ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | **Salvatore Pincherle** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO VI
(LXII DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXIX

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1929

Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

Von KARL GRANDJOT (in Paris), VOJTĚCH JARNÍK (in Prag), EDMUND LANDAU (in Göttingen) und JOHN EDENSOR LITTLEWOOD (in Cambridge).

EINLEITUNG.

Herr FATOU (1) hat zuerst bemerkt, dass die für $0 < x < 2\pi$ offenbar konvergente trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \log n}$$

bei $x \to 0$ keinem endlichen Grenzwert zustrebt.

Der (FATOUsche) Originalbeweis ist nicht so einfach wie der folgende, der zeigt, dass die Funktion gegen $+\infty$ strebt.

Durch ABELsche partielle Summation erhält man bekanntlich: Aus $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \dots \geqq \varepsilon_s \geqq 0$, $\sum\limits_{r=1}^{t} b_r \leqq B$ für $1 \leqq t \leqq s$ folgt

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{s} \varepsilon_r b_r \leqq \varepsilon_1 B.$$

Ferner ist bekanntlich für $0 < x < 2\pi$, $u < v$

$$(2) \qquad \sum_{n=u+1}^{v} \cos nx = \frac{-\sin\left(u+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(v+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

also

$$(3) \qquad \left| \sum_{n=u+1}^{v} \cos nx \right| \leqq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}.$$

(1) *Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 142 (1906). S. 765-767.

Daher ist für jedes $m > 1$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \log n} \geqq \sum_{n=2}^{m} \frac{\cos nx}{n \log n} - \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cdot (m+1) \log (m+1)}.$$

Für $m = \left[\frac{\pi}{3x}\right]$ ist also

$$f(x) \geqq \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n \log n} + o(1) \to \infty.$$

Offenbar ergibt sich wörtlich ebenso der Satz: Aus $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots$, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ und der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \to \infty.$$

In der Tat ist für $0 < x \leqq \frac{\pi}{3}$, $m = \left[\frac{\pi}{3x}\right]$, $s_n = a_1 + \ldots + a_n$

$$f(x) \geqq \frac{1}{2} s_m - \frac{a_{m+1}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} s_m \left(1 - \frac{2a_{m+1}}{s_m \sin \frac{x}{2}}\right).$$

In dieser Aussage kann offenbar die Voraussetzung $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ durch die schwächere

(4) $$a_{n+1} = o\left(\frac{s_n}{n}\right)$$

ersetzt werden. Und statt (4) genügt augenscheinlich auch

(5) $$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < \frac{\pi}{12};$$

denn

$$\frac{2a_{m+1}}{s_m \sin \frac{x}{2}} \sim \frac{12 m a_{m+1}}{\pi s_m}.$$

Leicht erkennt man ferner, dass (5) durch

$$\limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < \frac{1}{2}$$

ersetzt werden kann. Denn nach einer bekannten TSCHEBYSCHEFschen Ungleichung ist für $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$, $m = \left[\frac{\pi}{2x}\right]$

$$f(x) \geqq \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx - \frac{a_{m+1}}{\sin\frac{x}{2}} \geqq \frac{s_m}{m}\sum_{n=1}^{m}\cos nx - \frac{a_{m+1}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\frac{s_m}{2m}\left(-\sin\frac{x}{2} + \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right) - a_{m+1}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\frac{s_m}{2m}(1 + o(1)) - a_{m+1}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Andererseits ist offenbar, wenn

(6) $$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots, \quad a_n \to 0, \quad s_n \to \infty,$$

stets

$$\limsup_{n=\infty} \frac{na_{n+1}}{s_n} \leqq 1.$$

Es entstehen nun die fünf Fragen:

1) Folgt aus (6) allein

(7) $$f(x) \to \infty ?$$

2) Wenn nein, folgt (7) etwa aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{na_{n+1}}{s_n} < 1 ?$$

3) Wenn nein, welches ist die (dann offenbar existierende und dem Intervall $\frac{1}{2} \leqq P < 1$ angehörende) Weltkonstante P, so dass (7) zwar aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{na_{n+1}}{s_n} < P$$

folgt, jedoch für kein $P' > P$ aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{na_{n+1}}{s_n} < P' ?$$

4) Folgt (7) schon aus (6) zusammen mit

$$\limsup_{n=\infty} \frac{na_{n+1}}{s_n} \leqq P ?$$

5) Ist $P = \frac{1}{2}$?

Wir werden in dieser Abhandlung alle diese Fragen beantworten und finden:

Ad 1) Nein.

Ad 2) Nein.

Ad 3) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^P \sin \pi y \, dy = 0.$

Ad 4) Nein.

Ad 5) Nein.

§ 1.

Es sei

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^\alpha \sin \pi y \, dy \quad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Offensichtlich fällt $I(\alpha)$ monoton für wachsendes α; denn

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^\alpha \log y \sin \pi y \, dy = -\int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^\alpha \,|\log y \sin \pi y\,|\, dy < 0.$$

Ferner ist

$$I(0) = \frac{1}{\pi} > 0, \quad I(1) = -\frac{1}{\pi^2} < 0.$$

Also gibt es genau ein P mit

$$\int\limits_0^{\frac{3}{2}} y^P \sin \pi y \, dy = 0, \quad 0 < P < 1.$$

Dabei ist $P > \frac{1}{2}$. Denn für $0 < y \leqq \frac{1}{2}$ ist

$$y < \frac{3}{4} < 1,$$

$$(\sqrt{y} + \sqrt{1-y})^2 = 1 + 2\sqrt{y(1-y)} > 1 + \sqrt{y} > 1 + y = (\sqrt{1+y})^2,$$

also

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{y}+\sqrt{1-y}-\sqrt{1+y})\sin \pi y \, dy > 0.$$

§ 2.

Satz 1: Aus (6) *zusammen mit*

(8) $$\gamma = \limsup_{n=\infty} \frac{n a_{n+1}}{s_n} < P$$

folgt

$$f(x) \to \infty \quad \textit{bei} \quad x \to 0.$$

Beweis: Für $x > 0$, $m = \left[\frac{\pi}{2x}\right]$ und $v \geqq 3m+1$ ist nach (2), gleichmässig in v,

$$\sum_{n=3m+1}^{v} \cos nx = \frac{-\sin\left(3m+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(v+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\geqq \frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+O(x)\right)-1}{2\sin\frac{x}{2}} = O(x).$$

Nach (1) ist also

$$\sum_{n=3m+1}^{\infty} a_n \cos nx \geqq O(a_{3m+1}x) = O(1),$$

und es genügt,

$$\sum_{n=1}^{3m} a_n \cos nx \to \infty$$

zu zeigen.

Nach (8) ist für $n \geqq n_0$, wenn wir $\varkappa = \frac{\gamma + P}{2}$ setzen,

$$\frac{s_n}{n^\varkappa} - \frac{s_{n+1}}{(n+1)^\varkappa} = \frac{s_n}{n^\varkappa} - \frac{s_n + a_{n+1}}{(n+1)^\varkappa} > s_n\left(\frac{1}{n^\varkappa} - \frac{1}{(n+1)^\varkappa} - \frac{\varkappa}{(n+1)^{\varkappa+1}}\right) > 0.$$

Daher ist, wenn $s_0 = 0$ und $s_\tau = s_{[\tau]}$ für $\tau \geqq 0$ definiert wird,

$$\sum_{n=1}^{3m} a_n \cos nx = \sum_{n=1}^{3m} (s_n - s_{n-1}) \cos nx = \sum_{n=1}^{3m} s_n (\cos nx - \cos(n+1)x) + s_{3m} \cos(3m+1)x$$

$$= x \int_0^{3m+1} s_\tau \sin \tau x \, d\tau + s_{3m} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + o(1)\right) = x \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \frac{s_\tau}{\tau^\varkappa} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + o(s_{3m})$$

$$\geqq O(x) + x \frac{s_{\frac{\pi}{x}}}{\left(\frac{\pi}{x}\right)^\varkappa} \int_{n_0}^{\frac{\pi}{x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + x \frac{s_{\frac{\pi}{x}}}{\left(\frac{\pi}{x}\right)^\varkappa} \int_{\frac{\pi}{x}}^{\frac{3\pi}{2x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + o\left(s_{\frac{\pi}{x}}\right)$$

$$= s_{\frac{\pi}{x}} \left(\frac{x^{1+\varkappa}}{\pi^\varkappa} \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau + o(1) \right) \to \infty$$

wegen

$$\frac{x^{1+\varkappa}}{\pi^\varkappa} \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \tau^\varkappa \sin \tau x \, d\tau = \pi \int_0^{\frac{3}{2}} y^\varkappa \sin \pi y \, dy = \pi I(\varkappa) > 0.$$

§ 3.

Satz 2: Es gibt ein Beispiel mit (6), $\gamma = P$ *und* $f(x)$ *nicht* $\to \infty$ *bei* $x \to 0$.

Beweis: Es sei

$$k_0 = 1, \quad k_q = 2^{4^q}, \quad c_q = \frac{1}{k_{q-1}} \quad \text{und} \quad P_q = P + \frac{1-P}{q} \quad \text{für} \quad q \geqq 1,$$

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{c_q}{n^{1-P_q}} \quad \text{für} \quad k_{q-1} < n \leqq k_q.$$

Dann ist

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \dots, \quad a_n \to 0.$$

Für $k_{q-1} < n \leqq k_q$ ist

$$\frac{n a_{n+1}}{s_n} \leqq \frac{n \frac{c_q}{n^{1-P_q}}}{c_q \left(\frac{1}{1^{1-P_q}} + \dots + \frac{1}{n^{1-P_q}} \right)} \leqq \frac{n^{P_q}}{\int_1^n \frac{d\tau}{\tau^{1-P_q}}} = \frac{n^{P_q}}{\frac{1}{P_q}(n^{P_q} - 1)} \to P;$$

daher ist

$$\gamma \leqq P.$$

Nun sei $x = x_q = \frac{3\pi}{2k_q}$. Wegen $I'(\alpha) < 0$ ist $-I(P_q) > \frac{W}{q}$, wo W eine positive absolute Konstante ist. Daher ist $\left(\text{man beachte } P_q > P > \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{n=1}^{k_{q-1}} a_n \cos nx \leqq k_{q-1} = 2^{4^{q-1}} = 2^{-4^{q-1}} 2^{\frac{1}{2}4^q} = c_q \sqrt{k_q} = o(-c_q k_q^{P_q} I(P_q)),$$

da für alle grossen q offenbar $k_q^{P_q - \frac{1}{2}} > k_q^{P - \frac{1}{2}} > q^2$; man merke sich

$$-c_q k_q^{P_q} I(P_q) \to \infty.$$

Ferner ist nach (1) und (3)

$$\sum_{n=k_q+1}^{\infty} a_n \cos nx \leqq O\left(\frac{a_{k_q+1}}{x}\right) = O(k_q c_{q+1}) = O(1).$$

Schliesslich ist

$$\sum_{n=k_{q-1}+1}^{k_q} a_n \cos nx = c_q \sum_{n=k_{q-1}+1}^{k_q} \frac{\cos nx}{n^{1-P_q}} \leqq c_q \sum_{n=1}^{k_q} \frac{\cos nx}{n^{1-P_q}},$$

da $nx \leqq \frac{\pi}{2}$ für $n \leqq k_{q-1}$ wegen $k_{q-1} < \frac{k_q}{3}$; und hierin ist, da $\frac{\cos v}{v^{1-P_q}}$ für $0 < v \leqq \frac{3\pi}{2}$ in zwei Abteilungen monoton ist,

$$\sum_{n=1}^{k_q} \frac{\cos nx}{n^{1-P_q}} = \int_0^{\frac{3\pi}{2x}} \frac{\cos \tau x}{\tau^{1-P_q}} d\tau + O(1) = \frac{\pi^{1+P_q}}{P_q} x^{-P_q} I(P_q) + O(1).$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$f(x) \leqq \frac{\pi^{1+P}}{P} c_q x^{-P_q} I(P_q)(1 + o(1)),$$

$$\text{(9)} \qquad \liminf_{x=0} f(x) = -\infty.$$

Aus (9) folgt 1) die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 2) $f(x)$ nicht $\to +\infty$ bei $x \to 0$, also 3) $\gamma \geqq P$, also 4) $\gamma = P$.

Studio geometrico dei sistemi anolonomi.

Memoria di GIORGIO VRANCEANU (a Jassy - Romania).

INTRODUZIONE

L'idea di cercare una interpretazione geometrica dei sistemi anolonomi della Meccanica, mi è stata suggerita da una questione postami dal prof. LEVI-CIVITA, e cioè:

Dato un sistema meccanico anolonomo, a vincoli indipendenti dal tempo, la cui forza viva ha la forma

$$T=\frac{1}{2}\sum_{ij}^{n}{}_{1} a_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}$$

e i cui vincoli di anolonomia siano

$$(\alpha) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{i}\varphi_{ij}dx_i = 0 \qquad (j=1, 2, \dots, n-m),$$

rimane individuata una varietà metrica V_n, il cui ds^2 è dato dalla espressione

$$ds^2 = 2Tdt^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

e dove sussistano le (α) come vincoli di mobilità per il punto rappresentativo del sistema in V_n. Le traiettorie spontanee del nostro sistema anolonomo sono delle curve in V_n. Godono esse effettivamente la proprietà che la loro curvatura geodetica nella V_n, risulta minima subordinatamente ai vincoli (α)?

