioni nelle (17) coll'uso di (2), (3), otteniamo la seguente equazione in termini finiti da aggiungersi alla (16):

$$aB - bA + a'B' - b'A' = 0,$$

la quale, eliminando p. es. a' e A' , viene a scriversi:

$$(18) \quad (aB - bA)(aA - b'B) = 0.$$

Resta con ciò spiegato il differente comportamento delle due coppie di reti opposte nel ciclo ricercato. Abbiamo in conseguenza le relazioni:

$$(19) \quad \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} = \frac{A}{B} = \frac{B'}{A'}$$

ovvero:

$$(19^{\text{bis}}) \quad \frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{A'}{B} = \frac{B'}{A},$$

completata dalla terza delle (16). Basta ora, come si vede senz'altro, che prendiamo a fondamento degli ulteriori sviluppi l'uno di questi gruppi di formule, p. es. le (19), l'altro corrispondendo allora soltanto ad uno scambio delle due coppie di reti opposte.

Combinando le (19) colle (2) avremo:

$$(20) \quad a_{\alpha} = b_{\beta}, \quad a'_{\alpha} = b'_{\beta},$$

onde appare che le reti (α, β) descritte dai punti x e x' saranno ad invarianti uguali. Introduciamo, osservando le (20), due funzioni \wp, \wp' col porre:

$$(21) \quad a = -\frac{\wp_{\beta}}{\wp}, \quad b = -\frac{\wp_{\alpha}}{\wp}, \quad a' = -\frac{\wp'_{\beta}}{\wp'}, \quad b' = -\frac{\wp'_{\alpha}}{\wp'}.$$

Deve aversi $aa' = bb'$, cioè $\vartheta_x \vartheta'_x = \vartheta_\beta \vartheta'_\beta$, onde potremo fare:

$$(22) \quad \vartheta'_x = \frac{1}{h} \vartheta_\beta, \quad \vartheta'_\beta = \frac{1}{h} \vartheta_x.$$

Dalle (21) si ricavano per mezzo delle (2) le espressioni:

$$(23) \quad A = -\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_x}, \quad B = -\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_\beta}, \quad A' = -\frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'_x}, \quad B' = -\frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'_\beta},$$

compatibili peraltro colle rimanenti (19). Ci resta adesso da esprimere che i valori di a, b, a', b' dedotti dalle (23) mediante le (3) devono identificarsi colle formole (21). Per questo, presa la relazione.

$$\frac{A_x}{A} + b - B' = 0$$

e sostituitevi per b e B' le espressioni (21) e (23), scriviamo:

$$\frac{A_x}{A} - \frac{\vartheta_x}{\vartheta} + \frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'_\beta} = 0,$$

indi integrando ed unendovi le formole analoghe:

$$A \frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta} = f_1(\beta), \quad B \frac{\vartheta'_x}{\vartheta} = f_2(\alpha), \quad A' \frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'} = f_3(\beta), \quad B' \frac{\vartheta'_x}{\vartheta'} = f_4(\alpha).$$

Tenendo presenti le (23), si avrà:

$$\frac{\vartheta_{x\beta}}{h\vartheta} = -f_1(\beta) = -f_2(\alpha) = \text{cost}, \quad \frac{h\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'} = -f_3(\beta) = -f_4(\alpha) = \text{cost}.$$

Delle due costanti così introdotte l'una e cioè p. es. la prima potrà ridursi all'unità positiva, munendo a tal fine le funzioni ϑ e h dello stesso moltiplicatore costante opportunamente scelto, in guisa da lasciar inalterate le (22), mentre allora la seconda costante per effetto della terza formola (16), con ciò verificata, riesce identica alla $\varepsilon = \pm 1$ che vi figura. Essendo:

$$(24) \quad \vartheta_{x\beta} = h\vartheta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{h} \vartheta',$$

$$(25) \quad A = -\frac{h\vartheta}{\vartheta_x}, \quad B = -\frac{h\vartheta}{\vartheta_\beta}, \quad A' = -\varepsilon \frac{\vartheta'}{h\vartheta'_x}, \quad B' = -\varepsilon \frac{\vartheta'}{h\vartheta'_\beta},$$

bisogna infine paragonare colla seconda (24) i due valori di $\vartheta'_{\alpha\beta}$ dedotti dalle (22). Siamo così pervenuti al sistema differenziale:

$$(26) \quad \begin{cases} \vartheta'_x = \frac{1}{h} \vartheta_\beta, & \vartheta'_\beta = \frac{1}{h} \vartheta_x, \\ \vartheta_{xx} = \frac{h_x}{h} \vartheta_x + \varepsilon \vartheta', & \vartheta_{x\beta} = h\vartheta, & \vartheta_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \vartheta_\beta + \varepsilon \vartheta', \quad (\varepsilon = \pm 1) \end{cases}$$

ove alle equazioni della seconda riga si potrebbero sostituire le equivalenti:

$$(27) \quad \vartheta'_{xx} = -\frac{h_x}{h} \vartheta'_x + \vartheta, \quad \vartheta'_{x\beta} = \frac{\varepsilon}{h} \vartheta', \quad \vartheta'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \vartheta'_\beta + \vartheta.$$

Alle (26) riconosciamo associarsi in ogni caso la condizione:

$$(28) \quad (\log h)_{x\beta} = h - \frac{\varepsilon}{h},$$

soddisfatta la quale il sistema differenziale risulta illimitatamente integrabile. In quanto alla (28), trascurando qui le particolarità di geometria immaginaria, ci contentiamo di ricordare che essa in sostanza non è altro che l'equazione differenziale delle superficie a curvatura costante.

Assumendo ora le terne ξ, η, ζ e ξ', η', ζ' col porre:

$$(29) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad y = \frac{\eta}{\vartheta}, \quad z = \frac{\zeta}{\vartheta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}, \quad y' = \frac{\eta'}{\vartheta'}, \quad z = \frac{\zeta'}{\vartheta'},$$

avremo invece delle formole (5):

$$(30) \quad \tilde{x} = \frac{\xi_x}{\vartheta_x} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \tilde{x} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_x}{\vartheta'_x},$$

mentre il sistema differenziale (4) verrà a mutarsi appunto nel sistema (26) soddisfatto da ϑ, ϑ' , valendo così adunque per le quattro coppie di funzioni $\xi, \xi'; \eta, \eta'; \zeta, \zeta'; \vartheta, \vartheta'$. Considerandolo come lineare e completo nelle funzioni incognite $\vartheta, \vartheta', \vartheta_x, \vartheta_\beta$, riesce facile a vedersi che esso ammette quattro soluzioni linearmente indipendenti, onde il determinante

$$(31) \quad \delta = \begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi_x & \xi_\beta \\ \eta & \eta' & \eta_x & \eta_\beta \\ \zeta & \zeta' & \zeta_x & \zeta_\beta \\ \vartheta & \vartheta' & \vartheta_x & \vartheta_\beta \end{vmatrix}$$

sarà diverso da zero. Si verifica per derivazione il sussistere di un gruppo di dieci relazioni integrali quadratiche, presentanti i due tipi:

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{2}{h} \xi_x \xi_\beta - \xi^2 - \varepsilon \xi'^2 = c_{11}, \\ \frac{1}{h} (\xi_x \eta_\beta + \xi_\beta \eta_x) - \xi \eta - \varepsilon \xi' \eta' = c_{12}. \end{cases}$$

Denotiamo con c_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$; $c_{ik} = c_{ki}$) le dieci costanti, intendendosi presi gli indici 1, 2, 3, 4 nell'ordine delle lettere $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$, e formiamone il determinante del 4° ordine:

$$(33) \quad \begin{vmatrix} c_{ik} \end{vmatrix} = c.$$

Quadrando δ , ciò che si fa coll'applicare la consueta regola al determinante indicato dalla prima riga:

$$\left(\frac{\xi_x + \xi_\beta}{\sqrt{2h}}, \frac{i(\xi_x - \xi_\beta)}{\sqrt{2h}}, i\xi, i\sqrt{\varepsilon\xi'} \right)$$

e tenendo conto delle (32), otterremo la relazione:

$$(34) \quad c = -\varepsilon \frac{\delta^2}{h^2}.$$

Importa avvertire che, calcolate le c_{ik} mediante le (32) dai valori iniziali delle sedici funzioni $\xi, \xi', \xi_x, \xi_\beta, \dots$, arbitrarii pur che ne risulti $\delta \neq 0$, si ha per la (34): $\varepsilon = -\operatorname{sgn} c$.

Indicansi con C_{ik} i complementi algebrici degli elementi c_{ik} nel determinante (31), onde verrà:

$$(35) \quad C = \|C_{ik}\| = c^3.$$

Orbene, per provare che nel quadrilatero sghembo variabile $xx\tilde{x}'\tilde{x}$, generante il ciclo di LAPLACE, i due vertici opposti \tilde{x} e \tilde{x}' appartengono ad una medesima quadrica, consideriamo la forma quadrica quaternaria:

$$(36) \quad \begin{aligned} \Phi = & C_{11}\xi^2 + 2C_{12}\xi\eta + 2C_{13}\xi\zeta + 2C_{14}\xi\vartheta \\ & + C_{22}\eta^2 + 2C_{23}\eta\zeta + 2C_{24}\eta\vartheta \\ & + C_{33}\zeta^2 + 2C_{34}\zeta\vartheta \\ & + C_{44}\vartheta^2, \end{aligned}$$

la quale scritta nelle ξ', \dots denoteremo con Φ' , essendo inoltre

$$(37) \quad \Pi = C_{11}\xi\xi' + C_{12}(\xi\eta' + \eta\xi') + \dots + C_{44}\vartheta\vartheta'$$

la rispettiva forma polare. Se deriviamo la (36) rapporto ad α e β , giungeremo per effetto delle (32) a stabilire quattro relazioni della forma:

$$(38) \quad \frac{1}{2h}\Phi_\beta\xi_x + \frac{1}{2h}\Phi_x\xi_\beta = (\Phi + c)\xi + \varepsilon\Pi\xi',$$

da cui, avendosi $\delta \neq 0$, si ricavano le seguenti:

$$(39) \quad \Phi + c = 0, \quad \Phi_x = 0, \quad \Phi_\beta = 0, \quad \Pi = 0.$$

In modo simile si ottiene:

$$(40) \quad \Phi' + \varepsilon c = 0, \quad \Phi'_x = 0, \quad \Phi'_\beta = 0.$$

Dopo di ciò, derivando le $\Phi_x = 0, \Phi_\beta = 0$ un'altra volta e sostituendo per $\xi_{xx}, \dots, \xi_{\beta\beta}, \dots$ le espressioni date dalle (26), avremo coll'osservare la $\Pi = 0$:

$$(41) \quad \begin{cases} C_{11}(\xi_x)^2 + 2C_{12}\xi_x\eta_x + \dots + C_{44}(\vartheta_x)^2 = 0, \\ C_{11}(\xi_\beta)^2 + 2C_{12}\xi_\beta\eta_\beta + \dots + C_{44}(\vartheta_\beta)^2 = 0. \end{cases}$$

Notiamo d'altronde che si ricadrà nella prima formula (40), quando si calcoli $\Phi_{\alpha\beta}$ col far uso delle (26) e (33). Ora, il teorema enunciato al principio del presente numero risulta pienamente confermato dalle (41), siccome queste in virtù delle (30) si convertono nell'equazione della quadrica:

$$(42) \quad C_{11}\widehat{x}^2 + 2C_{12}\widehat{x}\widehat{y} + 2C_{13}\widehat{x}\widehat{z} + 2C_{14}\widehat{x} + C_{22}\widehat{y}^2 + 2C_{13}\widehat{y}\widehat{z} \\ + 2C_{24}\widehat{y} + C_{33}\widehat{z}^2 + 2C_{34}\widehat{z} + C_{44} = 0,$$

soddisfatta altresì da \widetilde{x} , \widetilde{y} , \widetilde{z} .

Come ben si sà, il segno della curvatura totale della quadrica è quello di $-C$, cioè tenuto conto della relazione (35), di $-c$; onde, osservando la (34), possiamo dire: *Secondochè nelle equazioni differenziali (26), (28) è $\varepsilon = +1$ o $\varepsilon = -1$, restando pur nell'ipotesi di sviluppabili reali, la quadrica ricoperta dalle due reti opposte (\widetilde{x}) e (\widetilde{x}) del ciclo sarà rispettivamente a punti ellittici o rigata.* Quanto all'ipotesi fin qui esclusa che nelle congruenze W delle diagonali le sviluppabili sieno immaginarie coniugate, ci limiteremo ad accennare che allora nell'equazione differenziale (28) della funzione h il segno ε si collega a quello della curvatura totale in modo opposto, vale a dire che è $\varepsilon = +1$ nel caso della quadrica rigata.

3. Caso della sfera; deformate del paraboloide iperbolico equilatero; stratificabilità unilaterale delle due congruenze di diagonali. — Passiamo ora a completare i risultati conseguiti nelle mie Memorie precedenti rispetto ai cicli di LAPLACE per cui due opposte delle quattro superficie coincidono nella stessa sfera unitaria col centro nell'origine. A tale uopo, per maggior chiarezza, scriviamo di nuovo, con $\varepsilon = +1$, le equazioni differenziali:

$$(43) \quad (\log h)_{\alpha\beta} = h - \frac{1}{h},$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_\alpha = \frac{1}{h} \xi_\beta, \quad \xi'_\beta = \frac{1}{h} \xi_\alpha, \\ \xi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \xi_\alpha + \xi', \quad \xi_{\alpha\beta} = h\xi, \quad \xi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \xi_\beta + \xi', \\ \left[\xi'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h} \xi'_\alpha + \xi, \quad \xi'_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \xi', \quad \xi'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \xi'_\beta + \xi \right]. \end{array} \right.$$

Data che sia la h , supponiamo di conoscere inoltre una coppia di soluzioni ϑ , ϑ' del sistema (44), per la quale la prima relazione (32) prende la forma:

$$(45) \quad \frac{2}{h} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 1.$$

Occorre ricordar qui rapidamente il metodo con cui se ne deduce il sistema completo delle soluzioni. Notiamo che dalla forma differenziale quadratica

$$(46) \quad \Sigma d\widehat{X}^2 = \frac{d\alpha^2}{(\vartheta'_\alpha)^2} + \frac{d\beta^2}{(\vartheta'_\beta)^2}$$

viene definito l'elemento lineare di una sfera (\widehat{X}) di raggio unita riferita alla rete ortogonale (α, β) ; onde se ne deducono per ξ, ξ', \dots le formule:

$$(47) \quad \xi = \vartheta \widehat{X} + \vartheta'_\beta \widehat{X}_\beta, \quad \xi' = \vartheta' \widehat{X} + \vartheta_\alpha \widehat{X}_\alpha.$$

Sono da aggiungersi, col sommatorio esteso alle lettere ξ, η, ζ , le relazioni:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \xi^2 = \vartheta^2 + 1, \quad \Sigma \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1, \quad \Sigma \xi \xi' = \vartheta \vartheta', \\ \Sigma \xi' d\xi = \vartheta' d\vartheta, \quad \Sigma (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta'_\alpha)^2, \quad \Sigma (\xi_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2, \\ [\Sigma \xi d\xi' = \vartheta d\vartheta', \quad \Sigma (\xi'_\alpha)^2 = (\vartheta'_\alpha)^2, \quad \Sigma (\xi'_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2]. \end{array} \right.$$

Vale quindi la seguente rappresentazione del ciclo di LAPLACE:

$$(49) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad \widehat{X} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}, \quad \bar{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

giacendo i punti \widehat{X} e \bar{X} sulla sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Al tempo stesso si determina con tre quadrature una superficie

$$(50) \quad x^* = \int (\xi' d\vartheta + \xi d\vartheta'),$$

applicabile sul paraboloido iperbolico equilatero $z = xy$, avendosi dalle (48):

$$(51) \quad \Sigma (dx^*)^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + [d(\vartheta\vartheta')]^2.$$

Sopra di essa le curve (α, β) sono le asintotiche. Badisi però che la deformazione, nelle condizioni di realtà da noi osservate, riesce *di prima specie*, cioè a sistema coniugato permanente reale, corrispondendo questo alle sviluppabili $\alpha \pm \beta = \text{cost}$ delle congruenze di diagonali del ciclo.

Seguendo la convenzione fatta nei preliminari, diremo Γ la congruenza W formata dalle rette xx' e C quella delle rette $\widehat{X}\bar{X}$. Dobbiamo ricordar qui che i fuochi, corrispondentisi fra di loro al modo stabilito dalle sviluppabili, vengono dati dalle formule:

$$(52) \quad x_{\Gamma}^{(1,2)} = \frac{\xi \pm h\xi'}{\vartheta \pm h\vartheta'}, \quad x_C^{(1,2)} = \frac{\xi_\alpha \pm \xi_\beta}{\vartheta_\alpha \pm \vartheta_\beta}.$$

Notisi ancora che sulle quattro falde focali le curve (α, β) formano le asintotiche, ed anzi che i piani tangenti alle superficie $(x_{\Gamma}^{(1)})$ e $(x_{\Gamma}^{(2)})$ contengono

rispettivamente i punti $x_C^{(1)}$ e $x_C^{(2)}$. Ciò premesso, consideriamo sul raggio xx' di Γ il punto definito da:

$$(53) \quad x^{[x]} = \frac{\xi + x\xi'}{\vartheta + x\vartheta'}$$

con x costante arbitraria. Dico che, per ciascuna superficie $(x^{[x]})$ di questa schiera, il piano tangente passa per l'altra diagonale $\widehat{X}\widetilde{X}$ del ciclo; il che si prova facilmente coll'uso di coordinate omogenee, essendo:

$$([\xi + x\xi']_\alpha, \xi + x\xi', \xi_x, \xi_\beta) = 0, \quad ([\xi + x\xi']_\beta, \xi + x\xi', \xi_x, \xi_\beta) = 0.$$

Donde: *La congruenza Γ delle intersezioni xx' dei piani tangenti alla sfera è stratificabile in un senso colla C delle rette $\widehat{X}\widetilde{X}$, corde di contatto.*

4. Applicazione della trasformazione B_k di Bianchi. — Denotando con a, b costanti vincolate dalla relazione ⁽⁴⁴⁾:

$$(54) \quad a^2 + b^2 = 1,$$

calcoleremo le nuove quaderne $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \vartheta_1$ e ξ'_1, \dots mediante formole:

$$(55) \quad \xi_1 = t\xi_x - a\xi - b\xi', \quad \xi'_1 = \frac{2ab}{t} \xi'_x - b\xi - a\xi',$$

ove t denoti un integrale del sistema di RICCATI:

$$(56) \quad t_x = -\frac{1}{2b} t^2 - \frac{h_x}{h} t + a, \quad t_\beta = -\frac{h}{2a} t^2 + \frac{b}{h}.$$

Coll'assumere inoltre la funzione

$$(57) \quad h_1 = \frac{ht^2}{2ab},$$

soddisfacente anch'essa l'equazione differenziale (43), risulteranno verificate per l'indice 1 tutte le relazioni del numero precedente. Dal processo analitico $B(a, b)$ così definito, equivalente all'operazione B_k di BIANCHI con $k = -2ab$, avremo il ciclo trasformato:

$$(58) \quad x_1 = \frac{\xi_1}{\vartheta_1}, \quad \widehat{X}_1 = \frac{(\xi_1)_\alpha}{(\vartheta_1)_\alpha} = \frac{(\xi'_1)_\beta}{(\vartheta'_1)_\beta}, \quad x'_1 = \frac{\xi'_1}{\vartheta'_1}, \quad \widetilde{X}_1 = \frac{(\xi_1)_\beta}{(\vartheta_1)_\beta} = \frac{(\xi'_1)_x}{(\vartheta'_1)_x},$$

le superficie (\widehat{X}_1) e (\widetilde{X}_1) confondendosi ancora nella sfera $\Sigma X^2 = 1$. Lasciando da parte l'effetto ben noto della B_k sulla deformata (50) del paraboloido

⁽⁴⁴⁾ Non comparendo più a, b nel significato attribuito loro al n° 1. la nuova convenzione non può produrre equivoco.

$z = xy$, osserviamo che col porre $B(a, b) \equiv B_k$ si ha $B(b, a) \equiv B'_k$, essendo le B_k, B'_k trasformazioni di BIANCHI a costanti uguali e di classe opposta (¹²). La principale proprietà geometrica della B_k operata sul ciclo di LAPLACE sta in ciò che: *Le due congruenze Γ e C delle diagonali si trasformano con trasformazioni asintotiche delle loro falde focali.* Per la dimostrazione, già data nella mia Memoria citata in (⁶), sarà necessario accertarsi che

$$(\xi_1 \pm h_1 \xi'_1, \xi \pm h \xi', [\xi \pm h \xi']_x, [\xi \pm h \xi']_y) = 0,$$

onde la proprietà, con ciò verificata per le congruenze Γ e Γ_1 , estendesi alle C, C_1 in forza della reciprocità rispetto alla sfera.

Rivolgiamoci alla schiera delle superficie $(x^{[k]})$ che si collega alla stratificazione della congruenza Γ colla C ed associamo l'analogia al ciclo trasformato, scrivendo per ciò conformemente alla formola (53):

$$(59) \quad x_1^{[k]} = \frac{\xi_1 + \alpha_1 \xi'_1}{\vartheta_1 + \alpha_1 \vartheta'_1}$$

con α_1 costante arbitraria. Incominciamo dal mostrare che: *Il piano tangente ad una superficie $(x^{[k]})$ contiene sempre il punto corrispondente di una determinata superficie $(x_1^{[k]})$, non valendo in generale la reciproca per la stessa coppia di superficie.* Basta esprimere la condizione perchè il punto $x_1^{[k]}$ appartenga al piano $x^{[k]} \widehat{X} \widetilde{X}$. Usando coordinate omogenee ed indicando come dianzi la sola prima linea del determinante, abbiamo la equazione:

$$(\xi_1 + \alpha_1 \xi'_1, \xi + \alpha \xi', \xi_x, \xi_y) = 0$$

da cui col sussidio delle (55), traiamo la relazione bilineare in x, α_1 :

$$(60) \quad \alpha \alpha_1 + \frac{a}{b} (x - \alpha_1) - 1 = 0, \quad \text{quindi: } \alpha_1 = \frac{ax - b}{-bx + a}.$$

Ora, implicando le formole (55) le altre:

$$(61) \quad \xi = -\frac{2ab}{t} (\xi_1)_x - a \xi_1 - b \xi'_1, \quad \xi' = -t(\xi'_1)_x - b \xi_1 - a \xi'_1,$$

è palese che la trasformazione inversa è ancora una $B(a, b)$ cogli stessi valori di a, b . Riflettendo che la (61) non è simmetrica in x e α_1 , troviamo che la proprietà della congiungente i punti $x^{[k]}$ e $x_1^{[k]}$ di essere tangente alla superficie $(x^{[k]})$ non ha l'analogia rispetto alla $(x_1^{[k]})$. Fanno eccezione i casi in cui si abbia $\alpha = \alpha_1 = +1$ ovvero $\alpha = \alpha_1 = -1$, sicchè nel sistema collegato alla

(¹²) Cambiando a, b ambedue di segno, la trasformazione rimane inalterata.

stratificazione converrà introdurre come particolarmente notevole la coppia delle superficie:

$$(62) \quad \dot{x} = \frac{\xi + \xi'}{\vartheta + \vartheta'}, \quad \bar{x} = \frac{\xi - \xi'}{\vartheta - \vartheta'},$$

a ciascuna delle quali si associa ordinatamente nel ciclo trasformato l'altra:

$$(63) \quad \dot{x}_1 = \frac{\xi_1 + \xi'_1}{\vartheta_1 + \vartheta'_1}, \quad \bar{x}_1 = \frac{\xi_1 - \xi'_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1}.$$

Si ha dunque l'importante risultato: *Le due rette che si appoggiano alle quattro diagonali del dato ciclo di LAPLACE e del suo trasformato per mezzo della B_k toccano rispettivamente le coppie di superficie (\dot{x}) , (\dot{x}_1) e (\bar{x}) , (\bar{x}_1) , luoghi dei loro punti d'incontro colle rette xx_1 e x_1x' , di Γ e di Γ_1 .*

Completiamo la proposizione ottenuta provando che: *Le due superficie (\dot{x}) e (\bar{x}) i cui punti dividono armonicamente la diagonale xx' del ciclo di LAPLACE sono polari reciproche rapporto alla sfera unitaria di centro O; sopra esse le curve (α, β) corrispondenti alle reti del ciclo, sono appunto come sulle falde focali le asintotiche, con che il passaggio alle superficie (\dot{x}_1) e (x_1) connesse al ciclo trasformato si presenta sotto forma di trasformazioni asintotiche simultanee. Dalle (48) infatti si avrà:*

$$\Sigma \dot{x}\bar{x} = 1, \quad \Sigma \dot{x}d\bar{x} = 0, \quad \Sigma \dot{x}d\bar{x} = 0,$$

onde resta assodata la reciprocità polare. Che le linee (α, β) traccino sulla (x) il sistema delle asintotiche, si riconosce osservando che il vettore $\xi - \xi'$, ... è quello della direzione normale alla superficie (x) e verificando con un semplice calcolo che

$$\Sigma \dot{x}_\alpha(\xi_\sigma - \xi'_\sigma) = 0, \quad \Sigma \dot{x}_\beta(\xi_\beta - \xi'_\beta) = 0.$$

Non è fuor di luogo accennare alle B_k singolari con

$$k = \pm 1 \quad (\alpha = 1/\sqrt{2}, \quad b = \mp 1/\sqrt{2}),$$

per cui — sappiamo — si confondono le due classi del BIANCHI. Se prendiamo p. es. $a = -b$, troveremo per mezzo delle (55), (61) le formule:

$$\dot{x} = \frac{\xi + \xi'}{\vartheta + \vartheta'} = \frac{h(\xi_1)_\alpha + (\xi_1)_\beta}{h(\vartheta_1)_\alpha + (\vartheta_1)_\beta}, \quad \dot{x}_1 = \frac{\xi_1 + \xi'_1}{\vartheta_1 + \vartheta'_1} = \frac{h_1\xi_\alpha + \xi_\beta}{h_1\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta}, \quad (h_1 = -ht^2);$$

e formule simili valgono nel caso $a = b$ per \bar{x} , \bar{x}_1 . Di qui: *Per le trasformazioni B_k singolari $k = \pm 1$ le diagonali non omologhe dei due cicli di LAPLACE sono complanari; i relativi due punti d'incontro, cioè i punti comuni alle rette di Γ e di C_1 ed a quelle di C e di Γ_1 , percorrono le falde focali di una con-*

gruenza W , la polare reciproca della quale viene descritta dall' intersezione dei rispettivi piani, avente i suoi fuochi sui raggi di Γ e di Γ_1 . Questo risultato, all' infuori della teoria della trasformazione, sembra notevole, perchè esso stabilisce un nuovo vincolo geometrico tra le congruenze Γ e C del cielo originale. Se ne deducono infatti, note le soluzioni generali dell' equazione di RICCATI (56) per $a = \pm b$, due sistemi di superficie trasformate asintotiche, l' uno della (\dot{x}) e l' altro della (\bar{x}) , giacendo i loro punti corrispondenti sul raggio $\widehat{X}\bar{X}$ della congruenza C ; vi si aggiungono le superficie polari i cui piani tangenti passano per la retta xx' di Γ e che riescono anch' esse trasformate asintotiche delle superficie (\dot{x}) e (\bar{x}) , scambiate fra loro per la reciprocità. Avvertiamo intanto che, col presentarsi d' un siffatto sistema di trasformate asintotiche, a punti allineati e che pur non si riduca ad un fascio lineare di trasformazioni asintotiche, ci troviamo di fronte ad una configurazione suscettibile di realizzarsi in modo generale per le superficie R .

5. Congruenze di diagonali omologhe dei cicli dato e trasformato nella stratificabilità bilaterale. — Riprendiamo lo studio della B_k generale con $a \neq b$ e cerchiamo di esprimere la stratificazione mutua che ammettono, quali congruenze R , la Γ e la Γ_1 , contigue per trasformazioni asintotiche delle falde focali, dispensandoci di stabilire le relazioni analoghe, cioè duali, che varranno per le congruenze C e C_1 . Assunto sul raggio xx' di Γ il punto

$$(64) \quad \Xi = \frac{\xi + \rho\xi'}{\vartheta + \rho\vartheta'},$$

ed esigendo che il piano tangente alla superficie (Ξ) da esso descritta contenga la retta corrispondente $x_1x'_1$ di Γ_1 , bisognerà che si abbia:

$$(d[\xi + \rho\xi'], \xi_1, \xi'_1, \xi + \rho\xi') = 0.$$

Ne risulta per la funzione incognita ρ un' equazione a differenziali totali del tipo di RICCATI, illimitatamente integrabile a causa delle (56):

$$(65) \quad \rho_\alpha = \frac{t}{2a} \rho^2 + \left(\frac{a}{t} - \frac{t}{2b}\right) \rho - \frac{b}{t}, \quad \rho_\beta = \frac{a}{ht} \rho^2 + \left(\frac{ht}{2a} - \frac{b}{ht}\right) \rho - \frac{ht}{2b}.$$

Per quanto riguarda la stratificazione in senso contrario, cioè della congruenza Γ_1 colla Γ , basterà riportarci alle formule (61) della $B(a, b)$ inversa, onde si ricava: $t_1 = -2ab/t$, cosicchè, posto al par della (64):

$$(66) \quad \Xi_1 = \frac{\xi_1 + \rho_1 \xi'_1}{\vartheta_1 + \rho_1 \vartheta'_1},$$

sarà manifesto che nell'attuale processo la ρ_1 viene fornita dall'equazione di RICCATI analoga alla (65):

$$(67) \quad (\rho_1)_\alpha = -\frac{b}{t} \rho_1^2 + \left(\frac{a}{t} - \frac{t}{2b}\right) \rho + \frac{t}{2a}, \quad (\rho_1)_\beta = -\frac{a}{ht} \rho_1^2 + \left(-\frac{ht}{2a} + \frac{b}{ht}\right) \rho_1 + \frac{ht}{2b}.$$

Pare notevole che l'una si trasforma nell'altra colla sostituzione lineare:

$$(68) \quad \rho_1 = \frac{a\rho - b}{b\rho - a}.$$

Se ne rileva adunque un certo modo di corrispondenza fra le superficie (Ξ) e (Ξ_1) dei due sistemi, pur sussistendo la evidente proprietà che ogni superficie dell'una schiera con una qualunque dell'altra sta in trasformazione asintotica. Questa corrispondenza, col tener presente il significato della (60), potremo interpretare geometricamente colla costruzione seguente: *Nota la superficie (Ξ) della prima schiera di stratificazione, cerchisi il punto d'intersezione del piano contenente il punto Ξ e la retta $\bar{X}\bar{X}$ di C con la diagonale $x_1x'_1$ del ciclo trasformato, allora il suo coniugato armonico sulla $x_1x'_1$ descriverà una superficie (Ξ_1) della seconda schiera.* Facendo poi:

$$(69) \quad \rho_1 = \frac{t}{T}, \quad \text{quindi: } \rho = \frac{at - bT}{bt - aT},$$

ed avendo riguardo alle (56) cui soddisfa la funzione t arriveremo a cangiare le equazioni differenziali (65) nelle seguenti:

$$(70) \quad T_\alpha = -\frac{1}{2a} T^2 - \frac{h_\alpha}{h} T + b, \quad T_\beta = -\frac{h}{2b} T^2 + \frac{a}{h},$$

le quali, come si vede, non sono che le (56) colle costanti a, b invertite e costituiscono per ciò la equazione di RICCATI da cui dipende la $B(b, a) \equiv B'_k$. Onde possiamo dire: *La stratificazione bilaterale, avente luogo tra le congruenze di diagonalì omologhe dei due cicli di LAPLACE che stanno in trasformazione B_k , viene effettuata adoperando la più generale B'_k , cioè colla stessa costante k e di classe opposta.* Tralascieremo di addentrarci nelle conseguenze geometriche, ricordando solo l'importante fatto che dal comporsi la B_k colla R'_k risulta la trasformazione G_k data dal GUICHARD.

6. Determinazione delle più generali coppie di superficie, aventi i loro punti sulle diagonalì omologhe dei cicli legati dalla B_k e contigue per trasformazione asintotica. — Dobbiamo anche qui premettere la osservazione che l'argomento cui miriamo, suggerito dai risultati finora conseguiti, e compreso come caso particolare nella teoria delle reti e congruenze R . Ritenendo le

notazioni, introdotte colla (65) in senso più ristretto, designeremo con

$$(71) \quad \Xi = \frac{\xi + \rho\xi'}{\vartheta + \rho\vartheta'}$$

ancora un punto del raggio xx' di Γ . Proponiamoci adesso di determinare il fattore ρ in guisa che sulla superficie (Ξ) il doppio sistema delle curve (α, β) sia formato dalle asintotiche, corrispondenti così a quelle delle falde focali della Γ ed alle reti del ciclo. Notiamo per incidenza, e senza l'intento di farne un uso diretto, che dalle linee $\alpha \pm \beta = \text{cost}$ verrà tracciata sulla (Ξ) una rete coniugata, alla quale, secondo la terminologia di GUICHARD, sarà *coniugata* la congruenza Γ , onde desumesi che la intera catena di LAPLACE uscente da questa rete per l'uno e l'altro verso riesce inscritta nella catena aderente alla Γ . Ora, siccome deve aversi:

$$\begin{aligned} ([\xi + \rho\xi']_{\alpha\alpha}, [\xi + \rho\xi']_{\alpha}, [\xi + \rho\xi']_{\beta}, \xi + \rho\xi') &= 0, \\ ([\xi + \rho\xi']_{\beta\beta}, [\xi + \rho\xi']_{\alpha}, [\xi + \rho\xi']_{\beta}, \xi + \rho\xi') &= 0, \end{aligned}$$

la funzione richiesta ρ viene assoggettata alle equazioni differenziali:

$$(72) \quad \begin{cases} \rho_{\alpha\alpha} = \left[\frac{h_{\alpha}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \right] \rho_{\alpha} - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \rho_{\beta} + \rho^2 - 1, \\ \rho_{\beta\beta} = - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \rho_{\beta} + \left[\frac{h_{\beta}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1} \right] \rho_{\beta} + \rho^2 - 1, \end{cases}$$

un po' complicate, ma che ciò nonostante si prestano al nostro scopo. Ammesso che sieno soddisfatte, avremo in pari tempo:

$$\begin{aligned} (\xi + \rho\xi')_{\alpha\alpha} &= \lambda_1(\xi + \rho\xi')_{\alpha} + \mu_1(\xi + \rho\xi')_{\beta} + \rho(\xi + \rho\xi'), \\ (\xi + \rho\xi')_{\beta\beta} &= \lambda_2(\xi + \rho\xi')_{\alpha} + \mu_2(\xi + \rho\xi')_{\beta} + \rho(\xi + \rho\xi') \end{aligned}$$

con

$$\lambda_1 = \frac{h_{\alpha}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1}, \quad \mu_1 = - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\alpha}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1}, \quad \lambda_2 = - \frac{2 \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1}, \quad \mu_2 = \frac{h_{\beta}}{h} + \frac{2 \frac{\rho}{h} \left(\frac{\rho}{h} \right)_{\beta}}{\left(\frac{\rho}{h} \right)^2 - 1},$$

Indi, dall'essere $(\mu_1)_{\beta} = (\lambda_2)_{\alpha}$, si conclude: *Ogni superficie descritta da un punto di una diagonale del ciclo considerato e che abbia le linee (α, β) per asintotiche è una superficie R, la relativa rete R essendo data da $\alpha \pm \beta = \text{cost}$, cioè corrispondendo alle sviluppabili della congruenza R formata dalle diagonali.*

Dopo ciò, prescindendo dai casi $\rho = \pm 1$, studiati al numero 4, eseguiamo la sostituzione:

$$(73) \quad \rho_\alpha = \sigma\rho + \tau h, \quad \rho_\beta = \tau\rho + \sigma h,$$

per mezzo della quale le relazioni (72) si convertono nelle più semplici:

$$(74) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha \rho + \tau_\alpha h = \sigma^2 \rho - \frac{h_\alpha}{h} \sigma\rho + h\sigma\tau + \rho^2 - 1, \\ \tau_\beta \rho + \sigma_\beta h = \tau^2 \rho - \frac{h_\beta}{h} \tau\rho + h\sigma\tau + \rho^2 - 1. \end{cases}$$

Da queste, sottraendo, si trova:

$$(75) \quad \rho \left(\sigma_\alpha - \tau_\beta - \sigma^2 + \tau^2 + \frac{h_\alpha}{h} \sigma - \frac{h_\beta}{h} \tau \right) - h(\sigma_\beta - \tau_\alpha) = 0,$$

alla quale si può unire la condizione d'integrabilità delle (73):

$$(76) \quad h \left(\sigma_\alpha - \tau_\beta - \sigma^2 + \tau^2 + \frac{h_\alpha}{h} \sigma - \frac{h_\beta}{h} \tau \right) - \rho(\sigma_\beta - \tau_\alpha) = 0.$$

Quindi, poichè $\rho^2 - h^2 \neq 0$, supposta la (E) distinta dall'una e l'altra delle due falde focali, otterremo le equazioni:

$$(77) \quad \sigma_\beta = \tau_\alpha, \quad \sigma_\alpha - \tau_\beta - \sigma^2 + \tau^2 + \frac{h_\alpha}{h} \sigma - \frac{h_\beta}{h} \tau = 0.$$

La prima di queste ci induce ad assumere una nuova funzione incognita φ' col porre:

$$(78) \quad \sigma = -\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'}, \quad \tau = -\frac{\varphi'_\beta}{\varphi'},$$

con che la seconda viene a prendere la forma:

$$(79) \quad \varphi'_{\alpha\alpha} + \frac{h_\alpha}{h} \varphi'_\alpha = \varphi'_{\beta\beta} + \frac{h_\beta}{h} \varphi'_\beta.$$

Indicando con φ un'altra funzione richiesta, scriviamo:

$$(80) \quad \rho = -\frac{\varphi}{\varphi'}$$

onde, derivando col tener conto delle (73) e (78), verrà:

$$(81) \quad \varphi_\alpha = h\varphi'_\beta, \quad \varphi_\beta = h\varphi'_\alpha.$$

Ci conviene in fine introdurre una quantità c da riguardarsi previamente

come funzione di α , β , facendo in base alle (79):

$$(82) \quad \varphi'_{\alpha\alpha} + \frac{h_\alpha}{h} \varphi'_\alpha = \varphi'_{\beta\beta} + \frac{h_\beta}{h} \varphi'_\beta = \varphi + c\varphi',$$

dopo di che l'una o l'altra delle (74) ci fornirà:

$$(83) \quad \varphi'_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} (\varphi' + c\varphi).$$

Esprimendo ora le condizioni di integrabilità pel sistema differenziale costituito dalle (80)-(83), troviamo $c_\alpha = 0$, $c_\beta = 0$, quindi: $c = \text{cost}$. Con leggere modificazioni, e cioè attribuendo nel processo analitico così definito la parte principale alla funzione φ , perverremo a dare al sistema differenziale l'assetto seguente, con c costante arbitraria:

$$(84) \quad \begin{cases} \varphi'_\alpha = \frac{1}{h} \varphi_\beta, & \varphi'_\beta = \frac{1}{h} \varphi_\alpha, \\ \varphi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \varphi_\alpha + c\varphi + \varphi', & \varphi_{\alpha\beta} = h(\varphi + c\varphi'), & \varphi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \varphi_\beta + c\varphi + \varphi', \end{cases}$$

le (82)-(83) potendo aggiungersi come conseguenze. Qui ancora vale una relazione integrale quadratica:

$$(85) \quad \frac{2}{h} \varphi_\alpha \varphi_\beta - \varphi^2 - \varphi'^2 - 2c\varphi\varphi' = \text{cost}.$$

Notando che, scelta la c , la integrazione del sistema (84) introduce tre costanti disponibili essenziali, cioè i rapporti dei valori iniziali di φ , φ' , φ_α , φ_β , possiamo enunciare il risultato colla proposizione: *Il problema di determinare sulla diagonale xx' del nostro ciclo di LAPLACE un punto (Ξ) tale che esso descriva una superficie (Ξ) colle asintotiche (α, β) , corrispondenti alle reti del ciclo, e che per ciò stesso sarà una superficie R , possiede ∞^4 soluzioni, la (Ξ) calcolandosi da φ , φ' nel modo seguente:*

$$(86) \quad \Xi = \frac{\xi\varphi' - \xi'\varphi}{\vartheta\varphi' - \vartheta'\varphi}.$$

Ormai riesce facile trarre la conseguenza importante: *L' applicazione della B_K , nella quale le funzioni ausiliarie φ , φ' si trasformano appunto come ξ , ξ' , ... mediante le formule (55), fa passare dalle superficie (Ξ) alla sua omologa (Ξ_1) collegata al ciclo trasformato:*

$$(87) \quad \Xi_1 = \frac{\xi_1\varphi'_1 - \xi'_1\varphi_1}{\vartheta_1\varphi'_1 - \vartheta'_1\varphi_1},$$

la (Ξ) e la (Ξ_1) essendo contigue per trasformazione asintotica. All' uopo consta-

tiamo, in primo luogo, che le funzioni φ_1, φ'_1 , calcolate dalle (55):

$$(88) \quad \varphi_1 = t\varphi_x - a\varphi - b\varphi', \quad \varphi'_1 = \frac{2ab}{t} \varphi'_x - b\varphi - a\varphi',$$

soddisfano al sistema differenziale (84) scritto per l'indice 1, il che ci dimostra che la superficie (Ξ_1) ammette ancora le curve (α, β) per asintotiche. Oltre a questo, collo stabilire la relazione:

$$([\xi\varphi' - \xi'\varphi]_\alpha, [\xi\varphi' - \xi'\varphi]_\beta, \xi\varphi' - \xi'\varphi, \xi_1\varphi'_1 - \xi'_1\varphi_1) = 0$$

ci si persuade che la retta $\Xi\Xi_1$ tocca la superficie (Ξ) , la medesima proprietà relativa alla superficie (Ξ_1) ricavandosi in modo analogo. Ora, considerando che il punto Ξ_1 è quello in cui il piano tangente alla (Ξ) viene intersecato dalla retta $x_1x'_1$ di Γ_1 , si avrà al tempo stesso la conferma che: *Col metodo accennato, cioè integrando il sistema differenziale (84), si ottengono le più generali congruenze W con α, β parametri asintotici delle falde focali ed aventi i rispettivi fuochi sulle rette corrispondenti di Γ e di Γ_1 .*

Per le cose testè esposte dovevansi escludere le particolari superficie (Ξ) trattate al numero 5. A proposito di queste, possiamo aggiungere un'osservazione che pare importante: *La schiera delle superficie (Ξ) con cui viene individuata la stratificazione della congruenza Γ con una qualunque Γ_1 , appartenente quale sua omologa ad un nuovo ciclo di LAPLACE dedotto dall'originale per mezzo di una B_k , si determina integrando il sistema differenziale (84) nella condizione speciale che sia nulla la costante che forma il secondo membro della relazione quadratica (85). Affinchè la B_k , applicata al ciclo, risulti reale, occorre che si abbia $|c| > 1$. Procedendo alla verifica, facciamo come sopra $\rho = -\varphi/\varphi'$. Deriviamo col tener conto delle due prime (84) ed osserviamo che la supposta relazione omogenea*

$$\frac{2}{h} \varphi_x \varphi_\beta = \varphi^2 + \varphi'^2 + 2c\varphi\varphi'$$

con $2ab = 1/c$, $a^2 + b^2 = 1$, può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{2\varphi_x \varphi_\beta}{h\varphi^2} = \frac{1}{ab\rho^2} (a\rho - b)(b\rho - a),$$

onde, assunto un fattore t , avremo le formule:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{-\frac{\rho_\alpha}{\rho} + \frac{\rho_\beta}{h}}{\left(\frac{\rho}{h}\right)^2 - 1} = \frac{1}{t\rho} (a\rho - b), \quad \frac{\varphi_\beta}{\varphi} = \frac{\frac{\rho_\alpha}{h} - \frac{\rho_\beta}{\rho}}{\left(\frac{\rho}{h}\right)^2 - 1} = \frac{th}{2ab\rho} (b\rho - a).$$

Orbene da queste segue immediatamente la equazione di RICCATI (65) per

la funzione ρ , mentre le tre rimanenti relazioni (84) portano all'equazione di RICCATI (56) da soddisfarsi colla t e da cui venne definita l'operazione $B(a, b) \equiv B_a$. D'altronde, come era prevedibile, riconosciamo essere la (87) attualmente in difetto, avendosi $\varphi_1 = 0$, $\varphi' = 0$.

7. Sistemi di quadrilateri sghembi connessi alle deformate del paraboloide rigato generale. — Le equazioni differenziali (84) alle quali ci ha condotti il problema del numero precedente possono riguardarsi da un altro punto di vista. Dimostreremo che: *Dal sistema differenziale (84), nell'ipotesi $|c| < 1$ e per un'opportuna scelta dei valori iniziali, viene a dipendere la costruzione della superficie applicabili sul paraboloide iperbolico generale, le linee (α, β) essendo ancora le asintotiche.*

Scriviano, per maggior chiarezza, nuovamente il sistema:

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_\alpha = \frac{1}{h} \xi_\beta, \quad \xi'_\beta = \frac{1}{h} \xi_\alpha, \\ \xi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \xi_\alpha + \xi' + c\xi, \quad \xi_{\alpha\beta} = h(\xi + c\xi'), \quad \xi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \xi_\beta + \xi' + c\xi \\ \left[\xi'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h} \xi'_\alpha + \xi + c\xi', \quad \xi'_{\alpha\beta} = \frac{1}{h}(\xi' + c\xi), \quad \xi'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \xi'_\beta + \xi + c\xi' \right] \end{array} \right.$$

e partiamo da una coppia di soluzioni ϑ, ϑ' soddisfacente alla relazione:

$$(90) \quad \frac{2}{h} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 2c\vartheta\vartheta' + 1 - c^2.$$

Bisognerà assodare che la forma differenziale quadratica

$$(91) \quad \Sigma d\bar{X}^2 = \frac{1 - c^2}{(\vartheta_\alpha)^2} (d\alpha^2 + 2chd\alpha d\beta + h^2 d\beta^2).$$

generalizzazione della (46), definisce anche qui in modo intrinseco una sfera (\bar{X}) di raggio 1. A tal fine, notando che con $|c| < 1$ diverrà $e > 0$, $f > 0$, $eg - f^2 > 0$, indicati con e, f, g i coefficienti della forma (91), esprimiamo la curvatura:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{eg - f^2}} (P_\alpha + Q_\beta)$$

con

$$P = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(\frac{1}{2} f \frac{\partial \log g}{\partial \beta} + g_\alpha - f_\beta \right), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left(\frac{1}{2} f \frac{\partial \log e}{\partial \alpha} + e_\beta - f_\alpha \right).$$

Troveremo:

$$P = -2\sqrt{1 - c^2} \frac{\vartheta'}{\vartheta_\beta}, \quad Q = -2\sqrt{1 - c^2} \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha},$$

e da qui $K = 1$. Conosciuta la sfera (\widehat{X}) sulla quale, per l'essere $f/\sqrt{eg} = c$, le linee (α, β) tracciamo un sistema *isogonale*, ne deduciamo $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta'$ mediante le formule seguenti che ora tengono luogo delle (47):

$$(92) \quad \begin{cases} \xi + c\xi' = (\vartheta + c\vartheta')\widehat{X} + \vartheta'_\beta\widehat{X}_\beta, \\ c\xi + \xi' = (c\vartheta + \vartheta')\widehat{X} + \vartheta_\alpha\widehat{X}_\alpha, \end{cases}$$

in guisa da completare il gruppo delle soluzioni linearmente indipendenti del sistema (84). Dalle (92), la somma estendendosi alle tre lettere, discendono le:

$$(93) \quad \Sigma \xi^2 = \vartheta^2 + 1, \quad \Sigma \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1, \quad \Sigma \xi\xi' = \vartheta\vartheta' - c,$$

mentre la seconda e la terza riga delle (48) restano inalterate:

$$(94) \quad \begin{cases} \Sigma \xi' d\xi = \vartheta' d\vartheta, & \Sigma (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, & \Sigma (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2 \\ \Sigma \xi d\xi' = \vartheta d\vartheta', & \Sigma (\xi'_\alpha)^2 = (\vartheta'_\alpha)^2, & \Sigma (\xi'_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2. \end{cases}$$

Osserviamo che qui ancora risulta:

$$(95) \quad \widehat{X} = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \widetilde{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

il punto \widetilde{X} giacendo sulla stessa sfera unitaria $\Sigma X^2 = 1$, ed assegniamo come superiormente sull'intersezione dei piani tangenti i due punti:

$$(96) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}.$$

Conserveremo le notazioni Γ e C per le congruenze delle rette xx' e $\widehat{X}\widetilde{X}$.

Prima di discutere la figura formata di Γ e C , giova constatare che contemporaneamente viene fornita da tre quadrature

$$(97) \quad x^* = \int (\xi' d\vartheta + \xi d\vartheta')$$

una superficie (x^*) d'elemento lineare

$$(98) \quad \Sigma (dx^*)^2 = (\vartheta'^2 + 1)d\vartheta^2 + 2(\vartheta\vartheta' - c)d\vartheta d\vartheta' + (\vartheta^2 + 1)d\vartheta'^2,$$

la quale è dunque l'annunciata *deformata del paraboloide rigato generale*:

$$(99) \quad \begin{cases} x_0 = \sqrt{\frac{1-c}{2}} (\vartheta + \vartheta'), & y_0 = \sqrt{\frac{1+c}{2}} (\vartheta - \vartheta'), & z_0 = \vartheta\vartheta', \\ \frac{x_0^2}{1-c} - \frac{y_0^2}{1+c} = 2z_0. \end{cases}$$

Sembra superfluo riportar qui la verifica, priva di difficoltà, che riguarda le asintotiche. Avvertiamo però che, restando la deformazione *di prima specie*, il sistema coniugato permanente sarà pure dato da $\alpha \pm \beta = \text{cost}$; esso corri-

sponde alle sviluppabili delle congruenze Γ e C . Sussiste peraltro la proprietà che i raggi \widehat{X} e \widetilde{X} della sfera di centro O sono paralleli all'asse del paraboloide nel rotolamento sull'una e l'altra faccia della deformata.

Ci resta da esaminare il modo secondo cui si scompone nell'attuale generalizzazione il nostro ciclo di LAPLACE, legato esclusivamente al caso del paraboloide iperbolico equilatero. Vediamo anzitutto che si conserva la stratificabilità unilaterale della congruenza Γ con la C , come anche la formula (53) che definisce la schiera delle superficie $(x^{[c]})$. Ora, fissando due qualunque valori di x , è bene evidente che il quadrilatero sghembo $x^{[c]}\widehat{X}x^{[c]}\widetilde{X}$ verrà sempre a descrivere un sistema dotato della proprietà che i lati sono tangenti comuni alle superficie luogo dei vertici. Fra questi sistemi ne esistono due, in generale distinti e confondentisi per $c=0$ nel ciclo di LAPLACE, quelli cioè generati dai quadrilateri $x\widehat{X}x'\widetilde{X}$ e $x^{[c]}\widehat{X}x^{[c]}\widetilde{X}$, avendosi:

$$(100) \quad x^{[c]} = \frac{\xi + c\xi'}{\vartheta + c\vartheta'}, \quad x^{[1/c]} = \frac{c\xi + \xi'}{c\vartheta + \vartheta'}.$$

Si consideri difatti sopra le superficie (x) e (x') i doppi sistemi di curve (α, β) , oramai non coniugati. Le loro tangenti non omologhe, come facilmente desumesi dalle (95), (96), concorrono nei punti \widetilde{X} e \widehat{X} della sfera. In connessione del tutto analoga stanno i sistemi isogonali (α, β) segnati dai punti \widehat{X} e \widetilde{X} sulla sfera, essendo $x^{[1/c]}$ e $x^{[c]}$ i punti d'incontro delle tangenti, il che si dimostra subito per mezzo delle (92). È da notarsi intanto che ambedue i sistemi appartengono ad una classe importante ed abbastanza generale, presentandosi quando per una coppia di superficie coincidano i piani osculatori non omologhi alle curve (α, β) di riferimento. Tale classe, secondo un teorema stabilito nella mia Memoria citata nella nota (6), gode della notevole proprietà che le rette congiungenti i punti e formanti in tempo stesso le intersezioni dei piani osculatori percorrono una congruenza W con α, β parametri asintotici delle falde focali; ciò che vale adunque per le congruenze Γ e C in discorso. In quanto alla giacitura relativa dei due quadrilateri, aggiungiamo la osservazione che le quattro tangenti alla sfera uscenti rispettivamente da ciascuno dei punti \widehat{X} e \widetilde{X} si ordinano in due coppie mutualmente perpendicolari. Per convincersene, senza calcoli, basta riflettere che p. es. la $\widehat{X}x$ e la $\widetilde{X}x^{[1/c]}$, di direzione x_x e \widetilde{X}_x , sono tangenti alle curve sferiche corrispondenti alle sviluppabili della congruenza di raggio $\widehat{X}x$, per ciò coniugate, vale a dire ortogonali. Avvertiamo da ultimo che qui ancora le congruenze Γ e C sono R e che le sei quantità

$$\vartheta\xi' - \vartheta'\xi, \dots, \eta\xi' - \xi\eta', \dots$$

(circolando le lettere ξ, η, ζ) figurano come coordinate omogenee di retta per la congruenza Γ , le due terne scambiandosi fra di loro, con opportuna scelta di segno, nel passaggio alla C . La equazione di LAPLACE soddisfatta dalle coordinate di rette, conformemente al menzionato teorema di DARBOUX, risulta del tipo di MOUTARD:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \left(h + \frac{1}{h} \right) \Theta,$$

coincidendo così con quella associata alle asintotiche della deformata (x^*), per le quale la direzione della normale è data dal vettore $\eta\xi' - \xi\eta'$. Riguardo all'altra terna $\vartheta\xi' - \vartheta'\xi, \dots$ si constata che essa rappresenta la direzione normale alla superficie ausiliaria:

$$\tilde{x} = x^* - \vartheta\xi' - \vartheta'\xi,$$

riferita del pari alle esintotiche (α, β) e che viene generata dal punto d'intersezione del piano tangente alla deformata (x^*) coll'asse del paraboloido rotolante. Il legame geometrico esistente rispettivamente fra le superficie (x^*), (\tilde{x}) e le congruenze C e Γ è quella ben nota *reciprocità di superficie R e congruenza R* , caratterizzata dal parallelismo della normale all'una colla retta dell'altra, proprietà che sussiste, e cioè invertendosi, per le tangenti alla rete R , formanti congruenze R , e le falde focali della congruenza R , formanti superficie R , in modo da mantenersi indefinitamente nell'applicazione successiva della trasformazione di LAPLACE.

8. Determinazione delle coppie di sistemi sferici corrispondenti con coincidenza dei piani osculatori non omologhi. La ultima parte della nostra ricerca sarà dedicata ad un problema che è spontaneamente suggerito dai risultati or ora conseguiti: *Trovare i più generali doppi sistemi di curve, tracciati sopra una medesima sfera e per cui si confondano i piani osculatori non omologhi ed in conseguenza i rispettivi circoli osculatori.* Riusciremo a stabilire che il caso segnalato al numero 7 ne abbraccia la soluzione completa, la proposizione da dimostrare enunciandosi così: *I sistemi sferici richiesti sono tutti e soli quelli dedotti dalle deformate del paraboloido rigato, costruibili col rappresentare le asintotiche (α, β) sulla sfera per mezzo di raggi paralleli all'asse del paraboloido rotolante sull'una e l'altra faccia.*

Per la verifica, alquanto lunga, riesce utile studiare in primo luogo la rappresentazione della sfera sopra se stessa per la quale sull'intersezione dei piani tangenti vi abbia almeno un punto descrivente una superficie il cui piano tangente passi per la corda di contatto. Indichiamo coi vettori X e X' , funzioni di una medesima coppia di variabili, i due punti della sfera $\Sigma X^2 = 1$,

effettuando così un cambiamento di notazione in vista della maggiore generalità dell'attuale questione. il punto generico x sull'intersezione dei due piani tangenti può esprimersi mediante un parametro σ nel modo seguente:

$$(101) \quad x = \frac{1}{2 \cos^2 \theta} [X + X' - \sigma(YZ' - ZY')], \quad \cos 2\theta = \Sigma XX'.$$

Affinchè il piano xXX' , colla direzione normale data dal vettore:

$$\sigma(X + X') + YZ' - ZY',$$

diventi piano tangente ad una superficie (x) , occorre che si abbia:

$$\frac{d\sigma}{\sigma^2 + 1} = \frac{1}{\sin^2 2\theta} \Sigma (YZ' - ZY')(dX + dX').$$

Di qui, ammessa la integrabilità ed essendo σ^0 una soluzione particolare:

$$(102) \quad \sigma = \frac{\sigma^0 + C}{1 - C\sigma^0} \quad (C = \text{cost}).$$

Dunque: *Perchè nella rappresentazione della sfera sopra se stessa esista una superficie (x) colle rette xX e xX' tangenti comuni alla sfera ed alla (x) , è necessario e sufficiente che l'espressione*

$$(103) \quad \frac{1}{1 - (\Sigma XX')^2} \begin{vmatrix} dX + dX', & X, & X' \\ dY + dY', & Y, & Y' \\ dZ + dZ', & Z, & Z' \end{vmatrix}$$

risulti un differenziale esatto. Ma allora vi è una semplice infinità di tali superficie, sicchè la congruenza generata dall'intersezione dei piani tangenti sarà stratificabile unilateralmente con quella delle corde di contatto XX' ⁽¹³⁾. Due qualunque delle rispettive tangenti alla sfera uscenti dal punto X o dal punto X' fanno angolo costante, ciò che si verifica in base alla (102), essendo:

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \frac{\Sigma (x - X)(x^0 - X)}{\sqrt{\Sigma (x - X)^2} \sqrt{\Sigma (x^0 - X)^2}} = \frac{\sigma\sigma^0 + 1}{\sqrt{\sigma^2 + 1} \sqrt{(\sigma^0)^2 + 1}} = \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{C^2 + 1}}, \quad \pm 1 = \text{sgn}(1 - C\sigma^0). \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ La condizione equivale a quella avvertita nella Memoria citata nella nota ⁽²⁾ per caso della quadrica riferita ai parametri delle generatrici rettilinee, corrispondendo u, v e u', v' ai due punti, la quale consiste in ciò che

$$\frac{du}{u' - u} - \frac{dv}{v' - v}$$

deve essere differenziale esatto.

Ora, considerando che il piano xXX' è osculatore alla curva sferica toccata dalla retta Xx e che un primo sistema di tali curve sferiche potrà scegliersi ad arbitrio, riconosceremo che: *La rappresentazione richiesta dalla sfera sopra se stessa può operarsi mediante le rette intersezioni dei piani osculatori di un qualsiasi doppio sistema isogonale di curve sferiche.*

Dopo ciò, per risolvere il problema propostoci al principio del presente numero, designeremo con \widehat{X} , \widetilde{X} i punti della sfera descriventi due sistemi (α, β) , esigendo dunque che per questi si confondano i piani osculatori non omologhi. Segue da quanto fu previamente osservato che tali sistemi sono isogonali e che vale la stratificabilità della congruenza Γ colla C . Inoltre, col riportarci all'argomentazione utilizzata al numero 7, concludiamo che anche le superficie (x) e (X') , luoghi dei punti d'incontro delle tangenti alla sfera, uscenti dai punti \widehat{X} e \widetilde{X} ortogonalmente a quella dei sistemi (α, β) , appartengono alla schiera della stratificazione e che, di più, le curve di (x) e di (x') , toccate da queste tangenti, costituiscono ancora due sistemi (α, β) a piani osculatori comuni. Con ciò il nostro problema si riduce all'altro: *Costruire le coppie di superficie (x) e (x') , riferite alle curve (α, β) , per cui concorrono le tangenti non omologhe verso i due punti \widehat{X} e \widetilde{X} della sfera unitaria di centro O , pur essa toccata da queste tangenti.*

Facciamo come manifestamente è lecito:

$$(104) \quad x = \frac{\xi}{\vartheta}, \quad x' = \frac{\xi'}{\vartheta'}.$$

$$(105) \quad \Sigma \xi^2 = \vartheta^2 + 1, \quad \Sigma \xi'^2 = \vartheta'^2 + 1,$$

notando che, in virtù delle (105), i valori assolutori di ${}^1/\vartheta$ e di ${}^1/\vartheta'$ significano i segmenti tangenziali rispettivamente fra i punti x e x' e la sfera $\Sigma X^2 = 1$. Affinchè la retta $x\widehat{X}$ sia tangente alla sfera ed in tempo stesso tangente di direzione x_α alla (x) , deve aversi:

$$\Sigma \widehat{X}\xi = \vartheta, \quad \widehat{X} = \frac{\xi}{\vartheta} + \rho \left(\frac{\xi}{\vartheta} \right)_x,$$

indi per effetto della (105): $\rho = \vartheta/\vartheta_x$. Proseguendo questo ragionamento, giungeremo a stabilire le formule:

$$(106) \quad \widehat{X} = \frac{\xi_x}{\vartheta_x} = \frac{\xi'_\beta}{\vartheta'_\beta}, \quad \widetilde{X} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta} = \frac{\xi'_\alpha}{\vartheta'_\alpha},$$

completate dalle relazioni:

$$(107) \quad \Sigma (\xi_x)^2 = (\vartheta_x)^2, \quad \Sigma (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2.$$

In forza della (106) si avrà in $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$:

$$(108) \quad \xi_x = h\xi'_\beta, \quad \xi_\beta = \bar{h}\xi'_\alpha.$$

Derivate le (105) e tenuto conto delle (108), verrà:

$$(109) \quad \Sigma \xi' d\xi = \vartheta' d\vartheta, \quad \Sigma \xi d\xi' = \vartheta d\vartheta',$$

di qui integrando:

$$(110) \quad \Sigma \xi \xi' = \vartheta \vartheta' - c$$

con c costante. Avvertasi intanto che $|c| < 1$, poichè, indicando ω l'angolo formato dalle rette $\bar{X}x$ $\bar{X}x'$, risulta con semplice calcolo: $\cos \omega = \pm c$, $\pm 1 = -\operatorname{sgn}(\vartheta \vartheta')$; evidentemente è da escludersi l'ipotesi $|c| = 1$.

Dobbiamo ora esprimere le derivate seconde di ξ , η , ζ , ϑ per mezzo delle quaderne ξ , ξ' , ξ_x , ξ_β ecc., il determinante $\delta = (\xi, \xi', \xi_x, \xi_\beta)$ non potendo essere nullo. Per tale scopo torna agevole l'uso del sommatorio S esteso alle quattro lettere, l'ultimo termine prendendosi col segno mutato, onde invece delle (105) (110), (109), (107) scriveremo più brevemente.

$$(111) \quad S\xi^2 = 1, \quad S\xi'^2 = 1, \quad S\xi\xi' = -c, \quad S\xi'd\xi = 0, \quad S(\xi_x)^2 = 0, \quad S(\xi_\beta)^2 = 0.$$

Aggiungiamo le relazioni dedotte per derivazione:

$$(112) \quad S\xi_{xx}\xi = S\xi_{xx}\xi_x = S\xi_{x\beta}\xi' = S\xi_{\beta\beta}\xi = S\xi_{\beta\beta}\xi_\beta = 0.$$

Notando che con $\delta \neq 0$ si ha necessariamente $S\xi_x\xi_\beta \neq 0$, le formole volute, deducibili dalle (112), presentano l'aspetto seguente:

$$(113) \quad \xi_{xx} = \lambda'\xi_x + \lambda(\xi' + c\xi), \quad \xi_{x\beta} = \mu(\xi + c\xi'), \quad \xi_{\beta\beta} = \nu'\xi_\beta + \nu(\xi' + c\xi)$$

e concordano così col fatto che i piani $x\bar{X}x'$ e $x\bar{X}'x'$ riescono piani osculatori comuni alle curve (α, β) descritte dai punti x e x' . Occorre paragonare alle (113) la relazione tratta dall'uguagliare i due valori di $\xi_{x\beta}$ calcolati dalle (108), il che ci darà:

$$(114) \quad \lambda' = \frac{h_x}{h}, \quad \nu' = \frac{\bar{h}_\beta}{h}, \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{h}{h}.$$

Dopo di ciò, per condurre a termine l'attuale ricerca, basterebbe formare le condizioni di integrabilità pel sistema (113); dovremmo però, come ci si persuade col calcolo effettivo, supporre $c \neq 0$. Per evitare tale restrizione, giova prima invocare le relazioni:

$$S\xi_x\xi_\beta = -S\xi_{x\beta}\xi = -\mu(1 - c^2), \quad S\xi_x\xi' = 0, \quad S\xi_\beta\xi' = 0,$$

da cui, derivando la seconda e la terza rispettivamente rapporto a α ed a β , avremo:

$$S\xi_{xx}\xi' - \frac{1}{h} S\xi_x\xi_\beta = 0, \quad S\xi_{\beta\beta}\xi' - \frac{1}{h} S\xi_x\xi_\beta = 0,$$

indi:

$$(115) \quad \lambda = \frac{\mu}{h}, \quad \nu = \frac{\mu}{h}.$$

Delle equazioni fornite dalle condizioni di integrabilità conviene notare in primo luogo le due: $\lambda_\beta = 0$, $\nu_\alpha = 0$. Esse, coll'aver riguardo alle (113) rendono manifesto che si può disporre delle variabili α , β in modo da ridurre λ e ν all'unità positiva o negativa. Anzi di più, cangiando all'occorrenza i segni di ξ' e di c , sarà ammissibile di fare p. es. $\nu = 1$ e porre $\lambda = \varepsilon' = \pm 1$ ⁽¹⁴⁾. Segue allora dalla terza (114): $\bar{h} = \varepsilon' h$. Resta finalmente come sola condizione da soddisfare la equazione a derivate parziali imposta alla funzione h :

$$(116) \quad (\log h)_{x\beta} = h - \frac{\varepsilon'}{h}.$$

Vale adunque il sistema differenziale sotto la sua forma definitiva:

$$(117) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_\alpha = \frac{\varepsilon'}{h} \xi_\beta, \quad \xi'_\beta = \frac{1}{h} \xi_\alpha, \\ \xi_{\alpha\alpha} = \frac{h_\alpha}{h} \xi_\alpha + \varepsilon'(\xi' + c\xi), \quad \xi_{x\beta} = h(\xi + c\xi'), \quad \xi_{\beta\beta} = \frac{h_\beta}{h} \xi_\beta + \xi' + c\xi, \\ \left[\xi'_{\alpha\alpha} = -\frac{h_\alpha}{h} \xi'_\alpha + \varepsilon'(\xi + c\xi'), \quad \xi'_{x\beta} = \frac{\varepsilon'}{h} (\xi' + c\xi), \quad \xi'_{\beta\beta} = -\frac{h_\beta}{h} \xi'_\beta + \xi + c\xi' \right] \end{array} \right.$$

coll'aggiunta delle relazioni (111), compatibili, poichè, ammesso $\varepsilon' = +1$, abbiamo ritrovato appunto il sistema (91), (93), (94) del numero 7. Osserviamo d'altronde che la estensione al caso $\varepsilon' = +1$ risponde soltanto all'altra ipotesi, ivi trascurata, che le sviluppabili delle congruenze Γ e C risultino immaginarie coniugate, date allora da $\alpha \pm i\beta = \text{cost}$, vale a dire che l'associata deformazione del paraboloido rigato (99) sia *di seconda specie*. Così trovasi compiuta la prova della nostra asserzione.

⁽¹⁴⁾ Distinguendo per tale denotazione la $\varepsilon' = \pm 1$ dalla $\varepsilon = \pm 1$ che figura con altro significato nel sistema (26) del n° 2.

Determinazione e studio di superficie di S_5 le cui linee principali presentano una notevole particolarità.

Memoria di PIERO BUZANO (a Torino).

Sunto. - *Ridottasi la ricerca dei 5-tessuti di curve piane di rango massimo a quella di superficie di S_5 con 5 sistemi di linee (principali) ad iperpiano tangente fisso, la determinazione di tali superficie, già effettuata in parte dal BOL e dal TERRACINI, riceve un nuovo contributo dal presente lavoro con la scoperta di due soluzioni particolarmente notevoli. Per tali soluzioni vengono rilevate proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di linee principali e proprietà topologiche dei corrispondenti 5-tessuti.*

Introduzione.

La presente ricerca si ricollega a due recenti Note del TERRACINI ⁽¹⁾ « su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie ». Essendosi dimostrato ⁽²⁾ che la ricerca dei 5-tessuti di curve piane di rango massimo si riconduce a quella delle superficie di S_5 dotate di cinque sistemi ∞^1 di linee (*necessariamente principali*) tali che i piani tangenti nei punti di ciascuna di esse stanno in un S_4 e avendo il BOL ⁽³⁾ dato un *esempio* di tali superficie, fu posta dal BOMPIANI ⁽⁴⁾ la quistione di stabilire se la superficie del BOL fosse l'*unica* a godere della proprietà indicata. Inoltre il BOMPIANI ⁽⁴⁾ osservò che in ogni caso sulle superficie in quistione ciascun sistema di linee principali doveva esser segato dagli S_3 di una sviluppabile (compresi i casi degeneri dei sistemi *conici*).

Alla domanda posta dal BOMPIANI rispose negativamente il TERRACINI, nelle Note suddette, lasciando anzi adito alla convinzione che la classe delle superficie cercate dovesse essere *notevolmente vasta*. Poichè la determinazione globale delle soluzioni si presentava estremamente difficile, il TERRACINI

⁽¹⁾ Nota I e Nota II « Rend. Lincei », s. 6^a, 2^o sem. 1937.

⁽²⁾ W. BLASCHKE, *Ueber die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse* (T. 50), « Abh. Mathem. Sem. Hamburg », 9 (1933).

⁽³⁾ *Ueber ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene* (T. 64), « Abh. Mathem. Sem. Hamburg », 11 (1936).

⁽⁴⁾ *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese* (in collab. con E. Bortolotti), « Math. Zeitschr. », 42 (1937).

pensò di staccarne *a priori* una parte mediante qualche altra condizione geometrica e precisamente imponendo che *tre* dei sistemi ∞^1 di linee richiesti fossero sistemi *conici*, ossia segati sulla superficie ciascuno da $\infty^1 S_3$ passanti per un piano fisso, coi tre piani vertici dei coni *appartenenti ad un medesimo iperpiano S_4* . La particolarizzazione del TERRACINI appariva suggerita dalla duplice circostanza di esser verificata per l'esempio del BOL e di condurre a notevoli semplificazioni dal punto di vista analitico. Così delimitato il problema, il TERRACINI trovò oltre a quella del BOL *tre* nuove soluzioni con cinque sistemi *distinti* di linee principali: due delle soluzioni risultarono algebriche, anzi razionali.

Adottando lo stesso punto di vista del TERRACINI io mi sono proposto di determinare altre soluzioni modificando la condizione geometrica scelta per circoscrivere il problema. Mi sono quindi proposto la *determinazione delle superficie di S_5 che ammettono cinque sistemi ∞^1 di linee* (principali) *con iperpiano tangente fisso, tre dei quali conici, ossia segati da $\infty^1 S_3$ passanti per un piano fisso, coi tre piani vertici dei coni a due a due incidenti* (secondo punti) *ma non contenuti in uno stesso iperpiano S_4* .

La particolarizzazione da me scelta non può più essere giustificata con la conoscenza *a priori* di un esempio che assicuri l'esistenza di soluzioni, ma si presenta tuttavia in modo spontaneo dopo la ricerca del TERRACINI. Dal punto di vista analitico invece, le semplificazioni ottenute con la mia condizione non sono altrettanto notevoli cosicchè la determinazione delle soluzioni presenta ancora rilevanti difficoltà e laboriosi sviluppi come risulterà dal seguito. Nonostante tali difficoltà sono riuscito a dimostrare che vi sono *due* sole superficie *soluzioni* (proiettivamente distinte) trascurando naturalmente le superficie con sistemi di linee principali non tutti distinti. Le superficie trovate non sono algebriche e sembrano presentarsi per la prima volta in questa ricerca: i due altri sistemi di linee principali che si hanno su di esse, *oltre* ai tre già supposti conici, risultano segati da S_3 tangenti a coni di 2^a specie (passanti quindi per la retta-vertice). Le due soluzioni danno poi luogo, con le immagini piane delle loro linee principali, a dei 5-tessuti topologicamente distinti da quelli del BOL e del TERRACINI: di essi ho determinato le terne a configurazione esagonale e ho dato dei *modelli* che mi sembrano notevoli.

La ricerca si divide in *quattro parti*. Nella 1^a parte traduco analiticamente il problema e trasformo le condizioni ottenute giungendo a un certo *sistema di equazioni differenziali*. Nella 2^a parte *discuto e riduco* il sistema precedente valendomi delle *condizioni di integrabilità*. Nella 3^a parte completo la risoluzione del sistema *determinando tutte le soluzioni*. Nella 4^a parte svolgo

alcune *considerazioni geometriche* sulle soluzioni trovate e sui 5-tessuti a cui esse danno luogo: le proprietà più salienti sono esposte in un breve *riassunto* finale.

Tutta la ricerca si svolge *nel campo analitico*.

PARTE PRIMA

Traduzione del problema in un sistema di equazioni differenziali.

Riferendoci alle generalità indicate dal TERRACINI (op. cit., Nota I) per la determinazione delle superficie che possiedono cinque sistemi ∞^1 di linee con iperpiano tangente fisso, ricordiamo anzitutto che se sopra una di tali superficie, Σ , adottiamo le linee di due tali sistemi come linee u e v , essa apparirà integrale di un sistema alle derivate parziali del 3° ordine del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uuu} = \alpha x_{uu} + \beta x_{uv} + \dots & x_{uvv} = \lambda x_{uv} + \mu x_{vv} + \dots \\ x_{uuv} = \gamma x_{uu} + \delta x_{uv} + \dots & x_{vvv} = \omega x_{uv} + \rho x_{vv} + \dots \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, \dots, \omega, \rho$ sono funzioni di u e v e non abbiamo scritto esplicitamente i termini in x e nelle derivate prime. Si dimostra allora che, posto $\tau = \frac{dv}{du}$, gli ulteriori tre sistemi di linee principali si hanno integrando l'equazione differenziale:

$$(2) \quad A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 = 0$$

dove si è posto:

$$(3) \quad A = \beta; \quad B = 3\delta - 3\mu - \alpha; \quad C = 3\lambda - 3\gamma - \rho; \quad D = \omega.$$

Affinchè i tre nuovi sistemi di linee principali siano distinti dai due precedenti occorre che sia:

$$(4) \quad \beta \neq 0, \quad \omega \neq 0;$$

affinchè siano distinti fra loro occorre che sia diverso da zero il discriminante della (2) come equazione cubica in τ , che non staremo a scrivere.

Imponendo che le linee principali dei tre ulteriori sistemi definiti dalla (2) siano esse pure ad iperpiano tangente fisso il TERRACINI perviene a condizioni che noi trascriviamo nel seguente modo (formalmente poco diverso):

$$(5) \quad \left\| \begin{array}{cc} D_v + 3D(2\gamma - \lambda) & D \quad 0 \\ D_u + C_v + 3D(\mu + \alpha - 2\delta) + 2C(2\gamma - \lambda) & C \quad D \\ C_u + B_v - 3D\beta + 2C(\mu + \alpha - 2\delta) + B(2\gamma - \lambda) & B \quad C \\ B_u + A_v - 2C\beta + B(\mu + \alpha - 2\delta) & A \quad B \\ A_u - B\beta & 0 \quad A \end{array} \right\| = 0.$$

Ora imponiamo una parte delle nostre ulteriori condizioni e cioè che le linee u e v siano contenute in S_3 passanti per due piani fissi π_1 e π_2 , incidenti in un punto. Si può supporre che alcuni vertici della piramide fondamentale siano scelti in modo che sia $\pi_1 \equiv (A_2, A_4, A_6)$, $\pi_2 \equiv (A_3, A_5, A_6)$ e allora — sostituendo ai parametri u e v loro opportune funzioni — si può adottare per la superficie Σ la seguente rappresentazione parametrica:

$$(6) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 1 : u : v : U(u) : V(v) : \varphi(u, v)$$

dove *nessuna* delle tre funzioni U , V , φ deve essere *lineare*, affinché Σ non stia in uno S_4 . Si possono ora calcolare in base alla (6) i valori di α , β , ..., ω , ρ e si ottiene:

$$(7) \quad \alpha = \frac{U'''}{U''}, \quad \rho = \frac{V'''}{V''}; \quad (8) \quad \gamma = \mu = 0;$$

$$(9) \quad \delta = \frac{\varphi_{uuu}}{\varphi_{uv}}, \quad \lambda = \frac{\varphi_{uvv}}{\varphi_{uv}}; \quad (10) \quad \beta = \frac{\varphi_{uuu}}{\varphi_{uv}} - \alpha \frac{\varphi_{uu}}{\varphi_{uv}}, \quad \omega = \frac{\varphi_{vvv}}{\varphi_{uv}} - \rho \frac{\varphi_{vv}}{\varphi_{uv}};$$

le (7) dicono che α è funzione della sola u e ρ funzione della sola v ; le (9) dicono che $\delta_v = \lambda_u$. Se nella (5) sostituiamo i valori (3) tenendo presente la (8) e inoltre sommiamo alla 1^a colonna la 2^a moltiplicata per 3λ e la 3^a moltiplicata per $3\delta - \alpha$, otteniamo:

$$(11) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \omega_v & \omega & 0 \\ \omega_u + \omega(2\alpha - 3\delta) + 3\lambda_v + 3\lambda^2 - \lambda\rho - \rho_v & 3\lambda - \rho & \omega \\ -3\omega\beta + 6\lambda_u + 3\delta\lambda + \alpha\lambda + \rho\delta - \alpha\rho & 3\delta - \alpha & 3\lambda - \rho \\ \beta_v + \beta(2\rho - 3\lambda) + 3\delta_u + 3\delta^2 - \delta\alpha - \alpha_u & \beta & 3\delta - \alpha \\ \beta_u & 0 & \beta \end{array} \right\| = 0.$$

Completiamo ora le nostre ipotesi chiedendo che vi sia un 3^o sistema di linee principali segate da S_3 passanti per un piano fisso π_3 incidente a π_1 e π_2 ma non appartenente al loro S_4 . Non è restrittivo supporre $\pi_3 \equiv (A_1, A_4, A_5)$ e allora le linee principali suddette saranno le $\frac{v}{u} = \text{cost.}$ e la funzione $\varphi(u, v)$ dovrà soddisfare all'equazione:

$$(12) \quad u\varphi_u + v\varphi_v - \varphi = 0.$$

Derivando due volte la (12) e tenendo presenti le (10) e le (9) si ricava:

$$\beta = -\frac{v}{u} \left(\delta - \alpha - \frac{1}{u} \right), \quad \omega = -\frac{u}{v} \left(\lambda - \rho - \frac{1}{v} \right);$$

ora per semplificare β e ω conviene porre:

$$(13) \quad \varphi_{uv} = e^{\theta} uv U'' V'' \quad (\text{dove } \theta \text{ è una funzione di } u \text{ e } v),$$

ottenendosi così in virtù di (7) e (9):

$$(14) \quad \delta = \alpha + \frac{1}{u} + \theta_u, \quad \lambda = \rho + \frac{1}{v} + \theta_v;$$

(con che è verificata la condizione $\delta_v = \lambda_u$)

$$(15) \quad \beta = -\frac{v}{u} \theta_u, \quad \omega = -\frac{u}{v} \theta_v;$$

dove per la (4) sarà $\theta_u \neq 0$ e $\theta_v \neq 0$; inoltre in conseguenza di (12) si ha pure:

$$(16) \quad u\theta_u + v\theta_v + u\alpha + v\rho + 3 = 0.$$

Tenendo ora conto di (14) e (15) la (11) si trasforma nella seguente:

$$(17) \quad 0 = \begin{vmatrix} -\frac{u}{v} \theta_{vv} & -\frac{u}{v} \theta_v & 0 \\ -\frac{u}{v} \theta_{uv} + 3\frac{u}{v} \theta_u \theta_v + 3\theta_{vv} + \frac{u}{v} \alpha \theta_v + 5\rho \theta_v + \\ + \frac{10}{v} \theta_v + 3\theta_v^2 + 2\rho_v + 2\rho^2 + \frac{7}{v} \rho + \frac{3}{v^2} & 3\theta_v + \frac{3}{v} + 2\rho & -\frac{u}{v} \theta_v \\ 6\theta_{uv} + \frac{6}{v} \theta_u + 4\rho \theta_u + \frac{6}{u} \theta_v + 4\alpha \theta_v + \\ + \frac{6}{v} \alpha + \frac{6}{u} \rho + 4\alpha\rho + \frac{9}{uv} & 3\theta_u + \frac{3}{u} + 2\alpha & 3\theta_v + \frac{3}{v} + 2\rho \\ -\frac{v}{u} \theta_{uv} + 3\frac{v}{u} \theta_u \theta_v + 3\theta_{uu} + \frac{v}{u} \rho \theta_u + 5\alpha \theta_u + \\ + \frac{10}{u} \theta_u + 3\theta_u^2 + 2\alpha_u + 2\alpha^2 + \frac{7}{u} \alpha + \frac{3}{u^2} & -\frac{v}{u} \theta_u & 3\theta_u + \frac{3}{u} + 2\alpha \\ -\frac{v}{u} \theta_{uu} & 0 & -\frac{v}{u} \theta_u \end{vmatrix}.$$

La determinazione delle soluzioni si compirà ora nel seguente modo:

1°) determinazione di α , ρ , θ da (16) e (17);

2°) determinazione di U , V da (7);

3°) determinazione di φ da (13) (in modo che sia anche verificata la (12)⁽⁵⁾).

Invece delle incognite α e ρ conviene introdurre $S(u)$ e $T(v)$ legate ad esse dalle:

$$(18) \quad S = 3 + 2\alpha u, \quad T = 3 + 2\rho v;$$

(5) La (16) è solo una conseguenza della (12) e quindi non è detto che tutte le φ date da (13) ove θ soddisfi a (16) soddisfino senz'altro a (12).

inoltre conviene fare un cambiamento di variabili ponendo :

$$(19) \quad u = e^v, \quad v = e^z.$$

Allora la (16) diventa :

$$(20) \quad \boxed{\theta_w + \theta_z + \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}T = 0},$$

e la (17), ove si annullino i tre minori contenenti 1^a e 5^a riga, dà luogo dopo opportune trasformazioni (tenuto conto della (20) e delle sue derivate) alle seguenti tre equazioni :

$$(21) \quad \boxed{\frac{1}{2}(S+T)\frac{\theta_{vw}}{\theta_w} + T\frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = T_z + \frac{1}{2}S_w + \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}ST - S\theta_z - T\theta_w}$$

$$(22) \quad \boxed{S\frac{\theta_{vw}}{\theta_w} + \frac{1}{2}(S+T)\frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = S_w + \frac{1}{2}T_z + \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}ST - S\theta_z - T\theta_w}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2}(3S+T)\frac{\theta_{vw}}{\theta_w} + \frac{1}{2}(S+3T)\frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = \\ & = \frac{3}{2}T_z + \frac{3}{2}S_w + \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}T - ST - 2S\theta_z - 2T\theta_w \end{aligned}$$

la (23) è somma di (21) e (22) e si può quindi abbandonare ⁽⁶⁾. Siamo così ridotti allo studio del sistema costituito dalle equazioni (20), (21), (22) dove θ è funzione di v e z , S funzione della sola w e T funzione della sola z .

PARTE SECONDA

Discussione e riduzione del sistema di equazioni differenziali.

Le equazioni (21) e (22) sono lineari nelle derivate logaritmiche $\frac{\theta_{vw}}{\theta_w}$ e $\frac{\theta_{zz}}{\theta_z}$: da esse si possono dunque ricavare tali derivate se il determinante dei coefficienti che vale $\frac{1}{4}(S-T)^2$ è diverso da zero. Esaminiamo subito il caso eccezionale in cui esso si annulla. In tal caso, essendo S funzione della sola w e T funzione della sola z , si deve avere :

$$S = T = \text{cost.} \quad (\text{e le (21) e (22) coincidono}).$$

⁽⁶⁾ Una riduzione del numero delle condizioni era presumibile *a priori*, dato che per uno dei sistemi definiti dalla (2) era già assicurata la validità della proprietà in esame.

Dico che in tal caso $\frac{v}{u}$ è radice *almeno doppia* della (2) ⁽⁷⁾ e quindi il caso è *da escludere* poichè corrisponde a superficie in cui almeno due sistemi di linee principali coincidono fra loro. Infatti, tenuto conto di (3), (8), (14), (15), $\frac{v}{u}$ è radice almeno doppia della (2) quando $3u\theta_u + 3v\theta_v + 2u\alpha + 4v\rho + 9 = 0$; ma da questa e dalla (16) si ricava $u\alpha - v\rho = 0$ che per le (18) equivale proprio a $S = T = \text{cost.}$.

Escluso pertanto il caso del determinante nullo, risolviamo il sistema (21), (22) rispetto a $\frac{\theta_{wv}}{\theta_w}$ e $\frac{\theta_{zz}}{\theta_z}$ e avremo:

$$(24) \quad \frac{\theta_{wv}}{\theta_w} = \frac{2T_z S + S_w(S - 3T)}{(T - S)^2} + \frac{T(1 + S)}{T - S} + 2 \frac{S\theta_z + T\theta_w}{T - S}$$

$$(25) \quad \frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = \frac{2S_w T + T_z(T - 3S)}{(T - S)^2} - \frac{S(1 + T)}{T - S} - 2 \frac{S\theta_z + T\theta_w}{T - S}.$$

Dalla (20), eliminando θ_{wz} fra le sue derivate rispetto a w e a z , si ricava:

$$(26) \quad \theta_{wv} - \theta_{zz} = \frac{1}{2}(T_z - S_w);$$

sostituendo in questa per θ_{wv} e θ_{zz} i valori tratti rispettivamente da (24) e (25) e tenendo ancora presente il valore di $\theta_w + \theta_z$ dato dalla (20) si ottiene:

$$(27) \quad \left\{ \frac{2T_z S + S_w(S - 3T)}{(T - S)^2} + \frac{T(1 - T)}{T - S} \right\} \theta_w - \left\{ \frac{2S_w T + T_z(T - 3S)}{(T - S)^2} - \frac{S(1 - S)}{T - S} \right\} \theta_z = \frac{1}{2}(T_z - S_w).$$

La (20) e la (27) sono *lineari* in θ_w e θ_z : da esse si possono ricavare θ_w e θ_z se il determinante dei coefficienti è diverso da zero. Tale determinante vale:

$$(28) \quad \Delta = \frac{T_z - S_w + (1 - S - T)(T - S)}{T - S}.$$

Supponiamo ora $\Delta \neq 0$: il caso $\Delta = 0$ verrà esaminato in seguito. Allora da (20) e (27) si ha:

$$(29) \quad \theta_w = \frac{1}{2} \frac{S(1 - S)(T^2 - S^2) - (3T^2 + S^2)S_w + 4S^2 T_z}{(T_z - S_w)(T - S) + (T - S)^2(1 - S - T)}$$

$$(30) \quad \theta_z = \frac{1}{2} \frac{1 - T(1 - T)(T^2 - S^2) + 4T^2 S_w - (3S^2 + T^2)T_z}{(T_z - S_w)(T - S) + (T - S)^2(1 - S - T)}.$$

⁽⁷⁾ Semplice lo è già in ogni caso in virtù della condizione (16) che si suppone verificata.

Conviene ora introdurre due funzioni $s(S)$ e $t(T)$ tali che sia :

$$(31) \quad S_w = S(S-1) + s, \quad T_z = T(T-1) + t,$$

cosicchè le (9) e (30) assumono la seguente forma :

$$(32) \quad \theta_w = \frac{1}{2} \frac{(T-S)[4ST - 3(T+S)s] + 4S^2(t-s)}{(T-S)(t-s)}$$

$$(33) \quad \theta_z = -\frac{1}{2} \frac{(T-S)[4ST - 3(T+S)t] + 4T^2(t-s)}{(T-S)(t-s)}.$$

I valori (32) e (33) si possono ora sostituire nei secondi membri di (24) e (25) che, tenuto conto anche delle (31), diventano :

$$(34) \quad \frac{\theta_{ww}}{\theta_w} = \\ = \frac{(1-S)(T^2-S^2)(t-s) + 2S(t-s)^2 - 3s(T-S)(t-s) + 4ST(T-S)^2 - 3(T^2-S^2)(sT-tS)}{(T-S)^2(t-s)}$$

$$(35) \quad \frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = \\ = -\frac{(1-T)(T^2-S^2)(t-s) + 2T(t-s)^2 - 3t(T-S)(t-s) + 4ST(T-S)^2 - 3(T^2-S^2)(sT-tS)}{(T-S)^2(t-s)}.$$

Noi dobbiamo ora studiare il sistema costituito da (31), (32), (33), (34), (35) ⁽⁸⁾. Osserviamo ancora che dobbiamo supporre :

$$T - S \neq 0 \quad \text{e} \quad t - s \neq 0$$

in quanto si è già visto che non può essere $T - S = 0$, mentre la seconda disuguaglianza corrisponde all'ipotesi $\Delta \neq 0$.

Ora facciamo intervenire le *condizioni di integrabilità* del sistema. Per brevità scriviamo le equazioni (32), (33), (34), (35) nel seguente modo :

$$\text{I)} \quad \theta_w = L; \quad \text{III)} \quad \frac{\theta_{ww}}{\theta_w} = H;$$

$$\text{II)} \quad \theta_z = M; \quad \text{IV)} \quad \frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = K;$$

da I) e II) si ha la condizione :

$$\text{V)} \quad L_z - M_w = 0;$$

da I) e III) si ha :

$$\text{VI)} \quad L_w - LH = 0;$$

⁽⁸⁾ Il fatto che le equazioni del sistema siano aumentate di numero non dà qui alcuna noia: quel che importa è che esse si presentano sotto un aspetto più agevole per la discussione.

da II) e IV) si ha :

$$\text{VII)} \quad M_x - MK = 0;$$

ma noi sappiamo che sommando I) e II) si ha *identicamente* :

$$L + M = -\frac{1}{2}(S + T)$$

da cui :

$$L_w + M_w = -\frac{1}{2}S_w, \quad L_x + M_x = -\frac{1}{2}T_x$$

cosicchè VI) e VII) assumono il seguente aspetto :

$$\text{VIII)} \quad M_w + \frac{1}{2}S_w + LH = 0; \quad \text{IX)} \quad L_x + \frac{1}{2}T_x + MK = 0;$$

sottraendo queste membro a membro si ha :

$$\text{X)} \quad L_x - M_w = LH - MK - \frac{1}{2}(T_x - S_w),$$

ma il secondo membro della X) è *identicamente nullo* in virtù della (26) che è già verificata ⁽⁹⁾. Quindi la X) si riduce alla V) che è pertanto *conseguenza* di VIII) e IX): si conclude che delle tre condizioni V), VIII), IX) una può essere abbandonata. Perciò noi scriveremo ora per disteso le condizioni V) e IX), tralasciando la VIII) (che d'altro lato si deduce dalla IX) con ovvi scambi di lettere). *Indicheremo con s' e t' le derivate di s(S) e t(T) rispetto a S e T assunte come nuove variabili*. Otteniamo per le due condizioni suddette :

$$(36) \quad (T^2 - T + t) \{ (T - S)^2(t - s)(4S - 3s) - 4S^2(t - s)^2 - t'(T - S)[4ST - 3(T + S)s] \} + \\ + (S^2 - S + s) \{ (T - S)^2(t - s)(4T - 3t) + 4T^2(t - s)^2 + s'(T - S)[4ST - 3(T + S)t] \} = 0;$$

$$(37) \quad t'(T^2 - T + t)[4ST - 3(T + S)s](T - S)^2 = \\ = (T - S)(T^2 - T + t) \{ (T - S)^2(t - s)(4S - 3s) - 4S^2(t - s)^2 + (T - S)^2(t - s)^2 \} + \\ + \{ (T - S)[4ST - 3(T + S)t] + 4T^2(t - s) \} \{ (1 - T)(T^2 - S^2)(t - s) + \\ + 2T(t - s)^2 - 3t(T - S)(t - s) + 4ST(T - S)^2 - 3(T^2 - S^2)(sT - tS) \}.$$

Ora emerge tutta l'opportunità di aver eseguito le posizioni (31) perchè in tal modo siamo giunti a due condizioni in cui di *w* e *z* non c'è più traccia e che *devono servirci a determinare le funzioni s(S), t(T)*.

Lo studio delle condizioni (36) e (37) appare ancora notevolmente complesso, quindi noi cercheremo di valerci *non* delle (36) e (37) *direttamente*, ma piuttosto di *loro conseguenze* meglio utilizzabili.

(9) Lo si può controllare anche materialmente con un calcolo piuttosto lungo.

Premesso che le (36) e (37) devono essere delle identità in S e T e che queste vi compaiono come *variabili indipendenti*, è lecito trarne delle conseguenze per $T=S$ ⁽¹⁰⁾. La (36) e la (37) per $T=S$ danno subito:

$$(38) \quad s(S) = t(S)$$

ossia s e t sono una stessa funzione, di cui però nelle (36) e (37) compaiono i valori s e t calcolati in corrispondenza a differenti valori S e T della variabile.

Ora dividiamo la (37) per $(T-S)^3$ e poi facciamo nuovamente $T=S$: il 1° membro è senz'altro divisibile per $(T-S)^3$, il 2° invece diviso per $(T-S)^3$, ove si tenga conto della (38), si presenta per $T=S$ sotto forma indeterminata; tuttavia si può effettuare il passaggio al limite per $T=S$ con gli ordinari metodi del calcolo differenziale, di fronte ai quali l'indeterminazione scompare. Si perviene in tal modo ad una condizione, conseguenza di (37) e di (38), che si spezza nelle seguenti:

$$(39) \quad 2Ss' - 3s + 2S = 0$$

$$(40) \quad 2Ss'^2 + (3S^2 + 3S - 4s)s' - 6Ss + 4S^2 = 0.$$

Dunque le funzioni $s(S)$ che ci interessano sono da cercarsi fra quelle che soddisfano la (39) oppure la (40), restando poi da verificare che soddisfino la (36) e la (37) di cui si è tenuto conto solo in parte.

Esaminiamo prima le soluzioni della (39): questa è un'equazione differenziale lineare del 1° ordine in s che integrata dà:

$$(41) \quad s = 2S + cS^{3/2}$$

dove c è una costante arbitraria. Per la (38) si ha poi:

$$(42) \quad t = 2T + cT^{3/2}.$$

Ora, come si è detto, bisogna sostituire i valori dati da (41) e (42) nelle (36) e (37) e vedere se si ottengono delle *identità in S e T* . Sostituendo in (36), con un calcolo che non staremo a riprodurre, si perviene a stabilire che per avere un'identità occorre e basta che sia $c=0$. Allora le (41) e (42) si riducono a:

$$(43) \quad s = 2S, \quad t = 2T.$$

Si vede poi che per tali valori di s e t anche la (37) risulta identicamente

⁽¹⁰⁾ Non sarebbe invece a priori lecito il dedurre delle conseguenze da (36) e (37) per particolari valori delle variabili, ad es. per $S=0$, non potendosi escludere che la funzione $s(S)$ abbia proprio per $S=0$ una singolarità.

soddisfatta, mentre il sistema delle equazioni (31), (32), (33) si *riduce* a :

$$(44) \quad \boxed{S_w = S(S + 1), \quad T_z = T(T + 1)} ;$$

$$(45) \quad \boxed{\theta_w = -\frac{1}{2} S, \quad \theta_z = -\frac{1}{2} T} ;$$

e le (34) e (35) risultano di conseguenza verificate. Abbiamo così operato la preannunciata riduzione del sistema delle nostre equazioni differenziali: quello ora ottenuto non presenta più sostanziali difficoltà e ad esso torneremo nella parte terza.

Esaminiamo ora l'equazione (40). Si tratta di vedere se fra le sue soluzioni ce n'è qualcuna che soddisfi *anche* alle condizioni (36) e (37). Ora vedremo che ciò *non* può essere, dimostrando che *dalla* (36) si può trarre una conseguenza che è incompatibile con (40). A tale scopo dividiamo la (36) per $(T - S)^2$ e poi facciamo $T = S$: i quozienti che si ottengono, tenuto conto di (38), si presentano per $T = S$ sotto forma indeterminata, tuttavia anche qui si può facilmente effettuare il passaggio al limite con gli ordinari mezzi del calcolo differenziale e si perviene così alla condizione :

$$(46) \quad S(2S - 3s)(S' - S + s)s'' + 2S's'^3 + S(3S^2 + S - 4s)s'^2 - (-2S^2 + 3S^2s + 4Ss - 3s^2)s' = 0.$$

Dico che la (40) è *incompatibile* con la (46) ⁽¹¹⁾. Derivando la (40) ed eliminando opportunamente s'' , s'^3 , s'^2 fra l'equazione ottenuta, la (46) e la (40) ⁽¹²⁾, si perviene con calcoli alquanto lunghi alla seguente equazione, conseguenza (algebraica e differenziale) di (46) e (40) :

$$(47) \quad s' = \frac{2S^2(S + 1)(2S - 3s)}{-3s^2 - 2S^2s + 6Ss - 3S^4 - 2S^3 - 3S^2} ;$$

basterà dunque dimostrare l'incompatibilità di (40) e (47). Ora eliminando s' fra (47) e (40) si ottiene la seguente equazione algebraica fra s e S :

$$(48) \quad 9s^4 + 48s^3 + S^2(21S^2 - 46S + 21)s^2 + 2S^3(3S^3 - 13S^2 + 13S - 3)s - 4S^5(S - 1)^2 = 0.$$

⁽¹¹⁾ Dopo quanto si è detto circa l'equazione (39) è ovvio osservare che questa, a differenza della (40) è invece perfettamente compatibile con la (46).