Si noti che il cosiddetto principio della direttissima di HERTZ [1], riferisce tale proprietà non alla V_n, ma alla varietà (euclidea) corrispondente alla forza viva del sistema in coordinate cartesiane, cioè alle

$$T=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

[1] Vedi HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik*, pp. 100-119.

che presuppone il sistema sostituito da r punti materiali e in cui si indica con m_i la massa dell' i^{esimo} punto e con x_i, y_i, z_i le sue coordinate cartesiane.

Era perciò ben presumibile che il principio di HERTZ si interpretasse nella V_n appunto come minima della curvatura geodetica compatibilmente colle (α). Ma conveniva verificarla in modo diretto, in base alle equazioni del moto in coordinate lagrangiane e alla metrica di V_n.

Risoluto questo problema ([1]), mi sono accorto che è possibile uno studio geometrico dei sistemi anolonomi, che, oltre alle applicazioni che ha nella Meccanica, non è privo di interesse per se stesso.

Lo scopo di questo lavoro è precisamente di esporre i risultati, ai quali io sono arrivato in questa direzione, lasciando per un'altra occasione le applicazioni alla Meccanica.

Così, in questa prima parte, dopo aver dato nei paragrafi 1 e 2 la definizione di una varietà anolonoma, delle sue congruenze fondamentali e di anolonomia, introduco nei paragrafi 3 e 4 la nozione di parallelismo nel senso LEVI-CIVITA e la nozione di geodetiche di queste varietà.

In quello che riguarda il calcolo differenziale assoluto, esposto nei paragrafi 5, 6, 7, 8 e 9, vedremo che si può convenientemente applicare a queste varietà quello che io ho chiamato il calcolo differenziale assoluto delle congruenze. Per le varietà riemanniane V_n, questo calcolo è assolutamente equivalente al solito calcolo differenziale assoluto delle coordinate. Esso consta precisamente nel fatto che si introduce in V_n un sistema di n congruenze ortogonali, cosa che è stata fatta da RICCI e LEVI-CIVITA nella trattazione di diversi problemi, e poi si cercano i sistemi che hanno proprietà tensoriale rispetto alle trasformazioni del sistema di congruenze dato, in un altro sistema di congruenze pure ortogonali.

Questo ultimo problema è stato considerato esplicitamente dal RENÉ LAGRANGE ([2]) e da me in relazione colle varietà anolonome ([3]).

Siccome questo calcolo delle congruenze è poco noto, ho creduto opportuno di esporre súccintamente come si passano le cose nel caso delle varietà riemanniane, e poi di passare alle varietà anolonome.

([1]) Vedi la mia Nota: *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. IV, serie 6ª, p. 508.

([2]) Cfr. RENÉ LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu*, pubblicato nel « Mémorial des Sciences Mathématiques ».

([3]) Vedi le mie Note: *Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes*, « Comptes rendus », t. 183, p. 1083 e *Sur quelques tenseurs dans les variétés non holonomes*, « Comptes rendus », t. 186, p. 995.

Infine nel § 10 si danno le equazioni alle variazioni delle geodetiche e si mette in evidenza il loro carattere invariantivo.

Nella seconda parte di questo lavoro saranno trattati i seguenti argomenti: seconda forma fondamentale di una V_n^m, parallelismo esteriore, o parallelismo di WEYL di una V_n^m, interpretazione geometrica dei tensori principali e problema di equivalenza di due varietà anolonome.

Una parte dei risultati esposti in questo lavoro sono già stati pubblicati in Piccole Note, e saranno indicati al loro posto.

Mi sia permesso ora di esprimere al prof. TULLIO LEVI-CIVITA i miei più vivi ringraziamenti per il modo gentile col quale si è interessato a questo lavoro.

PRIMA PARTE

§ 1. La definizione delle varietà anolonome.

Consideriamo una varietà metrica V_n il cui elemento lineare sia definito dalla espressione [1]

$$ds^2 = \sum_{ij}^{n} {}_1 a_{ij} dx_i dx_j, \tag{1}$$

e supponiamo di più che in questa varietà siano date le $n - m$ $(m > 1)$ equazioni

$$\sum_{i}^{n} {}_1 \varphi_{ij} dx_i = 0 \qquad (j = 1, 4, ..., n - m). \tag{2}$$

I coefficienti a_{ij} e φ_{ij} si suppongano funzioni delle x, continue e derivabili quante volte occorre, in un campo D cui si riferiscono le nostre considerazioni. Abbiamo escluso il caso $m = 0$ e $m = 1$, perchè nel primo caso le equazioni (2), che sono a considerarsi indipendenti tra loro, non hanno che le soluzioni banali $x =$ costante, e nel secondo caso le equazioni (2) definiscono una famiglia di curve in V_n.

Vogliamo studiare in questa Memoria le proprietà delle varietà V_n, vincolate dalle relazioni (2) e che indicheremo per semplicità con V_n^m. Siccome

(1) Le notazioni relative alle varietà metriche, usate nel corso di questo lavoro, sono quelle adottate dal prof. LEVI-CIVITA nelle sue *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, raccolte dal dott. E. PERSICO (Roma, A. Stok, 1923), che nel seguito saranno indicate semplicemente *Lez. Levi-Civita*.

questi spazi si presentano in modo del tutto naturale nello studio dei sistemi anolonomi della Dinamica, li chiameremo anche spazi, o varietà anolonome.

Le equazioni (2) formano un sistema di $n-m$ equazioni a differenziali totali, o, come si dice talvolta, un sistema di PFAFF.

Se questo sistema è illimitatamente integrabile, si possono ricavare dalle (2) $n-m$ delle x, in funzione delle altre x, e di $n-m$ costanti arbitrarie $C_1, C_2, \dots, C_{n-m}$:

$$x_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_m, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}) \qquad (j = m+1, \dots, n), \tag{3}$$

in modo che per un punto dello spazio passa una ed una sola di queste varietà integrali. Fissati in un modo qualunque le costanti di integrazione C, per esempio di far passare l'integrale generale per un punto dato ad arbitrio, lo studio dello spazio anolonomo V_n^m si riduce allo studio di una varietà metrica V_m, il cui ds^2 si ottiene introducendo nella formula (1), i valori dati dalle (3). Lo studio di V_n^m si riduce in questo caso allo studio di ∞^{n-m} varietà metriche V_m.

Supponiamo ora che il sistema (2) non sia illimitatamente integrabile. Esso può ammettere anche in questo caso un certo numero di combinazioni integrabili, e si dimostra [1] che si possono mettere in evidenza queste combinazioni integrabili, trasformando il sistema in un altro della forma

$$\begin{cases} df_i = 0 & (i = 1, 2, \dots, n-p), \\ w_j = 0 & (j = n-p, \dots, n-m). \end{cases} \tag{4}$$

Le prime equazioni (4) sono dei differenziali totali esatti, e le ultime dei pfaffiani, che non ammettono più nessuna combinazione integrabile. Dalle prime equazioni (4) si possono ricavare $n-p$ delle x in funzioni delle altre x e di $n-p$ costanti di integrazione, e con lo stesso ragionamento di sopra, lo studio di V_n^m si riduce allo studio di ∞^{n-p} varietà metriche V_p, dove sussistano le ultime (4), ossia ad ∞^{n-p} varietà anolonome V_p^m.

Introducendo un linguaggio già usato per le varietà metriche e per gli spazi euclidei, possiamo dire che la varietà anolonoma V_n^m, è immersa nella varietà metrica V_n. L'ultimo risultato si può esprimere dicendo, che il più piccolo numero di dimensioni di una varietà metrica, in cui V_n^m si può considerare immersa, è p. Perciò il numero $p-m$ esprime il grado di anolonomia della varietà V_n^m.

---

[1] Cfr. E. GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff.* (Hermann, Paris), p. 296.

Se le relazioni (2) non ammettono nessuna combinazione integrabile, siamo indotti a intuire, che V_n^m contiene tutti i punti di V_n, nel senso che si può andare da un punto qualsiasi di V_n ad un punto pure qualsiasi, sopra delle curve integrali, (soddisfacendo alle (2)), ossia rimanendo sempre in V_n^m. Non so se esista una dimostrazione generale di questo fatto, ma per certi sistemi (2) la dimostrazione è immediata. La reciproca è vera, e cioè, se le equazioni (2) ammettono una combinazione integrabile, due punti possono essere congiunti con delle curve integrali, solo quando essi appartengano alla stessa ipersuperficie determinata dalla combinazione integrabile.

Dopo ciò che si è detto più sopra, ci si potrebbe sempre riferire à delle varietà V_p^m, dove le equazioni di anolonomia non hanno più nessuna combinazione integrabile. Ma dato un sistema di equazioni a differenziali totali (2), il porre questo sistema sotto la forma (4) è una questione assai difficile in generale.

Perciò noi riferiamo le nostre considerazioni al sistema (2), senza pensare al fatto che esso può ammettere delle combinazioni integrali.

§ 2. Sulle congruenze fondamentali e di anolonomia.

Cominciamo col richiamare qualche nozione ben nota sopra i sistemi di n congruenze ortogonali in una varietà metrica V_n ([1]).

Dato un sistema di n quantità controvarianti A^i, le equazioni

$$\frac{dx^1}{A^1} = \frac{dx^2}{A^2} = - \dots = \frac{dx^n}{A^n}, \tag{4'}$$

definiscono un sistema di curve in V_n, che si chiama una congruenza.

Per qualunque punto, in cui non tutte le A^i sono nulle, passa una ed una sola di queste curve. Siccome la moltiplicazione delle A^i con un fattore diverso da zero, non cambia la nostra congruenza, possiamo sempre supporre che essa sia definita dalle quantità

$$\lambda^i = \frac{A^i}{\sigma} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

che soddisfano la relazione

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij} \lambda^i \lambda^j = 1,$$

([1]) Vedasi in ispecie, *Lez. Levi-Civita*, cap. X.

il che equivale a determinare σ con la formula

$$\sigma^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij} A^i A^j.$$

Le λ^i così definite si chiamano i parametri della congruenza. Le quantità covarianti

$$\lambda_j = \sum_{1}^{n}{}_i a_{ij} \lambda^i$$

si chiamano i momenti della detta congruenza.

Si dimostra che in una V_n si possono sempre scegliere (ed anche in una infinità di modi) n congruenze ortogonali tra loro, e cioè indicando con λ_h^i $(h = 1, 2, ..., n)$ i parametri di queste congruenze, si hanno in qualunque punto di V_n le relazioni

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij} \lambda_h^i \lambda_k^j = \delta_h^k \begin{cases} = 1, & h = k \\ = 0, & h \neq k. \end{cases} \tag{5}$$

Da queste si deducono le relazioni tra parametri e momenti

$$\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_{h|i} \lambda_k^i = \delta_h^k$$

e le relazioni tra momenti

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} a^{ij} \lambda_{h|i} \lambda_{k|j} = \delta_h^k$$

dove le a^{ij} sono i reciproci del determinante delle a_{ij}.

Un fatto notevole da osservare è che dati, sia i momenti, sia i parametri di un sistema di n congruenze ortogonali in V_n, la metrica di questa varietà rimane completamente determinata in base alle formule

$$a_{ij} = \sum_{1}^{n}{}_h \lambda_{h|i} \lambda_{k|j}; \quad a^{ij} = \sum_{1}^{n}{}_h \lambda_h^i \lambda_h^j. \tag{5'}$$

Perciò la metrica di V_n si può considerare compendiata nelle n congruenze ortogonali λ.

Dato uno spostamento infinitesimo ds di componenti $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, le sue proiezioni sopra le congruenze (λ_h) sono dati dalle formule

$$ds_h = \sum_{1}^{n}{}_i \lambda_{h|i} dx_i, \tag{6}$$

dove s_h non è altro che l'arco della congruenza (λ_h). Dividendo per ds si hanno le relazioni

$$(6') \qquad u_h = \frac{ds_h}{ds} = \sum_1^n {}_i \lambda_{h|i} \frac{dx_i}{ds},$$

nelle quali u_h sono i coseni che lo spostamento ds forma colle congruenze (λ).

Dalla formule (6) si possono ricavare le dx_i sotto la forma

$$(7) \qquad dx_i = \sum_1^n {}_h \lambda_h^i ds_h,$$

vale a dire che lo spostamento ds è completamente determinato dai differenziali degli archi ds_h. Introducendo questi valori nella forma quadratica (1), si ottiene, in base alla (5), la formula

$$(1') \qquad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \ldots + ds_n^2.$$

Questo detto, passiamo alla nostra varietà anolonoma V_n^m. Dalle equazioni (2), che valgono in questa varietà, si possono ricavare $n-m$ delle dx_i in funzioni delle altre m, e più in generale le dx_i sotto la forma

$$(5'') \qquad dx_i = \sum_1^m {}_h l_h^i d\sigma_h$$

indicando con $d\sigma_h$, m combinazioni lineari indipendenti delle dx_i [1].