⁽¹²⁾ Le varie eliminazioni eseguite comportano l'eventualità di casi eccezionali in cui si annullano coefficienti di quantità da eliminare: si vede però che anche tali casi non conducono ad alcuna soluzione.

Basta quindi provare l'incompatibilità di (47) e (48). Ora la (48) definisce s come funzione implicita di S e da essa si trae:

$$(49) \quad s' = -S \frac{(42S^2 - 69S + 21)s^2 + S(18S^3 - 65S^2 + 52S - 9)s - 2S^3(S-1)(7S-5)}{18s^3 + 72s^2 + S^2(21S^2 - 46S + 21)s + S^3(3S^3 - 13S^2 + 13S - 3)};$$

eliminando s' fra (47) e (49) si ottiene una seconda equazione algebrica che qui indichiamo brevemente con:

$$(50) \quad F(s, S) = 0.$$

Si tratta ora di far vedere che (48) e (50) sono incompatibili: interpretando s e S come coordinate cartesiane in un piano, tali equazioni rappresentano *due curve algebriche* rispettivamente del 7° e del 9° ordine di cui bisogna provare che *non hanno componenti comuni* (nè la 1^a è componente della 2^a). Questa dimostrazione, dopo di aver chiarito il comportamento delle due curve all'infinito e nell'origine, si può fare esaminando le loro intersezioni con la retta $2S - 3s = 0$ che si presta opportunamente allo scopo. Trattandosi però di ragionamenti geometrici che per la loro delicatezza non sono suscettibili di un'esposizione abbreviata, ci dispensiamo dal riprodurli.

Resta pertanto dimostrato che la (40) non conduce ad alcuna soluzione, cosicchè, sempre supposto diverso da zero il determinante Δ dato dalla (28), il sistema da noi considerato si riduce *unicamente* alle equazioni (44) e (45).

Prima di passare allo studio dei casi in cui $\Delta = 0$ vogliamo far vedere come dalle equazioni (45) si possa già dedurre una notevole *proprietà geometrica* delle soluzioni. Scriviamo l'equazione (2) dei tre sistemi di linee principali che si hanno oltre a quelli delle linee u e v ; tenuto conto di (8), (14) e (15) essa diventa:

$$(51) \quad -\frac{u}{v} \theta_v \tau^3 + \left(3\theta_v + 2\rho + \frac{3}{v}\right) \tau^2 + \left(3\theta_u + 2\alpha + \frac{3}{u}\right) \tau - \frac{v}{u} \theta_u = 0;$$

questa, in virtù della (16), è verificata come già sappiamo per $\tau = \frac{v}{u}$: dividendola allora per $\tau - \frac{v}{u}$ si ottiene la seguente equazione di 2° grado in τ , che ci dà il 4° e 5° sistema di linee principali che ancora dobbiamo determinare (i primi tre essendo già noti):

$$(52) \quad -\frac{u}{v} \theta_v \tau^2 + \left(2\theta_v + 2\rho + \frac{3}{v}\right) \tau + 3\theta_u + 2\frac{v}{u} \theta_v + 2\alpha + 2\rho \frac{v}{u} + \frac{6}{u} = 0.$$

Ora *condizione necessaria e sufficiente* perchè le linee principali dei due sistemi determinati da (52), uscenti da un generico punto della superficie,

separino armonicamente quelle dei sistemi conici $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$, uscenti dallo stesso punto, è che in (52) si annulli il coefficiente di τ ossia :

$$2\theta_v + 2\rho + \frac{3}{v} = 0,$$

che per le (18) e (19) equivale a : $\theta_z = -\frac{1}{2}T$; ma allora da questa e da (20) si ha pure $\theta_w = -\frac{1}{2}S$. Dunque le equazioni (45) esprimono che nelle corrispondenti superficie soluzioni le linee principali del 4° e 5° sistema, uscenti da ciascun punto, separano armonicamente quelle del 1° e 2° sistema ($u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$).

Da tale proprietà si può dedurre un'altra conseguenza. Poichè nelle nostre ipotesi i tre sistemi di linee principali :

$$\text{I) } u = \text{cost.} \quad \text{II) } v = \text{cost.} \quad \text{III) } \frac{v}{u} = \text{cost.}$$

intervengono *in modo simmetrico*, ne segue che esistendo delle soluzioni per cui il 4° e 5° sistema separano armonicamente il 1° e il 2°, dovranno esistene altre per cui 4° e 5° sistema separano armonicamente 1° e 3° oppure 2° e 3°; e poichè le une sono date dal sistema (44), (45) a cui si perviene per $\Delta \neq 0$, le altre dovranno ottenersi quando $\Delta = 0$.

Occupiamoci dunque del caso in cui $\Delta = 0$.

In tal caso si possono avere soluzioni solo in quanto la (27) coincida con la (20), ossia *oltre* alla condizione :

$$(53) \quad T_z - S_w + (1 - S - T)(T - S) = 0$$

ottenuta annullando Δ , sussista pure la condizione :

$$(54) \quad 4S^2T_z - (3T^2 + S^2)S_w + S(1 - S)(T^2 - S^2) = 0$$

ottenuta annullando un altro minore della matrice dei coefficienti e termini noti delle due equazioni lineari in θ_w e θ_z [(20) e (27)]. Si tratta quindi di esaminare i casi in cui valgono le (53) e (54). Da (53) si ha :

$$(55) \quad S_w = S(S - 1) + c; \quad T_z = T(T - 1) + c;$$

dove c è una costante. Sostituendo i valori di S_w e T_z dati da (55) in (54) si ha (tenuto presente che $T - S \neq 0$) :

$$(56) \quad 4ST - 3c(T + S) = 0,$$

e derivando questa si ottiene :

$$(57) \quad (4T - 3c)S_w = 0; \quad (4S - 3c)T_z = 0;$$

da cui si deduce che o S e T sono entrambi costanti, oppure solo una delle due è costante, ma in tal caso ha il valore $\frac{3}{4}c$.

Se S e T sono entrambi costanti, nelle (55) sono nulli i primi membri e perciò S e T sono radici dell'equazione di 2° grado: $x^2 - x + c = 0$; si deduce che $S + T = 1$, $ST = c$ e quindi sostituendo in (56) si ha $c = 0$. Dunque $S + T = 1$, $ST = 0$ e quindi:

$$(58) \quad \begin{cases} S = 1 \\ T = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} T = 1 \\ S = 0 \end{cases}.$$

Se invece solo una delle due quantità S , T è costante, supponiamo che sia per es. T e avremo $T = \frac{3}{4}c$. Sostituendo in (56) ottengo $c = 0$ e quindi anche $T = 0$, per cui in definitiva si ha:

$$(59) \quad \begin{cases} S_v = S(S - 1) \\ T = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} T_z = T(T - 1) \\ S = 0 \end{cases} \quad \text{scambiando } S \text{ con } T.$$

Ciascun sistema (59) comprende un sistema (58) come caso particolare. Basta quindi studiare i sistemi (59): faremo vedere che essi caratterizzano i casi in cui le linee principali del 4° e 5° sistema separano armonicamente quelle del 1° e 3° ($u = \text{cost.}$, $\frac{v}{u} = \text{cost.}$) oppure quelle del 2° e 3° ($v = \text{cost.}$, $\frac{v}{u} = \text{cost.}$). A tale scopo osserviamo che le linee principali del 4° e 5° sistema corrispondono ai valori τ_1 e τ_2 di τ , radici dell'equazione (52): affinché esse separino armonicamente quelle del 1° e 3° sistema, corrispondenti a $\tau = \infty$ e $\tau = \frac{v}{u}$, occorre e basta che sia $\tau_1 + \tau_2 = \frac{2v}{u}$ e allora la (52) dà senz'altro: $2\rho + \frac{3}{v} = 0$, ossia per le (18) $T = 0$. Allora le equazioni (24), (25), (26) si riducono a:

$$\frac{\theta_{vv}}{\theta_v} = \frac{S_v}{S} - 2\theta_z; \quad \frac{\theta_{zz}}{\theta_z} = 1 + 2\theta_z; \quad \theta_{vv} - \theta_{zz} = -\frac{1}{2}S_v;$$

eliminando fra queste θ_{vv} e θ_{zz} si ricava:

$$\frac{S_v}{S}\theta_v - 2\theta_z\theta_v - \theta_z - 2\theta_z^2 = -\frac{1}{2}S_v;$$

ma dalla (20) per $T = 0$ si ha: $\theta_v = -\theta_z - \frac{1}{2}S$ e sostituendo questo valore di θ_v nell'equazione precedente e dividendo per $\theta_z \neq 0$ si ottiene: $S_v = S(S - 1)$. Si è così ottenuto il 1° dei due sistemi (59). Analogamente si dimostra che

l'altro corrisponde al caso in cui le linee del 4° e 5° sistema separano armonicamente quelle del 2° e 3°.

In seguito a questa constatazione possiamo concludere che *le soluzioni a cui conducono i sistemi (59) devono ottenersi da quelle a cui si perviene coi sistemi (44) e (45) mediante un cambiamento di coordinate curvilinee che, lasciando fisso uno dei due sistemi $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, scambi il rimanente con $\frac{v}{u} = \text{cost.}$* . Si tratta dunque di soluzioni che sono diverse solo dal punto di vista analitico: *dal punto di vista geometrico tutte le soluzioni sono già ottenibili dai sistemi (44) e (45) ed è perciò inutile proseguire lo studio dei sistemi (59).*

PARTE TERZA

Determinazione delle superficie-soluzioni.

La determinazione delle superficie-soluzioni, per quanto si è visto nella parte seconda, si può fare esclusivamente per mezzo delle equazioni (44) e (45).

Avendo già osservato che in conseguenza di (4) è $\theta_w \neq 0$ e $\theta_x \neq 0$, dalle (44) segue $S \neq 0$ e $T \neq 0$; supponiamo inoltre per ora:

$$(60) \quad S + 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad T + 1 \neq 0$$

e integrando le (44) avremo:

$$S = \frac{he^v}{1 - he^v}, \quad T = \frac{ke^x}{1 - ke^x},$$

dove h e k sono costanti arbitrarie *non nulle*. Possiamo dunque porre $\frac{1}{h} = p$, $\frac{1}{k} = q$, e, ripristinando le variabili u , v mediante le (19) otterremo:

$$(61) \quad S = \frac{u}{p - u}, \quad T = \frac{v}{q - v}.$$

Ora osserviamo che l'ipotesi (60) si può abbandonare poichè anche i casi in cui essa non è verificata [casi possibili per le (44)] rientrano nelle (61) per $p=0$ oppure $q=0$: osserviamo però che *una sola* delle due costanti p , q può annullarsi poichè altrimenti si avrebbe $S = T = -1$ mentre si è escluso (al principio della parte seconda) che S e T possano essere una stessa costante (volendosi avere superficie con cinque sistemi distinti di linee principali).

Partiamo dunque dalle (61), compresi i casi in cui una delle due costanti p , q

è nulla. Dalle (61), tenute presenti le (18) e (7) si ha :

$$(62) \quad \boxed{U'' = p_0(u - p)^{-1/2}u^{-3/2}; \quad V'' = q_0(v - q)^{-1/2}v^{-3/2}},$$

dove p_0 e q_0 sono costanti arbitrarie *non nulle*, essendosi già escluso (parte prima) che U e V siano funzioni *lineari*.

Dalle equazioni (45), ripristinando le variabili u e v e tenendo conto di (61), si ha :

$$(63) \quad \theta_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u - p}; \quad \theta_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v - q};$$

da cui si ricava :

$$\theta = \frac{1}{2} \lg(u - p)(v - q) + \text{cost.};$$

e quindi, tenuto anche conto delle (62), dalla (13) si ricava :

$$\varphi_{uv} = cu^{-1/2}v^{-1/2},$$

da cui :

$$(64) \quad \varphi = c_0 u^{1/2} v^{1/2} + f(u) + g(v),$$

dove c_0 è una costante arbitraria e $f(u)$ e $g(v)$ sono funzioni per ora non determinate. Però bisogna tener conto del fatto che la $\varphi(u, v)$ deve soddisfare la (12) (di cui finora si sono utilizzate solo conseguenze differenziali). Scrivendo tale condizione, le funzioni $f(u)$, $g(v)$ della (64) si particolarizzano e si ottiene :

$$(65) \quad \boxed{\varphi = c_0 u^{1/2} v^{1/2} + c_1 u + c_2 v},$$

dove c_0 , c_1 , c_2 sono costanti arbitrarie di cui la 1^a *non è nulla*, essendosi già escluso (parte prima) che φ sia una funzione *lineare*.

Per determinare le superficie-soluzioni non resta che integrare le (62). Su queste superficie le linee principali del 4° e 5° sistema sono date dall'equazione (52) che ora per le (61) e (63) diventa (tenute presenti le (18)) :

$$u(u - p)\tau^2 - v(v - q) = 0$$

ossia ⁽¹³⁾ :

$$\tau = \pm \sqrt{\frac{v(v - q)}{u(u - p)}}.$$

⁽¹³⁾ Appare qui di nuovo in modo evidente che le linee principali del 4° e 5° sistema separano armonicamente quelle del 1° e 2° ($\tau = \infty$, $\tau = 0$).

Le linee principali del 4° e 5° sistema si ottengono quindi integrando le equazioni :

$$(66) \quad \left[\frac{du}{\sqrt{u(u-p)}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{v(v-q)}} \right].$$

Si presenta ora la necessità di distinguere due casi :

$$\text{CASO A): } p \neq 0, \quad q \neq 0;$$

$$\text{CASO B): } p = 0, \quad q \neq 0;$$

il caso $p \neq 0, q = 0$ non è geometricamente distinto dal caso B), potendosi ridurre a quello mediante *uno scambio delle coordinate curvilinee u e v* ⁽¹⁴⁾.

CASO A) ($p \neq 0, q \neq 0$). — L'integrazione di (66) conduce alle seguenti equazioni :

$$\lg \left[u - \sqrt{u(u-p)} - \frac{p}{2} \right] \pm \lg \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] = \text{cost.}$$

ossia :

$$(67) \quad (4^\circ \text{ sistema}) \quad \left[u - \sqrt{u(u-p)} - \frac{p}{2} \right] \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] = \text{cost.},$$

$$(68) \quad (5^\circ \text{ sistema}) \quad \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] / \left[u - \sqrt{u(u-p)} - \frac{p}{2} \right] = \text{cost.}.$$

L'integrazione delle (62) conduce al seguente risultato :

$$(69) \quad \begin{cases} U = p_0 \frac{2}{p} \sqrt{u(u-p)} + p_0 \lg \left[u - \sqrt{u(u-p)} - \frac{p}{2} \right] + p_1 u + p_2 \\ V = q_0 \frac{2}{q} \sqrt{v(v-q)} + q_0 \lg \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] + q_1 u + q_2 \end{cases}$$

dove $p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2$ sono costanti arbitrarie di cui le prime due *non nulle*.

Le formule (65), (69) sostituite nelle equazioni (6) danno un primo gruppo di superficie-soluzioni. Con una trasformazione omografica non degenera possiamo ridurre a considerare le sole soluzioni per cui: $c_0 = p_0 = q_0 = 1$, $c_1 = p_1 = q_1 = c_2 = p_2 = q_2 = 0$ ⁽¹⁵⁾. In tali soluzioni conviene inoltre operare

⁽¹⁴⁾ Invece le soluzioni relative al caso A) sono mutate in sè da tale scambio.

⁽¹⁵⁾ Si noti che questa omografia e le altre che interverranno in seguito non alterano gli elementi prefissati di riferimento (i piani π_1, π_2, π_3 e i loro punti di incidenza) in quanto trasformano soluzioni corrispondenti a valori generici delle costanti di integrazione in soluzioni corrispondenti a valori particolari delle costanti.

il seguente cambiamento di coordinate curvilinee :

$$(70) \quad \bar{u} = \frac{2u}{p} - \frac{2}{p} \sqrt{u(u-p)} - 1; \quad v = \frac{2v}{q} - \frac{2}{q} \sqrt{v(v-q)} - 1,$$

dopo di che con una nuova omografia possiamo ridurci a considerare la sola soluzione per cui $p = q = 2$. Scrivendo inoltre u e v in luogo di \bar{u} e \bar{v} , otteniamo per essa la seguente rappresentazione :

$$A) \quad \left[\begin{array}{l} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 1 : \frac{(u+1)^2}{2u} : \frac{(v+1)^2}{2v} : \\ : \left\{ \frac{1-u^2}{2u} + \lg u \right\} : \left\{ \frac{1-v^2}{2v} + \lg v \right\} : \frac{(u+1)(v+1)}{2\sqrt{uv}} \end{array} \right].$$

Dunque : tutte le superficie-soluzioni ottenibili nel caso A) sono proiettivamente identiche alla superficie A).

Su tale superficie le linee principali dei cinque sistemi si ricavano trasformando le equazioni : $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$; $\frac{v}{u} = \text{cost.}$ e le (67) e (68) con la trasformazione (70). Scrivendo poi u e v in luogo di \bar{u} e \bar{v} si hanno i seguenti cinque sistemi di linee principali :

$$\left[\begin{array}{lll} \text{I}^A) \quad u = \text{cost.}; & \text{II}^A) \quad v = \text{cost.}; & \\ \text{III}^A) \quad \frac{(v+1)^2 u}{(u+1)^2 v} = \text{cost.}; & \text{IV}^A) \quad uv = \text{cost.}; & \text{V}^A) \quad \frac{v}{u} = \text{cost.} \end{array} \right]$$

Delle proprietà geometriche ci occuperemo nella parte quarta.

CASO B) ($p = 0$, $q \neq 0$). — In questo caso le (62) e (66) diventano rispettivamente :

$$(71) \quad U'' = p_0 u^{-2}; \quad V'' = q_0 (v-q)^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}};$$

$$(72) \quad \frac{du}{u} = \pm \frac{dv}{\sqrt{v(v-q)}}.$$

L'integrazione di (72) dà :

$$\lg u \pm \lg \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] = \text{cost.}$$

ossia :

$$(73) \quad (4^\circ \text{ sistema}) \quad u \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] = \text{cost.};$$

$$(74) \quad (5^\circ \text{ sistema}) \quad \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] / u = \text{cost.}.$$

L'integrazione di (71) dà:

$$(75) \quad \boxed{\begin{aligned} U &= -p_0 \lg u + p_1 u + p_2; \\ V &= q_0 \frac{2}{q} \sqrt{v(v-q)} + q_0 \lg \left[v - \sqrt{v(v-q)} - \frac{q}{2} \right] + q_1 v + q_2 \end{aligned}}$$

Le (65) e (75) sostituite nelle equazioni (6) danno un nuovo gruppo di soluzioni. Anche qui con una trasformazione omografica ci si può ridurre alle soluzioni per cui: $-p_0 = q_0 = c_0 = 1$, $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = c_1 = c_2 = 0$. In tali soluzioni conviene inoltre operare il seguente cambiamento di coordinate curvilinee:

$$(76) \quad \bar{u} = u; \quad \bar{v} = \frac{2v}{q} - \frac{2}{q} \sqrt{v(v-q)} - 1,$$

dopo di che con un'ulteriore trasformazione omografica ci si può ridurre al caso in cui $q=2$. Scrivendo inoltre u e v in luogo di \bar{u} e \bar{v} avremo:

$$B) \quad \boxed{x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = 1 : u : \frac{(v+1)^2}{2v} : \lg u : \left\{ \frac{1-v^2}{2v} + \lg v \right\} : \frac{\sqrt{u}(v+1)}{\sqrt{2v}}}$$

Dunque: tutte le superficie-soluzioni ottenibili nel caso B) sono proiettivamente identiche alla superficie B).

Su tale superficie le linee principali dei cinque sistemi si ricavano trasformando le equazioni: $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $\frac{v}{u} = \text{cost.}$, e le (73) e (74) con la trasformazione (76). Scrivendo poi u e v in luogo di \bar{u} e \bar{v} si hanno le seguenti equazioni:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{I}^B) & u = \text{cost.}; & \text{II}^B) & v = \text{cost.}; \\ \text{III}^B) & \frac{(v+1)^2}{uv} = \text{cost.}; & \text{IV}^B) & uv = \text{cost.}; & \text{V}^B) & \frac{v}{u} = \text{cost.} \end{array}}$$

Delle proprietà geometriche ci occuperemo nella parte quarta: da tali proprietà risulterà pure che le superficie A) e B), che costituiscono le due soluzioni del problema, sono proiettivamente distinte.

PARTE QUARTA

Considerazioni geometriche.

Per i primi tre sistemi di linee principali delle soluzioni A) e B) trovate vi è poco da aggiungere. Sappiamo già che si tratta di sistemi conici segati

da S_3 generatori di coni di 3^a specie: si può ora osservare che mentre i coni relativi ai primi due sistemi sono trascendenti e di natura non molto semplice, quello relativo al 3^o sistema è un *cono quadrico* ⁽¹⁶⁾ che sia per A) che per B) ha l'equazione: $x_2 x_3 = x_6^2$.

Passando ora alle linee principali del 4^o e 5^o sistema, scriviamo anzitutto esplicitamente le loro equazioni parametriche quali si ottengono tenendo conto delle IV^A), V^A), IV^B), V^B) (parte terza) e delle equazioni parametriche A) B) delle superficie stesse (parte terza):

$$\begin{aligned}
 & x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \\
 \text{IV}^{\text{A}}) & \quad 2cu : c(u+1)^2 : (c+u)^2 : \{c(1-u^2) + 2cu \lg u\} : \\
 & \quad : \{u^2 - c^2 + 2cu \lg c - 2cu \lg u\} : \{ \sqrt{cu^2} + \sqrt{c}(c+1)u + c\sqrt{c} \} \\
 \text{V}^{\text{A}}) & \quad 2cu : c(u+1)^2 : (cu+1)^2 : \{c(1-u^2) + 2cu \lg u\} : \\
 & \quad : \{1 - c^2 u^2 + 2cu \lg c + 2cu \lg u\} : \{c\sqrt{cu^2} + \sqrt{c}(c+1)u + \sqrt{c}\} \\
 \text{IV}^{\text{B}}) & \quad 2cu : 2cu^2 : (c+u)^2 : 2cu \lg u : \\
 & \quad : \{u^2 - c^2 + 2cu \lg c - 2cu \lg u\} : \{ \sqrt{2cu^2} + c\sqrt{2cu} \} \\
 \text{V}^{\text{B}}) & \quad 2cu : 2cu^2 : (cu+1)^2 : 2cu \lg u : \\
 & \quad : \{1 - c^2 u^2 + 2cu \lg c + 2cu \lg u\} : \{c\sqrt{2cu^2} + \sqrt{2cu}\}
 \end{aligned}$$

(dove c è una costante arbitraria).

Dall'esame di tali equazioni risulta anzitutto che in ogni caso il punto x che descrive una delle linee considerate può esprimersi nel seguente modo:

$$(77) \quad x = y + (2cu \lg u)z,$$

dove z è un *punto fisso* e precisamente nei casi IV^A) e IV^B) il punto:

$$V \equiv (0, 0, 0, 1, -1, 0)$$

e nei casi V^A) e V^B) il punto:

$$V^* \equiv (0, 0, 0, 1, 1, 0),$$

mentre y è un punto, *diverso nei vari casi*, le cui coordinate si leggono facilmente nelle equazioni precedenti e che in ogni caso *descrive una conica*. Dunque la (77) ci dice che *le linee principali considerate appartengono a dei coni quadrici (ordinari): i coni relativi alle linee principali di uno stesso sistema hanno tutti lo stesso vertice e precisamente V per i sistemi IV^A) e IV^B)*

⁽¹⁶⁾ La *dissimmetria* che si presenta qui e più innanzi fra le proprietà inerenti ai sistemi I) e II) e quelle inerenti al sistema III) è dovuta al fatto che i sistemi IV) e V) devono separare armonicamente due dei primi 3 sistemi i quali, per nostro assunto, sono proprio i sistemi I) e II).

e V^* per i sistemi V^A) e V^B). I due vertici stanno sulla retta A_4A_5 che congiunge l'intersezione A_4 di π_1 e π_3 all'intersezione A_5 di π_2 e π_3 : inoltre V e V^* separano armonicamente A_4 e A_5 ⁽¹⁷⁾.

Si considerino ora tutte le linee principali di un sistema ed i corrispondenti coni quadrici: questi appartengono a degli S_3 i quali, contenendo ciascuno una linea principale del sistema, secondo una già riferita osservazione del BOMPIANI ⁽¹⁸⁾ sono gli S_3 di una *svilupppabile* (compresi i casi degeneri dei coni di 1^a, 2^a, 3^a specie). Per determinare la natura delle svilupppabili (o coni) che intervengono, osserviamo che ciascuno degli S_3 -generatori può pensarsi individuato dal vertice z del cono e dal piano della conica descritta dal punto $y(u)$: questo piano può determinarsi a sua volta per es. mediante i punti $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ ⁽¹⁹⁾.

Si può allora constatare facilmente che gli S_3 dei sistemi IV^A) e V^A) contengono tutti il punto fisso: $y(0) - y''(0) - (1 + c)z$, che in entrambi i casi risulta essere il punto:

$$W \equiv (0, 1, -1, 0, 0, 0).$$

Si conclude che gli S_3 relativi al sistema IV^A) passano tutti per la retta fissa VW e quelli relativi al sistema V^A) passano tutti per la retta fissa V^*W . Si esclude poi facilmente che al di fuori di quelle rette vi siano altri elementi fissi per cui passino gli S_3 considerati i quali sono pertanto *tangenti a coni di 2^a specie* aventi come *rette-vertici* rispettivamente le VW e V^*W , *incidenti* in W : il piano di queste rette incontra π_1 e π_2 rispettivamente nei punti A_4 e A_5 e π_3 nella retta A_4A_5 .

Per quanto riguarda invece gli S_3 dei sistemi IV^B) e V^B) tutto procede in modo ancora più semplice. Infatti, facendo $u = 0$, risulta senz'altro che per le curve di quei sistemi il punto $x(0) = y(0)$ è un punto fisso ⁽²⁰⁾ il quale nel caso IV^B) è il punto:

$$U \equiv (0, 0, 1, 0, -1, 0)$$

e nel caso V^B) il punto:

$$U^* \equiv (0, 0, 1, 0, 1, 0).$$

Dunque tutte le linee del sistema IV^B) passano per U e tutte quelle del si-

⁽¹⁷⁾ Ricordiamo in proposito che nella parte 1^a abbiamo chiamato con $\pi_2 \equiv (A_3, A_5, A_6)$, $\pi_1 \equiv (A_2, A_4, A_6)$, $\pi_3 \equiv (A_1, A_4, A_5)$ i piani per cui passano rispettivamente gli S_3 che segano sulla superficie le linee principali dei sistemi I), II), III).

⁽¹⁸⁾ Cfr. l'Introduzione.

⁽¹⁹⁾ Gli accenti indicano qui derivate rispetto al parametro u .

⁽²⁰⁾ Occorre tener presente che $\lim_{u \rightarrow 0} (u \log u) = 0$.

stema V^B) passano per U^* ⁽²¹⁾ (invece le linee dei sistemi IV^A) e V^A) non passano per punti fissi): i punti U e U^* sono allineati con $A_5 \equiv (\pi_2, \pi_3)$. Quindi tutti i coni quadratici relativi alle linee del sistema IV^B) hanno in comune la generatrice VU e quelli relativi al sistema V^B) hanno in comune la generatrice V^*U^* . Allora gli S_3 relativi al sistema IV^B) passano tutti per la retta VU e quelli relativi al sistema V^B) passano tutti per la retta V^*U^* . Si esclude poi facilmente che al di fuori di quelle rette vi siano altri elementi fissi per cui passino gli S_3 , considerati i quali sono pertanto *tangenti a coni di 2^a specie* aventi come *rette-vertici* rispettivamente VU e V^*U^* : queste due rette sono incidenti perchè si incontrano nel punto $T \equiv (0, 0, 1, -1, 0, 0)$ e stanno nel piano UA_4A_5 che incontra π_1 nel punto A_4 , π_2 nella retta UA_5 ($\equiv A_3A_5$) e π_3 nella retta A_4A_5 .

Le proprietà proiettivo-differenziali delle soluzioni A) e B) ora determinate provano che le due superficie sono *proiettivamente distinte*: tali proprietà verranno raccolte, insieme ad altre che ora troveremo, nel riassunto posto in fine al presente lavoro.

Esaminiamo ora le soluzioni A) e B) dal punto di vista dei *5-tessuti* di linee piane che esse offrono come immagini dei loro sistemi di linee principali in un piano (u, v) . Ci conviene però adottare come nuove variabili le x e y , legate ad u, v dalle relazioni:

$$(78) \quad u = e^{2x}, \quad v = e^{2y}.$$

Allora le equazioni dei cinque sistemi assumono il seguente aspetto:

	I	II	III	IV	V
(79) A	$x = \text{cost.}$	$y = \text{cost.}$	$\frac{e^y + e^{-y}}{e^x + e^{-x}} = \text{cost.}$	$x + y = \text{cost.}$	$x - y = \text{cost.}$
B	$x = \text{cost.}$	$y = \text{cost.}$	$\frac{e^y + e^{-y}}{e^x} = \text{cost.}$	$x + y = \text{cost.}$	$x - y = \text{cost.}$

Risulta così che in entrambi i casi A) e B) il 4-tessuto costituito dai sistemi I), II), IV), V) è *formato da terne tutte esagonali*: esso appartiene dunque a quel tipo di tessuti che la Scuola di Amburgo chiama « *Sechseckgeflechte* » e che noi chiameremo *4-tessuti esagonali*. Il MAYRHOFER ⁽²²⁾ ha studiato tali tessuti dimostrando che sono sempre rappresentabili su tessuti *costituiti da fasci di rette* di guisa che i modelli *proiettivamente distinti* risultano anche

⁽²¹⁾ I punti U e U^* sono dunque punti eccezionali per la superficie B).

⁽²²⁾ (T. 3). *Kurvensysteme auf Flächen*, « Math. Zeitschr. », 28 (1928).

topologicamente distinti: si hanno così 3 tipi α , β , γ di 4-tessuti esagonali secondo che nel modello costituito da fasci di rette i fasci che si possono rendere *impropri* sono 4, 3, 2. Il 4-tessuto I), II), IV), V); appartiene al tipo α del MAYRHOFER.

Nel caso A) risulta poi che, oltre alle terne comprese nel 4-tessuto suddetto, sono ancora esagonali le terne I^A), II^A), III^A) e III^A), IV^A), V^A): l'esagonalità della 1^a risulta subito scrivendo l'equazione del sistema III^A) nella forma:

$$\lg \operatorname{ch} y - \lg \operatorname{ch} x = \operatorname{cost.};$$

l'esagonalità della 2^a terna si può verificare eseguendo per es. la trasformazione $\begin{cases} x + y = 2x' \\ y - x = 2y' \end{cases}$ per cui al sistema III^A) si può dare la forma:

$$\lg \operatorname{tgh} x' + \lg \operatorname{tgh} y' = \operatorname{cost.}$$

mentre IV^A) e V^A) diventano: $x' = \operatorname{cost.}$ e $y' = \operatorname{cost.}$.

Così si è trovato che *sei* delle dieci terne che si possono formare coi sistemi del tessuto A) sono *esagonali*: si può poi verificare che le rimanenti quattro *non* sono esagonali, constatando che per esse non è soddisfatta la condizione del THOMSEN ⁽²³⁾.

Nel caso B) le cose vanno diversamente poichè si può ancora estrarre un secondo 4-tessuto esagonale e precisamente quello formato dai sistemi II^B), III^B), IV^B), V^B). Infatti eseguendo la trasformazione:

$$x' = e^{-(x+y)}, \quad y' = e^{y-x}$$

risulta che le equazioni dei sistemi suddetti possono assumere le forme seguenti:

$$\text{II}^{\text{B}}) \frac{y'}{x'} = \operatorname{cost.}; \quad \text{III}^{\text{B}}) x' + y' = \operatorname{cost.}; \quad \text{IV}^{\text{B}}) x' = \operatorname{cost.}; \quad \text{V}^{\text{B}}) y' = \operatorname{cost.}$$

si ha cioè un 4-tessuto esagonale del tipo β) di MAYRHOFER. Inoltre è esagonale la terna I^B), II^B), III^B).

Così si è trovato che *otto* delle dieci terne che si possono formare coi sistemi del tessuto B) sono *esagonali*: si può poi verificare che le rimanenti due *non* sono esagonali, constatando che per esse non è soddisfatta la condizione del THOMSEN.

A questo punto si pone la quistione di stabilire se i tessuti A) e B) siano *topologicamente distinti* da quelli ottenuti dal TERRACINI ⁽²⁴⁾. Dall'esame delle terne a configurazione esagonale risulta che queste sono uguali per numero

⁽²³⁾ Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche, « Boll. U. M. I. », VI (1927), p. 80.

⁽²⁴⁾ Cfr. l'Introduzione.

e per distribuzione nel nostro tessuto A) e nel tessuto H_1) del TERRACINI, come pure nel nostro tessuto B) e nel tessuto D) del TERRACINI: in quest'ultimo caso però la cosa si rende più evidente scambiando i numeri II e III dei sistemi nella numerazione del TERRACINI ⁽²⁵⁾. Dunque *tutt'al più* si potrebbe avere identità topologica di A) con H_1) e di B) con D): si può però vedere che ciò *non avviene*. Infatti anzitutto per quel che riguarda B) e D) si può verificare che mentre i 4-tessuti esagonali contenuti in B) appartengono uno al tipo α) e l'altro al tipo β) di MAYRHOFER, quelli invece contenuti in D) appartengono entrambi al tipo β) ⁽²⁶⁾: e ciò basta per concludere che B) e D) sono tessuti topologicamente *distinti*. Per quel che riguarda invece A) e H_1) bisogna osservare anzitutto che in entrambi vi è un solo 4-tessuto esagonale e che questo è sempre del tipo α): ciò si vede eseguendo un'opportuna trasformazione che muti la quaterna I), II), IV), V) relativa al tessuto H_1) nella quaterna omonima relativa al tessuto A) ⁽²⁷⁾; con la trasformazione eseguita risulta che il nuovo sistema III^{H_1}) assume la forma $x^2 - y^2 = \text{cost.}$. Ora se vi fosse una trasformazione topologica mutante il nuovo tessuto H_1) nel tessuto A), questa dovrebbe mutare complessivamente in sé il 4-tessuto I), II), IV), V) in quanto esso è l'*unico* 4-tessuto esagonale contenuto in entrambi: si può però dimostrare ⁽²⁸⁾ che una trasformazione siffatta è necessariamente un'*affinità* e allora essa non può trasformare il sistema III^{H_1}) costituito da coniche nel sistema III^A) costituito da curve trascendenti. Quindi anche i tessuti A) e H_1) sono topologicamente *distinti*.

⁽²⁵⁾ Poichè nelle proprietà da lui indicate i sistemi I) e II) intervengono simmetricamente, al TERRACINI non occorre specificare se il suo sistema I) sia $u = \text{cost.}$ oppure $v = \text{cost.}$: nel fare il confronto con i tessuti da noi considerati possiamo quindi assumere che il sistema I) sia come per noi $u = \text{cost.}$.

⁽²⁶⁾ La verifica consiste nel trasformare, *previo il cambiamento di numerazione indicato*, i tessuti I^D), II^D), IV^D), V^D) e II^D), III^D), IV^D), V^D) in tessuti costituiti da *fasci di rette*: a tale scopo per il 1° tessuto, tenute presenti le equazioni del Terracini, conviene applicare la trasformazione: $x = \sqrt{1 - 2e^{u+v}} \cdot e^{-u}$, $y = e^{-u}$ e per il 2° tessuto: $x = \sqrt{1 - 2e^{u+v}} \cdot e^{-v}$, $y = e^{-v}$.

⁽²⁷⁾ Tenute presenti le equazioni del Terracini, la trasformazione che conviene eseguire è la seguente: $x = \sqrt{u}$, $y = i\sqrt{v}$.

⁽²⁸⁾ Se $ABCD$ sono i centri dei 4 fasci impropri I), II), IV), V), una trasformazione topologica del tipo richiesto potrà permutarli in un modo imprecisato. Però, siccome la quaterna $ABCD$ è armonica, esiste sempre un'*affinità* che muti una sua permutazione qualunque in una delle seguenti tre: $ABCD$, $ACDB$, $ADBC$. Quindi le trasformazioni topologiche considerate si possono pensare come *prodotti* di affinità e di trasformazioni topologiche mutanti $ABCD$ in una delle *tre* quaterne suddette: vi sono quindi da considerare 3 *cas*i diversi. Mediante considerazioni funzionali si dimostra che gli ultimi due non possono verificarsi e che il primo dà luogo solamente ad *omotetie* che combinate con affinità danno in ogni caso delle *affinità*.

Infine, per quanto riguarda il tessuto A) vogliamo ancora far vedere come di esso si possa dare un'altro modello *costituito da fasci di rette e di coniche*, il quale ci sembra particolarmente notevole. A tale scopo partiamo dalle equazioni del tessuto A), non nella forma (79), ma come erano scritte (nella parte terza) prima della trasformazione (78) ed eseguiamo su di esse la sostituzione seguente :

$$u + 1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad v + 1 = \frac{x_1}{x_2};$$

otteniamo le seguenti equazioni (dove c è una costante e x_1, x_2, x_3 sono coordinate omogenee):

$$\begin{aligned} \text{I}^{\text{A}}) \quad x_1 = cx_3; & \quad \text{II}^{\text{A}}) \quad x_1 = cx_2; & \quad \text{III}^{\text{A}}) \quad x_3(x_1 - x_3) = cx_2(x_1 - x_2); \\ \text{IV}^{\text{A}}) \quad (x_1 - x_3)(x_1 - x_2) = cx_2x_3; & \quad \text{V}^{\text{A}}) \quad x_3(x_1 - x_2) = cx_2(x_1 - x_3). \end{aligned}$$

Tale tessuto è costituito da 2 fasci di rette e 3 fasci di coniche: questi ultimi hanno ciascuno come punti-base due delle tre coppie di vertici opposti del quadrilatero :

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0$$

cosicchè due qualunque dei tre fasci hanno una coppia di punti-base in comune; inoltre i centri dei due fasci di rette I^A) e II^A) stanno nei due punti-base comuni ai fasci IV^A) e V^A).

Diamo ora un riassunto delle proprietà relative alle superficie A) e B) ed ai tessuti che da esse traggono origine.

Tutte le soluzioni del problema si riducono a due tipi proiettivamente distinti A) e B).

Proprietà comuni alle superficie A) e B):

1°) Su di esse vi sono cinque sistemi di linee (principali) I), II), III), IV), V) ad iperpiano tangente fisso.

2°) I sistemi I) e II) sono separati armonicamente dai sistemi IV) e V).

3°) I sistemi I), II), III) sono segati da S_3 che appartengono a coni di 3^a specie aventi come vertici tre piani π_1, π_2, π_3 a due a due incidenti ma non contenuti in uno stesso S_4 : il cono relativo al sistema III) è un cono quadrico.

4°) Le linee dei sistemi IV) e V) appartengono a coni quadrici (ordinari) aventi tutti uno stesso vertice V per le linee IV) e uno stesso vertice V* per le linee V): i vertici V, V* stanno nella retta A_4, A_5 che congiunge le intersezioni A_4 e A_5 di π_3 con π_2 e π_1 ; e separano armonicamente tali intersezioni.

5°) I sistemi IV) e V) sono segati da S_3 tangenti a coni di 2^a specie aventi come vertici due rette passanti rispettivamente per V e V* e fra loro incidenti (il loro piano è incidente a π_3 secondo la retta A_4A_5).

6°) Nei 5-tessuti immagini dei sistemi di linee principali sono esagonali tutte le quattro terne estratte dal 4-tessuto I), II), IV), V) ed inoltre I), II), III) e III), IV), V).

Proprietà ulteriori della sola superficie B):

7°) Le curve del sistema IV) passano tutte per uno stesso punto U e quelle del sistema V) per uno stesso punto U*: i punti U, U* sono allineati con A_5 . Le rette-vertici dei coni di 2^a specie sono le VU e V*U*, appartenenti al piano UA_4A_5 che incontra secondo una retta sia π_3 (nella A_4A_5) che π_2 (nella UA_5).

8°) Nel 5-tessuto immagine dei sistemi di linee principali sono esagonali anche le terne II), III), IV) e II), III), V) cosicchè anche il 4-tessuto II), III), IV), V) è costituito da terne tutte esagonali.

Plane Sections of the Tangent Surface of a Space Curve.

BY BUCHIN SU (Taiho, Kiangsi, China).

1. In the study of projective invariants of a space curve it is often convenient to consider the tangent surface of the curve. WILCZYNSKI⁽¹⁾ was the first one who utilized the plane section of the tangent surface T of a space curve Γ made by the osculating plane at an ordinary point P of Γ and called the osculating conic of the section at P the osculating conic of Γ . Certainly, P is also an ordinary point of the section.

On the contrary, if we consider the other plane section made by a plane π passing through P , then P is an inflexion or a cusp of the section according as the tangent of Γ at P is or is not contained in π . In the former case we have obtained⁽²⁾ a projectivity \mathfrak{B} between a plane π through the tangent t and a point P , on t such that the plane section of T made by π has P_1 for its BOMPIANI osculant O_4 ⁽³⁾.

It seems of some interest to investigate the remaining case when the plane section has P for a cusp. For this purpose we have to represent the neighbourhoods of various orders of the curve at P by means of POPA osculants⁽⁴⁾ and then arrive at certain correspondences which are intimately related to the projectivity \mathfrak{B} and the polarity \mathfrak{S} with respect to the osculating conic of Γ at P .

In a recent paper BOMPIANI⁽⁵⁾ has enriched the projective differential geometry of a space curve in the neighbourhood of an ordinary point by

(1) E. J. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, (Leipzig, Teubner, 1906).

(2) B. SU, *On certain quadratic cones projectively connected with a space curve and a surface*, « Tôhoku Math. Journ. », **38** (1933), 233-244.

(3) Concerning BOMPIANI osculants of a plane curve with an inflexion cfr. E. BOMPIANI, *Per lo studio proiettivo-differenziale della singolarità*, « Boll. dell'Unione Mat. Italiana », **5** (1926), 118-120. See also my paper: *Note on the projective differential geometry of space curves*, « Journ. Chin. Math. Soc. », **2** (1937), 98-137.

(4) I. POPA, *Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità delle curve piane*, « Rend. dei Lincei », (VI), **25** (1937), 220-222.

(5) E. BOMPIANI, *Sulle curve sghembe*, « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari », Pavia (1936), 515-552.

introducing the plane section of the tangent surface T made by a general plane. As a supplement of his investigation we will show that the two correspondences obtained by BOMPIANI just coincide with \mathfrak{B} and \mathfrak{S} .

The remaining part of this note is devoted to certain configurations projectively connected with a space curve and a surface. These results were obtained during August, 1937 and the publication has been delayed by war.

2. Let P be an ordinary point of an analytic space curve Γ ; the non-homogeneous coordinates x, y, z of P are analytic functions of x so that, taking the tangent t of Γ at P for the x -axis and the osculating plane at the same point for xy -plane with origin P , we have

$$(1) \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + (6), \\ z = rx^3 + sx^4 + tx^5 + ux^6 + (7), \end{cases}$$

where $ar \neq 0$ and (n) denotes the terms of degree $\geq n$ in x .

The tangents of Γ describe a developable surface T , namely, the tangent surface. The equations to T are evidently of the form

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = x + \mu, \\ \eta = y + \mu y', \\ \zeta = z + \mu z', \end{cases}$$

where $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$; μ denotes another parameter and ξ, η, ζ the current coordinates of a point.

In order to obtain the plane section $\bar{\Gamma}$ of T made by the osculating plane of Γ at P we have merely to put $\zeta = 0$ in (2), which gives the value for μ :

$$\mu = -\frac{x}{3r} \left[r - \frac{1}{3} sx + \left(\frac{4s^2}{9r} - \frac{2}{3} t \right) x^2 + (3) \right].$$

It follows that the expansion of $\bar{\Gamma}$ at P takes the form

$$(3) \quad \begin{aligned} \eta &= \frac{3}{4} a \xi^2 + \frac{3}{8} \frac{as}{r} \xi^3 \\ &+ \left\{ \frac{27}{16} \left(\frac{bs}{r} - c \right) - \frac{69}{64} a \left(\frac{s}{r} \right)^2 + \frac{9}{8} \frac{at}{r} \right\} \xi^4 + (5). \end{aligned}$$

The neighbourhood of the 4th order of Γ at P determines a polarity \mathfrak{S} between a point P_i on the tangent t and the line t_n through P and in the osculating plane $\zeta = 0$ such that the corresponding elements are pole and polar with respect to any four-point conic of $\bar{\Gamma}$ at P . In virtue of (3) we easily obtain

the equation to the four-point conic, namely,

$$(4) \quad \frac{3}{4} a\xi^2 + \frac{1}{2} \frac{s}{r} \xi\eta - \eta + k\eta^2 = 0,$$

k being a parameter. Let the line t_n be given by

$$(5) \quad \zeta = \eta - n\xi = 0$$

and P_1 of the coordinates $(x_0, 0, 0)$, the polarity \mathfrak{S} is then given by the equation

$$(6) \quad \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} + \frac{3a}{n} \right).$$

3. Suppose now that a plane π through the tangent t be different from the osculating plane. The plane section of T made by π has an inflexion at P and consequently determines BOMPIANI osculant O_4 on the tangent t . Denoting π by the equation

$$(7) \quad \zeta + \lambda\eta = 0$$

and O_4 by the coordinates $(x_0, 0, 0)$, we have ⁽⁶⁾

$$(8) \quad \frac{1}{x_0} = 2 \frac{s}{r} - 3 \frac{b}{a} - 3 \frac{r}{a} \frac{1}{\lambda}.$$

This projectivity will be denoted by the letter \mathfrak{B} . It shall be noted that the point P and the osculating plane of Γ at P correspond to each other.

As the definition or the equation (8) shows, *the projectivity \mathfrak{B} is determined by the neighbourhood of the 4th order of Γ at P* , but it is connected with the osculating linear line complex of Γ , which is determined by the neighbourhood of the 5th order. In fact, we can show that *the null plane of any point P_1 on t with respect to the linear complex coincides with the corresponding plane π of P_1 under \mathfrak{B}* .

To prove this, let us denote the line coordinates of the join of two points (ξ, η, ζ) and (ξ', η', ζ') by

$$\begin{aligned} r_1 &= \xi\eta' - \xi'\eta, & r_2 &= \xi\zeta' - \xi'\zeta, & r_3 &= \xi - \xi', \\ r_4 &= \eta'\zeta - \eta'\zeta', & r_5 &= \eta' - \eta, & r_6 &= \zeta - \zeta'; \end{aligned}$$

the equation to the osculating linear complex of Γ at P is easily found to be ⁽⁷⁾

$$(9) \quad 3ar^3r_1 - arlr_2 + mr_4 + a^2r^2r_6 = 0,$$

where

$$(10) \quad l = 3br - 2as, \quad m = 5art - 6as^2 - 9r^2c + 9rbs.$$

⁽⁶⁾ For the details cfr. my paper: *On the intersection of two curves in space*, « Tôhoku Math Journ. », 39 (1934), 226-232.

⁽⁷⁾ Cfr. e. g. my paper: *Invariants of intersection of two curves in space*, « Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. », (I), 25 (1936), 22-33.

Consequently, we obtain the equation to the null plane at the point $P_1(x_0, 0, 0)$, namely,

$$(11) \quad (ar + lx_0)\zeta - 3r^2x_0\eta = 0.$$

Putting this in the form (7) we have the relation

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{a}{3r} \left(3\frac{b}{a} - 2\frac{s}{r} + \frac{1}{x_0} \right),$$

which is equivalent to (8).

4. We come now to consider the plane section of T made by a plane π which passes through P but does not contain the tangent t of Γ at P . The equation of π is

$$(12) \quad \zeta + \lambda(\eta - n\xi) = 0,$$

where λ denotes a parameter. The line of intersection of π and the osculating plane of Γ at P is evidently t_n given by (5).

In order to obtain the plane section C in consideration we have to substitute (2) in (12) so as to determine μ . The result of computation is as follows:

$$(13) \quad \begin{cases} \eta = \frac{yz' - y'z + \lambda n(xy' - y)}{z' + \lambda(y' - n)}, \\ \zeta = \frac{\lambda \{ y'z - yz' + n(xz' - z) \}}{z' + \lambda(y' - n)}. \end{cases}$$

These equations represent the projection of the curve C in the $\eta\zeta$ -plane.

Substituting (1) in (13) and putting

$$(14) \quad X = -\frac{1}{a}\eta, \quad Y = -\zeta$$

for the sake of convenience, we obtain

$$(15) \quad X = x^2 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{n}\right)x^3 + \left(3\frac{c}{a} + \frac{4r}{\lambda n} + \frac{7b}{n} + 4\frac{a^2}{n^2}\right)x^4 \\ + \left(4\frac{d}{a} + 6\frac{s}{\lambda n} + 10\frac{c}{n} + 14\frac{ar}{\lambda n^2} + 20\frac{ab}{n^2} + 6\frac{b^2}{an} + 6\frac{br}{\lambda an} + 8\frac{a^3}{n^3}\right)x^5 + (6)$$

$$(16) \quad Y = 2rx^3 + 3\left(s + \frac{ar}{n}\right)x^4 + \left(4\frac{as}{n} + 4t + 6\frac{a^2r}{n^2} + 6\frac{br}{n} + 6\frac{r^2}{\lambda n}\right)x^5 \\ + \left\{ \frac{1}{n} (5at + 8bs + 9cr) + 5u + 8\frac{a^2s}{n^2} + 12\frac{a^3r}{n^3} + 21\frac{abr}{n^2} + 21\frac{ar^2}{\lambda n^2} + 17\frac{rs}{\lambda n} \right\} x^6 + (7).$$

It follows that *the curve C has a cusp at P* and therefore that we can represent the neighbourhoods of various orders by means of Popa's method.

For this purpose it is convenient to rewrite the expansions (15) and (16) in the form used by POPA, namely,

$$(17) \quad \begin{cases} X = t^2, \\ Y = \mathcal{A}t^3 + \mathcal{B}t^4 + \mathcal{C}t^5 + \mathcal{D}t^6 + (7). \end{cases}$$

In virtue of (15) there is no difficulty in expanding x into a power series of t . A simple calculation suffices to demonstrate that

$$(18) \quad x = t + At^2 + Bt^3 + Ct^4 + (5),$$

where

$$(19) \quad \begin{cases} A = -\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{n}\right), \\ B = \frac{5b^2}{2a^2} - \frac{3c}{2a} + \frac{3b}{2n} + \frac{1a^2}{2n^2} - 2\frac{r}{\lambda n}, \\ C = 9\frac{bc}{a^2} - 2\frac{d}{a} - 8\frac{b^3}{a^3} + 4\frac{c}{n} - 6\frac{b^2}{an} - \frac{ab}{n^2} + \frac{1}{\lambda}\left(5\frac{ar}{n^2} - 3\frac{s}{n}\right). \end{cases}$$

Substituting (18) in the right-hand side of (16) and reducing, we obtain that

$$(20) \quad \begin{cases} \mathcal{A} = 2r, \quad \mathcal{B} = 6Ar + 3\left(s + \frac{ar}{n}\right), \\ \mathcal{C} = 6r(B + A^2) + 12\left(s + \frac{ar}{n}\right)A + 4\frac{as}{n} + 4t + 6\frac{a^2r}{n^2} + \frac{6br}{n} + 6\frac{r^2}{\lambda n}, \\ \mathcal{D} = 2r(3C + 6AB + A^3) + 3\left(s + \frac{ar}{n}\right)(4B + 6A^2) \\ \quad + 5A\left(4\frac{as}{n} + 4t + 6\frac{a^2r}{n^2} + 6\frac{br}{n} + 6\frac{r^2}{\lambda n}\right) \\ \quad + \frac{1}{n}(5at + 8bs + 9cr) + 5u + 8\frac{a^2s}{n^2} + 12\frac{a^3r}{n^3} \\ \quad + 21\frac{abr}{n^2} + 21\frac{ar^2}{\lambda n^2} + 17\frac{rs}{\lambda n}. \end{cases}$$

5 We need to recall some notions due to POPA for a plane curve C with a cusp P ⁽⁸⁾. If the curve be represented in the form (17), then ∞^3 cusped cubics determined by six consecutive points of P on C are representable by the equation

$$(21) \quad (1 - uX - vY)Y^2 - \mathcal{A}^2(X - \mu Y)^3 = 0,$$

u, v and μ being parameters. The value of μ and consequently the line (d) joining P and the only inflexion of the cubic (21) will be determined when we impose the condition in order that the cubic should pass through a new

(8) I. POPA, loc. cit., § 1.

consecutive point of C . In fact, we have that

$$\mu = -\frac{2\mathfrak{B}}{3\mathfrak{A}^2}$$

and therefore that the line (d) has the equation

$$(22) \quad 3\mathfrak{A}^2 X + 2\mathfrak{B} Y = 0.$$

That is to say, *the neighbourhood of the 6th order of C at P determines the covariant line (d) .*

In virtue of successive neighbourhoods of C we can easily determine u and v and, in consequence, the cusped cubic (21) which osculates C at P . Thus

$$(23) \quad \begin{cases} u = 2\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} - \frac{7}{3}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\right)^2, \\ v = 2\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}^2} - 4\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}^3} + \frac{46}{27}\frac{\mathfrak{B}^3}{\mathfrak{A}^4}. \end{cases}$$

In particular, we obtain the inflexional tangent

$$(24) \quad uX + vY - 1 = 0,$$

a covariant line determined by the neighbourhood of the 8th order of C at P . This line intersects the line (d) and the cuspidal tangent at the principal points O_1 and O_2 respectively, the former being the only inflexion of the osculating cusped cubic.

6. Let us now apply the above result to the configuration considered in § 4. From (14), (19), (20) and (22) it follows that the covariant line (d) for the plane section C of T made by the plane (12) is given by the equations

$$(12) \quad \zeta + \lambda(\eta - n\xi) = 0,$$

$$(25) \quad \frac{r}{a}\eta + \left(\frac{1}{2}\frac{s}{r} - \frac{b}{a} - \frac{\alpha}{2n}\right)\zeta = 0.$$

Since the latter does not contain λ , we have the following theorem:

Let t_n be any line in the osculating plane π of a space curve Γ at P and through P , but distinct from the tangent t . If we consider all the plane sections of the tangent surface T made by planes through t_n , then every section has a cusp at P and the covariant line (d) of POPA describes a plane $\bar{\omega}_n$. The correspondence between t_n and $\bar{\omega}_n$ is projective.

This projectivity can also be defined by the following method.

Eliminating x_0 from (6) and (8) we have

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s}{r} + 3\frac{\alpha}{n}\right) = 2\frac{s}{r} - 3\frac{b}{a} - 3\frac{r}{a}\frac{1}{\lambda}.$$

The plane (7) has then the equation

$$\frac{r}{a} \eta + \left(\frac{1}{2} \frac{s}{r} - \frac{b}{a} - \frac{\alpha}{2n} \right) \zeta = 0,$$

which is precisely (25). In other words: *The projectivity between the line t_n and the plane ω_n is the product of \mathfrak{S} and \mathfrak{B} .*

7. Before we proceed to study the loci of other POPA osculants it is convenient to give here some remarkable properties of plane sections of T made by a general plane α , as BOMPIANI ⁽⁹⁾ has shown.

Suppose that the plane α does not pass through P so that its equation is of the form

$$(26) \quad \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta + \alpha_4 = 0 \quad (\alpha_4 \neq 0).$$

In order to express the representation for the section Γ_α of T made by α we have as before to substitute (2) in (26) so as to determine μ :

$$\mu = - \frac{x + \bar{\alpha}_2 y + \bar{\alpha}_3 z + \bar{\alpha}_4}{1 + \bar{\alpha}_2 y' + \bar{\alpha}_3 z'},$$

where $\bar{\alpha}_k = \alpha_k / \alpha_1$ ($k = 2, 3, 4$).

Therefore the projection of Γ_α in the $\eta\zeta$ -plane is representable in the form

$$(27) \quad \begin{cases} \eta = \frac{y - xy' + \bar{\alpha}_3(yz' - y'z) - \bar{\alpha}_4 y'}{1 + \bar{\alpha}_2 y' + \bar{\alpha}_3 z'}, \\ \zeta = \frac{z - xz' + \bar{\alpha}_2(y'z - yz') - \bar{\alpha}_4 z'}{1 + \bar{\alpha}_2 y' + \bar{\alpha}_3 z'}. \end{cases}$$

In virtue of (1) the right-hand sides of (27) are expansible in power series of x . The result of carrying out the computation is as follows:

$$\begin{aligned} \eta &= -2a\bar{\alpha}_4 x + (4a^2\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4 - a - 3b\bar{\alpha}_4)x^2 + (3), \\ \zeta &= -3r\bar{\alpha}_4 x^2 + 2\{3ar\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4 - (r + 2s\bar{\alpha}_4)\}x^3 + (4). \end{aligned}$$

Expanding further ζ in power series of η we have

$$(28) \quad \zeta = a_0 \eta^2 + a_1 \eta^3 + (4),$$

where

$$(29) \quad \begin{cases} a_0 = -\frac{3}{4} \frac{1}{a^2 \bar{\alpha}_4}, \\ a_1 = \frac{1}{8a^4 \bar{\alpha}_4^3} \{6a^2 r \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_4 - ar + (4as - 9br)\bar{\alpha}_4\}. \end{cases}$$

⁽⁹⁾ E. BOMPIANI, *Sulle curve sghembe*, loc. cit.

Now, let us project the curve Γ from P in the same plane α , the projection being denoted by C_α . If X and Y be the points on α at which α intersects the tangent of Γ at its generic point M and the line PM respectively, then they describe the curves Γ_α and C_α , and X must lie on the tangent of C_α at Y . When M approaches P along Γ both X and Y approach the point P_α , i. e. the intersection of α and t . Hence C_α and Γ_α touch at P_α and the common tangent is the intersection of α and the osculating plane of Γ at P .

Let M have the coordinates (x, y, z) ; then those of Y are

$$\xi = \rho x, \quad \eta = \rho y, \quad \zeta = \rho z.$$

Since Y must lie on α , we have

$$\rho(x + \bar{\alpha}_2 y + \bar{\alpha}_3 z) + \bar{\alpha}_4 = 0:$$

Therefore the projection of C_α in the $\eta\zeta$ -plane is given by the equations,

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\frac{\bar{\alpha}_4 y}{x + \bar{\alpha}_2 y + \bar{\alpha}_3 z}, \\ \zeta = -\frac{\bar{\alpha}_4 z}{x + \bar{\alpha}_2 y + \bar{\alpha}_3 z}, \end{array} \right.$$

Expanding the right-hand sides in power series of x by means of (1) and expressing then ζ in power series of η , we have

$$(31) \quad \zeta = \bar{a}_0 \eta^2 + \bar{a}_1 \eta^3 + (4),$$

where

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_0 = -\frac{r}{a^2 \bar{\alpha}_4}, \\ \bar{a}_1 = \frac{1}{a^4 \bar{\alpha}_4^2} (a^2 r \bar{\alpha}_2 + a s - 2br). \end{array} \right.$$

9. In virtue of (28) and (31) we can easily prove the two theorems due to BOMPIANI and appreciate his result by showing that *the two correspondences there obtained coincide with \mathcal{B} and \mathcal{S}* .

From (29) and (32) it follows that

$$(33) \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_0} = \frac{3}{4}.$$

That is, the invariant of SEGRE of Γ_x with respect to C_x is equal to $\frac{3}{4}$, as C. Servais and BOMPIANI have shown.

The neighbourhoods of the 3rd order of both curves C_α and Γ_x at the

point P_α of contact determine a covariant line r_α of the equation (26) and

$$(34) \quad \eta + \frac{1}{2(a_0 - \bar{a}_0)} \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0} \right) \zeta = 0.$$

The latter can be written as

$$(35) \quad 2r^2\eta + \left(2as - 3br + \frac{ar}{\alpha_1} \right) \zeta = 0$$

if we substitute the values of $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$ given by (29) and (32). Noticing that the coordinates of P_α are

$$(36) \quad x_0 = -\bar{\alpha}_4, 0, 0,$$

we can further put (35) in the form

$$\zeta + \lambda\eta = 0$$

provided that

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{a}{3r} \left(2\frac{s}{r} - 3\frac{b}{a} - \frac{1}{x_0} \right)$$

or

$$\frac{1}{x_0} = 2\frac{s}{r} - 3\frac{b}{a} - 3\frac{r}{a}\frac{1}{\lambda}.$$

Thus we have the following theorem:

For a point P on the curve Γ and ∞^3 planes α in space there are only ∞^2 covariant lines r_α forming ∞^1 pencils, each of which has point P_α on the tangent t of Γ at P for its centre, and a plane π through t for its base. The correspondence between P_α and π is the projectivity \mathfrak{B} .

The neighbourhoods of the 3rd order of C_α and Γ_α also determine a covariant point Q_α in such a manner that the remaining common chord of any two four-point conics of C_α and Γ_α always passes through the fixed point Q_α . The coordinates of Q_α are given by

$$\xi + \bar{\alpha}_2\eta + \bar{\alpha}_3\zeta + \bar{\alpha}_4 = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = -\frac{a_0 - \bar{a}_0}{\frac{a_1}{a_0}\bar{a}_0 - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}a_0}$$

or

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(2ar + as\bar{\alpha}_4)\bar{\alpha}_4}{3a^2r\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4 - 2ar - as\bar{\alpha}_4}, \\ \eta &= \frac{3a^2r\bar{\alpha}_4^2}{3a^2r\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4 - 2ar - as\bar{\alpha}_4}, \\ \zeta &= 0. \end{aligned}$$

Denoting the join of this point and P by t_n :

$$\zeta = \eta - n\xi = 0$$

we obtain that

$$-\frac{1}{n} = \frac{2r + s\bar{\alpha}_4}{3ar\bar{\alpha}_4}$$

and therefore that the correspondence between P_α and t_n takes the form

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} + 3 \frac{a}{n} \right).$$

Thus we obtain the following theorem:

For a point P on Γ and ∞^3 planes α in space all the covariant points Q_α lie in the osculating plane of Γ at P . The correspondence between P_α , the point of intersection of α and t , and the line PQ_α is the polarity \mathfrak{S} .

From what was stated above it follows that the polarity \mathfrak{S} and the projectivity \mathfrak{B} are fundamental in the study of plane sections of the tangent surface of a space curve.

9. We are now in a position to study the other POPA osculants of the plane section of T made by the plane (12). In order to simplify the calculation it is necessary to use some canonical expansions of Γ instead of (1). Take, for example, one of the fundamental tetrahedrons associated at P of Γ for the tetrahedron of reference, so that the expansions of Γ become ⁽¹⁰⁾

$$(37) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{15}\theta_3x^5 + (6), \\ z = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}\theta_3x^6 + (7). \end{cases}$$

Thus, putting

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}, & b &= c = 0, & d &= -\frac{2}{15}\theta_3; \\ r &= \frac{1}{6}, & s &= t = 0, & u &= -\frac{1}{10}\theta_3 \end{aligned}$$

in (19) and (20), we have

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2n}, & B &= \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{3\lambda n}, & C &= \frac{8}{15}\theta_3 + \frac{5}{12}\frac{1}{\lambda n^2}; \\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{3}, & \mathfrak{B} &= -\frac{1}{2n}, & \mathfrak{C} &= \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{6\lambda n}, \\ \mathfrak{D} &= \frac{1}{30}\theta_3 + \frac{7}{24}\frac{1}{\lambda n^2} - \frac{1}{24}\frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁾ Cfr. B. SU, *Note on the projective differential geometry of space curves*, loc. cit., p. 113.

Therefore the plane (25) becomes

$$(38) \quad 4n\eta - 3\zeta = 0$$

which corresponds to the line t_n :

$$(39) \quad \zeta = \eta - n\xi = 0.$$

The quantities u and v given by (23) now take the values

$$(40) \quad \begin{cases} u = -\left(\frac{9}{16} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\lambda n}\right), \\ v = \frac{3}{5} \theta_3 + \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda n^2} + \frac{15}{32} \frac{1}{n^3} \end{cases}$$

and consequently determine the line O_1O_2 , namely, the inflexional tangent of the plane osculating cusped cubic of the section in consideration. From (12), (24) and (40) we obtain the equations of the line O_1O_2 :

$$(41) \quad \begin{cases} \zeta + \lambda(\eta - n\xi) = 0, \\ -\left(\frac{9}{8} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\lambda n}\right)\eta + \left(\frac{3}{5} \theta_3 + \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda n^2} + \frac{15}{32} \frac{1}{n^3}\right)\zeta + 1 = 0. \end{cases}$$

It follows that the principal point C_2 has the coordinates

$$(42) \quad \xi = \left(\frac{9}{8} \frac{1}{n} + \frac{2}{\lambda}\right)^{-1}, \quad \eta = n\left(\frac{9}{8} \frac{1}{n} + \frac{2}{\lambda}\right)^{-1}, \quad \zeta = 0$$

and therefore that *the correspondence between O_2 and the plane of the section is projective.*

Especially when O_2 coincides with \bar{P}_2 , the other intersection of t_n and the osculating conic of Γ at P

$$(43) \quad \eta = \frac{3}{8} \xi^2,$$

we have $\lambda = -\frac{8}{3}n$ and therefore the corresponding plane

$$(44) \quad \zeta - \frac{8}{3}n(\eta - n\xi) = 0.$$

The latter can, however, be constructed in the following manner: Denote by \bar{P}_1 the pole of t_n with regard to the osculating conic (43) and construct the corresponding plane $P\bar{P}_1\bar{P}_2$ of \bar{P}_1 with respect to \mathcal{B} ; then the BOMPIANI line l_5 of the plane section of T made by this plane must lie in the plane (44). In other words:

The plane (44) is one face of the fundamental tetrahedron $T(P_1)$.

In fact, the coordinates of \bar{P}_1 are

$$(45) \quad x_0 = \frac{4}{3}n, 0, 0.$$

Therefore the corresponding point P_3 of the coordinates ⁽¹¹⁾

$$\xi = 3x_0, \quad \eta = \frac{9}{2}x_0^2, \quad \zeta = \frac{9}{3}x_0^3$$

satisfy (44), which was to be proved.

10. Let us attend to the principal point O_1 . The coordinates of this point must satisfy (38) and (41) so that

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{4}{5}n\theta_3}, \\ \eta = \frac{1}{\frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{4}{5}n\theta_3}, \\ \zeta = \frac{\frac{4}{3}n}{\frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{4}{5}n\theta_3}. \end{array} \right.$$

From this we infer that *when the plane revolves about the line t_n the corresponding principal point O_1 describes a range of points and the correspondence is projective.*

There is no difficulty in finding the base of the range. Elimination of λ from (46) gives the required:

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{3}{4}n\eta. \\ \xi = \left(\frac{1}{3n} + \frac{16}{15}\theta_3 n^2\right)\eta + \frac{4}{3}n, \end{array} \right.$$

Here we will give a construction for this line. We notice first that it intersects the tangent t of Γ at \bar{P}_1 , namely, the pole of t_n , with respect to the osculating conic. In order to determine another point on (47) it is convenient to consider the line PP_3 , i. e., the BOMPIANI line l_5 . On the latter we

⁽¹¹⁾ Cfr. B. SU, *Note on . . .*, loc. cit., p. 115.

have geometrically defined ∞^2 points Q_λ depending on a parameter λ ⁽¹²⁾, whose coordinates are

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{3x_0}{1 + \frac{81\lambda}{10(1-\lambda)} \theta_3 x_0^3}, \\ \eta &= \frac{\frac{9}{2} x_0^2}{1 + \frac{81\lambda}{10(1-\lambda)} \theta_3 x_0^3}, \\ \zeta &= \frac{\frac{9}{2} x_0^3}{1 + \frac{81\lambda}{10(1-\lambda)} \theta_3 x_0^3}. \end{aligned} \right.$$

Substituting (48) in (47) and remembering that

$$x_0 = \frac{4}{3} n,$$

we have that $Q_{-\frac{1}{2}}$ lies on the line in consideration. Thus follows the result:

For a fixed line t_n the line described by the principal point O_1 is the join of P_1 and $Q_{-\frac{1}{2}}$.

Further elimination of n from (47) gives the ruled surface of order 3:

$$(49) \quad \frac{4}{9} \eta^3 + \frac{3}{5} \theta_3 \zeta^3 - \xi \eta \zeta + \zeta^2 = 0.$$

11. If λ be eliminated from (41), then we obtain the locus of the line $O_1 O_2$:

$$(50) \quad \zeta + \frac{3}{4n} \xi \zeta - \frac{15}{8} \frac{1}{n^2} \eta \zeta - 2\xi \eta + \frac{2}{n} \eta^2 + \left(\frac{3}{5} \theta_3 + \frac{15}{32} \frac{1}{n^3} \right) \zeta^2 = 0,$$

a quadric corresponding to the line t_n . This result follows also from the fact that O_1 and O_2 describe two projective ranges of points on the lines (47) and t_n . The principal points O_1 and O_2 are therefore the points of contact of the quadric with the planes (38) and (12) respectively.

When the line t_n varies the corresponding quadric (50) envelopes an algebraic surface of order 6, as it may easily be seen by eliminating n from (50) and its derived equation with respect to n .

⁽¹²⁾ Cfr. B. Su, *Note on . . .*; loc. cit., p. 118.

In the same way we can show that the locus of the osculating cusped cubic is a cubic surface when the plane of the section revolves about the line t_n and that this cubic surface envelopes an algebraic surface of order 10.

12. As an application of the above results we shall derive some covariant figures for a pair of intersecting space curves and, in particular, for the asymptotic curves passing through a generic point on a surface.

Let C and \bar{C} be two space curves having O for their point of intersection with distinct tangents t, \bar{t} but with the same osculating plane (t, \bar{t}) . If t and \bar{t} be taken as axes x and y , then the expansions of the two curves in the neighbourhood of O are of the form (1) for C and

$$(51) \quad \begin{cases} x = \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \delta y^5 + (6), \\ z = \rho y^3 + \sigma y^4 + \tau y^5 + \varphi y^6 + (7) \end{cases}$$

for \bar{C} .

For every line t_n through O and in the plane (t, \bar{t}) there exist two planes, each of which passes through one of t and \bar{t} ; and corresponds to the tangent surface of the curve in the manner quoted in § 6. Denoting t_n by the equations (5), we obtain these plane s

$$(52) \quad \frac{r}{a} \eta + \left(\frac{1}{2} \frac{s}{r} - \frac{b}{a} - \frac{\alpha}{2n} \right) \zeta = 0,$$

$$(53) \quad \frac{\rho}{\alpha} \xi + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\rho} - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} n \right) \zeta = 0.$$

Especially when t_n coincides with \bar{t} the plane (52) becomes

$$(54) \quad \frac{r}{a} \eta + \left(\frac{1}{2} \frac{s}{r} - \frac{b}{a} \right) \zeta = 0.$$

Similarly, when t_n coincides with t there is obtained the plane

$$(55) \quad \frac{\rho}{\alpha} \xi + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\sigma} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \zeta = 0.$$

These planes intersect in the dual line of BOMPIANI⁽¹³⁾. Thus we have a new definition of this covariant line.

In general, the planes (52) and (53) corresponding to the same line t_n intersect in a line through \bar{O} , whose locus is a quadric cone of the equation

$$(56) \quad \left\{ \frac{\rho}{\alpha} \xi + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\sigma} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \zeta \right\} \left\{ \frac{r}{a} \eta + \left(\frac{1}{2} \frac{s}{r} - \frac{b}{a} \right) \zeta \right\} = \frac{1}{4} \alpha \alpha \zeta^2.$$

(13) Cfr. my paper: *Invariants . . .*, loc. cit., p. 24.

It shall be noted that the polar of the plane (t, \bar{t}) with respect to (56) is also the dual line of BOMPIANI.

Especially when the curves C and \bar{C} are the two asymptotic curves through a non-parabolic point O of a non-ruled non-degenerate surface S , then, using usual notations, we have the cone

$$(57) \quad \left(\xi + \frac{1}{4} \Psi \zeta \right) \left(\eta + \frac{1}{4} \Phi \zeta \right) = \frac{9}{16} \beta \gamma \zeta^2,$$

where β, γ are fundamental quantities of FUBINI and

$$(58) \quad \Phi = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad \Psi = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}.$$

This cone being covariant with respect to projective deformations was obtained by R. CALAPSO ⁽¹⁴⁾ and thus possesses a new definition. The above result gives further significances for the first edge of GREEN.

13. We proceed to establish certain further configurations projectively connected with the curves C and \bar{C} .

The projectivity between a plane $\bar{\omega}$ through t_n and the principal point O_2 of the section made by $\bar{\omega}$ suggests us to research what position on t_n the point O_2 should take in order that the corresponding planes with respect to the tangent surfaces of C and \bar{C} always coincide.

For a plane through t_n there are in general two points O_2 and \bar{O}_2 on t_n , each of which stands for the second principal point of the plane section of the tangent surface of each curve made by $\bar{\omega}$, so that the correspondence between O_2 and \bar{O}_2 is projective. Hence the position we have to determine must be one of the double points of this projectivity. O is evidently the double point, since the corresponding planes coincide with (t, \bar{t}) . It follows that there exists another point D on each line t_n and therefore one plane $\bar{\omega}$ through t_n satisfying the required condition-

For the purpose of calculating the coordinates of D we have merely to consider the principal point O_2 of the plane

$$(59) \quad \zeta + \lambda(\eta - n\xi) = 0$$

with respect to the curve C , for the principal point \bar{O}_2 of the same plane

⁽¹⁴⁾ R. CALAPSO, *Sugli enti proiettivi legati al generico punto di una superficie*, « Atti Acad. Gioenia », Catania, (5), 19 (1933), Mem. XIV, 1-6. I was not aware of the cone of Calapso until a paper of E. Bortolotti appeared. Cfr. ENEA BORTOLOTTI, *Quadriche di Moutard e fascio canonico*, « Rend. R. Accad. dei Lincei », (VI), 25 (1937), 158-165.

may easily be obtained by interchanging $a, b, c, d, \dots: r, s, t, \dots; n$ and λ with $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots; \rho, \sigma, \tau, \dots; \frac{1}{n}$ and $-\lambda n$ respectively.

From (19) and (20) we obtain

$$(60) \quad \begin{cases} \mathcal{A} = 2r, & \mathcal{B} = 3\left(s - 2\frac{br}{a} - \frac{ar}{n}\right), \\ \mathcal{C} = 21\frac{b^2r}{a^2} - 9\frac{cr}{a} + 15\frac{br}{n} + 3\frac{a^2r}{n^2} - 6\frac{r^2}{\lambda n} - 12\frac{bs}{a} - 8\frac{as}{n} + 4t. \end{cases}$$

Further substitution of these values in (23) gives

$$(61) \quad u = -9\frac{c}{a} + 4\frac{t}{r} - \frac{21s^2}{4r^2} + 9\frac{bs}{ar} + \left(\frac{5as}{2r} - 6b\right)\frac{1}{n} - \frac{9a^2}{4n^2} - 6\frac{r}{\lambda n}.$$

The coordinates of O_2 are consequently given by

$$(62) \quad \xi = -\frac{a}{nu}, \quad \eta = -\frac{a}{u}, \quad \zeta = 0.$$

In the same way we have that the coordinates of \bar{O}_2 are

$$(63) \quad \bar{\xi} = -\frac{\alpha}{\bar{u}}, \quad \bar{\eta} = -\frac{\alpha n}{\bar{u}}, \quad \bar{\zeta} = 0,$$

where

$$(64) \quad \bar{u} = -9\frac{\gamma}{\alpha} + 4\frac{\tau}{\rho} - \frac{21\sigma^2}{4\rho^2} + 9\frac{\beta\sigma}{\alpha\rho} + \left(\frac{5\alpha\sigma}{2\rho} - 6\beta\right)n - \frac{9}{4}\alpha^2n^2 + 6\frac{\rho}{\lambda}.$$

From (62) and (63) it follows that these points \bar{O}_2 and O_2 coincide each other when, and only when,

$$(65) \quad \alpha nu = \alpha \bar{u}.$$

This gives the value of λ :

$$(66) \quad \begin{aligned} 6(a\rho + \alpha r)\frac{1}{\lambda} &= \frac{9}{4}\alpha^2n^2 - \frac{9}{4}a^2\alpha\frac{1}{n} + \\ &+ \left\{ \alpha \left(-9\frac{c}{a} + 4\frac{t}{r} - \frac{21s^2}{4r^2} + 9\frac{bs}{ar} \right) - a \left(\frac{5\alpha\sigma}{2\rho} - 6\beta \right) \right\} n + \\ &+ \left\{ \alpha \left(9\frac{\gamma}{\alpha} - 4\frac{\tau}{\rho} + \frac{31\sigma^2}{4\rho^2} - 9\frac{\beta\sigma}{\alpha\rho} \right) + \alpha \left(\frac{5as}{2r} - 6b \right) \right\}. \end{aligned}$$

Substituting this in (61) and (62) we have that the coordinates of $O_2 \equiv \bar{O}_2 \equiv D$

are given by the equations

$$\begin{aligned} \frac{a\rho + \alpha r}{\eta} &= \frac{9}{4} a^2 \rho \frac{1}{n^2} - \frac{9}{4} \alpha^2 r n \\ &+ \rho \left(9 \frac{c}{a} - 4 \frac{t}{r} + \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} - 9 \frac{bs}{ar} \right) + r \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \sigma}{\rho} - 6\beta \right) \\ &- \left\{ r \left(9 \frac{\gamma}{\alpha} - 4 \frac{\tau}{\rho} + \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 9 \frac{\beta \sigma}{\alpha \rho} \right) + \rho \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha s}{r} - 6b \right) \right\} \frac{1}{n}, \\ \eta &= n\xi, \quad \zeta = 0. \end{aligned}$$

Therefore the locus of D is a nodal cubic in the plane (t, \bar{t}) :

$$(67) \quad \begin{aligned} (a\rho + \alpha r)\xi\eta - \frac{9}{4} a^2 \rho \xi^3 + \frac{9}{4} \alpha^2 r \eta^3 \\ + \left\{ r \left(9 \frac{\gamma}{\alpha} - 4 \frac{\tau}{\rho} + \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 9 \frac{\beta \sigma}{\alpha \rho} \right) + \rho \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha s}{r} - 6b \right) \right\} \xi^2 \eta \\ - \left\{ \rho \left(9 \frac{c}{a} - 4 \frac{t}{r} + \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} - 9 \frac{bs}{ar} \right) + r \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \sigma}{\rho} - 6\beta \right) \right\} \xi \eta^2 = 0, \end{aligned}$$

whence we obtain that three points of inflexion lie on the line of the equations $\zeta = 0$ and

$$(68) \quad \begin{aligned} \left\{ r \left(9 \frac{\gamma}{\alpha} - 4 \frac{\tau}{\rho} + \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 9 \frac{\beta \sigma}{\alpha \rho} \right) + \rho \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha s}{r} - 6b \right) \right\} \xi \\ - \left\{ \rho \left(9 \frac{c}{a} - 4 \frac{t}{r} + \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} - 9 \frac{bs}{ar} \right) + r \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \sigma}{\rho} - 6\beta \right) \right\} \eta \\ + a\rho + \alpha r = 0, \end{aligned}$$

a covariant line determined by the neighbourhoods of the 5th order of both the curves C and \bar{C} . The lines joining D and each inflexion are

$$(69) \quad a^2 \rho \xi^3 - \alpha^2 r \eta^3 = 0$$

and therefore apolar to the tangents t and \bar{t} .

If the corresponding plane $\bar{\omega}$ of D be denoted by the equation

$$(70) \quad u_1 \xi + u_2 \eta + u_3 \zeta = 0,$$

then we have

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= -6(a\rho + \alpha r)n, \\ u_2 &= 6(a\rho + \alpha r), \\ u_3 &= \frac{9}{4} a \alpha^2 n^2 - \frac{9}{4} \alpha a^2 \frac{1}{n} \\ &+ a \left(9 \frac{\gamma}{\alpha} - 4 \frac{\tau}{\rho} + \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 9 \frac{\beta \sigma}{\alpha \rho} \right) + a \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha s}{r} - 6b \right) \\ &- \left\{ a \left(9 \frac{c}{a} - 4 \frac{t}{r} + \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} - 9 \frac{bs}{ar} \right) + a \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \sigma}{\rho} - 6\beta \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

and therefore the envelope of $\bar{\omega}$ is a cone of the 3rd class:

$$(72) \quad \begin{aligned} & \frac{9}{4} a \alpha^2 u_1^3 + \frac{9}{4} \alpha a^2 u_2^3 - 6(a\rho + \alpha r)u_1 u_2 u_3 + \\ & + \left\{ \alpha \left(9 \frac{c}{a} - 4 \frac{t}{r} + \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} - 9 \frac{bs}{ar} \right) + a \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \sigma}{\rho} - 6\beta \right) \right\} u_1^2 u_2 + \\ & + \left\{ a \left(9 \frac{\gamma}{\alpha} - 4 \frac{\tau}{\rho} + \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 9 \frac{\beta \sigma}{\alpha \rho} \right) + \alpha \left(\frac{5}{2} \frac{as}{r} - 6b \right) \right\} u_1 u_2^2 = 0. \end{aligned}$$

This cone, being determined also by the neighbourhoods of the 5th order of C and \bar{C} , has three cuspidal tangent planes, which are concurrent in the line

$$(73) \quad \begin{aligned} & \xi : \eta : \zeta = \\ & = \left\{ \alpha \left(9 \frac{c}{a} - 4 \frac{t}{r} + \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} - 9 \frac{bs}{ar} \right) + a \left(\frac{5}{2} \frac{\alpha \sigma}{\rho} - 6\beta \right) \right\} \\ & : \left\{ a \left(9 \frac{\gamma}{\alpha} - 4 \frac{\tau}{\rho} + \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 9 \frac{\beta \sigma}{\alpha \rho} \right) + \alpha \left(\frac{5}{2} \frac{as}{r} - 6b \right) \right\} \\ & : - 6(a\rho + \alpha r). \end{aligned}$$

14. Having thus obtained several remarkable configurations, we shall now apply them to the interesting case where C and \bar{C} are asymptotic curves of a surface and then derive certain new elements projectively associated at a generic point O of the surface.

Setting, as usual, $\theta = \log \beta \gamma$ and

$$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta_u^2 - 2p_{11} - \beta \theta_v - \beta_v,$$

$$M = \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta_v^2 - 2p_{22} - \gamma \theta_u - \gamma_u,$$

the nodal cubic (67) in case is given by

$$(74) \quad \begin{aligned} & \frac{45}{4} \beta \gamma (\beta \xi^3 - \gamma \eta^3) - 20 \beta \gamma \xi \eta \\ & + 3\gamma \left\{ -2L + 5\theta_u (\log \gamma)_u + \frac{\beta_{uu}}{\beta} - \frac{5}{4} \Phi^2 + \frac{25}{6} \beta \Psi \right\} \xi \eta^2 \\ & - 3\beta \left\{ -2M + 5\theta_v (\log \beta)_v + \frac{\gamma_{vv}}{\gamma} - \frac{5}{4} \Psi^2 + \frac{25}{6} \gamma \Phi \right\} \xi^2 \eta = 0. \end{aligned}$$

Therefore the three points of inflexion are the intersections of the tangents of

SEGRE and the covariant line:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = 0, \\ 3\beta \left\{ -2M + 5\theta_v (\log \beta)_v + \frac{\gamma_{vv}}{\gamma} - \frac{5}{4} \Psi^2 + \frac{25}{6} \gamma \Phi \right\} \xi \\ -3\gamma \left\{ -2L + 5\theta_u (\log \gamma)_u + \frac{\beta_{uu}}{\beta} - \frac{5}{4} \Phi^2 + \frac{25}{6} \beta \Psi \right\} \eta + 20\beta\gamma = 0. \end{array} \right.$$

In the same way we obtain a cone of the 3rd class, namely,

$$(76) \quad \begin{aligned} & \frac{45}{4} \beta\gamma(\gamma u_1^3 + \beta u_2^3) - 40\beta\gamma u_1 u_2 u_3 \\ & + 3\beta \left\{ -2M + 5\theta_v (\log \beta)_v + \frac{\gamma_{vv}}{\gamma} - \frac{5}{4} \Psi^2 + \frac{25}{6} \gamma \Phi \right\} u_1 u_2^2 \\ & + 3\gamma \left\{ -2L + 5\theta_u (\log \gamma)_u + \frac{\beta_{uu}}{\beta} - \frac{5}{4} \Phi^2 + \frac{25}{6} \beta \Psi \right\} u_1^2 u_2 = 0. \end{aligned}$$

The three cuspidal tangent planes are concurrent in the covariant line

$$(77) \quad \begin{aligned} \xi : \eta : \zeta = & 3\gamma \left\{ -2L + 5\theta_u (\log \gamma)_u + \frac{\beta_{uu}}{\beta} - \frac{5}{4} \Phi^2 + \frac{25}{6} \beta \Psi \right\} \\ & : 3\beta \left\{ -2M + 5\theta_v (\log \beta)_v + \frac{\gamma_{vv}}{\gamma} - \frac{5}{4} \Psi^2 + \frac{25}{6} \gamma \Phi \right\} \\ & : -40\beta\gamma \end{aligned}$$

and each of them intersects the tangent plane of the surface in one tangent of SEGRE.

15. We shall conclude this paper with a remark on the elements determined by the neighbourhoods of the 6th order of both curves C and \bar{C} . As was shown before, there are two quadrics, each of them being constructed with respect to each curve and to the same line t_n in the plane (t, \bar{t}) . These quadrics intersect in t_n and a twisted cubic so that there is such a twisted cubic corresponding to t_n . It is easily seen that this element may be found by using the value of u given by (61) and that of v derived from (19), (20) and (23):

$$(78) \quad \begin{aligned} v = & 9 \frac{bc}{a^2 r} - 6 \frac{d}{ar} - 9 \frac{b^2 s}{a^2 r^2} + \frac{9 cs}{2 a r^2} + 2 \frac{bt}{ar^2} + \frac{5u}{2 r^2} + \\ & + \frac{23 s^3}{8 r^4} + \frac{3 bs^2}{4 ar^3} - 6 \frac{st}{r^3} + \frac{1}{n} \left(3 \frac{c}{r} + 6 \frac{b^2}{ar} - 9 \frac{bs}{r^2} - \frac{3 at}{2 r^2} + \frac{27 as^2}{8 r^3} \right) + \\ & + \frac{1}{n^2} \left(\frac{15 ab}{4 r} - \frac{15 a^2 s}{8 r^2} \right) + \frac{5 a^3}{8 r n^3} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{3 a}{2 n^2} - \left(21 \frac{b}{a} + \frac{7 s}{2 r} \right) \frac{1}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Without expressing the equations of these quadrics we merely note that one constructed by means of C and t is given by

$$(79) \quad \zeta \left\{ \left(-9 \frac{c}{a} + 4 \frac{t}{r} - \frac{21}{4} \frac{s^2}{r^2} + 9 \frac{bs}{ar} \right) \eta \right. \\ \left. + \left(9 \frac{bc}{ar} - 6 \frac{d}{r} - 9 \frac{b^2s}{ar^2} + \frac{9cs}{2r^2} + 2 \frac{bt}{r^2} + \frac{5au}{2r^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{23}{8} \frac{s^3}{r^4} + \frac{3}{4} \frac{bs^2}{r^3} - 6 \frac{ast}{r^3} \right) \zeta + a \right\} \\ - \xi \left\{ 6r\eta + \left(21 \frac{b}{a} + \frac{7s}{2r} \right) \zeta \right\} = 0.$$

In the same way we obtain another quadric for \bar{C} and t :

$$(80) \quad \zeta \left\{ \left(-9 \frac{\gamma}{\alpha} + 4 \frac{\tau}{\rho} - \frac{21}{4} \frac{\sigma^2}{\rho^2} + 9 \frac{\beta\sigma}{\alpha\rho} \right) \xi \right. \\ \left. + \left(9 \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} - 6 \frac{\delta}{\rho} - 9 \frac{\beta^2\sigma}{\alpha\rho^2} + \frac{9\gamma\sigma}{2\rho^2} + 2 \frac{\beta\tau}{\rho^2} + \frac{5\alpha\varphi}{2\rho^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{23}{8} \frac{\sigma^3}{\rho^4} + \frac{3}{4} \frac{\beta\rho^2}{\rho^3} - 6 \frac{\alpha\sigma\tau}{\rho^3} \right) \zeta + \alpha \right\} \\ - \eta \left\{ 6\rho\xi + \left(21 \frac{\beta}{\alpha} + \frac{7\sigma}{2\rho} \right) \zeta \right\} = 0.$$

It follows that these quadrics intersect in t , \bar{t} and a conic, whose plane passes through O when, and only when

$$(81) \quad a\rho - \alpha r = 0.$$

In the case of two asymptotic curves of a surface the last condition is evident, so that we are led to a conic through O projectively connected to the surface at O .

Note on the Projective Differential Geometry of Space Curves.

By TE-CHIH FON (Taiho, Kiangsi, China).

G. SANNIA has established ⁽¹⁾ the projective theory of space curves by introducing a set of tetrahedrons, especially the fundamental tetrahedron F associated to a point of a curve, and has given a certain geometrical construction for F . It seems of some interest to simplify the construction of SANNIA by other auxiliary figures covariantly connected to the curve.

In a recent paper Prof. BUCHIN SU ⁽²⁾ has reconstructed the theory by a purely geometrical method and has obtained among other things that the projective invariants of a curve can simply be expressed by certain double ratios.

The purpose of the present paper is to give a certain geometrical construction for the fundamental tetrahedron of SANNIA and to express the projective invariants in terms of double ratios alone. The covariant figure which we have utilized to establish the theory is a quadric determined by three consecutive projective principal normals at a point of the curve. We will call these quadrics *the projective principal quadrics of the curve*.

1. Let $P(x)$, $P_t(t)$, $P_n(n)$, $P_b(b)$ be the vertices of the fundamental tetrahedron F of SANNIA so that the edges PP_n , PP_b are the projective principal normal and the projective binormal respectively and the faces $[PP_tP_b]$, $[PP_nP_b]$ are the projective rectifying plane and the projective normal plane respectively; the projective FRENET-SERRET formulae established by SANNIA take on the form ⁽³⁾

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = t, \\ t' = n - 5Ix, \\ n' = (5I' - 2\theta_3)x + b, \\ b' = (25I^2 - K)x - (5I' + 2\theta_3)t - 5In \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ G. SANNIA, *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe*, Memoria 1^a, « Annali di Mat. », (IV), 1 (1924), 1-18; Memoria 2^a, « ibid. », 3 (1926), 1-25.

⁽²⁾ B. SU, *Note on the projective differential geometry of space curves*, « Journal Chinese Math. Soc. », 2 (1937), 98-137.

⁽³⁾ Cfr. SANNIA, loc. cit..

with the condition

$$(2) \quad (x \ t \ n \ b) = 1,$$

where $K = J + 3I'' + 9I^2$; $\theta_3 = 0$ or $= 1$ according as the tangents of the curve belong to a linear complex or not; the dash represents the derivative with respect to the projective arc σ ; I and J denote respectively the first and the second projective curvatures of SANNIA.

Consider the ruled surface generated by the projective principal normals of C :

$$(3) \quad \bar{x} = x + wn,$$

where σ and w are independent parameters. The asymptotic curves of this surface consist of the projective principal normals and the integral curves of the following differential equation,

$$(4) \quad Ld\sigma + 2Mdw = 0,$$

where we have placed

$$L = (\bar{x}_{\sigma\sigma} \ \bar{x} \ \bar{x}_\sigma \ \bar{x}_n), \quad M = (\bar{x}_{\sigma w} \ \bar{x} \ \bar{x}_\sigma \ \bar{x}_n).$$

Differentiating (3) and using (1) and (2), we obtain

$$\bar{x}_\sigma = w(5I' - 2\theta_3)x + t + nb,$$

$$\bar{x}_w = n,$$

$$\bar{x}_{\sigma w} = (5I' - 2\theta_3)x + b,$$

$$\bar{x}_{\sigma\sigma} = (*)x - 4\theta_3wt + (*)n,$$

so that

$$L = -4\theta_3w, \quad M = -1.$$

Consequently, (4) becomes

$$(5) \quad \frac{dw}{d\sigma} = -2\theta_3w^2.$$

The coordinates of a point on the tangent drawn from (x) to the curved asymptotic line are

$$(6) \quad \bar{x} + \lambda \frac{d\bar{x}}{d\sigma},$$

λ being another parameter.

From (3) and (5) we have

$$\frac{d\bar{x}}{d\sigma} = w(5I' - 2\theta_3)x + t - 2\theta_3w^2n + wb.$$

Hence (6) becomes

$$(7) \quad \{ 1 + \lambda w(5I' - 2\theta_3) \} x + \lambda t + (w - 2\theta_3\lambda w^2)n + \lambda wb.$$

If we express the projective homogeneous coordinates of any point $M(Y)$ in space by the form

$$(8) \quad Y = y_1x + y_2t + y_3n + y_4b,$$

where y_1, y_2, y_3, y_4 denote the local coordinates of M with respect to the fundamental tetrahedron $F\{PP_tP_nP_b\}$ with the unit point $(x + t + n + b)$, then the parametric equations of the projective principal quadric Q are

$$\begin{aligned} ry_1 &= 1 + \lambda v(5I' - 2\theta_3), \\ ry_2 &= \lambda, \\ ry_3 &= v - 2\lambda\theta_3v^2, \\ ry_4 &= \lambda v, \end{aligned}$$

where r is a factor of proportionality. Elimination of r, λ, v gives the equation to Q :

$$(9) \quad y_2y_3 - y_1y_4 + 5I'y_4^2 = 0.$$

It is easily seen that *the osculating plane $y_4 = 0$, the projective normal plane $y_2 = 0$ and the projective rectifying plane $y_3 = 0$ touch the quadric Q at the point $P(1, 0, 0, 0)$, $P_n(0, 0, 1, 0)$ and $P_t(0, 1, 0, 0)$ respectively.*

Thus we arrive at the

THEOREM. *The edges P_nP_t and PP_b are conjugate lines with respect to the projective principal quadric.*

2. Let (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) denote the local coordinates of any point $M(Z)$ with respect to the osculating tetrahedron O of the curve at a point P . Then the relations between (y_1, y_2, y_3, y_4) and (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) are as follows:

$$(10) \quad \begin{cases} Z_1 = y_1 + 2Iy_3 + \left(\frac{2}{5}\theta_3 - 3I'\right)y_4, \\ Z_2 = y_2 - 2Iy_4, \\ Z_3 = 2y_3, \\ Z_4 = 6y_4. \end{cases}$$

The equation of the quadric Q with respect to O now takes on the form

$$(11) \quad 2IZ_3Z_4 + 3Z_2Z_3 - Z_1Z_4 + \frac{1}{3}\left(I' + \frac{1}{5}\theta_3\right)Z_4^2 = 0.$$

On the other hand, the parametric equations of the osculating cubic C_3 of the curve C at the point P are

$$(12) \quad Z_1 = m^3, \quad Z_2 = m^2, \quad Z_3 = m, \quad Z_4 = 1.$$

Substituting (12) in the equation (11), we have

$$(13) \quad 2m^3 + 2Im + \frac{1}{3}\left(I' + \frac{1}{5}\theta_3\right) = 0.$$

Let m_1, m_2, m_3 be the roots of (13), then the three points $M_1(m_1), M_2(m_2), M_3(m_3)$ as well as P are the points of intersection of C_3 and Q . In virtue of the relations between m_1, m_2, m_3 , namely,

$$(14) \quad m_1 + m_2 + m_3 = 0, \quad m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 = I, \quad m_1m_2m_3 = -\left(\frac{I'}{6} + \frac{\theta_3}{30}\right),$$

we can express the plane π through M_1, M_2, M_3 by the equation

$$(15) \quad Z_1 + IZ_3 + \left(\frac{I'}{6} + \frac{\theta_3}{30}\right)Z_4 = 0,$$

or

$$(16) \quad y_1 + 4Iy_4 + \left(\frac{3}{5}\theta_3 - 2I'\right)y_4 = 0.$$

Therefore the plane π intersects PF_t and PP_n at P_t and $P_\pi(-4I, 0, 1, 0)$ respectively. Moreover, we have that the line PP_n intersects the osculating conic of the curve in the point $P'_n(-2I, 0, 1, 0)$ so that

$$(17) \quad (PP'_n, P_\pi P_n) = -1.$$

Thus the vertex P_n of the fundamental tetrahedron F is completely determined.

In the next place we shall determine the fourth vertex P_b .

From (14) it may easily be seen that *the three osculating planes of the cubic C_3 at M_1, M_2, M_3 meet at a point G on the projective rectifying plane.*

The line PP_b intersects the quadric Q at the point P and

$$(18) \quad M(5I', 0, 0, 1).$$

From (1) we have that the tangent of the locus of P_n meets the line PP_b at the point

$$(19) \quad N(5I' - 2\theta_3, 0, 0, 1)$$

and that the plane (16) intersects the line PP_b at the point

$$(20) \quad H\left(2I' - \frac{3\theta_3}{5}, 0, 0, 1\right).$$

From (18), (19) and (20) it follows that the double ratios of the four

points, $P, M, H, N; P, M_1, P_b, N$ are

$$(21) \quad D \equiv (PM, HN) = \frac{2\theta_3}{3I' + \frac{3\theta_3}{5}};$$

$$(22) \quad D_1 \equiv (PM, P_bN) = \frac{2\theta_3}{5I'}.$$

In virtue of (21) and (22) we can determine the vertex P_b such that

$$(23) \quad 3(PM, HN) \{ 2 + (PM, P_bN) \} = 10(PM, P_bN).$$

Hence the fundamental tetrahedron F is thus determined geometrically.

3. We come now to express the projective curvatures I and J in terms of certain double ratios.

For this purpose we observe that the plane (16) meet the line P_nP_b at the point $A \left(0, 0, 1, -\frac{20I}{3\theta_3 - 10I'} \right)$, and, therefore, that the equation of the plane π_A through A and the tangent PP_t is

$$(24) \quad y_3 + \frac{3\theta_3 - 10I'}{20I} y_4 = 0.$$

On the other hand the principal plane π_3 of the curve C and C_3 at the point P is

$$(25) \quad y_3 - \frac{5I}{4\theta_3} y_4 = 0.$$

The double ratio of the projective rectifying plane π_1 , the osculating plane π_2 , the principal plane π_3 , and the plane π_A is equal to

$$(26) \quad D_2 \equiv (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_A) = \frac{25IJ}{10I'\theta_3 - 3\theta_3^2}.$$

We have to find another simple relation between I and J .

It is well known that any seven-point quadric of C at a point always passes through the eighth fixed point S , namely, the point of SANNIA. The local coordinates of S with respect to the osculating tetrahedron O is

$$S \left(m^3 - \frac{1}{l^3}, m^2, m, 1 \right)$$

where

$$l^3 = \frac{15}{\theta_3}, \quad m = \frac{5J}{12\theta_3}.$$

The transformation (10) suffices to show that the coordinates of S with regard to F is

$$S(y_1, 6m^2 + 2I, 3m, 1).$$

Therefore the equation of the plane $\pi_S \equiv [S, PP_n]$ is

$$y_2 - (6m^2 + 2I)y_4 = 0.$$

The latter touches the quadric Q at the point

$$(27) \quad S' \left(\frac{25J^2}{24\theta_3^2} + 2I, 0, 1, 0 \right).$$

Whence we obtain the double ratio of the four points P_n, P, P_n', S' :

$$D_3 \equiv (P_n P, S' P_n') = -1 - \frac{25J^2}{48\theta_3^2 I},$$

or

$$(28) \quad D_3 + 1 = -\frac{25J^2}{48\theta_3^2 I}.$$

In virtue of (22), (26) and (28) we obtain finally I and J in terms of these double ratios:

$$I^3 = -\frac{\theta_3^2 D_2^2 (4 - 3D_1)}{1200 D_1^2 (D_3 + 1)}, \quad J^3 = \frac{48\theta_3^4 D_2 (3D_1 - 4)(D_3 + 1)}{625 D_1}, \quad (\theta_3 = 1).$$

4. Let us now interpret the curvature form $Id\sigma^2$ of the curve C .

For this purpose we take the point $T(x(\sigma + d\sigma))$ infinitely near $P(x(\sigma))$; then the coordinates of any point on the tangent of C at T are

$$(30) \quad \rho x(\sigma + d\sigma) + x'(\sigma + d\sigma),$$

ρ being a parameter. In virtue of the TAYLOR expansions and the formulae (1) these coordinates take the form

$$(31) \quad y_1 x + y_2 t + y_3 n + y_4 b,$$

where

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \rho \left\{ 1 - \frac{5}{2} Id\sigma^2 + (3) \right\} + \left\{ -5Id\sigma + (2) \right\}, \\ y_2 = \rho \left\{ d\sigma - \frac{5}{6} Id\sigma^3 + (4) \right\} + \left\{ 1 - \frac{5}{2} Id\sigma^2 + (3) \right\}, \\ y_3 = \rho d\sigma^3 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{5}{12} Id\sigma^2 + (3) \right\} + d\sigma \left\{ 1 - \frac{5}{3} Id\sigma^2 + (3) \right\}, \\ y_4 = \rho \left\{ \frac{1}{6} d\sigma^3 - \frac{1}{12} Id\sigma^5 + (6) \right\} + \left\{ \frac{1}{2} d\sigma^2 - \frac{5}{11} Id\sigma^4 + (5) \right\}. \end{array} \right.$$

Any line l in space meets the faces $[P_t P_n P_b]$, $[PP_n P_b]$, $[PP_t P_b]$, $[PP_t P_n]$ of the tetrahedron F in the points P_1, P_2, P_3, P_4 respectively. Then by the theorem of von Staudt the double ratio $(P_1 P_2, P_3 P_4)$ is equal to the double ratio of the planes $[lP]$, $[lP_t]$, $[lP_n]$, $[lP_b]$ and will be called the *von Staudt's double ratio* of the line l with respect to the tetrahedron F ⁽⁴⁾.

Hence the von Staudt's double ratio of the tangent of C at T with respect to the tetrahedron F is given by

$$(33) \quad \Delta \equiv (\rho_1 \rho_2, \rho_3 \rho_4)$$

where ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) are determined by the equations

$$(34) \quad y_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

namely,

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = 5Id\sigma^2 + (2), \\ \rho_2 = -\frac{1}{d\sigma} \left(1 - \frac{5}{3} Id\sigma^2 \right) + (2), \\ \rho_3 = -\frac{2}{d\sigma} \left(1 - \frac{5}{6} Id\sigma^2 \right) + (2), \\ \rho_4 = -\frac{1}{d\sigma} (3 - Id\sigma^2) + (2). \end{array} \right.$$

Substituting (35) in (33) we obtain

$$\Delta \equiv \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_4} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_4}{\rho_2 - \rho_3} = \frac{4}{3} \left\{ 1 + \frac{2}{3} Id\sigma^2 + (3) \right\},$$

or

$$(36) \quad \frac{9}{8} \Delta - \frac{3}{2} = Id\sigma^2 + (3).$$

Thus we obtain the following

THEOREM. *Let Δ be the von Staudt's double ratio of the tangent of C at T infinitely near P with respect to the fundamental tetrahedron F . Then the principal part of the infinitesimal $\frac{9}{8} \Delta - \frac{3}{2}$ is the curvature form*

$$Id\sigma^2.$$

5. Let us now confine ourselves to consider the intersection of two consecutive projective principal quadrics.

⁽⁴⁾ After the nomination of Prof. B. SU, loc. cit., p. 122.

From (8) and (1) we can easily find the conditions of immovability:

$$\frac{dy_1}{d\sigma} = 5Iy_2 - (5I' - 2\theta_3)y_3 - (25I^2 - K)y_4,$$

$$\frac{dy_2}{d\sigma} = -y_1 + (5I' + 2\theta_3)y_4,$$

$$\frac{dy_3}{d\sigma} = -y_2 + 5Iy_4,$$

$$\frac{dy_4}{d\sigma} = -y_3.$$

Therefore the curve of intersection of two consecutive projective principal quadrics is given by (9) and

$$(38) \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = (5I'' + 25I^2 - K)y_1^2 - y_2^2 = 0.$$

Denoting by ρ_1, ρ_2 the roots of the equation

$$(39) \quad (5I'' + 25I^2 - K)\rho^2 - 1 = 0,$$

so that $\rho_1 = -\rho_2$, we infer that the curve of intersection of Q and its consecutive consists of four straight lines, namely, the projective principal normal, counted twice, and the lines

$$l_1: \quad \rho_1 y_2 = \frac{y_3 - y_1 \rho_1}{5I' \rho_1} y_4,$$

$$l_2: \quad \rho_2 y_2 = \frac{y_3 - y_1 \rho_2}{5I' \rho_2} y_4.$$

These lines intersect the projective principal normal at the point $F_1(1, 0, \rho_1, 0)$ and the point $F_2(1, 0, \rho_2, 0)$, such that

$$(40) \quad (PP_n, F_1 F_2) = -1.$$

Thus we arrive at the

THEOREM. — *The characteristic curve of the projective principal quadrics at P consists of the projective normal at P and two other lines. The latter two intersect the former at the points F_1 and F_2 , such that*

$$(PP_n, F_1 F_2) = -1.$$

In other words: *The vertex P_n of the fundamental tetrahedron F at P of a curve C is the harmonic conjugate of P with respect to the flecnodes on the generator PP_n of the ruled surface generated by the projective principal normals.*

This theorem gives us another geometrical construction of the vertex P_n .

The equation of the tangent plane to Q at the point $(a, b, 0, 0)$ on the tangent PP_t of C is

$$(41) \quad 3bz_3 - az_4 = 0.$$

From this and the null system of the osculating linear complex of the curve C

$$(42) \quad \xi_1 = z_4, \quad \xi_2 = -3z_3, \quad \xi_3 = 3z_2, \quad \xi_4 = -z_1,$$

we have the

THEOREM. — *The tangent plane of the quadric Q at a point on the tangent of C is the null plane of the point with respect to the osculating linear complex of C .*

From (15) we further have that *the null point of the plane π lies on the projective rectifying plane.*

6. Since the osculating plane to the curve at the point P touches the projective principal quadric, we are led to the consideration of the pencil of quadrics

$$(43) \quad \theta_\lambda \equiv y_2y_3 - y_1y_4 + 5(I' + \lambda)y_4^2 = 0.$$

When λ is fixed, the curve of intersection of Q with its consecutive may be represented by the equations

$$(44) \quad \begin{aligned} y_2y_3 - y_1y_4 + 5(I' + \lambda)y_4^2 &= 0, \\ (5I'' + 25I'^2 - K)y_4^2 - y_2^2 - 10\lambda y_3y_4 &= 0. \end{aligned}$$

The latter equation represents a cone, C_λ , of the second order on which the curve of intersection K_λ lies. The cone C_λ is decomposed into two planes when and only when $\lambda = 0$, or in other words:

THEOREM. — *The cone C_λ is decomposed into two planes when and only when the quadric is a projective principal quadric ⁽⁵⁾.*

If the parameter λ be now regarded as a variable, then all the curves K_λ lie on the cubic surface

$$(45) \quad S_3 \equiv 2y_2y_3^2 - 2y_1y_3y_4 + 10I'y_3y_4^2 + (5I'' + 25I'^2 - K)y_4^3 - y_2^2y_4 = 0.$$

The osculating plane $y_4 = 0$ touches S_3 at the tangent of the curve and further intersect S_3 at the projective principal normal. The equation of the

⁽⁵⁾ This property is analogous to the one concerning the pencil of DARBOUX. Cfr. E. BOMPIANI: *Fascio di quadriche di Darboux e normale proiettiva in un punto di una superficie*, « Rend. Acc. Lincei », (VI), 6 (1927) 187-190.

tangent plane to S_3 at the point $(a, 0, b, 0)$ is

$$(46) \quad by_2 - ay_4 = 0,$$

which also touches the projective principal quadric Q at the point $(a, 0, b, 0)$. Therefore we obtain the

THEOREM. — *The cubic surfaces S_3 touches the projective principal quadric along the projective principal normal.*

7. We shall conclude this paper with a characteristic property of the curve whose first projective curvature is constant. In virtue of the equation (9) follows immediately the

THEOREM. — *If the fundamental tetrahedron F at any point of a space curve is inscribed in the corresponding projective principal quadric, then the first projective curvature of the curve must necessarily be constant and vice-versa.*

Sopra un complemento all'equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente (1).

Memoria di FABIO CONFORTO (a Roma).

Sunto. - Si stabilisce un'equazione dei tre momenti per una trave continua nella quale ogni campata è a flessiorigidezza EI variabile linearmente, è compressa o tesa da un carico costante, è inflessa da un carico costante e da un numero qualunque di carichi concentrati, comunque distribuiti. Si dimostra che il calcolo numerico dei coefficienti della nuova equazione dei tre momenti può eseguirsi con gli stessi calcoli necessari per il calcolo dei coefficienti, nell'ipotesi in cui manchino i carichi concentrati: in quest'ultima ipotesi le tabelle numeriche sono in corso di stampa in altro lavoro.

Introduzione e posizione del problema.

Or son poco più di vent'anni i tecnici e gli studiosi di Costruzioni Aeronautiche, si imbattono nell'interessante problema delle travi continue inflesse e sollecitate assialmente. A questo problema portava il calcolo delle « filagne » di dirigibili rigidi e dei longaroni di aeroplani di vario tipo: invero un longarone è un organo destinato a funzionare nel suo insieme come una trave continua inflessa, mentre le singole sue campate funzionano come aste di una travatura reticolare e quindi sono sollecitate assialmente.

Una delle soluzioni del problema soprannominato è rappresentata dall'equazione dei tre momenti di G. ALBENGA (2), il quale generalizzò al nostro caso la classica equazione dei tre momenti di CLAPEYRON, ben nota nell'ordinaria Scienza delle Costruzioni.

L'equazione dei tre momenti di ALBENGA si applica ad una trave continua, composta di un numero qualunque di campate, separate da appoggi, supponendo che in ogni campata siano costanti il carico flettente p , il carico assiale P e la flessiorigidezza EI . Essa permette di scrivere un certo numero

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Cfr. G. ALBENGA: *Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente*; « R. Acc. delle Scienze di Torino », voll. 51, 52 (1916); ristampata nel « Bollettino Tecnico » n. 12 della Direzione Sperimentale dell'Aviazione, Montecelio, febbraio 1920, con l'aggiunta di abachi, per il pratico impiego, compilati dall'ing. I. PERSEGANI.

di equazioni lineari, ciascuna delle quali lega tra loro i momenti su tre appoggi consecutivi; e queste equazioni, con l'aggiunta delle condizioni alle estremità della trave, permettono il calcolo dei momenti su tutti gli appoggi.

Ora l'ipotesi della costanza di p , P ed EI si può ammettere anche se qualcuna di queste grandezze non vari molto. Inoltre va osservato che dal lato pratico aeronautico ha poco interesse di considerare una variazione di p o di P . Ciò che invece, proprio nelle Costruzioni Aeronautiche, varia in modo talvolta imponente e quindi *non trascurabile* è il prodotto EI . Sorse così la questione di generalizzare l'equazione dei tre momenti di ALBENGA al caso in cui il prodotto EI è variabile. Un primo passo in questo senso fu compiuto da C. MINELLI⁽¹⁾, il quale, considerando il caso di EI variabile *linearmente*, pervenne ad un'equazione dei tre momenti, generalizzazione di quella di ALBENGA, alla quale daremo nel seguito, per brevità, il nome di *equazione ALBENGA-MINELLI*.

Dal punto di vista pratico l'equazione di ALBENGA-MINELLI è certamente più complicata di quella d'ALBENGA, giacchè i suoi coefficienti dipendono da funzioni di BESSEL, cioè da funzioni di più difficile maneggio delle funzioni trigonometriche circolari od iperboliche, che invece intervengono in quella di ALBENGA. Occorre dunque, per rendere pratico l'uso della nuova equazione, la compilazione di opportune *tavole numeriche*, per le quali il MINELLI richiese l'intervento dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Così fummo tratti ad occuparci della questione L. CESARI ed io stesso⁽²⁾; noi riuscimmo tra l'altro a semplificare notevolmente l'espressione letterale dei coefficienti data dal MINELLI scrivendo l'equazione ALBENGA-MINELLI in una forma al tempo stesso elegante e compatta dal lato matematico ed accessibile dal lato numerico. Successivamente l'Istituto passò alla compilazione effettiva delle tavole numeriche; ciò costò un duro lavoro di calcolo numerico, durante il quale si incontrarono delle notevoli difficoltà sia dal lato concettuale che pratico. Ciononostante la cosa fu condotta in fondo ed ora è in corso di pubblicazione un ampio lavoro, il quale riassume, completa e sistema tutta la ricerca in ogni suo particolare, rendendo possibile nel modo più semplice, mediante le tavole numeriche, la sollecita scrittura dell'equazione ALBENGA-MINELLI in qualunque caso pratico.

(1) Cfr. C. MINELLI: *Trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidità variabile linearmente lungo ogni campata*; « Rend. R. Acc. dei Lincei », serie VI, vol. 29, 1936 (pp. 115-124).

(2) Cfr. L. CESARI ed F. CONFORTO: *Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidità variabile linearmente lungo ogni campata*; « Rend. R. Acc. dei Lincei », Nota I e II, s. VI, vol. 29, 1936 (pp. 273-277 e 354-357).

Fu durante la redazione dell'anzidetto lavoro in corso di stampa che io intravidi come si potesse pervenire ad una semplice ed elegante equazione dei tre momenti supponendo che oltre al carico flettente uniformemente distribuito p , ogni campata della trave continua fosse inflessa altresì da *un numero qualunque di carichi concentrati*. Riprendendo più recentemente la questione ho potuto non solamente dare una forma semplicissima ai coefficienti di questa equazione dei tre momenti ALBENGA-MINELLI generalizzata, ma altresì provare che per rendere l'equazione utilizzabile nella pratica *non occorrono ulteriori calcoli numerici* oltre a quelli già eseguiti dall'Istituto per il caso di assenza di carichi concentrati. Poichè d'altra parte la questione può presentare, a quanto sembra, interesse dal lato tecnico, mi sono deciso a pubblicare la mia ricerca. Così ha avuto origine questo lavoro nel quale dunque:

a) si stabilisce un'equazione dei tre momenti per una trave continua, per la quale ogni campata:

1) è dotata di flessiorigidezza variabile linearmente;

2) è sollecitata assialmente da un carico costante P ;

3) è inflessa da un carico uniformemente distribuito p ;

4) è inflessa da un numero qualunque di carichi concentrati Q_i in posizione qualunque;

b) si dimostra che i coefficienti di questa equazione sono sostanzialmente già calcolati, il loro calcolo non importando nuove difficoltà rispetto al calcolo dei coefficienti dell'equazione ALBENGA-MINELLI nell'ipotesi in cui manchino i carichi concentrati.

Il lavoro è diviso in tre parti. Le prime due si riferiscono alla questione a), l'ultima alla questione b). Precisamente nella parte prima si studia, nelle nostre ipotesi, la linea elastica di una campata; nella parte seconda si calcolano in particolare le inclinazioni della linea elastica alle estremità della campata. Questo calcolo sarebbe laboriosissimo, se non si procedesse opportunamente, in modo da non smarrirsi nel calcolo letterale. Invece, come il lettore potrà giudicare, il risultato finale può essere messo in una forma notevolmente semplice. Nella parte terza si perviene anzitutto all'enunciata equazione dei tre momenti, imponendo che due campate consecutive abbiano la stessa inclinazione nell'appoggio comune. Indi si chiarisce la questione b); ed a questo scopo si dimostrano analiticamente alcune proprietà di una certa equazione trascendente, che si è già presentata nella pubblicazione in corso di stampa dianzi citata; ma ivi le proprietà di cui si discorre rimanevano acquisite soltanto empiricamente, attraverso il calcolo numerico diretto.

PARTE PRIMA

1. **Equazione differenziale della linea elastica in una campata.** — Consideriamo una campata qualunque della trave continua. Supponendola, per fissare le idee, orizzontale quando essa sia scarica e senza dislivelli, immaginiamo che nell'estremo destro (d) nulla sia alterato, mentre all'estremo sinistro (s) sia eseguito un taglio, applicando poi alla sezione libera le forze interne esistenti prima del taglio, e cioè: un momento flettente M_s , una forza tagliante R_s , uno sforzo assiale di compressione o di trazione, d'intensità *sempre positiva* P .

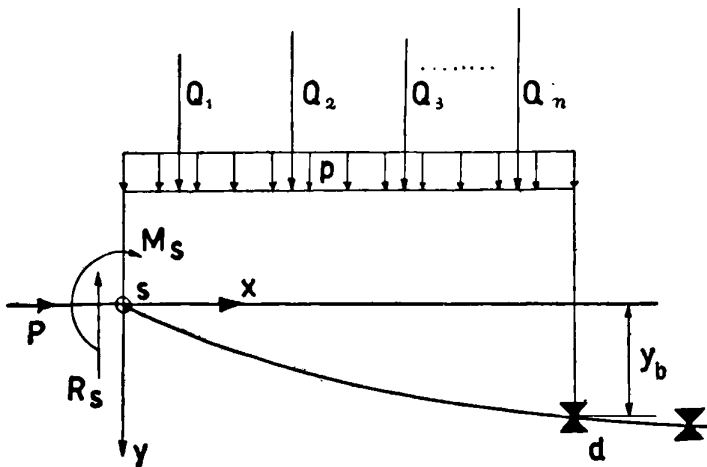


Fig. 1

Assumiamo, in accordo con le ricerche precedenti dianzi citate, le notazioni compendiate nelle figg. 1 e 2, delle quali la prima si riferisce ad una campata compressa e la seconda ad una campata tesa. Precisamente: il carico flettente uniformemente distribuito p e i carichi concentrati sono positivi se diretti verso il basso, il momento flettente è positivo se tale da comprimere le fibre superiori e tendere le inferiori, lo sforzo tagliante è positivo se tale da far crescere il momento nel senso positivo dell'asse x . L'asse x si suppone orizzontale e si orienta da sinistra a destra, con l'origine nell'estremo sinistro, parallelamente al primitivo asse della campata (cioè all'asse della campata scarica e priva di dislivelli); lo sforzo assiale è parallelo a tale asse.

Diciamo l la lunghezza della campata e x_1, x_2, \dots, x_n le ascisse dei punti in cui sono applicati i carichi concentrati. I punti di ascisse x_1, x_2, \dots, x_n dividono la campata in $n + 1$ parti: indichiamo con y_1, y_2, \dots, y_{n+1} l'ordinata

della linea elastica nel tratto $0 \leq x_1, x_1 \leq x_2, \dots, x_{n-1} \leq x_n, x_n \leq l$. La y_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) è dunque una funzione della x , definita nell'intervallo $x_{i-1} \leq x_i$, dove per estensione si è posto $x_0 = 0$ ed $x_{n+1} = l$.

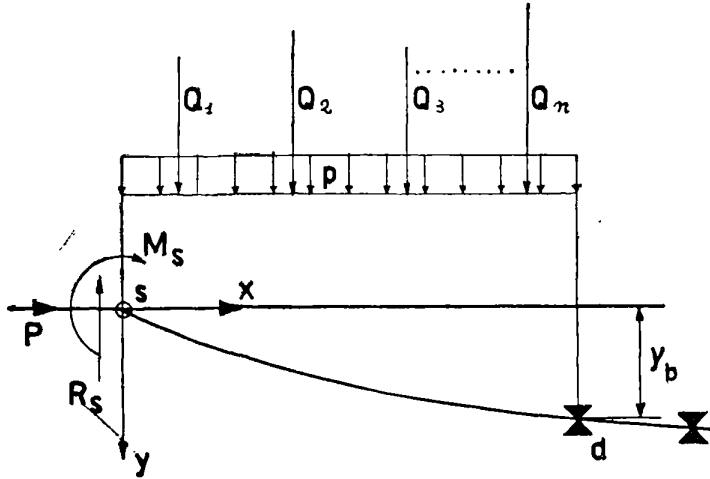


Fig. 2

Con queste notazioni e convenzioni, il momento flettente in un punto della campata è dato dalle formule seguenti:

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= -EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} \pm Py_1 && \text{se } 0 \leq x \leq x_1 \\
 M_x &= -EI \frac{d^2 y_2}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} \pm Py_2 - Q_1(x - x_1) && \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\
 M_x &= -EI \frac{d^2 y_3}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} \pm Py_3 - Q_1(x - x_1) - Q_2(x - x_2) && \text{se } x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\dots && \dots \\
 &\dots && \dots \\
 M_x &= -EI \frac{d^2 y_i}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} \pm Py_i - \sum_1^{i-1} Q_h(x - x_h) && \text{se } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\
 M_x &= -EI \frac{d^2 y_{i+1}}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} \pm Py_{i+1} - \sum_1^i Q_h(x - x_h) && \text{se } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\
 &\dots && \dots \\
 &\dots && \dots \\
 M_x &= -EI \frac{d^2 y_{n+1}}{dx^2} = M_s + R_s x - \frac{px^2}{2} \pm Py_{n+1} - \sum_1^n Q_h(x - x_h) && \text{se } x_n \leq x \leq l.
 \end{aligned} \right\} \quad 1.1$$

In queste formule E è il modulo di JOUNG, I il momento d'inerzia nella sezione x e valgono i segni superiori od inferiori a seconda che la campata sia compressa o tesa.

Derivando due volte la $(i+1)$ -esima delle 1.1 si ha:

$$1.2 \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 y_{i+1}}{dx^2} \right] \pm P \frac{d^2 y_{i+1}}{dx^2} = p \quad \begin{array}{l} (i=0, 1, 2, \dots, n) \\ (x_i \leq x \leq x_{i+1}). \end{array}$$

Per evidenti ragioni di continuità materiale è:

$$1.3 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1}(x_i) = y_i(x_i) \\ \left(\frac{dy_{i+1}}{dx} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{dy_i}{dx} \right)_{x=x_i} \end{array} \right. \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Poi, sottraendo la $(i+1)$ -esima delle 1.1 dalla i -esima, dopo aver posto $x = x_i$, tenuto conto delle 1.3 e del fatto che la EI è una funzione continua si trova:

$$1.4 \quad \left(\frac{d^2 y_{i+1}}{dx^2} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{d^2 y_i}{dx^2} \right)_{x=x_i} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

La 1.4 esprime la continuità del momento flettente nel passaggio attraverso la sezione x_i ; e, tenendo conto *a priori* di questo fatto meccanico, avrebbe potuto esser scritta direttamente.

Indi denotiamo con I_s ed I_d il momento d'inerzia agli estremi della campata. Allora, poichè EI varia *linearmente*, è:

$$1.5 \quad EI = EI_s \left(1 + \bar{\alpha} \frac{x}{l} \right) \quad \text{con} \quad \bar{\alpha} = \frac{I_d - I_s}{I_s}.$$

Deriviamo una volta la $(i+1)$ -esima e la i -esima delle 1.1; poniamo $x = x_i$; e sottraggiamo la seconda dalla prima, tenendo conto delle 1.3, 1.4. Otteniamo:

$$1.6 \quad \left(\frac{d^3 y_{i+1}}{dx^3} \right)_{x=x_i} - \left(\frac{d^3 y_i}{dx^3} \right)_{x=x_i} = \frac{Q_i}{EI_s \left(1 + \bar{\alpha} \frac{x}{l} \right)} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

La 1.6 esprime che Q_i è la quantità di cui decresce lo sforzo di taglio nel passaggio dalla sezione immediatamente a sinistra a quella immediatamente a destra di $x = x_i$; e, partendo *a priori* da questo fatto meccanico, si sarebbe potuta scrivere direttamente.

In fine chiamando M_s e M_d i momenti all'estremità sinistra e destra della campata e con y_b l'abbassamento dell'appoggio destro rispetto al sinistro, si ha:

$$1.7 \quad \begin{array}{l} y_1(0) = 0, \quad y_{n+1}(l) = y_b \\ \left(\frac{d^2 y_1}{dx^2} \right)_{x=0} = -\frac{M_s}{EI_s}, \quad \left(\frac{d^2 y_{n+1}}{dx^2} \right)_{x=l} = -\frac{M_d}{EI_d}. \end{array}$$

Ora, allo scopo di diminuire il numero dei parametri che entrano nel problema, poniamo:

$$1.8 \quad \begin{cases} x = l\xi, & x_i = l\xi_i & (i = 1, 2, \dots, n) (0 \leq \xi \leq 1) \\ \bar{\mu}^2 = \frac{Pl^2}{EI_s} & & \bar{\mu} > 0. \end{cases}$$

Allora le 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, si possono compendiare nelle formule seguenti, nelle quali l'apice è usato per indicare la derivazione rispetto alla variabile ξ :

$$1.9 \quad [(1 + \bar{\alpha}\xi)y''_{i+1}]' \pm \bar{\mu}^2 y''_{i+1} = \bar{\mu}^2 \frac{pl^2}{P} \quad \begin{matrix} (i = 0, 1, 2, \dots, n) \\ (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \end{matrix}$$

$$1.10 \quad \begin{cases} y_i(0) = 0 \\ y_{i+1}(\xi_i) = y_i(\xi_i) \\ y'_{i+1}(\xi_i) = y'_i(\xi_i) \\ y_{n+1}(1) = y_b \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$1.11 \quad \begin{cases} y_i''(0) = -\frac{M_s l^2}{EI_s} \\ y''_{i+1}(\xi_i) = y_i''(\xi_i) \\ y'''_{i+1}(\xi_i) - y_i'''(\xi_i) = \frac{l^3 Q_i}{EI_s(1 + \bar{\alpha}\xi_i)} \\ y''_{n+1}(1) = -\frac{M_a l^2}{EI_a} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

La 1.9 rappresenta $n + 1$ equazioni differenziali lineari del quart'ordine, nella cui integrazione intervengono $4n + 4$ costanti arbitrarie. Queste $4n + 4$ costanti debbono venir determinate in base alle 1.10, 1.11, che forniscono precisamente $4n + 4$ relazioni fra di esse. Vedremo che in tal guisa rimangono effettivamente determinate le y_i , per modo che si può pervenire alla linea elastica (in ciascun tratto) della campata.

2. Determinazione di un primo gruppo di costanti d'integrazione. —

Poniamo:

$$2.1 \quad y''_{i+1} = z_{i+1}.$$

La 1.9 diviene:

$$2.2 \quad [(1 + \bar{\alpha}\xi)z_{i+1}]' \pm \bar{\mu}^2 z_{i+1} = \bar{\mu}^2 \frac{pl^2}{P} \quad \begin{matrix} (i = 0, 1, 2, \dots, n) \\ (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \end{matrix}.$$

Denotiamo con $T(\xi)$ e $V(\xi)$ due integrali linearmente indipendenti dell'equazione 2.2 resa omogenea. Essi saranno funzioni regolari in tutto l'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$. Invero la 2.2 resa omogenea è un'equazione differenziale del second'ordine lineare ed a coefficienti variabili, il cui unico punto singolare

al finito è nel punto d'ascissa $x = -\frac{1}{\alpha}$. Ma è, per la 1.5:

$$\bar{\alpha} = \frac{I_d - I_s}{I_s} = \frac{I_d}{I_s} - 1 > -1,$$

e quindi:

$$-\frac{1}{\alpha} < 0 \quad \text{o} \quad -\frac{1}{\alpha} > 1 \quad (\text{secondo che } \bar{\alpha} > 0 \text{ o } \bar{\alpha} < 0).$$

Il punto singolare non cade dunque nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

Ciò posto la integrazione della 2.2 fornisce:

$$2.3 \quad z_{i+1} = c_{i+1}T(\xi) + d_{i+1}V(\xi) \pm \frac{pl^2}{P} \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

ove le c_{i+1} , d_{i+1} sono $2n + 2$ costanti da determinare. Esprimiamo all'uopo che sono soddisfatte le 1.11. Troviamo:

$$2.4 \quad \begin{cases} c_1 T(0) + d_1 V(0) = \mp \frac{pl^2}{P} - \frac{M_s l^2}{EI_s} \\ c_{n+1} T(1) + d_{n+1} V(1) = \mp \frac{pl^2}{P} - \frac{M_d l^2}{EI_d} \\ (c_{i+1} - c_i)T(\xi_i) + (d_{i+1} - d_i)V(\xi_i) = 0 \\ (c_{i+1} - c_i)T'(\xi_i) + (d_{i+1} - d_i)V'(\xi_i) = \frac{l^3 Q_i}{EI_s(1 + \alpha \xi_i)}. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Le ultime due delle 2.4 si possono considerare come un sistema di due equazioni lineari non omogenee nelle due incognite $c_{i+1} - c_i$, $d_{i+1} - d_i$. Il determinante di questo sistema è:

$$\begin{vmatrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \end{vmatrix},$$

ed è certo diverso da zero, essendo il determinante wronskiano di due integrali linearmente indipendenti di un'equazione lineare ed omogenea, calcolato in un punto *regolare* per l'equazione. Anzi, poichè il determinante wronskiano si esprime per i coefficienti dell'equazione nel modo notissimo, troviamo nel nostro caso:

$$2.5 \quad \begin{vmatrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \end{vmatrix} = \frac{W_0}{(1 + \alpha \xi_i)^2}$$

ove:

$$2.6 \quad W_0 = \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T'(0) & V'(0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Risolvendo allora il predetto sistema di due equazioni lineari nelle due inco-

gnite $c_{i+1} - c_i$, $d_{i+1} - d_i$, troviamo:

$$\begin{aligned} c_{i+1} - c_i &= - \frac{l^3 Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) V(\xi_i)}{W_0 EI_s} \\ d_{i+1} - d_i &= \frac{l^3 Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) T(\xi_i)}{W_0 EI_s} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e quindi, sommando rispetto all'indice i da 1 ad h :

$$2.7 \quad \begin{cases} c_{h+1} - c_1 = - \frac{l^3}{W_0 EI_s} \sum_1^h Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) V(\xi_i) \\ d_{h+1} - d_1 = \frac{l^3}{W_0 EI_s} \sum_1^h Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) T(\xi_i). \end{cases} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

In particolare è dunque:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_1 - \frac{l^3}{W_0 EI_s} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) V(\xi_i) \\ d_{n+1} &= d_1 + \frac{l^3}{W_0 EI_s} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) T(\xi_i). \end{aligned}$$

Sostituiamo queste espressioni di c_{n+1} , d_{n+1} nella seconda delle 2.4. Associando all'equazione così ottenuta la prima delle 2.4 otteniamo il seguente sistema di due equazioni lineari nelle incognite c_1 , d_1 :

$$\begin{aligned} c_1 T(0) + d_1 V(0) &= \mp \frac{pl^2}{P} - \frac{M_s l^2}{EI_s} \\ c_1 T(1) + d_1 V(1) &= \mp \frac{pl^2}{P} - \frac{M_d l^2}{EI_d} + \frac{l^3}{W_0 EI_s} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) [T(1) V(\xi_i) - V(1) T(\xi_i)]. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$2.8 \quad \Delta = \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix}$$

e supponiamo che sia $\Delta \neq 0$, riservandoci di discutere più avanti l'ipotesi opposta. Possiamo allora ricavare le c_1 , d_1 e troviamo precisamente:

$$\begin{aligned} c_1 &= - \frac{l^3 V(0)}{\Delta W_0 EI_s} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) [T(1) V(\xi_i) - V(1) T(\xi_i)] + \\ &\quad + \frac{l^2}{\Delta} \left[\left(\frac{M_d}{EI_d} \pm \frac{p}{P} \right) V(0) - \left(\frac{M_s}{EI_s} \pm \frac{p}{P} \right) V(1) \right] \\ d_1 &= \frac{l^3 T(0)}{\Delta W_0 EI_s} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) [T(1) V(\xi_i) - V(1) T(\xi_i)] + \\ &\quad + \frac{l^2}{\Delta} \left[- \left(\frac{M_d}{EI_d} \pm \frac{p}{P} \right) T(0) + \left(\frac{M_s}{EI_s} \pm \frac{p}{P} \right) T(1) \right]. \end{aligned}$$

Trovate così le c_i , d_i , per sostituzione nelle 2.7, si perviene senza difficoltà alle seguenti espressioni definitive di c_{h+1} , d_{h+1} ($h = 0, 1, 2, \dots, n$):

$$2.9 \quad \left\{ \begin{aligned} c_{h+1} &= \frac{l^2}{\Delta} \left[\left(\frac{M_d}{EI_d} \pm \frac{p}{P} \right) V(0) - \left(\frac{M_s}{EI_s} \pm \frac{p}{P} \right) V(1) \right] - \\ &- \frac{l^3}{\Delta W_0 EI_s} \left[V(1) \sum_1^h Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{array} \right| - V(0) \sum_{h+1}^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \left| \begin{array}{cc} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| \right] \\ d_{h+1} &= \frac{l^2}{\Delta} \left[- \left(\frac{M_d}{EI_d} \pm \frac{p}{P} \right) T(0) + \left(\frac{M_s}{EI_s} \pm \frac{p}{P} \right) T(1) \right] + \\ &+ \frac{l^3}{\Delta W_0 EI_s} \left[T(1) \sum_1^h Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{array} \right| - T(0) \sum_{h+1}^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \left| \begin{array}{cc} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| \right] \\ &h = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right.$$

Sono così determinate le prime $2n + 2$ costanti d'integrazione.

3. Determinazione delle residue costanti d'integrazione. — Riprendiamo la 2.1 ed integriamola due volte, tenendo presente la 2.3. Otteniamo:

$$3.1 \quad \left\{ \begin{aligned} y_{i+1} &= c_{i+1} \int_{\xi_i}^{\xi} (\xi - s) T(s) ds + d_{i+1} \int_{\xi_i}^{\xi} (\xi - s) V(s) ds \pm \frac{pl^2}{2P} \xi^2 + \\ &+ A_{i+1} (\xi - \xi_i) + B_{i+1} \end{aligned} \right. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

dove le A_{i+1} , B_{i+1} sono costanti d'integrazione e le c_{i+1} , d_{i+1} sono date dalle 2.9.

Poichè le 1.11 sono già soddisfatte, quando le c_{i+1} , d_{i+1} siano calcolate a norma delle 2.9, per determinare le A_{i+1} , B_{i+1} imponiamo che siano soddisfatte le 1.10. Abbiamo così:

$$3.2 \quad \left\{ \begin{aligned} B_i &= 0 \\ B_{i+1} - B_i &= c_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} (\xi_i - s) T(s) ds + d_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} (\xi_i - s) V(s) ds + A_i (\xi_i - \xi_{i-1}) \\ A_{i-1} - A_i &= c_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} T(s) ds + d_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} V(s) ds \\ c_{n+1} \int_{\xi_n}^1 (1-s) T(s) ds + d_{n+1} \int_{\xi_n}^1 (1-s) V(s) ds \pm \frac{pl^2}{2P} + A_{n+1} (1 - \xi_n) + B_{n+1} &= y_b \end{aligned} \right. \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nella terza della 3.2 sommiamo rispetto all'indice i da 1 ad h . Otteniamo:

$$3.3 \quad A_{h+1} = A_1 + \sum_1^h c_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} T(s) ds + \sum_1^h d_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} V(s) ds \quad h = 1, 2, \dots, n$$

ossia:

$$3.4 \quad A_i = A_1 + \sum_1^{i-1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds + \sum_1^{i-1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds \quad i = 2, 3, \dots, n+1.$$

D'altra parte, sommando nella seconda delle 3.2 rispetto all'indice i da 1 ad h , viene, tenuto conto che $B_1 = 0$:

$$B_{n+1} = \sum_1^h A_i (\xi_i - \xi_{i-1}) + \sum_1^h c_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} (\xi_i - s) T(s) ds + \sum_1^h d_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} (\xi_i - s) V(s) ds$$

ovvero, per la 3.4:

$$B_{n+1} = A_1 \xi_h + \sum_1^{h-1} \sum_1^{i-1} (\xi_i - \xi_{i-1}) c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds + \sum_1^{h-1} \sum_1^{i-1} (\xi_i - \xi_{i-1}) d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds + \\ + \sum_1^h c_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} (\xi_i - s) T(s) ds + \sum_1^h d_i \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} (\xi_i - s) V(s) ds.$$

Ma, come si vede facilmente, è:

$$\sum_1^h \sum_1^{i-1} = \sum_1^{h-1} \sum_{k+1}^h,$$

e quindi:

$$B_{n+1} = A_1 \xi_h + \sum_1^{h-1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds \sum_{k+1}^h (\xi_i - \xi_{i-1}) + \sum_1^{h-1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds \sum_{k+1}^h (\xi_i - \xi_{i-1}) + \\ + \sum_1^h c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_k - s) T(s) ds + \sum_1^h d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_k - s) V(s) ds = \\ = A_1 \xi_h + \sum_1^{h-1} (\xi_h - \xi_k) c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds + \sum_1^{h-1} (\xi_h - \xi_k) d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds + \\ + \sum_1^{h-1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_k - s) T(s) ds + \sum_1^{h-1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_k - s) V(s) ds + \\ + c_h \int_{\xi_{h-1}}^{\xi_h} (\xi_h - s) T(s) ds + d_h \int_{\xi_{h-1}}^{\xi_h} (\xi_h - s) V(s) ds.$$

Da cui, infine:

$$3.5 \quad B_{h+1} = A_1 \xi_h + \sum_1^h c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_h - s) T(s) ds + \sum_1^h d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_h - s) V(s) ds$$

$$h = 1, 2, \dots, n.$$

Dalle 3.3, 3.5, facendo $h = n$ si deduce in particolare:

$$3.6 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{n+1} = A_1 + \sum_1^n c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds + \sum_1^n d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds \\ B_{n+1} = A_1 \xi_n + \sum_1^n c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_n - s) T(s) ds + \sum_1^n d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (\xi_n - s) V(s) ds. \end{array} \right.$$

Sostituendo questi valori di A_{n+1} , B_{n+1} nella quarta delle 3.2, si ha un'equazione che ci permette di determinare A_1 . Precisamente si trova senza alcuna difficoltà:

$$A_1 = y_b \mp \frac{pl^2}{2P} - \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s) T(s) ds - \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s) V(s) ds.$$

Ottenuto così A_1 , sostituendo nelle 3.3, 3.5, si ottengono tutte le A_{h+1} , B_{h+1} . Precisamente, con facili calcoli, si trova:

$$3.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{h+1} = y_b \mp \frac{pl^2}{2P} + \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s T(s) ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s V(s) ds - \\ \quad - \sum_{h+1}^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds - \sum_{h+1}^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds \\ B_{h+1} = y_b \xi_h \mp \frac{pl^2}{2P} \xi_h + \xi_h \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s T(s) ds + \xi_h \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s V(s) ds - \\ \quad - \xi_h \sum_{h+1}^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} T(s) ds - \xi_h \sum_{h+1}^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} V(s) ds - \\ \quad - \sum_1^h c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s T(s) ds - \sum_1^h d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s V(s) ds \\ h = 0, 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Rimangono così completamente determinate tutte le $4n + 4$ costanti d'integrazione. Riassumendo possiamo dunque dire:

La linea elastica nei vari tratti della campata si ottiene facendo variare l'indice h nella formula 3.1:

$$y_{h+1} = c_{h+1} \int_{\xi_h}^{\xi} (\xi - s) T(s) ds + d_{h+1} \int_{\xi_h}^{\xi} (\xi - s) V(s) ds \pm \frac{pl^2}{2P} \xi^2 + \\ + A_{h+1}(\xi - \xi_h) + B_{h+1} \quad (h = 0, 1, 2, \dots, n)$$

dove le costanti A_{h+1} , B_{h+1} , c_{h+1} , d_{h+1} sono date rispettivamente dalle 3.7 e dalle 2.9. In tutte queste formule valgono i segni superiori od inferiori a seconda che la campata è compressa o tesa; e le $T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due integrali qualsiasi, linearmente indipendenti, dell'equazione differenziale:

$$[(1 + \bar{\alpha}\xi)z]'' \pm \bar{\mu}^2 z = 0$$

in cui pure valgono i segni superiori o inferiori secondo che si tratti di campata compressa o tesa.

PARTE SECONDA

4. Prima espressione delle inclinazioni alle estremità della campata. —

Dobbiamo ora passare al calcolo delle inclinazioni della linea elastica alle estremità della campata. Dobbiamo in sostanza calcolare le due quantità $y'_1(0)$ e $y'_{n+1}(1)$. Ora dalle 3.1 si ha:

$$y_1(\xi) = c_1 \int_0^{\xi} (\xi - s) T(s) ds + d_1 \int_0^{\xi} (\xi - s) V(s) ds \pm \frac{pl^2}{2P} \xi^2 + A_1 \xi + B_1 \\ y_{n+1}(\xi) = c_{n+1} \int_{\xi_n}^{\xi} (\xi - s) T(s) ds + d_{n+1} \int_{\xi_n}^{\xi} (\xi - s) V(s) ds \pm \frac{pl^2}{2P} \xi^2 + \\ + A_{n+1}(\xi - \xi_n) + B_{n+1},$$

e quindi

$$y'_1(\xi) = c_1 \int_0^{\xi} T(s) ds + d_1 \int_0^{\xi} V(s) ds \pm \frac{pl^2}{P} \xi + A_1 \\ y'_{n+1}(\xi) = c_{n+1} \int_{\xi_n}^{\xi} T(s) ds + d_{n+1} \int_{\xi_n}^{\xi} V(s) ds \pm \frac{pl^2}{P} \xi + A_{n+1}$$

ossia:

$$y_1'(0) = A_1$$

$$y'_{n+1}(1) = c_{n+1} \int_{\xi_n}^1 T(s) ds + d_{n+1} \int_{\xi_n}^1 V(s) ds \pm \frac{pl^2}{P} + A_{n+1}.$$

Tenuto conto del valore di A_1 ed A_{n+1} quale risulta dalle 3.7, viene:

$$4.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(0) = y_b \mp \frac{pl^2}{2P} - \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s) T(s) ds - \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s) V(s) ds \\ y'_{n+1}(1) = y_b \pm \frac{pl^2}{2P} + \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s T(s) ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s V(s) ds. \end{array} \right.$$

In queste espressioni le c_k , d_k sono date dalle 2.9. Occupiamoci da prima del calcolo esplicito della $y'(0)$ e precisamente della parte di essa dove intervengono gli integrali. Tenute presenti le 2.9 abbiamo:

$$\begin{aligned} & \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s) T(s) ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s) V(s) ds = \\ & = \sum_0^n c_{h+1} \int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}} (1-s) T(s) ds + \sum_0^n d_{h+1} \int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}} (1-s) V(s) ds = \\ & = - \frac{l^2 M_d}{\Delta EI_d} \int_0^1 (1-s) \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{vmatrix} ds - \frac{l^2 M_s}{\Delta EI_s} \int_0^1 (1-s) \begin{vmatrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} ds \mp \\ & \mp \frac{pl^2}{P \Delta} \int_0^1 (1-s) \left\{ \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} \right\} ds - \\ & - \frac{l^3}{\Delta W_0 EI_s} \left\{ \sum_0^n \sum_1^h Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi) & V(\xi) \end{vmatrix} \int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}} (1-s) \begin{vmatrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} ds + \right. \\ & \left. + \sum_0^n \sum_{h+1}^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \begin{vmatrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} \int_{\xi_h}^{\xi_{h+1}} (1-s) \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{vmatrix} ds \right\}. \end{aligned}$$

Ma, invertendo le due sommatorie, si vede facilmente che è:

$$\begin{aligned} \sum_0^n \sum_1^h &= \sum_h^n \sum_1^h = \sum_i^n \sum_h^n \\ \sum_h^n \sum_{h+1}^n &= \sum_h^{n-1} \sum_{h+1}^n = \sum_i^n \sum_h^{i-1} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 & \sum_0^n \sum_1^h Q_i (1 + \bar{\alpha} \bar{\xi}_i) \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{matrix} \right| \int_{\bar{\xi}_h}^{\bar{\xi}_{h+1}} (1-s) \left| \begin{matrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| ds + \\
 & + \sum_0^n \sum_{h+1}^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \bar{\xi}_i) \left| \begin{matrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| \int_{\bar{\xi}_h}^{\bar{\xi}_{h+1}} (1-s) \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{matrix} \right| ds = \\
 & = \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \bar{\xi}_i) \left\{ \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{matrix} \right| \sum_h^n \int_{\bar{\xi}_h}^{\bar{\xi}_{h+1}} (1-s) \left| \begin{matrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| ds + \right. \\
 & \quad \left. + \left| \begin{matrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| \sum_h^{i-1} \int_{\bar{\xi}_h}^{\bar{\xi}_{h+1}} (1-s) \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{matrix} \right| ds \right\} = \\
 & = \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \bar{\xi}_i) \left\{ \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{matrix} \right| \int_{\bar{\xi}_i}^1 (1-s) \left| \begin{matrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| ds + \right. \\
 & \quad \left. + \left| \begin{matrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| \int_0^{\bar{\xi}_i} (1-s) \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{matrix} \right| ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^{n+1} c_k \int_{\bar{\xi}_{k-1}}^{\bar{\xi}_k} (1-s) T(s) ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\bar{\xi}_{k-1}}^{\bar{\xi}_k} (1-s) V(s) ds = \\
 & = - \frac{l^2 M_a}{\Delta EI_a} \int_0^1 (1-s) \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{matrix} \right| ds - \frac{l^2 M_s}{\Delta EI_s} \int_0^1 (1-s) \left| \begin{matrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| ds \mp \\
 4.2 \quad & \mp \frac{p l^2}{P \Delta} \int_0^1 (1-s) \left\{ \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| \right\} ds - \\
 & - \frac{l^3}{\Delta W_0 EI_s} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \bar{\xi}_i) \left\{ \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{matrix} \right| \int_{\bar{\xi}_i}^1 (1-s) \left| \begin{matrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| ds + \right. \\
 & \quad \left. + \left| \begin{matrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{matrix} \right| \int_0^{\bar{\xi}_i} (1-s) \left| \begin{matrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{matrix} \right| ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Ora, gli integrali che compaiono in queste formule si possono calcolare espli-

citamente. Basta all' uopo calcolare i 6 integrali:

$$\int_0^1 (1-s)T(s)ds, \int_0^{\xi_i} (1-s)T(s)ds, \int_{\xi_i}^1 (1-s)T(s)ds$$

$$\int_0^1 (1-s)V(s)ds, \int_0^{\xi_i} (1-s)V(s)ds, \int_{\xi_i}^1 (1-s)V(s)ds.$$

Rammentiamo all' uopo che $T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due integrali dell'equazione differenziale:

$$[(1 + \bar{\alpha}\xi)z]'' \pm \bar{\mu}^2 z = 0.$$

Sarà dunque ad esempio:

$$\int_0^{\xi_i} (1-s)T(s)ds = \mp \frac{1}{\mu^2} \int_0^{\xi_i} (1-s) \frac{d^2}{ds^2} [(1 + \bar{\alpha}s)T(s)] ds$$

ed, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_i} (1-s)T(s)ds &= \mp \frac{1}{\mu^2} \left[(1-s) \frac{d}{ds} [(1 + \bar{\alpha}s)T(s)] \right]_0^{\xi_i} \mp \frac{1}{\mu^2} \int_0^{\xi_i} \frac{d}{ds} [(1 + \bar{\alpha}s)T(s)] ds = \\ &= \mp \frac{1}{\mu^2} \left[(1-s)(1 + \bar{\alpha}s)T'(s) + (1-s)\bar{\alpha}T(s) + (1 + \bar{\alpha}s)T(s) \right]_0^{\xi_i} = \\ &= \mp \frac{1}{\mu^2} [(1 - \xi_i)(1 + \bar{\alpha}\xi_i)T'(\xi_i) + (1 + \bar{\alpha})T(\xi_i) - (1 + \bar{\alpha})T(0) - T'(0)]. \end{aligned}$$

Da questa formola, facendo $\xi_i = 1$, si trae poi $\int_0^1 (1-s)T(s)ds$. In modo analogo si calcola poi l'integrale:

$$\int_{\xi_i}^1 (1-s)T(s)ds$$

e gli integrali simili in cui entra la funzione $V(\xi)$. Si trova in fine:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-s)T(s)ds &= \mp \frac{1}{\mu^2} [(1 + \bar{\alpha})T(1) - (1 + \bar{\alpha})T(0) - T'(0)] \\ \int_0^{\xi_i} (1-s)T(s)ds &= \mp \frac{1}{\mu^2} [(1 + \bar{\alpha})T(\xi_i) + (1 - \xi_i)(1 + \bar{\alpha}\xi_i)T'(\xi_i) - (1 + \bar{\alpha})T(0) - T'(0)] \\ \int_{\xi_i}^1 (1-s)T(s)ds &= \mp \frac{1}{\mu^2} [(1 + \bar{\alpha})T(1) - (1 + \bar{\alpha})T(\xi_i) - (1 - \xi_i)(1 + \bar{\alpha}\xi_i)T'(\xi_i)] \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1-s)V(s)ds = \mp \frac{1}{\mu^2} [(1+\bar{\alpha})V(1) - (1+\bar{\alpha})V(0) - V'(0)]$$

$$\int_0^{\xi_i} (1-s)V(s)ds = \mp \frac{1}{\mu^2} [(1+\bar{\alpha})V(\xi_i) + (1-\xi_i)(1+\bar{\alpha}\xi_i)V'(\xi_i) - (1+\bar{\alpha})V(0) - V'(0)]$$

$$\int_{\xi_i}^1 (1-s)V(s)ds = \mp \frac{1}{\mu^2} [(1+\bar{\alpha})V(1) - (1+\bar{\alpha})V(\xi_i) - (1-\xi_i)(1+\bar{\alpha}\xi_i)V'(\xi_i)].$$

Da queste formule, tenuta presente la 2.8, segue:

$$\int_0^1 (1-s) \left| \frac{T(0)V(0)}{T(s)V(s)} \right| ds = \mp \frac{1+\bar{\alpha}}{\mu^2} \Delta \pm \frac{1}{\mu^2} \left| \frac{T(0)V(0)}{T'(0)V'(0)} \right|$$

$$\int_0^{\xi_i} (1-s) \left| \frac{T(0)V(0)}{T(s)V(s)} \right| ds = \mp \frac{1}{\mu^2} \left\{ (1-\xi_i)(1+\bar{\alpha}\xi_i) \left| \frac{T(0)V(0)}{T(\xi_i)V(\xi_i)} \right| + (1+\bar{\alpha}) \left| \frac{T(0)V(0)}{T(\xi_i)V(\xi_i)} \right| - \left| \frac{T(0)V(0)}{T'(0)V'(0)} \right| \right\}$$

$$\int_0^1 (1-s) \left| \frac{T(s)V(s)}{T(1)V(1)} \right| ds = \pm \frac{1+\bar{\alpha}}{\mu^2} \Delta \pm \frac{1}{\mu^2} \left| \frac{T'(0)V'(0)}{T(1)V(1)} \right|$$

$$\int_{\xi_i}^1 (1-s) \left| \frac{T(s)V(s)}{T(1)V(1)} \right| ds = \pm \frac{1}{\mu^2} \left\{ (1-\xi_i)(1+\bar{\alpha}\xi_i) \left| \frac{T'(\xi_i)V'(\xi_i)}{T(1)V(1)} \right| + (1+\bar{\alpha}) \left| \frac{T(\xi_i)V(\xi_i)}{T(1)V(1)} \right| \right\}.$$

E quindi, sostituendo nella 4.2:

$$4.3 \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s)T(s)ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} (1-s)V(s)ds = \\ & = \frac{M_d l^2}{EI_d} \left[\pm \frac{1+\bar{\alpha}}{\mu^2} \mp \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{\Delta} \left| \frac{T(0)V(0)}{T'(0)V'(0)} \right| \right] + \frac{M_s l^2}{EI_s} \left[\mp \frac{1+\bar{\alpha}}{\mu^2} \pm \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{\Delta} \left| \frac{T(1)V(1)}{T'(0)V'(0)} \right| \right] - \\ & - \frac{pl^2}{P\Delta} \frac{1}{\mu^2} \left[\left| \frac{T(0)V(0)}{T'(0)V'(0)} \right| - \left| \frac{T(1)V(1)}{T'(0)V'(0)} \right| \right] \mp \\ & \mp \frac{1}{\mu^2} \frac{l^3}{W_0 \Delta EI_s} \sum_1^n Q_i (1+\bar{\alpha}\xi_i)^2 (1-\xi_i) \left\{ \left| \frac{T(0)V(0)}{T(\xi_i)V(\xi_i)} \right| \cdot \left| \frac{T'(\xi_i)V'(\xi_i)}{T(1)V(1)} \right| - \frac{T(\xi_i)V(\xi_i)}{T(1)V(1)} \cdot \left| \frac{T(0)V(0)}{T'(\xi_i)V'(\xi_i)} \right| \right\} \\ & \mp \frac{1}{\mu^2} \frac{l^3}{W_0 \Delta EI_s} \sum_1^n Q_i (1+\bar{\alpha}\xi_i) \left| \frac{T(0)V(0)}{T'(0)V'(0)} \right| \cdot \left| \frac{T(\xi_i)V(\xi_i)}{T(1)V(1)} \right|. \end{aligned} \right.$$

Ma, con un calcolo diretto, si verifica, che è:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \end{array} \right| = \\ & = - \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \end{array} \right|, \end{aligned}$$

ossia, tenuta presente la 2.5 e la 2.8, si trova che il valore di tutta la sopra-scritta combinazione di determinanti è, in fine:

$$- \Delta \frac{W_0}{(1 + \bar{\alpha} \xi_i)^2}.$$

Allora, ponendo:

$$4.4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{1 + \bar{\alpha}}{\mu^2} \mp \frac{1}{\mu^2} \frac{\left| \begin{array}{cc} T(1) & V(1) \\ T'(0) & V'(0) \end{array} \right|}{\Delta} = C \\ \mp \frac{1 + \bar{\alpha}}{\mu^2} \pm \frac{1}{\mu^2} \frac{\left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T'(0) & V'(0) \end{array} \right|}{\Delta} = D \end{array} \right.$$

tenuto conto che per la 1.8: $\bar{\mu}^2 = \frac{Pl^2}{EI_s}$, la 4.1, per la 4.3, fornisce:

$$4.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_{n+1}(0) = y_b + \frac{M_s l^2}{EI_s} C + \frac{M_d l^2}{EI_d} D \pm \frac{pl^2}{P} \left(C + D - \frac{1}{2} \right) \mp \frac{l}{P} \sum_1^n Q_i (1 - \xi_i) \pm \\ \pm \frac{l}{P \Delta} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \left| \begin{array}{cc} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right|. \end{array} \right.$$

In modo del tutto simile si arriva ad una formula semplice, che esprime esplicitamente $y'_{n+1}(1)$. Possiamo limitarci ad accennare alla cosa. Partendo dalla seconda delle 4.1, tenute presenti le 2.9, eseguendo l'inversione delle sommatorie doppie, si perviene anzitutto ad una formula analoga alla 4.2. Precisamente:

$$4.6 \quad \begin{aligned} & \sum_1^{n+1} c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s T(s) ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s V(s) ds = \\ & = - \frac{l^2}{\Delta} \int_0^1 \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{array} \right| ds - \frac{l^2}{\Delta} \int_0^1 \left| \begin{array}{cc} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| ds \mp \\ & \mp \frac{pl^2}{P \Delta} \int_0^1 \left\{ \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| \right\} ds - \end{aligned}$$

$$4.6 \quad - \frac{l^3}{W_0 EI_s \Delta} \sum_1^n Q_i (1 + \bar{\alpha} \xi_i) \left\{ \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{vmatrix} \int_{\xi_i}^1 \begin{vmatrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} ds + \right. \\ \left. + \begin{vmatrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} \int_0^{\xi_i} \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{vmatrix} ds \right\}.$$

Indi, tenuta presente l'equazione differenziale alla quale soddisfa tanto la $T(\xi)$ che la $V(\xi)$, con una integrazione per parti, si trova:

$$\int_0^1 s T(s) ds = \pm \frac{1}{\mu^2} [T(1) - (1 + \bar{\alpha})T'(1) - T(0)] \\ \int_0^{\xi_i} s T(s) ds = \pm \frac{1}{\mu^2} [T(\xi_i) - \xi_i(1 + \bar{\alpha}\xi_i)T'(\xi_i) - T(0)] \\ \int_{\xi_i}^1 s T(s) ds = \pm \frac{1}{\mu^2} [T(1) - (1 + \bar{\alpha})T'(1) + \xi_i(1 + \bar{\alpha}\xi_i)T'(\xi_i) - T(\xi_i)] \\ \int_0^1 s V(s) ds = \pm \frac{1}{\mu^2} [V(1) - (1 + \bar{\alpha})V'(1) - V(0)] \\ \int_0^{\xi_i} s V(s) ds = \pm \frac{1}{\mu^2} [V(\xi_i) - \xi_i(1 + \bar{\alpha}\xi_i)V'(\xi_i) - V(0)] \\ \int_{\xi_i}^1 s V(s) ds = \pm \frac{1}{\mu^2} [V(1) - (1 + \bar{\alpha})V'(1) + \xi_i(1 + \bar{\alpha}\xi_i)V'(\xi_i) - V(\xi_i)],$$

e quindi:

$$\int_0^1 s \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{vmatrix} ds = \pm \frac{1}{\mu^2} \Delta \mp \frac{1 + \bar{\alpha}}{\mu^2} \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T'(1) & V'(1) \end{vmatrix} \\ \int_0^{\xi_i} s \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(s) & V(s) \end{vmatrix} ds = \mp \frac{1}{\mu^2} \left\{ \xi_i(1 + \bar{\alpha}\xi_i) \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{vmatrix} \right\} \\ \int_0^1 s \begin{vmatrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} ds = \mp \frac{1}{\mu^2} \Delta \pm \frac{1 + \bar{\alpha}}{\mu^2} \begin{vmatrix} T(1) & V(1) \\ T'(1) & V'(1) \end{vmatrix} \\ \int_{\xi_i}^1 s \begin{vmatrix} T(s) & V(s) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} ds = \pm \frac{1}{\mu^2} \left\{ \xi_i(1 + \bar{\alpha}\xi_i) \begin{vmatrix} T'(\xi_i) & V'(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} + (1 + \bar{\alpha}) \begin{vmatrix} T(1) & V(1) \\ T'(1) & V'(1) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} \right\}.$$

Queste formule, sostituite nelle 4.6, permettono il calcolo della espressione:

$$\sum_1^{n+1} c_k \int_{\bar{\xi}_{k-1}}^{\bar{\xi}_k} s T(s) ds + \sum_1^{n+1} d_k \int_{\bar{\xi}_{k-1}}^{\bar{\xi}_k} s V(s) ds.$$

Dopo ciò, ponendo:

$$4.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mp \frac{1}{\bar{\mu}^2} \pm \frac{1 + \bar{\alpha}}{\bar{\mu}^2} \frac{\left| \begin{array}{cc} T(1) & V(1) \\ T'(1) & V'(1) \end{array} \right|}{\Delta} = A \\ \pm \frac{1}{\bar{\mu}^2} \mp \frac{1 + \bar{\alpha}}{\bar{\mu}^2} \frac{\left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T'(1) & V'(1) \end{array} \right|}{\Delta} = B \end{array} \right.$$

tenendo presente la seconda delle 4.1 si ha:

$$4.8 \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_{n+1}(1) = y_b - \frac{M_s l^2}{EI_s} A - \frac{M_a l^2}{EI_a} B \mp \frac{pl^2}{P} \left(A + B - \frac{1}{2} \right) \pm \\ \pm \frac{l}{P} \sum_1^n Q_i \bar{\xi}_i \mp \frac{l}{P \Delta} \sum_1^n Q_i \frac{1 + \bar{\alpha} \bar{\xi}_i}{1 + \bar{\alpha}} \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(\bar{\xi}_i) & V(\bar{\xi}_i) \end{array} \right|. \end{array} \right.$$

Riassumendo possiamo dunque dire:

Le inclinazioni della campata sulle estremità sono date dalle 4.5, 4.8, dove si sono fatte le posizioni 4.4, 4.7. In queste formule $T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due qualsiasi integrali indipendenti dell'equazione differenziale:

$$[(1 + \bar{\alpha} \bar{\xi})z]'' \pm \bar{\mu}^2 z = 0$$

e vanno presi ovunque i segni superiori od inferiori, a seconda che si tratti di campata compressa o tesa.

5. **Generalità dell'ipotesi $\bar{\alpha} > 0$.** — Ricordiamo che $\bar{\alpha}$ si esprime in funzione dei momenti d'inerzia all'estremità della campata, con la formula 1.5:

$$\bar{\alpha} = \frac{I_a - I_s}{I_s}.$$

Secondo che sia $I_s < I_a$ ovvero $I_s > I_a$ è dunque $\bar{\alpha}$ positivo o negativo. Ma, in sostanza ci si può limitare a considerare il caso $\bar{\alpha} > 0$.

Per convincersi di questo, incominciamo con la seguente osservazione. Per ogni campata introduciamo, accanto ai due parametri:

$$\bar{\alpha} = \frac{I_a - I_s}{I_s}, \quad \bar{\mu}^2 = \frac{Pl^2}{EI_s},$$

i due parametri, sempre positivi:

$$5.1 \quad \alpha = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min}}, \quad \mu^2 = \frac{Pl^2}{EI_{\min}} \quad (\mu > 0),$$

essendo I_{\max} e I_{\min} rispettivamente la più grande e la più piccola delle quantità I_s , I_d .

Se $I_s < I_d$ si ha senz'altro, $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\mu} = \mu$.

Se $I_s > I_d$ è $\bar{\alpha} < 0$, $\alpha = \frac{I_s - I_d}{I_d}$. Troviamo allora:

$$5.2 \quad \bar{\alpha} = -\frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \bar{\mu}^2 = \frac{\mu^2}{1 + \alpha}.$$

Ciò premesso, consideriamo l'equazione differenziale:

$$5.3 \quad [(1 + \bar{\alpha}\xi)z]'' \pm \bar{\mu}^2 z = 0$$

e sostituiamo i valori 5.2. Otteniamo:

$$\{[1 + \alpha(1 - \xi)]z\}'' \pm \mu^2 z = 0 \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

ovvero, posto $1 - \xi = \xi'$ ($0 \leq \xi' \leq 1$):

$$\frac{d'^2}{d\xi'^2} [(1 + \alpha\xi')z] \pm \mu^2 z = 0.$$

Se ne deduce che, se $T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due integrali linearmente indipendenti della 5.3, le funzioni $T(1 - \xi)$ e $V(1 - \xi)$ sono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione:

$$5.4 \quad [(1 + \alpha\xi)z]'' \pm \mu^2 z = 0$$

dove la α , μ , sono legate alle $\bar{\alpha}$, $\bar{\mu}$, dalle 5.2. Ma allora, nelle 4.4, 4.7 possiamo ritenere che $T(\xi)$ e $V(\xi)$ siano sempre integrali dell'equazione differenziale 5.4, salvo a sostituire $T(\xi)$, $V(\xi)$ rispettivamente con $T(1 - \xi)$, $V(1 - \xi)$ e a tener conto delle 5.2, se $I_s > I_d$. Si trova così senza alcuna difficoltà:

$$5.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mp \frac{1}{\mu^2} \pm \frac{1 + \alpha \Delta_1}{\mu^2 \Delta} = \begin{cases} A & \text{se } I_s < I_d \\ D & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \pm \frac{1}{\mu^2} \mp \frac{1 + \alpha \Delta_2}{\mu^2 \Delta} = \begin{cases} B & \text{se } I_s < I_d \\ C & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \pm \frac{1 + \alpha}{\mu^2} \mp \frac{1 \Delta_3}{\mu^2 \Delta} = \begin{cases} C & \text{se } I_s < I_d \\ B & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \mp \frac{1 + \alpha}{\mu^2} \pm \frac{1 \Delta_4}{\mu^2 \Delta} = \begin{cases} D & \text{se } I_s < I_d \\ A & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \end{array} \right.$$

dove:

$$5.6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = \begin{vmatrix} T(1) & V(1) \\ T'(1) & V'(1) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T'(1) & V'(1) \end{vmatrix} \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} T(1) & V(1) \\ T'(0) & V'(0) \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T'(0) & V'(0) \end{vmatrix} \\ \Delta = \begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

essendo $T(\xi)$ e $V(\xi)$ due integrali indipendenti dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} [(1 + \alpha\xi)z] \pm \mu^2 z = 0$$

e

$$\alpha = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min}}, \quad \mu^2 = \frac{Pl^2}{EI_{\min}}.$$

Si vede dunque che riferendosi al parametro α anzichè al parametro $\bar{\alpha}$, si può sempre supporre $\bar{\alpha}$ positivo. Giacchè, per le formule che precedono, supporre $\bar{\alpha}$ negativo è lo stesso che cambiare A, B, C, D rispettivamente in D, C, B, A .

Ciò per quanto riguarda le A, B, C, D . Veniamo al coefficiente di Q_i nelle formule 4.5, 4.8. Poniamo.

$$5.7 \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \pm \left[\xi_i - \frac{1 + \bar{\alpha}\xi_i}{1 + \bar{\alpha}} \frac{\begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(\xi_i) & V(\xi_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix}} \right] \\ S = \pm \left[(1 - \xi_i) - (1 + \bar{\alpha}\xi_i) \frac{\begin{vmatrix} T(\xi_i) & V(\xi_i) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix}} \right]. \end{array} \right.$$

Le quantità R, S dipendono da $\bar{\alpha}, \bar{\mu}, \xi_i$ e *non* dalla particolare coppia di integrali $T(\xi)$ e $V(\xi)$ prescelti, come risulta evidente dalla loro forma. È dunque:

$$R = R(\bar{\alpha}, \bar{\mu}, \xi_i), \quad S = S(\bar{\alpha}, \bar{\mu}, \xi_i).$$

Ora, se $I_s < I_d$, è $\bar{\alpha} = \alpha, \bar{\mu} = \mu$, e quindi

$$R = R(\alpha, \mu, \xi_i), \quad S = S(\alpha, \mu, \xi_i).$$

Se invece è $I_s > I_d$ bisogna nelle 5.7, a norma di quanto precede, sostituire ad $\bar{\alpha}, \bar{\mu}$ i valori 5.2 ed al posto di $T(\xi), V(\xi)$ immaginare posti $T(1 - \xi),$

$V(1 - \xi)$, passando così dall'equazione differenziale 5.3 alla 5.4. Abbiamo allora:

$$5.8 \quad \left\{ \begin{array}{l} R = R(\bar{\alpha}, \bar{\mu}, \xi_i = \pm) \left\{ \xi_i - [1 + \alpha(1 - \xi_i)] \left| \frac{T(1 - \xi_i) \quad V(1 - \xi_i)}{T(1) \quad V(1)} \right. \right\} \\ S = S(\bar{\alpha}, \bar{\mu}, \xi_i = \pm) \left\{ (1 - \xi_i) - \frac{1 + \alpha(1 - \xi_i)}{1 + \alpha} \left| \frac{T(0) \quad V(0)}{T(1) \quad V(1)} \right. \right\} \end{array} \right.$$

essendo qui $T(\xi)$ e $V(\xi)$ due integrali dell'equazione 5.4.

Introduciamo ora una quantità λ_i tale che:

$$5.9 \quad \lambda_i = \begin{cases} \xi_i & \text{se } I_s < I_d \\ (1 - \xi_i) & \text{se } I_s > I_d \end{cases}$$

Per le 5.7 si ha allora:

$$5.10 \quad \left\{ \begin{array}{l} \pm \left[\lambda_i - \frac{1 + \alpha \lambda_i}{1 + \alpha} \left| \frac{T(0) \quad V(0)}{T(\lambda_i) \quad V(\lambda_i)} \right. \right] = \begin{cases} R & \text{se } I_s < I_d \\ S & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \pm \left[(1 - \lambda_i) - (1 + \alpha \lambda_i) \left| \frac{T(\lambda_i) \quad V(\lambda_i)}{T(1) \quad V(1)} \right. \right] = \begin{cases} S & \text{se } I_s < I_d \\ R & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \end{array} \right.$$

Riassumendo ora tutto quanto si é detto in un solo enunciato, nel quale, per completezza e comodità del lettore, riscriviamo anche qualche formula precedente, tenute presenti le 1.8, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 5.10, si ha:

Introdotti per la campata i due parametri sempre positivi:

$$\alpha = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min}}, \quad \mu^2 = \frac{Pl^2}{EI_{\min}} \quad (\mu > 0)$$

le inclinazioni all'estremo destro e sinistro della campata si esprimono con le formule:

$$\begin{aligned} \frac{y'_{n+1}(1)}{l} &= \frac{y_b}{l} - \frac{M_s l}{EI_s} A - \frac{M_d l}{EI_d} B + \frac{pl}{P} H + \frac{1}{P} \sum_1^n Q_i R(\lambda_i) \\ \frac{y'_1(0)}{l} &= \frac{y_b}{l} + \frac{M_s l}{EI_s} C + \frac{M_d l}{EI_d} D - \frac{pl}{P} K - \frac{1}{P} \sum_1^n Q_i S(\lambda_i) \end{aligned}$$

Le quantità $A, B, C, D, H, K, R(\lambda_i), S(\lambda_i)$ risultano dal seguente prospetto:

$$\begin{aligned} \mp \frac{1}{\mu^2} \pm \frac{1 + \alpha}{\mu^2} \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \begin{cases} A & \text{se } I_s < I_d \\ D & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \pm \frac{1}{\mu^2} \mp \frac{1 + \alpha}{\mu^2} \frac{\Delta_2}{\Delta} &= \begin{cases} B & \text{se } I_s < I_d \\ C & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \pm \frac{1 + \alpha}{\mu^2} \mp \frac{1}{\mu^2} \frac{\Delta_3}{\Delta} &= \begin{cases} C & \text{se } I_s < I_d \\ B & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \mp \frac{1 + \alpha}{\mu^2} \pm \frac{1}{\mu^2} \frac{\Delta_4}{\Delta} &= \begin{cases} D & \text{se } I_s < I_d \\ A & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ H &= \mp \left(A + B - \frac{1}{2} \right) \\ K &= \mp \left(C + D - \frac{1}{2} \right) \\ \pm \left[\lambda_i - \frac{1 + \alpha \lambda_i}{1 + \alpha} \frac{\left| \frac{T(0)V(0)}{\Delta} \right|}{\left| \frac{T(\lambda_i)V(\lambda_i)}{\Delta} \right|} \right] &= \begin{cases} R(\lambda_i) & \text{se } I_s < I_d \\ S(\lambda_i) & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\ \pm \left[(1 - \lambda_i) - (1 + \alpha \lambda_i) \frac{\left| \frac{T(\lambda_i)V(\lambda_i)}{\Delta} \right|}{\left| \frac{T(1)V(1)}{\Delta} \right|} \right] &= \begin{cases} S(\lambda_i) & \text{se } I_s < I_d \\ R(\lambda_i) & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \end{aligned}$$

In queste formule è:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left| \begin{array}{cc} T(1) & V(1) \\ T'(1) & V'(1) \end{array} \right|, & \Delta_2 &= \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T'(0) & V'(0) \end{array} \right| \\ \Delta_3 &= \left| \begin{array}{cc} T(1) & V(1) \\ T'(0) & V'(0) \end{array} \right|, & \Delta_4 &= \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T'(1) & V'(1) \end{array} \right| \\ \Delta &= \left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right| \\ \lambda_i &= \begin{cases} \xi_i & \text{se } I_s < I_d \\ 1 - \xi_i & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \end{aligned}$$

mentre $T(\xi)$ e $V(\xi)$ sono due integrali linearmente indipendenti qualsiasi dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} [(1 + \alpha \xi)z] \pm \mu^2 z = 0.$$

Ovunque valgono i segni superiori od inferiori a seconda che la campata sia compressa o tesa.

6. Forma definitiva delle inclinazioni della campata alle estremità, mediante funzioni di Bessel. — Nel seguito faremo costante riferimento all'enunciato, con il quale si chiude il numero precedente. In base a questo enunciato, per calcolare le inclinazioni alle estremità della campata basta saper calcolare i determinanti ivi indicati con

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta$$

nonchè i determinanti:

$$\begin{vmatrix} T(0) & V(0) \\ T(\lambda_i) & V(\lambda_i) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} T(\lambda_i) & V(\lambda_i) \\ T(1) & V(1) \end{vmatrix}.$$

A ciò perveniamo esprimendo $T(\xi)$ e $V(\xi)$ mediante funzioni di BESSEL. Partiamo dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{d\xi^2} [(1 + \alpha\xi)z] \pm \mu^2 z = 0$$

a cui soddisfanno le $T(\xi)$, $V(\xi)$, ed eseguiamo il seguente cambiamento di variabile e di funzione incognita:

$$6.1 \quad \begin{cases} u = \frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha\xi} \\ z(\xi) = \frac{2\mu}{\alpha} \frac{y(u)}{u} \end{cases} \quad \text{radicale positivo.}$$

Quando ξ varia tra 0 ed 1, la u varia tra i due limiti *positivi* $\frac{2\mu}{\alpha}$ e $\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha}$.

La precedente equazione si muta, per la 6.1, nella:

$$6.2 \quad \frac{d^2 y}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dy}{du} \pm \left(1 \mp \frac{1}{u^2}\right) y = 0$$

ossia nell'equazione differenziale delle funzioni di BESSEL d'ordine 1 (¹). E precisamente nell'equazione differenziale delle funzioni di BESSEL d'argomento *reale* se valgono i segni superiori, ovvero nell'equazione differenziale delle funzioni di BESSEL d'argomento *immaginario* se valgono i segni inferiori.

Per il caso della campata compressa potremo dunque prendere come sistema d'integrali indipendenti della 6.2 le note funzioni $J_1(u)$, $Y_1(u)$, mentre nel caso della campata tesa interverranno le $I_1(u)$, $K_1(u)$. Tutte queste quattro

(¹) Per le proprietà più comuni delle funzioni di Bessel, che intervengono nel seguito, rimandiamo alla *Theory of Bessel Functions* di G. N. WATSON, Cambridge 1922.

funzioni si possono considerare *reali*, quando u è *reale e positivo* ⁽¹⁾. Ma ciò avviene precisamente nel caso nostro, dove la u varia da $\frac{2\mu}{\alpha}$ a $\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}$.

Tenute presenti le 6.1 possiamo dunque assumere per le $T(\xi)$, $V(\xi)$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{nel caso della campata compressa} \\ \\ \text{nel caso della campata tesa} \end{array} \right\} \begin{array}{l} T(\xi) = \frac{J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\xi}\right)}{\sqrt{1+\alpha\xi}} \\ V(\xi) = \frac{Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\xi}\right)}{\sqrt{1+\alpha\xi}} \\ \\ T(\xi) = \frac{I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\xi}\right)}{\sqrt{1+\alpha\xi}} \\ V(\xi) = \frac{K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\xi}\right)}{\sqrt{1+\alpha\xi}}. \end{array}$$

Ciò posto, si può passare senz'altro al calcolo dei determinanti Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 , Δ ,

$$\left| \begin{array}{cc} T(0) & V(0) \\ T(\lambda_i) & V(\lambda_i) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} T(\lambda_i) & V(\lambda_i) \\ T(1) & V(1) \end{array} \right|;$$

e quindi delle A , B , C , D , H , K , $R(\lambda_i)$, $S(\lambda_i)$. Importa solo tener presenti le seguenti formule per la derivazione delle funzioni di BESSEL:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1}{du} &= -\frac{1}{u} J_1(u) + J_0(u) \\ \frac{dY_1}{du} &= -\frac{1}{u} Y_1(u) + Y_0(u) \\ \frac{dI_1}{du} &= I_0(u) - \frac{1}{u} I_1(u) \\ \frac{dK_1}{du} &= -K_0(u) - \frac{1}{u} K_1(u). \end{aligned}$$

A calcoli eseguiti troviamo:

⁽¹⁾ Diciamo si *possono* considerare reali e non *sono* reali, perchè di fatto la $Y_1(u)$ e la $K_1(u)$ sono *olidrome* nel campo complesso, per la presenza di un termine logaritmico. Queste due funzioni diventano reali se per il logaritmo si prende la determinazione principale, come sempre intenderemo nel seguito.

Per la campata compressa:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \begin{cases} A & \text{se } I_s < I_d \\ D & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & \frac{1+\alpha}{\mu^2} - \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\mu} \frac{\Delta'_2}{\Delta'} = \begin{cases} B & \text{se } I_s < I_d \\ C & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta'_3}{\Delta'} = \begin{cases} C & \text{se } I_s < I_d \\ B & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & -\frac{1+\alpha}{\mu^2} + \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\mu} \frac{\Delta'_4}{\Delta'} = \begin{cases} D & \text{se } I_s < I_d \\ A & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & H = \frac{1}{2} - A - B \\
 & K = \frac{1}{2} - C - D \\
 & \lambda_i - \sqrt{\frac{1+\alpha\lambda_i}{1+\alpha}} \frac{\begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \end{vmatrix}}{\Delta'} = \begin{cases} R(\lambda_i) & \text{se } I_s < I_d \\ S(\lambda_i) & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & (1-\lambda_i) - \sqrt{1+\alpha\lambda_i} \frac{\begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{vmatrix}}{\Delta'} = \begin{cases} S(\lambda_i) & \text{se } I_s < I_d \\ R(\lambda_i) & \text{se } I_s > I_d \end{cases}
 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
 & \Delta'_1 = \begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \\ J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{vmatrix}, \quad \Delta'_2 = \begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{vmatrix} \\
 & \Delta'_3 = \begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \\ J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \end{vmatrix}, \quad \Delta'_4 = \begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \end{vmatrix} \\
 & \Delta' = \sqrt{1+\alpha} \Delta = \begin{vmatrix} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Per la campata tesa:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta''_1}{\Delta''} = \begin{cases} A & \text{se } I_s < I_d \\ D & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & -\frac{1+\alpha}{\mu^2} + \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\mu} \frac{\Delta''_2}{\Delta''} = \begin{cases} B & \text{se } I_s < I_d \\ C & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & -\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta''_3}{\Delta''} = \begin{cases} C & \text{se } I_s < I_d \\ B & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & \frac{1+\alpha}{\mu^2} - \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\mu} \frac{\Delta''_4}{\Delta''} = \begin{cases} D & \text{se } I_s < I_d \\ A & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & H = A + B - \frac{1}{2} \\
 & K = C + D - \frac{1}{2} \\
 & -\lambda_i + \sqrt{\frac{1+\alpha\lambda_i}{1+\alpha}} \frac{\begin{vmatrix} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \end{vmatrix}}{\Delta''} = \begin{cases} R(\lambda_i) & \text{se } I_s < I_d \\ S(\lambda_i) & \text{se } I_s > I_d \end{cases} \\
 & -(1-\lambda_i) + \sqrt{1+\alpha\lambda_i} \frac{\begin{vmatrix} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \end{vmatrix}}{\Delta''} = \begin{cases} S(\lambda_i) & \text{se } I_s < I_d \\ R(\lambda_i) & \text{se } I_s > I_d. \end{cases}
 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
 & \Delta''_1 = - \left[I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) K_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) + I_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \right] \\
 & \Delta''_2 = - \left[I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) K_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) + I_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \right] \\
 & \Delta''_3 = - \left[I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) K_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) + I_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \right] \\
 & \Delta''_4 = - \left[I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) K_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) + I_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \right] \\
 & \Delta'' = \sqrt{1+\alpha}\Delta = \begin{vmatrix} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

PARTE TERZA

7. **Equazione dei tre momenti.** — Abbiamo ormai tutti gli elementi per scrivere l'equazione dei tre momenti ALBENGA-MINELLI, generalizzata al caso in cui ciascuna campata della trave continua sia sollecitata, oltre che da un carico flettente uniformemente ripartito e da un carico assiale costante, anche da un numero qualsivoglia di carichi flettenti concentrati.

Riportiamoci perciò all'enunciato alla fine del n. 5 e pensiamo due campate consecutive della trave continua. Denotiamo con l'indice 1 tutto ciò che si riferisce alla campata più a sinistra, con l'indice 2 tutto ciò che si riferisce alla campata più a destra. Chiamiamo però M_0, M_1 i momenti sugli appoggi alle estremità sinistra e destra della prima campata ed M_1, M_2 i momenti sugli appoggi alle estremità sinistra e destra della seconda campata. Per la continuità materiale deve essere l'inclinazione all'estremità destra della prima campata uguale all'inclinazione all'estremità sinistra della seconda campata, ossia:

$$\frac{1}{l_1} [y'_{n+1}(1)]_1 = \frac{1}{l_2} [y'_1(0)]_2,$$

ovvero, tenuto presente l'enunciato alla fine del n. 5:

$$\begin{aligned} & \frac{y_1}{l_1} - \frac{M_0 l_1}{E_1 I_{s1}} A_1 - \frac{M_1 l_1}{E_1 I_{d1}} B_1 + \frac{p_1 l_1}{P_1} H_1 + \frac{1}{P_1} \sum_1^{n_1} Q_i R(\lambda_i) = \\ & = \frac{y_2}{l_2} + \frac{M_1 l_2}{E_2 I_{s2}} C_2 + \frac{M_2 l_2}{E_2 I_{d2}} D_2 - \frac{p_2 l_2}{P_2} K_2 - \frac{1}{P_2} \sum_2^{n_2} Q_i S(\lambda_i), \end{aligned}$$

o, ciò che è lo stesso:

$$7.1 \quad \left\{ \begin{aligned} & M_0 \frac{A_1 l_1}{E_1 I_{s1}} + M_1 \left(\frac{B_1 l_1}{E_1 I_{d1}} + \frac{C_2 l_2}{E_2 I_{s2}} \right) + M_2 \frac{D_2 l_2}{E_2 I_{d2}} = \\ & = \frac{p_1 l_1}{P_1} H_1 + \frac{p_2 l_2}{P_2} K_2 + \frac{1}{P_1} \sum_1^{n_1} Q_i R(\lambda_i) + \frac{1}{P_2} \sum_2^{n_2} Q_i S(\lambda_i) + \frac{y_1}{l_1} - \frac{y_2}{l_2}. \end{aligned} \right.$$

La 7.1 è l'equazione dei tre momenti alla quale volevamo pervenire. Le $A, B, C, D, H, K, R(\lambda_i), S(\lambda_i)$ che compaiono in essa risultano dalle 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, tenuto conto che si è posto:

$$\alpha = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\min}}, \quad \mu^2 = \frac{Pl^2}{EI_{\min}} \quad (\mu > 0)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} \xi_i & \text{se } I_s < I_d \\ 1 - \xi_i & \text{se } I_s > I_d \end{cases}$$

$$x_i = l \xi_i.$$

La 7.1 si riduce all'antica equazione dei tre momenti trovata nelle precedenti ricerche di C. MINELLI, L. CESARI ed F. CONFORTO, citate nell'introduzione, se non ci sono carichi concentrati, ossia se tutte le Q_i sono nulle.

Ma per quanto riguarda la possibilità pratica di applicare la 7.1, ha importanza fondamentale la proposizione seguente: *il calcolo dei coefficienti dell'equazione dei tre momenti generalizzata 7.1 si può conseguire, se si è già eseguito il calcolo dei coefficienti della 7.1 nel caso che tutte le Q_i sono nulle.*

Se invero le Q_i sono tutte nulle la 7.1 si riduce all'equazione (di ALBENGA-MINELLI):

$$7.2 \quad \begin{cases} M_0 \frac{A_1 l_1}{E_1 I_{s1}} + M_1 \left(\frac{B_1 l_1}{E_1 I_{s1}} + \frac{C_2 l_2}{E_2 I_{s2}} \right) + M_2 \frac{D_2 l_2}{E_2 I_{d2}} = \\ = \frac{p_1 l_1}{P_1} H_1 + \frac{p_2 l_2}{P_2} K_2 + \frac{y_1}{l_1} - \frac{y_2}{l_2} \end{cases}$$

e per calcolare i coefficienti che compaiono in essa, basta possedere le tavole numeriche delle A, B, C, D , le quali, attraverso le 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 appaiono funzioni delle due variabili α e μ ; e sono quindi le stesse sia per l'equazione 7.1 che per la 7.2; queste tavole numeriche sono appunto contenute nella pubblicazione in corso di stampa che abbiamo citato nell'introduzione. Ora si pone la questione: I calcoli numerici eseguiti per la tabellazione delle A, B, C, D sono sufficienti per costruire le tavole numeriche delle $R(\lambda_i)$ ed $S(\lambda_i)$?

A questa domanda si deve dare risposta affermativa. Ecco perchè: Tabellare le $R(\lambda_i)$, $S(\lambda_i)$ significa in sostanza per le 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 tabellare i determinanti:

$$7.3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cc} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right| \\ \Delta' = \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right|, \quad \Delta'' = \left| \begin{array}{cc} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right|. \end{array} \right.$$

Ora questo problema si presentò già nell'ambito della equazione 7.2, quando, immaginando di aver calcolati i momenti sugli appoggi si vollero

dare delle formule per il calcolo del momento flettente in un punto generico della campata: in guisa che il problema si deve già considerare risolto nella pubblicazione in corso di stampa, citata nell'introduzione. Siamo però riusciti recentemente a dimostrare *analiticamente* qualche punto del procedimento ivi tenuto, che prima era stato acquisito solo *empiricamente* attraverso il calcolo numerico diretto. Stimiamo perciò opportuno di riprendere la questione.

Ecco anzitutto come si ragiona nella pubblicazione in corso di stampa. Per quanto riguarda il calcolo dei determinanti Δ' , Δ'' esso interviene, per le 6.3, 6.5, anche nel calcolo delle A, B, C, D e quindi è stato già eseguito nella costruzione delle tavole numeriche delle A, B, C, D . Ma il calcolo degli altri 4 determinanti si riporta subito a quello di Δ', Δ'' . Poniamo invero:

$$7.4 \quad \begin{cases} \alpha'(\lambda_i) = \frac{\alpha(1-\lambda_i)}{1+\alpha\lambda_i} & \mu'(\lambda_i) = \frac{\mu(1-\lambda_i)}{\sqrt{1+\alpha\lambda_i}} \\ \alpha''(\lambda_i) = \alpha\lambda_i & \mu''(\lambda_i) = \mu\lambda_i; \end{cases}$$

da queste relazioni si ricava:

$$7.5 \quad \begin{cases} \frac{2\mu'(\lambda_i)}{\alpha'(\lambda_i)} = \frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}, & \frac{2\mu'(\lambda_i)}{\alpha'(\lambda_i)} \sqrt{1+\alpha'(\lambda_i)} = \frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha} \\ \frac{2\mu''(\lambda_i)}{\alpha''(\lambda_i)} = \frac{2\mu}{\alpha}, & \frac{2\mu''(\lambda_i)}{\alpha''(\lambda_i)} \sqrt{1+\alpha''(\lambda_i)} = \frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}. \end{cases}$$

Si ha quindi per i determinanti 7.3:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu''}{\alpha''}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu''}{\alpha''}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu''}{\alpha''} \sqrt{1+\alpha''}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu''}{\alpha''} \sqrt{1+\alpha''}\right) \end{array} \right| \\ & \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'} \sqrt{1+\alpha'}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'} \sqrt{1+\alpha'}\right) \end{array} \right|; \end{aligned}$$

e due formule analoghe per i determinanti dove intervengono le funzioni I_i e K_i .

Insomma, fissati α e μ , il calcolo dei primi 4 determinanti 7.3 viene riportato al calcolo di Δ' e Δ'' per altre coppie di argomenti α', μ' ovvero α'', μ'' .

Ma si è detto che si possiede la tavola numerica di $\Delta'(\alpha, \mu)$ o $\Delta''(\alpha, \mu)$. Questa tabella è estesa ad un certo campo di variabilità di α e μ , che indichiamo con G . Se, dunque, qualunque siano α e μ in G e qualunque sia λ_i positivo e ≤ 1 , le coppie α', μ' e α'', μ'' date dalle 7.4 sono sempre contenute in G , si sanno calcolare tutti i determinanti 7.3.

Ora questa proprietà si è potuta verificare empiricamente. Ma essa è suscettibile di una dimostrazione analitica. Occorre naturalmente specificare quale sia il campo G ; e poichè G è legato all'equazione trascendente $\Delta = 0$, passiamo a parlare anzitutto di questa equazione, sciogliendo così una riserva, che abbiamo fatta al n. 2 dove abbiamo supposto in modo *essenziale* $\Delta \neq 0$.

8. **Sull'equazione trascendente $\Delta = 0$.** — Per l'ultima delle 6.4 e delle 6.6, l'equazione $\Delta = 0$ equivale nel caso della campata compressa all'equazione:

$$8.1 \quad \left| \begin{array}{cc} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right| = 0$$

e nel caso della campata tesa all'equazione:

$$8.2 \quad \left| \begin{array}{cc} I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ I_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) & K_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right| = 0.$$

Ora nella pubblicazione in corso di stampa più volte citata viene dimostrato che la 8.2 è *impossibile* per valori positivi di α e μ . Invece *l'equazione trascendente 8.1 ammette, per ogni α reale e positivo, infinite radici reali e positive*. Ciò si dimostra facilmente nel modo seguente.

Anzitutto, ponendo:

$$\frac{2\mu}{\alpha} = x, \quad p = \sqrt{1+\alpha},$$

la 8.1 si può scrivere:

$$8.3 \quad J_1(x)Y_1(px) - Y_1(x)J_1(px) = 0 \quad (1);$$

e, per provare il nostro asserto, basta evidentemente dimostrare che la 8.3 ammette infinite radici reali e positive per ogni p reale e maggiore di 1. Ricordiamo ora (2) che per ogni integrale reale $y(x)$ ($x > 0$) dell'equazione di BESSEL:

$$8.4 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

(1) In una ricerca di Fisica Matematica anche A. KALÁHNE si è imbattuto in questa equazione, calcolandone alcune radici: cfr. *Ueber die Wurzeln einiger Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen*, « Zeitschrift für Mathematik und Physik », 1907.

(2) Cfr. M. PICONE: *Appunti di analisi superiore*, pag. 497.

esistono due quantità reali a e b , delle quali la prima positiva, per le quali riesce:

$$y(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} \cos(x + b) + \gamma(x)$$

essendo $\gamma(x)$ una funzione, il cui modulo è infinitesimo per x tendente all'infinito d'ordine $3/2$, rispetto ad $1/x$ infinitesimo principale. Questo teorema afferma in sostanza che, per ogni integrale reale $y(x)$ dell'equazione 8.4, il prodotto $\sqrt{x}y(x)$ si comporta *asintoticamente* come un coseno, eseguendo così infinite oscillazioni non smorzantisi.

Ciò premesso, applicando la proposizione citata alla $J_1(x)$ ed alla $Y_1(x)$, abbiamo, asintoticamente:

$$8.5 \quad \begin{cases} J_1(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} \cos(x + b) + \gamma(x) \\ Y_1(x) = \frac{a'}{\sqrt{x}} \cos(x + b') + \gamma'(x) \end{cases}$$

e quindi:

$$J_1(px) = \frac{a}{\sqrt{px}} \cos(px + b) + \gamma(px)$$

$$Y_1(px) = \frac{a'}{\sqrt{px}} \cos(px + b') + \gamma'(px).$$

Ne viene che la 8.3, moltiplicata per $x\sqrt{p}$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} & aa'[\cos(x + b) \cos(px + b') - \cos(x + b') \cos(px + b)] + \\ & + a\sqrt{px} \gamma'(px) \cos(x + b) + a'\sqrt{x} \gamma(x) \cos(px + b') - \\ & - a'\sqrt{px} \gamma(px) \cos(x + b') - a\sqrt{x} \gamma'(x) \cos(px + b) + \\ & + \gamma(x)\gamma'(px) - \gamma'(x)\gamma(px) = 0. \end{aligned}$$

Tenuto presente il carattere asintotico di $|\gamma(x)|$, $|\gamma'(x)|$, vediamo così che la 8.3, moltiplicata per $x\sqrt{p}$, si comporta all'infinito come l'equazione:

$$\begin{aligned} & aa'[\cos(x + b) \cos(px + b') - \cos(x + b') \cos(px + b)] = \\ & = aa' \sin(b' - b) \cos x(1 - p) = 0 \end{aligned}$$

e quindi possiede per ogni $p(> 1)$ infinite radici, a meno che non sia $\sin(b' - b) = 0$, ossia $b' = b + k\pi$ con k intero. Ma quest'ultima ipotesi si può

escludere, giacchè, se essa si verificasse, per le 8.5, sarebbe:

$$J_1(x) = \frac{a}{\sqrt{x}} \cos(x+b) + \gamma(x)$$

$$Y_1(x) = (-1)^k \frac{a'}{\sqrt{x}} \cos(x+b) + \gamma'(x),$$

e quindi;

$$a'J_1(x) - (-1)^k a Y_1(x) = a'\gamma(x) - (-1)^k \gamma'(x);$$

ma ciò è assurdo perchè

$$a'J_1(x) - (-1)^k a Y_1(x)$$

sarebbe un integrale reale dell'equazione 8.4 che moltiplicato per \sqrt{x} tenderebbe asintoticamente a zero, mentre esso, per un'osservazione precedente, deve comportarsi asintoticamente come un coseno.

Risulta così che la 8.3 possiede infinite radici reali per $x > 0$; e quindi, fissato comunque $\alpha > 0$, la 8.1 ammette infinite radici positive $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$. Se poi $\alpha = 0$ la 8.1 perde a prima vista di significato; ma si vede facilmente che il suo limite per $\alpha \rightarrow 0$ è l'equazione:

$$\frac{\sin \mu}{\mu} = 0$$

le cui radici sono $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Per la dimostrazione di questo fatto rimandiamo al lavoro in corso di stampa più volte citato.

Consideriamo ora la 8.1 come l'equazione di una curva in un piano (α, μ) e scriviamo brevemente

$$f(\alpha, \mu) = 0$$

l'equazione di questa curva. Ogni volta che si fissa $\alpha > 0$ si hanno infiniti valori positivi di μ che insieme ad α danno le coordinate di un punto della curva. Diremo μ_x il più piccolo di questi μ , cioè la *prima* radice della 8.1. Al variare di α , μ_x varia in modo *continuo*, a meno che non si passi per un punto in cui $\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$, (punto in cui la tangente alla curva è parallela all'asse delle μ , ovvero punto multiplo della curva). In uno di questi punti la prima radice della 8.1 si confonde con la seconda radice della 8.1, e potrebbe essere discontinua. L'esistenza di questi punti non può essere esclusa. Tuttavia, per i nostri scopi, si può supporre $0 \leq \alpha \leq 9$.