Queste formule (in cui le $d\sigma_h$ si riguardano arbitrarie), esprimono che gli spostamenti possibili del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nella varietà anolonoma V_n^m, seguono in tutte e sole ∞^{m-1} direzioni di una giacitura, la quale può ritenersi individuata da m sue direzioni qualunque, purchè indipendenti tra loro. Nella forma (5''), ove si assumono successivamente tutte le $d\sigma_h$ uguali a zero, salvo la prima, la seconda, ecc., si presentano come tali le direzioni cui corrispondono incrementi delle x_i proporzionali a l_1^i, $l_2^i, \ldots$, ecc., rispettivamente.

Possiamo introdurre i parametri delle corrispondenti direzioni secondo la forma fondamentale (1), scrivendo le (5'') sotto la forma

$$(7') \qquad dx_i = \sum_1^m {}_h \lambda_h^i ds_h,$$

dove si è posto

$$(6'') \qquad \lambda_h^i = \frac{l_h^i}{\rho_h}, \quad ds_h = \rho_h d\sigma_h,$$

---

(1) Cfr. la mia Nota: *Sopra una classe di sistemi anolonomi*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. III (1926), serie 6ª, p. 549.

e prendendo le ρ_h in modo che risulti

$$\sum_{ij}^{n} a_{ij}\lambda_h^i\lambda_h^j = 1 \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

il che equivale a determinare le ρ_h in base alle formule

$$\rho_h^2 = \sum_{ij}^{n} a_{ij} l_h^i l_h^j .$$

Prendiamo, come è pur lecito, le m direzioni (λ) ortogonali tra loro. Le espressioni delle dx_i possono così presentarsi (e anche in una infinità di modi), sotto la forma

$$dx_i = \sum_{h}^{m} \lambda_h^i ds_h , \tag{8}$$

dove i parametri λ_h^i soddisfano le relazioni dî ortogonalità

$$\sum_{ij}^{n} a_{ij}\lambda_h^i\lambda_k^j = \delta_h^k \qquad (h, k = 1, 2, \dots, m). \tag{7''}$$

Risulta di qui che le equazioni (2) non fanno altro che introdurre in qualunque punto di V_n una giacitura di ∞^{m-1} direzioni, dentro la quale si trovano tutti i spostamenti di V_n^m. Le m direzioni ortogonali (λ) che determinano questa giacitura nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definiscono in tutto V_n, m congruenze che diremo *fondamentali.*

Completando le m congruenze λ con altre $n - m$ congruenze, per formare un sistema di n congruenze ortogonali in V_n, le equazioni (2) sono equivalenti alle equazioni

$$\sum_{i}^{n} \lambda_{h'|i} dx_i = 0, \qquad (h' = m + 1, \dots, n) \text{ (}^1\text{)}, \tag{9}$$

che esprimono precisamente che le proiezioni dello spostamento di V_n^m, sopra le ultime $n - m$ congruenze λ, sono nulle. Queste ultime $n - m$ congruenze si dicono anche congruenze di *anolonomia.*

Le equazioni (9) essendo una conseguenza delle formule (8), possiamo dire che la varietà anolonoma V_n^m è completamente determinata dalle formule (1) e (8). Dividendo le formule (8) per ds, si hanno le seguenti

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{h}^{m} \lambda_h^i u_h , \tag{10}$$

---

(1) Nel corso di questo lavoro gli indici che variano da $m+1$ a n, saranno indicati, per maggiore chiarezza, con lettere accentate.

dove u_h sono i coseni che lo spostamento in V_n^m, forma colle prime m congruenze, gli altri essendo sempre nulli. Tenendo conto delle (8) e (7''), *ne risulta ancora che la metrica di* V_n^m *è data dalla formula*

$$(1'') \qquad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \dots + ds_m^2 .$$

Condizioni di integrabilità. — Si sa che le condizioni di integrabilità di un sistema di PFAFF della forma (9) si esprimono coll'annullarsi del cosidetto covariante bilineare

$$\sum_1^n {}_{ij}\left(\frac{d\lambda_{h'|i}}{dx^j} - \frac{d\lambda_{h'|j}}{dx^i}\right) dx_i \delta x_j \qquad (h' = m+1, \dots, n),$$

per qualunque scelta dei due spostamenti di componenti dx_i e δx_j, soddisfacenti alle equazioni (9) stesse. In virtù di questa ultima condizione gli spostamenti si possono esprimere per le formule (8)

$$(8') \qquad \begin{cases} dx_i = \sum_1^m {}_h \lambda_h^i ds_h , \\ \delta x_j = \sum_1^m {}_k \lambda_k^i \delta s_k , \end{cases}$$

ed i covarianti bilineari assumono la forma

$$\sum_1^m {}_{h,k} ds_h \delta s_k \sum_1^n {}_{ij}\left(\frac{d\lambda_{h'|i}}{dx_j} - \frac{d\lambda_{h'|j}}{dx_i}\right)\lambda_h^i \lambda_k^j .$$

In questa formula ds_h e δs_k sono le componenti secondo le m congruenze fondamentali di due spostamenti situati in V_n^m. Le ds_h e δs_k, essendo arbitrarie, ne risulta che le condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità delle equazioni (9), sono date dalle formule

$$(9') \qquad \sum_1^n {}_{ij}\left(\frac{d\lambda_{h'|i}}{dx_j} - \frac{d\lambda_{h'|j}}{dx_i}\right)\lambda_h^i \lambda_k^j = 0.$$

Per dare una forma più espressiva a queste condizioni, ricordiamo la definizione dei coefficienti di rotazione di RICCI, dei quali faremo sempre uso nel seguito. I coefficienti di rotazione di RICCI relativi ad un sistema di n congruenze λ di V_n, ortogonali tra loro, sono dati dalle espressioni

$$(11) \qquad \gamma_{hkl} = \left(\frac{d\lambda_{h|i}}{dx_j} - \left\{ {ij \atop r} \right\} \lambda_{h|x}\right)\lambda_k^i \lambda_l^j ,$$

dove $\left\{ \begin{matrix} ij \\ r \end{matrix} \right\}$ sono i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie, relativi alla forma quadratica (1). Questi coefficienti sono emisimmetrici rispetto ai primi indici, e sono degli invarianti alle trasformazioni di coordinate. Consideriamo ora le quantità

$$w^h_{kl} = \gamma_{hkl} - \gamma_{hlk}, \tag{10'}$$

che sono, evidentemente, emisimmetrici negli indici inferiori. Tenuto conto delle formule (11), e della simmetria dei simboli di CHRISTOFFEL, abbiamo

$$w^h_{kl} = \left(\frac{d\lambda_{h|i}}{dx_j} - \frac{d\lambda_{h|j}}{dx_i}\right)\lambda^i_k\lambda^j_l. \tag{10''}$$

In virtù di questa formula, le condizioni di integrabilità (9'), assumono la forma semplice

$$w^{h'}_{hk} = \gamma_{h'hk} - \gamma_{h'kh} = 0 \qquad (h' = m+1, \dots, n;\ h, k = 1, 2, \dots, m). \tag{12}$$

Dalle formule (10') si ottengono le seguenti

$$\gamma_{hkl} = \frac{1}{2}\left(w^h_{kl} + w^k_{lh} - w^l_{hk}\right) \tag{10'''}$$

che in base alle (10'') definiscono le γ_{hkl} in funzione degli elementi delle congruenze λ solamente.

§ 3. Parallelismo in V^m_n.

Sia in un punto P della varietà V_n un vettore R, caratterizzato, per esempio, dalle sue componenti controvarianti R^i. Le proiezioni di questo vettore sopra le n congruenze ortogonali (λ) sono date dalle formule

$$r_h = \sum_1^n {}_i R^i \lambda_{h|i} \qquad (h = 1, 2, \dots, n), \tag{9''}$$

dove r_h sono degli invarianti alle trasformazioni di coordinate.

Inversamente, il vettore R è completamente determinato da questi invarianti, e le componenti controvarianti R^i si esprimono in funzioni delle r_h, mediante le formule

$$R^i = \sum_1^n {}_h r_h \lambda^i_h \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{11'}$$

Il vettore R *si dirà situato nella varietà anolonoma* V_n^m, se le $n - m$ proiezioni r_h, sopra le $n - m$ congruenze di anolonomia, sono nulle, e cioè se si ha

$$\sum_1^n {}_i R^i \lambda_{h'|i} = 0 \qquad (h' = m + 1, \ldots, n).$$

Dato un vettore situato in V_n^m e uno spostamento, pure situato in V_n^m, di componenti ds_k, e che lega il punto P ad un punto vicino P', vogliamo trasportare il vettore R dal punto P al punto P' per parallelismo in senso Levi-Civita. Per questo ricordiamo che le equazioni del parallelismo in V_n, si ottengono dalla equazione simbolica [1]

$$(12') \qquad \sum_1^n {}_k \tau_k \delta x_k = 0,$$

che deve valere per tutti i spostamenti indipendenti δx_k, e come conseguenza si hanno le seguenti equazioni del parallelismo

$$(11'') \qquad \tau_k = \sum_1^n {}_j a_{kj} dR^j + \sum_1^n {}_{ji} \begin{vmatrix} ji \\ k \end{vmatrix} R^j dx_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Per trovare le equazioni del parallelismo nel caso della nostra V_n^m, si deve osservare che le δx_k non sono più arbitrarie, ma sono date dalle formule (8), cosicchè l'equazione simbolica (12′) si scrive

$$(12'') \qquad \sum_1^m {}_h \delta s_h \sum_1^n {}_k \tau_k \lambda_h^k = 0,$$

e data l'arbitrarietà delle ds_h nel caso nostro, le equazioni del parallelismo assumono la forma

$$(13) \qquad \sum_1^n {}_k \tau_k \lambda_h^k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Si tratta di esplicitare queste equazioni nella doppia ipotesi, che il vettore R e il segmento infinitesimo PP' di componenti dx_i, si trovino nella varietà anolonoma V_n^m, e cioè coesistano le formule

$$(13') \qquad \begin{aligned} R^j &= \sum_1^m {}_\alpha \lambda_\alpha^j r_\alpha, \\ dx_i &= \sum_1^m {}_l \lambda_l^i ds_l. \end{aligned}$$

[1] Cfr. *Lez. Levi-Civita*, p. 157, formule (50).

Differenziamo la prima di queste formule secondo PP'

$$dR^j = \sum_1^m {}_\alpha dr_\alpha \lambda_\alpha^j + \sum_1^m {}_\alpha r_\alpha \sum_1^n {}_i \frac{d\lambda_\alpha^j}{dx_i} dx_i ,$$

e introduciamo questi valori nelle equazioni (13).

Tenendo conto dei valori di τ_k dati dalle (11″) e portando le sommatorie che vanno da 1 a m nel primo posto, si ottiene

$$\sum_1^m {}_\alpha dr_\alpha \sum_1^n {}_{kj} a_{kj} \lambda_\alpha^j \lambda_h^k + \sum_1^m {}_{\alpha l} r_\alpha ds_l \sum_1^n {}_{kji} \frac{d\lambda_\alpha^j}{dx^i} a_{kj} \lambda_h^k \lambda_l^i + \sum_1^m {}_{\alpha l} r_\alpha ds_l \sum_1^n {}_{kji} \left| \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right| \lambda_\alpha^j \lambda_l^i \lambda_h^k = 0.$$

Il primo termine di queste equazioni si riduce a dr_h in base alle formule di ortogonalità (7″). Quanto alla seconda sommatoria del secondo termine, introduciamo i momenti della congruenza h, che sono dati dalle formule

$$\lambda_{h|j} = \sum_1^n {}_k a_{kj} \lambda_h^k ,$$

e teniamo conto anche della formula

$$\frac{d\lambda_\alpha^j}{dx^i} \lambda_{h|j} = - \frac{d\lambda_{h|j}}{dx_i} \lambda_\alpha^j , \tag{13″}$$

che si ottiene derivando la formula (5′), che lega i parametri e i momenti. Cosicchè le nostre equazioni si scrivono

$$dr_h = \sum_1^m {}_{\alpha l} r_\alpha ds_l \sum_1^n {}_{ij} \left(\frac{d\lambda_{h|j}}{dx^i} - \sum_1^m \left| \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right| \lambda_h^k \right) \lambda_\alpha^j \lambda_l^i .$$

In virtù della furmula che lega i simboli di CHRISTOFFEL di prima e di seconda specie, si ha ancora

$$\sum_1^n {}_k \left| \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right| \lambda_h^k = \sum_1^n {}_k \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} \lambda_{h|k} ,$$

e in base alla formula (11) di definizione dei coefficienti di rotazione di RICCI, le equazioni del parallelismo in V_n^m assumono la forma definitiva

$$dr_h = \sum_1^m {}_{\alpha l} \gamma_{h\alpha l} r_\alpha ds_l \qquad (h = 1, 2, \dots , m). \tag{14}$$

Queste m equazioni determinano gli incrementi che debbono subire le m componenti (invarianti) r_h che individuano il vettore R di V_n^m, quando si trasporta questo vettore lungo il segmento infinitesimo PP', in modo che l'angolo tra il vettore R in P e il vettore R in P', sia minimo compatibilmente coi vincoli di anolonomia (9).