Ciò equivale, per la 5.1, a supporre che per ogni campata il momento d'inerzia massimo sia al più 10 volte più grande del momento d'inerzia minimo; e ciò è largamente sufficiente a tutti i bisogni della pratica. Ora, se

si suppone $0 \leq \alpha \leq 9$, il calcolo numerico diretto dimostra che la prima radice della 8.1 è sempre distinta dalla seconda radice della 8.1; e quindi si può parlare di una funzione μ_α di α , variabile nell'intervallo $0 \leq \alpha \leq 9$, continua insieme alla sua derivata prima. Arriviamo così alla situazione seguente (cfr. fig. 3):

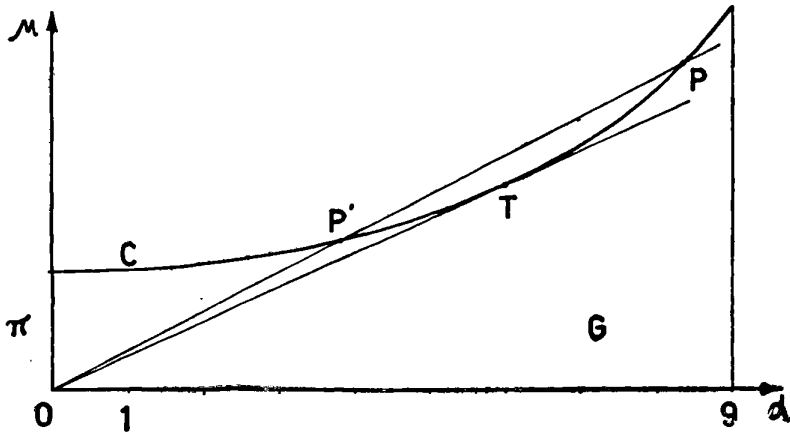


Fig. 3

In un piano (α, μ) si considera la curva C , la cui equazione è data dalla 8.1 che scriviamo brevemente $f(\alpha, \mu) = 0$. Più precisamente la curva C consta dei punti (α, μ_α) tali che μ_α è la prima radice della 8.1 ed $0 \leq \alpha \leq 9$. Per $\alpha = 0$ si ha $\mu_\alpha = \pi$ ed al crescere di α nell'intervallo $0 \leq \alpha \leq 9$, il calcolo numerico dimostra che μ_α cresce sempre.

Ciò posto, tornando alla questione posta alla fine del n. 7, osserviamo che il campo di variabilità G dei due parametri α e μ , del quale si discorreva alla fine del n. 7, consta dell'area compresa tra l'asse delle μ e la parallela $\mu = 9$ da una parte e l'asse delle α e la curva C dall'altra. Per quanto riguarda il contorno, si deve ritenere che i tratti rettilinei facciano parte di G , mentre il tratto curvilineo non fa parte di G ⁽¹⁾. Fissato comunque un punto (α, μ) in G , si tratta di provare che qualunque sia $\lambda_i (0 \leq \lambda_i \leq 1)$, i punti di

(1) Non ci dilunghiamo qui ad esporre le ragioni per cui conviene scegliere il campo G a questo modo. Ci limiteremo ad affermare che per ogni α il valore di P che si trae dalla formula $\mu^2 = \frac{Pl^2}{EI_{min}}$ quando $\mu = \mu_\alpha$ corrisponde, nel caso della campata compressa, ad un carico critico; per cui nella pratica dovrà non solo essere $\mu < \mu_\alpha$, ma anche il valore di μ , per ogni α , non dovrà essere troppo vicino a μ_α . Per maggiori particolari rimandiamo alla pubblicazione in corso di stampa.

coordinate (α', μ') e (α'', μ'') , dati dalle 7.4, sono sempre compresi entro G . Più precisamente, i punti (α', μ') , (α'', μ'') al variare di λ_i tra 0 ed 1 descrivono un tratto di curva che congiunge il punto (α, μ) con l'origine: e si tratta di provare che tutto questo tratto è compreso entro G .

All'uopo osserviamo che ci si può limitare a dimostrare l'asserto per i punti (α, μ_α) che stanno sulla C . Invero, se i punti

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\alpha(1-\lambda_i)}{1+\alpha\lambda_i}, & \mu' &= \frac{\mu(1-\lambda_i)}{\sqrt{1+\alpha\lambda_i}} \\ \alpha'' &= \alpha\lambda_i, & \mu'' &= \mu\lambda_i\end{aligned}$$

dove (α, μ) sta su C , sono sempre nell'interno di G (o sulla curva C), ciò succede a fortiori anche per i punti (α', μ') , (α'', μ'') per cui α si mantiene inalterata e μ è minore di μ_α , cioè del μ che compete al punto della curva C .

Supponiamo dunque che α, μ soddisfacciano alla 8.1 ed ammettiamo che per un valore di λ_i ($0 < \lambda_i < 1$) il punto (α', μ') stia ancora sulla C , come deve certo avvenire se non sussiste la proprietà che tutti i punti (α', μ') , (α'', μ'') stiano in G o su C . Sarà allora, per la 8.1 e per questo valore determinato di λ_i , tenute presenti le 7.5:

$$8.6 \quad \begin{cases} J_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'}\right)Y_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'}\sqrt{1+\alpha'}\right) - J_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'}\sqrt{1+\alpha'}\right)Y_1\left(\frac{2\mu'}{\alpha'}\right) = \\ = J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) - J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) = 0. \end{cases}$$

Ma per la 8.1

$$8.7 \quad J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) - J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right)Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) = 0;$$

quest'ultima relazione non può essere soddisfatta essendo simultaneamente

$$J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) = Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\sqrt{1+\alpha}\right) = 0$$

ovvero

$$J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) = Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) = 0;$$

invero, in ciascuna di queste due ipotesi esisterebbe un valore \bar{x} di x per cui si annullano contemporaneamente $J_1(x)$ e $Y_1(x)$: e ciò è assurdo sia in base a note proprietà delle funzioni di BESSEL, sia perchè *tutti* gli integrali della 8.4 sarebbero allora nulli per $x = \bar{x}$, mentre si può sempre imporre ad un integrale della 8.4 di avere per $x = \bar{x}$ un valore non nullo prefissato.

Ma allora dalla 8.7 si può ricavare:

$$8.8 \quad \frac{J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right)}{J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right)} = \frac{Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right)}{Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right)} = \rho$$

essendo ρ un numero finito e non nullo. Verrà dunque:

$$J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) = \rho J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \quad Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) = \rho Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right)$$

e, per sostituzione nella 8.6:

$$\begin{aligned} & J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) - J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) = \\ & = J_1\left(\frac{2\mu\lambda_i}{\alpha\lambda_i} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) Y_1\left(\frac{2\mu\lambda_i}{\alpha\lambda_i}\right) - J_1\left(\frac{2\mu\lambda_i}{\alpha\lambda_i}\right) Y_1\left(\frac{2\mu\lambda_i}{\alpha\lambda_i} \sqrt{1+\alpha\lambda_i}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ne segue che il punto $(\alpha\lambda_i, \mu\lambda_i)$ appartiene anch'esso alla curva C ⁽¹⁾.

Analogha conclusione si trae dall'esame delle coordinate α'' , μ'' se si ammette che per un opportuno valore di λ_i ($0 < \lambda_i < 1$) il punto (α'', μ'') stia sulla C . Osserviamo ora che il punto $(\alpha\lambda_i, \mu\lambda_i)$ è un punto della retta che congiunge l'origine con il punto (α, μ) . Riassumendo possiamo dunque dire: se qualunque essendo λ_i ($0 \leq \lambda_i \leq 1$) i punti (α', μ') , (α'', μ'') non cadono sempre in G (o tutt'al più sulla curva C che come si è detto non si ritiene come facente parte di G), la curva C gode della proprietà che esiste qualche suo punto P che congiunto con l'origine dà luogo ad una retta che interseca la C in P ed in qualche altro punto, diverso da P .

Se dimostriamo che questa proprietà non si verifica, il nostro asserto è dimostrato, è cioè dimostrato che i punti (α', μ') , (α'', μ'') dati dalle 7.4 sono sempre in G .

Ora supponiamo (cfr. fig. 3) che esista una retta uscente dall'origine e passante per un punto P di C , la quale intersechi ulteriormente la C in P' . Esisterà allora, per continuità, una retta uscente dall'origine e *tangente* alla C in un punto T d'ascissa $\alpha > 0$. Mostriamo che ciò è assurdo.

(1) Si potrebbe in realtà dubitare che il punto $(\alpha\lambda_i, \mu\lambda_i)$ non stia sulla C , ossia che $\mu\lambda$, non sia la *prima* radice della 8.1 quando l'ascissa sia $\alpha\lambda_i$. Ma la nostra considerazione conserva ciò nonostante il suo valore probativo. Invero, per il seguito, interessa soltanto dedurre che la retta congiungente il punto (α, μ) con l'origine intersechi ulteriormente la C nel tratto compreso tra l'origine ed (α, μ) . E ciò succede certamente anche se il punto $(\alpha\lambda_i, \mu\lambda_i)$ non stia sulla C ma sopra un altro ramo della curva rappresentata dalla 8.1, essendo $0 < \lambda_i < 1$.

All'uopo calcoliamo il coefficiente angolare della tangente in un punto generico della C . Esso sarà:

$$8.9 \quad \frac{d\mu}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial \mu}}$$

dove la $f(\alpha, \mu) = 0$ è la 8.1.

Sarà dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mu} = & \frac{2}{\alpha} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) + \frac{2}{\alpha} \sqrt{1+\alpha} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) - \\ & - \frac{2}{\alpha} \sqrt{1+\alpha} J_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) - \frac{2}{\alpha} J_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) Y_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

ossia, per la 8.8:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = - \frac{2\rho}{\alpha} \left| \begin{array}{c} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \\ J_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \end{array} \right| + \frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\alpha\rho} \left| \begin{array}{c} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \\ J_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) Y_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) \end{array} \right|.$$

I due determinanti che compaiono in quest'ultima formula sono dei determinanti wronskiani; e tenendo presente la 8.4 ed esprimendo il wronskiano di due integrali della 8.4 per mezzo dei suoi coefficienti nel modo solito, troviamo:

$$8.10 \quad \Delta(x) = \left| \begin{array}{cc} J_1(x) & Y_1(x) \\ J_1'(x) & Y_1'(x) \end{array} \right| = \frac{\Delta(1)}{x},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} 8.11 \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} = & - \frac{2\rho}{\alpha} \frac{\alpha}{2\mu} \Delta(1) + \frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\alpha\rho} \frac{\alpha}{2\mu\sqrt{1+\alpha}} \Delta(1) = \\ & = \frac{\rho\Delta(1)}{\mu} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) = \frac{\Delta(1)}{\rho\mu} (1 - \rho^2). \end{aligned}$$

Indi si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = & - \frac{2\mu}{\alpha^2} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) - \frac{\mu(\alpha+2)}{\alpha^2\sqrt{1+\alpha}} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) Y_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) + \\ & + \frac{2\mu}{\alpha^2} J_1\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) Y_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) + \frac{\mu(\alpha+2)}{\alpha^2\sqrt{1+\alpha}} J_1'\left(\frac{2\mu}{\alpha} \sqrt{1+\alpha}\right) Y_1\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right); \end{aligned}$$

ossia, per la 8.8 e la 8.10:

$$8.12 \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = - \frac{\Delta(1)}{2\rho\alpha(1+\alpha)} [2(1-\rho^2) + \alpha(1-2\rho^2)].$$

Se poi la tangente alla C passa per l'origine, sarà:

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = \frac{\mu}{\alpha}$$

ossia, per la 8.9, 8.11, 8.12:

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{\mu}{2\alpha(1+\alpha)} \frac{2(1-\rho^2) + \alpha(1-2\rho^2)}{1-\rho^2}.$$

Ma questa eguaglianza è assurda perchè da essa si ricava:

$$\alpha = 0$$

mentre è $\alpha \neq 0$.

Vediamo dunque che i punti (α', μ') , (α'', μ'') cadono effettivamente in G e quindi, in base all'enunciato alla fine del n. 7: tutti i determinanti 7.3 sono calcolabili non appena si sappiano calcolare i determinanti $\Delta'(\alpha, \mu)$, $\Delta''(\alpha, \mu)$ per (α, μ) variabile in G ; e ciò qualunque sia $\lambda_i (0 \leq \lambda_i \leq 1)$.

Sulla classificazione proiettiva delle varietà a superficie-sezioni razionali.

Memoria di UGO MORIN (a Padova).

Sunto. - Delle varietà algebriche $M_r^{(n)}$ (ad $r \geq 3$ dimensioni e di ordine n) a superficie-sezioni razionali si danno i tipi proiettivamente distinti e si verifica che (per $n \neq 3$) sono razionali. I relativi sistemi lineari rappresentativi forniscono tutti i sistemi lineari (semplici e di grado $\neq 3$) cremonianamente distinti di ipersuperficie di uno spazio lineare, a superficie-caratteristica razionale; in particolare per $r=3$ i sistemi lineari di superficie razionali dello spazio ordinario.

In questa Memoria effettuo la classificazione proiettiva delle varietà algebriche irriducibili M_r (ad $r \geq 3$ dimensioni) a superficie-sezioni razionali. Questa classificazione completa quelle già note delle varietà a curve-sezioni razionali, ellittiche e iperellittiche ⁽¹⁾, ⁽²⁾.

Il FANO ⁽³⁾, per il caso $r=3$, ha dimostrato che le M_3 a superficie-sezioni razionali sono razionali (ad eccezione dell'ipersuperficie cubica generale di presunta irrazionalità) trasformandole in alcune di tipo particolare. Il mio criterio di indagine (n. 6), che si ispira a procedimenti classici nella teoria delle superficie algebriche, mi ha non solo permesso di dimostrare che le M_r ($r \geq 3$) a superficie-sezioni razionali sono razionali (col solito dubbio per l'ipersuperficie cubica), ma anche di assegnarne tutti i tipi proiettivamente distinti (e i relativi sistemi lineari rappresentativi). Ecco i risultati:

Una varietà algebrica irriducibile non conica M_r , ad $r \geq 3$ dimensioni, a

⁽¹⁾ ENRIQUES F., *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* [« Math. Annalen », Bd. 46 (1896)] pagg. 179-199; ove sono anche raccolti risultati di NOETHER, SEGRE, BERTINI, GUCCIA, JUNG, MARTINETTI, PICARD, DEL PEZZO, CASTELNUOVO.

⁽²⁾ SCORZA GAETANO, *Le varietà a curve-sezioni ellittiche* [« Annali di Mat. », t. 15 (3), (1908)], pagg. 217-273.

⁽³⁾ FANO G., *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali*, [« Annali di Mat. », t. 24 (3), (1915)], pagg. 49-88.

superficie-sezioni razionali è di uno dei seguenti tipi (o è una loro proiezione):

per $r \geq 3$

I) la quadrica dell' S_{r+1} ;

II) una M_r che contiene una congruenza razionale, di indice 1, di spazi lineari S_{r-2} (in particolare un fascio razionale di S_{r-1});

III) una M_r che contiene un fascio razionale di S_{r-4} -coni di VERONESE (n. 1);

IV) una M_r che contiene un fascio razionale di quadriche;

V) la $M_r^{(8)}$ dell' S_{r+4} intersezione d' un S_{r-2} -cono di VERONESE con una quadrica dell' S_{r+4} ;

VI) la $M_r^{(9)}$ dell' S_{r+4} intersezione residua dell' S_{r-2} -cono, i cui S_r -generatori proiettano le generatrici d' una rigata razionale normale del 4° ordine a direttrice rettilinea, con un'ipersuperficie cubica dell' S_{r+4} che passa per 3 degli S_r -generatori;

VII) l'ipersuperficie cubica dell' S_{r+1} ;

per $r = 3$

VIII) la $M_3^{(8)}$ dell' S_9 immagine del sistema delle quadriche dell' S_3 ;

IX) la $M_3^{(27)}$ dell' S_{13} immagine del sistema delle superficie cubiche dell' S_3 ;

X) la $M_3^{(16)}$ dell' S_{13} immagine del doppio del sistema delle superficie-sezioni della quadrica dell' S_4 ;

XI) la $M_3^{(32)}$ dell' S_{21} immagine del doppio del sistema delle superficie-sezioni d' un cono di VERONESE;

XII) la $M_3^{(36)}$ dell' S_{22} immagine della differenza tra il triplo del sistema delle superficie-sezioni del cono dell' S_6 (che proietta le generatrici della rigata razionale normale del 4° ordine e a direttrice rettilinea) e tre dei piani generatori del cono;

per $r = 4$

XIII) la $M_4^{(16)}$ dell' S_{14} immagine del sistema delle quadriche dell' S_4 ;

per $r \geq 4$

XIV) la $M_r^{(4)}$ dell' S_{r+2} base di un fascio di quadriche;

per $r = 6, 5, 4$

XV) la varietà grassmanniana $M_6^{(5)}$ dell' S_9 che rappresenta le rette dell' S_4 , o una sua $M_5^{(5)}$ o $M_4^{(5)}$ -sezione.

Queste varietà sono tutte razionali, con eccezione dell'ipersuperficie cubica generale di presunta irrazionalità. La $M_4^{(5)}$ del tipo XV si può considerare come proiezione della $M_4^{(16)}$ del tipo XIII. Per $r = 3$ i tipi I, V, VI

si possono considerare come proiezioni rispettivamente dei tipi VIII, XI, XII. Considerando i sistemi lineari rappresentativi delle M_3 nell' S_3 , abbiamo potuto concludere:

Un sistema lineare semplice di superficie razionali dello spazio si può trasformare cremonianamente in uno dei seguenti tipi (o in uno in essi contenuto):

1°) *sistema di superficie d'ordine n con un punto $(n - 1)$ -plo;*

2°) *sistema di superficie d'ordine n con una retta 1 multipla dell'ordine $n - 2$ (per $n = 2$ il sistema delle quadriche; se invece il sistema possiede inoltre una curva base segata in due punti dai piani per 1, esso è a curva-caratteristica iperellittica);*

3°) *sistema delle superficie del 3° ordine;*

4°) *sistema delle superficie del 4° ordine con conica doppia;*

5°) *sistema delle superficie del 4° ordine con tacnodo;*

6°) *sistema delle superficie del 6° ordine con un punto quadruplo e in esso lo stesso piano tangente quadruplo, e due rette doppie infinitesime nei successivi intorno del punto e nella giacitura del piano tangente; ed inoltre due punti doppi infinitamente vicini, con una retta doppia infinitesima nell'intorno del secondo.*

A questi sistemi si dovrebbe aggiungere il sistema rappresentativo dell'ipersuperficie cubica generale dell' S_4 , ove questa (in contrasto con le attuali previsioni) fosse razionale. Comunque verifico che questo sistema non può essere contenuto nei sei sistemi qui considerati (n. 26).

I sistemi rappresentativi delle $M_r (r > 3)$ sono dati ai nn. 27, 29, 30, 38.

Ho considerato anche le *irrazionalità numeriche* (n. 2) che intervengono nella rappresentazione delle M_r nell' S_r ; di modo che ad una parte dei risultati di questa memoria si può dare la seguente suggestiva interpretazione puramente algebrica:

Se un'equazione

$$(1) \quad f(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0, \quad (r \geq 4),$$

in cui f è una forma di grado $n \neq 3$, con le posizioni $x_i = \sum_0^3 y_j x_i^{(j)}$, ($i = 0, 1, \dots, r$), si trasforma in un'equazione $F(y_0, y_1, y_2, y_3) = 0$ che per valori generici delle $x_i^{(j)}$ si possa risolvere con delle equazioni parametriche razionali di due parametri essenziali, allora la (1) si può risolvere con delle equazioni parametriche razionali di $r - 1$ parametri essenziali

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}), \quad (i = 0, 1, \dots, r),$$

razionalmente invertibili. I coefficienti delle funzioni razionali φ_i appartengono al campo di razionalità individuato dai coefficienti della (1), ampliato con

radicali quadratici e cubici, e con le radici dell'equazione per la bisezione dell'argomento delle funzioni abeliane di genere 3 o 4, o delle funzioni iperellittiche di genere $p \geq 1$.

I. M_3 a curve-sezioni razionali o ellittiche.

1. Si abbia in uno spazio lineare S_m una varietà algebrica M_3 , irriducibile e di tre dimensioni, a superficie-sezioni F razionali. Di conseguenza la M_3 è completamente regolare e coi generi tutti nulli ⁽⁴⁾.

Se le curve-sezioni C della M_3 sono razionali è noto ⁽⁵⁾ che la M_3 è

1°) un fascio razionale di piani;

2°) o una quadrica;

3°) o un cono di VERONESE ⁽⁶⁾, o una sua proiezione.

Queste varietà sono dunque razionali e si possono rappresentare birazionalmente nell' S_3 con un sistema lineare di superficie di uno dei seguenti tipi:

1°) sistema di superficie d'un certo ordine n con retta-base $(n-1)pla$ (ed eventualmente altri elementi base);

2°) sistema delle quadriche per una conica;

3°) sistema delle quadriche tangenti in un punto ad un piano.

2. Vogliamo assegnare le irrazionalità numeriche che intervengono nella rappresentazione nell' S_3 di una M_3 a curve-sezioni razionali. Cioè, supposto proiettata la M_3 in modo generico in un S_4 e che

$$(3) \quad F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

sia la sua equazione e considerato come campo di razionalità (nel senso di KRONECKER) quello definito dai coefficienti dell'equazione (3), vogliamo indicare le irrazionalità numeriche che figurano nei coefficienti delle equazioni parametriche che riferiscono birazionalmente la M_3 all' S_3 .

Il problema delle irrazionalità numeriche è stato posto per primo dal NOETHER ⁽⁷⁾, il quale ha verificato che nella rappresentazione di una curva

⁽⁴⁾ FANO, loc. cit., ⁽³⁾, n. 1.

⁽⁵⁾ ENRIQUES, loc. cit., ⁽⁴⁾, n. 9 e per la successiva rappr. nell' S_3 il n. 10.

⁽⁶⁾ Chiameremo S_t -cono di VERONESE il cono che si ottiene proiettando da un S_t , indipendente da un S_5 , una superficie di VERONESE contenuta nell' S_5 . Per S_6 -cono diremo semplicemente cono.

⁽⁷⁾ NOETHER M., *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* [*Math. Annalen*], Bd. 3 (1871), pagg. 161-227.

razionale sopra una retta interviene (al più) un radicale quadratico. Questo problema è stato dall'ENRIQUES ⁽⁸⁾ esteso alle superficie razionali, e completamente risolto.

3. Quali sono le irrazionalità numeriche che intervengono nella rappresentazione nell' S_3 delle M_3 del n. 1?

1°) Nel riferire un fascio *razionale* di piani ad un fascio *lineare* interviene (al più) un radicale quadratico (n. 2).

2°) Per rappresentare una quadrica in uno spazio lineare, basta proiettarla da un suo punto; la cui determinazione introduce un radicale quadratico.

3°) Nella rappresentazione del cono di VERONESE in un S_3 non interviene alcuna irrazionalità aritmetica, poichè la rappresentazione di una superficie di VERONESE sopra un piano si effettua razionalmente (essendo individuata nella superficie la rete omaloidica delle sue coniche).

Possiamo quindi concludere: *Nella rappresentazione birazionale di un' M_3 a curve-sezioni razionali nell' S_3 interviene (al più) un radicale quadratico.*

4. Se le curve-sezioni C della M_3 , d'ordine $n > 3$, a superficie-sezioni razionali, sono *ellittiche* è pure noto ⁽⁹⁾ che la M_3 è razionale ed è rappresentabile nell' S_3 da un sistema lineare di superficie di uno dei seguenti tipi (o da un sistema contenuto in uno di questi):

per $n = 4$

1°) il sistema di superficie cubiche determinato da una quintica intersezione parziale di una quadrica (che può degenerare);

per $n = 5, 6, 7, 8, 9$

2°) il sistema ∞^{n+1} di superficie cubiche con un punto-base doppio, $9 - n$ rette-base per esso, ed in esso lo stesso cono quadratico tangente (questo sistema, rappresentativo d'un cono, per $n = 4$ rientra nel 1° tipo);

oppure: per $n = 5$

3°) il sistema ∞^5 di superficie cubiche determinato da una quartica di 2^a specie (che può degenerare);

⁽⁸⁾ ENRIQUES F., *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri* [« Math. Annalen », Bd. 49 (1897)].

⁽⁹⁾ ENRIQUES, loc. cit., ⁽¹⁾, n. 20. Che la nostra M_3 possa essere un fascio ellittico di piani è escluso dall'ipotesi che la superficie-sezione sia razionale.

per $n = 6$

4°) il sistema ∞^7 delle superficie cubiche passanti per 3 rette sghembe;

5°) il sistema ∞^7 delle superficie cubiche aventi un punto base doppio e contenenti una cubica gobba (che può degenerare) passante semplicemente per esso;

6°) il sistema ∞^7 delle superficie cubiche con un punto-base biplanare ed in esso il piano osculatore fisso, passanti per una cubica piana di cui il nominato punto è doppio;

per $n = 7, 8$

7°) il sistema ∞^8 o ∞^9 delle quadriche con un punto-base o risp. di tutte le quadriche;

per $n = 8$ anche:

8°) il sistema delle superficie del 4° ordine con punto-base triplo, due rette-base doppie per esso, ed in esso lo stesso cono tangente.

5. Per conoscere le irrazionalità numeriche (n. 2) che intervengono nella rappresentazione nell' S_3 delle M_3 del n. 4, basta osservare ⁽¹⁰⁾ che nella superficie-sezione generica F della $M_3^{(n)}$ normale dell' S_n , (a curve-sezioni ellittiche) esiste una curva irriducibile d'ordine $n-3$ o d'ordine $n-4$ dalla quale la superficie viene proiettata biunivocamente sopra un piano o una quadrica (dell' S_4), e quindi da quella curva la $M_3^{(n)}$ viene proiettata univocamente sopra un S_3 o una quadrica (dell' S_4).

Le irrazionalità numeriche che intervengono nella rappresentazione birazionale, sopra un piano o in un S_3 , di una superficie o di una $M_3^{(n)}$ ($n > 3$) a curve-sezioni ellittiche sono dunque le stesse, cioè ⁽¹¹⁾:

Le irrazionalità aritmetiche che intervengono nella rappresentazione birazionale nell' S_3 , di una $M_3^{(n)}$ ($n > 3$) razionale a curve-sezioni ellittiche, sono radicali quadratici e cubici, e le radici d'un'equazione per la bisezione delle funzioni abeliane di genere tre.

II. M_3 a superficie-sezioni razionali e a curve-sezioni di genere $\pi > 1$.

6. Supponiamo ora che le curve-sezioni C della M_3 abbiano il genere $\pi \geq 2$. Consideriamo nella M_3 (regolare e coi generi nulli, n. 1) il sistema $|F + \mu F'|$

⁽¹⁰⁾ ENRIQUES, loc. cit., (4), n. 12.

⁽¹¹⁾ ENRIQUES, loc. cit., (8), n. 8.

il quale sega sopra una F (depurato dalle eventuali componenti fisse) il sistema completo $|C^{(v)}|$, μ -aggiunto al sistema C della F ⁽¹²⁾.

Poichè la F è razionale, per un certo valore v di μ , il sistema $|C^{(v)}|$ è un sistema lineare, di dimensione $s \geq 1$ di curve irriducibili *razionali* o *ellittiche*, o un sistema costituito di gruppi di curve irriducibili di un fascio razionale di curve razionali ⁽¹³⁾.

7. 1^a IPOTESI: $C^{(v)}$ è razionale, cioè le superficie $(F + vF')$ sono a curve-sezioni razionali; e di queste superficie potremo considerare un fascio lineare. Oppure le $C^{(v)}$ siano composte con le curve razionali d'un fascio, quindi la M_3 contiene un fascio razionale di superficie a curve-sezioni razionali. Le superficie di questo fascio razionale (o lineare) possono essere rigate, allora la M_3 stessa è una *rigata*, rappresentabile nell' S_3 con un sistema lineare di superficie d'ordine n con un punto base multiplo dell'ordine $n - 1$ (ed eventualmente altri elementi base).

Oppure la superficie generica del fascio può essere una superficie di VERONESE (o una sua proiezione). Allora la M_3 si può rappresentare nell' S_3 con un sistema lineare di superficie d'ordine n con una retta multipla dell'ordine $n - 2$ (n. 3).

Oppure la superficie generica del fascio può essere una quadrica, e allora la M_3 è a curve-sezioni iperellittiche. Essa può rappresentarsi nell' S_3 con un sistema lineare di superficie d'ordine n con una retta l multipla dell'ordine $n - 2$, e curva-base incontrata in due punti dai piani per l (punti che possono essere anche nell'intorno di l) ⁽¹⁴⁾.

8. 2^a IPOTESI: $C^{(v)}$ è una curva ellittica, cioè la generica $(F + vF')$ è una superficie a curve-sezioni ellittiche. In questo caso il sistema $|F + (v + 1)F'|$ ha la dimensione zero, ed il sistema $|F + \mu F'|$, con $\mu \geq v + 2$, è virtuale.

⁽¹²⁾ SEVERI F., *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* [*« Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo »*, t. 28 (1909)], pagg. 32-87.

⁽¹³⁾ Se $|C^{(v)}|$ è un fascio di curve ellittiche, la F si può rappresentare nel piano in modo che a $|C^{(v)}|$ corrisponda un fascio di cubiche. Quindi al sistema $|C^{(v-1)}|$ corrisponde il sistema ∞^3 delle sestiche con 8 punti-base doppi, composto con un'involuzione I_2 [ENRIQUES, loc. cit., (2), n. 5, FANO, loc. cit., (3), n. 6]. Nè possono essere le $|C^{(v)}|$ composte con curve ellittiche di un fascio, poichè nel piano i corrispondenti gruppi di cubiche di un fascio si comporterebbero rispetto i punti-base come un fascio di HALPHEN, che non può essere un sistema aggiunto. Se $s = 2$ e $C^{(v)}$ sono ellittiche, nella rappresentazione piana della F a $|C^{(v)}|$ si può far corrispondere una rete di cubiche.

⁽¹⁴⁾ ENRIQUES, loc. cit., (4), n. 22. Si osservi che in questo ultimo caso la dimensione del sistema di quadriche non può essere > 1 , per l'ipotesi che il genere della curva sezione sia $\pi > 1$.

Se la dimensione del sistema lineare $|F + \nu F'|$ è $s \geq 2$, la curva-caratteristica di $|F + \nu F'|$ ha l'ordine s (tale essendo l'ordine della serie caratteristica del $|C^{(\omega)}|$ della F).

Se è $s > 2$, poichè su una F il sistema completo $|C^{(\omega)}|$ di curve ellittiche di dimensione $s > 2$ è *semplice*, ove $|F + \nu F'|$ sia composto con una congruenza di curve, queste dovranno essere rette: cioè la M_3 è una *rigata* (n. 7).

9. Se ciò per $s > 2$ non si verifica, osserviamo che il sistema $|2(F + \nu F')'| = |F + (2\nu + 1)F'|$ è virtuale (n. 8), cioè la curva-caratteristica del sistema $|F + \nu F'|$ è razionale. L'immagine proiettiva del sistema $|F + \nu F'|$ è dunque una M_3^* d'ordine $s - 2$, d'uno spazio lineare ad s dimensioni, a curve-sezioni razionali.

10. Se è $s = 3$, poichè le curve-caratteristiche del sistema omaloidico $|F + \nu F'|$ sono cubiche (n. 8), la M_3 viene rappresentata nell' S_3 dal sistema lineare delle superficie del terzo ordine (con eventualmente degli elementi base). Si tratta dunque di una $M_3^{(27)}$ dell' S_{19} (o di una sua proiezione). In questo caso è quindi $\nu = 2$, e le $(F + 2F')$, a curve sezioni ellittiche, sono del 9° ordine.

11. Se è $s = 4$, la M_3^* è una quadrica dell' S_4 . Poichè le curve caratteristiche di $|F + \nu F'|$ sono quartiche e le superficie della quadrica dell' S_4 sono le intersezioni complete della quadrica alle forme dell' S_4 ⁽¹⁵⁾, la M_3 è rappresentata sulla M_3^* dal sistema delle sezioni con le quadriche dell' S_4 . Si tratta dunque d'una $M_3^{(16)}$ dell' S_{13} , rappresentata nell' S_3 dal sistema lineare delle superficie del quarto ordine con conica doppia. Si constata così che in questo caso è $\nu = 1$.

12. Vogliamo far vedere che non è possibile avere $s \geq 5$. Infatti poichè il sistema $|C^{(\omega)}|$, $\mu \leq \nu$, è semplice ⁽¹⁶⁾ la C avrà il genere $\pi \geq 4$. Allora se è $s > 5$, la serie g_m^s segata dalle $|C^{(\omega)}|$ di una F su una C , avrà l'ordine $m > 9$; ciò che per una $(F + \nu F')$ razionale (n. 9) a curve-sezioni ellittiche non è possibile.

Se è $s = 5$ e $\nu = 1$, $|C^{(1)}|$ staccerebbe sulla C la serie canonica g_{10}^5 , ciò che conduce all'assurdo precedente.

⁽¹⁵⁾ SEVERI F., *Sulle varietà che rappresentano gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare* [*Annali di Mat.*, t. 24 (3), (1915)], pagg. 89-120 (pag. 91).

⁽¹⁶⁾ Vedi cit. ⁽¹³⁾.

Se infine $s=5$ e $\nu > 1$, rappresentiamo la F sopra un piano in modo che a $|C^{(5)}|$ corrispondono le cubiche per 4 punti P_1, P_2, P_3, P_4 . Al sistema delle C delle F corrisponderà nel piano un sistema di curve d'ordine $N \geq 9$ (poichè $\nu > 1$) coi punti P_i di molteplicità r_i . Da $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 < 2N$ (come si vede considerando i punti P_i come base di un fascio di coniche) segue $m = 3N - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) > N \geq 9$, cioè la serie g^s_m avrebbe ancora l'ordine $m > 9$, ciò che abbiamo visto essere assurdo.

13. Supponiamo ora $s=2$. Allora su una F il sistema $|C^{(2)}|$ è una rete di curve ellittiche. La F si può dunque rappresentare sopra un piano mediante un sistema lineare di curve il cui ν -aggiunto è il sistema delle cubiche con 7 punti base ⁽¹⁷⁾. La curva-caratteristica di $|F + \nu F'|$, in quanto ha con F due punti in comune (ove non si spezzi in due rette, nel qual caso M_3 è rigata, n. 7) è una conica. Abbiamo così nella M_3 una congruenza di coniche C_2 , di indice 1.

14. Se per $s=2$ è $\nu > 1$, allora il sistema $|F + (\nu - 1)F'|$ non è composto con la congruenza di coniche C_2 , perchè il sistema $|C^{(\nu-1)}|$ è semplice (n. 6). Su una $(F + (\nu - 1)F')$ razionale ⁽¹⁸⁾ il sistema $|F + \nu F'|$ sega (a meno di eventuali componenti fisse) il sistema completo (n. 6) aggiunto al sistema delle curve-sezioni della $(F + (\nu - 1)F')$. Ma poichè il sistema $\{|F + (\nu - 1)F'| + |F + \nu F'|\}' = |F + 2\nu F'|$ è virtuale (n. 8), la curva intersezione variabile di $|F + \nu F'|$ con la $(F + (\nu - 1)F')$ è razionale. Cioè il sistema $|F + \nu F'|$ determina sulla $|F + (\nu - 1)F'|$ una rete omaloidica. Da ciò segue in particolare che le superficie $(F + (\nu - 1)F')$ sono unisecanti le coniche C_2 .

Inoltre il sistema $|F + (\nu - 1)F'|$ è a curva-caratteristica razionale, poichè $\{2(F + (\nu - 1)F')\}' = |F + (2\nu - 1)F'|$ è virtuale. Perciò la M_3^* immagine del sistema $|F + (\nu - 1)F'|$ è una varietà a curve-sezioni razionali e in essa le C_2^* immagini delle coniche C_2 sono rette.

La superficie normale F^* dell' M_3^* , corrispondente ad una generica F dell' M_3 , ha come sistema delle curve-sezioni il sistema corrispondente

⁽¹⁷⁾ Vedi cit. ⁽¹³⁾.

⁽¹⁸⁾ Infatti poichè il sistema $|F + (\nu - 1)F'|$ ha almeno la dimensione 3 (n. 6) la $(F + (\nu - 1)F')$ è regolare {in base ad un noto teorema di CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébriques à plusieurs dimensions* [*Annales Sc. de l'École Naz. sup.* (Paris), t. 23 (3), (1906), pagg. 339-366]} e una sua eventuale biaggiunta, $(2\nu F')$, sarebbe una 2ν -aggiunta della F .

del $|C^{(\nu-1)}|$ di F , il cui aggiunto $C^{(\nu)}$ è, per ipotesi, una rete di curve ellittiche. La F^* si può quindi rappresentare sopra un piano col sistema delle sestiche con 7 punti base doppi. Essa è ⁽¹⁹⁾ la $F^{(8)}$ dell' S_6 intersezione d'un cono di VERONESE con una quadrica (non passante pel vertice del cono). Le generatrici di questo cono congiungono le coppie dell'involuzione individuata su F^* , cioè coincidono con le rette C_2^* : e in definitiva il cono di VERONESE coincide con la M_3^* .

Dunque la M_3 è rappresentata dentro al cono di VERONESE M_3^* dal sistema delle sezioni con le quadriche dell' S_6 . Essa ha quindi l'ordine 32, appartiene all' S_{21} , ed è rappresentata nell' S_3 dal sistema lineare delle superficie del quarto ordine con un tacnodo, cioè punto base doppio con retta doppia infinitesima nell'intorno del primo ordine (sistema doppio del sistema rappresentativo del cono di VERONESE, n. 1).

Dalla relazione $|F| = 2|F' + (\nu - 1)F'|$ segue $|F + 2(\nu - 1)F'| = 0$, cioè $2(\nu - 1) = \nu + 1$. Dunque se è $\nu > 1$ si ha $\nu = 3$. Quindi le superficie $(F + 3F')$ risultano dell'ottavo ordine.

15. Infine se $\nu = 1$, la F generica è la superficie dell'ottavo ordine incontrata al n. precedente. Quindi la M_3 è dell'ordine 8, appartiene all' S_7 , e si ottiene segnando un S_1 -cono di VERONESE con una quadrica Q non passante per la retta l , vertice del cono ⁽²⁰⁾.

Le ∞^2 coniche C_2 della $M_3^{(8)}$ incontrano perciò la retta l negli stessi due punti A, B (distinti o coincidenti) comuni alla retta l e alla quadrica Q . Questi punti sono quadrupli per la $M_3^{(8)}$ (essendo tali per il cono di VERONESE).

Dal punto A la $M_3^{(8)}$ si proietta in un cono M_3^* dell' S_6 , il cui vertice è il punto B^* proiezione di B , e le cui generatrici sono le proiezioni delle coniche C_2 . Questo cono dell' S_6 è del quarto ordine, e non contenendo un'infinità di piani, è un cono di VERONESE (n. 1).

Sopra il cono M_3^* la $M_3^{(8)}$ è rappresentata dal sistema delle intersezioni colle quadriche dell' S_6 che passano per la curva $C^{(8)}$, dell'ottavo ordine e di genere tre, traccia del cono intersezione della $M_3^{(8)}$ collo spazio S_6 tangente alla $M_3^{(8)}$ nel punto A .

16. Questa $M_3^{(8)}$ si può dunque considerare come una proiezione della $M_3^{(32)}$ (n. 4) fatta da una $C^{(16)}$, di genere tre, in essa contenuta.

⁽¹⁹⁾ CASTELNUOVO G., *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3* [*Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*], t. 25 (1890), n. 7.

⁽²⁰⁾ FANO, loc. cit., ⁽³⁾, n. 8.

Se scriviamo l'equazione del sistema lineare di superficie del quarto ordine con tacnodo, rappresentativo della $M_3^{(32)}$ nell' S_3 (in coordinate affini x, y, z), nel seguente modo

$$(4) \quad az^2 + 2g_2(x, y)z + h_4(x, y) = 0,$$

dove g_2 e h_4 sono polinomi generici in x, y del 2° e 4° grado; otteniamo il sistema lineare rappresentativo della $M_3^{(8)}$ assumendo *costanti* i coefficienti di $h_4(x, y)$.

17. Supponiamo ora che (sempre nell'ipotesi del n. 8) sia $s = 1$, cioè che il sistema $|C^{(v)}|$ d'una F sia un fascio di curve ellittiche.

La F può allora venire rappresentata sopra un piano in modo che al fascio $|C^{(v)}|$ corrisponda un fascio di cubiche; e che al sistema precedente $|C^{(v-1)}|$ corrisponda il sistema ∞^3 delle sestiche con 8 punti-base doppi $(^{21})$, composto con un'involuzione I_2 .

Il sistema di superficie $|F + (v-1)F'|$, che sega su una superficie-sezione F il sistema $|C^{(v-1)}|$ composto coll'involuzione I_2 , è dunque composto con una *congruenza di coniche* C_2 (oppure con coppie di rette di una congruenza di rette di indice 1, nel qual caso la M_3 è ancora rigata, n. 7).

18. Se è $v > 3$ il sistema $|F + (v-1)F'|$ sega sopra una $(F + (v-2)F')$ razionale $(^{22})$ un sistema lineare completo di curve *razionali*, poichè

$$(5) \quad \{|F + (v-2)F'| + |F + (v-1)F'|\}' = |F + (2v-2)F'|$$

è virtuale. Questo sistema completo di curve razionali essendo *semplice*, la superficie $(F + (v-2)F')$ è unisecante le coniche C_2 .

Se $v = 3$, dalla (5) segue che il sistema $|F + 2F'|$ determina su una $(F + F')$ un sistema di curve ellittiche. Poichè la dimensione di $|F + 2F'|$ è 3 (n. 17), quel sistema completo di curve ellittiche sarà *semplice*, cioè una superficie $(F + F')$ è unisecante le coniche C_2 .

19. Il sistema $|F + (v-2)F'|$, di dimensione ≥ 3 , poichè

$$(6) \quad \{2|F + (v-2)F'|\}' = |F + (2v-3)F'|,$$

ha per $v \geq 4$ la curva-caratteristica ellittica o razionale; quindi il sistema è *semplice*. Per $v = 3$ segue dalla (6) che $|F + F'|$ ha la curva-caratteristica C^* di genere 2. Il sistema $|C^*|$ di una $(F + F')$ può interpretarsi come aggiunto

⁽²¹⁾ Vedi cit. ⁽¹³⁾.

⁽²²⁾ Vedi cit. ⁽¹³⁾.

del sistema determinato nella $(F + F')$ dal sistema $|F - F'|$, ⁽²³⁾. Il sistema $|C^*|$ deve quindi essere semplice, poichè il suo ultimo aggiunto ⁽²⁴⁾ è un fascio di curve razionali (determinato da $|F + 3F'|$). Dunque in ogni caso il sistema $|F + (\nu - 2)F'|$ è semplice.

L'immagine proiettiva del sistema lineare semplice $|F + (\nu - 2)F'|$ è una M_3^* , che contiene una congruenza di rette C_2^* , immagini delle coniche C_2 della M_3 (unisecanti una superficie $(F + (\nu - 2)F')$).

Alla generica F di M_3 corrisponde nell' M_3^* una superficie F^* , rappresentata nel piano dal sistema lineare delle curve del nono ordine con otto punti-base tripli. Questa superficie F^* è del nono ordine, ed è l'intersezione del cono K dell' S_6 proiettante dal vertice O una rigata razionale normale, del quarto ordine e a direttrice rettilinea, con una ipersuperficie cubica passante per tre arbitrari fra i piani generatori di quel cono K ⁽²⁵⁾.

Le generatrici di questo cono K congiungono le coppie dell'involuzione I_2 individuata nella F^* , coincidono dunque con le rette C_2^* , cioè la M_3^* coincide col cono K . La M_3 è dunque rappresentata nel cono K dal sistema lineare $|F^*|$ delle superficie sezioni del cono con le forme cubiche dell' S_6 passanti per tre piani arbitrari di quel cono. Le coniche C_2 della M_3 passano per un punto, immagine del vertice del cono K ; nel quale le forme cubiche hanno l' S_6 tangente fisso.

20. Il sistema lineare di superficie rappresentativo del cono K (n. 19) nell' $S_6(x, y, z)$ si può dare con la seguente equazione

$$(7) \quad az + y(bx + cy) + \varphi_3(x, y) = 0,$$

dove φ_3 è la generica forma del terzo grado in x, y . Ai piani di K corrispondono nell' S_3 i piani per l'asse z .

Per ottenere il sistema lineare rappresentativo della M_3 basta che al sistema lineare *triplo* del sistema (7) imponiamo la condizione di contenere tre generici piani fissi per l'asse z , rappresentati complessivamente da un'equazione $\psi_3(x, y) = 0$. Il sistema lineare triplo di (7) è

$$(8) \quad a_0z^3 + z^2(yf_1 + f_3) + z(y^2f_2 + yf_4 + f_6) + y^2f_5 + yf_7 + f_9 = 0,$$

dove f_i è una forma in x, y di grado i . Se ora il primo membro della (8) si

⁽²³⁾ FANO, loc. cit., (3), n. 14; ove è dimostrato in modo diretto ma laborioso che il sistema $|F + F'|$ non può essere composto con un'involuzione di punti.

⁽²⁴⁾ Vedi cit. ⁽¹³⁾.

⁽²⁵⁾ FANO, loc. cit., (3), n. 9.

scompone in un prodotto del quale un fattore è $\psi_3(x, y)$, il fattore residuo, posto uguale a zero, cioè

$$(9) \quad az^2 + z(y\varphi_1 + \varphi_3) + y^3 + y^2\varphi_2 + y\varphi_4 + \varphi_6 = 0,$$

dove φ_i è una forma in x, y di grado i , dà l'equazione del sistema lineare di superficie rappresentativo della M_3 (n. 19).

Si tratta di un sistema lineare di superficie rappresentabili doppiamente sul piano (x, y) con curve di diramazione

$$(10) \quad ay^3 + y^2(\varphi_2 - \varphi_1^2) + y(\varphi_4 - 2\varphi_1\varphi_3) + \varphi_6 - \varphi_3^2 = 0,$$

cioè sestiche che hanno nell'origine (e nella direzione dell'asse x) due punti tripli infinitamente vicini. Abbiamo così una conferma che la superficie generica del sistema lineare (9) è razionale. Ed è noto ⁽²⁶⁾ che il sistema (9) è un sistema di superficie del 6° ordine che hanno il punto Z improprio dell'asse z quadruplo, col piano improprio quadruplo tangente in Z , e due rette doppie infinitesime nei successivi intorni di Z e nella giacitura del piano improprio; ed inoltre nell'origine e nella direzione dell'asse x due punti doppi infinitesimi, con una retta doppia infinitesima nell'intorno del secondo.

La dimensione del sistema (9) è 22, cioè la M_3 appartiene all' S_{22} . La superficie-sezione F appartiene quindi all' S_{24} , dunque è rappresentata nel piano dal sistema delle curve $C^{(48)}$, del 18° ordine, con 8 punti base sestupli (n. 17). L'ordine della F , quindi della M_3 , è dunque 36. Siamo arrivati a queste conclusioni nell'ipotesi $\nu \geq 3$, ma ora abbiamo constatato che il solo caso possibile è $\nu = 5$.

21. Se infine è $\nu = 2$, la superficie-sezione F stessa è la superficie del 9° ordine incontrata al n. 19. Quindi la M_3 è pure dell'ordine 9, appartiene all' S_7 , ed è l'intersezione residua del cono K_4 , i cui S_3 -generatori proiettano dal vertice S_1 le rette d'una rigata razionale normale del quarto ordine a direttrice rettilinea, con un'ipersuperficie cubica Γ_6 dell' S_7 che passa per 3 degli S_3 -generatori del cono ⁽²⁷⁾.

Questi 3 S_3 stanno in un S_6' che è tangente alle Γ_6 lungo tutta la retta S_1 . Perciò la Γ_6 ha sulla retta S_1 due punti doppi A e B , quindi sega i piani-generatori del cono K_4 nelle coniche C_2 della $M_3^{(9)}$ che passano per A e B ; e sega gli S_3 -generatori di K_4 in superficie cubiche Γ_2 coi punti doppi A e B .

⁽²⁶⁾ ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* [Cedam, Padova 1932], pagg. 371, 382.

⁽²⁷⁾ FANO, loc. cit., (3). n. 9; dove si fa uno studio esauriente di questa varietà, del quale qui do un sunto.

Il cono quadrico tangente alla Γ_6 nel punto doppio A contiene i tre S_3 -generatori di K appartenenti all' S_6 . Perciò la sua intersezione colla $M_3^{(9)}$ si spezza in due sezioni iperpiane S_6' e S_6'' . L'intersezione dell' S_6'' è data dal cono d'ordine 9 e genere 4 luogo delle rette della $M_3^{(9)}$ che escono da A .

Dal punto A la $M_3^{(9)}$ si proietta sopra S_6 in un cono K (n. 19) il cui vertice e la proiezione di B . Su K la $M_3^{(9)}$ viene rappresentata dal sistema delle superficie $F_2^{(9)}$ che hanno in comune una sezione iperpiana di K (traccia nell' S_6 del cono delle rette della $M_3^{(9)}$ per A e contenute nell' S_6'').

Questa $M_3^{(9)}$ si può dunque considerare come proiezione della $M_3^{(36)}$ da una sua curva $C^{(9)}$, di genere 4. Dal sistema lineare (9), rappresentativo della $M_3^{(36)}$ si ottiene quello rappresentativo della $M_3^{(9)}$ attribuendo valori costanti ai coefficienti delle forme $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6$:

22. Riassumiamo i tipi di varietà algebriche M_3 a superficie-sezioni razionali e a curve-sezioni di genere $\pi > 1$ che abbiamo riscontrati:

- 1°) M_3 rigata razionale (nn. 7, 8, 13, 17);
- 2°) M_3 che contiene un fascio razionale di superficie di VERONESE (n. 7);
- 3°) M_3 che contiene un fascio di quadriche (n. 7);
- 4°) $M_3^{(27)}$ dell' S_{19} rappresentata nell' S_3 dal sistema delle superficie del terzo ordine (n. 10);
- 5°) $M_3^{(16)}$ dell' S_{13} immagine del doppio del sistema delle superficie-sezioni di una quadrica dell' S_4 (n. 11);
- 6°) $M_3^{(32)}$ dell' S_{21} immagine del doppio del sistema delle superficie-sezioni di un cono di VERONESE (n. 14);
- 7°) $M_3^{(9)}$ dell' S_7 intersezione di un S_1 -cono di VERONESE con una quadrica non passante pel il vertice del cono (proiezione della $M_3^{(32)}$ precedente da una sua curva $C^{(16)}$), (n. 15);
- 8°) $M_3^{(36)}$ dell' S_{22} rappresentate nel cono dell' S_6 che proietta dal vertice una superficie rigata razionale normale, del quarto ordine a direttrice rettilinea, dal sistema delle sezioni coll'ipersuperficie cubiche dell' S_6 che passano per tre piani generatori del cono (n. 19);
- 9°) $M_3^{(9)}$ dell' S_7 intersezione del S_1 -cono, i cui S_3 generatori proiettano una superficie rigata (come al tipo 8°), con un'ipersuperficie cubica dell' S_7 passante per tre degli S_3 generatori (proiezione della $M_3^{(36)}$ precedente da una sua curva $C^{(9)}$) (n. 21).

23. I relativi sistemi lineari rappresentativi di superficie razionali dell' S_3 sono:

- 1°) sistema di superficie d'ordine n con un punto $(n-1)$ -plo;

- 2°) sistema di superficie d'ordine n con una retta multipla dell'ordine $n-2$;
 3°) sistema di superficie d'ordine n con una retta l multipla dell'ordine $n-2$, ed una curva-base segata in due punti dai piani per l ;
 4°) sistema delle superficie del 3° ordine;
 5°) sistema delle superficie del 4° ordine con conica doppia;
 6°) sistema delle superficie dell'4° ordine con un tacnode P ;
 7°) sistema che si deduce dal 6°) imponendo una quartica base in un piano non passante per P ;
 8°) sistema lineare rappresentato da (9);
 9°) sistema che si deduce dal precedente imponendo la sestica intersezione col piano xy come curva base.

Nell'introduzione abbiamo tenuto conto che i sistemi 3°), 7°), 9°) sono contenuti rispettivamente nei sistemi 2°), 6°), 8°). Anche i sistemi dei nn. 1 e 4 sono contenuti nei sistemi 1°), 2°) e 4°); precisamente quelli di quadriche nel 2°) per $n = 2$.

Si può anche osservare che un sistema lineare di superficie razionali del 4° ordine, dei tipi $F_4^{(2)}$ e $F_4^{(3)}$ della classificazione del NOETHER si possono trasformare in particolari sistemi lineari dei tipi 8°) e 2°).

III. Irrazionalità numeriche nella rappresentazione nell' S_3 delle M_3 a superficie-sezioni razionali.

24. Analizziamo quali sono le irrazionalità numeriche (n. 2) che intervengono nell'effettuare di una M_3 del n. 22 la rappresentazione nell' S_3 del n. 23.

1°) Le irrazionalità numeriche che intervengono nella rappresentazione nell' S_3 di una rigata sono quelle che intervengono nella rappresentazione piana di una superficie-sezione razionale, cioè ⁽²⁸⁾ radicali quadratici e cubici, e le radici di una equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliani di genere 3 o 4, o delle funzioni iperellittiche di genere $p \geq 1$.

2°) Una superficie di VERONESE si può riferire ad un piano senza l'introduzione di alcuna irrazionalità. Invece per riferire gli elementi del fascio razionale ai piani di un fascio dell' S_3 bisognerà (eventualmente) introdurre un radicale quadratico.

3°) Per rappresentare nell' S_3 l' M_3 (a curve-sezioni iperellittiche) che contiene un fascio razionale di quadriche basterà determinare una curva (razionale) unisecante le quadriche del fascio, e riferire questa curva ad una

⁽²⁸⁾ ENRIQUES, loc. cit., (3), n. 11.

retta. L'esistenza di una tale curva è stata constatata dal NOETHER ⁽²⁹⁾, e le irrazionalità numeriche che intervengono nella sua determinazione sono state precisate dall'ENRIQUES ⁽³⁰⁾. Si tratta delle radici dell'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche di genere $p \geq 1$ (ed eventualmente un radicale quadratico).

4°) La $M_3^{(27)}$ dell' S_{19} si rappresenta razionalmente nell' S_3 , poichè in essa è individuato un sistema omaloidico.

5°) La $M_3^{(16)}$ dell' S_{13} si rappresenta razionalmente in una quadrica dell' S_4 . Per rappresentare la quadrica nell' S_3 basta determinare un suo punto, cioè introdurre un radicale quadratico.

6°) La $M_3^{(32)}$ dell' S_{21} si rappresenta razionalmente sul cono di VERONESE, e poichè questo cono si rappresenta razionalmente nell' S_3 (n. 3), in definitiva la $M_3^{(32)}$ si rappresenta nell' S_3 senza l'introduzione di alcuna irrazionalità numerica.

7°) Per rappresentare la $M_3^{(8)}$ dell' S_7 nell' S_3 basta fissare uno dei due punti nei quali la retta, vertice dell' S_1 -cono di VERONESE, incontra la quadrica (n. 17), cioè introdurre un radicale quadratico.

8°) La $M_3^{(36)}$ dell' S_{22} (per gli stessi motivi della $M_3^{(32)}$ del tipo 6°) si può rappresentare nell' S_3 senza l'introduzione d'irrazionalità numeriche.

9°) Per rappresentare nell' S_3 la $M_3^{(9)}$ dell' S_7 basta (n. 21) individuare uno dei due punti A e B , cioè estrarre un radicale quadratico.

25. Possiamo così enunciare il seguente teorema (raccolgendo anche i risultati dei nn. 1, 3, 4, 5): *Una M_3 algebrica a superficie-sezioni razionali (che non sia l'ipersuperficie cubica generale dell' S_4) è razionale; e si può rappresentare birazionalmente nell' S_3 estraendo radicali quadratici e cubici, e risolvendo un'equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere 3 o 4, o delle funzioni iperellittiche di genere $p \geq 1$.*

Questo teorema ammette un'interpretazione puramente algebrica che (per $r \geq 3$) è stata scritta nell'introduzione.

IV. Un'osservazione sull'ipersuperficie cubica generale dell' S_4 .

26. Vogliamo constatare che in nessuno dei dieci sistemi lineari di superficie razionali, del n. 24, può essere contenuto un sistema lineare rappresentativo dell'ipersuperficie cubica generale Γ dell' S_4 .

⁽²⁹⁾ NOETHER, loc. cit., ⁽⁸⁾.

⁽³⁰⁾ ENRIQUES, loc. cit., ⁽⁹⁾, n. 9.

Il sistema 1° si esclude perchè riferito ad una rigata. Tutti i sistemi rimanenti, tranne il 4°, si escludono perchè l'ipersuperficie Γ non contiene una congruenza di coniche trasformabile in una stella di rette.

Per escludere anche il tipo 4°, osserviamo che se un'ipersuperficie cubica Γ è rappresentata nell' S_3 da un sistema di superficie cubiche, essa contiene un sistema omaloidico $|F^*|$ di superficie a curve-sezioni ellittiche. Ora è noto che una superficie razionale a curve-sezioni ellittiche ha al più l'ordice 9; ed è noto che le superficie della Γ sono le intersezioni complete della Γ con le forme dell' S_4 .

Dunque le F^* potrebbero avere gli ordini 3 o 9. Tre si esclude, poichè per una Γ priva di punti doppi non si può generare un sistema omaloidico mediante le superficie-sezioni.

Il sistema omaloidico $|F^*|$, di superficie a curve-sezioni ellittiche, non può essere segato su Γ neanche da un sistema lineare $|M|$ d'ipersuperficie cubiche dell' S_4 . Infatti, consideriamo una superficie-sezione generica F della Γ e rappresentiamola sopra un piano mediante il sistema delle cubiche per 6 punti-base P_1, \dots, P_6 , immagini di 6 rette r_1, \dots, r_6 della Γ .

Poichè le rette r_1, \dots, r_6 non possono appartenere (per la genericità delle F) alla curva-base, contenuta in Γ , del sistema $|M|$, le curve-sezioni di questo sistema con la F saranno rappresentate nel piano da un sistema ∞^3 di curve del nono ordine $C^{(9)}$, coi punti tripli P_1, \dots, P_6 ed altri punti multipli, non appartenenti agli intorni di P_1, \dots, P_6 , tali da fare abbassare il genere delle $C^{(9)}$ da 10 a 1. Ora si vede che ciò non è possibile, perchè già nel caso più favorevole che le $C^{(9)}$ avessero, oltre ai 6 punti tripli P_i , un punto quadruplo e un punto triplo, la dimensione del sistema $C^{(9)}$ sarebbe 2.

V. $M_r (r \geq 4)$ a curve-sezioni razionali o ellittiche.

27. Si abbia nello spazio lineare S_m una varietà algebrica $M_r (r > 3)$ a superficie-sezioni F razionali.

Se le curve-sezioni C della M_r sono razionali si vede facilmente (n. 1) che la M_r è

- 1°) un fascio rezionale di S_{r-1} ;
- 2°) o una quadrica;
- 3°) o un S_{r-3} -cono di VERONESE.

Queste varietà sono dunque razionali e si possono rappresentare nell' S_r con un sistema lineare di ipersuperficie Φ_{r-1} di uno dei seguenti tipi:

- 1°) sistema delle $\Phi_{r-1}^{(n)}$, d'ordine n , con un S_{r-2} -base $(n-1)$ -plo (ed eventualmente altri elementi base);

2°) sistema delle quadriche dell' S_r per una quadrica d'un S_{r-1} ;

3°) sistema delle quadriche dell' S_r che hanno un S_{r-1} -tangente fisso nei punti d'un S_{r-3} .

Le irrazionalità numeriche che intervengono in queste rappresentazioni sono evidentemente (come al n. 3) al più un radicale quadratico.

28. Se le curve-sezioni C della M_r sono ellittiche è noto ⁽³⁴⁾ che una M_r ($r > 3$) non conica è

1°) la M_r ⁽⁴⁾ dell' S_{r+2} base d'un fascio di quadriche;

2°) o la varietà grassmanniana M_6 ⁽⁵⁾ dell' S_9 che rappresenta le rette dell' S_4 , o una M_5 ⁽⁵⁾ o M_4 ⁽⁵⁾ che si ottiene segandola con uno spazio a 8 o 7 dimensioni;

3°) o la V_4 ⁽⁶⁾ dell' S_8 di SEGRE che rappresenta le coppie di punti di due piani;

4°) o la V_4 ⁽⁶⁾ dell' S_8 intersezione residua di un S_2 -cono di VERONESE con una quadrica che ha in comune con esso uno dei suoi ∞^2 coni quadratici a quattro dimensioni;

5°) o un'ipersuperficie cubica dell' S_{r+1} .

Si osservi che queste varietà sono al più del 6° ordine.

29. Con l'esclusione del tipo 5°) queste varietà sono certamente razionali. Diamo dei tipi 1°) e 2°) i sistemi lineari rappresentativi nell' S_r .

Consideriamo la M_r ⁽⁴⁾ dell' S_{r+2} base d'un fascio di quadriche, e siano φ e ψ due quadriche del fascio. In un punto generico P della M_r ⁽⁴⁾ consideriamo l' S_{r-2} comune ai due spazi S_{r-1} e S'_{r-1} tangenti in P rispettivamente a φ e ψ . I due coni quadratici intersezioni rispettive dell' S_{r-2} con φ e ψ hanno delle generatrici in comune. Una di queste, r , è dunque una retta appartenente alla M_r ⁽⁴⁾ e dalla quale essa si proietta semplicemente sopra un S_r complementare.

Scelta la retta r come lato O_0, O_1 della piramide fondamentale delle coordinate nell' S_{r+1} , le equazioni di φ e ψ saranno

$$(11) \quad \begin{aligned} a_1 x_0 + b_1 x_1 + b_2 &= 0 \\ c_1 x_0 + d_1 x_1 + d_2 &= 0, \end{aligned}$$

dove a_i, b_i, c_i, d_i sono forme di x_2, \dots, x_{r-2} di grado uguale al rispettivo

⁽³⁴⁾ SCORZA, loc. cit., (4), (qui si esclude il fascio ellittico di S_{r-1} per il fatto che la superficie-sezione è razionale).

indice. Rivolvendo le (11) rispetto ad x_0, x_1 si ottengono le equazioni parametriche della $M_r^{(4)}$. Essa è dunque rappresentata nell' S_r dal sistema lineare delle ipersuperficie cubiche $\Phi_{r-1}^{(3)}$ che hanno come varietà-base una $\Phi_{r-2}^{(5)}$, ulteriore intersezione di una quadrica, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = 0$, e di un'ipersuperficie cubica, $\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} = 0$, le quali hanno in comune un S_{r-2} , di equazioni $a_1 = c_1 = 0$.

Le irrazionalità numeriche (n. 2) che intervengono in questa rappresentazione provengono dalla determinazione della retta r , cioè dalla risoluzione di un sistema di due equazioni di 2° grado, dunque radicali quadratici e cubici.

30. La varietà grassmanniana $M_6^{(5)}$ dell' S_9 immagine delle rette dell' S_4 è razionale, e si proietta semplicemente da un suo piano S_2 (immagine di un piano rigato α dell' S_4) sopra un S_6 . Un S_4 generico per l' S_2 sega la $M_6^{(5)}$ ulteriormente una conica incidente il piano S_2 . Alle stelle di rette dell' S_4 i cui centri appartengono al piano α corrispondono spazi S_3 della $M_6^{(5)}$ incidenti il piano S_2 in rette e contenuti nell' S_3 tangente alla $M_6^{(5)}$ lungo l' S_2 (S_3 rappresentativo del complesso speciale delle rette dell' S_4 incidenti il piano α). Questi S_3 determinano un insieme ∞^2 di spazi S_4 per l' S_2 , segati dall' S_6 in una $\Phi_3^{(3)}$ rigata razionale normale (appartenente all' S_6 intersezione dell' S_3 tangente coll' S_6). La $M_6^{(5)}$ viene quindi rappresentata dal sistema lineare delle quadriche dell' S_6 per la $\Phi_3^{(3)}$.

Anche una $M_5^{(5)}$ o una $M_4^{(5)}$ sezione della $M_6^{(5)}$ rispettivamente con un S_3 o un S_7 contiene (almeno) un piano S_2 , dal quale si proietta quindi semplicemente sopra un S_5 o rispettivamente un S_4 . Anzi una $M_4^{(5)}$ -sezione generica contiene un determinato piano S_2 .

Infatti i piani totali di un complesso lineare di rette dell' S_4 passano per il suo punto singolare ⁽³²⁾, quindi i piani totali comuni a due complessi passano per la retta l congiungente i loro punti singolari. Un S_3 generico dell' S_4 taglia la l in un punto P dal quale esce nell' S_3 una retta comune ai due complessi. Questa retta individua, assieme alla l , il piano totale comune ai due complessi di rette. Dunque:

La $M_5^{(5)}$ è rappresentata dalle quadriche dell' S_5 che passano per una rigata cubica dell' S_4 ; e la $M_4^{(5)}$ è rappresentata dal sistema delle quadriche dell' S_4 per una cubica dell' S_3 .

⁽³²⁾ Si ricordi che in uno spazio lineare di dimensione pari un complesso lineare generico di rette possiede un punto singolare, tale che tutte le rette per questo punto fanno parte del complesso.

Nella $M_4^{(5)}$ essendo individuato il piano S_2 , queste rappresentazioni delle $M_6^{(5)}$, $M_5^{(5)}$ e $M_4^{(5)}$ nei rispettivi spazi lineari si effettua sazionalmente.

Le $M_4^{(6)}$ di SCORZA (tipi 3° e 4°) contengono una congruenza razionale di piani di indice uno, perciò fanno parte del tipo 1° che incontreremo al n. 32.

Fra i sistemi lineari noti di ipersuperficie dell' S_r ($r \geq 4$) a curva-caratteristica ellittica ci sono ancora *il sistema delle ipersuperficie cubiche* $\Phi_{r-1}^{(3)}$ dell' S_r con una $\Phi_{r-2}^{(6)}$ base, *intersezione completa di una forma quadrica e una forma cubica dell' S_r* (rappresentativo dell'ipersuperficie cubica dell' S_{r+1} con almeno un punto doppio); e, per $r = 2m$, ⁽³³⁾ *il sistema delle ipersuperficie del 4° ordine* $\Phi_{2m-1}^{(4)}$ dell' S_{2m} , con una $\Phi_{2m-2}^{(9)}$ -base dotata di due spazi doppi indipendenti S'_{m-1} e S''_{m-1} (doppi anche per le $\Phi_{2m-1}^{(4)}$ intersezione completa di due forme cubiche dell' S_{2m} che hanno rispettivamente uno spazio S_{m-1} doppio e l'altro semplice (rappresentativo di una $M_{2m}^{(3)}$ dell' S_{2m+1} con due spazi lineari S'_m e S''_m , priva di punti doppi).

VI. M_r ($r \geq 4$) a superficie-sezioni razionali e a curve-sezioni di genere $\pi > 1$.

31. Supponiamo di avere una varietà algebrica M_r ($r \geq 4$) a superficie-sezioni F razionali e a curve-sezioni C di genere $\pi > 1$.

1°) Se la M_3 -sezione è del tipo 1°) (n. 22), cioè rigata razionale, la M_r contiene una congruenza razionale di indice uno di spazi lineari S_{r-2} ; e quindi è razionale.

2°) La M_3 -sezione sia del tipo 2°), cioè contenga un fascio di superficie di VERONESE, razionale o lineare. Se il fascio è *lineare*, la M_3 è rappresentabile nell' S_3 senza l'introduzione di irrazionalità numeriche (n. 24), quindi la M_r è razionale.

Se il fascio è razionale, si considerino le M_3 -sezioni che contengono una medesima superficie-sezione F . I fasci di superficie a curve-sezioni razionali delle diverse M_3 per F individuano su F lo stesso (n. 7) fascio razionale di curve (razionali). Il radicale quadratico che interviene nella rappresentazione della M_3 per l' F nell' S_3 non dipende dunque dai parametri variabili della M_3 ; cioè la M_r è razionale (riferite le M_3 per F agli S_3 d'un S_r per un S_2 , della M_3 generica si potrà effettuare la rappresentazione sul corrispondente S_3).

⁽³³⁾ MORIN U., *Un problema d'analisi indeterminata di terzo grado* [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », t. 1 (2), 1939].

3°) Supponiamo che la M_3 -sezione contenga un fascio di quadriche, le quali individuano su una superficie-sezione F un determinato fascio di coniche (n. 7). Considerando allora le M_3 -sezioni per una F generica, ed in questa una curva unisecante le coniche del fascio, si può, come al tipo 2°), concludere che la M_r è razionale.

4°) Se la M_3 -sezione è del tipo 4°) (n. 22) la M_r è razionale, poichè la M_3 si rappresenta razionalmente nell' S_3 (n. 24).

5°) Se la M_3 -sezione è del tipo 5°), essa si può rappresentare razionalmente sopra una quadrica dell' S_4 (n. 24). Se consideriamo allora le M_3 per una medesima F (sulla quale abbiamo fissato un punto) possiamo concludere come al tipo 2°) che la M_r è razionale.

6°) Se la M_3 -sezione è del tipo 6°), la M_r è razionale poichè la M_3 si rappresenta razionalmente nell' S_3 (n. 24).

7°) La M_3 -sezione sia del tipo 7°), cioè l'intersezione d'un S_1 -cono di VERONESE con una quadrica dell' S_7 , non passante per l' S_1 -vertice del cono. Allora la M_r appartiene all' S_{r+4} ed è l'intersezione d'un S_{r-2} -cono di VERONESE con una quadrica Q_{r+3} dell' S_{r+4} non passante per lo S_{r-2} -vertice del cono. Così anche in questo caso la M_r è razionale.

8°) Se la M_3 -sezione è del tipo 8°), la M_r è razionale, poichè la M_3 si rappresenta razionalmente nell' S_3 (n. 24).

9°) Infine se la M_3 -sezione è del tipo 9°) (n. 21), la M_r è del 9° ordine, appartiene all' S_{r+4} ed è l'intersezione residua dell' S_{r-2} -cono, i cui S_r -generatori proiettano dal vertice S_{r-2} le rette d'una rigata razionale normale a direttrice rettilinea, con un'ipersuperficie cubica Γ_{r+3} dell' S_{r+4} che passa per 3 degli S_r -generatori.

Questi 3 S_r -generatori stanno in un S_{r+3} che risulta tangente alla Γ_{r+3} lungo tutto l' S_{r-2} -vertice. Perciò la Γ_{r+3} possiede dentro l' S_{r-2} una quadrica Q_{r-3} luogo di punti doppi. Da uno A di questi la $M_r^{(9)}$ si proietta sopra un S_{r-3} -cono (del solito tipo), perciò la $M_r^{(9)}$ è razionale.

32. In una M_r ($r \geq 4$) a superficie-sezioni F razionali e a curve-sezioni C di genere $\pi > 1$, quindi *razionale* (n. 31), consideriamo le M_{r-1} -sezioni. Il sistema $V_{r-1}^{(\mu)} = |(r-2)M_{r-1} + \mu M'_{r-1}|$, depurato dalle eventuali componenti fisse, sega sopra una F il sistema $|C^{(\mu)}|$, μ -aggiunto al sistema $|C|$ della F (n. 6). Per un certo valore ν di μ , $|C^{(\nu)}|$ sarà (n. 7) un sistema lineare, di dimensione $s \geq 1$, di curve razionali o ellittiche irriducibili, o un sistema costituito di gruppi di curve irriducibili di un fascio razionale di curve razionali.

Se le $C^{(\nu)}$ sono razionali, o composte con curve razionali, abbiamo nella M_r ,

(almeno) un fascio (lineare o razionale) di $V_{r-1}^{(v)}$ a curve-sezioni razionali (n. 27). Quindi la M_r contiene:

- 1°) una congruenza razionale di spazi lineari S_{r-2} ;
- 2°) un fascio di S_{r-4} -coni di VERONESE;
- 3°) un fascio di quadriche (ed è quindi a curve-sezioni iperellittiche).

33. Se le $C^{(v)}$ sono ellittiche, la M_r contiene un sistema di dimensione $s \leq 4$ (n. 13) di $V_{r-1}^{(v)}$ a curve-sezioni ellittiche.

Supponiamo $s=3$ e $r=4$. Il sistema $|V_3^{(v)}|$ determina su una $M_3^{(27)}$ -sezione un sistema omaloidico (n. 10), quindi $|V_3^{(v)}|$ è composto con un sistema di rette di indice uno. Ma la $V_3^{(v)}$, a curve-sezioni ellittiche è del 9° ordine (n. 10), quindi un cono (n. 4). Cioè la $M_4^{(27)}$ stessa è il cono che da un punto proietta la $M_3^{(27)}$ del tipo noto (oppure una sua proiezione).

Quindi per $s=3$ ed $r \geq 4$ la M_r è il cono i cui S_{r-3} -generatori proiettano da un S_{r-4} una $M_3^{(27)}$ del tipo 4°, (34).

34. Le $C^{(v)}$ essendo ancora ellittiche, sia $s=4$ ed $r=4$. Sarà allora (n. 11) $v=1$. Il sistema $|V_3^{(1)}|$ non è composto con un sistema di curve, poichè esso determina in una M_3 -sezione un sistema lineare di superficie semplice. E poichè il grado di questo sistema è 2 (n. 11), le curve-caratteristiche del sistema $|V_3^{(1)}|$ sono coniche. Il sistema $|V_3^{(1)}|$, di dimensione $s=4$, è dunque semplice: cioè un sistema omaloidico. Mediante questo sistema omaloidico la M_4 è rappresentata nell' S_4 dal sistema lineare delle quadriche. Si tratta quindi di una $M_4^{(16)}$ dell' S_{14} . Le varietà $|V_3^{(1)}|$ risultano così dell'8° ordine.

Supponiamo ora $r > 4$. Allora il sistema $|V_{r-1}^{(1)}|$, che determina in una M_4 -sezione un sistema omaloidico, sarà composto con un sistema razionale ∞^4 di spazi lineari S_{r-4} .

Sia in particolare $r=5$. Le $V_4^{(1)}$ sono segate da una M_4 -sezione nelle $V_3^{(1)}$

(34) A questa conclusione si può arrivare direttamente applicando un teorema dello SCORZA G., *Su una certa classe di varietà razionali* [« Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », t. 28 (1909), pagg. 400-401] in cui si afferma che se le sezioni di una $M_{r+1}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ con gli $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ dello spazio ambiente sono delle M_r^n rappresentate sopra un S_r dal sistema lineare di tutte le sue forme d'ordine n allora la $M_{r+1}^{n^r}$ è un S_{i-1} -cono proiettante dal vertice una cosiffatta M_r^n .

dell'8° ordine. Ma le $V_4^{(4)}$ a curve-sezioni ellittiche e dell'8° ordine sono coni (n. 28), quindi la M_5 stessa è un cono ⁽³⁵⁾.

Dunque per $r > 4$ la $M_r^{(16)}$ è un cono dell' S_{r+10} i cui S_{r-4} -generatori proiettano da un S_{r-5} la $M_4^{(16)}$ d'un S_{14} imagine del sistema delle quadriche dell' S_4 (oppure una sua proiezione).

35. Supponiamo ora $s = 2$. Allora il sistema $|V_{r-1}^{(v)}|$ è composto con una congruenza di quadriche Q_{r-2} , di indice 1. Per v sono possibili i valori 3 oppure 1 (nn. 14, 15).

Se $v = 3$, e per ora $r = 4$, le $|V_3^{(3)}|$ sono dell'8° ordine (n. 14), quindi dei coni, oppure sono rappresentate nell' S_3 dal sistema lineare di tutte le quadriche (n. 4). Nel primo caso la M_r stessa è un cono.

Il secondo caso non è possibile, poichè una $|V_3^{(3)}|$ dovrebbe contenere un fascio di quadriche Q_2 , ciò che non è possibile (poichè le superficie d'ordine minimo in essa contenute sono del 4° ordine).

Se $v = 1$, la M_r è la $M_r^{(8)}$ dell' S_{r+4} considerata ai nn. 15, 16 (tipo 7°).

36. Supponiamo infine $s = 1$. La M_r conterrà allora una congruenza razionale di indice 1 di quadriche Q_{r-2} , e per v saranno possibili i valori 5 o 2 (nn. 20, 21).

Supponiamo $v = 5$ ed $r = 4$. Le quadriche Q_2 della M_4 hanno una retta in comune (essendo segate da una M_3 -sezione in coniche per un punto, n. 19). La $V_3^{(5)}$, a curva-sezioni ellittiche, contiene un fascio di quadriche Q_2 . Se la $V_3^{(5)}$ è un cono, la M_4 stessa è un cono.

Constatiamo che questo è il solo caso possibile. Infatti, se la $V_3^{(5)}$ non fosse un cono, sarebbe rappresentata nell' S_3 (n. 4) dalle superficie cubiche con una quartica-base di 2^a specie (che può degenerare in una cubica e in una retta semplicemente appoggiata, in due rette sghembe che si appoggiano ad una conica, in due coniche che hanno un solo punto in comune (eventualmente degeneri)). Orbene, si verifica direttamente che in nessuno di questi casi la $V_3^{(5)}$ può contenere un fascio di quadriche le quali abbiano una generatrice fissa in comune.

37. Se $v = 3$, la M_r è la $M_r^{(9)}$ dell' S_{r+4} considerata al n. 31 (tipo 9°).

Possiamo così concludere: *Una varietà algebrica non conica M_r , ad $r > 3$ dimensioni, a superficie-sezioni razionali e a curve-sezioni di genere $\pi > 1$, è di uno dei seguenti tipi (o è una loro proiezione):*

⁽³⁵⁾ SCORZA, loc. cit., ⁽³²⁾.

- 1°) M_r che contiene una congruenza razionale, di indice 1, di spazi lineari S_{r-2} ;
- 2°) M_r che contiene un fascio razionale di S_{r-4} -coni di VERONESE;
- 3°) M_r che contiene un fascio razionale di quadriche (a curve-sezioni iperellittiche);
- 4°) la $M_r^{(8)}$ dell' S_{r+4} intersezione d' un S_{r-2} -cono di VERONESE con una quadrica dell' S_{r+4} non passante per l' S_{r-2} , vertice del cono;
- 5°) la $M_r^{(9)}$ dell' S_{r+4} intersezione residua dell' S_{r-2} -cono i cui S_r -generatori proiettano le generatrici di una rigata razionale normale, del 4° ordine a direttrice rettilinea, con un'ipersuperficie cubica dell' S_{r+4} che passa per 3 degli S_r -generatori;
- 6°) la $M_4^{(16)}$ dell' S_4 immagine del sistema delle quadriche dell' S_4 .

38. Consideriamo i sistemi lineari rappresentativi delle M_r del n.° precedente. Arriviamo così al seguente teorema:

Un sistema lineare semplice d'ipersuperficie $\Phi_{r-1}^{(n)}$, d'ordine n , dell' S_r ($r > 4$), a superficie-caratteristica razionale e a curva-caratteristica di genere $\pi > 1$ (non rappresentativo d' un cono) si può trasformare cremonianamente in uno dei seguenti sistemi (o in un sistema in essi contenuto):

- 1°) sistema delle $\Phi_{r-1}^{(n)}$ con un S_{r-3} -base multiplo dell'ordine $n - 1$;
- 2°) sistema delle $\Phi_{r-1}^{(n)}$ con un S_{r-2} -base multiplo dell'ordine $n - 2$, segate da un S_{r-1} generico per l' S_{r-2} in un sistema di quadriche che in un S_{r-4} dell' S_{r-1} hanno un S_{r-2} -tangente fisso;
- 3°) sistema delle $\Phi_{r-1}^{(n)}$ con un S_{r-2} -base multiplo dell'ordine $n - 2$, e una Ψ_{r-2} -base semplice, incontrata in quadriche dagli S_{r-1} per l' S_{r-2} (eventualmente degeneri e nell'intorno dell' S_{r-2});
- 4°) sistema delle $\Phi_{r-1}^{(4)}$ con un S_{r-3} -base doppio lungo il quale hanno lo stesso S_{r-1} -tangente doppio, ed inoltre un cono-base $K_{r-2}^{(4)}$ semplice, i cui S_{r-3} -generatori proiettano dal vertice S_{r-4} (contenuto nell' S_{r-3} -base) i punti di una quartica d' un piano indipendente dall' S_{r-3} -base;
- 5°) sistema delle $\Phi_{r-1}^{(6)}$ con un S_{r-3} -base quadruplo, lungo il quale le $\Phi_{r-1}^{(6)}$ hanno lo stesso S_{r-1} -tangente quadruplo, e due S_{r-2} -base doppi nei due successivi intorni dell' S_{r-3} e nella giacitura dell' S_{r-1} -tangente; inoltre due punti doppi infinitamente vicini e una retta infinitesima nell'intorno del secondo (il cui piano α è indipendente dall' S_{r-3} -base); ed infine un cono-base semplice i cui S_{r-3} -generatori proiettano, da un S_{r-4} dell' S_{r-3} -base, una sestica del piano α .

È immediato che i sistemi 1°), 2°) e 3°) sono rappresentativi delle ri-

spettive varietà del n. 32. Per rendersi conto che ciò accade anche per il tipo 4^o), da un punto A comune alla quadrica Q e all' S_{r-2} -vertice del cono di VERONESE (n. 31) proiettiamo la $M_r^{(8)}$ in un S_{r+2} . La proiezione è un S_{r-3} -cono di VERONESE, sul quale la $M_r^{(8)}$ è rappresentata dal sistema delle intersezioni colle quadriche dell' S_{r+3} che passano per la $\Gamma_{r-2}^{(8)}$ traccia del cono intersezione della $M_r^{(8)}$ coll' S_r -tangente alla Q nel punto A (n. 15). Quindi al sistema lineare di $\Phi_{r-1}^{(4)}$ dell' S_r , doppio del sistema rappresentativo dell' S_{r-3} -cono di VERONESE (n. 27), basta imporre la condizione di avere per ulteriore base il cono $K_{r-2}^{(4)}$ immagine della $\Gamma_{r-2}^{(8)}$, per avere il sistema rappresentativo della $M_r^{(8)}$.

In modo analogo si giustifica il sistema 5^o), tenendo conto dei nn. 31, 21, 20.

Si osservi infine che le irrazionalità numeriche che abbiamo incontrate nelle rappresentazioni nell' S_r delle M_r per $r > 3$ sono le stesse che abbiamo incontrate per $r = 3$ (nn. 27, 29, 30, 31, 38).

La redazione degli « Annali di Matematica » dolorosamente colpita dalla grave perdita di

GAETANO BERNARDINO SCORZA

geometra ed algebrista d'alto valore, uomo e cittadino esemplare, pubblicherà in uno dei prossimi fascicoli l'analisi dell'opera scientifica dell'insigne scomparso.

Frattanto s'inchina reverente alla Sua Memoria.

Al posto restato vacante nella Redazione è stato chiamato MICHELE DE FRANCHIS. I redattori salutano cordialmente il nuovo e illustre compagno di lavoro.

Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo.

Memoria di DARIO GRAFFI (a Bologna).

Sunto. - *Si estendono, sotto opportune ipotesi, i teoremi di reciprocità di BETTI e MAXWELL alla dinamica dei corpi elastici e i teoremi di LORENTZ-SOMMERFELD nell'elettromagnetismo a fenomeni non sinusoidali. Vengono anche stabiliti teoremi di reciprocità per la trasmissione del calore non stazionaria. I risultati sono conseguiti mediante sistematica applicazione della trasformazione di LAPLACE.*

Introduzione.

Numerosi sono i teoremi di reciprocità ⁽¹⁾ che si incontrano nei vari capitoli della meccanica e della fisica-matematica ma, almeno i più noti, sono validi per fenomeni indipendenti dal tempo. Così il teorema di BETTI si riferisce all'equilibrio elastico, i teoremi di VOLTERRA e DONATI principalmente alle correnti elettriche stazionarie, ecc..

È ovvio come l'estensione dei teoremi di reciprocità a fenomeni variabili nel tempo, presenti, talvolta, notevole interesse. Perciò sono già state fatte numerose ricerche in proposito ⁽²⁾. In alcune di queste si completano con opportuni termini le equazioni valide per fenomeni indipendenti dal tempo. Così, ad esempio, il teorema di BETTI si estende alla dinamica dei corpi elastici aggiungendo alle forze applicate le forze d'inerzia col segno cambiato. Ma, come si comprende anche da questo esempio, detti termini complemen-

⁽¹⁾ I principali teoremi di reciprocità stabiliti in Italia sono ottimamente esposti nella comunicazione del PUPPINI al Congresso Internazionale dei Matematici di Toronto, 1924, vol. II dei « Proceedings », pag. 429. Il prof. LELLI (« Annali di Matematica pura e applicata », serie IV, tomo III, pag. 133, 1925) ha dimostrato come i teoremi di reciprocità più noti possono farsi discendere da alcune equazioni fondamentali da lui stabilite.

⁽²⁾ Il teorema di reciprocità sulle acque filtranti (incompressibili) dovuti al PUPPINI per quanto mi consta è l'unico valido tanto se il moto delle acque dipende dal tempo quanto nel caso contrario. Ma qui si presenta la fortunata circostanza che le equazioni differenziali che reggono il fenomeno sono indipendenti dal tempo

tari sono, in generale incogniti, quindi l'utilizzazione pratica del teorema di reciprocità è, di solito, assai limitata (1).

Altre ricerche invece presuppongono il fenomeno variabile col tempo in modo periodico o meglio sinoidale. Ad esempio se il moto è sinoidale il teorema di BETTI è valido senza aggiungere le forze d'inerzia. Un gran numero di teoremi di questo genere si trova enunciato nella « Theory of Sound » di Lord RAYLEIGH, dove sono stabilite anche relazioni di reciprocità per le oscillazioni libere dei corpi elastici (2). Ad essi bisogna aggiungere i teoremi di DONATI (3) sulle correnti alternate e quelli della radiotelegrafia dovuti a LORENTZ, SOMMERFELD (4), CARSON (5). Ricorderemo infine il recente teorema di E. FROLA (6).

Ci proponiamo, in questo lavoro, di stabilire teoremi di reciprocità validi per fenomeni variabili in modo qualunque col tempo. Per raggiungere i risultati useremo sistematicamente la trasformazione di LAPLACE che ci permetterà stabilirli in modo semplice e rapido. È ben vero che per applicare questa trasformazione dovremo fare alcune ipotesi sulle funzioni che rappresentano alcune grandezze. Ma tali ipotesi sono, come si vedrà, così intuitive dal punto di vista fisico, che non sarà difficile ammetterle. E del resto vedremo in appendice che, almeno in un caso particolare, esse sono superflue e forse si avrebbe potuto farne sempre a meno, a prezzo però di appesantire inutilmente il nostro lavoro.

Si potrebbe obiettare che certi teoremi stabiliti in queste pagine possono dedursi da quelli validi per fenomeni periodici con una opportuna applicazione dell'integrale di FOURIER. Ma se si vuol spingere a fondo la questione col dovuto rigore, sono necessarie ipotesi molto meno intuitive delle nostre (7).

(1) Non è escluso però che in qualche caso, anche questi teoremi possano rendere utili servigi. Così il teorema di reciprocità esteso alla trasmissione del calore non stazionaria ha permesso al PUPPINI (« *Monitore Tecnico* » 1916) di ottenere interessanti risultati sulla trasmissione del calore nelle condotte in pressione.

(2) Vol. I, pp. 134-35, 150 e segg. È da notare che tutti i teoremi sono provati per sistemi discreti e sono enunciati senza dimostrazione per sistemi continui. L'ultimo teorema che veramente vale anche per fenomeni non periodici, non è provato dall'Illustre Scienziato e sarà da noi dimostrato più innanzi.

(3) *Le correnti alternative e la legge di reciprocità*, « *Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Bologna* », 1917. Memorie e note Scientifiche (Bologna, Zanichelli, 1925), pag. 261.

(4) RIEMANN-WEBER, *Differential Gleichungen der Physik*, (1927), vol. II, pag. 575.

(5) « *Bell System Technical Journal* », 1924, pag. 393.

(6) « *Rendiconti Lincei* », 1937, I sem., pag. 586.

(7) W. ALEXANDER, (*Het Reciprociteitstheorema in de electricitet*, « *Tijdschrift von het Nederlandsch Radio geneatschap* », 5, 69, 1931) ha studiato con l'integrale di FOURIER alcuni teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo ma, se interpreto bene questo lavoro scritto in lingua olandese, senza preoccupazioni di rigore.

Poi varie funzioni che incontreremo (come ad esempio lo spostamento di un punto di un corpo elastico senza resistenze passive) non sono sviluppabili in integrale di FOURIER.

Veniamo ora ad esporre brevemente i risultati conseguiti nel presente lavoro.

Considerato un corpo elastico sul quale possano agire due sistemi di forze attive $\rho\mathbf{F}_1$, \mathbf{R}_1 , $\rho\mathbf{F}_2$, \mathbf{R}_2 (le $\rho\mathbf{F}$ volumetriche, le \mathbf{R} superficiali, ρ densità del corpo) tali che il loro valore sia rispettivamente $G(t)\mathbf{a}_1$, $G(t)\mathbf{b}_1$, $G(t)\mathbf{a}_2$, $G(t)\mathbf{b}_2$ con $G(t)$ funzione continua del tempo t , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 vettori indipendenti dal tempo ma anche variabili da punto a punto; per questi sistemi di forze e i relativi spostamenti vale ancora, istante per istante, il teorema di BETTI, purchè il corpo, all'istante $t=0$, si trovi allo stato naturale e la sua energia cinetica sia nulla.

In particolare se il primo sistema si riduce ad una forza \mathbf{H}_1 applicata nel punto A , il secondo ad una forza \mathbf{H}_2 applicata nel punto B , vale la relazione (perfettamente analoga al teorema di MAXWELL):

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{S}_2(A) = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{S}_1(B),$$

dove $\mathbf{S}_2(A)$, $\mathbf{S}_1(B)$ sono gli spostamenti di A e B rispettivamente causati da \mathbf{H}_2 e \mathbf{H}_1 .

Si vedrà poi che alla espressione delle forze si potrà sostituircene un'altra un po' diversa, e si potrà anche in questo caso stabilire alcuni teoremi di reciprocità. Passeremo poi a considerare un corpo che all'istante $t=0$ non è allo stato naturale. Limiteremo però lo studio al caso particolare di un corpo per valori negativi del tempo in equilibrio sotto l'azione di alcune forze, che vengono rimosse all'istante $t=0$ ⁽¹⁾.

Considerando allora due stati, nel primo dei quali il corpo è in equilibrio per $t \leq 0$ sotto l'azione delle forze $\rho\mathbf{F}_1$ e \mathbf{R}_1 , nel secondo sotto l'azione di $\rho\mathbf{F}_2$ e \mathbf{R}_2 , se $\mathbf{S}_1(t)$, $\mathbf{S}_2(t)$ sono gli spostamenti del corpo all'istante t vale il teorema:

$$\int_v \rho\mathbf{F}_1 \times \mathbf{S}_2(t)dv + \int_\sigma \mathbf{R}_1 \times \mathbf{S}_2(t)d\sigma = \int_v \rho\mathbf{F}_2 \times \mathbf{S}_1(t)dv + \int_\sigma \mathbf{R}_2 \times \mathbf{S}_1(t)d\sigma,$$

dove v è il volume del corpo, σ la superficie che lo limita.

Questo teorema si semplifica nel caso in cui le forze $\rho\mathbf{F}$ o \mathbf{R} siano concentrate in qualche punto e si ritrova così per altra via, forse più rigorosa, un teorema di Lord RAYLEIGH.

Passeremo poi alla trasmissione del calore per conduzione. Come è noto questi problemi si possono schematizzare nei seguenti modi. Nel corpo si

(1) Cioè in sostanza si considerano le oscillazioni libere da una posizione di equilibrio.

trasmette calore perchè si trova a contatto con altri corpi di temperatura diversa, o perchè entro il corpo si trovano alcune sorgenti di calore, o per l'una e per l'altra delle cause ora enunciate.

Nel primo caso sono, in generale, note le temperature del corpo su alcuni pezzi σ_1 della superficie σ che lo limita, mentre gli altri pezzi di σ sono a contatto con l'ambiente esterno che verrà supposto sempre alla stessa temperatura ⁽¹⁾. Allora se T_1 e T_2 sono due distribuzioni di temperature nel corpo riferite all'ambiente esterno ⁽²⁾ corrispondenti a due diverse distribuzioni di temperatura su σ_1 dimostreremo, qualora $\frac{\partial T_1}{\partial n}$, $\frac{\partial T_2}{\partial n}$ indichino le derivate di T_1 e T_2 normali a σ_1 , che vale la formula:

$$\int_{\sigma_1} T_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} d\sigma_1.$$

Equazione questa valida però supponendo le temperature T_1 e T_2 nulle per $t=0$ in tutto il corpo e tali che su σ_1 sia:

$$T_1 = G(t)\varphi_1(P), \quad T_2 = G(t)\varphi_2(P),$$

dove $\varphi_1(P)$ e $\varphi_2(P)$ sono due funzioni arbitrarie dei punti P della σ_1 e $G(t)$ una funzione continua qualunque del tempo t .

L'equazione ora scritta è analoga a quella che si incontra nel caso stazionario e da essa si possono trarre utili conseguenze.

Se invece la trasmissione di calore avviene per effetto di alcune sorgenti di calore, poste nel corpo di volume v , mentre tutta la sua superficie è a contatto dell'ambiente esterno noi troveremo la seguente relazione analoga al caso stazionario. Se Q_1 e Q_2 sono due sistemi di sorgenti, T_1 e T_2 rispettivamente le corrispondenti temperature nel corpo, supposto $Q_1 = G(t)\psi_1(P)$, $Q_2 = G(t)\psi_2(P)$ con $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$ due funzioni dei punti P del corpo, vale, ammesse le T_1 e T_2 nulle all'istante $t=0$, l'equazione:

$$\int_v T_1 Q_2 dv = \int_v T_2 Q_1 dv.$$

Dalla relazione ora scritta scende, in particolare, che se una sorgente posta nel punto A genera in B all'istante t una certa temperatura $T(t)$ la stessa sorgente posta in B genera in A allo stesso istante la stessa tempera-

⁽¹⁾ Cioè sono a contatto con un ambiente al quale cedono calore secondo la legge Newtoniana.

⁽²⁾ Ossia si prende come zero della scala termometrica la temperatura dell'ambiente esterno.

tura $T(t)$. Questo teorema è stato enunciato da Lord RAYLEIGH in un caso più particolare, ma in cui la T non è nulla all'istante iniziale. Noi però vedremo come si possano estendere le nostre considerazioni e provare il teorema in discorso.

Abbiamo invece omessa qualsiasi ricerca nel caso in cui il calore venga trasmesso da altri corpi e da sorgenti, per non complicare troppo il nostro studio, sebbene le difficoltà, a questo proposito, siano più formali che concettuali.

Passeremo poi all'elettromagnetismo. Qui interessa generalizzare il teorema di LORENTZ-SOMMERFELD valido per dipoli alternativi, teorema che, sotto certe condizioni, si applica alle antenne radio. Abbiamo perciò creduto opportuno stabilire piuttosto una relazione di reciprocità fra le correnti in due antenne e i campi da esse generati; relazione valida anche se le correnti nelle antenne non sono sinusoidali, purchè in ogni punto soddisfino alle stesse condizioni delle forze in elasticità e il campo elettromagnetico sia uguale a zero per valori negativi e nulli del tempo. Nel caso in cui l'antenna abbia piccole dimensioni, le nostre formule diventano analoghe e anzi generalizzano quelle del SOMMERFELD. Così in particolare il teorema di reciprocità rimane esteso, per antenne a onde smorzate, per antenne che emettono impulsi, per i fenomeni transienti ecc.. Non solo, ma ci sembra che le nostre considerazioni permettano di eliminare certe questioni un po' sottili nell'annullarsi all'infinito di alcuni integrali ⁽¹⁾. Il teorema di reciprocità risulterà però provato solo per antenne con onde di tipo stazionario, ma ne mostreremo la validità anche nelle antenne a onde progressive. Con i nostri metodi sarebbe possibile estendere il teorema del CARSON, ma ometteremo la ricerca che, dopo quanto diremo, non offrirebbe alcuna difficoltà. Non è però inutile notare che tale estensione richiederebbe ipotesi ancora più larghe di quelle che ci saranno necessarie per generalizzare il teorema del SOMMERFELD.

CAPITOLO I.

Teoremi di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici.

1. Consideriamo un corpo elastico, isotropo, di volume v limitato dalla superficie σ , con densità ρ (che può essere anche variabile) eventualmente soggetto a vincoli fissi. Ad esso siano applicate le forze attive di massa ρF

⁽¹⁾ Tali questioni si presentano appunto ammettendo senz'altro sinusoidale il campo elettromagnetico come si fa nelle ricerche più comuni.

e le forze attive superficiali \mathbf{R} in generale variabili col tempo. Sappiamo che se \mathbf{S} è lo spostamento di un punto generico P del corpo, B l'omografia delle tensioni valgono in ogni punto di v le equazioni (1):

$$(1) \quad \rho \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = \rho \mathbf{F} - \text{grad } B, \quad (2) \quad B = -lI_1 \left(\frac{d\mathbf{S}}{dP} \right) - 2mD \frac{d\mathbf{S}}{dP},$$

dove l e m sono le costanti di LAMÈ del corpo, $\frac{d\mathbf{S}}{dP}$ ovviamente l'omografia delle deformazioni, t il tempo; gli altri simboli il significato ben noto dall'analisi vettoriale.

Si ha poi sulla parte di σ non vincolata

$$(3) \quad B\mathbf{n} = \mathbf{R},$$

qualora \mathbf{n} indichi il vettore unitario normale a σ diretto verso l'interno di v .

Le forze di massa e superficiali saranno supposte funzioni, finite e continue di t , oltre che dei punti P del corpo, ma le supporremo nulle, per t maggiore di un certo istante k positivo e del resto comunque grande. Questa ipotesi non è affatto, come può sembrare a prima vista, restrittiva. A noi interessa per la pratica stabilire delle relazioni valide un intervallo $(0, k_1)$ di ampiezza qualunque, ma finito. Ora se scegliamo $k > k_1$, gli spostamenti elastici e di conseguenza le deformazioni nell'intervallo $(0, k_1)$ non dipendono (2) dal valore delle forze per $t > k_1$, che si possono perciò supporre, per $t \geq k$, nulle.

Noi supporremo inoltre la \mathbf{S} e le sue derivate prime continue e limitate e le derivate seconde generalmente continue e limitate per ogni punto di v e per ogni valore di t compreso nell'intervallo $(0, +\infty)$ (3). Questa è l'ipotesi più

(1) BURGATTI, *Teoria Matematica della elasticità*, Bologna, Zanichelli, 1931, pag. 133. In seguito questo volume verrà indicato con « T. M. E. ».

È opportuno aggiungere che noi supporremo il corpo vincolato, o che il suo moto sia relativo ad un opportuno sistema di riferimento, così da potere escludere un moto rigido globale del corpo stesso. In altre parole supporremo che se il corpo fosse rigido le forze applicate lo manterrebbero in una posizione di equilibrio rispetto s'intende al nostro riferimento. Ammetteremo inoltre ρ , l , m variabili con continuità. Ciò per evitare qualche complicazione tanto più che il caso di ρ , l , m variabili con discontinuità si può considerare caso limite di quello che ora trattiamo.

(2) Infatti dalla dimostrazione del teorema di unicità segue subito che \mathbf{S} è determinato in tutto l'intervallo $(0, k_1)$ dagli spostamenti e loro derivate per $t=0$ e dalla conoscenza delle forze in $(0, k_1)$ estremo incluso. Quindi \mathbf{S} e di conseguenza le sue derivate non dipendono dal valore delle forze per $t \geq k > k_1$. In altre parole, meno precise, ma più efficaci, i valori futuri delle forze non hanno alcuna influenza sui valori attuali dello spostamento.

(3) Cioè noi intendiamo che le derivate seconde siano continue ad eccezione di alcune superfici dello spazio-tempo C costituito da valori di (x, y, z) compresi entro v e dagli istanti t fra $(0, \infty)$. Supporremo però queste superfici siano in numero finito in ogni pezzo di C o

restrittiva che noi faremo, ipotesi già accennata nell'introduzione. Il supporre \mathbf{S} , le sue derivate prime e seconde finite e almeno generalmente continue in tutto v , per ogni valore del tempo compreso in un intervallo finito, è ipotesi che si ammette spesso nelle questioni della fisica-matematica e del resto si potrebbe controllare con i teoremi di esistenza. Meno usuale invece è il ritenere lo spostamento e derivate limitati anche se i valori del tempo sono compresi in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$. Però anche questa ipotesi è conforme all'intuizione fisica, perchè, potendosi ritenere le forze nulle da un certo istante in poi, si intuisce che gli spostamenti, le loro derivate prime e seconde siano limitati; tanto più che le derivate prime e seconde rispetto al tempo rappresentano rispettivamente le velocità e le accelerazioni dei punti del corpo, quelle rispetto alle coordinate le deformazioni e le derivate di tali deformazioni.

Del resto per la nostra trattazione sarebbe a rigore soltanto necessario che gli spostamenti e le loro derivate moltiplicati per $e^{-\alpha t}$ con α reale, positivo e qualunque restino limitati per $t \rightarrow +\infty$.

In altre parole perchè le nostre considerazioni non siano valide bisognerebbe ammettere, per es., che lo spostamento di un punto e le sue derivate tendano all'infinito in modo più rapido di un esponenziale mentre le forze da un certo istante in poi sono nulle, il che ripugna alla più elementare intuizione fisica (¹).

Per queste ragioni, e anche perchè almeno nel caso particolare che verrà esaminato in appendice, queste ipotesi sono superflue ci sembra non valga la pena, verificare in base alle equazioni (1), (2), (3) il comportamento all'infinito di \mathbf{S} e delle sue derivate.

Ciò posto consideriamo un corpo elastico che all'origine dei tempi si trovi allo stato naturale e abbia energia cinetica nulla. Poichè escludiamo

meglio: che si possa dividere ogni pezzo finito di C in un numero finito di parti in cui le derivate seconde di \mathbf{S} siano continue. Ammetteremo poi il contorno di questi campi che è formato dalle superfici di discontinuità in discorso sia incontrato in due punti al più da una retta parallela all'asse delle t . Ciò equivale in sostanza ad ammettere l'ipotesi, ben intuitiva dal punto di vista fisico, che in un punto P di v passi, in un intervallo di tempo finito un numero finito di superfici di discontinuità. Notiamo che questa ipotesi è giustificata dal fatto che le superfici di discontinuità coincidendo con le caratteristiche sono, come discende dalle ricerche del LAMPARIELLO (*Propagazione delle onde nei mezzi elastici isotropi anche non omogenei*, « Rendiconti Lincei », 1931, 1° sem., pag. 856) variabili col tempo, sicchè una superficie caratteristica non può rimanere fissa in un punto P .

(¹) È opportuno aggiungere che le ipotesi sopra enunciate sono necessarie solo per tutte le derivate prime e seconde rispetto alle coordinate e per le derivate prime e seconde pure rispetto al tempo cioè non è necessario considerare le derivate miste rispetto alle coordinate e al tempo.

moti di corpo rigido sarà per $t=0$ in ogni punto di v $\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = 0$. Allora se p è un numero reale positivo o un numero complesso con parte reale positiva, avremo per ogni punto P del corpo (poichè fissato P per le nostre ipotesi $\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2}$ è funzione generalmente continua e limitata del tempo, \mathbf{S} e $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$ invece funzioni sempre continue e limitate) con due integrazioni per parti:

$$(4) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} dt = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dt = p^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{S} dt = p^2 \mathbf{s},$$

dove, ovviamente:

$$(5) \quad \mathbf{s} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{S} dt,$$

cioè \mathbf{s} è la trasformata di LAPLACE di \mathbf{S} .

Sarà inoltre, poichè le derivate prime di \mathbf{S} rispetto alle coordinate sono in ogni punto di v e per ogni t di $(0, +\infty)$ limitate e continue come \mathbf{S} , legittimo lo scambio del segno di derivazione con quello d'integrazione nelle formule che ora scriveremo. Dunque:

$$(6) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} B dt = -l \int_0^{\infty} e^{-pt} I_1 \left(\frac{d\mathbf{S}}{dP} \right) dt \\ - 2m \int_0^{\infty} e^{-pt} D \frac{d\mathbf{S}}{dP} dt = -l I_1 \frac{d}{dP} \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{S} dt - 2m D \frac{d}{dP} \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{S} dt.$$

Quindi indicando con β il primo membro di questa ultima equazione cioè la trasformata di LAPLACE di B sarà:

$$(7) \quad \beta = -l I_1 \left(\frac{d\mathbf{s}}{dP} \right) - 2m D \frac{d\mathbf{s}}{dP},$$

equazione in β e \mathbf{s} formalmente identica a (2). Moltiplichiamo ora la (1) per e^{-pt} e integriamo da $(0, +\infty)$. Tenendo presente che le derivate seconde (*) di \mathbf{S}

(*) Richiamiamo sommariamente la dimostrazione del teorema che ora applichiamo. Sia $f(x, y, z, t)$ una derivata di una generica delle componenti di \mathbf{S} . Vogliamo provare la relazione:

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x, y, z, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z, t) dt.$$

A questo scopo osserviamo che la $f(x, y, z, t)$ è, per ipotesi, continua e limitata per ogni va-

sono generalmente continue e limitate ne risulta lecito scambiare qualunque derivata rispetto alle coordinate con il segno d'integrazione, ossia il segno

lore di x, y, z in v e per t compreso fra 0 e $+\infty$ ossia per ogni punto dello spazio-tempo C . Invece $\frac{\partial f}{\partial x}$ non è sempre continua, ma per quanto si è ammesso, è possibile dividere lo spazio-tempo C_k costituito da valori di x, y, z compresa entro v e da t compreso fra $(0, k)$ ($k > 0$) in un numero finito di parti in cui tale derivata è continua. Allora possiamo scrivere per un punto di coordinate (x_0, y_0, z_0, t)

$$(\beta) \quad \int_0^k e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt = \int_0^{t_1} e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt + \dots \\ \dots + \int_{t_n}^k e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt,$$

dove t_1, t_2, t_n sono i valori di t in cui una parallela all'asse t e passante per x_0, y_0, z_0 incontra i contorni dei campi in cui $\frac{\partial f}{\partial x}$ è continua. E si noti che per le nostre ipotesi n è finito. Ora t_1, t_2, \dots, t_n sono funzioni di x, y, z e, come si potrebbe provare tenendo conto delle proprietà delle caratteristiche, in un intorno di x_0, y_0, z_0 funzioni continue e derivabili rispetto a x, y, z . Allora derivando la (β) rispetto a x , supponendo x_0 variabile, applicando i ben noti teoremi sulla derivazione degli integrali dipendenti da un parametro, resta provata la (α) quando in luogo di $+\infty$ si metta k .

Ciò posto osserviamo che:

$$(\gamma) \quad \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt = \int_0^k e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt \\ + \int_k^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt.$$

Ora poichè le $\frac{\partial f}{\partial x}$ sono per ogni valore di x, y, z in v e per ogni t in $0, +\infty$ limitate e generalmente continue, sarà limitato ogni rapporto incrementale della $f(x, y, z, t)$ rispetto a x sicchè sarà (indicato con M un numero opportuno indipendente da h e da t e con p_1 la parte reale di p):

$$\left| \int_k^\infty e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt \right| \leq M \int_k^\infty e^{-p_1 t} dt \leq \frac{M}{p_1} e^{-p_1 k}.$$

Quindi scelto k maggiore di un numero k_0 sufficientemente grande l'integrale ora scritto è inferiore di un numero positivo arbitrario ε e ciò per ogni h . Ma si può scegliere k_0 in modo che per $k > k_0$ sia:

$$\left| \int_k^\infty e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, t) dt \right| < \varepsilon,$$

il che è lecito essendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ limitata. Inoltre poichè il limite per $h \rightarrow 0$ del primo integrale a

grad con il segno d'integrazione. Allora ricordando la (6) e (7), (4) e (5) si ha:

$$(8) \quad p^2 \mathbf{s} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } \beta,$$

dove:

$$(9) \quad \mathbf{f} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{F} dt.$$

Moltiplicando per e^{-pt} la (3) e integrando da zero a $+\infty$ si trova analoghe considerazioni:

$$(10) \quad \beta \mathbf{n} = \mathbf{r}$$

con:

$$(11) \quad \mathbf{r} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{R} dt,$$

sicchè \mathbf{f} e \mathbf{r} sono rispettivamente le trasformate di LAPLACE di \mathbf{F} e \mathbf{R} .

2. Consideriamo ora due stati del corpo ambedue con \mathbf{S} e $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$ nulle per $t=0$, tali che nel primo le forze impresse siano $\rho_1 \mathbf{F}_1$, \mathbf{R}_1 , nel secondo $\rho_2 \mathbf{F}_2$ e \mathbf{R}_2 . Avremo in corrispondenza due sistemi di spostamenti \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 e di omografie di tensione B_1 e B_2 . Siano poi \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 , β_1 e β_2 , \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 , \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 le trasformate di LAPLACE di \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 , B_1 e B_2 , \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 definite rispettivamente dalle (5), (6), (9) e (11), in cui si deve porre l'indice 1 e 2. Avremo perciò dalle (8) e (10)

$$(12) \quad p^2 \mathbf{s}_1 = \rho \mathbf{f}_1 - \text{grad } \beta_1, \quad p^2 \mathbf{s}_2 = \rho \mathbf{f}_2 - \text{grad } \beta_2,$$

$$(13) \quad \beta_1 \mathbf{n} = \mathbf{r}_1, \quad \beta_2 \mathbf{n} = \mathbf{r}_2.$$

secondo membro di (γ) vale $\int_0^k e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x} dx$ si può trovare in h_0 tale che per $|h| < h_0$ sia:

$$\left| \int_0^k e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt - \int_0^k e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Allora per ogni $|h| < h_0$ si ha:

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0, t) - f(x_0, y_0, z_0, t)}{h} dt - \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial f}{\partial x} dt \right| < 3\varepsilon,$$

e ciò dimostra che il limite del primo membro di (γ) per $h \rightarrow 0$ cioè $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x_0, y_0, z_0, t) dt$ vale $\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial x} dt$ conformemente ad (α). È ovvio che tale relazione vale per ogni punto di v e scambiando nella derivazione y o z a x . Si noti poi che \mathbf{s} e le sue derivate prime e seconde sono continue rispetto alle coordinate x, y, z .

Moltiplichiamo scalarmente la prima delle (12) per \mathbf{s}_2 , la seconda per \mathbf{s}_1 , sottraggiamo membro a membro e integriamo il risultato su tutto il volume v del corpo. Con le stesse trasformazioni che si fanno a proposito del teorema di BETTI ⁽¹⁾, tenendo presente che i vincoli sono fissi e che fra β_1 e \mathbf{s}_1 , β_2 e \mathbf{s}_2 vale la (7) (in cui si deve porre gli indici 1 o 2) si trova:

$$(14) \quad \int_v \rho \mathbf{f}_1 \times \mathbf{s}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_2 d\sigma = \int_v \rho \mathbf{f}_2 \times \mathbf{s}_1 dv + \int_\sigma \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_1 d\sigma,$$

relazione perfettamente analoga al teorema di BETTI però valida fra le trasformate di LAPLACE delle forze e degli spostamenti.

Supponiamo ora:

$$(15) \quad \begin{cases} \rho \mathbf{F}_1 = G(t) \mathbf{a}_1, & \mathbf{R}_1 = G(t) \mathbf{b}_1, \\ \rho \mathbf{F}_2 = G(t) \mathbf{a}_2, & \mathbf{R}_2 = G(t) \mathbf{b}_2, \end{cases}$$

dove \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 sono vettori indipendenti dal tempo, però eventualmente variabili da punto a punto di σ o v , mentre $G(t)$ è una funzione finita e continua del tempo che, per quanto si è osservato, si può sempre supporre nulla

per $t > k$. Sostituendo nella (14) $\int_0^\infty e^{-pt} G(t) dt$ viene a fattori comune ad ambo i membri e perciò lo si può sopprimere ⁽²⁾. Si ha allora con semplici passaggi:

$$(16) \quad \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_v \mathbf{a}_1 \times \mathbf{S}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{S}_2 d\sigma - \int_v \mathbf{a}_2 \times \mathbf{S}_1 dv - \int_\sigma \mathbf{b}_2 \times \mathbf{S}_1 d\sigma \right) dt = 0,$$

e poichè questa uguaglianza deve valere per ogni p con parte reale positiva per note proprietà della trasformata di LAPLACE si deduce l'annullarsi della funzione sotto il segno d'integrazione al primo membro di (16). Moltiplicando questa funzione per $G(t)$ si ha, istante per istante, ricordando le (15)

$$(17) \quad \int_v \rho \mathbf{F}_1 \times \mathbf{S}_2 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_1 \times \mathbf{S}_2 d\sigma = \int_v \rho \mathbf{F}_2 \times \mathbf{S}_1 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_2 \times \mathbf{S}_1 d\sigma,$$

formula che estende il teorema di BETTI al caso dinamico, s'intende con condizioni iniziali nulle e con forze del tipo (15).

⁽¹⁾ Cfr. BURGATTI, « T. M. E. », pagg. 151-152 e pag. 168 e segg..

⁽²⁾ L'integrale ora scritto rappresenta una funzione analitica regolare nel semipiano positivo delle p (anzi una funzione intera perchè se $t > k$ $G(t) = 0$) che non è identicamente nulla, altrimenti lo sarebbe anche $G(t)$. Quindi l'integrale in discorso avrà almeno, nel semipiano positivo, solo zeri isolati e la (16) varrà perciò per ogni p con parte reale positiva.

Supponiamo ora che $\rho\mathbf{F}_1$ e \mathbf{R}_1 siano ovunque nulle, tranne in un piccolo intorno del punto A mentre $\rho\mathbf{F}_2$ e \mathbf{R}_2 siano nulle tranne in un piccolo intorno del punto B . Cioè nel primo caso, come si suol dire, vi è una forza concentrata in A , nel secondo una forza concentrata in B .

Allora le integrazioni al primo membro di (7) si debbono estendere ad un piccolo intorno di A , quelle al secondo membro a un piccolo intorno di B . Ma nel primo membro si può supporre \mathbf{S}_2 costante e uguale a $\mathbf{S}_2(A)$ sicchè rimane $\mathbf{S}_2(A)$ moltiplicato scalarmente per la resultante del primo sistema di forze che indicheremo con \mathbf{H}_1 . In modo analogo se \mathbf{H}_2 è il resultante del secondo sistema di forze, il secondo membro vale $\mathbf{S}_1(B) \times \mathbf{H}_2$. La (17) diventa allora :

$$(18) \quad \mathbf{S}_2(A) \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{S}_1(B) \times \mathbf{H}_2,$$

che estende il teorema di MAXWELL al caso dinamico. Si noti che le \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 che si considerano forze concentrate in A , B devono essere, per le (15), sempre unidirezionali e identiche in modulo.

3. Vediamo ora un'altra estensione delle nostre formule.

Supponiamo che le forze \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 si possano porre nella forma :

$$(19) \quad \begin{cases} \rho\mathbf{F}_1 = G(t - T_1)\mathbf{a}_1, & \mathbf{R}_1 = G(t - T_1)\mathbf{b}_1, \\ \rho\mathbf{F}_2 = G(t - T_2)\mathbf{a}_2, & \mathbf{R}_2 = G(t - T_2)\mathbf{b}_2, \end{cases}$$

dove \mathbf{a}_1 , \mathbf{b}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_2 hanno il solito significato, le T_1 e T_2 sono numeri positivi o nulli indipendenti dal tempo, però anche variabili da punto a punto. Supporremo poi le $G(t)$ nulle per valori negativi dell'argomento, inoltre supporremo gli spostamenti \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 nulli per $t \leq 0$, cioè, in sostanza, ammetteremo di aver applicato al nostro corpo le forze negli istanti superiori o al più uguali a zero. Del resto questa ipotesi è in molti casi necessaria per assicurare, nell'istante iniziale, l'energia cinetica nulla e il corpo allo stato naturale.

Osserviamo però che essendo $G(t - T_1) = 0$ per $t \leq T_1$ potremo scrivere :

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \int_0^\infty e^{-pt} G(t - T_1) dt \mathbf{a}_1 = \int_{T_1}^\infty e^{-pt} G(t - T_1) dt \mathbf{a}_1 = \\ &= e^{-pT_1} \int_{T_1}^\infty e^{-p(t-T_1)} G(t - T_1) dt \mathbf{a}_1 = e^{-pT_1} \int_0^\infty e^{-pz} G(z) dz \mathbf{a}_1, \end{aligned}$$

dove si è posto :

$$z = t - T_1.$$

Siccome analoghe formole valgono per \mathbf{f}_2 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_1 sostituendo nella (14) semplificando e ricordando l'espressione di \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 si ha:

$$(21) \quad \int_{\mathfrak{v}} \mathbf{a}_1 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_1)} \mathbf{S}_2(t) dt dv + \int_{\mathfrak{c}} \mathbf{b}_1 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_1)} \mathbf{S}_2(t) dt d\sigma = \\ = \int_{\mathfrak{v}} \mathbf{a}_2 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_2)} \mathbf{S}_1(t) dt dv + \int_{\mathfrak{c}} \mathbf{b}_2 \times \int_0^\infty e^{-p(t+T_2)} \mathbf{S}_1(t) dt d\sigma.$$

Ora si noti che, posto in un punto generico :

$$t + T_1 = u$$

dove u è una nuova variabile indipendente, si ha:

$$\int_0^\infty e^{-p(t+T_1)} \mathbf{S}_2(t) dt = \int_{T_1}^\infty e^{-pu} \mathbf{S}_2(u - T_1) du = \int_0^\infty e^{-pu} \mathbf{S}_2(u - T_1) du.$$

Abbiamo potuto mettere come limite inferiore in luogo di T_1 lo zero perchè la \mathbf{S}_2 di un argomento negativo è nulla. Sostituendo questo risultato nella (21) e ponendo anche in luogo di $t + T_2$ la variabile indipendente u si ha:

$$(22) \quad \int_0^\infty e^{-pu} du \left(\int_{\mathfrak{v}} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{S}_2(u - T_1) dv + \int_{\mathfrak{c}} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{S}_2(u - T_1) d\sigma - \right. \\ \left. - \int_{\mathfrak{v}} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{S}_1(u - T_2) dv - \int_{\mathfrak{c}} \mathbf{b}_2 \times \mathbf{S}_1(u - T_2) d\sigma \right) = 0.$$

E siccome questa equazione vale per ogni p si ha, ponendo t in luogo di u , l'nguaglianza:

$$(23) \quad \int_{\mathfrak{v}} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{S}_2(t - T_1) dv + \int_{\mathfrak{c}} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{S}_2(t - T_1) d\sigma = \int_{\mathfrak{v}} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{S}_1(t - T_2) dv + \\ + \int_{\mathfrak{c}} \mathbf{b}_2 \times \mathbf{S}_1(t - T_2) d\sigma.$$

relazione che può assumere forma semplice nel caso in cui le forze siano concentrate in qualche punto.

4. Supponiamo ora \mathbf{S} non nullo per $t=0$. Ci limiteremo al caso delle oscillazioni libere o meglio delle oscillazioni di un sistema che per $t < 0$ era in equilibrio e dall'istante $t=0$ sono state tolte le forze che lo mantenevano in tale stato, senza però imprimere al corpo alcuna velocità iniziale.

È facile stabilire l'equazione di questo moto. Poichè per $t \leq 0$ il corpo era in equilibrio se indichiamo con \mathbf{S}_0 lo spostamento dei suoi punti con $\rho \mathbf{F}_0$ e \mathbf{R}_0 le forze attive ad esso applicate, s'intende per $t < 0$, si può scrivere per le (1), (2), (3):

$$(24) \quad \text{grad } B_0 = \rho \mathbf{F}_0, \quad B_0 = -U_1 \left(\frac{d\mathbf{S}_0}{dt} \right) - 2mD \frac{d\mathbf{S}_0}{dP}$$

$$(25) \quad B_0 \mathbf{n} = \mathbf{R}_0$$

relazione questa valida, nella parte non vincolata di σ , essendo B_0 l'omografia degli sforzi interni per $t \leq 0$. Ora se \mathbf{S} è spostamento B l'omografia degli sforzi interni per $t > 0$, si può porre:

$$(26) \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}' + \mathbf{S}_0$$

dove \mathbf{S}' è una nuova incognita, nulla assieme alla sua derivata prima rispetto al tempo per $t = 0$. Se poi poniamo:

$$(27) \quad B' = B - B_0$$

avremo subito per la (1)

$$(28) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial t^2} = -\text{grad } B' - \text{grad } B_0 = -\text{grad } B' - \rho \mathbf{F}_0.$$

Mentre per la (2), la (24), la (26) e la (27) si ha:

$$(29) \quad B' = -U_1 \left(\frac{d\mathbf{S}'}{dP} \right) - 2mD \frac{d\mathbf{S}'}{dP}$$

e per la (3)

$$(30) \quad B' \mathbf{n} = -B_0 \mathbf{n} = -\mathbf{R}_0$$

Cioè abbiamo ottenuto, (cosa del resto ben nota) equazioni per \mathbf{S}' analoghe alle equazioni per \mathbf{S} in cui le forze impresse sono $-\rho \mathbf{F}_0$, $-\mathbf{R}_0$.

Consideriamo ora, per $t \leq 0$ due stati di equilibrio mantenuti rispettivamente dalle forze $\rho \mathbf{F}_{01}$, \mathbf{R}_{01} , $\rho \mathbf{F}_{02}$, \mathbf{R}_{02} . Avremo in corrispondenza due sistemi di spostamenti \mathbf{S}_{01} e \mathbf{S}_{02} . Togliendo le forze all'istante $t = 0$ e indicando con \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 gli spostamenti nel primo e nel secondo caso per $t > 0$ potremo porre, analogamente a (26):

$$(31) \quad \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}'_1 + \mathbf{S}_{01}, \quad \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}'_2 + \mathbf{S}_{02}.$$

Ora \mathbf{S}'_1 , \mathbf{S}'_2 soddisfano le (28), (29), (30) purchè si aggiunga rispettivamente l'indice 1 e 2. Queste come si è già osservato sono dello stesso tipo della

(1), (2), (3). In altre parole le S'_1 e S'_2 corrispondono agli spostamenti di un corpo elastico con condizioni iniziali nulle, soggetti rispettivamente alle forze $-\rho F_{01}$, $-\mathbf{R}_{01}$, $-\rho F_{02}$, $-\mathbf{R}_{02}$ che essendo indipendenti dal tempo soddisfano alle condizioni (15) ⁽⁴⁾. Quindi per la (17):

$$(32) \quad \int_v \rho F_{01} \times (S_2 - S_{02}) dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{01} \times (S_2 - S_{02}) d\sigma = \\ = \int_v \rho F_{02} \times (S_1 - S_{01}) dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{02} \times (S_1 - S_{01}) d\sigma$$

e da questa formola per il teorema di BETTI scompaiono i termini in S_0 , sicchè si ha:

$$(33) \quad \int_v \rho F_{01} \times S_2 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{01} \times S_2 d\sigma = \int_v \rho F_{02} \times S_1 dv + \int_\sigma \mathbf{R}_{02} \times S_1 d\sigma$$

che è la formola cercata di reciprocità. In particolare se il sistema delle prime forze si riduce ad una forza \mathbf{H}_1 concentrata nel punto A il secondo ad un'altra forza \mathbf{H}_2 concentrata in B con le stesse considerazioni fatte a proposito della (18) si ha in ogni istante:

$$(34) \quad \mathbf{H}_1 \times S_2(B) = \mathbf{H}_2 \times S_1(A)$$

dove $S_1(A)$, $S_2(B)$ sono gli spostamenti dovuti rispettivamente al primo e al secondo sistema di forze. Quest'ultimo teorema è dovuto a Lord RAYLEIGH.

Considerazioni analoghe potrebbero farsi supponendo per $t = 0$ nulli gli spostamenti, ma diverse dallo zero le velocità iniziali e si ritroverebbe così, per via diversa, un altro teorema di Lord RAYLEIGH.

CAPITOLO II.

Teoremi sulla trasmissione del calore.

1. Si abbia un corpo solido di volume v limitato dalla superficie σ . Indichiamo con T la temperatura ⁽²⁾ di un punto generico del corpo e supponiamo che in alcuni pezzi σ , di σ la T sia nota. Invece ammettiamo la parte rima-

⁽⁴⁾ Si può osservare che in questo caso non esiste un k tale che per $t > k$ le forze siano nulle. Ma, senza cambiare i valori degli spostamenti per $t < k_1$, si può sostituire, per quanto si è già notato, alle forze per $t > k_1$, altre, nulle per $t \geq k$.

⁽²⁾ T non è la temperatura assoluta, ma la temperatura riferita all'ambiente esterno al corpo, come si vedrà.

nente σ_2 di σ a contatto con un ambiente esterno la cui temperatura abbia il valore costante di zero gradi ⁽¹⁾. Supponiamo inoltre che attraverso σ_2 il corpo ceda (o riceva) calore secondo la legge di Newton; cioè su ogni punto di σ_2 valga l'equazione:

$$(35) \quad K \frac{\partial T}{\partial n} = hT$$

dove $\frac{\partial T}{\partial n}$ è la derivata della temperatura fatta in direzione normale a σ_2 (e diretta verso il suo interno) h , K rispettivamente, i coefficienti di conduttività esterna ed interna del corpo. È ovvio che se σ_2 è impermeabile al calore $h = 0$ e che σ_2 o σ_1 possono, in qualche caso, coincidere con l'intera σ .

Poichè nel presente capitolo indicheremo il tempo con τ , per evitare confusione di simboli, l'equazione di propagazione del calore avrà la forma:

$$(36) \quad c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div} (K \text{ grad } T) + Q$$

dove $Qdv d\tau$ rappresenta la quantità di calore che una sorgente posta nell'elemento dv genera nel tempo $d\tau$, c è il calore specifico del corpo e ρ , al solito, la sua densità. Come nel caso dell'elasticità possiamo ammettere, senza alcuna restrizione per il nostro problema, Q e i valori di T su σ_1 nulli dall'istante k (k finito, ma grande comunque) in poi. Allora con ragionamenti analoghi a quelli del capitolo precedente possiamo ammettere che T , le sue derivate prime e le sue derivate seconde rispetto alle coordinate siano limitate e continue in tutto v per ogni istante fra $(0, \infty)$ ⁽²⁾. Supponiamo infine le condizioni iniziali nulle cioè $T = 0$ in tutto v per $\tau = 0$. Ciò posto moltiplicando la (36) per $e^{-p\tau}$, integrando da 0 a $+\infty$, con passaggi analoghi a quelli fatti nel capitolo precedente, si trova:

$$(37) \quad c\rho p t = \text{div} (K \text{ grad } t) + q$$

dove:

$$(38) \quad t = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} T d\tau, \quad q = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} Q d\tau.$$

⁽¹⁾ Cioè, come si è detto, la temperatura sia riferita a quella dell'ambiente esterno.

⁽²⁾ È noto che nella trasmissione del calore non si presentano superfici di discontinuità. Naturalmente dovremo ammettere k , $c\rho$ variabili con continuità da punto a punto.

Eseguido analoghe operazioni su (35) troviamo :

$$(39) \quad K \frac{\partial t}{\partial n} = ht.$$

2. Consideriamo ora due diverse distribuzioni T_1 e T_2 della temperatura in v corrispondenti, per trattare il caso più generale, a differenti valori della temperatura su σ_1 e a due sistemi di sorgenti Q_1 e Q_2 . Le trasformate di LAPLACE t_1, t_2, q_1, q_2 rispettivamente di T_1, T_2, Q_1, Q_2 definite dalle (38) (nelle quali si devono mettere gli indici 1 e 2) soddisfano come è facile mostrare ragionando in modo analogo al paragrafo precedente, alle (37) cioè :

$$(40) \quad \begin{cases} c\rho pt_1 = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} t_1) + q_1 \\ c\rho pt_2 = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} t_2) + q_2. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima delle (40) per t_2 , la seconda per t_1 , sottraendo membro a membro, integrando su tutto il volume v si trova dopo alcuni ovvi passaggi :

$$\int_{\sigma} K \left(t_2 \frac{\partial t_1}{\partial n} - t_1 \frac{\partial t_2}{\partial n} \right) d\sigma = \int_v (q_1 t_2 - q_2 t_1) dv.$$

Ora su σ_2, t_1 e t_2 soddisfano la (39) ponendo, s' intende, in luogo di t, t_1 e t_2 . E allora si ha (su σ_2):

$$K t_2 \frac{\partial t_1}{\partial n} - K t_1 \frac{\partial t_2}{\partial n} = h t_2 t_1 - h t_1 t_2 = 0.$$

Rimane perciò :

$$(41) \quad \int_{\sigma_1} \left(K t_2 \frac{\partial t_1}{\partial n} - K t_1 \frac{\partial t_2}{\partial n} \right) d\sigma_1 = \int_v (q_1 t_2 - q_2 t_1) dv.$$

Studiamo ora alcuni casi particolari. Supponiamo $Q_1 = Q_2 = 0$ quindi $q_1 = q_2 = 0$ e che su σ_1 si possa porre :

$$(42) \quad T_1 = G(t)\varphi_1(P), \quad T_2 = G(t)\varphi_2(P)$$

dove P è un punto generico di σ_1 , φ_1 e φ_2 due funzioni indipendenti dal tempo, $G(t)$ una funzione continua variabile solo col tempo. Sostituendo in (41) si ha come nel caso dell' elasticità :

$$(43) \quad \int_{\sigma_1} K \varphi_1(P) \frac{\partial t_2}{\partial n} d\sigma_1 - \int_{\sigma_1} K \varphi_2(P) \frac{\partial t_1}{\partial n} d\sigma_1 = 0.$$

Allora ricordando le espressioni (38) per t_1 e t_2 (nelle quali si deve mettere

rispettivamente l'indice 1 e 2) sostituendole in (43) si ottiene, ragionando in modo analogo al precedente capitolo:

$$(44) \quad \int_{\sigma_1} K T_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} K T_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} d\sigma_1$$

relazione valida in ogni istante. In particolare se σ_1 si può dividere in un certo numero di pezzi — per fissare le idee in due σ' e σ'' — dove T_1 e T_2 siano costanti ⁽¹⁾ e eguali rispettivamente a T_1' , T_1'' , T_2' , T_2'' la (44) diventa:

$$(45) \quad T_1' \mathcal{Q}_2' + T_1'' \mathcal{Q}_2'' = T_2' \mathcal{Q}_1' + T_2'' \mathcal{Q}_1''$$

dove \mathcal{Q}_1' , \mathcal{Q}_1'' , \mathcal{Q}_2' , \mathcal{Q}_2'' sono rispettivamente i flussi di calore nell'unità di tempo ⁽²⁾ attraverso σ' e σ'' nelle diverse distribuzioni di temperatura. La (45) generalizza una nota formula della trasmissione stazionaria, ma vale, ripetiamolo, quando le temperature soddisfano alla (42). In particolare se T_1'' e T_2' sono costantemente nulle ed è invece in ogni istante $T_1' = T_2''$ (il che si può ottenere dalle (42) particolarizzando φ_1 e φ_2) si ha:

$$(46) \quad \mathcal{Q}_2' = \mathcal{Q}_1''$$

cioè il flusso attraverso σ' supposta a temperatura zero, mentre σ'' è a temperatura T_1' vale il flusso nello stesso istante attraverso la σ'' qualora σ' sia a temperatura T_1' e σ'' a temperatura nulla.

Supponiamo ora la superficie σ_1 nulla cioè il corpo a contatto con l'ambiente esterno, sicchè il corpo riceve calore solo dalle sorgenti. Nella (41) sarà intanto nullo il primo membro. Facciamo ora l'ipotesi:

$$(47) \quad Q_1 = G(t)\psi_1(P), \quad Q_2 = G(t)\psi_2(P)$$

dove $\psi_1(P)$, $\psi_2(P)$, sono funzioni dei punti P di v , indipendenti dal tempo, mentre $G(t)$ è invece la solita funzione del tempo. Con i ragionamenti già fatti più volte si trova:

$$(48) \quad \int_v Q_2 T_1 dv = \int_v Q_1 T_2 dv$$

equazione valida istante per istante.

In particolare, il sistema di sorgenti Q_1 e Q_2 sia nullo in tutto v , all'eccezione di due piccole regioni intorno ai punti A e B , cioè, le Q_1 e Q_2

(¹) S'intende in ogni punto, ma eventualmente variabili col tempo.

(²) O più precisamente il rapporto fra il flusso di calore attraverso σ' o σ'' nel tempo $d\tau$ è il tempo $d\tau$ stesso.

si riducano a due sorgenti rispettivamente concentrate in A e B di valore N_1, N_2 (¹).

Allora le stesse considerazioni che nel capitolo precedente ci hanno permesso di passare da (17) a (18) ci conducono alla formula :

$$N_1 T_2(A) = N_2 T_1(B)$$

dove $T_1(B), T_2(A)$ sono rispettivamente le temperature in B e in A dovute rispettivamente alle sorgenti N_1 e N_2 . Quindi si ha subito il teorema: se la temperatura all'istante $\tau=0$ è nulla e se una sorgente posta in A genera una certa temperatura in B , la stessa sorgente posta in B genera la stessa temperatura in A . Ciò comunque varino nel tempo le sorgenti purchè si annullino, al più, in un numero discreto di istanti.

3. Consideriamo ora qualche caso di condizioni iniziali non nulle. Ci limiteremo come nel caso della elasticità allo studio di un corpo, la cui superficie è a contatto con un ambiente a temperatura 0^0 e per $\tau \leq 0$ è in equilibrio termico sotto l'azione di sorgenti Q_0 . Indichiamo con T_0 la temperatura, indipendente dal tempo, per $\tau \leq 0$. Avremo:

$$(49) \quad \operatorname{div} K \operatorname{grad} T_0 = - Q_0 \quad K \frac{\partial T_0}{\partial n} = h T_0.$$

All'istante $\tau=0$ supponiamo di togliere le sorgenti Q_0 . Allora poniamo T' uguale alla differenza $T - T_0$ sicchè $T = T' + T_0$. Sostituendo nell'equazione del calore troviamo:

$$(50) \quad \frac{\partial T'}{\partial \tau} = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T') - Q_0.$$

Ciò posto, consideriamo due diverse distribuzioni di sorgenti per $\tau \leq 0$ Q_{01} e Q_{02} e siano (sempre per $\tau \leq 0$) T_{01} e T_{02} le corrispondenti temperature del corpo. Avremo intanto per cose note:

$$(51) \quad \int_v T_{01} Q_{02} dv = \int_v T_{02} Q_{01} dv.$$

Se all'istante $\tau=0$ sopprimiamo le sorgenti avremo (per $\tau > 0$) due distribuzioni di temperatura T_1 e T_2 . Posto $T_1' = T_1 - T_{01}$, $T_2' = T_2 - T_{02}$ le T_1' e T_2' sono nulle per $\tau=0$ e soddisfano la (50) per $\tau > 0$ qualora si metta in questa equazione gli indici 1 e 2. Cioè le T_1', T_2' si possono interpretare

(¹) N_1 e N_2 non sono altro che l'integrale di Q_1 e Q_2 rispettivamente esteso all'intorno di A e B in cui queste ultime grandezze non sono nulle.

come distribuzioni di temperatura nel nostro corpo, dovute alle sorgenti $-Q_{01}$ e $-Q_{02}$, e nulle per $\tau = 0$. Allora applicando la (48) (tali sorgenti soddisfano alla (47))

$$(52) \quad \int_{\nu} T_1' Q_{02} dv = \int_{\nu} T_2' Q_{01} dv$$

e ricordando la (51)

$$(53) \quad \int_{\nu} T_1 Q_{02} dv = \int_{\nu} T_2 Q_{01} dv.$$

Particolarizziamo ora la (53) ammettendo che Q_{01} e Q_{02} si riducano rispettivamente a due sorgenti uguali concentrate in A e B . Avremo in modo analogo a (48):

$$(54) \quad T_2(A) = T_1(B).$$

Cioè se il corpo era in equilibrio sotto l'azione di una sorgente posta in A , rimossa questa sorgente, la temperatura in B è uguale alla temperatura in A qualora sia scambiato l'ufficio dei punti A e B . Questo teorema, come si è detto, è stato enunciato da Lord RAYLEIGH.

CAPITOLO III.

Teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo.

1. Per stabilire i teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo ci riferiremo al caso concreto della radiotelegrafia, sebbene molte delle presenti considerazioni potrebbero riportarsi anche all'ottica fisica. Consideriamo il campo elettromagnetico \mathbf{F} e \mathbf{H} (\mathbf{F} campo elettrico, \mathbf{H} campo magnetico) generato da una antenna radio percorsa da corrente (di conduzione) con densità \mathbf{U}_0 . Supponendo il campo elettromagnetico nullo assieme a \mathbf{U}_0 per $t \leq 0$ abbiamo provato (¹) altra volta come \mathbf{F} e \mathbf{H} debbano soddisfare (qualora si voglia tener presente che nell'alta atmosfera vi sono gas ionizzati) le equazioni:

$$(55) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \sigma \mathbf{F} + \int_0^t \nu(t - \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau + \mathbf{U}_0$$

$$(56) \quad \text{rot } \mathbf{F} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

(¹) Cfr. D. GRAFFI, *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia* (Nota V), « Rendiconti Istituto Lombardo », 1936. Noi ora escludiamo, per semplificare le cose, la presenza di isteresi dielettrica. È ovvio che \mathbf{F} non si confonderà con la forza della elasticità.

dove ϵ , σ , μ sono rispettivamente la costante dielettrica, la conduttività, la permeabilità del mezzo, $\nu(t - \tau)$ è una funzione che caratterizza le proprietà del gas jonizzato ⁽¹⁾ sicchè in questi gas ϵ e σ devono ritenersi la costante dielettrica e la conduttività quando la jonizzazione è nulla. Siccome escluderemo la presenza di corpi ferromagnetici potremo supporre ϵ , σ , ν , μ indipendenti dal campo magnetico e dal tempo, però in generale variabili da punto a punto ⁽²⁾. È poi ovvio che U_0 sarà diversa dallo zero solo nel volume v dell'antenna, e che in qualche regione dello spazio potrà essere σ o ν nulla.

Ammetteremo \mathbf{F} e \mathbf{H} continue per ogni (x, y, z, t) e le loro derivate generalmente continue, nel senso precisato a proposito della elasticità, cioè le derivate di \mathbf{F} e \mathbf{H} sempre continue escluse alcune superfici d'onda. Siccome ragionando come nel primo capitolo, potremo senza alcuna restrizione supporre nulla la U_0 da un certo istante k in poi, sarà dunque lecito ammettere le \mathbf{F} , \mathbf{H} e le loro derivate prime limitate per ogni x, y, z di tutto lo spazio e per ogni t in $(0, +\infty)$.

Perciò \mathbf{F} e \mathbf{H} e le loro derivate ammetteranno trasformata di LAPLACE commutabile con la derivazione rispetto alle coordinate.

Poniamo allora, se p è un numero complesso con parte reale positiva:

$$(57) \quad \mathbf{f} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{F} dt \quad \mathbf{h} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{H} dt.$$

Ora supponendo $\nu(t - \tau)$ limitata per ogni $t - \tau > 0$ si per il teorema del « Faltung » ⁽³⁾

$$(58) \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t \nu(t - \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-ps} \nu(s) ds \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \mathbf{F}(\tau) d\tau = \psi(p) \mathbf{f}$$

⁽¹⁾ A rigore, siccome sul gas jonizzato agisce il campo magnetico terrestre, la $\nu(t - \tau)$ andrebbe sostituita da una omografia. Sembra anzi che la parte dilatazione di questa omografia rimanga invariata invertendo il verso del campo magnetico, mentre cambia di segno la parte assiale. E da questa proprietà sarebbe possibile stabilire un teorema di reciprocità valido anche sul gas agisce un campo magnetico (cfr. per es. la mia Nota: *Sul teorema di reciprocità della radiotelegrafia*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1929). Per semplicità trascureremo però l'influenza del campo magnetico terrestre, osservando che in base alle ricerche ora citate sarebbe facile tenerne conto. Trascureremo poi i fenomeni di tipo non lineare come l'effetto Lussemburgo.

⁽²⁾ Analogamente in capitoli precedenti supporremo ϵ , σ , μ , ν variabili con continuità.

⁽³⁾ Cfr. G. DOETSCH, *Theorie und anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, 1937, pag. 162.

dove:

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} e^{-ps} v(s) ds.$$

Allora integrando le (55) e (56), moltiplicate per e^{-pt} , da 0 a $+\infty$ troviamo con i soliti passaggi qualora u_0 indichi la trasformata di LAPLACE di U_0 :

$$(59) \quad \text{rot } \mathbf{h} = \varepsilon p \mathbf{f} + \sigma \mathbf{f} + \psi(p) \mathbf{f} + \mathbf{u}_0$$

$$(60) \quad \text{rot } \mathbf{f} = -\mu p \mathbf{h}.$$

Possiamo poi provare che \mathbf{f} e \mathbf{h} tendono, quando il punto in cui sono calcolate si allontana indefinitamente dall'antenna, allo zero in modo esponenziale. Consideriamo perciò una sfera di centro 0 e raggio R , sia a la massima distanza di 0 dai punti dell'antenna. Sia invece r la distanza di un punto generico P della sfera, dal punto più vicino dell'antenna. Ora noi possiamo provare $\mathbf{F} = \mathbf{H} = 0$ in P fino almeno all'istante $\frac{r}{c}$, se c è il massimo in tutto lo spazio di $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ⁽¹⁾. Infatti sappiamo che il campo è nullo in tutto lo spazio per $t=0$. In questo istante si eccita l'antenna, ogni punto di essa genera delle onde, il cui fronte abbiamo visto si propaga colla velocità $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ⁽²⁾ velocità al massimo uguale a c . Perciò fino all'istante $\frac{r}{c}$ nessuna onda ha raggiunto il punto P e allora, fino a questo istante almeno, è nullo il campo in P . Siccome poi la \mathbf{F} è limitata per ogni x, y, z, t esisterà un numero M tale sia sempre $|\mathbf{F}(t)|$ inferiore a M .

Allora avremo se p_1 è la parte reale di p :

$$|\mathbf{f}| = \left| \int_{\frac{r}{c}}^{\infty} e^{-pt} \mathbf{F}(t) dt \right| \leq M \int_{\frac{r}{c}}^{\infty} e^{-p_1 t} dt \leq \frac{M}{p_1} e^{-p_1 \frac{r}{c}} \leq \frac{M}{p_1} e^{p_1 \frac{a}{c}} e^{-p_1 \frac{R}{c}}.$$

Siccome analoghe considerazioni possono farsi per \mathbf{h} resta provato che \mathbf{f} e \mathbf{h} tendono per $R \rightarrow \infty$ allo zero esponenzialmente.

2. Consideriamo ora due antenne, percorse dalle correnti U_{01} e U_{02} che generino rispettivamente i campi $\mathbf{F}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{H}_2$.

⁽¹⁾ Noi ammettiamo conformemente all'esperienza ε e μ positivi in tutto lo spazio.

⁽²⁾ Cfr. la mia Nota, citata a pag. 192.

Siano $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{u}_{01}, \mathbf{u}_{02}$ le trasformate di LAPLACE di questi vettori espresse dalla (57) con, s'intende, gli opportuni indici. Questi vettori soddisferanno le (59) e (60), cioè si avrà:

$$(61) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{h}_1 = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_1 + \mathbf{u}_{01} \\ \text{rot } \mathbf{f}_1 = -\mu p \mathbf{h}_1. \end{cases} \quad (62) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{h}_2 = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_2 + \mathbf{u}_{02} \\ \text{rot } \mathbf{f}_2 = -\mu p \mathbf{h}_2. \end{cases}$$

Moltiplicando scalarmente la prima di (62) per \mathbf{f}_1 , la seconda delle (62) per \mathbf{h}_1 e sottraendo membro a membro si ha:

$$(63) \quad \text{div}(\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{f}_2) = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_2 \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 + \mu p \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2.$$

Invece moltiplicando scalarmente per \mathbf{f}_1 la prima delle (62), per \mathbf{h}_2 la seconda delle (61) e sottraendo membro a membro si ha:

$$(64) \quad \text{div}(\mathbf{h}_2 \wedge \mathbf{f}_1) = (\varepsilon p + \sigma + \psi(p))\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 + \mathbf{u}_{02} \times \mathbf{f}_1 + \mu p \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2.$$

Integrando le (63) e (64) su tutto lo spazio otterremo due equazioni col primo membro nullo. Ciò si prova in base al teorema della divergenza e all'annullarsi di \mathbf{f} e \mathbf{h} all'infinito. Allora confrontando i secondi membri delle equazioni in discorso si trova subito:

$$(65) \quad \int_{v_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 dv_1 = \int_{v_2} \mathbf{u}_{02} \times \mathbf{f}_1 dv_2$$

dove v_1 e v_2 sono rispettivamente i volumi della prima e seconda antenna in cui non sono nulle \mathbf{u}_{01} e \mathbf{u}_{02} . Ora la (65) si può ridurre ad una forma più semplice. Le antenne sono, come è noto, filiformi. Divisa perciò la linea l_1 asse della prima antenna in elementi dl_1 e tirati per i punti di divisione le sezioni Σ_1 normali all'asse dell'antenna potremo ammettere, essendo la sezione molto piccola, $dv_1 = d\Sigma_1 dl_1$. Quindi:

$$\int_{v_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 dv_1 = \int_{l_1} dl_1 \int_{\Sigma_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 d\Sigma_1.$$

Essendo la sezione Σ_1 molto piccola, rispetto alla distanza della seconda antenna si potrà supporre \mathbf{F}_2 e quindi \mathbf{f}_2 costante sopra Σ_1 (*) perciò:

$$(66) \quad \int_{v_1} \mathbf{u}_{01} \times \mathbf{f}_2 dv = \int_{l_1} dl_1 \mathbf{f}_2 \times \int_{\Sigma_1} \mathbf{u}_{01} d\Sigma_1 = \int_{l_1} \mathbf{f}_2 \times \mathbf{t}_1 i_{01} dl_1$$

(*) A rigore per ammettere \mathbf{f}_2 costante su Σ_1 non basta la piccolezza delle dimensioni di Σ_1 rispetto alla distanza dalla seconda antenna, ma occorre anche un'altra condizione che nello stato di regime sinusoidale si riduce ad ammettere le dimensioni di Σ_1 piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ . Comunque possiamo ritenere, in ogni caso la nostra ipotesi sufficientemente approssimata.

dove \mathbf{t}_i è un vettore unitario normale a Σ_i e diretto cioè tangenzialmente all'asse l_i , i_{0i} la trasformata di LAPLACE della corrente I_i attraverso Σ_i . L'ultimo passaggio nella (66) si giustifica così. Decomponiamo \mathbf{u}_{0i} secondo la direzione normale e tangenziale a Σ_i . Sia \mathbf{u}_n la prima di queste componenti, \mathbf{u}_t la seconda. Ammettiamo che l'integrale di \mathbf{u}_t su Σ_i sia trascurabile il che, almeno nel caso della sezione circolare, si intuisce per simmetria. Ma \mathbf{u}_n vale $(\mathbf{u}_{0i} \times \mathbf{t}_i)$ quindi l'integrale di \mathbf{u}_n su Σ_i vale il flusso di \mathbf{u}_{0i} attraverso Σ_i ossia i_{0i} moltiplicato per \mathbf{t}_i conformemente alla (66). Poichè la (66) vale anche scambiando gli indici la (65) diventa:

$$(67) \quad \int_{l_1} \mathbf{f}_2 \times \mathbf{t}_1 i_{01} dl_1 = \int_{l_2} \mathbf{f}_1 \times \mathbf{t}_2 i_{02} dl_2.$$

Ora se si può ammettere, come nelle antenne in onde stazionarie, che le correnti I_1 e I_2 abbiano la forma:

$$(68) \quad I_1 = G(t)m_1(l_1), \quad I_2 = G(t)m_2(l_2),$$

dove $G(t)$ la solita funzione del tempo, $m_1(l_1)$, $m_2(l_2)$ due funzioni di l_1 e l_2 , si trova con i soliti passaggi:

$$(69) \quad \int_{l_1} \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 I_1 dl_1 = \int_{l_2} \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2 I_2 dl_2$$

che è la forma più generale del teorema di reciprocità, per le antenne in onde stazionarie.

Nel caso particolare in cui le due antenne siano rettilinee e abbastanza corte, in modo da poter ritenere \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_1 abbiano valori uniformi ⁽¹⁾ su tutto l_1 e l_2 la (69) diventa:

$$(70) \quad \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 \int_{l_1} I_1(l_1) dl_1 = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2 \int_{l_2} I_2(l_2) dl_2.$$

Ora è noto che, in un intervallo di tempo in cui le antenne oscillano sinusoidalmente cioè quando si può scrivere:

$$I_1 = \cos(\omega t + \varphi_1)m(l_1), \quad I_2 = \cos(\omega t + \varphi_2)m_2(l_2)$$

si chiamano altezze equivalenti, rispettivamente della prima e seconda antenna,

(1) Ciò avviene, in un intervallo di tempo in cui le \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sono sinusoidali se le dimensioni dell'antenna sono piccole rispetto a λ . Queste considerazioni valgono anche per campi non molto diverse dai sinusoidali (campi modulati, smorzati con smorzamento non eccessivo, ecc.). Negli altri casi è difficile dare criteri generali per la nostra ipotesi. Notiamo però che essa è sempre esatta qualora la lunghezza delle antenne fosse infinitesima cioè se le antenne si riducessero a dipoli infinitesimi.

le espressioni:

$$h_{e_1} = \frac{\int_{l_1} m_1(l_1) dl_1}{I_{01}} \quad h_{e_2} = \frac{\int_{l_2} m_2(l_2) dl_2}{I_{02}}$$

dove I_{01} e I_{02} sono i valori massimi $m_1(l_1)$, $m_2(l_2)$. Generalizzando questa definizione, cioè applicandola in ogni caso, la (70) si può scrivere:

$$(71) \quad \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 I_{01} h_{e_1} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2 I_{02} h_{e_2}$$

che è la forma più comoda del teorema di reciprocità.

In particolare se le due antenne sono identiche e $m_1(l_1) = m_2(l_2)$ si ha da (71)

$$(72) \quad \mathbf{F}_2 \times \mathbf{t}_1 = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{t}_2.$$

Abbiamo così generalizzato le principali espressioni del teorema di reciprocità della radiotelegrafia. Perciò varie conseguenze del teorema in discorso provate finora per campi sinoidali, vengono estese senz'altro a campi che variano col tempo in modo qualunque ⁽¹⁾.

Nel caso delle antenne in onde progressive, cioè antenne per le quali si possa scrivere (c costante):

$$(73) \quad I_1 = g\left(t - \frac{l_1}{c}\right) \quad I_2 = g\left(t - \frac{l_2}{c}\right)$$

le stesse considerazioni fatte a proposito della teoria della elasticità ci permettono di dedurre da (67)

$$\int_{l_1} \mathbf{F}_2\left(t - \frac{l_1}{c}\right) \times \mathbf{t}_1 dl_1 = \int_{l_2} \mathbf{F}_1\left(t - \frac{l_2}{c}\right) \times \mathbf{t}_2 dl_2$$

che è la forma più generale del teorema di reciprocità per antenne in onde progressive. Essa si semplifica se l_1 , l_2 sono così piccole da potersi supporre $\mathbf{F}_2\left(t - \frac{l_1}{c}\right) = \mathbf{F}_2(t)$, $\mathbf{F}_1\left(t - \frac{l_2}{c}\right) = \mathbf{F}_1(t)$ e allora si ottiene, una formula analoga a (72). Si deve però notare, che nei casi pratici, quest'ultima supposizione si può fare di rado.

Termineremo questo capitolo con la seguente ovvia osservazione. Molto spesso le antenne sono percorse da correnti sinoidali. Però tale condizione si raggiunge dopo un periodo transiente, in generale, brevissimo. Siccome arrivati a regime anche il campo, si può supporre, almeno sulle due antenne, sinoidale

(1) Cfr. T. ECKERSLEY, « Proceedings Institute Electrical Engineer », 1927; D. GRAFFI, « Nuovo Cimento », 1932; G. LATMIRAL, « Alta Frequenza », 1938.

resta provato dalla nostra ricerca il teorema di reciprocità nel caso sinusoidale, e ciò ha il maggior interesse pratico. Come è noto il teorema in discorso si dimostra, in generale, supponendo sinusoidale il campo in ogni punto, ma si va incontro a qualche difficoltà nell'eliminare certi integrali di superficie, che devono essere nulli quando la superficie si allontana all'infinito ⁽¹⁾. Il nostro metodo evita, come si è visto, queste difficoltà e ci sembra stringa più da vicino i fatti.

APPENDICE

Riprendiamo il problema della trasmissione del calore in un corpo, la cui superficie esterna sia a contatto con un ambiente a temperatura zero, e all'interno si trasmetta calore, dovuto a sorgenti distribuite nel corpo stesso. Vedremo come il teorema di reciprocità stabilito, supponendo le temperatura inizialmente nulla si possa, dimostrare senza ammettere, per la temperatura, quel particolare comportamento all'infinito ⁽²⁾ che ci ha permesso di applicare la trasformazione di LAPLACE. Si abbiano due sistemi di sorgenti tali che:

$$(74) \quad Q = G(t)\psi_1(P) \quad Q_2 = G(t)\psi_2(P).$$

In corrispondenza di Q_1 e Q_2 avremo, nel nostro corpo di volume v limitato dalla superficie σ , le temperature T_1 e T_2 che soddisfano alle equazioni:

$$(75) \quad c\rho \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \text{div} (K \text{ grad } T_1) + Q_1$$

$$(76) \quad c\rho \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \text{div} (K \text{ grad } T_2) + Q_2$$

integriamo queste equazioni da 0 a m ($m > 0$) dopo averle moltiplicate per $e^{-p\tau}$. Una integrazione per parti al primo membro ci da:

$$(77) \quad c\rho(e^{-pm}T_1(m) + pt_1(m)) = \text{div} (K \text{ grad } t_1(m)) + q_1(m)$$

$$(78) \quad c\rho(e^{-pm}T_2(m) + pt_2(m)) = \text{div} (K \text{ grad } t_2(m)) + q_2(m)$$

dove si è posto:

$$t_1(m) = \int_0^m e^{-p\tau} T_1(\tau) d\tau, \quad t_2(m) = \int_0^m e^{-p\tau} T_2(\tau) d\tau$$

$$q_1(m) = \int_0^m e^{-p\tau} Q_1(\tau) d\tau, \quad q_2(m) = \int_0^m e^{-p\tau} Q_2(\tau) d\tau$$

⁽¹⁾ Cfr. BALLANTINE, « Proceedings Radio Engineers », 1928.

⁽²⁾ Cioè facciamo per la temperatura le solite ipotesi della fisica matematica la temperatura assieme alle sue derivate sia finita e continua entro tutto il corpo e in ogni intervallo finito di tempo.

moltiplicando la (77) per $t_2(m)$ la (78) per $t_1(m)$ e sottraendo membro a membro si ha:

$$c\rho e^{-pm}(T_1(m)t_2(m) - T_2(m)t_1(m)) = \operatorname{div}(Kt_2 \operatorname{grad} t_1 - Kt_1 \operatorname{grad} t_2) + q_1(m)t_2(m) - q_2(m)t_1(m).$$

Integrando questa equazione su tutto v e osservando che su σ

$$K \operatorname{grad} t_1(m) \times \mathbf{n} = ht_1(m), \quad K \operatorname{grad} t_2(m) \times \mathbf{n} = ht_2(m)$$

si ha (4):

$$(79) \quad c\rho e^{-pm} \int_v (T_1(m)t_2(m) - T_2(m)t_1(m)) dv = \int_v (q_1(m)t_2(m) - q_2(m)t_1(m)) dv.$$

Passiamo ora al limite per $m \rightarrow \infty$. Possiamo ora dimostrare che il limite del primo membro è nullo.

A questo moltiplichiamo la (75) per T_1 integrando su tutto v troviamo:

$$c\rho \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_v T_1^2 dv = \int_v \operatorname{div}(T_1 K \operatorname{grad} T_1) dv - \int_v K \operatorname{grad}^2 T_1 dv + \int_v Q_1 T_1 dv = \int_v -hT_1^2 dv - \int_v K \operatorname{grad}^2 T_1 dv + \int_v Q_1 T_1 dv.$$

Ora, per ipotesi da un certo istante, che ora indicheremo con k , in poi la Q_1 si può supporre nulla, cioè da quell'istante in poi la derivata rispetto al tempo di $\int_v T_1^2 dv$ è negativa o al più nulla. Perciò questo integrale è in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ inferiore o al più uguale al suo limite superiore M_1 in $(0, k)$.

E analoga considerazione può farsi per $\int_v T_2^2 dv$ che sarà inferiore in $(0, +\infty)$ al suo limite superiore M_2 in $(0, k)$.

Ora si ha, se p_1 è la parte reale di p , M il maggiore fra M_1 e M_2 ,

$$\left| \int_v T_1(m)t_2(m) dv \right| = \left| \int_v T_1(m) \int_0^m e^{-p\tau} T_2(\tau) d\tau dv \right| = \left| \int_0^m e^{-p\tau} d\tau \int_v T_1(m)T_2(\tau) dv \right| \leq \int_0^m e^{-p_1\tau} d\tau \int_v \frac{T_1^2(m) + T_2^2(\tau)}{2} dv \leq \frac{M}{p_1} (1 - e^{-p_1 m}) \leq \frac{M}{p_1}.$$

Poichè le stesse considerazioni possono ripetersi scambiando gli indici

(4) Per semplicità, sebbene sia facile liberarsi da questa ipotesi, supporremo $c\rho$ costante su tutti i punti di v . Si ricordi poi che $c\rho$ come K sono sempre positivi conformemente all'esperienza.

l'integrale a primo membro di (79) è per ogni m limitato, sicchè passando al limite per $m \rightarrow \infty$ il primo membro di questa equazione è nullo, come si era annunciato.

Si ha allora, ricordando le (74)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m G(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_v^m \left(\psi_1 \int_0^m e^{-p\tau} T_2 d\tau - \psi_2 \int_0^m e^{-p\tau} T_1 d\tau \right) dv = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m G(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^m e^{-p\tau} d\tau \int_v^m (\psi_1 T_2 - \psi_2 T_1) dv = 0.$$

Ora scelto $m > k$, $G(\tau) = 0$ per $\tau > m$, quindi, per questi valori di τ il primo integrale rimane costante e si può per ciò anteporlo al segno limite. Sicchè con ovvia semplificazione si ha:

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau \int_v^m (\psi_1 T_2 - \psi_2 T_1) dv = 0.$$

Da cui scende subito il teorema di reciprocità già stabilito. Forse con le stesse considerazioni si avrebbero potuti stabilire gli altri teoremi di questo lavoro, ma abbiamo creduto opportuno evitare questo metodo troppo complicato, rispetto all'altro da noi seguito, che richiede ipotesi così intuitive dal punto di vista fisico.

Application of Orthogonal Tchebycheff Polynomials to Lagrangean Interpolation and to the General Theory of Polynomials.

By J. SHOCHAT (Philadelphia - United States of America).

Introduction.

Research activity dealing with LAGRANGE Interpolation Formula (LIF) exhibits, as it often happens, a succession of maxima and minima. Considerable interest in LIF marks the beginning of the century [1, 2, 3] ⁽¹⁾. This topic then lay dormant for several years. In 1914-18 appeared papers by BERNSTEIN, FABER, FEJÉR and HAHN [5-8]. Then we had a new period of minima for about twelve years, when interest in interpolation awakened, and a period of maxima started which is still going strong. In recent years a number of papers and books appeared dealing with various aspects of interpolation: convergence and divergence, mean-convergence, mechanical quadratures, etc. [11, 34, 52].

The present paper is along the same lines. It consists of three parts. In Part I, having first marshalled the necessary formulae, we derive, in a new way, the so-called « second orthogonality property » of orthogonal polynomials (*OP*) [35], which in parts dates from TCHEBYCHEFF, but seems to have been overlooked. This yields a new representation of LIF *employing for abscissas the zeros of OP*, which is the main object of our discussion, also of the fundamental Lagrangean interpolation functions, whence many important properties follow directly. An important role is being played here a certain horizontal step-function, with a finite number of steps. A strong parallelism is exhibited between LIF under discussion and the expansion of a function in series of *OP*. — Part II deals with convergence and mean-convergence of our LIF for general *OP*, and-with more details — for the classical *OP* — of JACOBI (J), LAGUERRE (L) and HERMITE (H). Here we give

(1) Numbers in [] refer to the bibliography at the end of the paper.

necessary and sufficient conditions for mean-convergence, involving the corresponding mechanical quadratures formulae (*MQF*). The results obtained supplement those previously established by the author [18, 26]. — In Part III we make use of the aforesaid step-function in dealing with polynomials in general. The main result is an estimate of an arbitrarily given linear combination of the coefficients of any polynomial $G_s(x)$, of a given degree s , if we know the upper bound of $|G_s(x)|$ at $s+1$ properly specified points. Numerous applications follow, dealing with the coefficients of $G_s(x)$, its derivatives, etc., in a ready and elementary way, by specifying the above linear combination, the set of points employed, and so on. While the results obtained are not the best possible in all cases, they go, in many respects, beyond those established by various writers, where $\max. |G_s(x)|$ over an interval is involved. Our results have also the advantage of being derived in an elementary fashion, from a single source. — Throughout this paper the quantities dealt with are real, unless an explicit statement to the contrary is made. At the end of the paper we give a considerable (by no means, complete) bibliography on interpolation.

NOTATIONS USED. — For *OP* we use the notations of my Monograph: *Théorie générale des polynomes orthogonaux de TCHEBICHEFF*, « *Mém. Sc. Math.* », fasc. 66 (1934) (to which the reader is referred for further details).

$G_s(x) = \sum_{i=0}^s g_i x^i$ stands generally for an *arbitrary* polynomial, of degree $\leq s$ (subject, in some cases, to certain explicitly stated conditions). ($\delta, \varepsilon, \varepsilon', \dots$) and N, A denote sufficiently small resp. sufficiently large, but fixed, positive quantities; τ —properly fixed positive quantity (different in different formulae) independent of n , in some cases—an absolute constant. $(\nu) \subset (n)$ means: the infinite sequence of positive integers $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \dots \rightarrow \infty$ is a subsequence of $(n = 1, 2, 3, \dots)$; (54-J), (51-L, H) means: the corresponding formula refers to JACOBI polynomials resp. to LAGUERRE, HERMITE polynomials.

PART I.

The « second orthogonality property » for general *OP*.

1. **Formulae from the theory of *OP*. Representation of LIF⁽²⁾.** — Consider the sequence of *OP*

$$(1) \quad \Phi_n(x; \alpha, b; d\psi) \equiv \Phi_n(x; d\psi) \equiv \Phi_n(x) = x^n - S_n x^{n-1} + \dots \quad (n=0, 1, \dots),$$

(²) LIF means here and hereafter an interpolation formula based on the zeros of *OP*.

with the orthogonality property

$$(2) \quad \int_a^b \Phi_n(x) G_{n-1} d\psi = 0. \quad (n=1, 2, \dots)$$

Here $\psi(x)$ is monotone non-decreasing in the finite or infinite interval (a, b) having all moments

$$(3) \quad \alpha_n = \int_a^b x^n d\psi \quad (n=0, 1, \dots), \quad \text{with } \alpha_0 > 0 \quad (\psi(a) = 0)$$

(the integrals are RIEMANN-STIELTJES integrals).

For the normalized *OP* we have:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x; a, b; d\psi) &\equiv \varphi_n(x; d\psi) \equiv \varphi_n(x) \equiv \alpha_n \Phi_n(x), \\ \alpha_n &\equiv \alpha_n(d\psi) > 0 \end{aligned} \quad (n=0, 1, \dots);$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\alpha_n} &= \int_a^b \Phi_n^2(x) d\psi = \int_a^b \Phi_n(x) x^n d\psi \\ \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) d\psi &= \delta_{mn} \end{aligned} \quad (m, n=0, 1, \dots).$$

Note that the construction of $\{\Phi_k(x)\}$, $k=0, 1, \dots, n$, requires the use of the first $2n$ moments $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}$ only, while the construction of $\varphi_n(x)$ requires, in addition, the use of α_{2n} . Denote the zeros of (1) by $x_{i,n}$, with

$$(6) \quad a < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < b.$$

They given rise to a Gaussian *MQF*

$$(7) \quad \int_a^b f(x) d\psi = \sum_{i=1}^n H_i f(x_i) + R_n(f) \equiv Q_n(f) + R_n(f); \quad x_i \equiv x_{i,n};$$

$$H_i \equiv H_{i,n} \equiv H_{i,n}(d\psi) = \int_a^b \frac{\Phi_n(x)}{(x-x_i)\Phi_n'(x_i)} d\psi \equiv \int_a^b l_i(x) d\psi = \int_a^b l_i^2(x) d\psi,$$

with « degree of precision » $2n - 1$ [36], i. e.

$$(8) \quad R_n(G_{2n-1}) \equiv 0.$$

In particular,

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n H_i x_i^k = \alpha_k \quad (k=0, 1, \dots, 2n-1; n=1, 2, \dots).$$

Introduce the horizontal step-function $\psi_n(x)$, which plays an important part in the theory of *OP*, defined as follows:

$$(10) \quad \begin{aligned} \psi_n(a) = 0, \quad \psi_n(x) \text{ is constant for } x_i < x < x_{i+1}, \\ \psi_n(x_i + 0) - \psi_n(x_i - 0) = H_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \psi_n(x) \text{ is constant outside } (x_1, x_n). \end{aligned}$$

We have, in view of (9),

$$(11) \quad \begin{aligned} \int_a^b x^k d\psi_n &= \sum_{i=1}^n H_i x_i^k = \alpha_k \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1) \\ \int_a^b G_{2n-1}(x) d\psi_n &= \sum_{i=1}^n H_i G_{2n-1}(x_i) \equiv Q_n(G_{2n-1}) = \int_a^b G_{2n-1}(x) d\psi. \end{aligned}$$

In fact, by the very definition of a (*R-S*) integral,

$$(12) \quad \int_a^b f(x) d\psi_n = \sum_{i=1}^n H_i f(x_i).$$

Formulae (11), (12) are fundamental for the subsequent discussion.

Thus, *MQF* (7) may be rewritten now as

$$(13) \quad \begin{aligned} \int_a^b f(x) d\psi_n &= \int_a^b f(x) d\psi_n + R_n(f) \equiv Q_n(f) + R_n(f) \\ Q_n(f) &\equiv \sum_{i=1}^n H_i f(x_i) = \int_a^b f(x) d\psi_n; \quad H_i = \int_a^b l_i(x) d\psi_n = \\ &= \int_a^b l_i^2(x) d\psi_n, \quad l_i(x) = \frac{\Phi_n(x)}{(x - x_i)\Phi_n'(x_i)}. \end{aligned}$$

The orthogonality properties (2), (5) may be restated as

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_a^b \Phi_k(x) G_{k-1}(x) d\psi_n &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \\ \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) d\psi_n &= \delta_{ij}. \quad (0 \leq i, j \leq n-1) \end{aligned}$$

Incidentally, this gives

$$(15) \quad H_k \varphi_i^2(x_k) \leq \sum_{j=1}^n H_j \varphi_i^2(x_j) = 1 \quad (i=0, 1, \dots, n-1; k=1, 2, \dots, n).$$

(14) leads to the following important conclusion: *the finite sequence* $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)\}$ *is an orthonormal sequence with respect to* $d\psi_n$:

$$(16) \quad \varphi_k(x; a, b; d\psi_n) \equiv \varphi_k(x; a, b; d\psi) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

This yields the following representation for polynomials:

$$(17) \quad \begin{aligned} G_{n-1}(x) &\equiv \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \varphi_i(x) \\ \gamma_i &= \int_a^b G_{n-1}(t) \varphi_i(t) d\psi(t) = \int_a^b G_{n-1}(t) \varphi_i(t) d\psi_n(t) \\ G_{n-1}(x) &= \int_a^b G_{n-1}(t) K_{n-1}(x, t) d\psi_n(t), \end{aligned}$$

where we may use DARBOUX formulae:

$$(18) \quad K_{n-1}(x, t) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x) \varphi_i(t) = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\varphi_n(x) \varphi_{n-1}(t) - \varphi_n(t) \varphi_{n-1}(x)}{x - t}$$

$$(19) \quad K_{n-1}(x; d\psi) \equiv K_{n-1}(x, x) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i^2(x) = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} [\varphi_n'(x) \varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x) \varphi_{n-1}'(x)].$$

2. The « second orthogonality property » of OP. — We now state

THEOREM I. — *Any normalized sequence of OP satisfies the following relations:*

$$(20) \quad \sum_{k=1}^n H_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = \delta_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n-1)$$

$$(21) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x_p) \varphi_i(x_q) = \begin{cases} 0, & q \neq p \\ \frac{1}{H_p}, & q = p \end{cases} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n).$$

(20) is (14) combined with (11). It expresses the « second orthogonality property » of OP ⁽³⁾. It is due to TCHEBYCHEFF [50] who derived it in a different way. (21) follows directly from (18), (19), if we substitute $x = x_p, x_q$, and make use of the known formula

$$(22) \quad H_i = \frac{1}{K_{n-1}(x_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

⁽³⁾ Cf. [35], where it is derived — see also [24, 27] — for trigonometric polynomials.

3. Construction of LIF. — We now turn to LIF, where the above x_i are used as abscissas:

$$(23) \quad L_{n-1}(x; f) \equiv L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n l_i(x) f(x_i), \quad L_{n-1}(x_i) = f(x_i),$$

$$(24) \quad l_i(x) \equiv l_{i,n}(x) = \frac{\Phi_n(x_i)}{(x - x_i) \Phi_n'(x_i)},$$

fundamental Lagrangean interpolation functions.

We write:

$$(25) \quad f(x) = L_{n-1}(x; f) + \rho_n(x; f), \quad \text{with } \rho_n(x; G_{n-1}) \equiv 0.$$

$$(26) \quad \rho_n(x; f) \equiv \rho_n \equiv \rho_n(x; f - G_{n-1}) + \rho_n(x; G_{n-1}) \equiv \rho_n(x; f - G_{n-1}).$$

The functions $f(x)$ we are dealing with are assumed to be defined at every finite point of (a, b) . We further assume, in view of subsequent applications, that

$$(27) \quad \int_a^b f^2(x) d\psi \quad \left(\text{hence, also } \int_a^b |f(x)| d\psi \right) \text{ exists.}$$

By virtue of (26), combined with (12),

$$(28) \quad \int_a^b [f(x)]^s d\psi_n = \int_a^b [L_{n-1}(x)]^s d\psi_n,$$

for any exponents s for which (28) has a meaning.

For a further study of $l_i(x)$, $L_{n-1}(x)$ it seems advantageous to represent $L_{n-1}(x)$ in terms of $\{\varphi_k(x)\}$ (making use of (20), (23)):

$$(29) \quad \begin{aligned} L_{n-1}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n} \varphi_i(x) \\ h_{i,n} &= \int_a^b L_{n-1}(x) \varphi_i(x) d\psi_n = \sum_{k=1}^n H_k \varphi_i(x_k) f(x_k) \quad (i=0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

This representation is valid for any sequence of OP.

It takes the simplest form for trigonometric polynomials, where

$$(30) \quad \begin{aligned} (a, b) &\equiv (-1, 1), \quad d\psi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \varphi_0(x) &= \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n \arccos x \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Here and only here [47]

$$H_{1,n} = H_{2,n} = \dots = H_{n,n} = \frac{\pi}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

and (29) becomes

$$(31) \quad \begin{aligned} L_{n-1}(\cos \theta) &= \frac{\bar{h}_{0,n}}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{h}_{i,n} \cos i\theta \\ \bar{h}_{0,n} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(\cos \theta_k), \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}; \\ \bar{h}_{i,n} &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(\cos \theta_k) \cos i\theta_k \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

We see at once that for every fixed $i \geq 0$

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}_{i,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos i\theta \, d\theta,$$

so that, in this case, we may say that $L_{n-1}(\cos \theta)$ becomes, as $n \rightarrow \infty$, the Fourier cosine-expansion of $f(\cos \theta)$ [35].

It will be shown below (Part II, § 2) that a stronger conclusion holds for a wide class of OP.

Turning to (29), write:

$$(34) \quad h_{i,n} = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) d\psi_n \quad (\text{by (28)}),$$

and this leads directly to

THEOREM II. — *The Lagrange Interpolation polynomial $L_{n-1}(x; f)$ based on the zeros of $\varphi_n(x; d\psi)$ is identical with the expansion of $f(x)$ in terms of the finite set $\{\varphi_k(x; d\psi_n)\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, of orthonormal polynomials with respect to $d\psi_n$ (*):*

$$(35) \quad f(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n} \varphi_i(x) \equiv L_{n-1}(x; f); \quad h_{i,n} = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) d\psi_n.$$

(*) In [26] the author considers $L_{n-1}(x; f)$ as an expansion of $f(x)$ in terms of the finite set of orthonormal polynomials $\left\{ \frac{l_k(x)}{\sqrt{H_k}} \right\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, with

$$\int_a^b H_i^{-1/2} l_i(x) H_j^{-1/2} l_j(x) d\psi = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

After [35] and its applications have been derived, I learned that J. MATCINKIEWICZ [29] has treated trigonometric interpolation in a similar fashion.

(35) naturally raises the question of comparing this finite expansion with the infinite one:

$$(36) \quad f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} f_i \varphi_i(x), \quad f_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) d\psi.$$

4. **Parallelism between the two expansions (35) and (36).** — We write these side by side, so as to exhibit the many properties they have in common, including extremal properties, the expansion in each case being in series of *OP*.

TABLE P.

Expansion (35)	Expansion (36)
$\alpha) f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n} \varphi_i(x) + \rho_n \equiv L_{n-1}(x; f) + \rho_n$	$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \varphi_i(x) + r_n \equiv S_{n-1}(x) + r_n$
$\beta) h_{i,n} = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) d\psi_n$	$f_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) d\psi$
$\gamma) L_{n-1}(x_i) = f(x_i); \quad a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$	$S_{n-1}(\xi_i) = f(\xi_i); \quad a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < b$ (if $f(x)$ is continuous; follows from)
$\delta) \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)] G_{n-1}(x) d\psi_n = 0$	$\int_a^b [f(x) - S_{n-1}(x)] G_{n-1}(x) d\psi = 0.$

In particular, δ' :

$\delta') \int_a^b f(x) d\psi_n = \int_a^b L_{n-1}(x) d\psi_n$	$\int_a^b f(x) d\psi = \int_a^b S_{n-1}(x) d\psi$
$\epsilon) 0 = \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi_n =$ $= \min. \int_a^b [f(x) - G_{n-1}(x)]^2 d\psi_n$	$\int_a^b [f(x) - S_{n-1}(x)]^2 d\psi =$ $= \min. \int_a^b [f(x) - G_{n-1}(x)]^2 d\psi$
$\zeta) \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2 = \int_a^b f^2(x) d\psi_n$	$\int_a^b S_{n-1}^2(x) d\psi = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \leq \int_a^b f^2(x) d\psi$ (BESSEL inequality for $f(x)$)
$\eta) L_{n-1}(x) = \int_a^b f(t) K_{n-1}(x, t) d\psi_n(t)$	$S_{n-1}(x) = \int_a^b f(t) K_{n-1}(x, t) d\psi(t).$

How closely are these two expansions connected? In other words, what is the relation between the corresponding coefficients $h_{i,n}$ and f_i ? This will be taken up in Part II, where the discussion is based upon the following relations:

$$(37) \quad f_i - h_{i,n} = \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)] d\psi$$

$$(38) \quad \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi \geq \sum_{i=0}^{n-1} [f_i - h_{i,n}]^2 + \sum_{i=n}^{\infty} f_i^2$$

(BESSEL inequality for $f(x) - L_{n-1}(x)$).

5. **The fundamental Lagrangean interpolation functions $l_k(x)$.** — Comparing (23) and (29) (or applying (17) to $l_k(x)$) yields:

$$(39) \quad l_k(x) = H_k \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x) \varphi_i(x_k) = H_k K_{n-1}(x, x_k) = H_k \cdot \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\varphi_n(x) \varphi_{n-1}(x_k)}{x - x_k}$$

($k = 1, 2, \dots, n$; x arbitrary).

This enables us to estimate $l_k(x)$ in a very simple manner, particularly, for the classical *OP*. By CAUCHY inequality, we get at once:

$$(40) \quad |l_k(x)| \leq H_k \sqrt{K_{n-1}(x) K_{n-1}(x_k)}$$

$$|l_k(x)| \leq \sqrt{H_k K_{n-1}(x)}$$

(by (22); $k = 1, 2, \dots, n$; x arbitrary).

This is the best possible estimate, for it becomes an equality for $x = x_k$. Writing $\varphi_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n(x_k)$, we get from (39)

$$(41) \quad l_k(x) = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \cdot \varphi_n'(\zeta_k) \varphi_{n-1}(x_k)$$

($k = 1, 2, \dots, n$; ζ_k between x_k and x).

Conversely, we may express $K_{n-1}(x)$ in terms of the $l_k(x)$ [18]:

$$(42) \quad K_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n l_k^2(x) K_{n-1}(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{l_k^2(x)}{H_k}$$

Writing $l_k(x) = \frac{l_k(x)}{\sqrt{H_k}} \cdot \sqrt{H_k}$, we get now, by (42) and (9),

$$(43) \quad \lambda(x) \equiv \sum_{k=1}^n |l_k(x)| \leq \sqrt{\alpha_0 K_{n-1}(x)} \quad (x \text{ arbitrary}).$$

The estimate (43) is of importance in the study of the convergence properties of LIF.

We proceed to discuss the various quantities involved in the above formulae.

(i) $H_k \equiv H_{k,n}$. In view of (9),

$$(44) \quad H_{k,n} = O(1), \quad (n \rightarrow \infty),$$

for any sequence of OP ($k = 1, 2, \dots, n$).

Moreover,

$$(45) \quad H_{k,n} = o(1), \quad (n \rightarrow \infty),$$

uniformly in k , if $\psi(x)$ is continuous in (a, b) , in particular, if $d\psi(x) = p(x)dx$, $p(x) \geq 0$ in (a, b) ⁽⁵⁾.

For the classical OP we have more precise results [37-39]. We give here a few illustrations.

(i-J) JACOBI *polynomials* $\varphi_n(x; -1, 1; (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1})$, $\alpha, \beta > 0$ (certain authors use α, β in place of $\alpha - 1, \beta - 1$).

$$(46-J) \quad \begin{aligned} H_{k,n} &< \tau n^{-2 \min.(\alpha, \beta)} && \left(\alpha \neq \beta, \text{ or } \alpha \text{ and } \beta \leq \frac{1}{2} \right) \\ H_{k,n} &< \tau n^{-1} && \left(\alpha, \beta \geq \frac{1}{2} \right) \\ H_{k,n} &< \tau n^{-2\alpha} && \left(\alpha = \beta \leq \frac{1}{2} \right) \\ H_{1,n} &< \tau n^{-2\alpha}, \quad H_{n,n} &< \tau n^{-2\beta} && (\alpha, \beta > 0). \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(i-L) LAGUERRE *polynomials* $\varphi_n(x; 0, \infty; e^{-x}x^{\alpha-1})$, $\alpha > 0$ (certain authors use α , in place of $\alpha - 1$).

$$(46-L) \quad \begin{aligned} H_{k,n} &< \tau n^{-\alpha} && \left(\alpha \leq \frac{1}{2} \right) \\ H_{k,n} &< \tau n^{-\frac{1}{2}} && \left(\alpha \geq \frac{1}{2} \right) \\ H_{k,n} &= \frac{\pi + o(1)}{\sqrt{n}} && \left(\alpha = \frac{1}{2}; 1 \leq k < n^{\frac{1}{2}-\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(i-H) HERMITE *polynomials* $\varphi_n(x; -\infty; e^{-x^2})$.

$$(46-H) \quad \begin{aligned} H_{n-k+1,n} &= H_{k,n} < \tau n^{-\frac{1}{2}} && (k = 1, 2, \dots, n) \\ H_{k,n} &= \frac{\pi}{2} + o(1) && \left(\left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{2} \right]^{\frac{1}{2}-\epsilon} < k < \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right]^{\frac{1}{2}-\epsilon} \right) \\ & && \sqrt{n} \end{aligned}$$

([c] means the greatest integer contained in c ; $c > 0$).

⁽⁵⁾ Cf. [36], for (a, b) finite. For (a, b) infinite this is proved in a book on the Moment-Problem, in the course of preparation jointly by J. D. TAMARKIN and the author.

In the general case we may utilize Tchebycheff inequalities [36], whence

$$(47) \quad H_{k,n} < \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k+1,n}} d\psi \quad (k = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$\int_a^{x_{1,n}} d\psi < H_{1,n} < \int_a^{x_{2,n}} d\psi; \quad \int_{x_{n,n}}^b d\psi < H_{n,n} < \int_{x_{n-1,n}}^b d\psi.$$

Thus,

$$(48) \quad d\psi(x) = p(x)dx, \quad p(x) \leq M < \infty \quad \text{in } (a, b) \text{ implies}$$

$$H_{k,n} < M(x_{k+1,n} - x_{k-1,n})$$

$$(k = 1, 2, \dots, n; \quad x_{0,n} = a; \quad x_{n+1,n} = b).$$

We may also utilize (9), whence

$$(49) \quad H_{k,n} < \frac{\alpha_{2s}}{x_{k,n}^{2s}}; \quad H_{k,n} < \frac{\alpha_s}{x_{k,n}^s},$$

if all $x_{k,n}$ are positive ($2s$ resp. $s \leq 2n - 1$).

REMARK. — (47) enables us to improve the order, with respect to $\frac{1}{n}$, of $H_{k,n}$ for HERMITE and LAGUERRE polynomials, if k is close to n . In fact, for such k the said order becomes exponentially infinitesimal ⁽⁶⁾.

(ii) $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sqrt{\lambda_{n+1}}$ (?). Here we know that

$$(50) \quad (a, b) \text{ finite implies } \frac{a_{n-1}}{a_n} = 0(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

for any sequence of *OP*.

Less can be said about λ_n , if (a, b) is infinite. It may behave, with respect to n , in any conceivable manner (always remaining > 0). We do know that one at least of the two sequences $\{c_n\}$, $\{\lambda_n\}$ is unbounded. For HERMITE and LAGUERRE polynomials it follows from the known explicit expressions of λ_n :

$$(51-L, H) \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} < \tau n \quad (L), \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} < \tau \sqrt{n} \quad (H).$$

⁽⁶⁾ Thus, for LAGUERRE polynomials, $x_{n,n} > \tau n$, so that

$$H_{n,n} < \frac{\alpha_n}{x_{n,n}^n} < \frac{\tau \Gamma(n + \alpha)}{n^n} < \tau e^{-n} n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

⁽⁷⁾ This λ_n enters into the characteristic recurrence relation for *OP*:

$$\Phi_{n+2}(x) = (x - c_{n+2})\Phi_{n+1}(x) - \lambda_{n+2}\Phi_n(x) \quad (n \geq 0).$$

(iii) $\varphi_n(x)$. For a wide class of *OP*

$$(52) \quad \begin{array}{ll} \varphi_n(x) = O(1), & n \rightarrow \infty, \\ K_n(x) = O(n) & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{whence,} \\ ((a, b) \text{ finite; } x \text{ inside } (a, b)). \end{array}$$

Such, for ex., is the case of

$$(53) \quad \varphi_n(x; -1, 1; (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}q(x)), \quad \alpha, \beta > 0,$$

$q(x)$ properly specified [40, 41].

We have for the classical *OP*:

$$(54\text{-J}) \quad \begin{array}{ll} |\varphi_n(x)| \leq |\varphi_n(1)| < \tau n^{\beta - \frac{1}{2}}; & K_n(x) \leq K_n(1) < \tau n^{2\beta} \quad \left(\beta \geq \alpha \geq \frac{1}{2}\right) \\ |\varphi_n(x)| \leq |\varphi_n(-1)| < \tau n^{\alpha - \frac{1}{2}}; & K_n(x) \leq K_n(-1) < \tau n^{2\alpha} \quad \left(\alpha \geq \beta \geq \frac{1}{2}\right) \quad (*) \\ K_n(x) = O(n) & \left(\alpha = \beta \leq \frac{1}{2}, -1 \leq x \leq 1\right) \\ |\varphi_n(x)| = O(1); & K_n(x) = O(n) \quad (\alpha, \beta > 0; -1 + \epsilon \leq x \leq 1 - \epsilon) \\ |\varphi_n(x)| < \tau n^{-\frac{1}{4}}; & K_n(x) < \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (\epsilon \leq x \leq A) \\ (54\text{-L}) \quad |\varphi_n(0)| < \tau n^{\frac{\alpha-1}{2}}; & K_n(0) < \tau n^{\alpha} \quad (\alpha > 0) \\ e^{-\frac{x}{2}} |\varphi_n(x)| < |\varphi_n(0)| < \tau n^{\frac{\alpha-1}{2}}; & e^{-x} K_n(x) < K_n(0) < \tau n^{\alpha} \quad (\alpha \geq 1; x > 0) \\ (54\text{-H}) \quad |\varphi_n(x)| < \tau n^{-\frac{1}{4}}. & K_n(x) < \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (-A \leq x \leq A) \\ & K_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}} (2n)^{\frac{1}{2}}}{\pi} (1 + o(1)) \quad (|x| < \sqrt{2n - \tau n^{1/s}}) \quad (**). \end{array}$$

(iv) $K_n(x)$. In addition to the preceding estimate, bounds for $K_n(x)$ can be readily found, in very general cases, making use of the following extremal

(*) Consider the sum $\sigma_{n,s} = 1^s + 2^s + \dots + n^s$. Then, $\sigma_{n,-1} < \tau \log n$; $\sigma_{n,s} = O(1)$,

$$s < -1; \quad \sigma_{n,s} < \tau n^{s+1}, \quad s > -1; \quad \text{for,} \quad \sigma_{n,s} = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^s + \left(\frac{2}{n}\right)^s + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^s \right];$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,s} = \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} \quad (s > -1).$$

(**) Cf. [42, 43], where an estimate of $\varphi_n(x)$ is given, for the polynomials of HERMITE, x increasing indefinitely with n .

property [44]:

$$(55) \quad K_n(z) = \min_a^b \int_a^b [1 + (x - z)G_{n-1}(x)]^2 d\psi(x) \quad (z \text{ arbitrary}).$$

It follows, with $d\psi(x) = p(x)dx, p_1(x)dx, p_2(x)dx$:

$$(56) \quad p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x) \text{ in } (a, b) \text{ implies } K_n(z; p_2) \leq K_n(z; p) \leq K_n(z; p_1).$$

This « comparison-test », combined with the following known results [44]:

$$(57) \quad p(x) = (1 + x)^{z-1}(1 - x)^{z-1}\Pi(x),$$

$\Pi(x)$ -polynomial, implies

$$K_n(-1; p) < \tau n^{2z}; \quad K_n(1; p) < \tau n^{2\beta}; \quad K_n(z, p) < \tau n^{2m+1},$$

z -root of $\Pi(x)$, of multiplicity $2m \geq 0$ in $(-1 + \epsilon, 1 - \epsilon)$, yields an upper bound for $K_n(x; p)$, if $p(x)$ does not have « too many, too strong » zeros inside (a, b) . In particular,

$$(58) \quad p(x) \geq p_0 > 0 \text{ in } (c, d) \text{ implies } K_n(x) < \tau n \\ (\alpha \leq c < c + \epsilon \leq x \leq d - \epsilon < d \leq b).$$

In (57), (58), $(-1, 1)$ may be replaced by any finite (a, b) . The case of an infinite interval may be treated in a similar fashion.

The extremal property (55) leads further to

THEOREM III. — *If $d\psi(x) = p(x, t)dx$, t -parameter, and $\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \geq 0$ (≤ 0),*

for a certain range of values of t and for $a \leq x \leq b$, (a, b) finite or infinite, then $K_n(x; p)$ decreases (increases) as t increases, for all x in (a, b) .

COROLLARY. — *If $p(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}q(x)$, $(a, b) \equiv (0, 1)$ or $p(x) = (1-x^2)^{\alpha-1}q(x)$, $(a, b) \equiv (-1, 1)$, $\alpha, \beta > 0$, then $K_n(x; p)$ increases for all x in (a, b) , as α or β increases.*

The before-last inequality in (54-J) now follows, since $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, (a, b) finite, corresponds to trigonometric polynomials.

Using once more the above comparison-test for $K_n(x; p)$, we get the following results:

$$(59) \quad \left. \begin{array}{l} (a, b) \equiv (-1, 1), \quad p(x) = (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}q(x) \quad (\alpha, \beta > 0) \\ (a, b) \equiv (0, \infty), \quad p(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}q(x) \quad (\alpha > 0) \\ (a, b) \equiv (-\infty, \infty), \quad p(x) = e^{-x^2}q(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} q(x) \geq m > 0 \\ \text{in } (a, b) \end{array}$$

implies resp.

$$(60) \quad \begin{aligned} K_n(x; p) &< \tau n \quad (-1 + \epsilon \leq x \leq 1 - \epsilon) \\ K_n(x; p) &< \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (\epsilon \leq x \leq A); \quad K_n(0; p) < \tau n^x \\ K_n(x; p) &< \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (|x| \leq A). \end{aligned}$$

We now return to the $l_k(x)$.

(i) $\lambda(x) \equiv \sum_{k=1}^n l_k(x)$. The above estimates for $K_n(x)$ and (43) give:

$$(61-J) \quad \lambda(x) < \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (|x| \leq 1 - \epsilon); \quad \lambda(-1) < \tau n^{2x}; \quad \lambda(1) < \tau n^{2\beta}.$$

The same inequalities hold for OP in (57). The first inequality holds, if $p(x)$ satisfies (58) or whenever (52) is valid.

$$(61-L, H) \quad \begin{aligned} \lambda(x) &< \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (\epsilon \leq x \leq A, L; \quad |x| \leq A, H) \\ \lambda(0) &< \tau n^x \quad (L). \end{aligned}$$

The first inequality holds if $p(x)$ satisfies (59).

(ii) $l_k(x)$. Here we use (40), (41) and the above estimates for $K_n(x)$, $H_{k,n}$:

$$(62) \quad l_k(x) = o \left(K_{n-1}^{\frac{1}{2}}(x) \right),$$

$\psi(x)$ continuous in the finite or infinite interval (a, b) .

For the classical OP we get more precise results.

$$(63-J) \quad \left\{ \begin{aligned} |l_k(x)| &< \tau n^{\frac{1}{2} - \min.(x, \beta)}; \quad |l_k(\pm 1)| < \tau n^{\left[\frac{\beta}{x} - \min.(x, \beta) \right]} \\ |l_k(x)| &= O(1), \quad |l_k(\pm 1)| < \tau n^{\beta - \frac{1}{2}} \quad \left(\alpha, \beta \geq \frac{1}{2} \right) \\ |l_k(\pm 1)| &= O(1) \quad \left(x = \beta \leq \frac{1}{2} \right) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} |l_1(x)| &< \tau n^{\frac{1}{2} - \alpha}, \quad |l_1(-1)| = O(1), \quad |l_1(+1)| < \tau n^{\beta - \alpha} \\ |l_n(x)| &< \tau n^{\frac{1}{2} - \beta}, \quad |l_n(-1)| < \tau n^{\alpha - \beta}; \quad |l_n(1)| = O(1) \quad (\alpha, \beta > 0) \\ &\quad (l_k(x), l_1(x), l_n(x) \text{ refer to } -1 + \epsilon \leq x \leq 1 - \epsilon) \end{aligned} \right.$$

$$(63-L) \quad \left\{ \begin{aligned} |l_k(x)| &< \tau n^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}}, \quad |l_k(0)| = O(1), \quad \left(\alpha \leq \frac{1}{2} \right) \\ |l_k(x)| &= O(1), \quad |l_k(0)| < \tau n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}, \quad \left(\alpha \geq \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right.$$

$$(63-H) \quad \left\{ \begin{aligned} &\quad (k = 1, 2, \dots, n; \quad l_k(x) \text{ refers to } \epsilon \leq x \leq A) \\ |l_k(x)| &= O(1) \quad (k = 1, 2, \dots, n; \quad |x| \leq A). \end{aligned} \right.$$

A further study of the behaviour of $l_k(x)$ at various points of (a, b) may be made by means of (39) and of the preceding estimates of the quantities therein involved. We get the following results.

$$(64-J) \quad \left\{ \begin{array}{l} |l_k(x)| < \tau n^{-2 \min.(\alpha, \beta)} \\ |l_k(\pm 1)| < \tau n^{\alpha - \frac{1}{2} - 2 \min.(\alpha, \beta)} \end{array} \right\} \quad \alpha \neq \beta; \alpha \text{ or } \beta \leq \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |l_k(x)| < \tau n^{-1}; \quad |l_k(\pm 1)| < \tau n^{\alpha - \frac{3}{2}} \\ |l_k(x)| < \tau n^{-2\alpha}; \quad |l_k(\pm 1)| < \tau n^{-\alpha - \frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad \left(\alpha, \beta \geq \frac{1}{2} \right)$$

$$-1 + \varepsilon \leq x, x_k \leq 1 - \varepsilon; \quad |x - x_k| \geq \delta$$

$$(64-H) \quad |l_k(x)| < \tau n^{-\frac{1}{2}} \quad (-A \leq x, x_k \leq A; \quad |x - x_k| \geq \delta \text{ }^{(10)}).$$

Note that in formulae (61-64) τ is independent of k .

We thus conclude that for a wide class of OP, $l_k(x)$ tends to zero, as $n \rightarrow \infty$, uniformly in k , as specified above, if we stay away from the corresponding zero x_k , provided, x and x_k stay away from the end-points a, b ⁽¹¹⁾.

What happens if x stays close to x_k ? Here we expect $l_k(x) = 0(1)$, since $l_k(x_k) = 1$.

We make use of (41), applied to JACOBI polynomials, where [46]

$$(65-J) \quad \varphi_n'(x; p) = \sqrt{n(n + \alpha + \beta - 1)} \varphi_n(x; (1 - x^2)p).$$

Combine this with the preceding estimates of $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}, H_{k,n}, \varphi_n(x)$:

$$(66-J) \quad l_k(x) = 0(1) \quad \left(\alpha, \beta \geq \frac{1}{2}; \quad |x_k| \leq 1 - \varepsilon; \quad |x - x_k| < \varepsilon' \right) \text{ }^{(12)}.$$

⁽¹⁰⁾ For LAGUERRE polynomials we get the same or worse results compared to (63-L), due to the presence of the factor $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = 0(n)$ in (39). (64-H) could be also derived from the original expression $l_i(x) = \frac{\varphi_n(x)}{(x - x_i)\varphi_n'(x_i)}$, observing that here

$$\varphi_n'(x) = 0(\sqrt{n})\varphi_{n-1}(x), \quad |\varphi_n'(x)| < \tau n^{\frac{1}{4}} \text{ in } (-A, A).$$

⁽¹¹⁾ Cf. [34], where an entirely different method is employed for the study of $l_k(x)$, applicable, it seems, only to (a, b) finite.