Si deve osservare che, se non esiste nessuna relazione di anolonomia, tutti i calcoli che stiamo per fare sono validi nel sistema di n congruenze ortogonali di V_n, mettendo semplicemente n al posto di m, e le equazioni del parallelismo nella varietà metrica V_n hanno la forma (1)

$$(14') \qquad dr_h = \sum_1^n {}_{\alpha l}\gamma_{h\alpha l} r_\alpha ds_l \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Comparando queste equazioni con le solite equazioni del parallelismo rapportate alle coordinate x, si vede che al posto dei simboli di CHRISTOFFEL si introducono nel calcolo di congruenze i coefficienti di rotazione di RICCI, e questa osservazione vale in generale, come si vedrà in seguito.

È chiaro che il parallelismo definito dalla equazione (14) è diverso dal parallelismo di V_n, definito dalla equazione (14'), perciò possiamo chiamare il primo anche parallelismo vincolato, o, semplicemente, parallelismo in V_n^m.

Ora se si considera un tratto finito di una curva situata in V_n^m, il modo di variare delle r_h, quando si trasporta il vettore R per parallelismo lungo questa curva, è definito dalle equazioni differenziali (le equazioni (14) divise per ds)

$$(15) \qquad \frac{dr_h}{ds} = \sum_1^m {}_{\alpha l}\gamma_{h\alpha l} r_\alpha u_l, \quad \left(u_l = \frac{ds_l}{ds}\right),$$

che formano un sistema di m equazioni differenziali lineari nelle r, e servono a definire le r_h in funzione di s. Si deve tener conto che tanto le x, e per conseguenza le γ, quanto i coseni u_l, sono, lungo T, funzioni ben determinate dell'arco s di T.

Si dimostra facilmente che il trasporto per parallelismo non cambia la lunghezza del vettore, o l'angolo di due vettori.

Perciò basta conoscere come si cambiano in un trasporto per parallelismo i coseni v_h del vettore R, nel quale caso le equazioni (15) si scrivono

$$(15') \qquad \frac{dv_h}{ds} = \sum_1^m {}_{\alpha l}\gamma_{h\alpha l} v_\alpha u_l .$$

Queste equazioni hanno evidentemente l'integrale primo quadratico

$$\sum_1^m v_h^2 = 1.$$

(1) Vedi signorina CARPANESE, *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque*, « Annali di Matematica », vol. XXVIII, 1919, pp. 147-169.

Esse formano poi un sistema di equazioni differenziali a determinante emisimmetrico, in causa della proprietà di emisimmetria dei coefficienti γ rispetto ai primi due indici.

Dalle proprietà delle equazioni differenziali lineari sotto forma normale (15), risulta che, data una direzione in un punto e una curva passante per quel punto, rimangono univocamente determinate le sue parallele vincolate lungo la curva.

§ 4. Le geodetiche di V_n^m.

Per trovare le equazioni delle geodetiche della varietà V_n^m, partiamo dalle curve autoparallele. Si dicono così quelle curve, le cui direzioni formano in qualunque punto un sistema di vettori paralleli in V_n^m, lungo la curva stessa. Per avere le equazioni di queste curve, facciamo nelle equazioni del parallelismo (15′), $v=u$. Associando a queste equazioni le equazioni (10), si perviene al sistema

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds}=\displaystyle\sum_1^m{}_h\lambda_h^i u_h & (i=1,2,\dots,n),\\[2ex] \dfrac{du_h}{ds}=\displaystyle\sum_1^m{}_{\alpha l}\gamma_{h\alpha l}u_\alpha u_l & (h=1,2,\dots,m). \end{cases}$$

Questo sistema di $m+n$ equazioni differenziali sotto forma normale, serve a definire le $m+n$ incognite x e u in funzioni dell'arco s. Si vede dalle (16) che assegnati un qualsivoglia punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e una direzione in quel punto $(u_1, u_2, \dots, u_m)$, esiste una ed una sola curva autoparallela, che passa per quel punto, secondo quella direzione.

Vogliamo dimostrare adesso, che le equazioni (16) forniscono nello stesso tempo le geodetiche della varietà V_n^m. Per brevità, ricordiamo che dati due punti A e B di una curva C, situata nella varietà V_n, la variazione dell'arco AB, per una variazione infinitesima della curva C, in una curva vicina c, gli estremi A e B essendo fissi, si esprime per la formula [1]

$$(16')\qquad \delta l=-\int_A^B\sum_1^n{}_k p_k\delta x_k ds,$$

[1] Vedi *Lez. Levi-Civita*, p. 153, formule (44).

dove le quantità p sono date dalle espressioni

$$(16'') \qquad p_k = \sum_1^n a_{jk} \ddot{x}_j + \sum_1^n {}_{jl} \begin{vmatrix} jl \\ k \end{vmatrix} \dot{x}_j \dot{x}_l .$$

Per le geodetiche, la variazione dell'arco deve essere nulla, cosicchè l'equazione simbolica delle geodetiche prende la forma

$$(17) \qquad \sum_1^n {}_k p_k \delta x_k = 0,$$

che deve valere per tutti gli spostamenti compatibili coi vincoli.

Nella varietà V_n, data l'arbitrarietà delle δx_k, si hanno le equazioni delle geodetiche uguagliando a zero le p_k. Nel caso della nostra V_n^m supponiamo evidentemente che la curva C si trova in V_n^m, e poi che la curva vicina c si ottiene da C, con degli spostamenti δx_k situati in V_n^m, e cioè dati dalle espressioni

$$(17') \qquad \delta x_k = \sum_1^m {}_h \lambda_h^k \delta s_h$$

dove le δs_h si riguardano arbitrarie. In generale la curva vicina c non sarà situata in V_n^m, e vedremo più tardi che questa è in generale una proprietà caratteristica delle varietà V_n^m, per le quali le relazioni di anolonomia non sono completamente integrabili.

In virtù delle (17'), l'equazione simbolica (17) diviene

$$(17'') \qquad \sum_1^m \delta s_h \sum_1^n p_k \lambda_h^k = 0.$$

Ne risulta senz'altro che le geodetiche di V_n^m soddisfano le m equazioni

$$(18) \qquad \sum_1^n p_k \lambda_h^k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Tenendo conto delle prime formule (16), che sono sempre valide in V_n^m, e delle formule (16''), si trova facilmente, che queste equazioni non sono altro che le ultime (16).

Vale a dire che le equazioni (16), forniscono delle curve in V_n^m cosiffatte, che la distanza tra due punti sopra una di queste curve è *minima*, per rapporto a tutte le curve vicine passanti per questi due punti, che si ottengono con degli *spostamenti compatibili coi vincoli di anolonomia* (9). In questo senso le curve autoparallele della V_n^m sono anche le geodetiche e inversamente.

Si deve osservare, che di qui non risulta che dati due punti ad arbitrio, esista una geodetica che passa per questi due punti.

§ 5. Calcolo differenziale assoluto delle congruenze in una V_n.

È ovvio che data una varietà metrica V_n, il modo di riferire questa varietà ad un sistema dl n congruenze ortogonali λ non è unico. È poi noto che dato un altro sistema di n congruenze ortogonali, diciamo $\bar{\lambda}$, tra i due sistemi esistono delle relazioni lineari della forma

$$\bar{\lambda}_{h|i} = \sum_1^n {}_k c_h^k \lambda_{k|i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

dove le c_h^k sono degli invarianti alle trasformazioni di coordinate.

Le formule (19) definiscono per noi una trasformazione di congruenze. Tenendo conto delle formule (6), si trovano le formule di trasformazione tra i differenziali degli archi

$$d\bar{s}_k = \sum_1^n {}_k c_h^k ds_k\,. \tag{19'}$$

Siccome le nostre trasformazioni (19') devono lasciare invariante la forma quadratica (1'), ne risulta che le c_h^k sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale, e cioè soddisfano le relazioni

$$\sum_1^n {}_k c_h^k c_h^l = \delta_k^l \begin{cases} = \lambda, & l = k \\ = 0, & l \neq k. \end{cases} \tag{19''}$$

Questo fatto si può esprimere anche dicendo che le formnle (19) non cambiano, in base alle formule (5'), i valori delle a_{ij} e per conseguenza la forma quadratica (1). Tenendo conto delle formule che legano i parametri ed i momenti, si trova per i parametri la stessa legge di trasformazione. In virtù delle formule (19'') si trovano le formule inverse

$$\lambda^{l|i} = \sum_1^n {}_\alpha c_\alpha^l \bar{\lambda}_{\alpha|i}\,.$$

Risolvendo adesso le formule (19) per rispetto alle c_h^k, si ottiene

$$c_h^k = \sum_1^n {}_i \bar{\lambda}_{h|i} \lambda_k^i\,. \tag{20}$$

Vogliamo far vedere che le c_h^k soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, che involve i coefficienti di rotazione di RICCI relativi alle λ e $\bar{\lambda}$. Per questo ricordiamo la formula che fornisce la derivata intrinseca di una funzione qualsiasi u del posto

$$\frac{du}{ds^\alpha}=\sum_{1}^{n}{}_j \frac{du}{dx^j}\lambda_\alpha^j,$$

e deriviamo la (20) rispetto all'arco s_l, cosichè si ha

$$\frac{dc_h^k}{ds^l}=\sum_1^n{}_{ij}\frac{d\bar{\lambda}_{h|i}}{dx_j}\lambda_k^i\lambda_l^j+\sum_1^n{}_{ij}\bar{\lambda}_{h|i}\frac{d\lambda_k^i}{dx_j}\lambda_l^j.$$

Il secondo termine del secondo membro di questa formula si può trasformare in base alle (19), e poi in base alla formula (13''), e possiamo scrivere

$$(20')\qquad \frac{dc_h^k}{ds^l}=\sum_1^n{}_{ij}\frac{d\bar{\lambda}_{h|i}}{dx_j}\lambda_k^i\lambda_l^j-\sum_1^n{}_{ij\alpha}\frac{d\lambda_{\alpha|i}}{dx_j}\lambda_k^i\lambda_l^j.$$

Siccome dalla formula di definizione dei coefficienti di rotazione (11) si può trarre

$$\frac{d\lambda_{h|i}}{dx_j}=\sum_1^n{}_\alpha\left\{\begin{matrix}ij\\ \alpha\end{matrix}\right\}\lambda_{h|\alpha}+\sum_1^n{}_{\alpha\beta}\gamma_{h\alpha\beta}\lambda_{\alpha|i}\lambda_{\beta|j},$$

ed una formula analoga si ha per le $\frac{d\bar{\lambda}_{\alpha|i}}{dx_j}$, introducendo nella (20'), i termini contenenti i simboli di CHRISTOFFEL si riducono, e si ottiene la formula cercata

$$(21)\qquad \frac{dc_h^k}{ds_l}=\sum_1^n{}_{\alpha\beta}\bar{\gamma}_{h\alpha\beta}c_\alpha^k c_\beta^l-\sum_1^n{}_\alpha c_h^\alpha\gamma_{\alpha kl}.$$

Vettori. — Dato un vettore R in V_n, le sue componenti (invarianti) r_h secondo le congruenze λ sono date dalle formule (9''). Indicando con $\bar{r}_h$ le componenti dello stesso vettore secondo le congruenze $\bar{\lambda}$, legate colle λ dalle formule (19), si hanno le formule di trasformazione

$$(20'')\qquad \bar{r}_h=\sum_1^n c_h^k r_k.$$

Inversamente, dato un sistema di n quantità invarianti alle trasformazioni di coordinate, e che si cambiano secondo la legge (20'') per una trasformazione di congruenze, queste quantità individuano un vettore in V_n le cui componenti covarianti, o controvarianti, sono date dalle espressioni

$$A^i=\sum_1^n{}_h r_h\lambda_h^i;\quad A_i=\sum_1^n{}_h r_h\lambda_{h|i}.$$

Tensori. — Dato un tensore qualunque R, e per semplicità supponiamo che sia un tensore misto del secondo ordine di componenti R_i^j, le sue componenti invarianti nel sistema di congruenze λ, sono date dalle espressioni

$$r_{hk} = \sum_{ij}^{n} {}_1 R_i^j \lambda_h^i \lambda_{k|j}.$$

Indicando con $\bar{r}_{hk}$ le componenti dello stesso tensore R nel sistema di congruenze $\bar{\lambda}$, si hanno immediatamente le formule di trasformazione

$$\text{(21')} \qquad \bar{r}_{hk} = \sum_{1}^{n} {}_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} c_h^\alpha c_k^\beta .$$

Inversamente, dato un sistema di n^2 quantità invarianti alle trasformazioni di coordinate, e cambiandosi colla legge (21') per una trasformazione di congruenze, esse individuano in V_n un tensore del secondo ordine. Così i simboli di RIEMANN di prima specie, che sono, come sappiamo, le componenti di un tensore covariante del quarto ordine, determinano nel sistema di congruenze λ gli invarianti

$$\text{(21'')} \qquad \gamma_{hk,lr} = \sum_{1}^{n} {}_{ijab} (ij, ab) \lambda_h^i \lambda_k^j \lambda_l^a \lambda_r^b ,$$

che sono proprio i coefficienti di RICCI a quattro indici. Ne risulta che questi coefficienti di RICCI, formano, nel calcolo differenziale assoluto delle congruenze, un tensore del quarto ordine. Questi coefficienti si esprimono in funzioni dei coefficienti di rotazione per le formule note

$$\text{(22)} \qquad \gamma_{hk,lr} = \frac{d\gamma_{hkl}}{ds^r} - \frac{d\gamma_{hkr}}{ds^l} + \sum_{1}^{n} {}_\alpha [\gamma_{\alpha hr}\gamma_{\alpha kl} - \gamma_{\alpha hl}\gamma_{k\alpha r} + \gamma_{hk\alpha}(\gamma_{\alpha lr} - \gamma_{\alpha rl})].$$

Si deve osservare che non tutti i sistemi di invarianti possono individuare un tensore, e abbiamo come esempio i coefficienti di rotazione, che sono degli invarianti, ma non formano un tensore, come prova la formula (21).