⁽¹²⁾ For HERMITE and LAGUERRE polynomials we do not improve upon (62-L, H).

6. Estimate of the distance $x_k - x_{k-1}$. — Following the ingenious device of GRÜNWARD and TURÁN [23], we write:

$$\frac{1}{x_k - x_{k-1}} = \frac{l_k(x_k) - l_k(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = l'_k(\eta_k), \quad \eta_k \text{ in } (x_{k-1}, x_k),$$

whence, by MARKOFF-BERNSTEIN Theorem for derivatives of polynomials,

$$(67) \quad x_k - x_{k-1} > \begin{cases} \frac{\tau n^{-1}}{\max_{c \leq x \leq d} |l_k(x)|} & (c + \varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq d - \varepsilon) \\ \frac{\tau n^{-2}}{\max_{c \leq x \leq d} |l_k(x)|} & (c \leq x_{k-1}, x_k \leq d) \end{cases} \begin{cases} (c, d) \text{ finite,} \\ (c, d) \subset (a, b). \end{cases}$$

This holds for any LIF. For LIF under discussion we make use of (40):

$$(68) \quad x_k - x_{k-1} > \begin{cases} \frac{\tau n^{-1}}{\sqrt{H_k \max_{c \leq x \leq d} K_{n-1}(x)}} & (c + \varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq d - \varepsilon) \\ \frac{\tau n^{-2}}{\sqrt{H_k \max_{c \leq x \leq d} K_{n-1}(x)}} & (c \leq x_{k-1}, x_k \leq d) \end{cases} \begin{cases} (c, d) \text{ finite,} \\ (c, d) \subset (a, b). \end{cases}$$

Note the presence of the factor $H_k^{\frac{1}{2}}$, which generally tends to zero with $\frac{1}{n}$,

$$(69) \quad x_k - x_{k-1} < \begin{cases} \frac{\tau n^{-1} H_k^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\max_{a \leq x \leq b} K_{n-1}(x)}} & (a + \varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq b - \varepsilon) \\ \frac{\tau n^{-1} H_k^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\max_{a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon} K_{n-1}(x)}} & (a + \varepsilon < a + \varepsilon' \leq x_{k-1}, x_k \leq b + \varepsilon' < b + \varepsilon) \end{cases}$$

($d\psi(x) = p(x)dx$; (a, b) finite; $H_k^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$).

$$(70-J) \quad \begin{cases} x_k - x_{k-1} > \tau n^{-\frac{3}{2} + \min(\alpha, \beta)} & \left(\alpha \text{ or } \beta \leq \frac{1}{2} \right) \\ x_k - x_{k-1} > \tau n^{-1} & \left(\alpha, \beta \geq \frac{1}{2} \right) \\ x_k - x_{k-1} > \tau n^{-\frac{3}{2} - \beta} & \left(\beta \geq \alpha \geq \frac{1}{2} \right); \quad x_k - x_{k-1} > \tau n^{-\frac{3}{2} - \alpha} \quad \left(\alpha \geq \beta \geq \frac{1}{2} \right) \\ & (k = 2, 3, \dots, n) \\ x_k - x_{k-1} > \tau n^{\alpha - \frac{1}{2}} & \left(\alpha = \beta \leq \frac{1}{2}; \quad k = 2, 3, \dots, n \right). \end{cases} \begin{cases} (-1 + \varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq 1 - \varepsilon) \\ \\ \\ \end{cases}$$

$$(70-L) \quad x_k - x_{k-1} > \tau n^{\frac{\alpha-5}{4}} \left(\alpha \leq \frac{1}{2} \right); \quad x_k - x_{k-1} > \tau n^{-1} \left(\alpha \geq \frac{1}{2} \right) \quad (\varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq A)$$

$$(70-H) \quad x_k - x_{k-1} > \tau n^{-1} \quad (-A \leq x_{k-1}, x_k \leq A).$$

In the above formulae τ depends on A, ε ⁽⁴³⁾, but is independent of n and of the values of k under consideration.

REMARKS. — (i) Any improvement in the estimate of $l_k(x)$ brings an improvement in the above estimate of $x_k - x_{k-1}$.

(ii) Using the asymptotic expressions for the classical *OP*, we may locate their zeros asymptotically and thus obtain estimates for $x_k - x_{k-1}$ superior to those given above. Note, however, that our method does not require the asymptotic expression of $\varphi_n(x)$, only its order with respect to n ; it is therefore, applicable to a wider class of *OP*. Thus, $d\psi(x) = p(x)dx$, as given in (59), implies resp.

$$(71) \quad \begin{aligned} x_k - x_{k-1} &> \tau H_k^{-\frac{1}{2}} n^{-3/2} > \tau n^{-3/2} && (-1 + \varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq 1 - \varepsilon) \\ x_k - x_{k-1} &> \tau H_k^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{4}} > \tau n^{-\frac{5}{4}} && (\varepsilon \leq x_{k-1}, x_k \leq A) \\ x_k - x_{k-1} &> \tau H_k^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{5}{4}} > \tau n^{-\frac{5}{4}} && (-A \leq x_{k-1}, x_k \leq A). \end{aligned}$$

(iii) For particular classes of *OP* a closer estimate of $x_k - x_{k-1}$ may be obtained by means of their special properties. Thus, for HERMITE polynomials the differential equation has been used [45].

(iv) For a wide class of *OP* one may estimate $x_k - x_{k-1}$ by means of TCHEBYCHEFF inequalities for the coefficients H_k (cf., for ex. [26]). This we intend to develop elsewhere.

(v) In case of HERMITE and LAGUERRE polynomials we may let x range in the above formulae over an interval which increases indefinitely with n , making use of the proper asymptotic expressions for $\varphi_n(x)$. We shall not dwell here upon this extension.

PART II.

Convergence and mean-convergence of LIF.

1. **Convergence** — We follow here, with certain modifications, the reasoning employed by the author in [18]. Assume

$$(71) \quad \begin{aligned} f(x) \text{ is continuous in } (c, d), (c, d) \text{ finite, fixed, } (c, d) \subset (a, b); \\ (a, b) \text{ finite or infinite.} \end{aligned}$$

⁽⁴³⁾ If, for ex., (ε, A) is fixed, we apply MARKOFF-BERNSTEIN Theorem to $\left(\frac{\varepsilon}{2}, A\right)$, say.

Denote by

$$(73) \quad \nu \equiv N(n; c, d)\text{-number of zeros of } \varphi_n(x) \text{ in } (c, d).$$

Let $p_{\nu-1}(x)$ denote TCHEBYCHEFF polynomial, of degree $\leq \nu - 1$, of best approximation $E_{\nu-1}(f)$, to $f(x)$ on (c, d) . Then, by (26),

$$(74) \quad \rho_n(x; f) \equiv \rho_n(x; f - p_{\nu-1})$$

(x arbitrary; here and hereafter $n \geq \nu$)

$$(74) \quad |\rho_n(x; f)| \equiv |f(x) - L_{n-1}(x; f)| \leq E_{\nu-1}(f) \{1 + \Sigma'_i |l_i(x)|\} \quad (c \leq x \leq d)$$

$$(76) \quad |\rho_n(x; f)| \leq \tau E_{\nu-1}(f) \Sigma'_i |l_i(x)| \leq \tau E_{\nu-1}(f) \sum_{i=1}^n |l_i(x)| < \tau E_{\nu-1}(f) K_{n-1}^{1/2}(x)$$

($c \leq x \leq d$; see (43)).

Σ'_i throughout this section denotes summation extended over such i that $c \leq x_i \leq d$ (¹⁴).

Assume further that the system of *OP* under discussion is such that

$$(77) \quad \nu \equiv N(n; a', b') > Kn^p; \quad (0 < p \leq 1; (a', b') \subset (a, b))$$

$K \equiv K(a', b')$ independent of n ; (a', b') arbitrarily fixed, finite.

Let $f(x)$ satisfy in (c, d) the following condition:

$$(78) \quad f^{(\iota)}(x) \text{ is continuous in } (c, d), \text{ or } |f^{(\iota)}(x') - f^{(\iota)}(x'')| < \lambda |x' - x''|^\gamma$$

($i \geq 0$; $c \leq x', x'' \leq d$; $0 < \gamma \leq 1$; λ independent of x ; $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$; (c, d) as in (72)).

Then, as is known from the Theory of Approximation,

$$E_{\nu-1}(f) = o(\nu^{-\iota}) \quad \text{resp.} \quad O(n^{-\iota-\gamma}),$$

which, in view of (77), becomes

$$(79) \quad E_{\nu-1}(f) = o(n^{-\iota p}) \quad \text{resp.} \quad O(n^{-p(\iota+\gamma)}).$$

Hence,

$$(80) \quad |\rho_n(x; f)| \leq o(n^{-\iota p}) K_{n-1}^{1/2}(x) \quad \text{resp.} \quad O(n^{-p(\iota+\gamma)}) K_{n-1}^{1/2}(x) \quad (c \leq x \leq d).$$

When is (77) satisfied? Assume the validity of the following asymptotic

(¹⁴) I am indebted to Dr. P. TURAN for calling my attention to an oversight in [18], where $E_{n-1}(f)$ is written in place of $E_{\nu-1}(f)$. All formulae given therein require this change. In view of (81) and (82-L, H) below, the conclusions reached in [18, p. 146] remain valid for JACOBI polynomials without any change. The corresponding conclusions for HERMITE and LAGUERRE polynomials require non-essential changes as given below. (The reader is asked to correct a misprint: $\alpha = \beta \leq \frac{1}{2}$, in place of $\alpha, \beta \leq 1$).

expression:

$$(81) \quad \varphi_n(x) = k(x)n^{-q} \cos(\ln^p x^{p'} + \alpha) + O(n^{-r}) \quad (r, p, q, p' > 0),$$

uniformly in (α', b') arbitrarily fixed, finite; $(\alpha', b') \subset (\alpha, b)$, $r > q$; r, l, p, q, p' , $k(x)$ independent of n .

We may assume (using, if necessary, a linear transformation) $\alpha' > 0$. Put

$$x_\lambda = \frac{(\lambda\pi - \alpha)^{\frac{1}{p'}}}{n^{p/p'}}, \quad \lambda\text{-integer} > 0 \quad (\alpha' \leq x_\lambda \leq b').$$

We see that, for n sufficiently large,

$$\text{sgn. } \varphi_n(x_\lambda) = (-1)^\lambda,$$

and the inequalities $(\alpha')^{p'} \leq x_\lambda \leq (b')^{p'}$ give at once:

$$(82) \quad A_2 n^p > \nu = N(n; c, d) > A_1 n^p \quad (\infty > A_2 > A_1 > 0),$$

$A_{1,2}$ independent of n ; (c, d) as in (72).

Thus, (81) implies (77). It follows:

$$(83\text{-J}) \quad \nu = N(n; c, d) > \tau n \quad [20] \quad (c, d) \subset (-1, 1)$$

$$(83\text{-L}) \quad \nu = N(n; \varepsilon, A) > \tau n^{\frac{1}{2}}$$

$$(83\text{-H}) \quad \nu = N(n; -A, A) > \tau n^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

(83-J) also holds for the generalization (53) of JACOBI polynomials.

We have now, under assumptions (78):

$$(84\text{-J}) \quad |\rho_n(x; f)| = o\left(n^{-\iota + \frac{1}{2}}\right) \quad \text{resp. } O\left(n^{-(\iota + \gamma) + \frac{1}{2}}\right) \\ (-1 + \varepsilon \leq c \leq x \leq d \leq 1 - \varepsilon),$$

also for the generalization (53);

$$|\rho_n(x; f)| = o(n^{-\iota + 1}) \quad \text{resp. } O(n^{-(\iota + \gamma + 1)}) \\ (c, d) \equiv (-1, 1); \quad \alpha, \beta \leq 1/2 \quad (16).$$

Hence, LIF for such OP, converges to $f(x)$ uniformly in (c, d) , if $f(x)$ satisfies therein Lipschitz condition of order $> \frac{1}{2}$. For Jacobi polynomials

(15) This is the best possible estimate for ν , as I learned from E. HILLE.

(16) Other criteria for convergence in the whole interval $(-1, 1)$ may be formulated on the basis of (54-J).

with $\alpha, \beta \leq \frac{1}{2}$, the convergence is uniform in the whole interval $(-1, 1)$, if $f(x)$ is therein continuous.

$$\begin{aligned}
 (84-L) \quad & |\rho_n(x; f)| = o\left(n^{-\frac{i}{2} + \frac{1}{4}}\right) \text{ resp. } O\left(n^{-\frac{i+\gamma}{4} + \frac{1}{4}}\right) \quad (\varepsilon \leq x \leq A) \\
 & |\rho_n(x; f)| = o\left(n^{-\frac{i}{2} + \frac{1}{4}}\right) \text{ resp. } O\left(n^{-\frac{i+\gamma}{4} + \frac{1}{4}}\right) \quad (\text{see (54-L, H)}, \\
 & \quad \quad \quad (\alpha \geq 1; (c, d) \equiv (o, A)). \\
 (84-H) \quad & |\rho_n(x; f)| = o\left(n^{-\frac{i}{2} + \frac{1}{4}}\right) \text{ resp. } O\left(n^{-\frac{i+\gamma}{4} + \frac{1}{4}}\right) \quad (-A \leq x \leq A).
 \end{aligned}$$

Hence, for Laguerre polynomials LIF converges uniformly in (ε, A) to $f(x)$, if it satisfies therein Lipschitz condition of order $> \frac{1}{2}$. If $\alpha \geq 1$, the convergence is uniform in (o, A) , if $f(x)$ is continuous therein and such that $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n n^{\alpha/2} = 0$. Thus, for $\alpha = 1$, uniform convergence in (o, A) is assured if $f(x)$ satisfies therein Lipschitz condition of order $> \frac{1}{2}$; if $\alpha = 2$, continuity of $f'(x)$ in (o, A) assures therein the said uniform convergence, etc..

For Hermite polynomials LIF converges uniformly in $(-A, A)$, if $f(x)$ satisfies therein Lipschitz condition of order $> \frac{1}{2}$.

Similar convergence criteria may be formulated for various other classes of OP. We give here the following illustration.

$$d\psi(x) = (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}q(x); \quad q(x) \geq m > 0, \alpha, \beta > 0;$$

$f(x)$ satisfies (78) in $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned}
 (85) \quad & |\rho_n(x; f)| = o\left(n^{-i + \frac{1}{2}}\right) \text{ resp. } O\left(n^{-(i+\gamma) + \frac{1}{2}}\right), \\
 & \quad \quad \quad (c, d) \equiv (-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon), (c \leq x \leq d) \\
 & |\rho_n(x; f)| = o\left(n^{-i + \frac{1}{2}}\right) \text{ resp. } O\left(n^{-(i+\gamma) + \frac{1}{2}}\right), \\
 & \quad \quad \quad (c, d) \equiv (-1, 1), \left(-1 \leq x \leq 1; \alpha, \beta \leq \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Hence, LIF, for such OP, converges uniformly to $f(x)$ in $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$, for any $\alpha, \beta (> 0)$, if $f(x)$ satisfies in $(-1, 1)$ Lipschitz condition of order $> \frac{1}{2}$, and in the whole interval $(-1, 1)$, if $\alpha, \beta \leq \frac{1}{2}$.

The discussion of convergence properties of LIF, for general OP, may be carried out on the basis of formula (η) , Table P. This we intend to develop elsewhere.

2. Mean-convergence. — By this we mean

$$(86) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi = 0 \quad (17).$$

We make two preliminary observations.

(i) (86), by HÖLDER-MINKOWSKI inequalities, implies

$$(87) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - L_{n-1}(x)|^r d\psi = 0 \quad (0 < r \leq 2).$$

In particular,

$$(88) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - L_{n-1}(x)| d\psi = 0; \quad \text{à fortiori,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)] d\psi = 0$$

$$\text{i. e.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x) d\psi \quad (\text{see (7)}).$$

(ii) (86), by virtue of (ϵ , Table P), implies

$$(89) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - S_{n-1}(x)]^2 d\psi = 0, \quad \text{i. e.} \quad \sum_{i=0}^{\infty} f_i^2 = \int_a^b f^2(x) d\psi,$$

PARSEVAL Formula for $f(x)$.

Hence, *the convergence of MQF (7) and the validity of Parseval Formula for $f(x)$ are both necessary for mean-convergence of our LIF.*

We proceed to show that *the mean-convergence of LIF is closely related to the convergence of the corresponding MQF (7) for $f^2(x)$, i. e., to the validity of*

$$(90) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f^2) = \int_a^b f^2(x) d\psi.$$

(17) Certain writers [23-a] have studied the validity of the limiting relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 dx = 0,$$

LIF again being based upon the zeros of $\Phi_n(x; a, b; d\psi)$.

Our starting point is the following important relation:

$$(91) \quad \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi = \int_a^b [f(x) - S_{n-1}(x)]^2 d\psi + \int_a^b [L_{n-1}(x) - S_{n-1}(x)]^2 d\psi$$

derived by writing $f - L_{n-1} = f - S_{n-1} + S_{n-1} - L_{n-1}$ and using (δ , Table P); this holds, with $S_{n-1}(x)$ replaced by $G_{n-1}(x)$, and proves the extremal property (ϵ , Table P). (91) may be rewritten as

$$(92) \quad \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi = \int_a^b f^2(x) d\psi + Q_n(f^2) - 2 \int_a^b f(x) L_{n-1}(x) d\psi = \int_a^b f^2(x) d\psi +$$

$$+ Q_n(f^2) - 2 \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n} f_i$$

$$(93) \quad \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi = \int_a^b [f(x) - S_{n-1}(x)]^2 d\psi + \sum_{i=0}^{n-1} (h_{i,n} - f_i)^2,$$

since, by (11) and (28),

$$(94) \quad \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi = \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2, \quad i = Q_n(f^2).$$

It was observed above that the validity of PARSEVAL Formula for $f(x)$ is necessary for the mean convergence of LIF. On the other hand, if the Moment-Problem (3) is *indeterminate*, the value of $\int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi$ generally depends on the solution $\psi(x)$ of (3), which we employ. Hence, we make the following assumption:

$$(95) \quad \text{The Moment-Problem (3): } \alpha_n = \int_a^b x^n d\psi(x) \quad (n=0, 1, \dots), \text{ is determined.}$$

Then Parseval formula holds for any $f(x)$ (naturally, such that $\int_a^b f^2(x) d\psi$ exists) [48]. In particular, Parseval formula always holds, if (a, b) is finite.

Denote for brevity

$$(96) \quad u_n^2 = \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi \geq 0, \quad z_n^2 = \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi = \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2 = Q_n(f^2) \geq 0$$

$$I^2 = \int_a^b f^2(x) d\psi > 0. \quad (u_n, z_n, I > 0)$$

We have:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi &\leq 2 \left\{ \int_a^b f^2(x) d\psi + \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi \right\} = 2 \left\{ \int_a^b f^2(x) d\psi + \right. \\
 &+ \left. \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi \right\}; \quad Q_n(f^2) = \int_a^b L_{n-1}^2(x) d\psi \leq 2 \left\{ \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi + \int_a^b f^2(x) d\psi \right\} \\
 (97) \quad 0 \leq u_n^2 &\leq 2(I^2 + z_n^2); \quad 0 \leq z_n^2 \leq 2(I^2 + u_n^2).
 \end{aligned}$$

It follows, that the two sequence $\{u_n\}$ and $\{z_n\}$ are either both bounded or both unbounded: namely,

$$(98) \quad \{u_n\} < A, \{u_n\} \rightarrow \infty \text{ implies resp. } \{z_n\} < B, \{z_n\} \rightarrow \infty.$$

and vice versa

$$(A, B \text{ both finite}); \quad (v) \subset (n) \text{ (18)}.$$

Moreover, by (92), where we apply SCHWARTZ inequality to $\int_a^b f(x)L_{n-1}(x)d\psi$:

$$(99) \quad u_n^2 = z_n^2 + I^2 - 2\theta_1 I z_n$$

(| θ_1 |, and later | θ_2 |, ..., ≤ 1)

$$(100) \quad |I - z_n| \leq u_n \leq I + z_n.$$

Rewrite (92) as

$$\int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi = Q_n(f^2) - \int_a^b f^2 d\psi + 2 \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)] f(x) d\psi,$$

and again apply SCHWARTZ inequality to the integral on the right:

$$(101) \quad u_n^2 + 2\theta_2 u_n I + (I^2 - z_n^2) = 0$$

$$0 \leq u_n < I + \sqrt{I^2 + (I^2 - z_n^2)} \quad [26].$$

Furthermore, by (93),

$$(102) \quad \sum_{i=0}^{n-1} (h_{i,n} - f_i)^2 \leq \int_a^b [f(x) - L_{n-1}(x)]^2 d\psi \equiv u_n^2.$$

Consider now the difference

$$(103) \quad \sigma_n \equiv \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2.$$

(18) The author intends to treat (98) more fully elsewhere.

We get, by (102),

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned} |\sigma_n| &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (h_{i,n} + f_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (h_{i,n} - f_i)^2} \\ |\sigma_n| &\leq \sqrt{2}u_n \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2} \leq \sqrt{2}u_n \left(\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} f_i^2} \right), \end{aligned} \right.$$

which, combined with BESSEL inequality for $f(x)$, gives:

$$(105) \quad \left| \sum_{i=0}^{n-1} h_{i,n}^2 - \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \right| \leq \sqrt{2}u_n(I + z_n)$$

$$(106) \quad \begin{cases} z_n^2 - \sqrt{2}\theta_3 u_n z_n - \left(\sqrt{2}\theta_3 u_n I + \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \right) = 0 \\ 2z_n = \sqrt{2}\theta_3 u_n + \left(2\theta_3^2 u_n^2 + 4 \sqrt{2}\theta_3 u_n I + \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \right)^{1/2}. \end{cases}$$

(106) shows at once that

$$(107) \quad u_n^2 \rightarrow \infty \left(\text{hence, } \sum_{i=0}^{n-1} f_i^2 \rightarrow I^2 \right) \text{ implies } z_n^2 \rightarrow I^2 \ (n \rightarrow \infty).$$

Now turn to (104). From the already cited work on the Moment-Problem (TAMARKIN-SHOCHAT) we may state the following results.

(i) If a subsequence $(\nu) \subset (n)$ exists such that $Q_\nu(f^2) \rightarrow I^2$ ($\nu \rightarrow \infty$), then $Q_\nu(f)$, $Q_\nu(|f|)$, $Q_\nu(fx^k)$ (k -positive integer, arbitrarily fixed) all converge to the corresponding integrals, as $\nu \rightarrow \infty$. So does, therefore, $Q_\nu[(f(x) - G_k(x))^2]$, $G_k(x)$ -polynomial of arbitrarily fixed degree k , with coefficients independent of n .

(ii) $Q_\nu(f^2) \rightarrow I^2$ ($\nu \rightarrow \infty$), if $I^2 - Q_\nu(f^2) \geq 0$ ($\nu \geq N$). The latter inequality certainly holds, if $\frac{d^{2s}(f^2)}{dx^{2s}} \geq 0$, for $|x|$ and s sufficiently large.

Assume now for $f(x)$ under discussion

$$(108) \quad Q_\nu(f^2) \rightarrow I^2 \quad ((\nu) \subset (n); \nu \rightarrow \infty).$$

By hypothesis (see (95)), PARSEVAL Formula holds for $f(x)$, which is equivalent to the existence of a polynomial $P(x)$ such that

$$(109) \quad \bar{I} \equiv \int_a^b \bar{f}^2(x) d\psi < \varepsilon, \quad \bar{f}(x) \equiv f(x) - P(x).$$

The degree of $P(x)$ and its coefficients are fixed after ε has been fixed. By (26), for n sufficiently large,

$$(110) \quad \bar{\rho}_n \equiv \rho_n(x; \bar{f}) \equiv \rho_n(x; f); \quad \bar{u}_n^2 = \int_a^b \bar{\rho}_n^2 d\psi = \int_a^b \rho_n^2 d\psi = u_n^2.$$

By the above remarks,

$$(111) \quad z_\nu^2 \equiv Q_\nu(f^2) \rightarrow I^2 \text{ implies } \bar{z}_\nu^2 \equiv Q_\nu(\bar{f}^2) \rightarrow I^2 < \varepsilon \quad (\nu \rightarrow \infty),$$

and (101), written for $\bar{u}_\nu, \bar{z}_\nu, \bar{I}$, shows, ε being arbitrarily small,

$$(112) \quad \bar{u}_\nu \rightarrow 0, \text{ hence, } u_\nu \rightarrow 0 \text{ (by (110)), as } \nu \rightarrow \infty.$$

Moreover, (112) implies by (103), (105),

$$(113) \quad |h_{i,\nu} - f_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} (h_{i,\nu} - f_i)^2 = \int_a^b [L_{\nu-1}(x) - S_{\nu-1}(x)]^2 d\psi \rightarrow 0$$

$$\int_a^b L_{\nu-1}^2(x) d\psi = \sum_{i=0}^{\nu-1} h_{i,\nu}^2 \rightarrow \int_a^b f^2(x) d\psi \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

We summarize the results obtained in form of

THEOREM IV. — (i) *The two sequences* $\{Q_n(f^2)\}, \left\{ \int_a^b [f(x) - L_{n-1}]^2 d\psi \right\}$ *are either both bounded or both unbounded (in the sense of (98)).* (ii) *If the Moment-Problem (3) is determined, then for the mean convergence:* $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - L_{\nu-1}(x)]^2 d\psi = 0$ *it is necessary and sufficient that the corresponding MQF for* $f^2(x)$ *shall converge, i. e.,* $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu(f^2) = \int_a^b f^2(x) d\psi$. *Then also each coefficient in the expansion* $L_{\nu-1}(x) = \sum_{i=0}^{\nu-1} h_{i,\nu} \varphi_i(x)$ *tends, as* $\nu \rightarrow \infty$, *to the corresponding coefficient* f_i *in the expansion* $f(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} f_i \varphi_i(x)$, *in the strong sense of* $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\nu-1} (h_{i,\nu} - f_i)^2 = 0$.

COROLLARY. — *Mean convergence for LIF always holds, if (a, b) is finite.*

REMARKS. — (i) The last statemnt in Th. IV answers the question raised in Part I (§ 4).

(ii) The reasoning employed above, in deriving (111), (112), is the same as that used by the author in [26], where, however, only the sufficiency of the convergence $Q_n(f^2) \rightarrow I^2$ ($n \rightarrow \infty$) was established, under the assumption that *the said convergence holds for all* $f(x)$. Here *the validity of* $Q_\nu(f^2) \rightarrow I^2$ ($(\nu) \subset (n), \nu \rightarrow \infty$) *is required only for the particular* $f(x)$ *under consideration.*

(iii) Write

$$\int_a^b L_{\nu-1}(x)S_{\nu-1}(x)d\psi = \frac{1}{2} \left\{ \int_a^b L_{\nu-1}^2(x)d\psi + \int_a^b S_{\nu-1}^2(x)d\psi - \int_a^b [L_{\nu-1}(x) - S_{\nu-1}(x)]^2 d\psi \right\}.$$

We conclude that, under the conditions of Theorem IV:

$$(114) \quad \int_a^b L_{\nu-1}(x)S_{\nu-1}(x)d\psi = \sum_{i=0}^{\nu-1} h_{i,\nu} f_i \rightarrow \int_a^b f^2(x)d\psi \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

(iv) PARSEVAL Formula for $f(x)$ is equivalent to

$$(115) \quad \int_a^b S_{n-1}^2(x)d\psi = \int_a^b S_{n-1}^2(x)d\psi_n = Q_n(S_{n-1}^2) \rightarrow \int_a^b f^2(x)d\psi \quad (n \rightarrow \infty).$$

(v) In the above consideration we used the property that

$$\int_a^b G_{2n-2}(x)d\psi = Q_n(G_{2n-2}).$$

Hence, the corresponding results remain valid for LIF based on the zeros of the sequence $\{\varphi_n(x) + A\varphi_{n-1}(x)\}$. Here A is a constant (depending eventually on n), such that all the said zeros lie in $[a, b]$ ($n=1, 2, \dots$) ⁽¹⁹⁾.

(vi) If the Moment-Problem (3) is *indeterminate*, then in Theorem IV (i) holds for any solution $\psi(x)$, and (ii) remains valid if we start it thus: « let $\psi(x)$ be such a solution of (3) that for $f(x)$ under consideration PARSEVAL Formula holds ».

PART III.

Polynomials in general.

1. **Estimate of a linear combination of the coefficients of a polynomial.** — We start with the solution of the following

PROBLEM. — For all polynomials $G_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$, of degree $\leq n-1$, n given, such that

$$(116) \quad \sum_{i=1}^n H_i G_{n-1}^2(x_i) = \int_a^b G_{n-1}^2(x)d\psi_n \equiv Q_n(G_{n-1}^2) \leq \gamma_n,$$

⁽¹⁹⁾ At most one of these zeros may lie outside the open interval (a, b) [36].

find an upper bound for an arbitrarily preassigned linear combination of its coefficient g_i :

$$(117) \quad \omega(G_{n-1}) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i g_i \quad (\beta_i \text{ given}).$$

SOLUTION. — We make use once more of the step-function $\psi_n(x)$ introduced above.

The solution is given by

$$(118) \quad |\omega(G_{n-1})| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \omega^2(\varphi_i) \cdot \sum_{i=1}^n H_i G_{n-1}^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \omega^2(\varphi_i) \cdot \vee Q_n(G_{n-1})},$$

equality attained only for $G_{n-1}(x) \equiv \text{const.} \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\varphi_i) \varphi_i(x)$.

The structure of (118) is quite similar to that given in [49], where the same problem is solved under the condition

$$(119) \quad \int_a^b G_{n-1}^2(x) d\psi \leq \gamma_n.$$

In fact, (118) embraces (119), since

$$\int_a^b G_{n-1}^2(x) d\psi_n \equiv \int_a^b G_{n-1}^2(x) d\psi,$$

and is more general, for it enables us to treat polynomials whose values are given at certain discrete points in (a, b) -the points x_i (see Introduction).

We derive (115) as follows [49]. Construct $\Pi(x)$, polynomial of degree $\leq n-1$, such that

$$\int_a^b \Pi(x) x^i d\psi_n \equiv \int_a^b \Pi(x) x^i d\psi = \beta_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

whence,

$$\int_a^b \Pi(x) \varphi_i(x) d\psi_n = \omega(\varphi_i), \quad \Pi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(\varphi_i) \varphi_i(x)$$

$$(120) \quad \omega(G_{n-1}) = \int_a^b \Pi(x) G_{n-1}(x) d\psi_n.$$

Applying to (120) SCHWARTZ inequality yields (118), with the equality sign possible if and only if

$$H_i G_{n-1}(x_i) = C \cdot H_i \Pi(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(C-const., independent of i) that is, both $\Pi(x)$ and $G_{n-1}(x) (\equiv \equiv 0)$ being of degree $\leq n - 1$, and all $H_i \neq 0$,

$$G_{n-1}(x) \equiv C\Pi(x).$$

(118) offers an inexhaustible supply of application, by specifying the β_i in (117) and $d\psi(x)$, i. e. the points x_i employed. Some such application are given below.

2. Applications. — For the polynomial $G_{n-1}(x) = g_{n-1}x^{n-1} + g_{n-2}x^{n-2} + \dots$, of degree $\leq n - 1$, n given, let it be known that

$$(121) \quad |G_{n-1}(x_i)| \leq M, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

where the x_i are:

zeros of Legendre polynomial

$$(122\alpha) \quad P_n(x) \equiv \varphi_n(x; -1, 1; 1),$$

zeros of the trigonometric polynomial

$$(122\beta) \quad \varphi_n(x; -1, 1; (1 - x^2)^{-1/2}),$$

zeros of Laguerre polynomial

$$(122\gamma) \quad \varphi_n(x; 0, \infty; e^{-x}x^{z-1}), \quad (x > 0),$$

zeros of Hermite polynomial

$$(122\delta) \quad \varphi_n(x; -\infty, \infty; e^{-x^2}).$$

Find estimates for a) g_{n-1} , b) g_{n-2} , c) $|G_{n-1}(z)|$, d) $|G'_{n-1}(z)|$, z given arbitrarily.

The required estimates are furnished at once by (118), putting therein correspondingly

$$\omega(G_{n-1}) \equiv g_{n-1}, g_{n-2}, G_{n-1}(z), G'_{n-1}(z).$$

We thus obtain:

$$(123a) \quad |g_{n-1}| \leq a_{n-1}(d\psi) \sqrt{\sum_{i=1}^n H_i G_{n-1}^2(x_i)} \leq a_{n-1}(d\psi) M \vee \alpha_0$$

$$\left(\alpha_0 = \int_a^b d\psi = \sum_{i=1}^n H_i; \text{ see (11)} \right).$$

This holds for any OP, a_{n-1} being the « normalizing factor ». The first « \leq » sign becomes « = », if and only if $G_{n-1}(x) \equiv \text{const. } \varphi_{n-1}(x)$, for,

$$a_{n-1}^2(d\psi) = \int_a^b \Phi_{n-1}^2(x) d\psi = \sum_{i=1}^n H_i \Phi_{n-1}^2(x_i) \quad (\text{by (14)}).$$

(123a) shows once more that

$$\frac{1}{a_{n-1}^2(d\psi)} = \min_a \int_a^b \frac{G_{n-1}^2(x)}{g_{n-1}^2} d\psi = \min_a \int_a^b (x^{n-1} + \dots)^2 d\psi \quad (2^0)$$

(123b) $|g_{n-2}| \leq \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 S_{n-1}^2} \cdot \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq \sqrt{\alpha_0(a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 S_{n-1}^2)} M$ (see(1),(4))

(123c) $|G_{n-1}(z)| \leq \sqrt{K_{n-1}(z)} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq M \sqrt{\alpha_0 K_{n-1}(z)}$

(123d) $|G'_{n-1}(z)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} [\varphi_i'(z)]^2} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq M \sqrt{\alpha_0 \sum_{i=0}^{n-1} [\varphi_i'(z)]^2}$.

Making use of the known explicit expressions and properties of the polynomials in (122, α - δ), we get very readily the following results.

(124x) $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } |g_{n-1}| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{(n-1)!} \sqrt{\frac{2n-1}{2}} Q_n(G_{n-1}^2) \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{(n-1)!} \sqrt{2n-1} M \\ \text{b) } |g_{n-2}| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-5)}{(n-2)!} \sqrt{\frac{2n-3}{2}} Q_n(G_{n-1}^2) \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-5)}{(n-2)!} \sqrt{2n-3} M \\ \text{c. 1) } |G_{n-1}(z)| \leq \sqrt{\left| \frac{1}{2} + \frac{8(5n-4)}{\pi \sqrt{1-z^2}} \right|} Q_n(G_{n-1}^2) \leq \sqrt{1 + \frac{16(5n-4)}{\pi \sqrt{1-z^2}}} M \quad (-1 < z < 1) \quad (2^1) \\ \text{c. 2) } |G_{n-1}(\pm 1)| \leq n \sqrt{\frac{1}{2}} Q_n(G_{n-1}^2) \leq nM \\ \text{c. 3) } |G_{n-1}(z)| < \tau |\zeta|^{n-1} M \quad (\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}; \quad |z| > 1, |\zeta| > 1) \\ \text{d) } |G'_{n-1}(z)| \leq \frac{1}{1-z^2} \sqrt{\frac{(n-1)n(4n+1)}{3\pi}} Q_n(G_{n-1}^2) \leq \\ \leq \sqrt{\frac{2(n-1)n(4n+1)}{3\pi(1-z^2)^2}} M \quad (-1 < z < 1) \quad (2^1) \end{array} \right.$

(2⁰) The following proof is simple and differs from the one usually given. Write

$$\frac{1}{a_{n-1}^2} = \int_a^b \Phi_{n-1}(x) \frac{G_{n-1}(x)}{g_{n-1}} d\psi, \text{ and apply SCHWARTZ inequality:}$$

$$\frac{1}{a_{n-1}^2} \leq \int_a^b \Phi_{n-1}^2(x) d\psi \cdot \int_a^b \frac{G_{n-1}^2(x)}{g_{n-1}^2} d\psi = \frac{1}{a_{n-1}^2(d\psi)} \int_a^b \frac{G_{n-1}^2(x)}{g_{n-1}^2} d\psi.$$

(2¹) Here we use the known estimates:

$$|P_n(x)| < 4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad \left| \frac{dP_n}{dx} \right| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}}}{1-x^2}$$

$(n \geq 1; -1 < x < 1), \quad P_n - \text{LEGENDRE polynomial.}$

(125) $M = \max. [|G_{n-1}(x_i)|, \dots, |G_{n-1}(x_n)|]$, in all formulae (124, α - δ),

(124 β)

- a) $|g_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{n-3} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq 2^{n-\frac{3}{2}} M$
- b) $|g_{n-2}| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{n-3} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq 2^{n-\frac{5}{2}} M$
- c. 1) $|G_{n-1}(z)| \leq \pi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\left[\frac{n}{2} + \frac{5}{4} + \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right] Q_n(G_{n-1}^2)} \leq \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{5}{4} + \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}} M$
 $(-1 < z = \cos\theta < 1)$
- c. 2) $|G_{n-1}(\pm 1)| \leq \pi^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(n+1)Q_n(G_{n-1}^2)} \leq M \sqrt{n+1}$
- c. 3) $|G_{n-1}(z)| \leq \sqrt{\frac{|\zeta|^{2n-1} - |\zeta|^{-(2n-1)}}{4(|\zeta| - |\zeta|^{-1})} + \frac{n}{2} + \frac{5}{4}} \sqrt{\frac{Q_n(G_{n-1}^2)}{\pi}} \leq$
 $\leq \sqrt{\frac{|\zeta|^{2n-1} - |\zeta|^{-(2n-1)}}{4(|\zeta| - |\zeta|^{-1})} + \frac{n}{2} + \frac{5}{4}} M \quad (|z| > 1)$
- d) $|G'_{n-1}(z)| \leq \frac{M}{\sin\theta} \left| \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{2n^2 \sin(2n+1)\theta \sin^2\theta + 2n \cos n\theta \sin\theta - \sin 2n\theta \cos\theta}{2 \sin^3\theta} \right|$
 $(-1 < z = \cos\theta < 1)$

$$M = \max. \left[\left| G_{n-1}\left(\cos \frac{\pi}{2n}\right) \right|, \left| G_{n-1}\left(\cos \frac{3\pi}{2n}\right) \right|, \dots, \left| G_{n-1}\left(\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \right| \right]$$

(124 γ) (L)

- a) $|g_{n-1}| \leq [\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha-1)]^{-1/2} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha-1)}} M$
- b) $|g_{n-2}| \leq \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)\Gamma(n+\alpha-1)}} (n-1)(n+\alpha-2)[1+(n-1)(n+\alpha-2)] M$
- c. 1) $|G_{n-1}(z)| < \tau n^{\frac{1}{4}} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} < \tau n^{\frac{1}{4}} M \quad (\epsilon \leq z \leq A)$
- c. 2) $|G_{n-1}(0)| \leq \left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(n)} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} < \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)}} M < \tau n^{\frac{1}{2}} M$
- d) $|G'_{n-1}(z)| \leq \tau n^{3/4} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} < \tau n^{3/4} M \quad (\epsilon \leq z \leq A)$

(124 δ) (H)

- a) $|g_{n-1}| \leq 2^{n/2} \pi^{-\frac{1}{4}} (\Gamma(n+1))^{-1/2} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq 2^{\frac{n}{2}} \{ \Gamma(n+1) \}^{-\frac{1}{2}} M$
- b) $|g_{n-2}| \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \{ \Gamma(n) \}^{-\frac{1}{2}} M$
- c. 1) $|G_{n-1}(z)| \leq \tau n^{\frac{1}{4}} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} < \tau M n^{\frac{1}{4}} \quad (|z| \leq A)$
- c. 2) $|G_{n-1}(0)| \leq \left\{ \frac{2}{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{Q_n(G_{n-1}^2)} \leq \sqrt{2\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} M$
- d) $|G'_{n-1}(z)| \leq \tau M n^{3/4} \quad (|z| \leq A)$

REMARKS. — 1.° The constants τ in the above formulae do not depend on M , nor on n . They may be given in more explicit form. Our formulae are applicable, mutatis mutandis, in case z ranges over an interval increasing indefinitely with n , for HERMITE and LAGUERRE polynomials. For the latter we may add other estimates. Thus, for LAGUERRE polynomials

$$e^{-\frac{x}{\alpha}} |\varphi_n(x)| < 1 \quad (\alpha > 0; x > 0); \quad e^{-\frac{x}{\alpha}} |\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}} = |\varphi_n(0)|$$

$$(\alpha \geq 1; x \geq 0)$$

$$K_{n-1}(x) < (n-1)e^x \quad (\alpha > 0; x > 0); \quad K_{n-1}(x) \leq e^x K_{n-1}(0) = \frac{e^x \Gamma(n+\alpha)}{\alpha \Gamma^2(\alpha) \Gamma(n)},$$

$$(\alpha \geq 1; x \geq 0)$$

whence.

$$(124\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{c. 11) } |G_{n-1}(z)| \leq \sqrt{(n-1)\Gamma(\alpha)} e^{\frac{z}{\alpha}} M \quad (\alpha > 0; z > 0) \\ \text{c. 12) } |G_{n-1}(z)| \leq \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(n)}} e^{\frac{z}{\alpha}} M \quad (\alpha \geq 1; z \geq 0). \end{array} \right.$$

2.° g_{n-3}, g_{n-4}, \dots can be estimated in a similar fashion, also $G''_{n-1}(z), \dots$

3.° In some of the above estimates, the order, with respect to n , cannot be improved. (e. g. 124 β , a, b, c. 3), while in some, like (124 α , d), this can be improved and has been given in better form (BERNSTEIN-MARKOFF Theorem gives the order n , in place of n^3). However, this latter form requires the use of the Theory of Approximation and the effective construction of the polynomials of Best Approximation. It is seen, that our estimates all derive from a single source-formula (118), applicable to a finite, as well as to an infinite interval, and this formula, in turn, is but an elementary application of the orthogonality property of the polynomial $\varphi_n(x)$ which furnishes the points x_i under consideration.

3. Application to LIF. — In (23)

$$|f(x_i)| \leq M \quad \text{implies} \quad |L_{n-1}(x_i)| \leq M \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Moreover,

$$l_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

We thus apply the above estimate in (123) to $L_{n-1}(x), l_k(x)$. We get:

$$(125) \quad |L_{n-1}(x)| \leq M \sqrt{\alpha_0 K_{n-1}(x)}, \quad M = \max. [|f(x_1), \dots, f(x_n)|] \quad (x \text{ arbitrary}).$$

(This may be also derived from (43)),

$$|l_k(x)| \leq \sqrt{H_k K_{n-1}(x)} \quad (k = 1, 2, \dots, n; x \text{ arbitrary})$$

(which is again (40)),

$$(126) \quad \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\Phi'_n(x_i)} \right| \leq a_{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n H_i f^2(x_i)}.$$

In particular, with all $f(x_i) = \pm 1$ and $f(x_i)\Phi'_n(x_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) or $f(x_i) = 1, f(x_j) = 0$ for $j \neq i$,

$$(127) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\Phi'_n(x_i)|} &\leq a_{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n H_i} = a_{n-1} \sqrt{\bar{\alpha}_0} \\ \frac{1}{|\Phi'_n(x_i)|} &\leq a_{n-1} \sqrt{H_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

This gives a lower bound for H_i .

Note that (126) is the best possible inequality for arbitrarily preassigned $f(x_1), \dots, f(x_n)$, for it becomes an equality if, and only if, $f(x_i) = C\Phi_{n-1}(x_i)$ for $i = 1, 2, \dots, n$ ($C = \text{const.}$).

In fact, in this case (126) leads to

$$(128) \quad \left| \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{n-1}(x_i)}{\Phi'_n(x_i)} \right| = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{n-1}(x_i)}{\Phi'_n(x_i)} = 1,$$

— a relation which readily follows from (22), (19), (15). Thus, (126) shows that the following quadratic form, in the n variables X_1, X_2, \dots, X_n , is never negative:

$$(129) \quad X \equiv a_{n-1}^2 \sum_{i=1}^n H_i X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\Phi'_n(x_i)} \right)^2 \geq 0,$$

equality if, and only if, $X_i = C\Phi_{n-1}(x_i)$ ($C = \text{const.}; i = 1, 2, \dots, n$).

In other words, the quadratic form X is semi-definite. Hence, the discriminant of X vanishes, and the point $(\Phi_{n-1}(x_1), \dots, \Phi_{n-1}(x_n))$ is its vertex [51]. In symbols,

$$(130) \quad \begin{vmatrix} (a_{n-1}^2 H_1 - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} & \dots & -\sigma_{1n} \\ -\sigma_{21} & (a_{n-1}^2 H_2 - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} & \dots & -\sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\sigma_{n,1} & -\sigma_{n,2} & \dots & -\sigma_{n,n-1} & (a_{n-1}^2 H_n - \sigma_{nn}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \frac{1}{\Phi'_n(x_i)\Phi'_n(x_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \right),$$

$$(130.1) \quad \begin{cases} (a_{n-1}^2 H_1 - \sigma_{11})\Phi_{n-1}(x_1) - \sigma_{12}\Phi_{n-1}(x_2) - \dots - \sigma_{1,n}\Phi_{n-1}(x_n) = 0 \\ \dots \\ -\sigma_{n,1}\Phi_{n-1}(x_1) - \sigma_{n,2}\Phi_{n-1}(x_2) - \dots + (a_{n-1}^2 H_n - \sigma_{nn})\Phi_{n-1}(x_n) = 0. \end{cases}$$

The foregoing relations (126-130. 1) hold for any sequence of *OP*. The last three of these show the connection between the general theory of *OP* and the theory of quadratic forms. This connection is also manifested on the *MQF* (7). In fact, applied to $G_{n-1}^2(x)$, (7) yields

$$\int_a^b G_{n-1}^2(x) d\psi(x) = \sum_{i=1}^n H_i G_{n-1}^2(x_i),$$

and this may be treated as a transformation to the canonical form of the quadratic form $\int_a^b G_{n-1}^2(x) d\psi(x)$, in the n variables g_0, g_1, \dots, g_{n-1} , coefficients of $G_{n-1}(x)$.

This new approach to Gaussian mechanical quadratures, as well as further discussion of the quadratic form X in (129), we plan to develop elsewhere.

4. An estimate of $|G_{n-1}(x)|$ from $\int_a^b G_{n-1}^2(t) d\psi(t)$. — In closing we give several methods for obtaining the above estimate which frequently occurs in applications.

I. METHOD. — By (123c),

$$(131) \quad |G_{n-1}(x)| \leq \sqrt{K_{n-1}(x) \int_a^b G_{n-1}^2(t) d\psi(t)} \quad (x \text{ arbitrary}) [49].$$

II. METHOD. — This is applicable in the special case

$$(132) \quad d\psi(x) = p(x)dx; \quad p(x) \geq p_0 > 0 \quad \text{in } (c, d) \\ (c, d) \text{ finite; } (c, d) \subset (a, b).$$

We have here

$$Q(x) = p_0 \int_c^x G_{n-1}^2(t) dt \leq \int_c^x G_{n-1}^2(t) d\psi(t) \leq \int_a^b G_{n-1}^2(t) d\psi(t) \quad (c \leq x \leq d).$$

Apply to the polynomial $Q(x)$ MARKOFF-BERNSTEIN Theorem. We get:

$$(133) \quad |G_{n-1}(x)| < \begin{cases} \tau n^{\frac{1}{2}} \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) p(t) dt} & (c + \epsilon \leq x \leq d - \epsilon) \\ \tau n \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) p(t) dt} & (c \leq x \leq d) \end{cases} [18].$$

In particular,

$$(134) \quad |\varphi_n(x; a, b; d\psi)| < \begin{cases} \tau n^{\frac{1}{2}} & (c + \varepsilon \leq x \leq d - \varepsilon) \\ \tau n & (c \leq x \leq d), \end{cases}$$

$d\psi = p(x)dx$, $p(x)$ satisfying (132).

III. METHOD. — Assuming (a, b) finite, let

$$(135) \quad |G_{n-1}(x_0)| = \mu_{n-1} = \max_{a \leq x \leq b} |G_{n-1}(x)| \quad (x_0 \text{ in } (a, b)).$$

By Markoff's Théorem,

$$(136) \quad |G'_{n-1}(x)| < \frac{2n^2 \mu_{n-1}}{b-a} \quad (a \leq x \leq b),$$

whence,

$$|G_{n-1}(x) - G_{n-1}(x_0)| \leq \frac{2n^2 \mu_{n-1} \delta_n}{b-a} \quad (|x-x_0| \leq \delta_n; x \text{ in } (a, b)),$$

and, with

$$(137) \quad \delta_n = \frac{(b-a)(1-\theta_n)}{2n^2} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

$$(138) \quad |G_{n-1}(x)| \geq \mu_{n-1} \theta_n \quad (|x-x_0| \leq \delta_n; x \text{ in } (a, b))$$

$$(139) \quad |G_{n-1}(x)| \leq \mu_{n-1} \leq \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) d\psi(t)} \cdot \theta_n^{-1} \left(\int_{i_n} d\psi(t) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

i_n -subinterval of (a, b) , of length $\frac{(b-a)(1-\theta_n)}{2n^2}$, with end-point at x_0 .

REMARK. — If x_0 in (135) is known to lie *inside* (a, b) , then, in place of (136), we make use of MARKOFF-BERNSTEIN Theorem

$$|G'_n(x)| < \tau n \mu_{n-1} \quad (a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon),$$

and, proceeding as above, we get again (139), where now i_n denotes a subinterval of (a, b) , of length $\frac{1-\theta_n}{\tau n}$, with end-point at x_0 , wholly lying inside (a, b) .

This method is due to D. JACKSON, who in (139) replaces θ_n by a numerical constant (< 1). It is often more advantageous to treat θ_n as a function of n to be so determined as to maximize the denominator in (139). Since x_0 in (135) is generally unknown, it seems proper to introduce the following

DEFINITION. — Let $\psi(x)$ be effectively increasing in (a, b) . Denote by i_δ a variable interval of length δ (> 0) whose end-points range over (a, b) .

The greatest lower bound (minimum, if $\psi(x)$ is continuous) of $\int_{i\delta} d\psi(t)$ we call « modulus of increase » of $\psi(x)$ in (a, b) ; we denote it by $\pi(\delta)$. Thus,

$$(140) \quad \int_{i\delta} d\psi(t) \geq \pi(\delta) > 0; \quad \psi(x + \delta) - \psi(x) \geq \pi(\delta) > 0 \quad (x, x + \delta \text{ in } (a, b)).$$

In the special case of

$$(141) \quad \psi(x) = \text{const.} + \int_a^x p(t)dt, \quad p(x) \geq 0 \text{ in } (a, b),$$

$$\int_a^\beta p(t)dt > 0 \quad \text{for } a \leq \alpha < \beta \leq b,$$

the above definition yields

$$(142) \quad \int_{i\delta} p(t)dt \geq \pi(\delta) > 0; \quad \min_x \int_x^{x+\delta} p(t)dt = \pi(\delta) > 0 \quad (x, x + \delta, \text{ in } (a, b)).$$

Here $\pi(\delta)$ may be designated also as « modulus of positiveness » in (a, b) of the non-negative function $p(x)$, with $\int_a^\beta p(t)dt > 0$ for $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

We may now rewrite (139) as

$$(143) \quad |G_{n-1}(x)| \leq \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t)dt} \cdot \theta_n^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{(b-a)(1-\theta_n)}{2n^2} \right)$$

$$(a \leq x \leq b; 0 < \theta_n < 1)$$

(regarding θ_n , see the remark made above).

In particular,

$$(144) \quad |\varphi_{n-1}(x; a, b; d\psi)| \leq \theta_n^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{(b-a)(1-\theta_n)}{2n^2} \right)$$

$$(a \leq x \leq b; 0 < \theta_n < 1)$$

$\pi(\delta)$ -modulus of increase in (a, b) of $\psi(x)$.

ILLUSTRATIONS.

(i) $d\psi(x) = p(x)dx$; $p(x) \geq p_0 > 0$ in (a, b) . Here

$$\pi(\delta) \geq p_0 \delta,$$

and since $\theta_n(1 - \theta_n)^{\frac{1}{2}}$ is maximized by $\theta_n = \frac{2}{3}$, we get;

$$(145) \quad |G_{n-1}(x)| \leq \frac{3^{\frac{1}{2}} n \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) p(t) dt}}{2 \sqrt{p_0(b-a)}} \quad (a \leq x \leq b).$$

The same reasoning yields

$$(146) \quad |G_{n-1}(x)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} n \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) p(t) dt} \cdot [p_0(d-c)]^{-\frac{1}{2}} \\ (c \leq x \leq d; p(x) \geq p_0 > 0 \text{ in } (c, d) \subset (a, b)).$$

[Applying (146) to $\varphi_{n-1}(x; a, b; p)$ gives again (134)].

(ii) Consider the more general case

$$(147) \quad d\psi(x) = (x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}q(x)dx \quad (\alpha, \beta > 0; q(x) \geq q_0 > 0 \text{ in } (a, b)).$$

Here, with τ independent of q_0 and δ ,

$$\int_x^{x+\delta} d\psi(t) > \tau q_0 \delta \quad (a + \varepsilon \leq x < x + \delta \leq b - \varepsilon) \\ \int_a^{a+\delta} d\psi(t) > \tau q_0 \delta^\alpha, \quad \int_{b-\delta}^b d\psi(t) > \tau q_0 \delta^\beta,$$

and the above formulae give (with a different τ)

$$(148) \quad |G_{n-1}(x)| < \begin{cases} \tau n \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt} & (a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon) \\ \tau n^{\max(1, \alpha, \beta)} \sqrt{\int_a^b G_{n-1}^2(t) (t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt} & (a \leq x \leq b). \end{cases} \\ (\alpha, \beta > 0; q(x) \geq q_0 > 0 \text{ in } (a, b)).$$

Thus,

$$(149) \quad |l_k(x; d\psi)| < \begin{cases} \tau n \vee H_k & (a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon) \\ \tau n^{\max(1, \alpha, \beta)} \sqrt{H_k} & (a \leq x \leq b). \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, n; d\psi(x) \text{ as in (147)})$$

Note that this method makes no use of the theory of *OP*.

The University of Pennsylvania.

BIBLIOGRAPHY

1. RUNGE, *Ueber empirische Funktionen...*, « Zeitschr. für Math. u. Physik », v. 46 (1902).
2. BOREL, *Leçons sur les fonctions d'une variable réelle*, Paris (1904), Ch. IV.
3. VALLÉE-POUSSIN, *Sur la convergence des formules d'interpolation...*, « Bull. Acad. r. Belgique, Cl. Sc. », (1908), 319-403.
4. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, Paris (1910), Ch. II.
5. FABER, *Ueber die interpolationische Darstellung stetiger Funktionen*, « Jahresber. Deutch. Math. Ver. », v. 23 (1914), 192-210.
6. S. BERNSTEIN, *Quelques remarques sur l'interpolation*, « Comm. Soc. Math. Kharkoff », v. 14 (1914), 1-13.
7. FEJÉR, *Ueber Interpolation*, « Göttinger Nachrichten. Math. Phys. Classe », (1916), 66-91.
8. H. HAHN, *Ueber das Problem der Interpolation*, « Math. Zeitschr. », v. 1 (1918), 115-143.
9. FRÉCHET, *Sur un défaut de la méthode d'interpolation...*, « Nouv. Ann. Math », (4), v. 20 (1920), 1-9.
10. M. FEKETE, *Ueber Interpolation*, « Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. », (1926), 410-413.
11. S. BERNSTEIN, *Sur la limitation des valeurs...*, « Bull. Acad. Sc. U. R. S. S. », 8 (1931), 1025-1050.
12. FEJÉR, *Ueber Weierstrassche Approximation...*, « Math. Annalen », v. 102 (1930), 707-725.
13. Id., *Lagrangesche Interpolation...*, *ibid.*, v. 106 (1932), 1-55.
14. Id., *Die Abschätzung eines Polynomes...*, « Math. Zeitschr. », v. 32 (1930), 426-456.
15. Id., *Bestimmung derjenigen Abscissen...*, « Annali R. Sc. Norm. Sup. », Pisa, Sc. Fis. e Mat. (II), v. 1 (1932), 1-16.
16. Id., *Ueber einige Identitäten...*, « Acta Lit. Ac. Sc. », Szeged, v. 3 (1932), 145-152.
17. Id., *On the Infinite Sequences...*, « Bull. Amer. Math. Soc. », v. 39 (1933), 521-535.
18. J. SHOHAT, *On Interpolation*, « Annals Math. », v. 34 (1933), 130-146.
19. Id., *On Interpolation*, « Econometrica », v. 1 (1933), 148-158.
20. SZEGÖ, *Ueber gewisse Interpolations-Polynome...*, « Math. Zeitschr. », v. 35 (1932), 579-602.
21. E. FELDHEIM, *Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales...*, « C. R. », v. 203 (1936), 650-652.
22. P. ERDÖS et E. FELDHEIM, *Sur la mode de convergence...*, *ibid.*, 913-915.
23. a) P. ERDÖS et P. TURAN, *On Interpolation. I. Quadrature and mean-convergence...*, « Annals Math. », v. 38 (1937), 142-155.
b) Id., *On Interpolation. II.*, *ibid.*, v. 39 (1938), 703-724.
24. G. GRÜNWARD, *Ueber Divergenzerscheinungen...*, « Acta Litt. Ac. Sc. », Szeged, v. 7, (1935), 207-221.
25. Id., *Ueber Divergenzerscheinungen...*, « Annals Math. », v. 36 (1937), 908-918.
26. J. SHOHAT, *On the Convergence Properties...*, *ibid.*, v. 38 (1937), 758-769.
27. G. GRÜNWARD and P. TURAN, *Ueber Interpolation*, « Ann. R. Sc. Norm. Sup. », Pisa, Sc. Fis. e Mat. (II), v. 7 (1938), 1-10.
28. J. MARCINKIEWICZ, *Quelques remarques sur l'interpolation*, « Acta Litt. ac. Sc. », Szeged, v. 8 (1937), 127-130.
29. Id., *Sur l'interpolation*, « Studia Math. », v. 6 (1936), 1-17.
30. Id., *Sur l'interpolation. II*, *ibid.* 67-81.
31. D. JACKSON, *The Theory of Approximation*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », v. 11 (1930),
32. J. F. STEFFENSEN, *Interpolation* (Baltimore, 1927).
33. W. L. GONTCHAROFF, *Theory of Interpolation and Approximation* (in Russian; Leningrad, 1934).

34. a) P. ERDÖS and B. A. LENGYEL, *On Fundamental Functions of Lagrangian interpolation*, « Bull. Amer. Math. Soc. », v. 44 (1938), 828-834.
 b) P. ERDÖS and G. GRÜNWARD, *Note on an Elementary Problem of Interpolation*, *ibid.*, 515-518.
35. C. LANZOS, *Trigonometric Interpolation...*, « J. Math. and Phys. », v. 17 (1938), 123-199.
36. J. SHOHAT, *On Mechanical Quadratures...*, « Trans. Amer. Math. Soc. », v. 42 (1937), 461-496.
37. C. WINSTON, *On Mechanical Quadratures Formulae...*, « Ann. Math. », v. 35 (1934), 658-677.
38. J. SHOHAT and C. WINSTON, *On Mechanical Quadratures*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », v. 58 (1934), 1-13.
39. M. WEBSTER, *On the zeros of Jacobi Polynomials...*, « Duke Math. J. », v. 3 (1937), 426-443.
40. SZEGÖ, *Ueber den asymptotischen Ausdruck...*, « Math. Annalen », v. 86 (1922), 114-140.
41. S. BERNSTEIN, *Sur les polynomes orthogonaux...*, Parts I, II, « J. des Math. », v. 10 (1931).
42. M. PLANCHEREL et W. ROTACH, *Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite*, « Comment. Math. Helvetici », v. 1 (1929), 227-254.
43. S. C. VAN VEEN, *Asymptotische Entwicklungen...*, « Math. Annalen », v. 105 (1931), 408-436.
44. J. SHOHAT, *On the Development of a Continuous Function...*, « Trans. Amer. Math. Soc. », v. 27 (1925), 537-550.
45. E. HILLE, *Ueber die Nullstellen der Hermiteschen Polynome*, « Jahresber. Deutsch. Math. Ver. », v. 44 (1934).
46. J. SHOHAT, *On the Development of Functions...*, « Bull. Amer. Math. Soc. », v. 41 (1935), 49-82.
47. R. BAILEY, *Convergence of sequences...*, « Duke Math. J. », v. 2 (1936), 287-303.
48. M. RIESZ, *Sur le problème des moments...*, « Acta Litt. ac Sc. », Szeged, v. 1 (1923), 209-225.
49. J. SHOHAT, *On a General Formula...*, « Trans. Amer. Math. Soc. », v. 29 (1927), 569-583.
50. TCHEBYCHEFF, *On Continued Fractions*, « Collected Papers », v. 1, 203-230 (in Russian); also, « J. des Math. », s. II, v. 3 (1858), 289-323.
51. MAXIME BÔCHER, *Introduction to Higher Algebra*, (New York, 1907), Ch. XI.
52. E. FELDHEIM, *Théorie de convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, « Mém. Sc. Math », fasc. 95 (1939).

Sulle condizioni di validità dei metodi di sommazione di Gronwall (*).

Memoria di LUIGI AMERIO (Milano)

Sunto. - Si studiano le condizioni di validità dei metodi di sommazione (f, g) di GRONWALL, con ipotesi assai meno restrittive per le funzioni f e g di quelle fatte dal GRONWALL stesso. Si mettono in luce, successivamente, varie proprietà generali relative ai metodi (f, g), sotto le nuove condizioni, e si applicano questi alla teoria del prolungamento analitico di una serie di potenze.

Introduzione.

Una vasta classe di procedimenti di sommazione delle serie è stata definita da T. H. GRONWALL [1], con le seguenti considerazioni.

Una funzione $z = f(w)$, definita e continua per $|w| \leq 1$, sia analitica per $|w| \leq 1$, eccetto al più per $w = 1$, e dia la rappresentazione biunivoca e conforme di $|w| < 1$ in un campo aperto D interno a $|z| < 1$, facendo corrispondere $z = 0$ a $w = 0$, $z = 1$ a $w = 1$; la funzione inversa sia a sua volta regolare anche lungo il contorno l di D , eccetto al più per $z = 1$, e si abbia precisamente

$$(1) \quad 1 - w = (1 - z)^\lambda \psi(z)$$

con $\lambda \geq 1$, $\psi(z)$ analitica in D e su l , $\psi(1) > 0$, $\psi(0) = 1$.

Sia poi $g(w)$ una funzione analitica, rappresentata per $|w| < 1$ dalla serie

$$(2) \quad g(w) = \sum_0^\infty b_n w^n \quad b_n \neq 0$$

e avente l'espressione

$$(3) \quad g(w) = (1 - w)^{-\alpha} + \gamma(w)$$

con $\alpha > 0$, $\gamma(w)$ analitica per $|w| \leq 1$: si abbia inoltre $g(w) \neq 0$ per $|w| < 1$.

Chiameremo queste le *condizioni di Gronwall* per le funzioni $f(w)$ e $g(w)$.

Ciò posto, una serie $\sum_0^\infty u_n$ è detta dal GRONWALL sommabile (f, g) quando

(*) Lavoro eseguito presso il Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

le quantità $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ che si ricavano dall'identità

$$(4) \quad \sum_0^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_0^{\infty} U_n b_n w^n$$

tendono, per $n \rightarrow \infty$, a un limite finito s che si assume come somma generalizzata della serie data.

Come si vede, le operazioni con cui si passa dalle u_ν alle U_n sono due. In una prima, con la trasformazione $z = f(w)$, si muta la serie $\sum_0^{\infty} u_\nu z^\nu$ in una

$$(5) \quad \sum_0^{\infty} \gamma_m w^m.$$

Successivamente, dalla (4) si ricava

$$(6) \quad \sum_0^{\infty} \gamma_m w^m = \frac{1}{g(w)} \sum_0^{\infty} b_n U_n w^n$$

da cui, per la (2),

$$(7) \quad U_n = \sum_0^n \gamma_m \frac{b_{n-m}}{b_n}$$

cioè si applica alla serie $\sum_0^{\infty} \gamma_m$ un procedimento di sommazione di NOERLUND.

Si noti, a proposito della (7), che siccome è $f(0) = 0$, lo sviluppo di z^ν secondo le potenze di w comincia con la ν -ma potenza: si ha perciò

$$(8) \quad U_n = \sum_0^n a_{n,\nu} u_\nu$$

dove le $a_{n,\nu}$ dipendono dai coefficienti di $f(w)$ e $g(w)$, ma non dalle u_ν .

I metodi di GRONWALL sono molto generali e comprendono vari procedimenti di sommazione presentatisi nell'analisi.

Ad esempio, il metodo $(w, (1-w)^{-\alpha})$ è il metodo $(C, \alpha - 1)$ di CESARO,

con $\alpha > 0$; il metodo $\left(\frac{1 - (1-w)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1-w)^{\frac{1}{2}}}, (1-w)^{-\frac{1}{2}} \right)$ è stato studiato dal DE LA

VALLÉE POUSSIN e successivamente generalizzato dal GRONWALL.

Un altro metodo di GRONWALL si è presentato in un mio recente lavoro [2] ed è stato studiato e ampliato dal BIRINDELLI; in esso si ha

$$(9) \quad U_n = \sum_0^n \frac{\binom{n}{\nu} \nu!}{n^\nu} u_\nu$$

ciò che equivale a porre, come si dimostra, $w = ze^{1-z}$, $g(w) = \frac{1}{1-z}$.

Il GRONWALL ha provato pei metodi (f, g) vari teoremi importanti. Notiamo fra questi il primo in cui si dimostra che se il $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ esiste finito, allo stesso valore tende la funzione

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} u_n z^n$$

quando $z \rightarrow 1$, restando in un campo angoloso col vertice in $z = 1$, di apertura $< \frac{\pi}{\lambda}$ e avente per bisettrice il segmento $1 \rightarrow 0$.

In un secondo teorema si prova che, se è $\lambda > 1$, e il contorno l di D ha in comune con la circonferenza $|z| = 1$ il solo punto $z = 1$, è sommabile (f, g) ogni serie sommabile (C, δ) con $\delta > -1$.

Successivamente il BIRINDELLI [3] ha ripresi e accuratamente studiati i metodi di GRONWALL, applicandoli fra l'altro alla sommazione della serie geometrica $\sum_0^{\infty} \xi^n$ verso la somma $\frac{1}{1-\xi}$ e determinando il relativo campo di sommabilità. Di qui ha ricavato, sfruttando la formula integrale di CAUCHY, un campo aperto in cui è certamente sommabile una serie di potenze $\sum_0^{\infty} a_n \xi^n$ ottenendone così il prolungamento analitico.

* * *

In questa Memoria si sono ampliate le condizioni di GRONWALL relative alle funzioni $f(w)$ e $g(w)$; si è potuto così provare che le ipotesi (1) e (3) possono essere grandemente allargate, soprattutto se ci si limita al problema del prolungamento analitico di una serie di potenze.

Inoltre si è dimostrato, sotto condizioni larghissime per la $f(w)$ e la $g(w)$, un teorema analogo al primo teorema di GRONWALL.

Infine si è completato il risultato del BIRINDELLI, perchè si è individuato per una serie di potenze un campo aperto Ω , internamente al quale è possibile la sommabilità, mentre non lo è esternamente (almeno nel caso in cui la funzione rappresentata in un intorno dell'origine dalla serie stessa sia uniforme oppure quando il campo D risulti interno ai suoi omotetici rispetto all'origine, τD , con $\tau > 1$, ciò che avviene, ad esempio, nei metodi precedentemente ricordati).

In quanto segue ammetteremo sempre che la funzione $z = f(w)$ sia analitica per $|w| < 1$, continua per $|w| \leq 1$ e stabilisca una corrispondenza biunivoca e conforme tra $|w| < 1$ e un campo aperto D semplicemente connesso in modo che sia $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Essendo poi $\frac{dz}{dw} \neq 0$ per $|w| < 1$, la funzione inversa $w = w(z)$ sarà analitica in tutti i punti di D .

Indicheremo con \bar{D} il campo chiuso costituito dai punti di D e del contorno l , di equazione $z = f(e^{i\theta})$, che supporremo sia una linea di JORDAN, la quale, per noti teoremi [4], risulterà percorsa in un determinato verso dal punto $z = f(e^{i\theta})$, al variare di θ tra $-\pi$ e π ; inoltre la corrispondenza tra i due campi chiusi $|w| \leq 1$ e \bar{D} sarà biunivoca e continua. Diremo infine che una proprietà vale in D , o in \bar{D} , quando è verificata in tutti i punti di D , o di \bar{D} .

1. **Condizioni relative alla funzione $z = f(w)$.** — Cerchiamo in un primo tempo di ampliare le condizioni relative alla $z = f(w)$, considerando metodi di sommazione del tipo $(f, (1-w)^{-\alpha})$ con $\alpha > 0$.

Per questo, posto

$$(10) \quad (1-w)^{-\alpha} = \sum_0^{\infty} A_n^{(\alpha)} w^n$$

e inoltre

$$(11) \quad \sum_0^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{(1-w)^{-\alpha}} \sum_0^{\infty} V_n A_n^{(\alpha)} w^n$$

dimostriamo il seguente

TEOREMA I. — *Se il contorno l di D è una curva rettificabile e $\varphi(z)$ è analitica nel campo \bar{D} , si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \varphi(1)$$

qualunque sia $\alpha > 0$.

DIMOSTRAZIONE. — Posto $z = x + iy$, $\varphi(z) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ dimostriamo che le due funzioni $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ sono a variazione limitata sul contorno l .

Infatti essendo $\varphi(z)$ analitica in tutti i punti del campo chiuso \bar{D} , per ogni \bar{z} di \bar{D} si può costruire un cerchio di raggio $\bar{\rho} > 0$, finito, in modo che per $|z - \bar{z}| \leq \bar{\rho}$ sia $\varphi(z)$ analitica. Si ottiene così una famiglia di cerchi e ogni punto di \bar{D} risulta interno almeno a uno di essi; essendo l'insieme D chiuso e limitato è possibile allora, per il lemma di PINCHERLE-BOREL, costruire con un numero finito di questi cerchi un campo chiuso \bar{B} tale che ogni punto di \bar{D} sia interno a \bar{B} .

Sia λ il contorno di \bar{B} e $\delta > 0$ la minima distanza dei punti di l da quelli di λ . Dividiamo la curva l , di lunghezza finita v , in n parti, rispettivamente di lunghezze v_1, v_2, \dots, v_n , in modo che sia $v_i < \delta$, mediante i punti $P_0 = 1, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = 1 = P_0$; sarà evidentemente $v_1 + v_2 + \dots + v_n = v$.

Considerando dapprima la funzione $\varphi_1(x, y) = \varphi_1(P)$ poniamo

$$(12) \quad \omega_n = \sum_1^n |\varphi_1(P_r) - \varphi_1(P_{r-1})|.$$

Ora il segmento $\overline{P_{r-1}P_r}$, essendo di lunghezza $d_r \leq \nu_r < \delta$, risulta interno a \overline{B} ; inoltre in \overline{B} la funzione $\varphi_1(x, y)$ è armonica e quindi esiste una costante positiva M tale che sia

$$(13) \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| \leq M \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \leq M.$$

Siccome poi è

$$(14) \quad |\varphi_1(P_r) - \varphi_1(P_{r-1})| = d_r \left| \frac{\partial \varphi_1(T_r)}{\partial s_r} \right|$$

dove T_r è un punto interno del segmento $\overline{P_{r-1}P_r}$ e s_r ne è la direzione, si ricava per la (13)

$$(15) \quad |\varphi_1(P_r) - \varphi_1(P_{r-1})| \leq 2Md_r \leq 2M\nu_r$$

perchè si ha

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_r} \right| = \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cos(s, y) \right| \leq 2M.$$

Per la (15) si ricava dalla (12)

$$(16) \quad \omega_n \leq 2M\nu$$

relazione che vale qualunque sia n : infatti se per un numero n_0 di divisioni qualcuno dei segmenti $\overline{P_{r-1}P_r}$ risulta di lunghezza $d_r \geq \delta$, è sempre possibile, coll'aggiunta di un numero finito di punti, sostituire al segmento stesso una spezzata i cui lati abbiano ciascuno lunghezza $< \delta$.

Compiuta la stessa operazione per tutti i segmenti $\overline{P_{r-1}P_r}$ di lunghezza $\geq \delta$ e indicando con n_1 il numero di punti che così si ottengono, si ha evidentemente

$$\omega_{n_0} \leq \omega_{n_1} \leq 2M\nu.$$

Per la variazione ω di $\varphi_1(x, y)$ su l si ha perciò

$$\omega \leq 2M\nu$$

cioè $\varphi_1(x, y)$ è a variazione limitata sul contorno stesso.

Allo stesso modo si ragiona per $\varphi_2(x, y)$.

Col cambiamento di variabile $z = f(w)$ la $\varphi(f(w))$ risulta analitica per $|w| < 1$; inoltre la sua parte reale e quella immaginaria risulteranno a variazione limitata sulla circonferenza $w = e^{i\theta}$, in virtù di quanto si è ora di-

mostrato e del fatto che essendo l una linea di JORDAN, ai punti P_i corrispondono sulla circonferenza $w = e^{i\vartheta}$ dei punti Q_i che si seguiranno in un determinato verso al crescere di ϑ .

Posto allora

$$(17) \quad \varphi(f(w)) = \sum_0^{\infty} \gamma_n w^n$$

il teorema sarà provato quando avremo dimostrato che la serie $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ è sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 0$.

Ora, posto $\gamma_n = \alpha_n - i\beta_n$, $w = \rho e^{i\vartheta}$, si ha per $\rho < 1$

$$(18) \quad \begin{aligned} \varphi(f(w)) &= \sum_0^{\infty} \rho^n \{ \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \operatorname{sen}(n\vartheta) \} + \\ &+ i \sum_0^{\infty} \rho^n \{ -\beta_n \cos(n\vartheta) + \alpha_n \operatorname{sen}(n\vartheta) \} \\ &= \psi_1(\rho, \vartheta) + i\psi_2(\rho, \vartheta) \end{aligned}$$

dove è

$$\begin{aligned} \psi_1(\rho, \vartheta) &= \varphi_1(x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta)) \\ \psi_2(\rho, \vartheta) &= \varphi_2(x(\rho, \vartheta), y(\rho, \vartheta)). \end{aligned}$$

Dalla (18) si ricava in particolare

$$\psi_1(\rho, \vartheta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \rho^n \{ \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \operatorname{sen}(n\vartheta) \}$$

e quindi

$$(19) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\rho, \vartheta) d\vartheta \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi \rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\rho, \vartheta) \cos(n\vartheta) d\vartheta \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi \rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(\rho, \vartheta) \operatorname{sen}(n\vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Ma, essendo $\psi_1(\rho, \vartheta)$ continua per $\rho \leq 1$, le (19) valgono anche se in esse si pone $\rho = 1$; ne segue che le costanti α_n e β_n sono i coefficienti di FOURIER della funzione $\psi_1(1, \vartheta)$ la quale è, per quanto si è visto, continua e a variabilità limitata per $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$.

Per un noto teorema [5], la serie

$$(20) \quad \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \{ \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \operatorname{sen}(n\vartheta) \}$$

è allora sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 0$ e vale $\psi_1(1, \vartheta)$.

Allo stesso modo si prova la sommabilità di

$$(21) \quad -\beta_0 + \sum_1^{\infty} \{ -\beta_n \cos(n\vartheta) + \alpha_n \sin(n\vartheta) \}$$

che vale $\psi_2(1, \vartheta)$.

Posto poi nelle (20) e (21) $\vartheta = 0$ ne segue che la serie $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ è sommabile $(C, \alpha - 1)$, con $\alpha > 0$ e vale $\psi_1(1, 0) + i\psi_2(1, 0) = \varphi(1)$.

Il teorema è perciò dimostrato.

Facendo ora su α delle ipotesi più particolari possiamo provare altri due teoremi e precisamente:

TEOREMA II. — Se è $\alpha = 1$, $\varphi(z)$ analitica nel campo \bar{D} e la linea l è rettificabile in un intorno di $z = 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \varphi(1).$$

DIMOSTRAZIONE. — Per le ipotesi fatte le funzioni $\psi_1(\rho, \vartheta)$, $\psi_2(\rho, \vartheta)$ risultano continue per $\rho \leq 1$ e inoltre le $\psi_1(1, \vartheta)$, $\psi_2(1, \vartheta)$ sono a variazione limitata in un intorno di $\vartheta = 0$.

Ne segue che le (19) valgono anche per $\rho = 1$ e le serie (20) e (21) sono convergenti per $\vartheta = 0$; da questo si deduce la tesi.

TEOREMA III. — Se è $\alpha > 1$, $\varphi(z)$ analitica nel campo D , continua nel campo \bar{D} , si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \varphi(1) \quad (*).$$

DIMOSTRAZIONE. — Bisognerà provare che la serie $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ è sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 1$.

Per questo osserviamo che, essendo $z = f(w)$ analitica per $|w| < 1$, continua per $|w| \leq 1$, lo sarà, per le ipotesi fatte, anche la $\varphi(f(w))$; sono perciò funzioni continue per $\rho \leq 1$ tanto $\psi_1(\rho, \vartheta)$ quanto $\psi_2(\rho, \vartheta)$.

Ne segue che le (19) continuano a valere se si pone in esse $\rho = 1$ e quindi le α_n e β_n sono i coefficienti di FOURIER dello sviluppo di $\psi_1(1, \vartheta)$. Essendo questa funzione continua, per un noto teorema [6] la serie (20) è sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 1$ e vale $\psi_1(1, \vartheta)$.

Allo stesso modo si ragiona per la $\psi_2(1, \vartheta)$.

Ponendo poi $\vartheta = 0$ si ricava la sommabilità di $\sum_0^{\infty} \gamma_n$ che avrà per valore $\psi_1(1, 0) + i\psi_2(1, 0) = \varphi(1)$.

(*) $\varphi(1)$ è il $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$, quando $z \rightarrow 1$ restando in \bar{D} .

OSSERVAZIONE. — Nel caso in cui sia soddisfatta la condizione di GRONWALL relativa alla $z = f(w)$ si può facilmente dimostrare che valgono i teoremi I, II, III.

Infatti la $z = f(w)$ è, in tale ipotesi, analitica per $|w| \leq 1$, $w \neq 1$, e della (1) segue che in un intorno di $w = 1$ vale uno sviluppo del tipo

$$(22) \quad 1 - z = \sum_1^{\infty} k_n (1 - w)^{\frac{n}{\lambda}}$$

dove per $(1 - w)^{\frac{1}{\lambda}}$ si prenderà quel ramo che si riduce a 1 per $w = 0$.

Per la (22) la $z = f(w)$ è continua nel punto $w = 1$; $\varphi(z)$ è perciò analitica in D , continua in \bar{D} , ed è applicabile il teorema III.

Dimostriamo ora che il contorno l di D è rettificabile.

Infatti dalla (22) si ricava

$$(23) \quad \frac{dz}{dw} = \sum_1^{\infty} k_n \frac{n}{\lambda} (1 - w)^{\frac{n}{\lambda} - 1}$$

e, siccome per $w = e^{i\vartheta}$ si ha $|1 - w| = 2 \left| \sin \frac{\vartheta}{2} \right|$, se ne deduce che $\left| \frac{dz}{dw} \right|$ diventa infinita come $\vartheta^{\frac{1}{\lambda} - 1}$ in prossimità di $\vartheta = 0$.

Osservando poi che per gli altri valori di ϑ la $z = f(e^{i\vartheta})$ è analitica ne segue l'esistenza dell'integrale

$$v = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dz}{dw} \right| |dw| = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dz}{dw} \right| d\vartheta$$

che rappresenta la lunghezza della linea l .

Vale perciò il teorema I, e quindi il teorema II.

2. Condizioni relative alla funzione $g(w)$. — Cerchiamo ora di ampliare le condizioni relative alla $g(w)$.

Per questo, tenendo presenti le (10) e (11), poniamo

$$(24) \quad \begin{aligned} \sum_0^{\infty} u_n z^n &= \frac{1}{(1 - w)^{-\alpha}} \sum_0^{\infty} V_n A_n^{(\alpha)} w^n \\ &= \frac{1}{g(w)} \sum_0^{\infty} U_n b_n w^n \end{aligned}$$

cioè sommiamo la serie $\sum_0^{\infty} u_n$ col metodo $(f, (1 - w)^{-\alpha})$ e col metodo (f, g) .

AmMESSO che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, finito, cerchiamo le condizioni per cui è anche $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s$.

Posto allora

$$(25) \quad g(w) = \sum_0^\infty b_n w^n = \frac{\sum_0^\infty \Delta_n^{(z)} w^n}{(1-w)^z}$$

si ricava

$$(26) \quad \Delta_n^{(z)} = \sum_0^n b_m A_{n-m}^{(-z)}$$

$$(27) \quad b_n = \sum_0^n \Delta_m^{(z)} A_{n-m}^{(z)}$$

dove $A_n^{(-z)}$ è il coefficiente di w^n nello sviluppo di $(1-w)^z$.

Ciò premesso, e ricordando che è $A_n^{(z)} > 0$, possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA IV. — *Se la successione*

$$b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$$

soddisfa per $\alpha \geq 1$, alle condizioni

$$a) \quad \frac{\left| \sum_0^n \Delta_m^{(z)} A_{n-m}^{(z)} \right|}{\left| \sum_0^n |\Delta_m^{(z)}| A_{n-m}^{(z)} \right|} = \frac{|b_n|}{\left| \sum_0^n |\Delta_m^{(z)}| A_{n-m}^{(z)} \right|} > M > 0$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1$$

ed è $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, finito, si ha pure

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s.$$

DIMOSTRAZIONE. — Si ricava dalle (24) e (25)

$$(28) \quad U_n = \sum_0^n V_m \frac{A_m^{(z)} \Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n}$$

e le condizioni necessarie e sufficienti perchè, essendo $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, sia anche

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s$, come è noto [7], sono:

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n} = 0 \text{ per } m = 0, 1, \dots$$

$$2) \quad \sum_0^n A_m^{(z)} \left| \frac{\Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n} \right| < K < \infty \text{ per } n = 0, 1, \dots$$

$$3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^n A_m^{(z)} \frac{\Delta_{n-m}^{(z)}}{b_n} = 1.$$

La condizione 3) è identicamente soddisfatta per la (27).

Quanto alla 2) si constata immediatamente che coincide con la condizione a) e che è $M = \frac{K}{1}$.

Resta da provare che, con le ipotesi a) e b) è soddisfatta la 1). Per questo osserviamo che si ha per le (27) e a)

$$(29) \quad \left| \frac{b_n}{b_m} \right| > \frac{M \sum_r^0 |\Delta_r^{(z)}| A_{m-r}^{(z)}}{\sum_r^0 |\Delta_r^{(z)}| A_{m-r}^{(z)}} = K \frac{A_m^{(z)}}{A_m^{(z)}} \frac{\sum_r^0 |\Delta_r^{(z)}| A_{n-r}^{(z)}}{\sum_r^0 |\Delta_r^{(z)}| A_{n-r}^{(z)}} A_n^{(z)}$$

E poi, per $m \geq 1$,

$$(30) \quad A_{(z)}^m = (-1)^m \binom{m}{-\alpha} \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{(\alpha + 1) \cdots (\alpha + m - 1)}$$

$$(31) \quad = \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1} \right) \left(1 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \cdots \left(1 + \frac{m}{\alpha - 1} \right)$$

e quindi

$$(32) \quad \frac{A_{(z)}^m}{A_{(z)}^{m-r}} = \left(1 + \frac{m-r+1}{\alpha-1} \right) \cdots \left(1 + \frac{m}{\alpha-1} \right).$$

Ne segue, se è $\alpha \geq 1$, per $m \leq n$,

$$\frac{A_{(z)}^{m-r}}{A_{(z)}^m} \leq \frac{A_{(z)}^n}{A_{(z)}^{n-r}}$$

e, per la (29),

$$(33) \quad \left| \frac{b_m}{b_n} \right| > K \frac{A_m^{(z)}}{A_n^{(z)}}.$$

Osserviamo ora che dalla condizione b) segue, per un dato m .

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n-m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-m}}{b_{n-m-1}} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = 1$$

perciò, siccome è

$$\frac{\Delta_{(z)}^{n-m}}{\Delta_{(z)}^n} \frac{b_n}{b_{n-m}} = \frac{b_n}{b_{n-m}},$$

posto $n - m = N$, per provare la 1), basterà dimostrare che si ha

$$(35) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{(z)}^N}{\Delta_{(z)}^0} \frac{b_N}{b_0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_N^0 \frac{b_N}{b_{N-m}} A_{(z)}^m = 0.$$

Ora è, per $m \geq 1$,

$$(36) \quad A_{(z)}^m = (-1)^m \binom{m}{\alpha} = \frac{m!}{[(m-1) \cdots (m-2) \cdots \alpha] \cdots [\alpha]}.$$

È poi $r - 1 < \alpha \leq r$, con r intero positivo; ne segue che per $0 \leq m \leq r$ i termini della successione $A_0^{(-\alpha)} = 1, A_1^{(-\alpha)}, \dots, A_m^{(-\alpha)}, \dots$ hanno segni alternati, mentre per $m > r$, $A_m^{(-\alpha)}$ ha lo stesso segno di $A_r^{(-\alpha)}$ (oppure è nullo se è $\alpha = r$).

Inoltre si ha (*)

$$(37) \quad \sum_0^\infty A_m^{(-\alpha)} = 0$$

e preso $\varepsilon > 0$ si può determinare $p > r$ in modo che per $N \geq p$ sia sempre

$$(38) \quad \left| \sum_p^N A_m^{(-\alpha)} \right| = \sum_p^N |A_m^{(-\alpha)}| < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$$

e quindi, per la (37)

$$(39) \quad \left| \sum_0^{p-1} A_m^{(-\alpha)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(K+1)}.$$

Ora si ha, per $N \geq p$,

$$\left| \sum_0^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| \leq \left| \sum_0^{p-1} \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| + \sum_p^N \left| \frac{b_{N-m}}{b_N} \right| |A_m^{(-\alpha)}|$$

e quindi, per la (33),

$$(40) \quad \sum_0^N \left| \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| < \left| \sum_0^{p-1} \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| + K \left| \sum_p^N \frac{A_{N-m}^{(\alpha)}}{A_N^{(\alpha)}} A_m^{(-\alpha)} \right|.$$

Siccome poi è

$$(41) \quad (1-w)^x \frac{1}{(1-w)^x} = \sum_0^\infty w^N \sum_0^N A_{N-m}^{(\alpha)} A_m^{(-\alpha)} \equiv 1,$$

si ricava, per $N \geq 1$,

$$(42) \quad \sum_0^N A_{N-m}^{(\alpha)} A_m^{(-\alpha)} = 0$$

(*) Osserviamo che, per $r - 1 < \alpha < r$, $m > r$, si ricava dalla formula di STIRLING

$$\begin{aligned} A_m^{(-\alpha)} &= \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+r-1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(r-\alpha)\Gamma(m+1)} \\ &= \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+r-1)}{\Gamma(r-\alpha)} \frac{(m-\alpha-1)^{m-\alpha-1+\frac{1}{2}} e^{-(m-\alpha-1)+\frac{\theta'}{12(m-\alpha-1)}}}{m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\frac{\theta''}{12m}}} \end{aligned}$$

con $0 < \theta' < 1, 0 < \theta'' < 1$.

Ne segue

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_m^{(-\alpha)}}{m^{-(\alpha+1)}} = \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+r-1)}{\Gamma(r-\alpha)}.$$

e quindi, per la (40),

$$(43) \quad \left| \sum_0^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| < \left| \sum_0^{p-1} \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| + \\ + K \left| \sum_0^{p-1} \frac{A_{N-m}^{(\alpha)}}{A_N^{(\alpha)}} A_m^{(-\alpha)} \right| \rightarrow (1+K) \left| \sum_0^{p-1} A_m^{(-\alpha)} \right|$$

in virtù della condizione b) e della (32).

Si può allora determinare $N_0 \geq p$ in modo che per $N > N_0$ sia, per la (39),

$$(44) \quad \left| \sum_0^N \frac{b_{N-m}}{b_N} A_m^{(-\alpha)} \right| < \varepsilon$$

e quindi il teorema è completamente provato.

Nel caso in cui sia $0 < \alpha < 1$ vale il seguente

TEOREMA V. — *Se la successione*

$$b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$$

soddisfa, per $0 < \alpha < 1$, alle condizioni a) e b) del teorema IV e inoltre alla condizione

$$c) \quad \left| \frac{b_m}{b_n} \right| < K_1 \frac{A_m^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}, \quad m \leq n,$$

se è $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = s$, finito, è anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s.$$

DIMOSTRAZIONE. — Basterà provare che, mediante le condizioni poste si ha

$$(45) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N^{(\alpha)}}{b_N} = 0$$

ciò che è immediata conseguenza della condizione c) e delle (40), (41), (42), (43), (44), nelle quali si ponga K_1 in luogo di K .

OSSERVAZIONE. — Dimostriamo che se la $g(w)$ soddisfa alla condizione (3) di GRONWALL, soddisfa anche alle condizioni a) e b), se è $\alpha \geq 1$; a), b), c) se è $0 < \alpha < 1$.

Infatti in un tal caso è $b_n = A_n^{(\alpha)} + \beta_n$ con $|\beta_n| < B\tau^n$, $B > 0$ e $0 < \tau < 1$, per l'analiticità di $\gamma(w)$ per $|w| \leq 1$.

Ne segue immediatamente che è soddisfatta la condizione b).

Quando alla c) osserviamo che è

$$(46) \quad \frac{A_n^{(\alpha)}}{A_m^{(\alpha)}} \left| \frac{b_m}{b_n} \right| = \frac{1 + \frac{\beta_m}{A_m^{(\alpha)}}}{1 + \frac{\beta_n}{A_n^{(\alpha)}}} \quad m \leq n$$

ed è $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\beta_m}{A_m^{(\alpha)}} = 0$. Perciò il numeratore è superiormente limitato; quanto al denominatore, ricordando che è $b_n \neq 0$, si può affermare che rimane superiore a un numero $\delta > 0$; la condizione c) è perciò verificata.

Considerando la condizione a) si ha, per la (25)

$$(47) \quad \begin{aligned} \sum_0^\infty \Delta_n^{(\alpha)} w^n &= 1 + (1 - w)^\alpha \gamma(w) \\ &= 1 + \sum_0^\infty w^n \sum_0^n \beta_{n-m} A_m^{(-\alpha)} \end{aligned}$$

e, per la convergenza assoluta degli sviluppi di $(1 - w)^\alpha$ e di $\gamma(w)$ per $w = 1$ ne segue la convergenza di $\sum_0^\infty |\Delta_n^{(\alpha)}|$; per un noto teorema la serie stessa sarà perciò sommabile (C, $\alpha - 1$) con $\alpha \geq 1$.

Dimostriamo che è anche sommabile (C, $\alpha - 1$) con $\alpha > 0$.

Per questo basterà [8] dimostrare che è $n |\Delta_n^{(\alpha)}| = O(1)$, cioè, per la (47),

$$(48) \quad n \left| \sum_0^n \beta_{n-m} A_m^{(-\alpha)} \right| < k,$$

dove k è una costante positiva.

Ora si ha, indicando con q il più piccolo intero $\geq \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} n \left| \sum_0^n \beta_{n-m} A_m^{(-\alpha)} \right| &\leq n B \sum_0^q \tau^{n-m} \left| A_m^{(-\alpha)} \right| + n B \sum_{q+1}^n \tau^{n-m} \left| A_m^{(-\alpha)} \right| \\ &\leq n B \tau^{n-q} \sum_0^\infty \left| A_m^{(-\alpha)} \right| + n B_1 n^{-(\alpha+1)} \sum_0^\infty \tau^m \rightarrow 0 \end{aligned}$$

dove B_1 è un numero positivo (*).

La (48) è perciò dimostrata.

Ritornando alla condizione a) osserviamo che deve essere

$$\frac{|b_n|}{\sum_0^n |\Delta_m^{(\alpha)}| A_{n-m}^{(\alpha)}} > M > 0$$

cioè

$$\frac{\left| 1 + \frac{\beta_n}{A_n^{(\alpha)}} \right|}{\sum_0^n |\Delta_m^{(\alpha)}| \frac{A_{n-m}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}} > M$$

(*) V. teorema IV, (*).

ciò che avviene certamente perchè il numeratore $\rightarrow 1$ (ed è $b_n \neq 0$) e il denominatore resta limitato essendo la serie $\sum_0^\infty |\Delta_m^{(z)}|$ sommabile $(C, \alpha - 1)$ con $\alpha > 0$.

3. Proprietà generali dei metodi (f, g) . — a) Tenendo conto dei teoremi IV e V si possono generalizzare i teoremi I, II, III.

Si ha così:

TEOREMA VI. — *Se il contorno l di D è una curva rettificabile e la $g(w)$ soddisfa alle condizioni del teorema V, la serie $\sum_0^\infty u_n$ è sommabile (f, g) e vale $\varphi(1)$, supposta la $\varphi(z)$ analitica nel campo \bar{D} .*

TEOREMA VII. — *Se il contorno l è rettificabile in un intorno di $z = 1$ e la $g(w)$ soddisfa alle condizioni*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 \qquad b_n \neq 0$$

$$|b_0| + \sum_1^\infty |b_m - b_{m-1}| < K |b_n|$$

la serie $\sum_0^\infty u_n$ è sommabile (f, g) e vale $\varphi(1)$, supposta la $\varphi(z)$ analitica nei punti di \bar{D} .

TEOREMA VIII. — *Se la $g(w)$ soddisfa alle condizioni del teorema IV per un valore $\alpha > 1$, la serie $\sum_0^\infty u_n$ è sommabile (f, g) e vale*

$$\varphi(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$$

quando la $\varphi(z)$ sia analitica in D , continua in \bar{D} , e $z \rightarrow 1$ restando in D .

b) Una notevole conseguenza del teorema VIII è il seguente

TEOREMA IX. — *Se il contorno l di D ha tutti i punti, eccetto $z = 1$, interni alla circonferenza $|z| = 1$, e inoltre il campo D è interno a un campo angolare T col vertice in $z = 1$, di ampiezza $< \pi$ e avente per bisettrice il segmento $l^{(1)}0$, è sommabile (f, g) ogni serie $\sum_0^\infty u_n$, la quale sia sommabile (C, δ) (con un valore $\delta > -1$), quando la $g(w)$ soddisfi alle condizioni del teorema IV per un valore $\alpha > 1$.*

DIMOSTRAZIONE. — Supposto che la serie $\sum_0^\infty u_n$ sia sommabile (C, δ) , con $\delta > -1$, e converga al valore s , sarà, per un noto teorema, $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z) = s$, quando $z \rightarrow 1$ in T e quindi, a maggior ragione, restando nel campo \bar{D} . Essendo poi tutti i punti di \bar{D} , escluso $z = 1$, interni alla circonferenza $|z| = 1$, si può affermare che la $\varphi(z)$ è continua in \bar{D} , analitica in D .

Applicando il teorema precedente si ricava allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = s.$$

OSSERVAZIONE. — A proposito del teorema IX bisogna notare che due metodi (f_1, g_1) e (f_2, g_2) , soddisfacenti entrambi alle condizioni in esso richieste con due valori $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$, possono attribuire valori diversi a una serie $\sum_0^\infty u_n$, la quale non sia sommabile (C, δ) per nessun $\delta > -1$.

Si ponga ad esempio $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{1}{2} 2^n$, sicchè sarà $\varphi(z) = \sqrt{\frac{1}{2} - z}$, e supponiamo che il campo D_1 relativo alla $f_1(z)$, pur soddisfacendo alle condizioni del teorema IX, non contenga il punto singolare $z = \frac{1}{2}$ ma sia tale che per $R(z) = \frac{1}{2}$ si abbia nei suoi punti $I(z) > 0$.

Ora quando $z \rightarrow 1$ in \bar{D}_1 la funzione $\sqrt{\frac{1}{2} - z}$, analitica nei punti di \bar{D}_1 , $\rightarrow \frac{-i}{\sqrt{2}}$; si ha perciò

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Se adesso supponiamo che il campo \bar{D}_2 , relativo a $f_2(z)$, sia costituito dai punti coniugati di quelli di \bar{D}_1 , quando $z \rightarrow 1$, restando in \bar{D}_2 , la funzione $\sqrt{\frac{1}{2} - z}$, analitica nei punti di \bar{D}_2 , $\rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}}$ e quindi si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

c) Nei teoremi VI, VII, VIII si pone in relazione l'analiticità di $\varphi(z)$ in D o in \bar{D} colla sommabilità (f, g) della serie $\sum_0^\infty u_n$, relazione che è ulteriormente precisata dal

TEOREMA X. — Se $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ esiste finito e la funzione $g(w)$ è analitica e $\neq 0$ per $|w| < 1$, la $\varphi(z)$ è analitica in tutti i punti del campo D .

DIMOSTRAZIONE. — Siccome esiste finito il $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$, esiste una costante positiva M per cui è

$$|U_n| \leq M$$

e quindi

$$(49) \quad |U_n b_n w^n| \leq M |b_n w^n|.$$

Siccome poi per $|w| < 1$ converge la serie

$$(50) \quad \sum_0^{\infty} |b_n w^n|$$

per la (49) sarà pure convergente la

$$\sum_0^{\infty} U_n b_n w^n$$

e rappresenterà una funzione analitica per $|w| < 1$.

Ne segue, ricordando che è $g(w) \neq 0$ per $|w| < 1$, l'analiticità nello stesso campo di

$$\frac{1}{g(w)} \sum_0^{\infty} U_n b_n w^n$$

cioè, per la (6), di

$$\varphi(f(w)) = \sum_0^{\infty} \gamma_m w^m$$

e quindi di $\varphi(z)$ in D , a causa della corrispondenza biunivoca e conforme tra il cerchio $|w| < 1$ e il campo D .

d) Sia σ una linea continua, aperta, avente un estremo in $z=1$. Diremo che la serie $\sum_0^{\infty} u_n$ è sommabile con un metodo di POISSON generalizzato (P, σ) , quando esiste finito il

$$\lim_{z \rightarrow 1} \varphi(z)$$

supposto che $z \rightarrow 1$ lungo σ ; come valore della serie si assumerà il limite stesso.

Ciò premesso, un'estensione del 1° teorema di GRONWALL è data dal seguente

TEOREMA XI. — *Se la $g(w)$ soddisfa alle condizioni del teorema X e per i coefficienti $b_n = \beta_n + i\delta_n$ del suo sviluppo si ha $\beta_n > 0$ per $n > n_0$ sufficientemente grande, $\sum_0^{\infty} \beta_n = +\infty$, $\sum_0^{\infty} |\delta_n| = k$, finito; e se la serie $\sum_0^{\infty} u_n$ è sommabile (f, g) , essa è anche sommabile (P, σ) , con lo stesso valore, quando come linea σ si prenda quella di equazione $z=f(w)$, con $0 \leq w \leq 1$.*

DIMOSTRAZIONE. — Posto $s = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$, pel teorema X la funzione $\varphi(z)$ è analitica in D . Col cambiamento di variabile $z=f(w)$, essa risulta analitica per $|w| < 1$ e si ha

$$\varphi(f(w)) = \frac{\sum_0^{\infty} U_n b_n w^n}{g(w)}$$

da cui

$$(51) \quad \varphi(f(w)) - s = \frac{\sum_0^{\infty} (U_n - s) b_n w^n}{g(w)}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per $n > n_1$ sarà $|U_n - s| < \frac{\varepsilon}{3}$; preso N maggiore del più grande tra i numeri n_0 e n_1 , siccome è $\lim_{w \rightarrow 1} \sum_N^{\infty} \beta_n w^n = +\infty$ quando $w \rightarrow 1$ assumendo valori reali, per $0 \leq w_0 \leq w < 1$ sarà $\sum_N^{\infty} \beta_n w^n > k + \sum_0^{N-1} |b_n|$ e si avrà

$$(52) \quad |\varphi(f(w)) - s| \leq \frac{\sum_0^{N-1} |(U_n - s) b_n| + \frac{\varepsilon}{3} k + \frac{\varepsilon}{3} \sum_N^{\infty} \beta_n w^n}{\sum_N^{\infty} \beta_n w^n - (k + \sum_0^{N-1} |b_n|)}.$$

Posto $A = \sum_0^{N-1} |(U_n - s) b_n| + \frac{\varepsilon}{3} k$, $B = k + \sum_0^{N-1} |b_n|$, sarà allora

$$|\varphi(f(w)) - s| \leq \frac{A}{\sum_N^{\infty} \beta_n w^n - B} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{1 - \frac{B}{\sum_N^{\infty} \beta_n w^n}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

quando sia $w_0 \leq w_1 \leq w < 1$.

Ricordando che la funzione $z = f(w)$ è continua per $|w| \leq 1$, e quindi per $w_1 \leq w \leq 1$, ne segue la tesi.

Da questo teorema si ricava che, nelle ipotesi fatte, il metodo di sommazione (f, g) non è più potente del metodo di POISSON generalizzato.

Inoltre se una serie è sommabile coi metodi (f, g_1) e (f, g_2) i valori che si ottengono sono eguali, mentre, come risulta dall'osservazione che segue al teorema IX, non sono eguali in generale i valori ottenuti con due metodi (f_1, g_1) , (f_2, g_2) .

Bisogna però ora osservare che nella grande maggioranza dei metodi di sommazione usati in pratica (ad esempio in quelli ricordati nell'introduzione) i coefficienti dello sviluppo di $z = f(w)$ (e così pure i b_n), sono reali e quindi la linea σ è costituita dal segmento $0 \leq w < 1$.

Ne segue che, se si fa una tale ipotesi su $f_1(w)$ e $f_2(w)$, supposta la serie $\sum_0^{\infty} u_n$ sommabile (f_1, g_1) e (f_2, g_2) , i valori che si ottengono sono eguali, quando naturalmente $g_1(w)$ e $g_2(w)$ soddisfino alle condizioni del teorema XI.

Ora queste, per quel che riguarda i b_n , sono certo verificate se i b_n

sono reali e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 \quad |b_n| > HA_n^{(\alpha)} \quad \alpha > 0$$

dove H è una costante positiva, cioè quando abbiano luogo le b) e (33) del teorema IV o le b) e c) del teorema V.

Infatti in tal caso per $n > n_0$ sufficientemente grande i b_n avranno tutti lo stesso segno, per esempio positivo (se fosse $b_n < 0$, basterebbe cambiar segno alle $g(w)$, il che non altera il valore di U_n); sarà allora per $n > n_0$,

$$b_n > HA_n^{(\alpha)}$$

e la serie $\sum_0^\infty b_n$ divergerà a $+\infty$.

4. I metodi (f, g) e il prolungamento analitico di una serie di potenze.

— Nel trattare l'applicazione dei metodi (f, g) al prolungamento analitico di una serie di potenze faremo l'ipotesi che le funzioni $f(w)$ e $g(w)$ soddisfino rispettivamente alle condizioni del teorema I (contorno l rettificabile) e dei teoremi V e X. Si supporrà inoltre che tutti i punti della linea l escluso $z=1$ siano interni alla circonferenza $|z|=1$.

Si abbia ora la serie di potenze

$$F(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

e si dia a z un valore $\xi \neq 0$. Indicando con ξD e $\xi \bar{D}$ i campi che si ottengono da D e C moltiplicandone i punti per ξ , possiamo dimostrare il

TEOREMA XII. — *Se la funzione $F(z)$ è analitica in $\xi \bar{D}$ la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ è sommabile (f, g) e vale $F(\xi)$.*

Se in ξD esiste qualche singolarità della $F(z)$ la serie stessa non è sommabile (f, g).

DIMOSTRAZIONE. Se $F(z)$ è analitica in $\xi \bar{D}$, posto $u_\nu = a_\nu \xi^\nu$, la funzione $\varphi(z) = \sum_0^\infty u_\nu z^\nu$ è analitica in \bar{D} e pel teorema VI la serie $\sum_0^\infty u_\nu$ è sommabile (f, g) e vale $\varphi(1) = F(\xi)$.

Se in ξD esiste qualche singolarità della $F(z)$, in D esisterà qualche singolarità della $\varphi(z)$ e, pel teorema X, la serie $\sum_0^\infty u_\nu$ non sarà sommabile (f, g).

Supponiamo ora che la $F(z)$ abbia una sola singolarità al finito nel punto $z = \xi_0$.

Indicata con l^{-1} la linea di equazione

$$z = \frac{1}{f(e^{i\vartheta})} \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

dimostriamo che la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ è sommabile (f, g) , e vale $F(\xi)$, per ξ appartenente al campo aperto A_0 , avente per contorno la linea $\xi_0 l^{-1}$, mentre non è sommabile (f, g) se ξ è esterno ad A_0 .

Infatti, pel teorema X, la sommabilità si ha nei punti ξ per cui è $\xi f(w) \neq \xi_0$ per ogni valore w con $|w| \leq 1$, cioè $\xi \neq \frac{\xi_0}{f(w)}$ e quindi appartenente ad A_0 ; la sommabilità viene a mancare nei punti ξ per cui esista un w_1 , con $|w_1| < 1$, tale che si abbia $\xi f(w_1) = \xi_0$, cioè per ξ esterno ad A_0 .

Nel caso in cui la funzione $F(z)$ abbia più di un punto singolare, ma sia uniforme, si indichi con ξ_i un generico punto singolare e con A_i il campo aperto costituito dai punti interni alla linea $\xi_i l^{-1}$ e con Ω l'insieme costituito dai punti comuni a tutti gli A_i .

Si dimostra [9] che Ω è un campo aperto semplicemente connesso.

Se ξ è in Ω , nessun punto singolare ξ_i della $F(z)$ cadrà nel campo $\xi \bar{D}$ e la serie $\sum_0^\infty a_\nu \xi^\nu$ sarà sommabile (f, g) e varrà $F(\xi)$; se ξ è esterno a Ω almeno un punto singolare ξ_i della $F(z)$ cadrà in ξD e verrà a mancare la sommabilità (f, g) della serie stessa.

Inoltre, per l'ipotesi fatta sulla linea l , ad Ω appartengono i punti di analiticità della $F(z)$ non esterni alla circonferenza di convergenza della serie $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$.

Nel caso in cui la $F(z)$ (considerata come complesso di tutti i suoi elementi) non sia uniforme potranno esistere dei suoi punti singolari $\bar{\xi}_p$ che cadano internamente alla circonferenza di convergenza, di raggio R , della serie $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$.

A questi punti si giunge però eseguendo il prolungamento analitico lungo linee $\bar{\sigma}_p$ che partano da $z=0$ e avvolgano dei punti singolari non interni alla circonferenza stessa.

Sia ξ_i un punto singolare della $F(z)$, soddisfacente alla condizione $|\xi_i| \geq R$ e Ω' il campo aperto, semplicemente connesso, costituito dai punti comuni a tutti gli A_i relativi ai punti ξ_i .

Il campo Ω' contiene manifestamente i punti $\bar{\xi}_p$, però siccome non si può tracciare nessuna linea $\bar{\sigma}_p$ che non sia parzialmente esterna a Ω' , gli $\bar{\xi}_p$ non

sono da considerare come punti singolari e in Ω' la $F(z)$ risulta analitica e uniforme.

Se allora ξ appartiene a Ω' , siccome nel campo $\xi\bar{D}$ non può cadere nessun punto ξ_i , ne segue la sommabilità (f, g) di $\sum_0^\infty a_n \xi^n$ che varrà $F(\xi)$.

Un altro campo Ω'' in cui è sicuramente possibile la sommabilità (f, g) della serie data, è stato indicato dal BIRINDELLI [10].

Precisamente si ha che, se l'elemento di funzione analitica si può prolungare analiticamente in un campo semplicemente connesso Σ , dando luogo a un ramo monodromo $F(\xi)$, la serie data sarà sommabile (f, g) verso la somma $F(\xi)$ per ξ interno all'insieme SA_0 , dove S è l'insieme complementare di Σ , rispetto al piano z .

Nel caso in cui Σ è la stella rettilinea, S è costituito dai punti $\tau\xi_i$, dove i punti ξ_i sono certi punti singolari del ramo (quelli che si incontrano nel prolungamento analitico della $F(z)$ lungo semirette spiccate da $z=0$), ed è $\tau \geq 1$. La sommabilità sarà allora possibile per ξ interno a tutti i campi $\xi_i A_0$ e ai loro omotetici rispetto all'origine con rapporto $\tau > 1$.

È chiaro che il ragionamento del BIRINDELLI equivale al considerare come punti singolari tutti i punti di S .

Se Ω è il campo aperto, costituito dai punti appartenenti a uno almeno dei campi Ω' e Ω'' , possiamo affermare che, per ξ in Ω , la serie $\sum_0^\infty a_n \xi^n$ è sommabile (f, g) e vale $F(\xi)$.

Supponiamo ora che il campo D sia interno ai suoi omotetici rispetto all'origine, con rapporto $\tau > 1$. In tal caso, assumendo come campo Σ la stella rettilinea, Ω'' sarà costituito dalla parte comune a tutti i campi $\xi_i A_0$; inoltre conterrà Ω' e quindi coinciderà con Ω .

Se allora ξ appartiene a Ω , la serie $\sum_0^\infty a_n \xi^n$ è sommabile (f, g) e vale $F(\xi)$; se invece ξ è esterno a Ω , cade entro ξD almeno uno dei punti ξ_i e il raggio vettore che lo congiunge a $z=0$: ne segue, pel teorema XII, che la serie data non è sommabile (f, g) .

BIBLIOGRAFIA

1. T. H. GRONWALL, *Summation of series and conformal mapping*, « Annals of Mathematics », Second series, Vol. 33, 1932.
2. L. AMERIO, *Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla teoria della trasformazione di Laplace*, « Ann. Sc. N. di Pisa », Serie II, 1939.
3. C. BIRINDELLI, *Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », Tomo LXI, 1938, p. 157, 176.

4. C. CARATHEODORY, *Conformal representation*, « Cambridge Tracts », 1932, p. 86.
 5. E. KOGBETLIANZ, *Summation des series et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques*, « Mem. des Sc. Math. », p. 66, Paris, Gauthier-Villars, 1931.
 6. G. H. HARDY, *On the summability of Fourier's series*, « London Math. Soc. Proc. », Vol. 12, 1913, p. 365, 372.
 7. O. TOEPLITZ, *Ueber allgemeine lineare Mittelbildungen*, « Prace mat.-fiz. », Vol. 22, 1913, p. 113, 119.
 8. G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD, *Contributions to the arithmetic theory of series*, « London Math. Soc. Proc. », Vol. 11, 1911, p. 462, 463.
 9. C. BIRINDELLI, *Sull'applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico*, « Ann. Sc. N. di Pisa », Serie II, Vol. VI, 1937, p. 182.
 10. C. BIRINDELLI, v. 3, p. 170, 171.
-

Lie Derivation in Generalized Metric Spaces.

E. T. DAVIES (London).

The remark is made by DELENS (6) (1) that the theory of generalized metric spaces, developed mainly by FINSLER (hence called FINSLER spaces) (9), SYNGE (11), TAYLOR (13), and BERWALD (1), may be said to have reached a final form with the publication of CARTAN'S tract (4) on the subject. The parallel transport of vectors as introduced by BERWALD does not possess the property of preserving the lengths of the transported vectors. CARTAN imposes the *a priori* condition that this property must be a feature of his parallel transport, thus imposing a first set of conditions upon his otherwise arbitrary two sets of functions Γ_{jk}^i and C_{jk}^i defining absolute derivation. Again the restriction imposed in the Geometry of BERWALD, of having the parallel transport defined only in the case in which the « element of support » [*element d'appui* (CARTAN), *ausgezeichnetes Linienelement* (BERWALD)], is transported parallelly to itself does not appear in the Geometry of CARTAN. HOWEVER, the imposition of the condition of symmetry with respect to the lower indices of the set of functions $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ which enter into the expression of the absolute derivative of a vector when its element of support is transported parallelly to itself constitutes one of the five (2) conventions which are necessary in order to determine the Euclidean connection of the space.

An essential point in which the geometries of CARTAN and BERWALD coincide, however, is that in both cases, when the element of support is taken to be the tangential element to an extremal curve, the absolute derivation of the unit tangent vector vanishes. This is implied in the remark made by CARTAN (p. 19) that in the two geometries, the parallel transport of the element of support (x, x') obeys the same laws. Consequently the extension of Levi-Civita's work on geodesic deviation which have been carried out by BERWALD (2), DUSCHEK-MAYER (8), and KNEBELMAN (10), are valid for the

(1) These numbers refer to the Bibliography at the end of the paper.

(2) Cartan has stated in a lecture that the number can be reduced to four (see Cartan).

geometry of CARTAN. The same applies to the extension of the parallelogram-moid of LEVI-CIVITA which has been given by BERWALD.

As a consequence of the removal by CARTAN of the restriction with regard to the parallel transport of the line element itself, there are, in his case, three types of curvature tensors. One of these tensors, the R_{jkl}^i corresponds to the K_{jkl}^i tensor of BERWALD, and is obtained by transporting a vector round an infinitesimal circuit, with the element of support transported parallelly to itself. This tensor of Cartan's may be expressed fairly simply in terms of the corresponding one of Berwald's geometry.

In the first part of this paper we give some formulae which have already been given by BERWALD, in the slightly modified form which they take in the CARTAN Geometry. SINCE, with the publication of Cartan's tract, the theory of generalized metric space attains the degree of completeness (in essentials) possessed by the restricted metric spaces of RIEMANN, we may now consider the extension to the more general case of certain useful notions and operators from the RIEMANN Geometry. Accordingly in the second part of the paper we extend the operators which have been already used by SCHOUTEN in his treatment of deformation problems. The notation, except when slight modifications have been necessary for the particular purpose in view, is that of CARTAN.

1. Let us consider a contravariant vector $X^i(x, x')$ homogeneous of degree zero in the x'^j . Its covariant derivative as defined by CARTAN is

$$(1) \quad X^i{}_{|h} = \frac{\partial X^i}{\partial x^h} - \frac{\partial X^i}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} + \Gamma_{jh}^i X^j.$$

Since the G^i occurring in Cartan's work correspond to the $\frac{1}{2} \varphi^i$ occurring in BERWALD, and consequently the

$$G_{jh}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial x'^j \partial x'^h} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x'^j \partial x'^h}$$

we can write the corresponding BERWALD derivative as

$$(2) \quad X^i{}_{|h} = \frac{\partial X^i}{\partial x^h} - \frac{\partial X^i}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} + G_{jh}^i X^j$$

so that (CARTAN, eq. XV, XVII).

$$(3) \quad X^i{}_{|h} = X^i{}_{|h} - A_{mh}^i X^m = X^i{}_{|h} - F_{0mh}^i X^m.$$

Before proceeding to the consideration of the second covariant derivative, we first express the K^i_{jkh} of BERWALD in the notation of CARTAN. We have first of all that (CARTAN, eq. (12)).

$$x'^i \overset{*}{\Gamma}^j_{ih} = x'^i \Gamma^j_{ih} - x'^i C^j_{ir} x'^r \Gamma^r_{kh}$$

and since, by convention D , the $x'^i C^i_{ir} = 0$, we have (CARTAN, eqn. X).

$$(4) \quad x'^i \overset{*}{\Gamma}^j_{ih} = x'^i \Gamma^j_{ih} = x'^i G^j_{ih} = \frac{\partial G^j}{\partial x'^h}.$$

We can therefore write

$$K^j_{ikh} = \left(\frac{\partial G^j_{ik}}{\partial x'^h} - \frac{\partial G^j_{ik}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} \right) - \left(\frac{\partial G^j_{ih}}{\partial x'^k} - \frac{\partial G^j_{ih}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} \right) + G^j_{mh} G^m_{ik} - G^j_{mk} G^m_{ih}.$$

With this notation, we have

$$(5) \quad X^i{}_{|hk} - X^i{}_{|kh} = K^i{}_{mkh} X^m - \frac{\partial X^i}{\partial x'^m} K^m{}_{nhk} x'^n$$

and correspondingly for the CARTAN covariant derivatives

$$(6) \quad X^i{}_{|hk} - X^i{}_{|kh} = \overset{*}{R}{}^i{}_{mhh} - X^i{}_{|jm} R^m{}_{0hk}$$

where

$$\overset{*}{R}{}^i{}_{jkh} = \left(\frac{\partial \overset{*}{\Gamma}^i{}_{jk}}{\partial x'^h} - \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}^i{}_{jk}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} \right) - \left(\frac{\partial \overset{*}{\Gamma}^i{}_{jh}}{\partial x'^k} - \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}^i{}_{jh}}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} \right) + \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{mh} \overset{*}{\Gamma}{}^m{}_{jk} - \overset{*}{\Gamma}{}^i{}_{mk} \overset{*}{\Gamma}{}^m{}_{jh}$$

so that (CARTAN, eq. XIX')

$$(7) \quad R^i{}_{jkh} = \overset{*}{R}{}^i{}_{jkh} + A^i{}_{jm} R^m{}_{0kh}.$$

From this equation and the identity XXII of CARTAN, we may easily deduce the cyclic symmetry of this tensor $\overset{*}{R}{}^i{}_{jkh}$ with respect to its lower indices. For, using Cartan's remark (p. 36) that the tensor R_{ijkh} is skew-symmetric in its first two indices, the identity XXII may also be written in the form

$$R_{hikl} + R_{kilh} + R_{linh} - A_{ihm} R^m{}_{0kl} - A_{ikm} R^m{}_{0lh} - A_{ilm} R^m{}_{0hk} = 0.$$

On using the symmetry of the A_{ihm} in its three indices, raising the index i ,

and using (7), we deduce immediately

$$\overset{*}{R}_{hkl}^i + \overset{*}{R}_{kth}^i + \overset{*}{R}_{lhk}^i = 0.$$

In view of the similarity in the construction of $\overset{*}{R}_{jkh}^i$ and K_{jkh}^i from $\overset{*}{\Gamma}_{jk}^i$ and G_{jk}^i respectively, one would expect a fairly simple relation to hold between them. In fact, on using

$$G_{jk}^i = \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i + P_{0jk}^i$$

we get

$$\overset{*}{R}_{jkh}^i = \overset{*}{K}_{jkh}^i - 2P_{0j[kih]}^i + 2P_{0m[h}^i P_{0j]k}^m$$

and consequently

$$(8) \quad R_{jkh}^i = K_{jkh}^i + A_{jm}^i R_{0kh}^m - 2P_{0j[kih]}^i + 2P_{0m[h}^i P_{0j]k}^m.$$

On contracting this equation with l^j , and remarking that $P_{ooj}^i = 0$, we shall have

$$R_{0kh}^i = K_{0kh}^i$$

so that the tensor of components $\mathcal{L}R_{0kh}^i$ coincides with the fundamental tensor of curvature (*Grundtensor der Krümmung*) of BERWALD, the vanishing of which characterizes absolute parallelism of the elements of support. This coincidence is also evident from the expression for $\mathcal{L}R_{0kh}^i$ given by CARTAN. But it is a well-known feature of the BERWALD Geometry that the components of the four-index Curvature tensor are the derivatives of the components of the fundamental tensor of Curvature with respect to x^j , i. e.

$$(9) \quad K_{jkh}^i = \frac{\partial}{\partial x^j} (\mathcal{L}R_{0kh}^i)$$

and (8) may therefore be written

$$(10) \quad R_{jkh}^i = \frac{\partial}{\partial x^j} (\mathcal{L}R_{0kh}^i) + A_{jm}^i R_{0kh}^m - 2P_{0j[kih]}^i + 2P_{0m[h}^i P_{0j]k}^m$$

so that we may regard (10) as expressing the R tensor in terms of the corresponding fundamental tensor and of the torsion tensor and their derivatives.

The equation (5) and (6) may now be re-written in the forms

$$(11) \quad X^i{}_{|hk} - X^i{}_{|kh} = K_{mkh}^i X^m - X^i{}_{|m} R_{0hk}^m$$

and

$$(12) \quad X^i{}_{|hk} - X^i{}_{|kh} = R_{mhk}^i X^m - R_{0hk}^m (X^i{}_{|m} + A_{jm}^i X^j)$$

where we notice that the expression $X^i{}_{|h} + A^i{}_{mh}X^m$ in the coefficient of ω^h (CARTAN, p. 14) in the expression for the absolute derivative of X^i , and, in order to shorten some of the expressions coming later, we write

$$(13) \quad \begin{cases} X^i{}_{||\omega^h} = X^i{}_{|h} + A^i{}_{mh}X^m \\ X^i{}_{|\omega^h} = \frac{\partial X^i}{\partial x^h} \end{cases}$$

with obvious extensions to tensors in general. With this notation, therefore, we should have

$$DX^i = X^i{}_{||\omega^h\omega^h} + X^i{}_{|h}dx^h.$$

The formula given by BERWALD (1, p. 53) for the interchange of the order of covariant derivation and partial derivation with respect to x^i becomes modified in this case to

$$(14) \quad X^i{}_{|h|\omega^k} - X^i{}_{|\omega^k|h} = \frac{\partial X^i}{\partial x^m} P^m{}_{0kh} + \frac{\partial \Gamma^i{}_{mh}}{\partial x^k} X^m.$$

For a general tensor $X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ the equation (12) and (14) become

$$(12') \quad \begin{aligned} X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | hk} - X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | kh} &= \sum_{p=1}^r X^{i_1 \dots i_{p-1} m i_{p+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} R^i{}_{mhk} \\ &- \sum_{p=1}^s X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{p-1} m j_{p+1} \dots j_s} R^m{}_{j_p hk} + R^m{}_{0hk} X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s || \omega^m} \end{aligned}$$

$$(14') \quad \begin{aligned} X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | h |\omega^k} - X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | \omega^k | h} &= X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s | \omega^m} P^m{}_{0kh} \\ &+ \sum_{p=1}^r \frac{\partial \Gamma^i{}_{mh}}{\partial x^k} X^{i_1 \dots i_{p-1} m i_{p+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \sum_{p=1}^s \frac{\partial \Gamma^m{}_{j_p h}}{\partial x^k} X^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{p-1} m j_{p+1} \dots j_s}. \end{aligned}$$

2. Let us now consider an infinitesimal transformation of the form

$$(15) \quad \bar{x}^i = x^i + v^i(x)dt$$

where $v^i(x)$ is a vector field defined over the region of the space considered, and where dt is to be treated as an infinitesimal constant. The points of the space therefore undergo a small displacement of amount $dx^i = v^i(x)dt$ and the parameters x^i ($= \frac{dx^i}{d\tau}$) of direction of the element of support have the corresponding increment

$$dx^i = v^i(x)dt = \frac{dv^i}{d\tau} dt.$$

The value taken on by the vector field $X^i(x, x')$ at the new element $(x + dx, x' + dx')$ will be given to first order by

$$(16) \quad X^i(\bar{x}, \bar{x}') = X^i(x, x') + \frac{\partial X^i}{\partial x^h} dx^h + \frac{\partial X^i}{\partial x'^h} dx'^h.$$

Using the fact that

$$\begin{aligned} dx'^h &= \varrho \omega^h + x'^h \frac{d\varrho}{\varrho} - x'^h \Gamma_{km}^h dx^m \\ &= \varrho \omega^h + x'^h \frac{d\varrho}{\varrho} - \frac{\partial G^h}{\partial x'^m} dx^m \end{aligned}$$

and taking account of the homogeneity of degree zero of the $X^i(x, x')$, we can write

$$(17) \quad X^i(\bar{x}, \bar{x}') = X^i(x, x') + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^h} - \frac{\partial X^i}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} \right) dx^h + \omega^h X^i|_h.$$

Taking the particular values of dx^h and of dx'^h in this case, and using Schouten's notation $\overset{\cdot}{d}X^i$ for the difference $X^i(\bar{x}, \bar{x}') - X^i(x, x')$ we can write

$$(18) \quad \overset{\cdot}{d}X^i = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^h} - \frac{\partial X^i}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} \right) v^h dt + X^i|_{\parallel h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds} dt$$

where

$$\frac{\overset{*}{D}v^h}{ds} = \frac{dv^h}{ds} + \Gamma_{jk}^* v^j \frac{dx^k}{ds} = \frac{1}{\varrho} \frac{\overset{*}{D}v^h}{d\tau}$$

so that the last term on the right hand side of (18) may also be written

$$X^j|_{x^h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{d\tau}.$$

If we now denote by $X(x, x' \| \bar{x}, \bar{x}')$ the vector transported by parallelism from the element (x, x') to (\bar{x}, \bar{x}') then since

$$DX^i = dX^i + \overset{*}{\Gamma}_{jh}^i X^j dx^h + A_{jh}^i X^j \omega^h = 0$$

we can write

$$(19) \quad \overset{\cdot}{d}X^i = X^i(x, x' \| \bar{x}, \bar{x}') - X^i(x, x') = - \overset{*}{\Gamma}_{jh}^i X^j v^h dt - A_{jh}^i X^j \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds} dt.$$

If, finally, we denote by $\bar{X}^i(\bar{x}, \bar{x}')$ the transform of the vector field X^i by

the infinitesimal transformation (15), we shall have

$$(20) \quad \bar{X}^i(\bar{x}, \bar{x}') = X^h \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h} = X^i + X^h \frac{\partial v^i}{\partial x^h} dt.$$

We shall call $X^i(\bar{x}, \bar{x}')$ the vector X^i « displaced » (*mitgeschleppt*) from (x, x') to (\bar{x}, \bar{x}') , and we write

$$(21) \quad \overset{3}{d}X^i = \bar{X}^i(\bar{x}, \bar{x}') - X^i(x, x') = X^h \frac{\partial v^i}{\partial x^h} dt.$$

Defining then

$$D = \frac{\overset{r}{d} - \overset{s}{d}}{dt}; \quad r, s = 1, 2, 3; \quad r \neq s$$

we shall have three invariant derivatives

$$(22) \quad \overset{(1,2)}{D} X^i = v^h X^i{}_{|h} + X^i{}_{||h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds}$$

$$(23) \quad \overset{(1,3)}{D} X^i = v^h X^i{}_{|h} - X^h v^i{}_{|h} + X^i{}_{||h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds}$$

$$(24) \quad \overset{(2,3)}{D} X^i = -X^h \left(v^i{}_{|h} + A^i{}_{hk} \frac{\overset{*}{D}v^k}{ds} \right)$$

which are the generalizations to FINSLER space of the covariant, the Lie, and the « apparent » (*scheinbare*) derivatives of SCHOUTEN and van KAMPEN (11) in ordinary Riemannian space.

For a general tensor $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ the $\overset{(1,3)}{D}$ and $\overset{(2,3)}{D}$ respectively become

$$(25) \quad \begin{aligned} \overset{(1,3)}{D} X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= v^h X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}{}_{|h} + \sum_{p=1}^s X_{j_1 \dots j_{p-1} m j_{p+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} v^m | j_p \\ &- \sum_{p=1}^r X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} m i_{p+1} \dots i_r} v^i{}_{p|m} + X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}{}_{||h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds} \end{aligned}$$

$$(26) \quad \begin{aligned} \overset{(2,3)}{D} X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \sum_{p=1}^s X_{j_1 \dots j_{p-1} m j_{p+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \left(v^m | j_p + A_{j_p}^m \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds} \right) \\ &- \sum_{p=1}^r X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{p-1} m i_{p+1} \dots i_r} \left(v^i{}_{p|m} + A_{mh}^i \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds} \right). \end{aligned}$$

Since the field values and the displaced values exist also for geometric objects whose laws of transformation do not happen to be the tensor laws, we may

apply the Lie derivation, which does not involve any law of connection in the space, to such quantities as the Γ_{ik}^* with the law of transformations

$$(2) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^* = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma} + \Gamma_{jk}^* \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \right)$$

In fact

$$d\Gamma_{jk}^* = \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x^h} v^h + \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} v'^h \right) dt$$

and re-writing the last term on the right-hand side in the form

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} v'^h = \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} \frac{Dv^h}{d\tau} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} v^h$$

we have

$$d\Gamma_{jk}^* = \left[v^h \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} \right) + \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} \frac{Dv^h}{d\tau} \right] dt.$$

Similarly

$$d\Gamma_{jk}^{*i} = \left[-\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jh}^* \partial_k v^h - \Gamma_{jh}^* \partial_i v^h + \Gamma_{jk}^* \partial_h v^i \right] dt$$

and consequently

$$(28) \quad \begin{aligned} D\Gamma_{jk}^{*i} &= \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jh}^* \partial_k v^h + \Gamma_{hk}^* \partial_j v^h - \Gamma_{jk}^* \partial_h v^i + \\ &+ \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^h} \right) v^h + \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} \frac{Dv^h}{d\tau}. \end{aligned}$$

On using

$$(29) \quad \begin{aligned} v^i{}_{|jk} &= \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{hj}^*}{\partial x^k} v^h - \frac{\partial \Gamma_{hj}^*}{\partial x'^m} \frac{\partial G^m}{\partial x'^k} v^h + \Gamma_{hj}^* \partial_k v^h + \\ &+ \Gamma_{hk}^* \partial_j v^h - \Gamma_{jk}^* \partial_h v^i + \Gamma_{mk}^* \Gamma_{hj}^* v^h - \Gamma_{hm}^* \Gamma_{jk}^* v^h \end{aligned}$$

we immediately obtain

$$(30) \quad D\Gamma_{jk}^{*i} = v^i{}_{|jk} + R_{jkh}^* v^h + \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} \frac{Dv^h}{d\tau}$$

where the last term may also be written $\mathcal{L} \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h} \frac{Dv^h}{ds}$. The tensorial character

of the $\mathcal{L} \frac{\partial \Gamma_{jk}^*}{\partial x'^h}$ is pointed out by CARTAN (p. 35) and hence the Lie derivative

of the Γ_{jk}^* is a tensor although the Γ_{jk}^* itself is not. When the coefficients of connection are functions of position only, the last term on the right hand

side of (30) vanishes, and we obtain the corresponding expression for the Lie derivation of the connection parameters in ordinary affinity-related spaces (see 7, p. 114).

We next consider the effect of interchanging the order of the two operations $\overset{(1,3)}{D}$ and the covariant derivative as defined by CARTAN. We have in fact

$$(31) \quad \overset{(1,3)}{D}(X^i{}_{|j}) - (\overset{(1,3)}{D}X^i)_{|j} = v^h(X^i{}_{|jh} - X^i{}_{|hj}) + \\ + X^h v^i{}_{|hj} + (X^i{}_{|jw^h} - X^i{}_{|w^hj}) \frac{\overset{*}{D}v^h}{d\tau} - X^i{}_{|w^h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{d\tau}{}_{|j}.$$

On using (12) and (14), and afterwards taking account of the expression just given for the Lie derivative of the $\overset{*}{\Gamma}^i{}_{jk}$ we can obtain

$$(32) \quad \overset{(1,3)}{D}(X^i{}_{|j}) - (\overset{(1,3)}{D}X^i)_{|j} = X^h \overset{(1,3)}{D} \overset{*}{\Gamma}^i{}_{jk} - \\ - X^i{}_{|w^h} \left[v^m R_0{}^h{}_{jm} - P_0{}^h{}_{mj} \frac{\overset{*}{D}v^m}{d\tau} + \frac{\overset{*}{D}v^h}{d\tau}{}_{|j} \right],$$

the right-hand side of which retains only the first term when the X^i is a function of position only (see 7, p. 118).

The corresponding result for the interchange of $\overset{(2,3)}{D}$ and covariant derivation is

$$(33) \quad \overset{(2,3)}{D}(X^i{}_{|j}) - (\overset{(2,3)}{D}X^i)_{|j} = X^h v^i{}_{|hj} + X^i{}_{|h} v^h{}_{|j} + \\ + A_j{}^h{}_{|k} X^i{}_{|h} \frac{\overset{*}{D}v^k}{ds} + A^i{}_{hk|j} X^h \frac{\overset{*}{D}v^k}{ds} + A^i{}_{hk} \frac{\overset{*}{D}v^k}{ds}{}_{|j}.$$

3. Applying the general expression for the Lie derivative of a tensor to the fundamental metric coefficient $g_{ij}(x, x')$, we have

$$(34) \quad \overset{(1,3)}{D}g_{ij} = v^h g_{ij|_h} + g_{im} v^m{}_{|j} + g_{mj} v^m{}_{|i} + g_{ij|_h} \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds}.$$

On using $g_{ij|_h} = 0$ and hence the fact that the order of covariant derivation and the raising and lowering of suffixes may be interchanged, we shall have, on remarking further that $g_{ij;h} = 2A_{ijh}$ in place of (34), the following simpler equation

$$(35) \quad \overset{(1,3)}{D}g_{ij} = v_{i|j} + v_{j|i} + 2A_{ijh} \frac{\overset{*}{D}v^h}{ds}.$$

The equations

$$(36) \quad \overset{(1,3)}{D}g_{ij} = 0$$

are therefore the generalizations to FINSLER spaces of the well-known equation of Killing giving the necessary and sufficient conditions for a motion in Riemannian spaces. The conditions of integrability of these equations in generalized metric spaces have been investigated by KNEBELMAN (10).

If we consider the effect of the displacement $v^i(x)dt$ upon the element of arc of a curve $x^i = x^i(\tau)$ in FINSLER space, the tangential element being taken as the element of support, we have, on reconstructing $\frac{ds}{d\tau}$ at the point $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)dt$

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right)^2 = g_{ij}(\bar{x}, \bar{x}') \frac{d\bar{x}^i}{d\tau} \frac{d\bar{x}^j}{d\tau}$$

and on quoting

$$g_{ij}(\bar{x}, \bar{x}') = g_{ij}(x, x') + \overset{4}{d}g_{ij} \\ \frac{d\bar{x}^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau} + \frac{dv^i}{d\tau} dt$$

and retaining terms of the first order only in dt , the following equation results:

$$(37) \quad \left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 + \overset{(1,3)}{D}g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} dt.$$

If we now make use of the convention D of CARTAN, that ${}^l A_{ijh} = 0$, the equation (37) becomes

$$(38) \quad \left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 + (v_{i;j} + v_{j;i}) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} dt$$

which may be further modified to

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \left[1 + 2l_i \overset{*}{D} \frac{v^i}{ds} dt \right]$$

so that

$$(39) \quad \frac{d\bar{s}}{d\tau} = 1 + l_i \overset{*}{D} \frac{v^i}{ds} dt$$

$$(39') \quad \frac{ds}{d\bar{s}} = 1 - l_i \overset{*}{D} \frac{v^i}{ds} dt.$$

These correspond to the result given by DUSCHEK-MAYER (8, eqn. 23) in the form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{d\tau} \right) = \Phi \frac{ds}{dt}$$

with $\Phi = l_i \frac{\overset{*}{D}v^i}{ds}$ measuring the « dilatation ». This quantity Φ will vanish if the conditions given by SYNGE (13) in the Riemannian case are satisfied. The conditions are

(i) that $\frac{\overset{*}{D}v^i}{ds} = 0$ along C , i.e. that the variation vector is propagated parallelly along C .

(ii) that $\frac{\overset{*}{D}v^i}{ds}$ is normal to C at every point of the curve.

On writing Φ in the form

$$l_i \frac{\overset{*}{D}v^i}{ds} = \frac{d}{ds} (l_i v^i) - g_{ij} \rho^i v^j$$

where ρ^i is the first curvature vector of the curve, we can say further that $\Phi = 0$ if

(iii) the curve is geodesic ($\rho^i = 0$), and the projection of the variation vector on the tangent vector is constant.

4. The various kinds of invariant derivatives are not exhausted by the three which we have already named. For, as is pointed out by SCHOUTEN and Van KAMPEN (11), a geometric object defined in a certain way may take on a value at the new point $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)dt$ which is neither the natural value (corresponding to the increment $\overset{4}{d}$), nor the parallelly-transported (corresponding to $\overset{2}{d}$), nor the displaced (corresponding to $\overset{3}{d}$). In such a case we shall refer to the *varied* value, and denote the corresponding increment, assuming the continuity of the components of the geometric object, by $\overset{v}{d}$. Let us consider as an example of this the first curvature vector of a curve, which we shall write in the form

$$\rho^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

where the $\overset{*}{\Gamma}_{jk}^i$ may also be replaced by the G_{jk}^i or again by the three-index symbols of CHRISTOFFEL. The value taken by this vector at the new element (\bar{x}, \bar{x}') will be

$$(40) \quad \rho^i(\bar{x}, \bar{x}') = \rho^i + \overset{v}{d}\rho^i = \frac{d^2 \bar{x}^i}{d\bar{s}^2} + \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i(\bar{x}, \bar{x}') \frac{d\bar{x}^j}{d\bar{s}} \frac{d\bar{x}^k}{d\bar{s}}.$$

To obtain the expression for the right-hand side of (40), we have

$$\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}} = \frac{d\bar{x}^i}{ds} \cdot \frac{ds}{d\bar{s}} = \left(\frac{dx^i}{ds} + \frac{dv^i}{ds} dt \right) (1 - \Phi dt)$$

so that to first order

$$(41) \quad \frac{d\bar{x}^i}{ds} = \frac{dx^i}{ds} + \left(\frac{dv^i}{ds} - \Phi \frac{dx^i}{ds} \right) dt.$$

Similarly

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\bar{x}^i}{ds} \right) \cdot \frac{ds}{ds} = \\ &= \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left[\frac{d^2v^i}{ds^2} - \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dx^i}{ds} - 2\Phi \frac{d^2x^i}{ds^2} \right] \end{aligned}$$

whereas

$$(43) \quad \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i(\bar{x}, \bar{x}') = \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i + d \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i.$$

If these values from (41), (42), and (43) are inserted on the right-hand side of (40), and if we use

$$\frac{d^2v^i}{ds^2} = \frac{\partial^2 v^i}{\partial^2 x^j \partial x^k} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{d^2x^j}{ds^2}$$

and the equation (29), we shall have, on taking out the finite term ρ^i , that

$$\begin{aligned} \overset{v}{d}\rho^i &= \left[\left\{ v^i_{|jk} + \overset{*}{R}_{jk}^i v^l + \frac{\partial \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i}{\partial x^l} \frac{Dv^l}{d\tau} \left\{ \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2\Phi \rho^i - \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{dx^i}{ds} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \rho^j \right\} \right] dt. \end{aligned}$$

On subtracting from this the expression

$$\overset{3}{d}\rho^i = \rho^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dt$$

we shall have an invariant derivative which is very similar to the Lie derivative and which we shall denote by $\overset{\alpha}{D} = \frac{\overset{v}{d} - \overset{3}{d}}{dt}$ so that

$$(44) \quad \overset{\alpha}{D}\rho^i = (D \overset{*}{\Gamma}_{jk}^i) v^j v^k - 2\Phi \rho^i - \frac{d\Phi}{ds} v^i.$$

If we are dealing with an extremal curve, with $\rho^i = 0$, the deformed curve will also possess this property of being extremal provided $\overset{\alpha}{D}\rho^i = 0$, i.e. provided

$$(45) \quad v^i|_{00} + \overset{*}{R}_{0^i 0j} v^j - \frac{d\Phi}{ds} v^i = 0$$

and if any of the conditions for $\Phi = 0$ are satisfied, then we have the simple form of the equation of the geodesic deviation already given by CARTAN, since $\overset{*}{R}_{00j}^i = R_{00j}^i$.

If s is not taken as the parameter along the curve, it would be convenient to take the equations of the paths in the form which is preserved for all changes of parameter, namely

$$(46) \quad \frac{dx^i}{d\tau} \left[\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{kl}^{*j} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} \right] - \frac{dx^j}{dt} \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{kl}^{*i} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} \right] = 0$$

we shall obtain

$$(47) \quad \frac{dx^{i(1,3)}}{dt} D \Gamma_{kl}^{*j} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0$$

as the conditions for an infinitesimal projective collineations which have been investigated in detail by KNEBELMAN (10)

5. Just as in the case of ordinary Riemannian Geometry, the $D^{(r,s)}$ may serve in this case also to define orthogonal ennuples, and hence analogues of the Frenet formulae for curves, where the element of support is always taken to be the tangential element to the curve.

The set of vectors

$$(48) \quad \xi_{i(p)}^k = l_{i(p)}^k, \quad \xi_{(p)}^k = D_{(p-1)}^{(r,s)} \xi_{i(p)}^k; \quad (p = 2, \dots, n)$$

do not form an orthogonal and normed set of vectors. Such an orthogonal set of unit vectors $i^k(p = 1, \dots, n)$ can be deduced from them by the usual Schmidt method. The corresponding Frenet Formulae are of the same form as in the Riemannian case (see 5).

$$\begin{aligned} D_1^{(r,s)} i^k &= \alpha_{1_1} i^k + \alpha_{1_2} i^k \\ &\dots \dots \dots \\ D_p^{(r,s)} i^k &= \alpha_{p_1} i^k + \alpha_{p_2} i^k + \dots + \alpha_{p_p} i^k + \alpha_{p, p+1} i^k \\ &\dots \dots \dots \\ D_n^{(r,s)} i^k &= \alpha_{n_1} i^k + \dots + \alpha_{n, n} i^k. \end{aligned}$$

These equations will simplify for the case $r = 1, s = 2$, in virtue of the generalized RICCI identity, since in that case

$$\begin{aligned} \alpha_{p_1} &= \alpha_{p_2} = \dots = \alpha_{p, p-2} = \alpha_{p_p} = 0 \\ \alpha_{p, p-1} &= -\alpha_{p-1, p} = -\frac{k}{p-1}. \end{aligned}$$

and when the displacement vector v^h is tangential to the curve, we get the generalized FRENET formulae as given by CARTAN for a FINSLER space of 3-dimensions, and by TAYLOR for n dimensions.

BIBLIOGRAPHY

1. L. BERWALD, *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus*, « Math. Zeitschrift », 25, 1926, p. 40-73.
2. Id., *Una forma normale invariante della seconda variazione*, « Rend. della R. Accad. dei Lincei », (VI), V, 1928, 301-6.
3. É. CARTAN, *Les Espaces de Finsler*, « Actualités Scientifique et Industrielles », 79, 1934, Hermann & Cie, Paris.
4. Id., *Les Espaces de Finsler*, « Abhandlungen Semin. für Vektor- und Tensoranalysis », IV, Moskau, 1937, 79-81.
5. E. T. DAVIES, *Analogues of the Frenet formulae determined by deformation operators*, « Journ. London Math. Soc. », 13, 1938, 210-216.
6. P. DELENS, *La métrique angulaire des Espaces de Finsler*, « Actualités Scientifique et Industrielles », 80, 1934, Hermann & Cie, Paris.
7. P. DIENES and E. T. DAVIES, *On the infinitesimal deformations of tensor submanifolds*, « Journal. de Mathem. », 24, 1937, 111-150.
8. A. DUSCHEK and W. MAYER, *Zur geometrischen Variationsrechnung: Zweite Mitteilung: Ueber die zweite Variation des eindimensionalen Problems*, « Monatshefte für Math. und Physic », 40, 294-308.
9. P. FINSLER, *Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, « Dissert. », Göttingen, 1918.
10. M. S. KNEBELMAN, *Collineations and Motions in Generalized Spaces*, « Amer. Journal of Mathematics », 51, 1929, 527-564.
11. J. A. SCHOUTEN and E. R. van KAMPEN, *Beiträge zur Theorie der Deformation*, « Prace Mat. Fiz. Warszawa », 41, 1933, 1-19.
12. J. L. SYNGE, *A generalisation of the Riemannian Line Element*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 27, 1925, 61-67.
13. Id., *The first and second variations of the Length Integral*, « Proc. Lond. Math. Soc. », (2), 25, 1928, 247-264.
14. J. H. TAYLOR, *A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 27, 1925, 246-264.

Nuove ricerche nella teoria delle curve quasi-asintotiche

Memoria di MARIO VILLA (a Milano).

Sunto. - La Memoria è dedicata principalmente alla ricerca del massimo ν e del minimo numero μ delle equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.) a cui può soddisfare una V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$; $0 < r < s-1$), dove k, δ, r, s sono assegnati, e allo studio delle V_k soddisfacenti a μ o a ν equazioni d'ordine $s-1$ e che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$.

1. Alla teoria delle curve quasi-asintotiche, sorta dalle ricerche di BOMPIANI, sono dedicati alcuni miei lavori recenti ⁽¹⁾.

Nella ricerca delle varietà V_k che posseggono curve quasi-asintotiche (di indici assegnati) e che formano totalità pure di tipo assegnato, seguendo le direttive esposte in uno dei miei lavori predetti ⁽²⁾, il problema più importante che si presenta per primo è il seguente:

Ricercare le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$, cioè che ne posseggono $\infty^{\delta-2k+1}$ per ogni E_1 ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$; $s > 2$).

Quando una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($r \leq s-1$) soddisfa a $\binom{k+s-1}{s}$ equazioni d'ordine s linearmente indipendenti (n. 2); invece il numero delle equazioni lin. indep. d'ordine $s-1$ a cui tale V_k soddisfa non è sempre lo stesso, per gli stessi valori di k, δ, r, s .

La Memoria è dedicata principalmente alla ricerca del massimo ν e del minimo numero μ delle predette equazioni d'ordine $s-1$ (k, δ, r, s essendo assegnati) e allo studio delle V_k soddisfacenti a μ od a ν equazioni d'ordine $s-1$, e che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$.

Nel caso del minimo μ è notevole soprattutto l'intervento dei sistemi a

⁽¹⁾ Ricorderò qui i seguenti: *Ricerche sulle curve quasi-asintotiche*, Note I e II, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 6^a, 1938, pp. 24¹, 302; *Ricerche sulle varietà V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$, con particolare riguardo al caso $K=4, \varepsilon=8$* , « Memorie dell'Accademia dei Lincei » vol. VII, ser. 6^a, 1939, p. 373. Il primo di questi lavori si richiamerà con N ed il secondo con M. Per le nozioni di curva $\gamma_{r,s}$ e di E_n di $\gamma_{r,s}$ di una V_k , rimando ai suddetti lavori.

⁽²⁾ VILLA, N, n. 1.

caratteristica di Bompiani ⁽³⁾, come è precisato nel teorema del n. 3. Questo fatto attribuisce agli stessi sistemi a caratteristica del BOMPIANI nuovo interesse per l'applicazione che se ne fa e se ne può fare alla teoria delle curve quasi-asintotiche (nn. 4, 16).

Nel caso del massimo ν le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ vengono determinate tutte (n. 7): esse sono le V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ i cui $S(s-2)$ osculatori riempiono l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente, dove ρ è la dimensione dell' $S(s-2)$ osculatore generico.

Fra le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$, queste V_k sono le uniche che presentano un comportamento ordinario rispetto agli E_2 di $\gamma_{s-2,s}$ che posseggono (n. 8).

La conoscenza dei numeri μ e ν è essenziale per la ricerca della massima e della minima dimensione che può competere allo spazio ambiente di una V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$; questo problema viene risolto nelle sue linee principali nei nn. 13, 14, 15.

Fra i risultati ivi ottenuti espongo qui i seguenti:

a) L'unica V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$, e per cui lo spazio ambiente raggiunge la massima dimensione compatibile con tale ipotesi, è il cono dell' $S_{\frac{(3k-\delta-1)(3k-\delta+2)}{2}+\delta-2k+1}$ che proietta da un $S_{\delta-2k}$ la $V_{3k-\delta-1}^{2\delta-1}$

rappresentante le quadriche di $S_{3k-\delta-1}$.

b) Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$, e per cui lo spazio ambiente raggiunge la minima dimensione compatibile con tale ipotesi, sono le V_k dell' $S_{4k-\delta-1}$ i cui S_k tangenti riempiono lo spazio ambiente.

E più in generale:

c) Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$, e per cui lo spazio ambiente ha la minima dimensione compatibile con tale ipotesi, sono le V_k dell' $S_{\rho_0+3k-\delta-1}$ i cui $S(s-2)$ osculatori hanno dimensione ρ_0 e riempiono l' $S_{\rho_0+3k-\delta-1}$ ambiente (dove ρ_0 si sa calcolare).

Lo studio delle predette V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ mi ha permesso di risolvere una questione che interessava un punto delicato della teoria delle curve quasi-asintotiche:

(3) Un sistema d'equazioni (lineari, omogenee, alle derivate parziali) dicesi, con BOMPIANI, a caratteristica quando i coni che si possono associare alle singole equazioni del sistema si spezzano tutti in un iperpiano fisso e nella parte residua variabile da equazione ad equazione. Si veda: BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*, « Atti dell'Accademia di Torino », vol. 49, pp. 84, 113; 1913. Questo lavoro si richiama con A.

Come ebbi già occasione di rilevare in miei precedenti lavori, in tutti i casi finora noti (fra cui il caso generale per $k < 5$) di V_k che posseggono $\infty^{2k+p-1} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($0 < p < k - 1$), gli E_2 di $\gamma_{1,3}$ della V_k sono organizzabili in curve $\gamma_{1,3}$ e queste dipendono da p funzioni arbitrarie.

Sorgeva così spontanea la domanda: per $s > 3$, le $\gamma_{s-2,s}$ di una V_k che possieda ∞^{2k+p-1} ($0 < p < k - 1$) E_2 di $\gamma_{s-2,s}$ dipendono necessariamente da funzioni arbitrarie?

Orbene: la risposta a questa domanda è negativa (nn. 11, 12).

Dalle V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ precedenti si hanno infatti, per $s > 3$, esempi di V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ e le cui $\gamma_{s-2,s}$ non dipendono da funzioni arbitrarie: così una V_3 dell' S_{11} , i cui $S(2)$ osculatori sono regolari e riempiono l' S_{11} ambiente, possiede $\infty^6 E_2$ di $\gamma_{2,4}$ e le $\gamma_{2,4}$ di essa non dipendono da una funzione arbitraria. Le sezioni iperpiane di tale V_3 sono infatti superficie dell' S_{10} e una superficie dell' S_{10} non può possedere $\infty^2 \gamma_{2,4}$ (n. 11).

Ritornando al caso del minimo μ , ho dimostrato (n. 4):

L'unica V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$; $0 < r < s - 1$), e soddisfacente al minimo numero μ d'equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) e (per $s > 3$, $\delta > 2k - 1$) al massimo numero d'equazioni di Laplace (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi, è (qualunque sia r) il cono $C_k^{\delta,s}$ dell' $S_{\frac{s(s+1) \dots (s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} + \delta - 2k}$ proiettante da un $S_{\delta-2k}$ la $V_{3k-\delta-1}^{(s-1)^{3k-\delta-1}}$ rappresentante le forme d'ordine $s - 1$ di un $S_{3k-\delta-1}$.

Questa proprietà caratterizza i coni $C_k^{\delta,s}$; ad essa ero già pervenuto per $s = 3$ (4).

Per caratterizzare, per $s > 3$, i coni $C_k^{\delta,s}$ è dunque occorsa un'ulteriore condizione (che l' $S(2)$ osculatore a V_k abbia dimensione minima), come appunto prevedevo in altro mio lavoro. La diversità fra i casi $s = 3$ e $s > 3$ è spiegata (n. 16) dai sistemi a caratteristica che intervengono e la necessità per $s > 3$ di quell'ulteriore condizione è provata nello stesso n. 16.

I coni $C_k^{\delta,s}$ porgono un notevole esempio di V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$, qualunque sia r , le cui $\gamma_{r,s}$ dipendono da $\delta - 2k + 1$ funzioni arbitrarie. Essi vengono studiati nel n. 5.

In miei precedenti lavori (5) ho collegato la ricerca delle varietà che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ al problema dell'abbassamento della dimensione

(4) VILLA, Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 6^a, p. 3, 1938. Questo lavoro si richiamerà con P.

(5) Si veda specialmente N, nn. 7, 8.

per la varietà $W(s-2)$, luogo degli $S(s-2)$ osculatori a una V_k ($s > 2$), che per $s > 3$ fu posto per la prima volta dal BOMPIANI ⁽⁶⁾; e pervenni ai risultati seguenti:

($s = 3$) Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$, la varietà formata dagli S_k tangenti ad essa ha esattamente dimensione $2k - (\delta - 2k + 1)$.

($s > 3$) Se una V_k è tale che la dimensione di $W(s-2)$ s'abbassa di $\delta - 2k + 1$ unità rispetto a quella che ha in generale, V_k soddisfa a parte delle condizioni che comporta l'esistenza sopra di essa di $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$.

Rimaneva naturalmente da vedere fino a che punto quest'ultima proposizione si potesse invertire.

Ora, nell'ipotesi che V_k soddisfi al massimo o al minimo numero μ d'equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.), nel n. 17 s'inverte la proposizione predetta pervenendo per $s > 3$ ed un risultato analogo a quello precedente per $s = 3$.

Non mi trattengo qui su altri risultati minori ottenuti nel presente lavoro, nè sulle applicazioni che vengono fatte (nn. 18, 19, 20) al problema dell'abbassamento della dimensione di $W(m)$, e ad altri problemi, che si collegano ad un teorema di SCORZA e ad una proprietà delle varietà di SEGRE.

Degno di essere rilevato è infine il contributo veramente notevole portato anche qui, alla dimostrazione dei teoremi, dal fatto che ogni $\gamma_{r,s}$ di una V_k ($r < s-1$) è pure $\gamma_{s-2,s}$ per V_k ⁽⁷⁾.

§ 1. Sulle V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ e che soddisfano al minimo numero d'equazioni d'ordine $s-1$.

2. In una mia Nota recente ⁽⁸⁾, applicando le direttive generali esposte nella Nota stessa, pervenni al seguente teorema che dà luogo ad importanti applicazioni:

Se ogni E_1 di una V_k è E_1 di $\gamma_{r,s}$, V_k appartiene necessariamente all' $S(s-1)$ osculatore in un suo punto generico (qualunque sia r ; $r < s$).

Segue che i punti derivati *sesimi* appartengono tutti all' $S(s-1)$ osculatore, ossia che V_k soddisfa a $\binom{k+s-1}{s}$ equazioni d'ordine s linearmente indipendenti.

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($r < s-1$; $2k-1 \leq \delta < 3k-2$) per

⁽⁶⁾ BOMPIANI, A, p. 127.

⁽⁷⁾ VILLA, N, n. 2.

⁽⁸⁾ VILLA, N.

essa avviene appunto che ogni E_i è E_i di $\gamma_{r,s}$ e quindi valgono i risultati precedenti; in particolare si ha che la V_k soddisfa a $\binom{k+s-1}{s}$ equazioni d'ordine s linearmente indipendenti.

Invece il numero delle equazioni lin. indep. d'ordine $s-1$ a cui tale V_k soddisfa non è sempre il medesimo, può cioè assumere valori diversi per gli stessi valori di k, δ, r, s .

Il *minimo* per il numero delle equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.) a cui può soddisfare una V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ è indicato nel numero seguente; per il *massimo* si veda invece il n. 6.

Avvertiamo che più equazioni d'ordine $s-1$ si riterranno lin. indep. quando e solo quando sono lin. indep. le espressioni che da esse si ottengono considerando soltanto le derivate d'ordine $s-1$.

3. Sussiste il teorema:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2; 0 < r < s-1$) essa soddisfa almeno $\mu = \binom{k+s-2}{s-1} - \binom{3k-\delta+s-3}{s-1}$ equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.); e tale minimo è raggiunto.

Se V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ e se soddisfa a μ equazioni (lin. indep.) d'ordine $s-1$ esattamente, queste compongono $\delta-2k+1$ gruppi a caratteristica nel senso di Bompiani e del tipo (8) (tanti gruppi cioè quant'è la dimensione degli E_2 di $\gamma_{r,s}$ aventi in comune uno stesso E_i)⁽⁹⁾.

Per $\delta=2k-1$ è noto che una V_k può possedere $\infty^{2k-1} E_2$ di $\gamma_{r,s}$ senza soddisfare ad alcuna equazione d'ordine $s-1$ ($\mu=0$). È noto anzi che l'unica V_k per cui ciò avviene è la $V_k^{(s-1)^k}$ che rappresenta le forme d'ordine $s-1$ di S_k (cfr. teorema di Bompiani esteso, n. 15).

Supporremo quindi $\delta > 2k-1$ e dimostreremo dapprima il teorema per $r=s-2$.

Determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti perchè V_k possenga $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2, s > 2$).

L' $S(s-2)$ osculatore in un punto $x(\tau_1, \dots, \tau_k)$ a V_k è lo spazio di x e di tutti i punti derivati d'ordine $\leq s-2$.

L' S_s osculatore ad una curva di V_k in x è individuato dai punti

$$\begin{aligned} x, dx &= \sum x_i d\tau_i, \quad d^2x = \sum x_{i_1 i_2} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} + \sum x_i d^2\tau_i, \dots \\ \dots, d^{s-1}x &= \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} + \dots, \\ d^s x &= \sum x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} + s \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d^2\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} + \dots; \end{aligned}$$

(9) BOMPIANI, A, pp. 84, 113.

gli indici i, i_1, \dots, i_s assumono in tutti i modi possibili i valori $1, 2, \dots, k$ (s'è posto $\frac{\partial x}{\partial \tau_i} = x_i$ e analog.).

Affinchè l' $S(s-2)$ osculatore e l' S_s precedenti abbiano uno spazio intersezione di dimensione $> s-2$ (oppure l' S_s sia indeterminato) deve essere nulla la matrice (cioè nulli tutti i minori d'ordine massimo estratti da essa)

$$(1) \quad \begin{vmatrix} S(s-2) \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} + s \sum x_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}} d^2 \tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_{s-1}} \end{vmatrix},$$

dove $S(s-2)$ sta ad indicare le orizzontali costruite con le coordinate dei punti che lo determinano.

Perchè le (1) siano compatibili considerate come equazioni lineari nei differenziali $d^2 \tau_{i_1}$, deve essere

$$(2) \quad \begin{vmatrix} S(s-2) \\ \sum x_{1 i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \sum x_{2 i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \dots \\ \sum x_{k i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \sum x_{i_1 i_2 \dots i_s} d\tau_{i_1} d\tau_{i_2} \dots d\tau_{i_s} \end{vmatrix} = 0.$$

Affinchè V_k possenga $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2, s}$ esattamente (cioè $\infty^{\delta-2k+1}$ esattamente per ogni E_i) ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$) è necessario e sufficiente che siano nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, le matrici che si ottengono dalla (2) sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime $k+1$ orizzontali e che non siano tutte nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, le matrici che si ottengono dalla

$$(3) \quad \begin{vmatrix} S(s-2) \\ \sum x_{1 i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \sum x_{2 i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \dots \\ \sum x_{k i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \end{vmatrix}$$

sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime k orizzontali.

Da queste condizioni segue, in particolare, che, per $\delta=2k-1$, la matrice (3) è $\neq 0$, e, per $\delta > 2k-1$, che sono tutte nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, le matrici che s'ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta-2k$ delle ultime k orizzontali (mentre non sono tutte nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, quelle che si ottengono sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime k orizzontali).

Se $\delta = 2k$ ($k > 2$) è dunque necessario che la (3) sia identicamente nulla rispetto ai $d\tau_i$.

Intanto osserviamo che, annullando nella (3) il coefficiente di $(d\tau_i)^{k(s-2)}$ ⁽¹⁰⁾, si ha

$$(4) \quad (x_{1i\dots i}, x_{2i\dots i}, \dots, x_{ki\dots i}, S(s-2)) = 0,$$

indicando con $(x_{1i\dots i}, \dots, S(s-2))$ una combinazione lineare omogenea, a coefficienti funzioni di τ_1, \dots, τ_k , dei punti derivati d'ordine $s-1$ $x_{1i\dots i}, \dots, x_{ki\dots i}$ e dei punti che individuano l' $S(s-2)$ osculatore.

Si supponga che, dopo un eventuale cambiamento di variabili, sussista un'equazione d'ordine $s-1$, del tipo

$$x_{12\dots 2} = S(s-2)$$

e che

$$(x_{22\dots 2}, x_{32\dots 2}, \dots, x_{k2\dots 2}, S(s-2)) \neq 0 \quad (11).$$

Annullando nella (3) opportuni coefficienti ^(11 bis), si esprimono tutte le derivate d'ordine $s-1$ del tipo $x_{1i_1\dots i_{s-2}}$ (dove i_1, i_2, \dots, i_{s-2} assumono in tutti i modi possibili i valori $1, 2, \dots, k$) mediante combinazioni lineari omogenee di altre derivate d'ordine $s-1$ e di $S(s-2)$.

Si hanno così appunto

$$\mu = \binom{k+s-3}{s-2} = \binom{k+s-2}{s-1} - \binom{k+s-3}{s-1}$$

equazioni d'ordine $s-1$ lin. ind..

Se non esistono equazioni d'ordine $s-1$ che non siano combinazioni lineari delle precedenti, annullando convenienti coefficienti della (3) ⁽¹²⁾, si

⁽¹⁰⁾ Per il calcolo su queste matrici e avvertenze relative, si veda: BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*, « Memorie dell'Accademia dei Lincei », vol. XIII, ser. 5^a, p. 455, 1922.

⁽¹¹⁾ Con la scrittura $(x_{22\dots 2}, \dots, S(s-2)) \neq 0$ si vuol significare che non esiste la $(x_{22\dots 2}, \dots, S(s-2)) = 0$.

^(11 bis) Per $s=3$ s'annulleranno i coefficienti di $(d\tau_2)^{k-1}d\tau_i$ ($i=1, 3, \dots, k$); per $s=4$ s'annulleranno i coefficienti di $(d\tau_2)^{2k-1}d\tau_i$ e i coefficienti di $(d\tau_2)^{2k-2}d\tau_i d\tau_j$ ($i, j=1, 3, \dots, k$); e analogamente.

⁽¹²⁾ Così, ad es., nel caso significativo più semplice per $s > 3$, cioè per $s=4, k=3$: Si ha $x_{122} = S(2)$, $(x_{222}, x_{223}, S(2)) \neq 0$.

Annuliamo, secondo quanto si disse nella ^(11 bis), i coefficienti di $(d\tau_2)^5 d\tau_3$, $(d\tau_2)^5 d\tau_1$, $(d\tau_2)^4 (d\tau_3)^2$, $(d\tau_2)^4 d\tau_1 d\tau_3$, $(d\tau_2)^4 (d\tau_1)^2$. Si ha rispettivamente:

$$\begin{aligned} x_{123} &= \alpha x_{222} + \beta x_{223} + S(2) \\ x_{142} &= \lambda x_{222} + \omega x_{223} + S(2) \\ x_{133} &= -4\beta x_{332} + (x_{222}, x_{223}, S(2)) \\ x_{113} &= 2\omega x_{332} + (x_{222}, x_{223}, S(2)) \\ x_{111} &= (x_{222}, x_{223}, S(2)), \end{aligned}$$

(*)

trova che le μ equazioni precedenti debbono ridursi a

$$(5) \quad x_{1i_1 i_2 \dots i_{s-2}} = S(s-2),$$

cioè comporre un sistema a caratteristica di BOMPIANI.

Ed è evidente che, inversamente, se sussistono le (5) la (3) è sempre nulla, qualunque siano i $d\tau_i$.

Se poi non esiste un'equazione del tipo $x_{i_1 i_2 \dots i_s} = S(s-2)$, ossia, per le (4), se sussistono le $x_{ii \dots i} = S(s-2)$; oppure se, pur esistendo un'equazione (d'ordine $s-1$) del tipo $x_{1i \dots i} = S(s-2)$ ($i \neq 1$), è sempre $(x_{2i \dots i}, \dots, x_{ki \dots i}, S(s-2)) = 0$; si verifica che l'annullarsi della (3) impone più di μ equazioni d'ordine $s-1$ lin. indep..

Se $\delta = 2k + 1$ ($k > 3$), per le predette condizioni, è necessario che siano tutte nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, le matrici che s'ottengono dalla (3) sopprimendo una delle ultime k orizzontali. In particolare, dev'essere:

$$(6) \quad \left| \begin{array}{c} S(s-2) \\ \Sigma x_{1i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \Sigma x_{3i_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \\ \dots \\ \Sigma x_{ki_1 \dots i_{s-2}} d\tau_{i_1} \dots d\tau_{i_{s-2}} \end{array} \right| = 0.$$

identicamente rispetto ai $d\tau_i$.

Ponendo nella (6) $d\tau_s = 0$ e ragionando per essa come si è fatto precedentemente per la (3) (ciò che è lecito essendo $k > 3$) si conclude che, l'annullarsi della (6), identicamente rispetto ai $d\tau_1, d\tau_3, \dots, d\tau_k$, impone almeno $\binom{(k-1) + s - 3}{s-2}$ equazioni d'ordine $s-1$ (lin. ind.) e che, se sono esattamente in tale numero, possono suppersi del tipo

$$x_{1p_1 p_2 \dots p_{s-2}} = S(s-2),$$

dove p_1, p_2, \dots, p_{s-2} assumono in tutti i modi possibili i valori $1, 3, \dots, k$.

dove i coefficienti $\alpha, \beta, \lambda, \omega$ sono funzioni di τ_1, τ_2, τ_3 ; le x_{1ij} ($i, j = 1, 2, 3$) sono così espresse mediante le rimanenti derivate terze ed $S(2)$.

Orbene, se non esistono equazioni diverse dalle combinazioni lineari delle precedenti, cioè se

$$(**) \quad (x_{222}, x_{223}, x_{332}, x_{333}, S(2)) \neq 0,$$

annullando il coefficiente di $(d\tau_3)^6$ si vede, per la (**), che nella 3^a delle (*) mancano l' x_{222} e l' x_{223} . E dal coefficiente di $(d\tau_3)^4(d\tau_2)^2$ segue $\alpha = \beta = 0$. Annullando il coefficiente di $(d\tau_3)^5 d\tau_1$ si vede che nella 4^a delle (*) mancano l' x_{222} e l' x_{223} . Dal coefficiente di $(d\tau_3)^3(d\tau_1)^3$ segue $\omega = 0$ e da quello di $(d\tau_3)^4 d\tau_1 d\tau_2$ $\lambda = 0$. Infine annullando il coefficiente di $(d\tau_3)^4(d\tau_1)^2$ appare che nell'ultima delle (*) mancano l' x_{222} e l' x_{323} . Si conclude appunto $x_{1ij} = S(2)$.

Tenendo conto che devono essere nulle anche le matrici che s'ottengono dalla (3) sopprimendo una delle ultime $k - 2$ orizzontali, si conclude: l'annullarsi (ident. rispetto ai $d\tau_i$) delle $k - 1$ matrici che s'ottengono dalla (3) sopprimendo una delle ultime $k - 1$ orizzontali impone almeno $\binom{k + s - 3}{s - 2}$ equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) e che, se sono esattamente in tale numero, possono supporsi del tipo

$$(7) \quad x_{1i_1i_2\dots i_{s-2}} = S(s - 2)$$

dove i_1, i_2, \dots, i_{s-2} assumono in tutti i modi possibili i valori $1, 2, \dots, k$.

Infine: deve essere nulla la matrice che si ottiene dalla (3) sopprimendo la 1^a delle ultime k orizzontali. Ponendo in tale matrice le espressioni delle derivate date dalle (7) e ragionando per essa come si è fatto precedentemente per la (3) (ciò che è lecito essendo $k > 3$), si conclude che se essa è nulla, identicamente rispetto a $d\tau_2, \dots, d\tau_k$, sussistono almeno $\binom{(k - 1) + s - 3}{s - 2}$ equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep. fra loro e ovviamente dalle (7)) e che, se sono esattamente in tale numero, possono supporsi del tipo

$$x_{2q_1q_2\dots q_{s-2}} = S(s - 2),$$

dove q_1, q_2, \dots, q_{s-2} assumono in tutti i modi possibili i valori $2, \dots, k$.

Concludendo:

Debbono sussistere almeno

$$\mu = \binom{k + s - 3}{s - 2} + \binom{(k - 1) + s - 3}{s - 2} = \binom{k + s - 2}{s - 1} - \binom{k + s - 4}{s - 1}$$

equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) e, se queste sono esattamente μ , compongono due gruppi a caratteristica e possono supporsi del tipo

$$\begin{aligned} x_{1i_1i_2\dots i_{s-2}} &= S(s - 2), \\ x_{2i_1i_2\dots i_{s-2}} &= S(s - 2). \end{aligned}$$

E così, per δ qualunque ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$), si verifica che:

Perchè siano nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, tutte le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta - 2k$ delle ultime k orizzontali, debbono sussistere almeno

$$\mu = \binom{k + s - 2}{s - 1} - \binom{3k - \delta + s - 3}{s - 1}$$

equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.); e, se queste equazioni sono μ esatta-

mente, esse compongono $\delta - 2k + 1$ gruppi a caratteristica e possono sup-
 porsi del tipo

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & x_{1i_1 i_2 \dots i_{s-2}} = S(s-2) \\
 & x_{2i_1 i_2 \dots i_{s-2}} = S(s-2) \quad (i_1; i_2; \dots; i_{s-2} = 1, 2, \dots, k). \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 & x_{\delta-2k+1 i_1 i_2 \dots i_{s-2}} = S(s-2)
 \end{aligned}$$

Viceversa: è evidente che se sussistono le (8) le matrici predette sono
 nulle, qualunque siano i $d\tau_i$.

E il minimo μ può essere effettivamente raggiunto: nel n. 5 vedremo
 infatti una notevole V_k (il cono $C_k^{\delta, s}$) che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r, s}$ e che sod-
 disfa esattamente a μ equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.), qualunque sia
 $r (r \leq s - 2)$.

Siccome poi una $\gamma_{r, s}$ ($r < s - 2$) di V_k è sempre una $\gamma_{s-2, s}$ per V_k ,
 l'asserto è così dimostrato in ogni caso.

4. Sussiste il teorema:

*L'unica V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r, s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$; $0 < r < s - 1$)
 e soddisfacente al minimo numero μ di equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.)
 e (per $s > 3$, $\delta > 2k - 1$) al massimo numero d'equazioni (lineari omogenee
 del 2° ordine, cioè) di Laplace (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi, è
 (qualunque sia r) il cono dell' $S_{\frac{s(s+1) \dots (s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} + \delta - 2k}$ proiettante da*

*un $S_{\delta-2k}$ la $V_{\frac{(s-1)3k-\delta-1}{3k-\delta-1}}$ dell' $S_{\frac{s(s+1) \dots (s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} - 1}$ rappresentante le forme
 d'ordine $s - 1$ di un $S_{3k-\delta-1}$.*

Per $\delta = 2k - 1$, non si ha più un cono ma la stessa $V_k^{(s-1)^k}$ rappresen-
 tante le forme d'ordine $s - 1$ di S_k ed il teorema è noto (cfr. n. 15).

Supporremo quindi $\delta > 2k - 1$.

Per il teorema del n. 3, siccome V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r, s}$ e soddisfa
 a μ equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) esattamente, queste equazioni com-
 pongono $\delta - 2k + 1$ gruppi a caratteristica del tipo (8).

Se $s > 3$, una V_k in queste condizioni soddisfa al più a $\binom{k+1}{2} - \binom{3k-\delta}{2}$
 equazioni di LAPLACE (lin. indep.); e siccome, per ipotesi, V_k raggiunge ap-
 punto questo massimo, si conclude, per $s \geq 3$, che V_k soddisfa esattamente

a $\binom{k+1}{2} - \binom{3k-\delta}{2}$ equazioni di LAPLACE (lim. indep.) e che queste compongono $\delta - 2k + 1$ gruppi a caratteristica, di k equazioni ciascuno (¹²bis).

Per un noto teorema di BOMPIANI sulle V_k che soddisfano a gruppi di equazioni a caratteristica di 2° ordine e di tipo parabolico (¹³), si conclude che V_k è un cono proiettante da un $S_{\delta-2k}$ una $V_{3k-\delta-1}$ (il cui spazio ambiente si può supporre sghembo con l' $S_{\delta-2k}$).

Rileviamo fin d'ora che la $V_{3k-\delta-1}$ non può soddisfare ad equazioni di ordine $s-1$ perchè V_k soddisferebbe a più di μ equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.).

Sia P un punto del cono V_k e t una tangente in esso. Siccome, per ipotesi, V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$, ne possiede $\infty^{\delta-2k+1}$ che hanno in comune il punto P e la tangente t . Sia L una curva di V_k che passa per P che ivi è tangente alla t e tale che il suo S_s osculatore in P e l' $S(r)$ osculatore in P a V_k stiano in un $S_{m+s-r-1}$ (dove m è la dimensione dell' $S(r)$; di m non ci interessa il valore effettivo): l' E_2 in P di L è quindi uno degli $\infty^{\delta-2k+1} E_2$ di $\gamma_{r,s}$ precedenti.

Proiettiamo dall' $S_{\delta-2k}$ singolare di V_k sopra $V_{3k-\delta-1}$ il punto P e la curva L : siano P' e L' le proiezioni. L' S_s osculatore a L' in P' e l' $S(r)$ osculatore in P' a $V_{3k-\delta-1}$ stanno nell' $S_{(m-\delta+2k-1)+s-r-1}$ in cui l' $S_{m+s-r-1}$ precedente (che contiene l' $S_{\delta-2k}$) sega lo spazio ambiente di $V_{3k-\delta-1}$: l' E_2 in P' a L' è quindi un E_2 di $\gamma_{r,s}$ per $V_{3k-\delta-1}$, essendo $m - \delta + 2k - 1$ la dimensione dell' $S(r)$ osculatore a $V_{3k-\delta-1}$ (¹⁴).

La $V_{3k-\delta-1}$ possiede dunque per ogni E_1 un E_2 di $\gamma_{r,s}$: siccome non soddisfa ad alcuna equazione d'ordine $s-1$, per un teorema già ricordato, essa è la $V_{3k-\delta-1}^{(s-1)3k-\delta-1}$ di $S_{\frac{s(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} - 1}$ rappresentante le forme d'ordine $s-1$ di $S_{3k-\delta-1}$.

Inversamente: il cono dell' $S_{\frac{s(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} + \delta - 2k}$ proiettante da un $S_{\delta-2k}$ la predetta $V_{3k-\delta-1}^{(s-1)3k-\delta-1}$ possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$, come apparirà nel n. 5.

(¹²bis) Le μ equazioni d'ordine $s-1$ si ottengono derivando queste $\binom{k+1}{2} - \binom{3k-\delta}{2}$ equazioni di LAPLACE.

(¹³) BOMPIANI, A, p. 104. Si noti che l'applicazione che si fa di questo teorema di BOMPIANI è lecita perchè $k > (\delta - 2k + 1) + 1$ essendo $\delta < 3k - 2$.

(¹⁴) L' $S(r)$ osculatore in P al cono V_k è infatti lo spazio individuato dall' $S_{\delta-2k}$ singolare e dall' $S(r)$ osculatore in P' a $V_{3k-\delta-1}$.

OSSERVAZIONE: — Per $s = 3$ a questo teorema ero già pervenuto in altra Nota ⁽¹⁵⁾. Si osserverà subito nel teorema precedente la profonda differenza fra i casi $s = 3$ e $s > 3$, avendosi per $s > 3$ un'ulteriore condizione (che l' $S(2)$ osculatore a V_k abbia dimensione minima); sicchè il teorema che precede *non* è certamente un'estensione immediata di quello relativo al caso $s = 3$. Per caratterizzare, per $s > 3$, i coni predetti è dunque occorsa un'ulteriore condizione, come appunto prevedevo già in altro mio lavoro.

E la necessità di questa ulteriore condizione è posta in luce nel n. 16.

5. Studiamo ora i coni $C_k^{\delta, s}$, ossia i coni dell' $S_{\frac{s(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} + \delta - 2k}$ proiettanti da un $S_{\delta-2k}$ la $V_{\frac{s-1}{3k-\delta-1}}^{(s-1)3k-\delta-1}$, che rappresenta le forme d'ordine $s-1$ di $S_{3k-\delta-1}$; essi sono caratterizzati dal teorema del n. 4.

Se $\delta = 2k - 1$, le curve $\gamma_{r, s}$ di $V_k^{(s-1)^k} (\equiv C_k^{2k-1, s})$ sono, qualunque sia r ($0 < r < s - 1$), le ∞^{2k-2} curve F^{s-1} razionali normali di S_{s-1} immagini delle rette di S_k ⁽¹⁶⁾.

Gli $\infty^{2k-1} E_2$ di $\gamma_{r, s}$ sono gli E_2 di queste curve F^{s-1} : l' E_2 di $\gamma_{r, s}$ relativo ad un punto P e tangente t è cioè quello costituito da P , dalla t e dal piano osculatore alla F^{s-1} che passa per P ed è ivi tangente a t .

Se $\delta > 2k - 1$, le $\gamma_{r, s}$ di $C_k^{\delta, s}$ dipendono invece da $\delta - 2k + 1$ funzioni arbitrarie.

Si ha infatti:

Le curve $\gamma_{r, s}$ di $C_k^{\delta, s}$ ($\delta > 2k - 1$) sono, qualunque sia r ($0 < r < s - 1$), tutte e sole le curve tracciate sopra i coni d'ordine $s - 1$ (di vertice $S_{\delta-2k}$) situati sopra $C_k^{\delta, s}$.

Proiettando $C_k^{\delta, s}$ dal suo $S_{\delta-2k}$ singolare sopra un $S_{\frac{s(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} - 1}$ sghembo con l' $S_{\delta-2k}$ si ottiene infatti una $V_{\frac{s-1}{3k-\delta-1}}^{(s-1)3k-\delta-1}$ che rappresenta le forme d'ordine $s - 1$ di $S_{3k-\delta-1}$.

Siccome una $\gamma_{r, s}$ di $C_k^{\delta, s}$ si proietta in una $\gamma_{r, s}$ di $V_{\frac{s-1}{3k-\delta-1}}^{(s-1)3k-\delta-1}$, cioè in una curva F^{s-1} razionale normale di S_{s-1} , la $\gamma_{r, s}$ appartiene al cono $V_{\frac{s-1}{\delta-2k+2}}^{s-1}$ (d'ordine $s - 1$) proiettante la F^{s-1} dall' $S_{\delta-2k}$.

⁽¹⁵⁾ VILLA, *l.c.* p. 3.

⁽¹⁶⁾ Abbiamo supposto $r < s - 1$, ma in verità le F^{s-1} sono pure quasi-asintotiche $\gamma_{s-1, s}$ per $V_k^{(s-1)^k}$, appartenendo all' S_{s-1} . Solo che come tali esse non caratterizzano più la $V_k^{(s-1)^k}$ e perdono quindi interesse. E analogamente per le $\gamma_{r, s}$ dei coni $C_k^{\delta, s}$ ($\delta > 2k - 1$).

E inversamente: ogni curva tracciata sopra il cono $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ è $\gamma_{r,s}$ per $C_k^{\delta,s}$. Invero l' $S_{\delta-2k+2}$ a cui appartiene $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ (che contiene l' S_s osculatore di qualunque curva di $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$) e l' $S(r)$ osculatore, in un punto P di $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$, a $C_k^{\delta,s}$ stanno in un $S_{m+s-r-1}$ (m essendo la dimensione dell' $S(r)$ osculatore in P a $C_k^{\delta,s}$) avendo in comune l' $S(r)$ osculatore in P a $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ il quale ha dimensione $\delta - 2k + r + 1$ ⁽¹⁷⁾.

Segue il teorema:

Gli E_2 di $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ ($\delta > 2k - 1$) relativi ad un punto P e tangente t (in esso) sono costituiti, qualunque sia r ($0 < r < s - 1$), oltre che da P e da t , dagli $\infty^{\delta-2k+1}$ piani, per t , che appartengono all' $S(2)$ osculatore in P al cono $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$, situato su $C_k^{\delta,s}$ e di vertice $S_{\delta-2k}$, che passa per P ed è tangente ivi alla t .

Siccome $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ proietta la curva razionale normale F^{s-1} dall' $S_{\delta-2k}$, l' $S(2)$ osculatore in P a $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ è un $S_{\delta-2k+3}$, essendo lo spazio che contiene il piano osculatore a F^{s-1} (nel punto P' proiezione di P) e l' $S_{\delta-2k}$. I piani del predetto $S(2)$ passanti per t sono quindi appunto $\infty^{\delta-2k+1}$.

Se $s = 3$, l' $S(2)$ osculatore in P al cono $V_{\delta-2k+2}^2$ è lo spazio ambiente di questo cono e si ha un risultato a cui ero già pervenuto ⁽¹⁸⁾.

Dal precedente teorema segue:

Gli E_2 di $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ sono gli E_2 delle curve F^{s-1} razionali normali dell' S_{s-1} poste su di esso.

Infatti, nell' $S_{\delta-2k+2}$ ambiente del cono $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ che passa per P ed è ivi tangente alla t , gli S_{s-1} per t segano $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ in una F^{s-1} e l' $S(2)$ osculatore in P a $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ nel piano osculatore in P a questa curva. E variando l' S_{s-1} per t si ottengono così tutti i piani per t appartenenti all' $S(2)$ ⁽¹⁹⁾.

Dunque: anche per $\delta > 2k - 1$, come già per $\delta = 2k - 1$, gli $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ sono gli E_2 delle curve F^{s-1} , ma, per $\delta > 2k - 1$, contrariamente a quanto avviene per $\delta = 2k - 1$, gli E_2 di $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ si possono ordinare in

⁽¹⁷⁾ Infatti: il cono $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ si ottiene proiettando una F^{s-1} di $V_{3k-\delta-1}^{(s-1)3k-\delta-1}$ dall' $S_{\delta-2k}$.

L' $S(r)$ osculatore a $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ in P è lo spazio dell' S_r osculatore a F^{s-1} (nel punto P' proiezione di P) e dell' $S_{\delta-2k}$ ed è perciò un $S_{\delta-2k+r+1}$.

⁽¹⁸⁾ VILLA, P, p. 5.

⁽¹⁹⁾ Gli E_2 di $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ sono quindi tutti e soli gli E_2 di $\gamma_{r,s}$ delle $V_{3k-\delta-1}$ sezioni con gli $S_{\frac{s(s+1) \dots (s+3k-\delta-2)}{(3k-\delta-1)!} - 1}$ dello spazio ambiente. Ciò d'accordo col fatto che le $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ dipendono da $\delta - 2k + 1$ funzioni arbitrarie.

curve $\gamma_{r,s}$ anche in altri infiniti modi (dipendenti da $\delta - 2k + 1$ funzioni arbitrarie).

Ma se le proprietà dei coni $C_k^{\delta,s}$ viste in questo n.º sono per $s > 3$ una estensione di quelle a cui ero già pervenuto per $s = 3$ in una mia Nota recente ⁽²⁰⁾, vi sono anche profonde divergenze fra i casi $s = 3$ e $s > 3$.

Così per $s = 3$ ho dimostrato nella Nota ora ricordata che le coniche del cono $C_k^{\delta,3}$ formano un sistema regolare ⁽²¹⁾.

Orbene: per $s > 3$ e $\delta > 2k - 1$, le curve razionali normali F^{s-1} dell' S_{s-1} del cono $C_k^{\delta,s}$ non formano invece un sistema regolare.

Infatti: sopra $C_k^{\delta,s}$ consideriamo due punti P, Q infinitamente vicini e il cono $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ passante per essi. Le curve F^{s-1} che passano per P, Q sono $\infty^{(s-2)(\delta-2k+1)}$, tante cioè quanti sono gli S_{s-1} dell' $S_{\delta-2k+s}$ ambiente di $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$, passanti per P, Q : mentre i piani osculatori a tali curve in P sono $\infty^{\delta-2k+1}$ poichè l' $S(2)$ osculatore in P a $V_{\delta-2k+2}^{s-1}$ ha dimensione $\delta - 2k + 3$.

Siccome gli E_2 di $\gamma_{r,s}$ di $C_k^{\delta,s}$ sono tutti e soli gli E_2 delle curve F^{s-1} , per $s = 3$, il sistema delle coniche di $C_k^{\delta,3}$ è un sistema regolare di $\gamma_{1,3}$ di dimensione massima $\delta - 1$, mentre, per $s > 3$, un sistema regolare di $\gamma_{r,s}$ di dimensione massima $\delta - 1$ si può ottenere sopra $C_k^{\delta,s}$ staccando opportunamente dal sistema lineare $|F^{s-1}| \infty^{2(3k-\delta-2)+s(\delta-2k+1)}$ un sistema $\infty^{\delta-1}$ ^(21 bis).

Però se $\delta = 2k - 1$, sia per $s = 3$ come per $s > 3$, il sistema $|F^{s-1}|$ è l'unico sistema (regolare) di $\gamma_{r,s}$ di dimensione massima della $V_k^{(s-1)k}$.

Per il teorema del n. 4 si ha pure:

Il cono $C_k^{\delta,s}$ è l'unica V_k che possiede un sistema regolare $\infty^{\delta-1}$ di $\gamma_{r,s}$ (e non un sistema analogo ∞^δ) e che soddisfa al minimo numero μ d'equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) e (per $s > 3$, $\delta > 2k - 1$) al massimo numero d'equazioni di Laplace (lin. indep.) $(2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$ ed r è qualunque purchè $0 < r < s - 1$).

⁽²⁰⁾ VILLA, P, p. 6.

⁽²¹⁾ Ho chiamato, in miei precedenti lavori, *regolare* un sistema $\Sigma \infty^d$ di curve di una V_k ($2k - 2 \leq d \leq 3k - 3$) quando i piani osculatori in un punto generico P di V_k alle curve di Σ passanti per P e aventi ivi la tangente t sono ∞^{d-2k+2} (quante sono cioè le curve di Σ per P e tangenti ivi alla t).

^(21 bis) Ad un tale sistema regolare $\infty^{\delta-1}$, per $s > 3$, si può pervenire più precisamente nel modo che segue: si consideri nello spazio ambiente di $C_k^{\delta,s}$ un generico sistema $\sigma \infty^{3(\delta-2k+1)}$ di $S_{s(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)}^{(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)} - 1$; ciascuno degli $S_{s(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)}^{(s+1)\dots(s+3k-\delta-2)} - 1$ di σ sega $C_k^{\delta,s}$ in una $V_{3k-\delta-1}^{(s-1)3k-\delta-1}$ sulla quale vi sono $\infty^{2(3k-\delta-1)-2}$ $\gamma_{r,s}$ (che sono F^{s-1}); si hanno così complessivamente $\infty^{\delta-1}$ curve F^{s-1} componenti un sistema regolare.

Per $s = 3$, si ritrova un risultato a cui ero già pervenuto ⁽²²⁾.

OSSERVAZIONE. — Si rileverà per le curve quasi-asintotiche $\gamma_{r,s}$ del cono $C_k^{\delta,s}$ che l'indice r è arbitrario ($0 < r < s - 1$).

§ 2. Le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ e che soddisfano al massimo numero d'equazioni d'ordine $s - 1$.

6. Sussiste il teorema:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$; $s > 2$) essa soddisfa al più

$$v = \binom{k + s - 2}{s - 1} - (3k - \delta - 1)$$

equazioni d'ordine $s - 1$ linearmente indipendenti; e tale massimo è raggiunto.

Infatti, per le condizioni viste nel n. 3, affinché V_k possieda $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ è necessario che non siano tutte nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta - 2k + 1$ delle ultime k orizzontali.

Ora: se V_k soddisfacesse a $v + 1$ equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) sarebbero invece tutte nulle queste matrici perchè i punti derivati d'ordine $s - 1$ s'esprirebbero tutti mediante combinazioni lineari di $3k - \delta - 2$ di essi e dei punti che individuano l' $S(s - 2)$ osculatore.

E il massimo v è raggiunto com'è provato dal n.º seguente dove si determinano tutte le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ e che soddisfano esattamente a v equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.).

OSSERVAZIONE. — Siccome una $\gamma_{r,s}$ ($r < s - 2$) è sempre una $\gamma_{s-2,s}$ dal teorema precedente segue: una V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ non può soddisfare a più di v equazioni d'ordine $s - 1$ linearmente indipendenti ($2k - 1 < \delta < 3k - 2$; $0 < r \leq s - 2$). Rimane tuttavia da vedere, per $r < s - 2$, qual'è il massimo effettivamente raggiunto.

7. Sussiste il teorema:

Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$, $s > 2$) e che soddisfano al massimo numero v d'equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi, sono le V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ i cui $S(s - 2)$ osculatori

⁽²²⁾ VILLA, P, p. 6.

riempiono l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente, dove ρ è la dimensione dell' $S(s-2)$ osculatore generico $\left(\rho_0 \leq \rho \leq \frac{(s-1) \cdot \dots \cdot (s+k-2)}{k!} - 1\right)$ ⁽²³⁾.

Infatti lo spazio ambiente di una tale V_k è l' $S(s-1)$ osculatore generico (n. 2). Per il teorema del n. 6, V_k soddisfa $\binom{k+s-2}{s-1} - (3k-\delta-1)$ equazioni d'ordine $s-1$ lin. indep.; i punti derivati d'ordine $s-1$ (lin. indep.) di V_k sono quindi $3k-\delta-1$.

Siccome, per ipotesi, l' $S(s-2)$ osculatore generico ha dimensione ρ , è dunque necessario che V_k appartenga all' $S_{\rho+3k-\delta-1}$. Ed è pure necessario che gli $S(s-2)$ osculatori alla V_k riempiano l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente: infatti, se la varietà $W(s-2)$ luogo degli $S(s-2)$ osculatori a V_k avesse dimensione $\rho+3k-\delta-2$ ⁽²⁴⁾, sarebbero tutte nulle, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime k orizzontali, contrariamente all'ipotesi che V_k possieda $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2, s}$ (cfr. n. 3).

Inversamente, una V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ per cui l' $S(s-2)$ osculatore generico abbia dimensione ρ e tale che i suoi $S(s-2)$ osculatori riempiano l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente, possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2, s}$. Infatti, per una tale V_k , i punti derivati d'ordine $s-1$ lin. indep. non possono essere più di $3k-\delta-1$ perchè V_k appartiene all' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ e non possono essere meno di $3k-\delta-1$ perchè gli $S(s-2)$ osculatori non riempirebbero lo spazio ambiente ⁽²⁵⁾: essi sono quindi $3k-\delta-1$ esattamente.

L' $S(s-1)$ osculatore generico a V_k è quindi l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente.

Segue che V_k annulla, identicamente rispetto ai $d\tau_i$, tutte le matrici che si ottengono dalla (2) sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime $k+1$ orizzontali.

E V_k non annulla (identicamente rispetto ai $d\tau_i$) le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime k orizzontali perchè i suoi $S(s-2)$ osculatori riempiono l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente ⁽²⁶⁾.

⁽²³⁾ Il numero ρ_0 si calcola così: Quando l' $S(s-2)$ osculatore generico di una V_k non è regolare, V_k soddisfa ad equazioni d'ordine $s-2$ e quindi soddisfa alle equazioni d'ordine $s-1$ che si ottengono per derivazione. Se π è il numero di queste equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.) e se vogliamo che sia $\pi \leq \nu$ (n. 6), la dimensione dell' $S(s-2)$ non potrà scendere oltre un certo limite ρ_0 . Se, ad es., $k=2$, $s=4$, $\delta=3$ è $\rho_0=4$ (cfr. n. 10). Per $s=3$ è sempre $\rho_0 = k$.

⁽²⁴⁾ VILLA, N, n. 8.

⁽²⁵⁾ VILLA, N, n. 8.

⁽²⁶⁾ Se $s=3$ ciò è evidente. Per $s > 3$, quando V_k soddisfa esattamente a ν equazioni d'ordine $s-1$, se sono nulle (identicamente rispetto ai $d\tau_i$) tutte le matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta-2k+1$ delle ultime k orizzontali lo sono anche (identicamente rispetto ai $\nu_{i_1 i_2 \dots i_{s-2}}$) tutte le matrici che si ottengono dalla (10) del n. 17 sopprimendo

V_k possiede dunque $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ (n. 3).

Se $s=3$ è senz'altro $\rho=k$ e dal precedente teorema segue il risultato, a cui ero già pervenuto in altro mio lavoro ⁽²⁷⁾:

Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$) e che soddisfano al massimo numero ν d'equazioni di LAPLACE (lin. indep.), compatibile con tale ipotesi, sono le V_k dell' $S_{4k-\delta-1}$ i cui S_k tangenti riempiono l' $S_{4k-\delta-1}$ ambiente.

Su questo risultato si ritornerà nel n. 14.

OSSERVAZIONE. — Abbiamo visto che: le V_k dell' S_n i cui $S(s-2)$ osculatori riempiono l' S_n ambiente posseggono $\infty^{\rho-n+3k-1} E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ (ρ essendo la dimensione dell' $S(s-2)$ generico: $1 < n - \rho \leq k$; $s > 2$).

Ma, siccome ogni $\gamma_{r,s}$ di una V_k ($r < s-2$) è anche $\gamma_{s-2,s}$ di V_k , ciò non esclude che gli E_2 di $\gamma_{s-2,s}$ della predetta V_k dell' S_n possano essere pure E_2 di $\gamma_{r,s}$ di essa con $r < s-2$.

Nasce così l'importante questione di sapere, data una V_k dell' S_n i cui $S(s-2)$ osculatori di dimensione ρ riempiono l' S_n ambiente, se e quando gli $\infty^{\rho-n+3k-1} E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ della V_k sono pure E_2 di $\gamma_{r,s}$ di essa (dove $r < s-2$).

8. Le V_k dell' S_n , i cui $S(s-2)$ osculatori di dimensione ρ riempiono l' S_n ambiente ($1 < n - \rho \leq k$), sono caratterizzate dal teorema del n. 7. A queste varietà sono dedicati i nn. 9, 10, 11.

Osserviamo intanto che l'esistenza di $\infty^{\rho-n+3k-1} E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ per le V_k predette dipende soltanto dalla dimensione dello spazio a cui appartengono

$\delta - 2k + 1$ delle ultime k orizzontali (sicchè gli $S(s-2)$ osculatori a V_k formano una varietà di dimensione $\rho + 3k - \delta - 2$). Per verificare ciò conviene procedere nel modo seguente (ad es. per $\delta = 2k$): se P_1, P_2, \dots, P_{k-1} sono $k-1$ punti lin. indep. che insieme all' $S(s-2)$ osculatore individuano l' $S(s-1)$ osculatore, sicchè $x_{i_1 i_2 \dots i_{s-2}} = (P_1, \dots, P_{k-1}, S(s-2))$, la (3) (oppure la (10) del n. 17) diviene del tipo

$$(*) \quad \begin{vmatrix} S(s-2) \\ \Sigma a_j P_j \\ \dots \\ \Sigma b_j P_j \\ \Sigma c_j P_j \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

(a, b, c sono coefficienti). E l'annullarsi della matrice che si ottiene dalla (*) sopprimendo ad es. l'ultima orizzontale implica quello del determinante

$$\begin{vmatrix} a_j \\ \dots \\ b_j \end{vmatrix}$$

⁽²⁷⁾ VILLA, M, n. 33.

e dalla dimensione ρ dell' $S(s - 2)$ osculatore generico (e che ciò avviene per esse solamente).

Queste V_k si dirà quindi che presentano un comportamento *ordinario* rispetto agli E_2 di $\gamma_{s-2,s}$ che posseggono.

I coni $C_k^{\delta,s}$ ad esempio, caratterizzati dal teorema del n. 4, studiati nel n. 5, sono invece varietà *eccezionali* rispetto agli E_2 di $\gamma_{r,s}$ che posseggono in quanto non rientrano nel precedente tipo di V_k ; e in tale eccezionalità risiede appunto il loro interesse.