Derivazione tensoriale. — Dato il vettore R di componenti (invarianti) r_h, deriviamo la legge (20'') di trasformazione di questo vettore, per rapporto a $\bar{s}_l$, tenendo conto delle formule

$$\frac{du}{d\bar{s}_l} = \sum_{1}^{n} {}_\alpha \frac{du}{ds_\alpha} c_l^\alpha .$$

Nel risultato appariranno le derivate dei coefficienti c_h^k. Eliminando queste derivate con l'aiuto delle formule (21), e indicando con $r_{h|l}$ le quantità [1]

(22')
$$r_{h|l} = \frac{dr_h}{ds_l} - \sum_1^n {}_\alpha r_\alpha \gamma_{h\alpha l},$$

si trovano le formule

(22'')
$$\overline{r}_{h|l} = \sum_1^n {}_{\alpha\beta} r_{\alpha|\beta} c_h^\alpha c_l^\beta .$$

Questo significa, che le $r_{h|l}$ individuano in V_n un tensore del secondo ordine e le chiameremo derivate tensoriali del vettore R. Derivando adesso la formula (22''), e tenendo conto delle (21), si trovano le seconde derivate tensoriali del vettore R, che sono date dalle formule

(23)
$$r_{h|lk} = \frac{dr_{h|l}}{ds_k} + \sum_1^n {}_\alpha r_{\alpha|l} \gamma_{\alpha hk} + \sum_1^n {}_\alpha r_{h|\alpha} \gamma_{\alpha lk} .$$

In modo analogo si possono trovare le derivate tensoriali di un tensore qualunque. Considerando infine le differenze delle seconde derivate si trovano le formule

(23')
$$r_{h|lk} - r_{h|kl} = \sum_1^n {}_\alpha r_\alpha \gamma_{\alpha h,\, lk}$$

dove $\gamma_{\alpha h, lk}$ sono i coefficienti di RICCI a quattro indici sopra indicati.

Si potrebbero trovare le derivate tensoriali, facendo uso delle equazioni del parallelismo, ma preferiamo questo metodo, perchè si può estendere facilmente alle varietà anolonome.

Si vede di qui che i due punti di vista di considerare il calcolo differenziale assoluto, sono equivalenti per una varietà metrica V_n, vale a dire, si può passare in qualunque momento dall'uno all'altro.

Una semplicità, almeno formale, si presenta nel calcolo delle congruenze, perchè possiamo considerare solamente delle trasformazioni ortogonali. Perciò non è necessario di distinguere tra covarianza e controvarianza, perchè esse si confondono.

---

(1) Questo metodo di formare le derivate tensoriali è analogo a quello usato in *Invariants of quadratic differential forms*, by OSWALD VEBLEN, « Cambridge, University Press », London, (1927), pp. 36-40.

§ 6. Calcolo differenziale assoluto delle varietà anolonome.

Una varietà anolonoma V_n^m è caratterizzata, come abbiamo visto nel § 2, da una parte dalle prime m congruenze λ, che abbiamo chiamate anche fondamentali, e d'altra parte dalle ultime $n-m$ congruenze λ, che abbiamo chiamate anche congruenze di anolonomia, per il fatto che sono i momenti di queste ultime congruenze che individuano i vincoli di anolonomia (9). Ne risulta senz'altro che le congruenze di V_n^m sono divise in due gruppi distinti. È evidente anche qui che il modo di scegliere le congruenze che formano uno di questi due gruppi non è unico.

Possiamo in primo luogo prendere al posto delle m congruenze λ, che formano il primo gruppo, altre m congruenze $\bar{\lambda}$ della stessa giacitura, e cioè date per le formule di trasformazione

$$\bar{\lambda}_{h|i} = \sum_1^m{}_k c_h^k \lambda_{k|i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \tag{24}$$

dove le m quantità c_h^k sono degli invarianti. In virtù di queste formule ne risultano delle formule analoghe di trasformazione dei differenziali degli archi

$$d\bar{s}_h = \sum_1^m c_h^k ds_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, m). \tag{24'}$$

Siccome la forma quadratica (1''), che definisce la metrica di V_n^m, deve rimanere invariante per queste trasformazioni, ne risulta, come nel caso di una V_n, che c_h^k sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale. Perciò valgono, come nel caso di una V_n, anche le formule

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\lambda}_h^i &= \sum_1^m{}_k c_h^k \lambda_k^i, \\ \lambda_{l|i} &= \sum_1^m{}_k c_k^l \bar{\lambda}_{k|i}, \\ \lambda_l^i &= \sum_1^m{}_k c_k^l \lambda_k^i. \end{aligned}\right. \qquad (h, l = 1, 2, \ldots, m). \tag{24''}$$

Passiamo ora al secondo gruppo di congruenze determinate dalle equazioni (9), per le quali la situazione è completamente differente.

Infatti, il sistema di equazione (9) ammette come gruppo le seguenti trasformazioni

$$\bar{\lambda}_{h'|i} = \sum_{m+1}^{n}{}_{k'} c_{h'}^{k'} \lambda_{k'|i} \qquad (h' = m+1, \dots, n), \tag{25}$$

dove le quantità invarianti, $c_{h'}^{k'}$ soddisfano solamente la condizione che il loro determinante sia diverso da zero. Con ciò le formule (25) sono reversibili e per conseguenza si ha ancora

$$\lambda_{k'|i} = \sum_{m+1}^{n}{}_{l'} \bar{c}_{l'}^{k'} \bar{\lambda}_{l'|i} \tag{25'}$$

le $\bar{c}_{h'}^{k'}$ essendo i reciproci del determinante delle $c_{h'}^{k'}$.

È interessante osservare che le trasformazioni (24) e (25), pur lasciando invariante la metrica di V_n^m, non lasciano in generale invariante quella di V_n e cioè i coefficienti a_{ij} della forma quadratica (1). Infatti, indicando con $\bar{a}_{ij}$ i coefficienti della metrica corrispondente alle n congruenze $\bar{\lambda}$, si ha, in base alle (5'),

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{1}^{m}{}_h \bar{\lambda}_{h|i} \bar{\lambda}_{h|j} + \sum_{m+1}^{n}{}_{h'} \bar{\lambda}_{h'|i} \bar{\lambda}_{h'|j}.$$

In virtù delle (24) e (25) e della ortogonalità delle c_h^k, questa formula si può scrivere

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{1}^{m}{}_h \lambda_{h|i} \lambda_{h|j} + \sum_{m+1}^{n}{}_{h'k'l'} c_{k'}^{h'} c_{h'}^{l'} \lambda_{k'|i} \lambda_{l'|j},$$

e basta tener conto dei valori delle a_{ij} stesse, per mettere queste relazioni sotto la forma

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} + \sum_{m+1}^{n}{}_{h'k'l'} (c_{h'}^{k'} c_{h'}^{l'} - \delta_{h'}^{l'}) \lambda_{k'|i} \lambda_{l'|j}. \tag{25''}$$

Di qui si vede che la metrica di V_n resterebbe invariante solo nel caso in cui le $c_{h'}^{k'}$ fossero anche esse i coefficienti di una sostituzione ortogonale.

Per trovare adesso le formule di trasformazione dei parametri delle congruenze di anolonomia $\bar{\lambda}$ e λ, teniamo conto delle relazioni tra momenti e parametri

$$\sum_{1}^{n} \bar{\lambda}_{h'|i} \bar{\lambda}_{l'}^{i} = \delta_{h'}^{l'} \qquad (h', l' = m+1, \dots, n),$$

che derivano dal fatto che i parametri sono i reciproci del determinante formato dai momenti. Se ne trovano facilmente le seguenti formule di trasformazione

$$(25''') \qquad \begin{cases} \bar{\lambda}^i_{l'} = \sum_{m+1}^{n} {}_{\alpha'} \bar{c}^{\alpha'}_{l'} \lambda^i_{\alpha'} \\ \lambda^i_{\alpha'} = \sum_{m+1}^{n} {}_{l'} \bar{c}^{\alpha'}_{l'} \bar{\lambda}^i_{l'} . \end{cases}$$

È forse superfluo notare ancora, che le trasformazioni (24) e (25) non disturbano l'ortogonalità dei due gruppi di congruenze, nel senso che sono sempre soddisfatte le relazioni

$$\sum_{1}^{n} {}_i \bar{\lambda}_{h|i} \lambda^i_{h'} = 0 \qquad (h \leq m,\ h' > m).$$

Tensori. — Un sistema di certe quantità funzioni delle x, *invarianti alle trasformazioni di coordinate, si dirà che forma un tensore relativo alla varietà* V^m_n, *quando, eseguendo le due trasformazioni* (24) *e* (25), *le nuove quantità si possono esprimere in funzioni lineari e omogenee delle vecchie, coi coefficienti funzioni omogenee dello stesso grado nelle* c^k_h *e* $c^{k'}_{h'}$, *senza involvere le derivate delle* c.

Si vedrà meglio che vuol dire questa definizione, dopo gli esempi che considereremo in seguito.

Sia un vettore R situato in V^m_n (vedi § 3), determinato dalle sue proiezioni r_h sopra le m congruenze fondamentali di V^m_n. È evidente che la trasformazione (25) non cambiano affatto queste proiezioni, perchè esse non cambiano le m congruenze fondamentali, e le trasformazioni (24) cambiano le r_h secondo le formule

$$(26) \qquad \bar{r}_h = \sum_{1}^{m} c^{\alpha}_h r_{\alpha} \qquad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Vettore derivato di un vettore lungo una curva. — Sia una curva C situata in V^m_n di coseni u_l e di arco s, e consideriamo le quantità

$$(26') \qquad (Dr_h) = \frac{dr_h}{ds} - \sum_{1}^{m} {}_{kl} \gamma_{hkl} r_k u_l \qquad (h = 1, 2, \dots, m),$$

dove r_h sono le componenti del vettore R di V^m_n. Vogliamo dimostrare che le (Dr_h) individuano un vettore in V^m_n. Per questo osserviamo in primo luogo che le trasformazioni (25) non disturbano le (26').

Infatti esse non cambiano evidentemente le componenti r_h e i coseni u_l, e, in virtù della formula (10'''), esse lasciano invarianti anche i coefficienti di rotazione di RICCI γ_{hkl} $(h, k, l \leq m)$.

Consideriamo perciò le trasformazioni (24) e indichiamo con

$$(D\bar{r}_h) = \frac{d\bar{r}_h}{ds} - \sum_1^m \bar{\gamma}_{hkl}\bar{r}_k\bar{u}_l,$$

le quantità (26') corrispondenti alle congruenze $\bar{\lambda}$. Tenendo conto della formula (26) derivata rispetto all'arco s e della curva C e della formula

$$\bar{\gamma}_{hkl} = \sum_1^m {}_{\rho\delta}\left(\frac{dc_h^\delta}{ds_\rho} + \sum_1^m {}_\alpha c_h^\alpha \gamma_{\alpha\delta\rho}\right) c_h^\delta c_l^\rho \qquad (h, k, l \leq m),$$

che dimostreremo nel § 7, formula (30), si arriva senza difficoltà alle relazioni

$$(D\bar{r}_h) = \sum_1^m {}_\alpha c_h^\alpha (Dr_\alpha),$$

che esprimono precisamente le (Dr_h) e formano un vettore V_n^m. Chiameremo questo vettore, il vettore derivato di R lungo la curva C, come è chiamato il suo corrispondente nel caso di una varietà V_n. Dalle equazioni del parallelismo (15) ne risulta che il vettore derivato è nullo quando il vettore R si trasporta per parallelismo vincolato lungo C. Di qui risulta anche che le equazioni del parallelismo in V_n^m hanno carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni (24) e (25).