9. Fra le predette V_k dell' S_n sono notevoli quelle relative al valore massimo di ρ , cioè $\rho = \frac{(s-1) \cdot \dots \cdot (s-2+k)}{k!} - 1$.

Si ha dunque in particolare:

Le V_k dell' S_n , i cui $S(s-2)$ osculatori sono regolari ⁽²⁸⁾ e riempiono l' S_n ambiente, posseggono $\infty^{\frac{(s-1) \cdot \dots \cdot (s-2+k)}{k!} - n + 3k - 2}$ E_2 di $\gamma_{s-2,s}$

$$\left(1 < n - \frac{(s-1) \cdot \dots \cdot (s-2+k)}{k!} + 1 \leq k; s > 2 \right).$$

E, fra le V_k dell' S_n del n. 8, assai importanti sono quelle relative al minimo valore di ρ , $\rho = \rho_0$, perchè sono *le uniche* V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ e per cui lo spazio ambiente ha la minima dimensione compatibile con tale ipotesi (cfr. n. 15).

10. Ritornando al caso di ρ qualunque, per $n - \rho = k$, si ha ($s \geq 3$):

Le V_k dell' $S_{k+\rho}$, i cui $S(s-2)$ osculatori hanno dimensione ρ e riempiono l' $S_{k+\rho}$ ambiente, posseggono esattamente ∞^{2k-2} curve $\gamma_{s-2,s}$.

Per $s=3$ è $\rho=k$ e si ha:

Le V_k dell' S_{2k} , i cui S_k tangenti riempiono l' S_{2k} ambiente, posseggono esattamente ∞^{2k-2} curve $\gamma_{1,3}$ ⁽²⁹⁾.

Per le superficie ($k=2$) essendo $1 < n - \rho \leq k$, è necessariamente $n - \rho = 2$, e si ha:

Le superficie dell' $S_{\rho+2}$, i cui $S(s-2)$ osculatori hanno dimensione ρ e riempiono l' $S_{\rho+2}$ ambiente, posseggono $\infty^2 \gamma_{s-2,s}$.

⁽²⁸⁾ L' $S(m)$ osculatore generico a una V_k dicesi, con BOMPIANI, regolare quando ha dimensione $\frac{(m+1) \cdot \dots \cdot (m+k)}{k!} - 1$, cioè quando V_k non soddisfa ad equazioni d'ordine $< m + 1$.

⁽²⁹⁾ Quest'ultimo teorema si trova già nel n. 26 di M.

Per $s=3$ è $\rho=2$ e si ritrovano le superficie dell' S_4 (non sviluppabili) le quali, com'è noto ⁽³⁰⁾, posseggono $\infty^2 \gamma_{1,3}$.

Per $s=4$ può essere $\rho=5$ oppure $\rho=4$ ⁽³¹⁾ e si hanno corrispondentemente le superficie seguenti, che posseggono $\infty^2 \gamma_{2,4}$:

a) *Le superficie dell' S_7 , i cui $S(2)$ osculatori sono regolari e riempiono l' S_7 ambiente.*

b) *Le superficie dell' S_6 , soddisfacenti ad un' equazione di Laplace e i cui $S(2)$ osculatori riempiono l' S_6 ambiente.*

11. Per $n-\rho < k$ vi è invece profonda differenza fra i casi $s=3$ e $s > 3$, come ora vedremo.

Per $s=3$ ($\rho=k$) ho dimostrato infatti, in altro mio lavoro ⁽³²⁾, che:

Gli $\infty^{4k-n-1} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ di una V_k dell' S_n ($k < n < 2k$), i cui S_k tangenti riempiono l' S_n ambiente, sono tutti e soli gli E_2 di $\gamma_{1,3}$ delle V_{n-k} dell' $S_{2(n-k)}$ situate su di essa.

Queste V_{n-k} dell' $S_{2(n-k)}$ sono del tipo delle predette V_k dell' S_{2k} (n. 10) perchè i loro S_{n-k} tangenti riempiono l' $S_{2(n-k)}$ ambiente; e esse posseggono quindi $\infty^{2(n-k)-2}$ curve $\gamma_{1,3}$ esattamente le quali sono $\gamma_{1,3}$ anche per V_k ⁽³³⁾.

E dal precedente risultato segue:

Le curve $\gamma_{1,3}$ di una V_k dell' S_n ($k < n < 2k$), i cui S_k tangenti riempiono l' S_n ambiente, dipendono da $2k-n$ funzioni arbitrarie (tante cioè quant'è la dimensione del sistema degli E_2 di $\gamma_{1,3}$ aventi in comune uno stesso E_1).

Orbene: per $s > 3$ si presentano fatti completamente diversi dai precedenti.

Consideriamo ad es. il caso $s=4$, e mettiamoci nell' ipotesi più semplice:

$$n-\rho = k-1 \text{ e } \rho \text{ massimo, } \rho = \frac{k(k+3)}{2}.$$

Si tratta dunque di una V_k dell' $S_{\frac{k(k+5)}{2}-1}$ i cui $S(2)$ osculatori sono regolari e riempiono l' $S_{\frac{k(k+5)}{2}-1}$ ambiente.

⁽³⁰⁾ BOMPIANI, *Sullo spazio d' immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve*, « Rendiconti dell' Istituto Lombardo », vol. 47, p. 192, 1914.

⁽³¹⁾ È qui $\rho_0=4$ (cfr. n. 7). Infatti non può essere $\rho=3$ perchè una tale superficie soddisfa a due equazioni di LAPLACE e quindi almeno a tre equazioni di 3° ordine (lin. indep.), mentre una superficie che possiede $\infty^2 \gamma_{2,4}$ soddisfa, per il teorema del n. 6, al più a $v=2$ equazioni del 3° ordine.

⁽³²⁾ VILLA, M, n. 34.

⁽³³⁾ Queste curve assorbono tutti gli E_2 di $\gamma_{1,3}$ di V_k . Ciò non esclude affatto che esistano $\gamma_{1,3}$ di V_k diverse dalle precedenti e che sarebbe interessante ricercare. Ad es.: una V_3 dell' S_5 possiede $\infty^6 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ e sono $\gamma_{1,3}$ di essa le $\gamma_{1,3}$ delle superficie dell' S_4 sue sezioni iperplane. Ma esistono $\gamma_{1,3}$ di V_3 appartenenti all' S_5 ? Quali sono?

Questa V_k possiede $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{2,4}$.

Se le $\gamma_{2,4}$ di V_k dipendessero da 1 funzione arbitraria, le sezioni iperpiane V_{k-1} di V_k dovrebbero possedere $\infty^{2(k-1)-2} \gamma_{2,4}$ esattamente.

Per la grande libertà che vi è nella scelta di V_k e per il fatto che l'esistenza sopra di essa di $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{2,4}$ dipende soltanto dalla dimensione dello spazio ambiente e da quella dell' $S(2)$ osculatore (n. 8), altrettanto dovrebbe avvenire per le V_{k-1} sezioni iperpiane riguardo alle $\infty^{2k-2} \gamma_{2,4}$ poste su di esse.

Insomma, l'esistenza di $\infty^{2k-2} \gamma_{2,4}$ sulle V_{k-1} sezioni iperpiane di V_k dovrebbe dipendere soltanto dalla dimensione dello spazio ambiente, e da quella dell' $S(2)$ osculatore (come appunto avviene per $s=3$).

Le V_{k-1} predette dovrebbero perciò rientrare nel tipo del n. 10: *necessariamente* gli $S(2)$ osculatori ad una tale V_{k-1} dovrebbero riempire l' $S_{\frac{k(k+5)}{2}-2}$ ambiente.

Ciò invece non avviene: infatti l' $S(2)$ osculatore ad una V_{k-1} ha al più dimensione $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$ e quindi la varietà $W(2)$, luogo degli $S(2)$ osculatori a V_{k-1} , ha al più dimensione $\frac{(k-1)(k+2)}{2} + k$ ⁽³⁴⁾; ed essendo $\frac{k(k+5)}{2} - 2 > \frac{(k-1)(k+2)}{2} + k$ la $W(2)$ non può coincidere con l' $S_{\frac{k(k+5)}{2}-2}$ ambiente ($k > 1$).

È dunque assurda l'ipotesi che le $\gamma_{2,4}$ di V_k dipendano da una funzione arbitraria.

Facciamo il caso $k=3$ che permette di arrivare alla stessa conclusione ma in modo più semplice:

Consideriamo una V_3 dell' S_{11} , i cui $S(2)$ osculatori sono regolari e riempiono l' S_{11} ambiente.

Essa possiede $\infty^6 E_2$ di $\gamma_{2,4}$ (n. 7). Le sezioni iperpiane sono superficie dell' S_{10} .

Ora, *una superficie dell' S_{10} non può possedere $\infty^2 \gamma_{2,4}$* perchè lo spazio ambiente di una superficie che possieda $\infty^2 \gamma_{2,4}$ è, per il teorema del n. 2, l' $S(3)$ osculatore il quale ha al più dimensione 9.

È così escluso che le $\gamma_{2,4}$ della V_3 dipendano da 1 funzione arbitraria.

L'interesse notevole delle precedenti conclusioni è posto in luce nel numero seguente.

(34) VILLA, N, n. 8.

Sarebbe desiderabile, per $s > 3$ e $n - \rho < k$, uno studio approfondito delle varietà in discorso in relazione alle loro curve $\gamma_{s-2, s}$.

12. Come ebbi già occasione di rilevare in miei precedenti lavori, in tutti i casi finora noti di V_k che posseggono $\infty^{2k+p-1} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($0 < p < k-1$), gli E_2 di $\gamma_{1,3}$ della V_k sono organizzabili in curve $\gamma_{1,3}$ e queste dipendono da p funzioni arbitrarie (quant'è la dimensione del sistema degli E_2 di $\gamma_{1,3}$ aventi in comune uno stesso E_1). E si noti che ho potuto dimostrare che ciò avviene sempre se $k < 5$.

È sorta così la questione, ancora insoluta, di sapere se, per $k \geq 5$, le $\gamma_{1,3}$ di una V_k che possieda ∞^{2k+p-1} ($0 < p < k-1$) E_2 di $\gamma_{1,3}$ dipendono *necessariamente* da funzioni arbitrarie e se queste sono sempre in numero p .

Ma contemporaneamente a questa questione si poneva quest'altro problema (che interessava in un punto delicato la teoria delle curve quasi-asintotiche): per $s > 3$, le $\gamma_{s-2, s}$ di una V_k che possieda ∞^{2k+p-1} ($0 < p < k-1$) E_2 di $\gamma_{s-2, s}$ dipendono necessariamente da funzioni arbitrarie? ⁽³⁵⁾.

E questa domanda era lecita perchè non si conoscevano esempi in cui si presentasse il contrario: e anche i coni $C_k^{2k+p-1, s}$ caratterizzati nel n. 4, e studiati nel n. 5, porgono un esempio notevole, per tutti i possibili valori di p, r, s ($s > 2$), di V_k che possiede $\infty^{2k+p-1} E_2$ di $\gamma_{r, s}$ organizzabili in curve $\gamma_{r, s}$ dipendenti da p funzioni arbitrarie.

Orbene: per i risultati del n. 11 *la risposta alla precedente domanda è negativa*.

Insomma, per $s > 3$, una V_k che possieda $\infty^{2k+p-1} E_2$ di $\gamma_{s-2, s}$ può presentare entrambi i casi:

1.° Le $\gamma_{s-2, s}$ della V_k non dipendono da funzioni arbitrarie (come, ad esempio, per una V_3 dell' S_{11} i cui $S(2)$ osculatori hanno dimensione regolare e riempiono l' S_{11} ambiente (n. 11)).

2.° Le $\gamma_{s-2, s}$ della V_k dipendono da p funzioni arbitrarie (come per i coni $C_k^{2k+p-1, s}$ studiati nel n. 5).

§ 3. Sulle V_k che posseggono $\infty^s E_2$ di $\gamma_{r, s}$ e il cui spazio ambiente ha la massima o la minima dimensione.

13. Il teorema ricordato nel n. 2 e i teoremi dei nn. 3, 6 relativi al numero d'equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.) a cui può soddisfare una V_k

⁽³⁵⁾ Si noti che bastava porre il problema per le $\gamma_{s-2, s}$ essendo queste le più generali $\gamma_{r, s}$ ($r \leq s-2$) (cfr. VILLA, N, n. 1).

che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$, permettono (eventualmente con l'aiuto di altre considerazioni) di determinare la *massima* e la *minima* dimensione che può competere allo spazio ambiente di una V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ (k, δ, r, s essendo assegnati).

Per il teorema del n. 2, lo spazio ambiente delle nostre V_k è l' $S(s-1)$ osculatore generico: per $s > 3$, la dimensione di questo spazio non dipende soltanto dalle equazioni d'ordine $s-1$ a cui V_k soddisfa ma anche da quelle d'ordine $s-2$, d'ordine $s-3, \dots$, dipende cioè anche dalla dimensione dell' $S(s-2)$ osculatore generico.

Invece per $s=3$ le cose procedono diversamente perchè non interviene la dimensione dell' $S(1)$ che è sempre k ; e quindi la determinazione del massimo o del minimo per la dimensione dello spazio ambiente della V_k segue senz'altro dai teoremi predetti, come appare nel n.º seguente.

Per $s > 3$, si hanno i risultati del n. 15.

14. La massima e la minima dimensione che può avere lo spazio ambiente di una V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$), è assegnata, per tutti i possibili valori di k e di δ , dal teorema seguente:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$) essa appartiene ad un S_d , dove è

$$4k - \delta - 1 \leq d \leq \frac{(3k - \delta - 1)(3k - \delta + 2)}{2} + \delta - 2k + 1.$$

Infatti, se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$, ogni E_1 di V_k è E_1 di $\gamma_{1,3}$ e quindi, per il teorema ricordato nel n. 2, essa appartiene all' $S(2)$ osculatore in un suo punto generico.

Ma per i teoremi dei nn. 3, 6, una V_k dotata di $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ soddisfa l equazioni di LAPLACE, dove

$$\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(3k - \delta - 1)(3k - \delta)}{2} \leq l \leq \frac{k(k+1)}{2} - (3k - \delta - 1).$$

Siccome la dimensione d dell' $S(2)$ osculatore a V_k , e quindi dello spazio ambiente di V_k , è la differenza fra il massimo possibile $\frac{k(k+3)}{2}$ della dimensione di un $S(2)$ osculatore ad una V_k e il numero l delle equazioni di LAPLACE lin. indep. a cui V_k soddisfa, si conclude appunto che

$$4k - \delta - 1 \leq d \leq \frac{(3k - \delta - 1)(3k - \delta + 2)}{2} + \delta - 2k + 1.$$

Sono note le V_k dotate di $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ relative ai valori estremi di d , come risulta dai teoremi seguenti.

Sussiste il teorema:

L'unica V_k che possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$), e per cui lo spazio ambiente raggiunge la massima dimensione compatibile con tale ipotesi, è il cono $C_k^{\delta,3}$ (36).

Infatti, per il teorema ricordato nel n. 2, lo spazio ambiente della V_k è l' $S(2)$ osculatore in un punto generico e, se questo ha dimensione massima, V_k soddisfa al minimo numero d'equazioni di LAPLACE (lin. indep.) e perciò, per il teorema del n. 4 ($s = 3$), essa è il cono $C_k^{\delta,3}$.

Sussiste pure il teorema:

Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,2}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$), e per cui lo spazio ambiente raggiunge la minima dimensione compatibile con tale ipotesi, sono le V_k dell' $S_{4k-\delta-1}$ i cui S_k tangenti riempiono l' $S_{4k-\delta-1}$ ambiente.

Infatti, per il teorema ricordato nel n. 2, lo spazio ambiente di una tale V_k è l' $S(2)$ osculatore in un punto generico, e, se questo ha dimensione minima, V_k soddisfa al massimo numero d'equazioni di LAPLACE (lin. indep.) e perciò, per il teorema del n. 7 ($s = 3$), essa appartiene all' $S_{4k-\delta-1}$ e i suoi S_k tangenti riempiono l' $S_{4k-\delta-1}$ ambiente.

15. Sussiste il teorema:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$; $r < s - 1$), e se l' $S(s - 2)$ osculatore generico di essa ha dimensione ρ ($\rho_0 \leq \rho \leq \frac{(s-1) \cdots (s+k-2)}{k!} - 1$), la dimensione d dello spazio ambiente di V_k soddisfa alle disuguaglianze

$$\rho + 3k - \delta - 1 \leq d \leq \rho + \binom{3k - \delta + s - 3}{s - 1}.$$

Infatti lo spazio ambiente della V_k è l' $S(s - 1)$ osculatore generico (n. 2). Per il teorema del n. 3, la V_k possedendo $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$, soddisfa almeno a $\binom{k+s-2}{s-1} - \binom{3k-\delta+s-3}{s-1}$ equazioni d'ordine $s - 1$ lin. indep.; i punti derivati d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) di V_k sono quindi al più $\binom{3k-\delta+s-3}{s-1}$.

E per il teorema del n. 6, V_k soddisfa al più $\binom{k+s-2}{s-1} - (3k - \delta - 1)$ equazioni d'ordine $s - 1$ lin. indep.; i punti derivati d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) di V_k sono quindi almeno $3k - \delta - 1$.

(36) Per $\delta = 2k - 1$, sussiste un teorema più generale (teorema di BOMPIANI esteso): cfr. n. 15.

Siccome, per ipotesi, l' $S(s-2)$ osculatore generico ha dimensione ρ , l'asserto è così dimostrato.

Il minimo valore indicato per d è raggiunto, almeno per $r = s-2$, e le V_k relative a questo caso sono note.

Dal teorema del n. 7 si ha infatti:

Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2, s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$), tali che l' $S(s-2)$ osculatore generico abbia dimensione ρ ($\rho_0 \leq \rho \leq \frac{(s-1) \cdot \dots \cdot (s+k-2)}{k!} - 1$) e lo spazio ambiente abbia la minima dimensione compatibile con tali ipotesi, sono le V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ i cui $S(s-2)$ osculatori riempiono l' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ ambiente.

Infatti lo spazio ambiente di una tale V_k è l' $S(s-1)$ osculatore generico (n. 2).

Siccome l' $S(s-2)$ osculatore generico ha dimensione ρ , l' $S(s-1)$ ha la minima dimensione compatibile con questa ipotesi quando V_k soddisfa al massimo numero d'equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.). Per il teorema del n. 7 l'asserto è così dimostrato.

Il massimo valore indicato per d è certamente raggiunto, qualunque sia r , per $\rho = \frac{(s-1) \cdot \dots \cdot (s+3k-\delta-3)}{(3k-\delta-1)!} + \delta - 2k$ perchè così avviene appunto per i coni $C_k^{\delta, s}$ (n. 5).

Se $s > 3$, per i valori di ρ diversi dal precedente non è noto invece se il valore più alto indicato per d è effettivamente raggiunto; per quanto ciò debba ritenersi probabile, l'esistenza di varietà siffatte rimane da assodare.

Si ha pure il notevole risultato:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r, s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$; $r < s-1$) essa appartiene ad uno spazio al più di dimensione

$$\omega = \frac{(s-1) \cdot s \cdot \dots \cdot (s+k-2)}{k!} + \binom{3k-\delta+s-3}{s-1} - 1$$

qualunque sia r .

Infatti la dimensione ρ dell' $S(s-2)$ osculatore ad una V_k è al più

$$\frac{(s-1) \cdot s \cdot \dots \cdot (s+k-2)}{k!} - 1.$$

Da cui, ponendo $\delta = 2k-1$, si ha il risultato (che segue del resto immediatamente dal teorema del n. 2 e che ho già esposto nel n. 4 di N):

Se ogni E_1 di una V_k è E_1 di $\gamma_{r, s}$, V_k appartiene al più ad un

$$S_{\frac{(s+1) \cdot \dots \cdot (s+k-1)}{k!} - 1}$$

qualunque sia r .

E questo massimo è raggiunto, qualunque sia r ; anzi si sa che l'unica V_h per cui ciò avviene è, qualunque sia r , la $V_k^{(s-1)^k}$ rappresentante le forme d'ordine $s-1$ dell' S_k (teorema di BOMPIANI esteso) ⁽³⁷⁾.

Per $s=3$, come già si disse nel n. 14, le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ e che appartengono ad S_ω sono soltanto i coni $C_k^{\delta,3}$.

Per $s > 3$ e $\delta > 2k-1$ non si conoscono invece esempi di V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ e che appartengano ad S_ω .

Si ha inoltre:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$; $r < s-1$) essa appartiene ad uno spazio almeno di dimensione

$$\rho_0 + 3k - \delta - 1 \quad (38).$$

E, per un risultato precedente, si perviene al teorema:

Le uniche V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$) e per cui lo spazio ambiente ha la minima dimensione compatibile con tale ipotesi sono le V_k dell' $S_{\rho_0+3k-\delta-1}$ i cui $S(s-2)$ osculatori hanno dimensione ρ_0 e riempiono l' $S_{\rho_0+3k-\delta-1}$ ambiente.

§ 4. I sistemi a caratteristica del Bompiani e il loro intervento nella teoria delle curve quasi-asintotiche.

16. Per il teorema del n. 3 intervengono nella teoria delle curve quasi-asintotiche i sistemi a caratteristica del BOMPIANI.

Questi sistemi meritano dunque di essere studiati anche per l'applicazione che se ne può fare alla teoria delle curve quasi-asintotiche, perchè dalla integrazione di tali sistemi seguirebbe la determinazione di nuove varietà dotate di curve quasi-asintotiche (o E_2 di tali curve) componenti totalità opportune.

Alcuni risultati notevoli ottenuti dal BOMPIANI ⁽³⁹⁾ sui sistemi a caratteristica hanno già trovato applicazione nei miei lavori ⁽⁴⁰⁾; la presenza di *coni* nel teorema del n. 4 ha la sua origine appunto nella presenza di sistemi a caratteristica e nel teorema di BOMPIANI sui coni che vi si collega (cfr. n. 4).

Le V_k che rappresentano $\delta - 2k + 1$ gruppi d'equazioni di 2° ordine a caratteristica (ciascun gruppo essendo composto da k equazioni) e non altre

⁽³⁷⁾ Si veda VILLA, N, n. 5.

⁽³⁸⁾ Il numero ρ_0 si sa calcolare (cfr. n. 7).

⁽³⁹⁾ BOMPIANI, A.

⁽⁴⁰⁾ VILLA, N, M, P.

equazioni del 2° ordine lin. indep. dalle precedenti, sono, per il teorema di BOMPIANI ora ricordato, soltanto i coni proiettanti da un $S_{\delta-2k}$ una $V_{3k-\delta-1}$ (che non soddisfa ad equazioni del 2° ordine) ($2k-1 \leq \delta < 3k-2$).

Invece, per $s > 3$, le V_k che rappresentano $\delta-2k+1$ gruppi d'equazioni d'ordine $s-1$ a caratteristica della forma (8), e non altre equazioni d'ordine $s-1$ lin. indep. dalle precedenti, sono di tipo diverso; solamente nel caso assai particolare che V_k soddisfi al massimo numero d'equazioni di LAPLACE (lin. indep.) compatibile con l'ipotesi predetta, si ritorna ai coni proiettanti da un $S_{\delta-2k}$ una $V_{3k-\delta-1}$ (che non soddisfa equazioni di LAPLACE).

Consideriamo, ad esempio, il caso $s=4$ e $\delta=2k$: si hanno $\frac{k(k+1)}{2}$ equazioni del 3° ordine (lin. indep.) a caratteristica (e non altre equazioni del 3° ordine lin. indep. dalle precedenti). Il BOMPIANI, nell'ipotesi che esistano α equazioni del 2° ordine lin. indep. ($2 < \alpha \leq k$) componenti un sistema (necessariamente a caratteristica) parabolico, ha trovato che ⁽⁴¹⁾:

V_k si compone di $\infty^{k-\alpha}$ coni di prima specie aventi i loro vertici sopra un $S_{k-\alpha}$ ($2 < \alpha \leq k$).

Ora, se $\alpha=k$ (cioè quando le $\frac{k(k+1)}{2}$ equazioni del 3° ordine si ottengono derivando le k equazioni del 2° ordine componenti il sistema parabolico), la V_k è dunque un cono di 1ª specie ⁽⁴²⁾; mentre se $\alpha < k$ ecco che V_k non è più un cono.

Dal teorema del n. 3 e da un risultato a cui pervenni in una Nota recente studiando la predetta V_k composta di $\infty^{k-\alpha}$ coni di 1ª specie ⁽⁴³⁾, segue (cfr. anche il n. 17):

Se una V_k possiede $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{2,4}$, e se soddisfa al minimo numero d'equazioni del 3° ordine (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi e ad α equazioni di Laplace componenti un sistema parabolico ($2 < \alpha \leq k$), essa è necessariamente una V_k dell' $S_{\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + k - \alpha}$, situata sul cono $C_{2k-\alpha}^{5k-3\alpha, 4}$ (n. 5),

formata da ∞^{k-1} rette poste negli $S_{k-\alpha+1}$ del cono (e componenti $\infty^{k-\alpha}$ coni di 1ª specie).

E il risultato appare notevole anche per sè stesso perchè esprime una proprietà caratteristica di questa varietà.

⁽⁴¹⁾ BOMPIANI, A, p. 126.

⁽⁴²⁾ In verità, V_k potrebbe anche comporsi di un numero discreto di tali coni, ma noi intendiamo sempre escluse siffatte varietà (varietà riducibili).

⁽⁴³⁾ VILLA, N, n. 9.

Per α massimo, $\alpha = k$, la predetta V_k è essa stessa un cono, e precisamente un cono $C_k^{2k,4}$ (n. 5), e ciò d'accordo col teorema del n. 4.

Dunque: mentre per $s = 3$, le V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ e che soddisfano esattamente al minimo numero μ d'equazioni del 2° ordine (lin. indep.) sono soltanto i coni $C_k^{\delta,3}$, già per $s = 4$, il cono $C_k^{2k,4}$ e la predetta V_k ($\alpha < k$) posseggono entrambi $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{2,4}$ e soddisfano entrambi esattamente al numero minimo μ d'equazioni del 3° ordine (lin. indep.).

Ciò spiega la profonda differenza fra i casi $s = 3$ e $s > 3$ nel teorema del n. 4 e dimostra che la condizione ulteriore posta in tale teorema, per $s > 3$ e $\delta > 2k - 1$ (cioè che la V_k soddisfi al massimo numero d'equazioni di LAPLACE), è realmente necessaria per caratterizzare i coni $C_k^{\delta,s}$ nel modo del n. 4.

§ 5. La varietà $W(s - 2)$.

17. In miei precedenti lavori (⁴⁴), ho mostrato come la ricerca delle varietà V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ si colleghi a quella delle V_k per cui la varietà W , luogo degli S_k tangenti a V_k , ha dimensione minore dell'ordinaria $2k$. Più precisamente ho dimostrato che:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{1,3}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$), la varietà W formata dagli S_k tangenti ad essa ha esattamente dimensione $2k - (\delta - 2k + 1)$.

Per le varietà V_k che posseggono $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$, considerando più in generale la varietà $W(s - 2)$ luogo degli $S(s - 2)$ osculatori a V_k , ho dimostrato in N (n. 8), per $s > 3$, che: se una V_k è tale che la dimensione di $W(s - 2)$ s'abbassa di $\delta - 2k + 1$ unità rispetto a quella che ha in generale, V_k soddisfa a parte delle condizioni che comporta l'esistenza sopra di essa di $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ e che sono indicate nella N stessa.

E nella N aggiungevo che rimaneva da vedere fino a che punto questa proposizione si potesse invertire.

Ora, per i teoremi dei nn. 3 e 6, siamo in grado di invertire la proposizione precedente, nell'ipotesi che V_k soddisfi al minimo o al massimo numero d'equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) compatibile con l'esistenza di $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$.

Sussiste il teorema:

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{r,s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$) e se soddisfa al minimo numero d'equazioni d'ordine $s - 1$ (lin. indep.) compatibile con tale

(⁴⁴) VILLA, N , n. 7; M.

ipotesi, la varietà $W(s-2)$ luogo degli $S(s-2)$ osculatori a V_k ha esattamente dimensione

$$D = (\delta - 2k + 1),$$

dove $D = \rho + k$ e ρ è la dimensione dell' $S(s-2)$ generico ⁽⁴⁵⁾

Infatti, per il teorema del n. 3, V_k soddisfa a $\delta - 2k + 1$ gruppi d'equazioni, d'ordine $s-1$, a caratteristica che possono suppersi del tipo

$$(9) \quad \begin{aligned} x_{1i_1i_2\dots i_{s-2}} &= S(s-2) \\ x_{2i_1i_2\dots i_{s-2}} &= S(s-2) & (i_1; i_2; \dots; i_{s-2} = 1, 2, \dots, k). \\ \dots & \\ \dots & \\ x_{\delta-2k+1i_1i_2\dots i_{s-2}} &= S(s-2). \end{aligned}$$

D'altra parte (cfr. N, n. 8):

Condizione necessaria e sufficiente perchè la $W(s-2)$ di V_k abbia dimensione $D = (\delta - 2k + 1)$ è che siano tutte nulle, identicamente rispetto ai parametri $v_{i_1i_2\dots i_{s-2}}$, le matrici che s'ottengono dalla

$$(10) \quad \begin{vmatrix} S(s-2) \\ \Sigma x_{1i_1i_2\dots i_{s-2}} v_{i_1i_2\dots i_{s-2}} \\ \Sigma x_{2i_1i_2\dots i_{s-2}} v_{i_1i_2\dots i_{s-2}} \\ \dots \\ \dots \\ \Sigma x_{ki_1i_2\dots i_{s-2}} v_{i_1i_2\dots i_{s-2}} \end{vmatrix}$$

sopprimendo $\delta - 2k$ delle ultime k orizzontali (mentre non sono tutte nulle, identicamente rispetto ai $v_{i_1i_2\dots i_{s-2}}$, quelle che si ottengono sopprimendo $\delta - 2k + 1$ delle ultime k orizzontali).

Ora, è evidente che per le (9) queste condizioni sono soddisfatte.

Se una V_k possiede $\infty^\delta E_2$ di $\gamma_{s-2,s}$ ($2k - 1 \leq \delta < 3k - 2$) e se soddisfa al massimo numero d'equazioni d'ordine $s-1$ (lin. indep.) compatibile con tale ipotesi, la varietà $W(s-2)$ luogo degli $S(s-2)$ osculatori a V_k ha esattamente dimensione

$$D = (\delta - 2k + 1).$$

Infatti, per il teorema del n. 7, si tratta di una V_k dell' $S_{\rho+3k-\delta-1}$ i cui $S(s-2)$ osculatori riempiono lo spazio ambiente ed è appunto $D = (\delta - 2k + 1) = \rho + 3k - \delta - 1$ essendo $D = \rho + k$.

(45) In generale la dimensione della $W(s-2)$ di una V_k è appunto D (VILLA, N, n. 8).

Come già si disse, per $s = 3$ i precedenti risultati valgono in ogni caso, prescindendo cioè dall'ipotesi che V_k soddisfi al minimo o al massimo numero d'equazioni d'ordine $s - 1$, mentre per $s > 3$, all'infuori dei due casi considerati, la questione rimane aperta.

OSSERVAZIONE. — La presenza dei sistemi a caratteristica nella ricerca delle varietà V_k tali che la varietà $W(m)$, luogo degli $S(m)$ osculatori, ha dimensione minore dell'ordinaria fu osservata per la prima volta dal BOMPIANI ⁽⁴⁶⁾.

Invece la comparsa dei sistemi a caratteristica nella teoria delle curve quasi-asintotiche si verifica col teorema del n. 3. E il legame che ne risulta fra le V_k che posseggono $\infty^s E_2$ di $\gamma_{r,s}$ e le V_k per cui la $W(s - 2)$ ha dimensione minore dell'ordinaria è precisato dal primo teorema stabilito in questo numero.

La trattazione del n. 9 della mia Nota N acquista così maggiore interesse poichè il risultato di BOMPIANI sui sistemi a caratteristica del 3° ordine che viene ivi applicato si può ora collegare direttamente [senza cioè il tramite della $W(2)$] al problema sulle quasi-asintotiche: ciò è stato fatto nel n. 16 dove si è potuto in tal modo completare il risultato del n. 9 di N.

18. Dei risultati precedenti si possono fare alcune applicazioni al problema dell'abbassamento della dimensione della $W(m)$ di una V_k .

Si ha il teorema:

Se la $W(m)$ di una V_k ha dimensione $D - 1$, V_k soddisfa almeno a

$$\mu = \binom{k+m}{m+1} - \binom{k+m-l}{m+1}$$

equazioni d'ordine $m + 1$ lin. indep. ($D = \rho + k$, dove ρ è la dimensione dell' $S(m)$ osculatore generico; $0 < l \leq k$).

Se V_k soddisfa a μ equazioni lin. indep. d'ordine $m + 1$ esattamente, condizione necessaria e sufficiente perchè la $W(m)$ di V_k abbia dimensione $D - 1$ è che quelle μ equazioni compongano l gruppi a caratteristica di Bompiani e del tipo

$$(11) \quad x_{i_1 \dots i_m} = S(s - 2), \dots, x_{i_1 \dots i_m} = S(s - 2) \quad (i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, k)$$

Infatti si ricordi la conclusione a cui siamo giunti, verso la fine del n. 3, per l'annullarsi delle matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo un certo numero delle ultime k orizzontali (nell'ipotesi che il numero delle equazioni

⁽⁴⁶⁾ BOMPIANI, A, nn. 12, 29.

d'ordine $s - 1$ lin. indep. fosse il minimo) e si tengano presenti le condizioni necessarie e sufficienti perchè $W(m)$ abbia dimensione $D - l$ esposte nel n. 17 (in cui si ponga $l = \delta - 2k + 1$, $m = s - 2$).

Se il minimo numero d'equazioni d'ordine $m + 1$ (lin. indep.) a cui V_k soddisfa, compatibilmente all'ipotesi che $W(m)$ abbia dimensione $D - l$, fosse $< \mu$ altrettanto avverrebbe per l'annullarsi delle matrici che si ottengono dalla (3) sopprimendo $\delta - 2k$ delle ultime k orizzontali (in cui si ponga $l = \delta - 2k + 1$, $m = s - 2$) (cfr. N, n. 8), ciò che invece non è.

E così, nell'ipotesi che V_k soddisfi esattamente μ equazioni d'ordine $m + 1$ (lin. indep.), se $W(m)$ avesse dimensione $D - l$ senza che le μ equazioni componessero l gruppi a caratteristica altrettanto avverrebbe (cfr. N, n. 8) per l'annullarsi delle predette matrici estratte dalla (3), ciò che invece non è.

La condizione enunciata è dunque necessaria.

Ma essa è anche sufficiente come appare subito osservando che i gruppi possono suppersi del tipo (11).

Dal teorema ora dimostrato seguono i risultati dei nn. 12, 29 della Nota A più volte citata del BOMPIANI.

Si ha pure:

Se la $W(m)$ di una V_k ha dimensione $D - l$, V_k soddisfa al più

$$\binom{k + m}{m + 1} - (k - l)$$

equazioni d'ordine $m + 1$ (lin. indep.).

Tenendo presenti le condizioni necessarie e sufficienti perchè $W(m)$ abbia dimensione $D - l$ esposte nel n. 17, vale lo stesso ragionamento del n. 6 (si porrà inoltre $l = \delta - 2k + 1$, $m = s - 2$) ⁽⁴⁷⁾.

§ 6. Applicazioni.

19. La teoria delle curve quasi-asintotiche dà luogo a svariate e notevoli applicazioni.

Accennerò qui a due di queste:

Si supponga di voler ricercare le varietà V_k le cui sezioni con spazi lineari di data dimensione sono varietà di tipo assegnato. Ora, se quest'ultime varietà posseggono una certa totalità di $\gamma_{r,s}$ (o E_n di $\gamma_{r,s}$), siccome le $\gamma_{r,s}$

⁽⁴⁷⁾ Segue che se la $W(m)$ di una V_k ha dimensione $D - l$, il minimo per la dimensione ρ dell' $S(m)$ osculatore generico a V_k è ρ_0 , dove ρ_0 si calcola come nel n. 7 (ponendo inoltre $l = \delta - 2k + 1$, $m = s - 2$).

(o gli E_n di $\gamma_{r,s}$) di una varietà situata sopra un'altra sono tali anche per quest'ultima, la V_k cercata dovrà possedere una certa totalità Σ di $\gamma_{r,s}$ (o E_n di $\gamma_{r,s}$).

La ricerca si può così ricondurre a quella delle V_k che posseggono la totalità Σ (le V_k cercate sono fra di esse).

In questo modo, nella Memoria Lincea citata (n. 40), pervenni ai risultati seguenti (del primo dei quali specialmente sarebbe interessante trovare un'estensione):

a) Una V_4 tale che la sua sezione iperpiana generica sia una θ_3 ⁽⁴⁸⁾ è necessariamente la V_4^6 di S_8 di Segre, oppure un cono proiettante dal suo vertice una tale θ_3 .

b) Una V_4 tale che la sua sezione iperpiana generica sia una Φ_3 è necessariamente la Φ_4 oppure un cono proiettante dal suo vertice una tale Φ_3 ⁽⁴⁹⁾.

c) Escluse la V_4^6 di S_8 di Segre, la Φ_4 e le V_4 dell' S_7 (i cui S_4 tangenti riempiono lo spazio ambiente), una V_4 tale che la sua sezione iperpiana generica sia una V_3 che possenga $\infty^4 \gamma_{1,3}$ è necessariamente un cono proiettante dal suo vertice una tale V_3 .

In altro mio lavoro ⁽⁵⁰⁾ dimostrai pure nel modo predetto il noto teorema:

Una V_{r+i} tale che le sue sezioni con gli $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ dello spazio ambiente

siano V_r^{2r} rappresentabili su un S_r mediante il sistema delle quadriche di questo spazio, è necessariamente il cono proiettante da un S_{i-1} una tale V_r^{2r} ⁽⁵¹⁾.

Più in generale, per i coni proiettanti le varietà V_r^{nr} che rappresentano le forme d'ordine n di un S_r vale un teorema analogo dello SCORZA ⁽⁵²⁾ che ritengo probabile sussista anche nel campo più vasto in cui si svolgono le presenti ricerche (e non nel solo campo algebrico). Ma la deduzione di tale teorema per $n > 2$ non è altrettanto agevole come per $n = 2$ e la ragione di

⁽⁴⁸⁾ Indichiamo con θ_3 la sezione iperpiana generica della V_4^6 di S_8 di SEGRE rappresentante le coppie di punti di due piani.

⁽⁴⁹⁾ Ho indicato con Φ_4 la V_4 dell' S_8 situata sopra il cono di VERONESE (dell' S_8) incontrata dagli S_3 del cono in superficie; e Φ_3 è una sezione iperpiana generica di Φ_4 . Avrebbe un certo interesse vedere se la proprietà b) si può estendere (e entro quali limiti) alle varietà assai più generali Φ_k^r considerate in un mio lavoro recente: *Sulle varietà*

situate sui coni proiettanti la V_r^{2r} che rappresenta la totalità delle quadriche di S_r , Note I e II, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 6^a, 1938, pp. 365, 395.

⁽⁵⁰⁾ VILLA, P, p. 11.

⁽⁵¹⁾ Per $r = 3$, $i = 1$, questo teorema rientra nel risultato c).

⁽⁵²⁾ SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », vol. 28, 1909, p. 400.

ciò risiede ancora nella profonda differenza, di cui si disse nel n. 16, fra i casi $n = 2$ e $n > 2$ per le V_k che rappresentano gruppi d'equazioni d'ordine n a caratteristica.

Si ha infatti ⁽⁵³⁾:

Se la sezione iperpiana generica di una V_k è una $V_{k-1}^{n_{k-1}}$ rappresentante le forme d'ordine n dell' S_{k-1} ($n \geq 2$), V_k soddisfa esattamente $\mu = \binom{k+n-2}{n-1}$ equazioni (lin. indep.) d'ordine n e possiede esattamente $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{r, n+1}$ ($r < n$); per V_k vale quindi il teorema del n. 3.

Dimostriamo intanto che V_k non può soddisfare a più di μ equazioni d'ordine n . Invero se V_k soddisfacesse a $\mu + 1$ equazioni d'ordine n (lin. indep.), l' $S(n)$ osculatore generico a V_k avrebbe al più dimensione $\frac{(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}{k!} - \mu - 2$ e quindi l' $S(n)$ osculatore generico ad una sezione

iperpiana di V_k avrebbe al più dimensione $\frac{(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)}{k!} - \mu - 3$; mentre

ciò non avviene perchè l' $S(n)$ osculatore ad una $V_{k-1}^{n_{k-1}}$ è regolare.

D'altra parte V_k possiede almeno $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{r, n+1}$ perchè le sue sezioni iperpiane (le $V_{k-1}^{n_{k-1}}$) ne posseggono esattamente $\infty^{2(k-1)-1}$ e ogni E_2 di $\gamma_{r, n+1}$ di $V_{k-1}^{n_{k-1}}$ lo è anche per V_k ; ma V_k non può possedere $\infty^{2k+1} E_2$ di $\gamma_{r, n+1}$ perchè per il teorema del n. 3 soddisferebbe a più di μ equazioni d'ordine n , contrariamente a quanto abbiamo già dimostrato. Quindi: V_k possiede $\infty^{2k} E_2$ di $\gamma_{r, n+1}$ esattamente.

Per il teorema del n. 3, V_k non può quindi soddisfare a meno di μ equazioni d'ordine n (lin. indep.) e perciò soddisfa esattamente a μ equazioni d'ordine n . L'asserto è così dimostrato.

Per il teorema del n. 3, si ha:

Se la sezione iperpiana generica di una V_k è una $V_{k-1}^{n_{k-1}}$ rappresentante le forme d'ordine n dell' S_{k-1} ($n \geq 2$), V_k soddisfa esattamente μ equazioni d'ordine n lin. indep. componenti un sistema a caratteristica.

Se $n = 2$, per il teorema del n. 4, si conclude che V_k è un cono (il cono cioè proiettante la $V_{k-1}^{2_{k-1}}$ da un punto esterno al suo spazio ambiente), come già feci nel mio lavoro citato, e si ha il teorema di SCORZA (per $n = 2$).

⁽⁵³⁾ Ci limiteremo a considerare V_k per cui le sezioni iperpiane sono $V_{k-1}^{n_{k-1}}$, rappresentanti le forme d'ordine n dell' S_{k-1} , poichè il problema per sezioni con spazi lineari di dimensione inferiore si riconduce al precedente.

Invece per $n > 2$ un sistema a caratteristica di $\mu = \binom{k+n-2}{n-1}$ equazioni d'ordine n non porta necessariamente ad un cono ⁽⁵⁴⁾ e quindi non si può dedurre senz'altro, come si è fatto per $n=2$, il teorema di SCORZA (qualora questo continui a valere per $n > 2$ anche al di fuori del campo algebrico).

20. Un'altra ricerca che si può ricondurre ad un problema sulle quasi-asintotiche è la seguente:

Si vogliono ricercare le varietà V_k che posseggono una totalità Ω di tipo assegnato di varietà V_p ($p < k$) appartenenti a spazi lineari S_q , dove p, q sono assegnati.

Ora, se $p=1$, una V_1 di S_q è sempre quasi-asintotica $\gamma_{r,q+1}$ di V_k , dove r è qualunque ($0 < r < q+1$); e quindi il problema si può ricondurre senz'altro ad un problema sulle quasi-asintotiche ⁽⁵⁵⁾.

Ad es., le superficie degl'iperspazi che posseggono ∞^2 curve dello spazio ordinario, che vennero determinate tutte da C. SEGRE ⁽⁵⁶⁾, sono fra le superficie che posseggono $\infty^2 \gamma_{r,4}$ ($0 < r < 4$) e porgono quindi esempi di quest'ultime.

Se poi $p > 1$, una V_p di S_q possiede sempre, entro certi limiti, totalità di curve quasi-asintotiche (o E_n di curve quasi-asintotiche) di indici convenienti. Le V_k cercate che posseggono la totalità Ω di V_p di S_q , posseggono quindi una certa totalità Σ di quasi-asintotiche γ (o E_n di γ) poichè, essendo le V_p situate sopra V_k , gli E_n di γ delle V_p sono tali anche per V_k .

Anche per $p > 1$ la ricerca si può dunque ricondurre ad una sulle quasi-asintotiche.

Ad es. in questo modo si può pervenire ad un teorema che generalizza una notissima proprietà della superficie di VERONESE ⁽⁵⁷⁾, e che del resto segue subito da questa proprietà della superficie di VERONESE e dal teorema di SCORZA ricordato nel n. 19. Il teorema è il seguente:

⁽⁵⁴⁾ Per $n=3$ si veda: BOMPIANI, A, p. 126.

⁽⁵⁵⁾ Naturalmente una volta risolto il problema sulle quasi-asintotiche, bisognerà ricercare fra le V_k trovate quelle che posseggono la totalità Ω di curve di S_q .

⁽⁵⁶⁾ C. SEGRE, *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali*, Note I e II, « Atti dell'Accademia di Torino », vol. 56, p. 157, 1921.

⁽⁵⁷⁾ C. SEGRE, op. cit., p. 145. Fra i casi di superficie che posseggono ∞^2 curve piane, il SEGRE considerò ivi quello di una coppia di coni aventi lo stesso vertice; questo caso non si deve naturalmente considerare se si escludono le varietà *riducibili*. Cfr. pure: BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2^a ed., Messina, Principato, 1923, p. 393.

L'unica V_k che possiede $\infty^2 V_{k-1}$ dell' S_k , e il cui spazio ambiente ha dimensione $> k + 2$ ⁽⁵⁸⁾, è il cono di Veronese dell' S_{k+3} .

Infatti per una V_{k-1} dell' S_k ogni E_2 è E_2 di $\gamma_{1,3}$, sicchè tale V_{k-1} possiede $\infty^{3k-5} E_2$ di $\gamma_{1,3}$. La V_k , contenendo $\infty^2 V_{k-1}$ dell' S_k , possiede quindi $\infty^{3k-3} E_2$ di $\gamma_{1,3}$. Orbene, ho dimostrato in un altro lavoro ⁽⁵⁹⁾, che le uniche V_k che posseggono $\infty^{3k-3} E_2$ di $\gamma_{1,3}$ sono il cono di VERONESE dell' S_{k+3} e le V_k dell' S_{k+2} (escluse le sviluppabili ordinarie).

Siccome d'altra parte il cono di VERONESE dell' S_{k+3} possiede effettivamente $\infty^2 V_{k-1}$ dell' S_k (i coni proiettanti le coniche della superficie di VERONESE dall' S_{k-3} singolare), l'asserto è così dimostrato.

Consideriamo ancora il seguente esempio:

Si vogliono ricercare le V_4 che posseggono ∞^4 superficie dello spazio ordinario.

Per una superficie dell' S_3 ogni E_2 è E_2 di $\gamma_{1,3}$, sicchè tale superficie possiede $\infty^4 E_2$ di $\gamma_{1,3}$. La V_4 , contenendo ∞^4 superficie dell' S_3 , possiede quindi $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ e andrà ricercata fra le quattro V_4 dotate di $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ da me determinate ⁽⁶⁰⁾.

Fra quest'ultime vi è la V_4^6 di S_3 di SEGRE la quale possiede ∞^4 superficie dell' S_3 (le quadriche provenienti dalle coppie di rette dei due piani) ed è quindi una delle V_4 cercate. Rimane da vedere se, fra gli altri tre tipi di V_4 dotate di $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$, vi sono V_4 che posseggono ∞^4 superficie dell' S_3 ; in ogni modo, è chiaro che si perviene così a caratterizzare la V_4^6 di SEGRE.

E si badi che superficie dell' S_3 (e precisamente: quadriche dell' S_3) esistono su tutte le varietà di SEGRE. Fatti analoghi si presentano pure per le varietà di GRASSMANN ⁽⁶¹⁾.

⁽⁵⁸⁾ Nell' S_{k+2} , per $k=2$ si hanno proiezioni della superficie di VERONESE e per $k>2$ i coni che le proiettano (e quindi, in definitiva, ancora coni di VERONESE).

⁽⁵⁹⁾ VILLA, P, p. 11.

⁽⁶⁰⁾ VILLA, M, n. 28.

⁽⁶¹⁾ L'idea di caratterizzare enti algebrici, in particolare le varietà di SEGRE e le varietà di GRASSMANN, mediante curve quasi-asintotiche (a cui si collegano le considerazioni del testo) è di BOMPIANI. Si vedano (oltre i lavori già citati) gli *Atti del Primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, Bologna, Zanichelli, pp. 97, 98; 1938.

Sulle equazioni differenziali lineari soddisfatte dal prodotto di integrali particolari di due equazioni differenziali lineari omogenee assegnate e su alcune formule integrali dei polinomi di Laguerre e di Hermite.

Memoria di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Stabilita l'equazione soddisfatta dal prodotto degli integrali particolari di due generali equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine assegnate, con procedimento che ha carattere generale, si deducono poi particolari equazioni soddisfatte da $cL_n^{(x)}(x)L_m^{(z)}(x)$, $cH_n(x)H_m(x)$, ecc., ($c = \text{costante}$). Infine si utilizzano alcune di esse per determinare delle formule integrali degli $L_n^{(x)}(x)$, $H_n(x)$.*

Da vari autori (1) sono state stabilite equazioni differenziali lineari, soddisfatte dal prodotto di due soluzioni di particolari equazioni differenziali lineari del 2° ordine.

Sorge quindi spontaneo il pensiero di studiare la seguente questione generale: *Qual'è l'equazione differenziale lineare d'ordine minimo cui*

(1) Il modo di risolvere la questione che ci interessa fu indicato dal CLAUSEN in *Crelle's Journal*, Vol. III, p. 89, (1828). F. E. NEUMAN in *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*, parte II, p. 91, (Leipzig 1878), risolve la questione nel caso in cui le (1) e (2) del testo sono equazioni di Legendre e tale procedimento è riprodotto da E. W. HOBSON in *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (Cambridge, 1931), pp. 83-84.

N. NIELSEN si occupa della stessa ricerca, nel caso in cui le (1) e (2) siano le equazioni differenziali di due differenti funzioni metasferiche, nel suo libro: *Fonctions Méta-sphériques*, (Paris, 1911), pp. 129-130. Infine lo stesso NIELSEN nel cap. LX del suo *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, tratta il caso in cui u e v siano funzioni cilindriche di 1ª specie.

Queste ricerche sono utili per determinare alcune interessanti formule integrali. Nielsen nel l. c., pp. 131-133 e 156-159 fa un'altra applicazione delle equazioni soddisfatte da $y = cuv$, $c = \text{costante}$, per determinare lo sviluppo di alcune funzioni mediante il prodotto di due particolari funzioni metasferiche. Un'analoga ricerca, potrà farsi, servendosi dei risultati di questo lavoro, nei casi in cui u e v siano altre classi di notevoli funzioni, e agevole sembra anzi questo studio quando u e v sono polinomi d'Hermite di diverso indice.

soddisfa $y = cuv$, essendo c costante ed u e v rispettivamente integrati particolari delle

$$(1) \quad u'' = f_{0,1}u' + f_{0,2}u,$$

$$(2) \quad v'' = f_{0,1}v' + f_{0,2}v,$$

ove $f_{0,i}$, $\varphi_{0,i}$ ($i=1, 2$) sono funzioni qualsiasi della x che ammettono tutte le derivate che ci occorra considerare?

Crediamo interessante la questione prospettata, perchè, dal risultato ottenuto dalla risoluzione di essa si possono trarre equazioni differenziali cui soddisfano prodotti di classiche funzioni, quali ad es. $L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\beta)}(x)$, $H_n(x)H_m(x)$, $[L_n^{(\alpha)}(x)]^2$ ecc., indicando al solito con $L_n^{(\alpha)}(x)$, $H_n(x)$ rispettivamente il polinomio di LAGUERRE generalizzato e quello d'HERMITE d'indice n . Queste particolari equazioni differenziali possono alla loro volta avere importanti applicazioni. Due di esse le crediamo ad es. utilizzate per determinare

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n^2(x) H_m(x) dx,$$

e a mezzo di una formula ricorrente l'altro integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 L_m^{(\beta)}(x) dx,$$

quest'ultimo però a mezzo di formula ricorrente.

Gli autori citati nella nota ⁽¹⁾ hanno tutti risolto le questioni particolari di cui si sono occupati con un metodo che opportunamente generalizzato dà luogo, se non a difficoltà concettuali, a serie difficoltà pratiche di calcolo nei casi in cui l'ordine delle due equazioni (1) e (2) sia superiore al 2°. Le dette difficoltà derivano dal gran numero di parametri che occorre eliminare. Pertanto noi abbiamo seguito un altro metodo che, una volta assicurata l'esistenza e il tipo dell'equazione cui si vuol pervenire, permette di risolvere con perfetta uniformità, speditamente e, crediamo, con eleganza la riferita questione, anche nel caso che le u e v siano soluzioni di equazioni differenziali del tipo delle (1) e (2) ma di ordine qualsiasi.

1. Occupiamoci della indicata questione generale, cioè determiniamo l'equazione differenziale che ha per integrale generale

$$y = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_1 v_2 + c_3 u_2 v_1 + c_4 u_2 v_2, \quad (c_i \text{ costanti})$$

ed u_1 , u_2 e v_1 , v_2 integrali particolari linearmente indipendenti rispettivamente di (1) e (2).

Rileviamo innanzi tutto che l'equazione che si cerca è lineare, omogenea e del 4° ordine ⁽²⁾, cioè essa è del tipo

$$(3) \quad a_4 y^{iv} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

ove a_i sono delle funzioni delle $f_{0,j}, \varphi_{0,j}$ da determinarsi.

Se deriviamo la (1) e teniamo presente la (1) stessa, abbiamo un'equazione che si può scrivere così

$$(4) \quad u''' = f_{1,1} u' + f_{1,2} u$$

essendo

$$(5) \quad f_{1,1} = f_{0,1}^2 + f'_{0,1} + f_{0,2}, \quad f_{1,2} = f_{0,1} f_{0,2} + f'_{0,2}.$$

Invece derivando la (4) ed utilizzando ancora la (1), si ha

$$(6) \quad u^{iv} = f_{2,1} u' + f_{2,2} u,$$

ove si è posto

$$(7) \quad \begin{cases} f_{2,1} = f_{0,1}^3 + 2f_{0,1} f_{0,2} + 3f'_{0,1} f_{0,1} + f''_{0,1} + 2f'_{0,2}, \\ f_{2,2} = f_{0,1}^2 f_{0,2} + 2f'_{0,1} f_{0,2} + f_{0,2}^2 + f_{0,1} f'_{0,2} + f''_{0,2} \end{cases}$$

e quindi analogamente

$$(8) \quad v''' = \varphi_{1,1} v' + \varphi_{1,2} v,$$

$$(9) \quad v^{iv} = \varphi_{2,1} v' + \varphi_{2,2} v.$$

I valori di $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,2}$ si ottengono rispettivamente da quelli di $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, f_{2,2}$ cambiando nelle (5), (7) $f_{c,k}$ in $\varphi_{0,k}$.

⁽²⁾ Il metodo degli autori citati ci dice che l'equazione è del 4° ordine.

La determinazione effettiva dei coefficienti a_i della (3) è però più agevole col metodo seguito nel testo di questo lavoro, che inoltre ha, come si è detto, carattere generale, che con il procedimento dei citati autori.

Nel caso che u e v sono integrali particolari di equazioni del tipo di (1) e (2) rispettivamente, ma del 3° ordine, l'equazione analoga alla (3), ottenuta con il metodo dei detti autori è

$$\sum_{i=0}^3 a_i y^{(3-i)} = 0.$$

Quindi s'induce che in generale, nel caso cioè che u e v siano integrali particolari di equazioni del tipo delle (1) e (2), ma di ordine qualsiasi n , l'analoga alla (3) assume l'aspetto

$$\sum_{i=0}^{n-2} a_i y^{(n-i)} = 0,$$

essa è poi anche quella di ordine minimo, come è facile convincersi, fra tutte quelle che sono soddisfatte da ciascuno dei possibili prodotti di uno qualsiasi degli integrali particolari linearmente indipendenti u , per uno qualunque degli altri integrali particolari linearmente indipendenti v delle due dette equazioni differenziali del tipo di (1) e (2), ma dello n -mo ordine.

La (3) del testo è l'equazione differenziale d'ordine minimo se $u_1 v_1, u_1 v_2, u_2 v_1, u_2 v_2$ sono linearmente indipendenti.

Ora la (3), se vi poniamo uv al posto di y ed effettuiamo le derivazioni, può scriversi

$$a_0 \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} u^{(i)} v^{(4-i)} + a_1 \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} u^{(i)} v^{(3-i)} + a_2 \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} u^{(i)} v^{(2-i)} + a_3(u'v + uv') + a_4 uv = 0.$$

Sostituendo nella precedente al posto di u^{iv} , u''' , u'' , v^{iv} , v''' , v'' i valori dati rispettivamente dalle (6), (4), (1), (9), (8), (2), si ha il seguente sistema lineare nelle incognite a_i , se annulliamo i coefficienti di $u'v$, uv' , $u'v'$, uv e poniamo $a_0 = 1$:

$$(10) \quad \begin{cases} \theta_{1,1} a_1 + f_{0,1} a_2 + a_3 = \theta_{1,5}, & \theta_{2,1} a_1 + \varphi_{0,1} a_2 + a_3 = \theta_{2,5} \\ \theta_{3,1} a_1 + 2a_2 = \theta_{3,5}, & \theta_{4,1} a_1 + \theta_{4,2} a_2 + a_4 = \theta_{4,5}, \end{cases}$$

ove è

$$(11) \quad \begin{cases} \theta_{1,1} = f_{1,1} + 3\varphi_{0,2}, & \theta_{2,1} = \varphi_{1,1} + 3f_{0,2}, & \theta_{3,1} = 3(f_{0,1} + \varphi_{0,1}), & \theta_{4,1} = f_{1,2} + \varphi_{1,2}, \\ \theta_{4,2} = f_{0,2} + \varphi_{0,2}, & \theta_{1,5} = -(f_{2,1} + 6f_{0,1}\varphi_{0,2} + 4\varphi_{1,2}), & \theta_{2,5} = -(\varphi_{2,1} + 6\varphi_{0,1}f_{0,2} + \\ + 4f_{1,2}), & \theta_{3,5} = -2[f_{1,1} + \varphi_{1,1}] + 3f_{0,1}\varphi_{0,1}, & \theta_{4,5} = -(f_{2,2} + \varphi_{2,2} + 6f_{0,2}\varphi_{0,2}). \end{cases}$$

Se il determinante Δ del sistema (10) non è nullo ⁽³⁾, da esso si ha essendo

$$\Delta = 2(\theta_{2,1} - \theta_{1,1}) + \theta_{3,1}(f_{0,1} - \varphi_{0,1})$$

$$(12) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{\Delta} [2(\theta_{2,5} - \theta_{1,5}) + \theta_{3,5}(f_{0,1} - \varphi_{0,1})], \\ a_2 = \frac{1}{\Delta} [\theta_{3,5}(\theta_{2,1} - \theta_{1,1}) + \theta_{3,1}(\theta_{1,5} - \theta_{2,5})], \\ a_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \theta_{1,1} & f_{0,1} & \theta_{1,5} \\ \theta_{2,1} & \varphi_{0,1} & \theta_{2,5} \\ \theta_{3,1} & 2 & \theta_{3,5} \end{vmatrix}, \\ a_4 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \theta_{2,1} - \theta_{1,1} & \varphi_{0,1} - f_{0,1} & \theta_{2,5} - \theta_{1,5} \\ \theta_{3,1} & 2 & \theta_{3,5} \\ \theta_{4,1} & \theta_{4,2} & \theta_{4,5} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

La (3) sostituendo ad a_i i trovati valori, ci dà l'equazione differenziale richiesta. Essa ha per integrale generale

$$y = c_1 u_1 v_1 + c_2 u_2 v_1 + c_3 u_1 v_2 + c_4 u_2 v_2, \quad c_i \text{ costanti,}$$

se indichiamo con u_1, u_2 i due integrali particolari linearmente indipendenti di (1) e con v_1, v_2 quelli della (2).

⁽³⁾ Per il caso $\Delta = 0$, cfr. il n. 2.

2. Consideriamo in questo N. due casi particolari:

1° caso. Sia

$$(13) \quad \varphi_{0,1} = f_{0,1}, \quad \varphi_{0,2} = f_{0,2}.$$

Le (1) e (2) sono identiche e quindi hanno gli stessi integrali particolari linearmente indipendenti. Pertanto la (3) si deve ridurre ad una equazione differenziale del 3° ordine, perchè il suo integrale generale è ora, conservando il significato attribuito alle u_i , c_i nel N. precedente,

$$y = c_1 u_1^2 + c_2 u_1 u_2 + c_3 u_2^2.$$

Ma si noti che per le (13) è $\Delta = 0$ ed il determinante seguente invece, estratto dalla matrice dei coefficienti del sistema (10), reso omogeneo trasportando $\theta_{i,5}$ al 1° membro ed attribuendo questo $\theta_{i,5}$ a coefficienti di a_i in ciascuna equazione,

$$\begin{vmatrix} \varphi_{0,1} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \theta_{4,2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

è diverso da zero. Quindi le ultime tre equazioni del sistema (10) ci forniscono una doppia infinità di soluzioni assegnando alla a_0 e alla a_1 valori arbitrari, e la (3) risulta del 3° ordine se facciamo, come è lecito,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -1.$$

Perciò, la soluzione che a noi interessa del sistema (10), è

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = -1, & a_2 = \frac{1}{2} \theta_{3,1}, \\ a_3 = -\frac{1}{2} (\varphi_{0,1} \theta_{3,1} - 2\theta_{2,1}), & a_4 = \frac{1}{2} (2\theta_{4,1} - \theta_{3,1} \theta_{4,2}) \end{cases}$$

od anche

$$(14) \quad \begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = -1, & a_2 = 3f_{0,1}, \\ a_3 = -2f_{0,1}^2 + f'_{0,1} + 4f_{0,2}, & a_4 = -4f_{0,1}f_{0,2} + 2f'_{0,2} \end{cases}$$

2° caso. Sia

$$\varphi_{0,1} = f_{0,1}.$$

Sostituito $f_{0,1}$ al posto di $\varphi_{0,1}$ nelle formule del n. 2 e ponendo

$$\psi_1 = f_{0,2} + \varphi_{0,2}, \quad \psi_2 = f_{0,2} - \varphi_{0,2},$$

si ottiene

$$(15) \quad \begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = -4f_{0,1} - \frac{\psi_2'}{\psi_2}, \\ a_2 = \frac{1}{\psi_2} [(5f_{0,1}^2 - 4f'_{0,1} - 2\psi_1)\psi_2 + 3f_{0,1}\psi_2'], \\ a_3 = \frac{1}{2x} \bar{\theta}_{3,5} + \bar{\theta}_{2,5} + \frac{1}{2\psi_2} (4f_{0,1}\psi_2 + \psi_2') \left(\frac{6}{x} f_{0,1} + 2\bar{\theta}_{2,1} \right), \\ a_4 = \bar{\theta}_{4,5} - \frac{1}{2} \psi_1 \bar{\theta}_{3,5} + \frac{1}{\psi_2} (4f_{0,1}\psi_2 + \psi_2') (\psi_1' - 2f'_{0,1}\psi_1), \end{cases}$$

ove $\bar{\theta}_{2,1}, \bar{\theta}_{2,5}, \bar{\theta}_{3,5}, \bar{\theta}_{4,5}$ sono ciò che diventano rispettivamente $\theta_{2,1}, \theta_{2,5}, \theta_{3,5}, \theta_{4,5}$ quando nelle espressioni (11) che danno i valori di quest'ultime, si fa $\varphi_{0,1} = f_{0,1}$.

Alcune classiche equazioni del tipo della (1) hanno $f_{0,2}$ costante. Nel caso che quest'ipotesi si verifichi sia per la (1) che per la (2), le ultime formule trovate ad es., possono più semplicemente scriversi

$$(16) \quad \begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = -4f_{0,1}, & a_2 = 5f_{0,1}^2 - 4f'_{0,1} - 2\psi_1, \\ a_3 = \frac{1}{2x} \bar{\theta}_{3,5} + \bar{\theta}_{2,5} + 2f_{0,1} \left(\frac{6f_{0,1}}{x} + 2\bar{\theta}_{2,1} \right), \\ a_4 = \bar{\theta}_{4,5} - \frac{1}{2} \psi_1 \bar{\theta}_{3,5} - 8f_{0,1}^2 \psi_1. \end{cases}$$

3. Se si vuole scrivere l'equazione differenziale cui soddisfa $u^{(p)}v^{(q)}$ si può procedere in questo modo.

Si divida (1) per $f_{0,2}$, poi si derivi e si ha

$$(17) \quad \bar{f}_{1,0} u''' = (\bar{f}_{1,1} - \bar{f}'_{1,0}) u'' + (\bar{f}'_{1,1} + 1) u,$$

ove

$$\bar{f}_{1,0} = \frac{1}{f_{0,2}}, \quad \bar{f}_{1,1} = \frac{f_{0,1}}{f_{0,2}}.$$

Invece la (17) dividendola per $\bar{f}'_{1,1} + 1$ e derivandola poi, ci dà

$$\bar{f}_{2,0} u^{(iv)} = (\bar{f}_{2,1} - \bar{f}'_{2,0}) u''' + (\bar{f}'_{2,1} + 1) u'',$$

essendo

$$\bar{f}_{2,0} = \frac{\bar{f}_{1,0}}{\bar{f}'_{1,1} + 1}, \quad \bar{f}_{2,1} = \frac{\bar{f}_{1,1} - \bar{f}'_{1,0}}{\bar{f}'_{1,1} + 1}.$$

ed in generale abbiamo

$$(18) \quad \bar{f}_{p,0} u^{(p+2)} = (\bar{f}_{p,1} - \bar{f}'_{p,0}) u^{(p+1)} + (\bar{f}'_{p,1} + 1) u^{(p)},$$

con

$$(19) \quad \bar{f}_{p,0} = \frac{\bar{f}_{p-1,0}}{\bar{f}'_{p-1,1} + 1}, \quad \bar{f}_{p,1} = \frac{\bar{f}_{p-1,1} - \bar{f}'_{p-1,0}}{\bar{f}'_{p-1,1} + 1}, \quad p = 2, 3, \dots,$$

e

$$(20) \quad f_{1,0} = \frac{1}{f_{0,2}}, \quad \bar{f}_{1,1} = \frac{f_{0,1}}{f_{0,2}}.$$

Ora si noti che la (18) può scriversi così

$$(21) \quad \frac{d^2 u^{(p)}}{dx^2} = \frac{\bar{f}_{p,1} - \bar{f}'_{p,0}}{\bar{f}_{p,0}} \frac{du^{(p)}}{dx} + \frac{\bar{f}'_{p,1} + 1}{\bar{f}_{p,0}} u^{(p)}.$$

Analogamente dalla (2), si ha

$$(22) \quad \frac{d^2 v^{(q)}}{dx^2} = \frac{\bar{\varphi}_{q,1} - \bar{\varphi}'_{q,0}}{\bar{\varphi}_{q,0}} \frac{dv^{(q)}}{dx} + \frac{\bar{\varphi}'_{q,1} + 1}{\bar{\varphi}_{q,0}} v^{(q)}.$$

Le due ultime (21), (22) sono dello stesso tipo delle (1), (2) ma ammettono rispettivamente per soluzioni $u^{(p)}$, $v^{(q)}$. Quindi una volta che si è calcolati servendosi delle (19), (20) $\bar{f}_{p,0}$, $f_{p,1}$ e le analoghe $\bar{\varphi}_{q,0}$, $\bar{\varphi}_{q,1}$, utilizzando i risultati ottenuti ai n. 1, 2 si può scrivere l'equazione cui soddisfa $cu^{(p)}v^{(q)}$, c costante.

Il metodo precedentemente indicato, per determinare l'equazione cui soddisfa $cu^{(p)}v^{(q)}$, si semplifica nel caso particolare che scritte le (1) e (2), liberandole dai dominatori, sotto la forma (*)

$$(1') \quad f_{0,0} u'' = f_{0,1} u' + f_{0,2} u,$$

$$(2') \quad \varphi_{0,0} v'' = \varphi_{0,1} v' + \varphi_{0,2} v,$$

fossero

$\varphi_{0,2}$, $f_{0,2}$ polinomi di grado zero nella x ,

$\varphi_{0,1}$, $f_{0,1}$ polinomi al massimo di grado 1 nella x ,

$\varphi_{0,2}$, $f_{0,2}$ » » » » » 2 » » ,

(*) Cfr. a questo proposito A. MAMBRIANI, *Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali*, « Boll. dell'Un. Mat. It. », fasc. del febr. 1938, pp. 29-31 (teor. II).

perchè dalla (1') si avrebbe subito

$$f_{0,0}u^{(p+2)} = (f_{0,1} - pf'_{0,0})u^{(p+1)} + \left[f_{0,2} + pf'_{0,1} - \binom{p}{2}f''_{0,0} \right]u^{(p)},$$

e dalla (2') l'analogia per la v .

Con le considerazioni svolte precedentemente, si otterrebbe perciò subito l'equazione che a noi interessa.

Quanto si è detto in questo N. può ovviamente estendersi anche per il caso generale nel quale u e v siano soluzioni di equazioni del tipo delle (1) e (2) ma di ordine qualsiasi.

4. E passiamo alle applicazioni.

Come primo esempio scriviamo l'equazione differenziale cui soddisfa $cL_n^{(2)}(x)L_m^{(2)}(x)$, c costante.

I calcoli da eseguire in questo caso sono laboriosi, perciò noi scriviamo senz'altro il risultato dopo d'aver osservato che, essendo $L_n^{(2)}(x)$ soluzione dell'equazione

$$(23) \quad xu'' + (\alpha - x + 1)u' + nu = 0,$$

si ha

$$f_{0,1} = \frac{x - \alpha - 1}{x}, \quad f_{0,2} = -\frac{n}{x}$$

e quindi analogamente

$$\varphi_{0,1} = \frac{x - \beta - 1}{x}, \quad \varphi_{0,2} = -\frac{m}{x}.$$

La sostituzione dei detti valori delle $f_{0,i}$ nelle (5), (7) e di quelli delle $\varphi_{0,i}$ nelle analoghe ci danno rispettivamente $f_{1,i}$, $f_{2,i}$ e $\varphi_{1,i}$, $\varphi_{2,i}$. A mezzo di quest'ultimi e delle (11) si determinano le $\theta_{j,k}$. Si hanno così tutti gli elementi per ottenere con le (12) le a_i e quindi la (3).

L'equazione differenziale cui si perviene può scriversi così

$$(24) \quad p_{0,1}x^3y^{iv} + p_{1,2}x^2y''' + p_{2,3}xy'' + p_{3,4}y' + p_{4,5}y = 0,$$

ove $p_{i,j}$ sono dei polinomi interi in x di grado j .

Precisamente è

$$(25) \quad \begin{cases} p_{0,1} = a_{0,0}x + a_{0,1} \\ p_{1,2} = a_{1,0}x^2 + a_{1,1}x + a_{1,2} \\ p_{2,3} = a_{2,0}x^3 + a_{2,1}x^2 + a_{2,2}x + a_{2,3} \\ p_{3,4} = a_{3,0}x^4 + a_{3,1}x^3 + a_{3,2}x^2 + a_{3,3}x + a_{3,4} \\ p_{4,5} = a_{4,0}x^5 + a_{4,1}x^4 + a_{4,2}x^3 + a_{4,3}x^2 + a_{4,4}x + a_{4,5} \end{cases}$$

essendo

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} a_{0,0} = A, \quad a_{0,1} = B, \quad a_{1,0} = -4A, \\ a_{1,1} = (2\gamma_1 + 5)A - 4B, \quad a_{1,2} = 2\delta_3 B, \quad a_{2,0} = 5A, \\ a_{2,1} = 15B - 24q_2 + 16r_2 + 26\gamma_2 + 4p_2(2p_1 - 13), \\ a_{2,2} = \gamma_1(F - C) + A(\alpha\beta - 2) + p_2\gamma_1^2 + AD - \gamma_1(C\delta_2 + 2\delta_3 L), \\ a_{2,3} = B(D + G), \quad a_{3,0} = -2A, \\ a_{3,1} = 2\gamma_1(-4\gamma_2 + 5p_2) + 2E(p_1 - 2) - 4p_2(3p_1 - 4) - 2A(p_1 - 3) + 4q_2, \\ a_{3,2} = B(q_1 + p_1) - A(3\gamma_1 + 2\alpha\beta + 5) + \gamma_1 E(\delta_3 - p_1) - \gamma_1 p_2(7\gamma_1 + 18) - \\ - 4\gamma_1 F + 4x^2 n - 4\beta^2 m + 2p_2(3q_1 - 4\alpha\beta + 5r_1 + 4p_1) - (10q_2 + 2r_2), \\ a_{3,3} = \gamma_1[G(-4\gamma_2 + 6p_2) + F\delta_2 - H + \gamma_1(p_2 - r_2)], \quad a_{3,4} = B\delta_1 G, \\ a_{4,0} = 2p_1 A, \quad a_{4,1} = -p_1 \delta_3 A + 2L(3q_1 + r_1 - 2p_2), \\ a_{4,2} = \gamma_1[p_1 p_2 \gamma_1 + (q_1 + p_1)(6p_2 - 4\gamma_1) - p_1 \delta_2 E], \quad a_{4,3} = \gamma_1 \delta_1 H; \end{array} \right.$$

in cui si è posto

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \alpha + \beta, \quad \gamma_2 = \alpha - \beta, \quad p_1 = m + n, \quad p_2 = m - n, \\ q_1 = \alpha m + \beta n, \quad q_2 = \alpha m - \beta n, \quad r_1 = \alpha n + \beta m, \quad r_2 = \alpha n - \beta m, \\ e \\ A = 2(2p_2 - \gamma_2), \quad B = \gamma_1 \gamma_2, \quad C = 2(\gamma_2 + p_2), \quad \delta_1 = \gamma_1 + 1, \\ \delta_2 = \gamma_1 + 2, \quad \delta_3 = \gamma_1 + 3, \quad D = \delta_2 \delta_3, \quad E = \gamma_2 + 2p_2, \\ F = -B + 3r_2 + q_2 - 3\gamma_2 - 2p_2, \quad G = (\alpha + 1)(\beta + 1), \\ H = -\gamma_2(q_1 + p_1), \quad L = \gamma_2 - p_2. \end{array} \right.$$

Come si vede i coefficienti delle $y^{(v)}$ nella (24) sono molto complicati, ma essi, in alcuni casi particolari interessanti di cui ci occuperemo nel N. successivo, si semplificano ed anche notevolmente.

Per stabilire l'integrale generale della (24) occorre una premessa.

KUMMER ⁽⁵⁾ ha studiato la funzione $G(p, \gamma, x)$ definita dalla

$$G(p, \gamma, x) = \lim_{\Sigma \rightarrow 0} F\left(p, \frac{1}{\Sigma}, \gamma, \Sigma x\right).$$

È facile determinare, tenendo presente la precedente, l'equazione differenziale seguente, cui soddisfa la $G(p, \gamma, x)$,

$$(28) \quad xw'' + (\gamma - x)w' - pw = 0,$$

⁽⁵⁾ Cfr. KUMMER, *Über die hypergeometrische Reihe* $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$, « Journal v. Crelle », Vol. XV (1836), pp. 138-142. Cfr. inoltre APPEL e KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite* (1926), pp. 121-123.

che ha per integrale generale, se γ non è intero,

$$w = c_1 G(p, \gamma, x) + c_2 x^{1-\gamma} G(p+1-\gamma, 2-\gamma, x), \quad c_i \text{ costanti.}$$

Ora la (26) si identifica con la (23), ponendovi

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + 1 \\ p = -n, \end{cases}$$

quindi l'integrale generale della (23) è, se α non è intero,

$$(29) \quad u = c_1 G(-n, \alpha + 1, x) + c_2 x^{-\alpha} G(-n-\alpha, 1-\alpha, x), \quad c_i \text{ costanti,}$$

e perciò analogamente

$$v = h_1 G(-m, \beta + 1, x) + h_2 x^{-\beta} G(-m-\beta, 1-\beta, x), \quad h_i \text{ costanti,}$$

Si può subito verificare che il 1° dei due integrali particolari che compaiono nella (29), coincide a meno di un fattore costante con $L_n^{(\alpha)}(x)$. Difatti tenendo presente che

$$(30) \quad G(p, \gamma, x) = \Sigma \frac{(\alpha, m) x^m}{(\gamma, m) m!}$$

ove

$$(\alpha, m) = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+m-1),$$

e lo sviluppo di $L_n^{(\alpha)}(x)$, si ha subito che

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!} G(-n, \alpha+1, x).$$

Il 2° integrale particolare $x^{-\alpha} G(-n-\alpha, 1-\alpha, x)$, a mezzo della (30) assume la forma

$$\begin{aligned} & x^{-\alpha} G(-n-\alpha, 1-\alpha, x) = \\ & = \Gamma(1-\alpha) \Sigma_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha+n+1) x^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha+n-m+1) \Gamma(-\alpha+m+1) m!}. \end{aligned}$$

Se indichiamo questo secondo integrale particolare con $K_n^{(\alpha)}(x)$, l'integrale generale della (24) può scriversi, se α e β non sono interi,

$$(31) \quad y = c_1 L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\beta)}(x) + c_2 L_n^{(\alpha)}(x) K_m^{(\beta)}(x) + c_3 K_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\beta)}(x) + c_4 K_n^{(\alpha)}(x) K_m^{(\beta)}(x),$$

$c_i = \text{costanti}$.

5. Consideriamo in questo N., come si è detto precedentemente, alcuni casi particolari.

1° caso particolare.

Sia

$$\alpha = \beta.$$

Dalle (26) si ricava

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 4p_2, & a_{0,1} &= 0, & a_{1,0} &= -16p_2, & a_{1,1} &= 4(4\alpha + 5)p_2, & a_{1,2} &= 0, \\ a_{2,0} &= 20p_2, & a_{2,1} &= -40\alpha p_2 + 4p_2(2p_1 - 13), & a_{2,2} &= 4p_2(5\alpha + 4)(\alpha + 1), \\ a_{2,3} &= 0, & a_{3,0} &= -8p_2, & a_{3,1} &= 4p_2(6\alpha - 4p_1 + 8), \\ a_{3,2} &= 4p_2(-6\alpha^2 - 11\alpha + 4p_1\alpha + 3p_1 - 5), & a_{3,3} &= 4\alpha p_2(\alpha + 1)(2\alpha + 1), \\ a_{3,4} &= 0, & a_{4,0} &= 8p_1 p_2, & a_{4,1} &= 4p_2[-p_1(4\alpha + 3) + p_2^2], \\ a_{4,2} &= 4p_1 p_2 \alpha(2\alpha + 1), & a_{4,3} &= 0. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nelle (25), dalla (24), se si divide per $4p_2 x$, si trae

$$(32) \quad \begin{aligned} x^3 y^{iv} + (-4x + 4\alpha + 5)x^2 y''' + [5x^2 + (-10\alpha + 2p_1 - 13)x + \\ + (\alpha + 1)(5\alpha + 4)]xy'' + [-2x^2 + (6\alpha - 4p_1 + 8)x^2 + \\ + (-6\alpha^2 - 11\alpha + 4p_1\alpha + 3p_1 - 5)x + \alpha(\alpha + 1)(2\alpha + 1)]y' + \\ + [2p_1 x^2 + (-p_1(4\alpha + 3) + p_2^2)x + p_1\alpha(2\alpha + 1)]y = 0, \end{aligned}$$

il cui integrale generale si ottiene da (31) ponendovi $\beta = \alpha$

2° caso particolare.

Sia

$$m = n.$$

Utilizzando i risultati del N. precedente, a semplificazione effettuate, si ricava

$$(32') \quad \begin{aligned} (-2x + \gamma_1)x^3 y^{iv} + [8x^2 - 2(4\gamma_1 + 5)x + 2\gamma_1 \delta_2]x^2 y''' + \{-10x^3 + \\ + (15\gamma_1 - 8n + 26)x^2 + [\gamma_1(4n - 7\gamma_1 - 25) - 2(\alpha\beta + 4)]x + \gamma_1(D + G)\}xy'' + \\ + \{4x^4 + 8(2n - \gamma_1 - 2)x^3 + [-12n + 4\alpha\beta + 10 + \gamma_1(5\gamma_1 - 16n + 21)]x^2 + \\ + \gamma_1[-4G - n\gamma_1^2 + \delta_2(-\gamma_1 + 5n - 3)]x + \gamma_1\delta_1 G\}y' + \\ + (-8nx^3 + 12n\delta_1 x^2 - 6n\gamma_1 \delta_2 x + n\gamma_1 \delta_1 \delta_2)y = 0. \end{aligned}$$

Anche l'integrale generale di questa si ottiene dalla (31) facendovi $m = n$.

Si noti che la (32), servendosi delle (15), può controllarsi mediante calcoli non molto laboriosi, e che la stessa (32) e quest'ultima per

$$\alpha = \beta = 0$$

possono rispettivamente scriversi

$$\begin{aligned} x^2 y^{iv} + (-4x + 5)xy''' + [5x^2 + (2p_1 - 13)x + 4]y'' + \\ + [-2x^2 - 4(p_1 - 2)x + 3p_1 - 5]y' + (2p_1 x - 3p_1 + p_2^2)y = 0, \\ - x^2 y^{iv} + (4x - 5)xy''' + [-5x^2 + (-4n + 13)x - 4]y'' + \\ + [2x^2 + 8(n - 1)x - 6n + 5]y' + 2n(-2x + 3)y = 0. \end{aligned}$$

Ma si deve notare che i due integrali particolari della (23), per $\alpha = 0$ coincidono e quindi ora si può solamente affermare che $cL_n(x)L_m(x)$, $[cL_n(x)]^2$ sono rispettivamente due integrali particolari delle due precedenti.

6. Un caso particolare assai interessante, si ha quando $\alpha = \beta$, $m = n$. Ma questo caso è preferibile trattarlo direttamente a mezzo delle formule (14), perchè ora si deve avere un'equazione differenziale del 3° ordine e non una del 4°, come si ricaverebbe a mezzo dei risultati stabiliti nel N. precedente.

Dalle (14), si ha

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 3 \cdot \frac{x - \alpha - 1}{x},$$

$$a_3 = \frac{-2x^2 + 4x(\alpha - n + 1) - (\alpha + 1)(2\alpha + 1)}{x^2}, \quad a_4 = \frac{2n}{x^2} (2x - 2\alpha - 1)$$

e quindi l'equazione differenziale è

$$(33) \quad x^2 y''' + 3x(\alpha - x + 1)y'' + [2x^2 + 4(n - \alpha - 1)x + (\alpha + 1)(2\alpha + 1)]y' + 2n(2x - 2\alpha + 1)y = 0$$

che ha per integrale generale, se α non è intero,

$$y = c_1 [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 + c_2 L_n^{(\alpha)}(x) K_n^{(\alpha)}(x) + c_3 [K_n^{(\alpha)}(x)]^2, \quad c_i \text{ costanti,}$$

Osserviamo che l'equazione del 4° ordine cui soddisfa $[L_n^{(\alpha)}(x)]^2$ che si ottiene dalla (32) per $m = n$, può ricavarsi aggiungendo alla derivata del prodotto di x per la (33) questa stessa moltiplicata per $\alpha - x - 1$. Invece la (32'), nel caso di $\alpha = \beta$, si può ottenere aggiungendo alla detta derivata moltiplicata per $2(-x + \alpha)$ la (33) moltiplicata per $2[(\alpha - x)^2 + x]$.

7. In questo N. ci occupiamo di altri esempi notevoli. Scriviamo cioè le equazioni che ammettono come integrali particolari rispettivamente $H_n(x)H_m(x)$, $H_n^2(x)$.

Per stabilire la prima si osservi che (1) e (2) diventano ora rispettiva-

$$(34) \quad \begin{aligned} u'' - 2xu' + 2nu &= 0, \\ v'' - 2xv' + 2mv &= 0, \end{aligned}$$

e quindi è

$$f_{0,1} = \varphi_{0,1} = 2x, \quad f_{0,2} = -2n, \quad \varphi_{0,2} = -2m.$$

A mezzo delle precedenti, dalle (15), si ha la seguente equazione differenziale cui soddisfi $cH_n(x)H_m(x)$, essendo c costante.

$$(35) \quad \begin{aligned} y^{iv} - 8xy''' + 4(5x^2 + p_1 - 2)y'' + \\ + 4x(-4x^2 - 4p_1 + 5)y' + 4(4p_1x^2 + p_2^2 - 2p_1)y &= 0, \end{aligned}$$

ove $p_1 = m + n$, $p_2 = m - n$.

Per scrivere l'integrale generale di quest'ultima occorre fare qualche osservazione preliminare.

Si noti che l'equazione di KUMMER si identifica con la (34) cambiando nella (28) x in x^2 e facendo $\gamma = \frac{1}{2}$, $p = -\frac{n}{2}$. Perciò l'integrale generale della (34) è

$$u = c_1 G\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + c_2 x G\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

I due integrali particolari

$$G\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad x G\left(\frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$$

si riducono rispettivamente a dei polinomi quando n è pari e quando n è dispari. Difatti si verifica subito, cambiando n in $2n$ nel 1° integrale che

$$G\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{n!}{(2n)!} (-1)^n H_{2n}(x);$$

se si muta invece n in $2n+1$ nel 2°, si ottiene

$$x G\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x).$$

L'integrale generale della (35), è:

$$y = c_1 H_n(x) H_m(x) + c_2 H_n(x) K_{\frac{m}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) + c_3 K_{\frac{n}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) H_m(x) + c_4 K_{\frac{n}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) K_{\frac{m}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2),$$

per m ed n pari;

$$y = c_1 H_n(x) H_m(x) + c_2 H_n(x) K_{\frac{m-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2) + c_3 K_{\frac{n-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2) H_m(x) + c_4 K_{\frac{n-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2) K_{\frac{m-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2),$$

per m ed n dispari;

$$y = c_1 H_n(x) H_m(x) + c_2 H_n(x) K_{\frac{m-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2) + c_3 K_{\frac{n}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) H_m(x) + c_4 K_{\frac{n}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) K_{\frac{m-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2),$$

per n pari ed m dispari;

in tutte le precedenti c_i sono costanti.

Per stabilire l'equazione differenziale che ammette come integrale particolare $H_n^2(x)$, basta utilizzare le (14), da esse si ha subito

$$(36) \quad y''' - 6xy'' + 2(4x^2 + 4n - 1)y' - 16nxy = 0$$

che ha per integrale generale

$$y = c_1 H_n^2(x) + c_2 H_n(x) K_{\frac{n}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) + c_3 \left[K_{\frac{n}{2}}^{(-\frac{1}{2})}(x^2) \right]^2, \quad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$y = c_1 \left[K_{\frac{n-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2) \right]^2 + c_2 K_{\frac{n-1}{2}}^{(\frac{1}{2})}(x^2) H_{n-1}(x) + c_3 H_{n-1}^2(x), \quad \text{se } n \text{ è dispari,}$$

(c_i costanti).

Se nell'equazione (35) si pone $m = n$, si ha un'equazione del 4° ordine di cui è soluzione $H_n^2(x)$ che si ottiene dalla precedente sottraendo dalla sua derivata il prodotto di $2x$ per la (36) stessa.

8. Occupiamoci ora della determinazione di alcuni degli integrali di cui si è fatto cenno nella introduzione.

Prima di tutto utilizziamo la (36), cui soddisfa

$$y = H_n^2(x).$$

Perciò poniamo

$$(37) \quad y = H_n^2(x) = \sum_{i=0}^n a_{2i} H_{2n-2i}(x)$$

e teniamo presente che

$$(38) \quad H_{2n-2i}^{(r)}(x) = (-1)^r 2^r \frac{(2n-2i)!}{(2n-2i-r)!} H_{2n-2i-r}(x).$$

Inoltre la seguente formola ricorrente degli $H_n(x)$:

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

dà successivamente

$$(39) \quad \begin{cases} 2xH_n(x) = -H_{n+1}(x) - 2nH_{n-1}(x), \\ 4x^2H_n(x) = H_{n+2}(x) + 2(2n+1)H_n(x) + 4n(n-1)H_{n-2}(x). \end{cases}$$

A mezzo delle (38) e (39) la (36), può scriversi

$$\begin{aligned} & - 8 \sum a_{2i} \frac{(2n-2i)!}{(2n-2i-3)!} H_{2n-2i-3}(x) + \\ & + \sum a_{2i} \frac{(2n-2i)!}{(2n-2i-2)!} [12H_{2n-2i-1}(x) + 24(2n-2i-2)H_{2n-2i-3}(x)] + \\ & + \sum a_{2i} (2n-2i) [-4H_{2n-2i+1}(x) - 8(4n-4i-1)H_{2n-2i-1}(x) - \\ & - 16(2n-2i-1)(2n-2i-2)H_{2n-2i-3}(x) - 4(4n-1) \sum a_{2i} (2n-2i)H_{2n-2i-1}(x) + \\ & + \sum a_{2i} 8n [H_{2n-2i+1}(x) + 2(2n-2i)H_{2n-2i-1}(x)] = 0 \end{aligned}$$

e da questa annullando il coefficiente di $H_{2n-2i-1}(x)$, si ha a semplificazioni effettuate

$$2(i+1)a_{2i+2} = (2n-2i)^2 a_{2i}$$

moltiplicando la precedente con le formule che da essi si traggono cambiando i in $i+1, i+2, \dots, i+s-1$, si ricava

$$2^s(i+1)(i+2)\dots(i+s)a_{2i+2s} = (2n-2i)^2(2n-2i-2)^2\dots(2n-2i-2s+2)^2 a_{2i}$$

da cui per $i=0$

$$(40) \quad 2^s s! a_{2s} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-2s)!!} \right]^2 a_0.$$

Dal confronto poi dei coefficienti di x^{2n} dei due membri di (37), si trae

$$a_0 = 1.$$

Pertanto la (40), può scriversi

$$a_{2s} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-2s)!!} \right]^2 \frac{1}{2^s s!}$$

e quindi, per quest'ultima, la (37) diventa

$$H_n^2(x) = \sum_{s=0}^n \left[\frac{(2n)!!}{(2n-2s)!!} \right]^2 \frac{1}{2^s s!} H_{2n-2s}(x).$$

Se ora moltiplichiamo la precedente per $e^{-x^2} H_{2p}(x) dx$ e integriamo da $-\infty$ a $+\infty$, abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) H_{2p}(x) dx = \sum_{s=0}^n \left[\frac{(2n)!!}{(2n-2s)!!} \right]^2 \frac{1}{2^s s!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2n-2s}(x) H_{2p}(x) dx.$$

L'integrale del 2° membro è $\neq 0$, per

$$2n-2s = 2p$$

ossia per

$$s = n - p,$$

e poichè è

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2p}^2(x) dx = 2^{2p} (2p)! \sqrt{\pi},$$

si ha

$$(41) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) H_{2p}(x) dx = \left[\frac{(2n)!!}{(2p)!!} \right]^2 \frac{(2p)! \sqrt{\pi}}{2^{n-3p} (n-p)!}, \quad \text{se } p \leq n.$$

Per $p = n$, dalla precedente si trae

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) H_{2n}(x) dx = (4n)!! \sqrt{\pi}.$$

Se invece è $p > n$, risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) H_{2p}(x) dx = 0.$$

Infine, se cambiamo nella (41) n in $2p$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{2p}^3(x) dx = \left[\frac{(4p)!!!}{(2p)!!} \right]^3 \sqrt{\pi}.$$

9. Per lo stesso scopo perseguito nel N. precedente utilizziamo ora la (33) cui soddisfa

$$y = [L_n^{(2)}(x)]^2.$$

Questa volta poniamo

$$(42) \quad [L_n^{(2)}(x)]^2 = \sum_{i=0}^{2n} a_i L_{2n-i}^{(2)}(x)$$

e indichiamo

$$L_{2n-i}^{(2)}(x) \quad \text{con} \quad y.$$

Dalla (23) abbiamo, se cambiamo u in y ed n in $2n - i$

$$(43) \quad xy'' + (\alpha - x + 1)y' + (2n - i)y = 0,$$

e da questa derivando

$$xy''' + (\alpha - x + 2)y'' + (2n - i - 1)y' = 0.$$

Dalla precedente e dalla (43), si ricava

$$\begin{aligned} & x^2y''' + 3x(\alpha - x + 1)y'' = \\ = & [-2x^2 + (-2n + i + 4\alpha + 4)x - (2\alpha + 1)(\alpha + 1)]y' + (2x - 2\alpha - 1)(2n - i)y. \end{aligned}$$

Se ora nella (33) si mette al posto di y e $x^2y''' + 3x(\alpha - x + 1)y''$, rispettivamente $\sum_{i=0}^{2n} a_i L_{2n-i}^{(2)}(x)$ e il valore che si ricava dalla precedente uguaglianza, si trae

$$(44) \quad \sum a_i [(2n + i)xy' - (2x - 2\alpha - 1)iy] = 0.$$

Ma è

$$(45) \quad x \frac{d}{dx} [L_n^{(2)}(x)] = nL_n^{(2)}(x) - (\alpha + n)L_{n-1}^{(2)}(x),$$

$$(46) \quad (n + 1)L_{n+1}^{(2)}(x) - (2n + \alpha - x + 1)L_n^{(2)}(x) + (\alpha + n)L_{n-1}^{(2)}(x) = 0,$$

quindi se nelle (45) e (46) cambiamo n in $2n - i$, eliminiamo poi fra esse e la (44) rispettivamente xy' e xy ed annulliamo infine il coefficiente di $L_{2n-i}^{(2)}(x)$,

si ricava la seguente formula ricorrente

$$(47) \quad 2(i+1)(2n-i)a_{i+1} + [(2n-3i)(2n-i)-i]a_i - (2n-i+\alpha+1)(2n-i+1)a_{i-1} = 0$$

che permette di ricavarsi successivamente a_1, a_2, \dots , tenendo presente che

$$(48) \quad a_0 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

come subito si trae confrontando il primo termine degli sviluppi, secondo le potenze di x , di ambo i membri della (42).

In particolare dalla (47) si ha

$$(49) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}, & \text{per } i=0, \\ a_2 = \frac{na_0}{4(2n-1)} [(2n-3)(2n-1) + 2(\alpha+2n)-1], & \text{per } i=1. \end{cases}$$

Se ora moltiplichiamo la (42) per $e^{-x}x^2L_p^{(\alpha)}(x)dx$ ed integriamo da 0 ad ∞ , abbiamo, se $\alpha > -1$,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2L_p^{(\alpha)}(x)[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = 0, \quad \text{per } p > 2n,$$

se invece è $p = 2n$, poichè

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}, \quad \text{per } \alpha > -1,$$

risulta, tenendo anche presente la (48)

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2L_{2n}^{(\alpha)}(x)[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = \frac{\Gamma(\alpha+2n+1)}{(n!)^2}.$$

In generale è

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2L_p^{(\alpha)}(x)[L_n^{(\alpha)}(x)]^2dx = a_{2n-p} \frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{p!}, \quad p < 2n,$$

ove a_{2n-p} si calcola a mezzo della formula ricorrente (47), tenendo presente le (48), (49).

INDICE DEL TOMO XVIII DELLA SERIE 4^a

L. TONELLI: Su alcuni funzionali	pag. 1
H. JONAS: Intorno ad una classe notevole di cieli formati da quattro trasformazioni di Laplace nello spazio ordinario	» 23
P. BUZANO: Determinazione e studio di superficie di S_5 le cui linee principali presentano una notevole particolarità	» 51
BUCHIN SU: Plane Sections of the Tangent Surface of a Space Curve	» 77
TE-CHIH FON: Note on the Projective Differential Geometry of Space Curves	» 97
F. CONFORTO: Sopra un complemento all'equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente	» 107
U. MORIN: Sulla classificazione proiettiva delle varietà a superficie-sezioni razionali	» 147
D. GRAFFI: Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo	» 173
J. SHOCHAT: Application of Orthogonal Tchebycheff Polynomials to Lagrangian Interpolation and to the General Theory of Polynomials	» 201
L. AMERIO: Sulle condizioni di validità dei metodi di sommazione di Gronwall	» 239
E. T. DAVIES: Lie Derivation in Generalized Metric Spaces	» 261
M. VILLA: Nuove ricerche nella teoria delle curve quasi-asintotiche	» 275
G. PALAMÀ: Sulle equazioni differenziali lineari soddisfatte dal prodotto di integrali particolari di due equazioni differenziali lineari omogenee assegnate e su alcune formule integrali dei polinomi di Laguerre e di Hermite	» 309
<i>Indice</i>	» 327

INDIRIZZI
dei collaboratori del Tomo XVIII

- L. TONELLI** - PISA, via Lavagna 5.
H. JONAS - BERLIN, Steiglitz Kurfurstenstrasse.
P. BUZANO - TORINO, via Garibaldi 23.
BUCHIN SU - KIANGSI, University of Chekiang Taiho.
TE-CHIH FOU - KIANGSI, University of Chekiang Taiho.
F. CONFORTO - ROMA, via Amalasunta 20.
U. MORIN - PADOVA, via S. Pietro 2^A.
D. GRAFFI - BOLOGNA, via Carducci 4.
J. SHOHAT - Univer. di Pensylvania (Philadelphia), 600 S. Eagle Road,
Manoa, Upper Darby, P. O., Pa. United States of America.
L. AMERIO - MILANO, viale Romagna 39.
E. T. DAVIES - LONDRA, University of London King's College
Strand W. C. 2.
M. VILLA - MILANO, via Guerrini 3.
G. PALAMÀ - LECCE, via Sepolcri Messapici 20.
-