Curvatura geodetica. – Supponiamo adesso che il vettore R sia unitario e tangente alla curva C, nel qual caso le formule (26') assumono la forma

$$u_h = \frac{du_h}{ds} - \sum_1^m {}_{kl}\gamma_{hkl}u_k u_l, \tag{26''}$$

e continuano evidentemente a formare un vettore in V_n^m, chiamato curvatura geodetica. Confrontando con le equazioni delle geodetiche (16), ne risulta che le geodetiche di V_n^m sono delle curve in V_n^m, *che hanno la curvatura geodetica nulla*, e che le equazioni di queste geodetiche hanno forma invariantiva rispetto alle trasformazioni (24) e (25). Questo vettore curvatura geodetica è precisamente la proiezione in V_n^m del vettore curvatura geodetica di C in V_n, ma calcolato in base alle formule (10), che valgono in V_n^m. Moltiplicando le (26'') con u_h e sommando, si ottiene lo zero, vale a dire che il vettore curvatura geodetica della curva C è normale alla curva stessa.

Tensori interiori ed esteriori diretti o inversi. — Nelle leggi di trasformazioni sinora considerate figurano solamente i coefficienti c_h^k delle (24). I vettori o tensori che hanno questa proprietà, si diranno in seguito che sono vettori o tensori interiori a V_n^m.

Un tensore, le cui leggi di trasformazione sono del grado p nelle c_h^k e grado q nelle $c_{h'}^{k'}$, si dirà interiore di ordine p ed esteriore di ordine q. Di più: un tensore, supponiamolo esteriore del primo ordine, si dirà esteriore diretto se le sue componenti si cambiano come i momenti delle congruenze λ, formule (25), e si dirà, al contrario, esterioro inverso, se le sue componenti si cambiano come i parametri, formule (25‴) (1).

È interessante osservare che queste varietà anolonome sono delle varietà metriche solamente in rispetto alle congruenze fondamentali, ma non più in rispetto alle congruenze di anolonomia, che possono subire una trasformazione lineare generale del tipo (25). Perciò non si può parlare delle componenti esteriori dirette o esteriori inverse dello stesso tensore.

Le $n-m$ componenti di un vettore qualunque in V_n, secondo le congruenze di anolonomia, forniscono un esempio di vettore esteriore diretto in V_n^m, e le derivate secondo le congruenze di anolonomia di una funzione del posto, formano un vettore esteriore inverso.

Carattere tensoriale delle condizioni di integrabilità. — Supponiamo di aver fatto le trasformazioni (24) e (25), e siano (vedasi le formule (10″))

$$\overline{w}_{kl}^{h'} = \sum_{ij}^{n}{}_{1}\left(\frac{d\overline{\lambda}_{h'|i}}{dx_j} - \frac{d\overline{\lambda}_{h'|j}}{dx_i}\right)\overline{\lambda}_k^i\overline{\lambda}_l^j,$$

le condizioni di integrabilità nel sistema di congruenze $\overline{\lambda}$. In virtù delle derivate delle (25) e delle prime formule (24″), si trovano le relazioni

$$\overline{w}_{kl}^{h'} = \sum_{ab}^{m}{}_{1} c_a^k c_b^l \sum_{m+1}^{n} c_{h'}^{\alpha'} w_{ab}^{\alpha'}, \tag{27}$$

(1) Nel seguito per maggiore chiarezza gli indici accentati che stanno ad indicare la proprietà di tensore esteriore diretto saranno messi in alto e quelli relativi ai tensori esteriori inversi saranno messi in basso.

che esprimono precisamente che le condizioni di integrabilità (12) rappresentano in V_n^m un tensore del terzo ordine, due volte interiore e una volta esteriore diretto.

§ 7. Formule fondamentali in V_n^m.

Abbiamo visto che nel caso di una varietà V_n, i coefficienti delle trasformazioni (19) soddisfano alle equazioni (21). Vogliamo adesso trovare delle equazioni analoghe per i coefficienti c_h^k e $c_{h'}^{k'}$ delle (24) e (25).

Cominciamo colle trasformazioni (24), dalle quali si hanno le c_h^k per le formule

$$c_h^k = \sum_1^n {}_i \bar{\lambda}_{h|i} \lambda_k^i . \tag{28}$$

Derivando rispetto a s_l $(l \leq m)$, si arriva in modo analogo (vedi la (20')) alla formula

$$\frac{dc_h^k}{ds_l} = \sum_1^n {}_{ij} \frac{d\bar{\lambda}_{h|i}}{dx_j} \lambda_k^i \lambda_l^j - \sum_1^m {}_\alpha c_h^\alpha \sum_1^n {}_{ij} \frac{d\lambda_{\alpha|i}}{dx_j} \lambda_k^i \lambda_l^j . \tag{28'}$$

Facciamo anche qui uso delle formule

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda_{h|i}}{dx_i} &= \sum_1^n \begin{Bmatrix} ij \\ \alpha \end{Bmatrix} \lambda_{h|\alpha} + \sum_1^n {}_{\alpha\beta} \gamma_{h\alpha\beta} \lambda_{\alpha|i} \lambda_{\beta|j} , \\ \frac{d\bar{\lambda}_{h|i}}{dx_j} &= \sum_1^n \overline{\begin{Bmatrix} ij \\ \alpha \end{Bmatrix}} \bar{\lambda}_{h|\alpha} + \sum_1^n {}_{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{h\alpha\beta} \bar{\lambda}_{\alpha|i} \lambda_{\beta|j} , \end{aligned} \right. \tag{28''}$$

ma tenendo conto, in questo caso, del fatto che gli simboli di CHRISTOFFELL si riferiscono a due metriche diverse, legate dalle formule (26).

In virtù di queste formule e della (28) stessa, la (28') si può scrivere

$$\frac{dc_h^k}{ds} = \sum_1^m {}_{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{h\alpha\beta} c_h^k c_\beta^l - \sum_1^m {}_\alpha c_h^\alpha \gamma \alpha k l + \sum_1^n {}_{ijr} \rho_{ij}^r \bar{\lambda}_{h|r} \lambda_k^i \lambda_l^j , \tag{29}$$

dove si è indicato con ρ_{ij}^r il tensore del terzo ordine (due volte covariante e una volta controvariante)

$$\rho_{ij}^r = \overline{\begin{Bmatrix} ij \\ r \end{Bmatrix}} - \begin{Bmatrix} ij \\ r \end{Bmatrix} . \tag{29'}$$

Senza fare tutto il calcolo che compete a questo tensore in base alle formule (26), si può rendersi conto che tutti i termini di questo tensore avranno in fattore almeno uno dei parametri o momenti delle congruenze di anolonomia, che, combinati con il prodotto $\bar{\lambda}_{h|r}\lambda_k^i\lambda_l^j$ $(h, k, l \leq m)$, darà come risultato sempre lo zero.

Cosicchè le nostre (29) prendono l'aspetto delle (21), e cioè

$$\frac{dc_h^k}{ds^l} = \sum_{\alpha\beta}^{m}\bar{\gamma}_{h\alpha\beta}c_\alpha^k c_\beta^l - \sum_{\alpha}^{m} c_h^\alpha \gamma_{\alpha k l} \qquad (h, k, l \leq m). \tag{30}$$

Le formule (30) non ci danno che le prime m derivate intrinseche delle c_h^k. Per trovare le altre dobbiamo derivare rispetto a $s_{l'}$ $(l' > m)$, e cioè mettere l' al posto di l nella formula (28'). In questo caso il prodotto

$$\rho_{ij}^r\bar{\lambda}_{h|r}\lambda_k^i\lambda_{l'}^j,$$

non è più nullo. Per arrivare direttamente al risultato, osserviamo che, data l'ortogonalità dei due gruppi di congruenze, si hanno le formule

$$\sum_j^n \bar{\lambda}_{h\,j}\lambda_{l'}^j = 0 \qquad (h \leq m;\ l' = m+1, \dots, n)$$

le quali, derivate rispetto a s_k $(k \leq m)$, si possono scrivere

$$\sum_{ij}^n\left(\frac{d\bar{\lambda}_{h|j}}{dx_i}\lambda_{l'}^j\lambda_k^i - \sum_\alpha^m c_h^\alpha\frac{d\lambda_{\alpha|j}}{dx_i}\lambda_{l'}^j\lambda_k^i\right) = 0.$$

Sottraendo questa formula dalla (28'), nella quale si è posto $l' > m$ al posto di l, si ottiene, tenendo conto anche delle formule (10'') e delle (28) stesse, la formula cercata

$$\frac{dc_h^k}{ds_{l'}} = \sum_{\alpha'}^{n}{}_{m+1}\sum_\alpha^m \bar{w}_{\alpha\alpha'}^h c_\alpha^k c_{\alpha'}^{l'} - \sum_\alpha^m w_{kl'}^\alpha c_h^\alpha, \tag{31}$$

la quale, come si vede, è essenzialmente differente dalla (30).

Passiamo adesso alle trasformazioni (25), dalle quali si hanno i valori delle $c_{h'}^{k'}$ nella forma

$$c_{h'}^{k'} = \sum_i^n \bar{\lambda}_{h'|i}\lambda_{k'}^i.$$

Dobbiamo anche qui cercare in primo luogo le prime m derivate intrinseche, e, con un calcolo analogo al precedente, si trovano le formule

$$\frac{dc_{h'}^{k'}}{ds^l}=\sum_1^m{}_\alpha\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'}\overline{w}_{\alpha'\alpha}^{h'}c_{\alpha'}^{k'}c_\alpha^l-\sum_{m+1}^m{}_{\alpha'}c_{h'}^{\alpha'}w_{k'l}^{\alpha'}. \tag{32}$$

In quella che riguarda le ultime $n-m$ derivate intrinseche delle $c_{h'}^{k'}$, nessuna semplificazione si può portare alla forma (29), e perciò la scriveremo

$$\frac{dc_{h'}^{k'}}{ds_{l'}}=\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'\beta'}\overline{\gamma}_{h'\alpha'\beta'}c_{\alpha'}^{k'}c_{\beta'}^{l'}-\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'}c_{h'}^{\alpha'}\gamma_{\alpha'k'l'}+\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'}c_h^{\alpha'}\varepsilon_{k'l'}^{\alpha'}, \tag{33}$$

dove si è posto per semplicità

$$\varepsilon_{k'l'}^{\alpha'}=\sum_1^n{}_{ijr}\rho_{ij}^r\lambda_{\alpha|r}\lambda_{k'}^i\lambda_{l'}^j. \tag{32'}$$

Le quantità $\varepsilon_{k'l'}^{\alpha'}$, che non si possono eliminare dalle (33), hanno un interesse particolare nel seguito. Esse stanno a provare che, nell'interiore delle congruenze di anolonomia, non esiste una metrica.

Se adesso si cerca invece delle derivate interiori delle $c_{h'}^{k'}$, quelle delle $\overline{c}_{h'}^{k'}$, si arriva alle formule

$$\frac{d\overline{c}_{h'}^{k'}}{ds_{l'}}=-\sum_1^m{}_\alpha\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'}\overline{w}_{h'\alpha}^{\alpha'}\overline{c}_{\alpha'}^{k'}c_\alpha^l+\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'}w_{\alpha'l}^{k'}\overline{c}_{h'}^{\alpha'} \tag{32''}$$

che saranno anch'esse utili nel seguito.

Data la simmetria delle $\varepsilon_{k'l'}^{\alpha'}$, rispetto agli indici inferiori, abbiamo le formule

$$\frac{dc_{h'}^{k'}}{ds_{l'}}-\frac{dc_{h'}^{l'}}{ds_{k'}}=\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'\beta'}\overline{w}_{\alpha'\beta'}^{h'}c_{\alpha'}^{k'}c_{\beta'}^{l'}-\sum_{m+1}^n{}_{\alpha'}w_{k'l'}^{\alpha'}c_{h'}^{\alpha'}, \tag{33'}$$

che determinano le differenze delle derivate esteriori delle $c_{h'}^{k'}$ con formule nelle quali non compariscono più le $\varepsilon_{k'l'}^{\alpha'}$.

§ 8. Derivazione tensoriale.

Definizioni [1]. — Dato un tensore interiore di V_n^m e la legge di trasformazione delle sue componenti rispetto alle trasformazioni (24), deriviamo questa legge secondo un arco delle congruenze fondamentali. Nel risultato

---

[1] Vedi nota a pag. 27.

appariranno le prime m derivate intrinseche dei coefficienti c_h^k. Eliminando queste derivate con l'aiuto delle formule (30), e combinando da una parte le quantità che si riferiscono alle congruenze λ e da una parte quelle che si riferiscono alle congruenze $\bar{\lambda}$, si trovano le leggi di trasformazione di un nuovo tensore interiore, le cui componenti saranno chiamate le derivate tensoriali interiori del tensore dato. L'ordine di questo tensore derivato è maggiore con una unità di quello del tenore dato.

Se deriviamo lo stesso tensore secondo un arco delle congruenze di anolonomia ed eliminiamo le derivate delle c_h^k con l'aiuto delle (31), si trovano le leggi di trasformazione delle derivate tensoriali esteriori, che individuano un tensore tante volte interiore come il tensore dato e in più una volta esteriore inverso.

Dato adesso un tensore, una o più volte, esteriore, si possono trovare con lo stesso metodo le derivate tensoriali interiori di questo tensore; ma se si vogliono le derivate esteriori, allora si devono usare anche le formule (33), e perciò nel risultato appariranno le quantità $\varepsilon_{k'l'}^{\alpha'}$, ciò che significa che le derivate esteriori non sono dei tensori. Ne risulta che, partendo da un tensore interiore, non si possono trovare per derivazione che dei tensori una volta al più esteriori, e, partendo da un tensore esteriore o misto, non si può aumentare per derivazione l'ordine esteriore. Si conosce nella varietà V_n^m solamente un tensore due volte esteriore, individuato dalle condizioni di integrabilità delle congruenze fondamentali, che si trasformano secondo la legge

$$w_{p'q'}^h = \sum_1^m {}_\alpha c_\alpha^h \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'\beta'} \overline{w}_{\alpha'\beta'}^\alpha c_{\alpha'}^{p'} c_{\beta'}^{q'},$$

e, secondo l'ultima osservazione, hanno la stessa proprietà anche le sue derivate tensoriali interiori.

Esempi. — Sia dato un vettore R interiore, determinato dalle sue componenti r_h. Derivando nel primo luogo la legge di trasformazione (26), di questo vettore, rispetto ad un arco $\bar{s}_k$, delle congruenze fondamentali $\bar{\lambda}$, e tenendo conto delle formule (30), si trovano le relazioni tensoriali

$$\overline{r}_{h|k} = \sum_1^m {}_{\alpha\beta} r_{\alpha|\beta} c_h^\alpha c_k^\beta, \tag{34}$$

dove le derivate interiori $r_{h|k}$ sono date dalle formule

$$r_{h,k} = \frac{dr_h}{ds_k} - \sum_1^m {}_\alpha r_\alpha \gamma_{h\alpha k}, \tag{34'}$$

e sono della stessa forma come se lo spazio fosse completamente riemanniano (vedi la (22')).

Per trovare le derivate esteriori di R, deriviamo la (26) rispetto ad un arco $\bar{s}_{k'}$, sicchè si ha

$$\frac{d\bar{r}_h}{ds_{k'}} = \sum_1^m {}_\alpha c_h^\alpha \frac{dr_\alpha}{d\bar{s}_{k'}} + \sum_1^m {}_\alpha r_\alpha \frac{dc_h^\alpha}{d\bar{s}_{k'}}.$$

Tenendo conto del fatto che le derivate intrinseche esteriori sono dei vettori esteriori inversi, e delle formule (31), si può dare alla (35) la forma tensoriale

$$\bar{r}_{h|k'} = \sum_1^m {}_\alpha c_h^\alpha \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'} \bar{c}_{k'}^{\alpha'} r_{\alpha|\alpha'}. \tag{35'}$$

In questa formula le $r_{h|k'}$ stanno a indicare le ultime $n-m$ derivate tensoriali del vettore R, determinate in base alle espressioni

$$r_{h|k'} = \frac{dr_h}{ds_{k'}} - \sum_1^m {}_\alpha w_{\alpha k'}^h r_\alpha. \tag{36}$$

Come si vede, queste derivate, che sono le componenti di un tensore del secondo ordine, una volta interiore e una volta esteriore inverso, sono essenzialmente differenti dalle derivate che si avrebbero se lo spazio fosse riemanniano.

Passiamo adesso a determinare le derivate seconde tensoriali dello stesso vettore R, vale a dire le derivate prime dei tensori $r_{h|k}$ e $r_{h|k'}$.

Fissiamo dapprima la nostra attenzione sopra le prime m derivate del tensore (34'). Derivando questa formula rispetto a s_l, e facendo uso delle (30), si trovano facilmente le espressioni delle derivate seconde tensoriali interiori

$$r_{h|kl} = \frac{dr_{h|k}}{ds_l} - \sum_1^m {}_\alpha r_{\alpha|k} \gamma_{h\alpha l} - \sum_1^n {}_\alpha r_{h|\alpha} \gamma_{k\alpha l}, \tag{36'}$$

che sono, evidentemente, le componenti di un tensore interiore del terzo ordine.

Derivando adesso le formule (34') rispetto a $s_{k'}$, basta tenere conto della (31), per arrivare alle seguenti derivate tensoriali del secondo ordine

$$r_{h|kk'} = \frac{dr_{h|k}}{ds_{k'}} - \sum_1^m {}_\alpha r_{\alpha|k} w_{\alpha k'}^h \cdot \sum_1^m {}_\alpha r_{h|\alpha} w_{\alpha k'}^k. \tag{37}$$

Esse sono le componenti di un tensore del terzo ordine in V_n^m, due volte interiore ed una volta esteriore inverso.

Passiamo adesso al tensore $r_{h|k'}$ e deriviamo la (35′) rispetto a $\bar{s}_k$. Tenendo conto delle (32″), si ottengono senza difficoltà le seguenti derivate tensoriali

$$r_{h|k'k} = \frac{dr_{h|k'}}{ds_k} - \sum_1^m {}_{\alpha} r_{\alpha|k'} \gamma_{h\alpha k} + \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'} r_{h|\alpha} w_{k'k}^{\alpha'}, \tag{37'}$$

che sono le componenti di un tensore di terzo ordine, due volte interiore ed una volta esteriore inverso.

Le formule (36′), (37) e (37′) rappresentano tutte le derivate tensoriali del secondo ordine del vettore R, che individuano in V_n^m dei tensori.

§ 9. Tensori principali di una V_n^m.

Vogliamo adesso trovare le espressioni di due tensori del quarto ordine, considerando le differenze delle derivate seconde del vettore R, trovate nel paragrafo precedente. Uno di questi tensori è interiore, e l' altro è tre volte interiore e una volta esteriore inverso.

Per arrivare alle espressioni del primo tensore, consideriamo le differenze dellé derivate seconde (36′)

$$\Delta_{kl}^h = r_{h|kl} - r_{h|lk} = \frac{d^2 r_h}{ds_l ds_k} - \frac{d^2 r_k}{ds_k ds_l} + \ldots\ldots \tag{38}$$

Per evitare calcoli troppo lunghi, osserviamo che nel caso di una V_n, questa differenza è espressa dalla formula (23′). In questo caso, i termini non scritti del secondo membro della formula (38), sono gli stessi che per una varietà V_m, determinata dalle m congruenze fondamentali λ di V_n^m. Ma non è più così dei termini scritti, che per una formula nota in V_n, si possono scrivere

$$\frac{d^2 r_h}{ds_l ds_k} - \frac{d^2 r_h}{ds_k ds_l} = \sum_1^m {}_{\alpha} \frac{dr_h}{ds_\alpha} w_{kl}^{\alpha} - \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'} \frac{dr_h}{ds_{\alpha'}} w_{kl}^{\alpha'}, \tag{38'}$$

dove, nel secondo membro, abbiamo diviso la sommatoria in due parti, per mettere in evidenza gli elementi relativi alle congruenze di anolonomia. Se le relazioni di anolonomia (9) sono illimitatamente integrabili, le condizioni di integrabilità $w_{kl}^{\alpha'}$ sono tutte nulle,. e si ha la formula

$$\Delta^h = \sum_1^m {}_{\alpha} r_\alpha \gamma_{\alpha h, kl},$$

nella quale i coefficienti di RICCI a quattro indici si riferiscono solo alle m congruenze fondamentali, e cioè sono dati dalle espressioni

$$(38'') \qquad \gamma_{\alpha h, kl} = \frac{d\gamma_{\alpha hk}}{ds^l} - \frac{d\gamma_{\alpha hl}}{ds_k} + \sum_{1}^{m}{}_i (\gamma_{\alpha hi}(\gamma_{ikl} - \gamma_{ilk}) + \gamma_{i\alpha l}\gamma_{ihk} - \gamma_{i\alpha k}\gamma_{ikl}).$$

Nel caso generale le (38) si possono scrivere

$$(39) \qquad \Delta^h_{kl} = \sum_{1}^{m}{}_\alpha r_\alpha \gamma_{\alpha h, kl} - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} \frac{dr_h}{ds_{\alpha'}} w^{\alpha'}_{kl},$$

e s'intende evidentemente che le $\gamma_{\alpha h, kl}$ sono sempre determinate dalle (38″). È evidente che le differenze Δ^h_{kl} individuano un tensore interiore del terzo ordine, ma per mettere in evidenza questo fatto anche nel secondo membro della (39), ricordiamo la formula (36), che fornisce le derivate esteriori del yettore R, dalla quale si ha

$$\frac{dr_h}{ds_{\alpha'}} = r_{h|\alpha'} + \sum_{1}^{m}{}_\alpha w^h_{\alpha\alpha'} r_\alpha .$$

In virtù di questa relazione, la (39) assume la forma definitiva

$$(39') \qquad \Delta^h_{kl} = \sum_{1}^{m}{}_\alpha \lambda_{\alpha h, kl} r_\alpha - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} r_{h|\alpha'} w^{\alpha'}_{kl},$$

nella quale si è posto per semplicità

$$(40) \qquad \lambda_{\alpha h, kl} = \gamma_{\alpha h, kl} - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} w^h_{\alpha\alpha'} w^{\alpha'}_{kl}.$$

Dato il fatto che l'ultimo termine del secondo membro della (39′) è evidentemente la componente di un tensore interiore del terzo ordine, lo stesso risulta dalla prima parte, perciò le quantità $\lambda_{\alpha h, kl}$, individuano un tensore interiore del quarto ordine. Questo tensore è emisimmetrico negli ultimi due indici, perchè sono emisimmetrici negli indici k, l, tanto le $\gamma_{\alpha h, kl}$, quanto le $w^{\alpha'}_{kl}$. Ma non è più emisimmetrico nei primi due indici, avendosi la formula

$$(39'') \qquad \lambda_{\alpha h, kl} + \lambda_{h\alpha, kl} = \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} v_{h\alpha, \alpha'} w^{\alpha'}_{kl}$$

dove si è posto

$$(40') \qquad v_{h\alpha, \alpha'} = \gamma_{\alpha' h\alpha} + \gamma_{\alpha'\alpha h}.$$

Ne risulta che le quantità $v_{h\alpha, \alpha'}$, individuano anche esse un tensore del terzo ordine, due volte interiore ed una volta esteriore inverso.

Per trovare il secondo tensore del quale si è parlato nel principio di questo paragrafo, consideriamo le differenze

$$(41)\qquad \Delta^h_{k'k} = r_{h|k'k} - r_{h|kk'}$$

dove le $r_{h|kk'}$ e $r_{h|k'k}$ sono definite dalle formule (37) e (37'), perciò queste differenze si possono scrivere

$$(41')\qquad \begin{aligned} \Delta^h_{k'k} = {} & \frac{dr_{h|k'}}{ds_k} + \sum_1^m {}_\alpha r_{\alpha|k'}\gamma_{h\alpha k} + \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'} r_{h|\alpha'} w^{\alpha'}_{k'k} - \frac{dr_{h|k}}{ds_{k'}} + \\ & + \sum_1^m {}_\alpha r_{\alpha,k} w^h_{\alpha k'} + \sum_1^m {}_\alpha r_{h|\alpha} w^k_{\alpha k'} \qquad (h, k \leq m;\ k' > m). \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso le formule (34') e (36), che definiscono le derivate tensoriali prime del vettore R, e consideriamo in primo luogo nel secondo membro della (41'), i termini che contengono le derivate prime e seconde delle r_h, e che si possono scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{ds_k ds_{k'}}{d^2 r_h} - \frac{d^2 r_h}{ds_{k'} ds_k} - \sum_1^m {}_\alpha \left(\frac{dr_\alpha}{ds_k} w^h_{\alpha k'} - \frac{dr_\alpha}{ds_{k'}} \gamma_{h\alpha k} \right) - \sum_1^m {}_\alpha \left(\frac{dr_\alpha}{ds_{k'}} \gamma_{h\alpha k} - \frac{dr_\alpha}{ds_k} w^h_{\alpha k'} \right) + \\ & + \sum_1^n {}_\alpha \frac{dr_h}{ds_\alpha} w^k_{\alpha k'} + \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'} \frac{dr_h}{ds_{\alpha'}} w^{\alpha'}_{k'k} . \end{aligned}$$

Tenendo conto della formula (38'), che fornisce la differenza delle derivate seconde, e riducendo i termini simili, tutti questi termini si riducano al seguente

$$\sum_1^m {}_\alpha \frac{dr_h}{ds_\alpha} v_{\alpha k, k'},$$

dove le quantità $v_{\alpha k, k'}$ sono date dalle (40').

Introducendo al posto di $\dfrac{dr_h}{ds_\alpha}$ le derivate tensoriali prime, in base alla (34''), ed eseguendo i calcoli, si può dare alla (41) la forma

$$(42)\qquad \Delta^h_{k'k} = \sum_1^m {}_\alpha r_\alpha v_{h\alpha,\, kk'} + \sum_1^m {}_\alpha r_{h|\alpha} v_{\alpha k, k'},$$

dove si è posto

$$(40')\qquad v_{h\alpha k, k'} = \frac{d\gamma_{h\alpha k}}{ds^{k'}} - \frac{dw^h_{\alpha k'}}{ds^k} + \sum_1^m {}_i \left(\gamma_{h\alpha i} w^i_{kk'} + \gamma_{hik} w^i_{\alpha k'} - \gamma_{i\alpha k} w^h_{ik'} \right) + \sum_{m+1}^n {}_{\alpha'} w^h_{\alpha\alpha'} w^{\alpha'}_{hk'} .$$

Ne risulta senz'altro che le quantità $v_{h\alpha, kk'}$ individuano un tensore del quarto ordine, tre volte interiore e una volta esteriore inverso.

§ 10. Equazioni alle variazioni delle geodetiche [1].

In questo paragrafo voglio considerare succintamente le equazioni alle variazioni delle goedetiche della varietà anolonoma V_n^m, sotto la forma generale, e mettere in evidenza il loro carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni (24) e (25) di V_n^m.

Sia una curva (C) della varietà V_n^m definita dalle equazioni

$$(C) \quad x_i = \varphi_i(\sigma),$$

dove σ indica l'arco della curva. I coseni di questa curva con le congruenze λ di V_n sono forniti dalle espressioni

$$c_h = \sum_{1}^{n} {}_i \lambda_{h\,i} \varphi'_i(\sigma).$$

Una curva (c), vicina a (C), può essere sempre determinata da equazioni del tipo

$$(c) \quad x_i = \varphi_i(\sigma) + \sum_{1}^{n} {}_h \lambda_h^i \varepsilon_h$$

dove si indicano con ε_h le componenti invarianti del vettore scostamento, che fa il passaggio dalla (C) alla curva vicina (c).

I coseni di questa curva (c) con le congruenze λ di V_n sono dati dalle formule

$$u_h = \frac{d\sigma}{ds}\left(c_h + \frac{d\varepsilon_h}{d\sigma} + \sum_{1}^{n} {}_{kl} w_{kl}^h c_k \varepsilon_l\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{42'}$$

nelle quali s indica l'arco di (c) e le w hanno i valori che loro compettono lungo la curva (C). Queste formule sono evidentemente calcolate nella ipotesi che le ε_h siano quantità del primo ordine.

In base alle formule che definiscono le componenti invarianti del vettore

---

[1] Vedi la mia Nota: *Sullo scostamento geodetico nelle varietà anolonome.* « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. VII, serie 6ª, 1° sem. (1928), p. 134. Nel mio lavoro: *Sur l'écart géodésique dans les espaces non holonomes,* « Annales scientifiques de l'Université de Jassy ». t. XI. fasc. 1-2. pp. 7-24, in causa dell'ipotesi che lo scostamento (Σ) è un vettore interiore a V_n^m, ipotesi che non è compatibile in generale colla relazione di anolonomia, non trovo vere equazioni alle variazioni che per certi casi particolari, ma il calcolo preparatorio e il metodo da seguire sono validi. Vedasi anche una mia Nota, riferentesi a questo lavoro, nel numero seguente della stessa Rivista.

derivato di (ε) lungo (C), queste formule si possono anche scrivere

$$(42'') \qquad u_h = \frac{d\sigma}{ds}\left(c_h + (D\varepsilon_h) + \sum_{1}^{m}{}_{kl}\gamma_{hkl}c_k\varepsilon_l\right).$$

Introducendo questi valori nella relazione quadratica dei coseni, si ottiene il valore del rapporto

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 - \mu$$

dove si è indicato con μ la quantità del primo ordine

$$\mu = \sum_{1}^{n}{}_h c_h(D\varepsilon_h).$$

Supponiamo adesso che (C) sia una geodetica di V_n e vogliamo che (c), sia ancora una geodetica di V_n. Per questo basta imporre ai coseni di (c), forniti dalle formule (42''), la condizione di soddisfare le equazioni delle geodetiche di V_n; arriviamo così dalle seguenti equazioni alle variazioni

$$(43) \qquad (D^2\varepsilon_h) - \frac{d\mu}{d\sigma}c_h = \sum_{1}^{n}{}_{k,lr}\gamma_{hk,lr}c_k c_l \varepsilon_r,$$

che non sono altro che le componenti invarianti del vettore che fornisce le equazioni alle variazioni del prof. LEVI-CIVITA [1].

Passiamo adesso alle varietà anolonome e supponiamo che la curva (C) sia situata in V_n^m, vale a dire che gli ultimi $n-m$ coseni $c_{h'}(h' > m)$ siano nulli.

I coseni di una curva vicina sono dati dalle stesse formule (42'), lo scostamento essendo sempre un vettore qualunque in V_n, e in ispecie le ultime n-m formule (42') si scrivono

$$u_{h'} = \frac{d\sigma}{ds}\left(\frac{d\varepsilon_{h'}}{d\sigma} + \sum_{m+1}^{n}{}_{l'}\sum_{1}^{m}{}_k w_{kl'}^{h'}c_k\varepsilon_{l'} + \sum_{1}^{m}{}_{kl}w_{kl}^{h'}c_k\varepsilon_l\right),$$

che dicono precisamente che i coseni di (c), colle congruenze di anolonomia, sono quantità del primo ordine.

Se si vuole adesso che la curva (c), sia anche essa situata in V_n^m, si devono avere le equazioni

$$(43') \qquad \frac{d\varepsilon_{h'}}{d\sigma} + \sum_{m+1}^{n}{}_{l'}\varepsilon_{l'}\sum_{1}^{m}{}_k w_{kl'}^{h'}c_k + \sum_{1}^{m}{}_{kl}w_{kl}^{h'}c_k\varepsilon_l = 0 \qquad (h' = m+1, \dots, n).$$

---

[1] Vedi T. LEVI-CIVITA : *The absolute differential calculus*, edited by dott. E. PERSICO, Blackie, London (1927). p. 215, formule (57).

le quali rappresentano $n-m$ equazioni differenziali lineari nelle $n-m$ quantità $\varepsilon_{h'}(h'>m)$, dove i termini noti sono lineari ed omogeni nelle prime $\varepsilon_h(h\leq m)$. Si vede immediatamente che queste equazioni differenziali non possono ammettere la soluzione $\varepsilon_{h'}=0$, *che esprime che lo scostamento è esso stesso situato in* V_n^m, che nel caso in cui si hanno lungo (C) le relazioni

$$\sum_{1}^{m}{}_{kl} w_{kl}^{h'} c_k \varepsilon_l = 0.$$

Queste relazioni non possono essere valide, qualunque sia la curva (C) e lo scostamento (ε), che nel caso in cui le $w_{kl}^{h'}$ siano nulle, o, ciò che è lo stesso, che le relazioni di anolonomia siano illimitamente integrabili. Perciò in una varietà anolonoma effettiva, si devono sempre associare ad una curva vicina (c) le equazioni differenziali (43'), per determinare le $n-m$ $\varepsilon_{h'}$ in funzione dell'arco σ, quando le m ε_h sono note.

Supponiamo adesso che (C) sia una geodetica di V_n^m, e cioè i coseni c_h soddisfino le equazioni (16). Per essere anche (c) una geodetica di V_n^m, i suoi coseni u_h devono soddisfare pure essi alle equazioni (16), e si trova a calcoli fatti le seguenti equazioni alle variazioni

$$(D^2\varepsilon_h) - \frac{d\mu}{d\sigma} c_h = \sum_{1}^{m}{}_{klr} \lambda_{kh.lr} c_k c_l \varepsilon_r + \sum_{1}^{m}{}_{kl} c_k c_l \sum_{m+1}^{n}{}_{r'} v_{hk.lr'} \varepsilon_{r'}, \tag{44}$$

nelle quali le $(D^2\varepsilon_h)$ rappresentano le componenti del secondo vettore derivato in V_n^m (vedi le formule (26')), della proiezione dello scostamento (ε) in V_n^m, secondo la nostra curva (C), e le $\lambda_{hk.lr}$ e $v_{hk.lr'}$ sono le componenti dei tensori (40) e (40'). Quanto alla quantità μ, essa si determina sempre dalla relazione quadratica dei coseni e si scrive

$$\mu = \sum_{1}^{m}{}_{h} c_h (D\varepsilon_h) + \frac{1}{2} \sum_{m+1}^{n}{}_{l'} \varepsilon_{l'} \sum_{1}^{m}{}_{hk} v_{hk.l'} c_h c_k .$$

L'equazione (44), insieme alle (43'), formano un sistema di equazione differenziale dell'ordine $n-m$ per determinare le n incognite ε.

Per affermare che questo sistema ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni di congruenze (24) e (25), basta osservare che tanto il primo membro delle (44), quanto il secondo sono le componenti di un vettore interiore. Quanto alle (43') esse, come coseni esteriori, sono le componenti di un vettore esteriore diretto.

LUIGI BIANCHI E LA SUA OPERA SCIENTIFICA

di GUIDO FUBINI (a Torino).

LUIGI BIANCHI, di cui l'Italia matematica piange la perdita recente, è stato uno dei più gloriosi rappresentanti della scuola Pisana. Continuatore degli indirizzi di ricerche, che trovarono tanto impulso nell'opera del BETTI e del DINI, alla cui Memoria rimase sempre tanto devoto, il BIANCHI trovò ben presto una via affatto personale; e le sue Memorie, che rapidamente acquistarono un carattere di vera originalità, resero in breve volger di tempo celebre il nome del geometra Pisano. Della sua vita ho scritto altrove ([1]). Qui voglio render conto dei suoi lavori di Analisi e di Geometria differenziale, lasciando ad altri il compito di parlare delle sue ricerche di indole prevalentemente algebrica od aritmetica ([2]). Questo rapporto si chiuderà con l'enunciato di due problemi generali che, a buon diritto, si potrebbero chiamare «*problemi di Bianchi*», perchè studiati da Lui in tanti casi particolari. Il lettore, nel leggere queste pagine, voglia cortesemente ricordare che è spesso difficile riassumere anche uno solo dei lavori geometrici del BIANCHI: i quali quasi sempre trattano numerosi casi particolari, che non di rado hanno importanza rilevante perchè hanno guidato a ulteriori scoperte. E ancora più arduo è dare un quadro completo della sua produzione: le sue profonde e geniali intuizioni, le sue molteplici visioni di una stessa verità matematica hanno

([1]) « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno VII, n. 4, 1928.

([2]) Oltre alle commemorazioni da Lui scritte di WEINGARTEN, JORDAN e dei Suoi Maestri U. DINI e F. KLEIN (di cui qui non parleremo) forse un solo lavoro si sottrae a questa classificazione: la Nota in R. L., serie 5, vol. 25_2, in cui si danno curiosi rapporti tra le forme quadratiche differenziali a curvatura nulla (generiche) per cui i simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie sono costanti e i sistemi commutativi di numeri a più unità.

Scriverò R. L. per « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », M. L. per « Memorie della stessa Accademia », G. B. per « Giornale di Matematica del Battaglini ». A. M. per « Annali di Matematica », M. A. per « Mathem. Annalen ». M. XL per « Memorie della Società Italiane delle Scienze detta dei XL », P. per « Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo », T. per « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », Quando saranno scritti più numeri, il primo (che potrà anche essere racchiuso tra parentesi) indica la serie, gli altri i volumi. Di rado è indicato il millesimo (tra parentesi quadra).

saputo trovare i più riposti legami tra i problemi più disparati [1]. Cosicchè l'opera del BIANCHI lumeggia, per così dire, un vastissimo territorio, di cui i singoli lavori mettono in luce molti dei punti più notevoli; ma tra questi viene costruita una rete fittissima di strade che li collegano l'uno all'altro. E, poichè noi visitiamo uu tale paese, percorrendo certe strade di maggiore importanza, lascieremo purtroppo ignote al lettore tntte le altre vie secondarie che servono a fondere in un tutto armonico tante teorie e tante ricerche. Queste sono così numerose che, sebbene io speri di poterle citare tutte o quasi tutte, non posso darne l'elenco, che riuscirebbe di una lunghezza eccessiva. Basti pensare che quasi tutti i volumi dei R. L. e degli A. M. dell'ultimo quarantennio contengono una o più Note o Memorie del BIANCHI, così che sembra impossibile che un uomo solo abbia compiuto tanta mole di lavoro. Ma, per quanto sia grandissima la fama e l'ammirazione che il BIANCHI si è acquistato con le Sue ricerche, l'Uomo valeva più di quanto ci appaia dai suoi scritti; ai suoi discepoli che lo hanno amato come un padre, che lo hanno ammirato come cittadino, come insuperato Maestro, piange il cuore per averlo perduto: essi, che così sovente debbono a Lui tante idee che li hanno guidati nelle loro ricerche, ricordano con quale profonda intuizione, con quale potenza e prontezza d'indagine, Egli sapesse parlare delle questioni più disparate, anche lontanissime dalle sue personali ricerche. E questa sua competenza negli studii matematici più svariati appare soltanto parzialmente dalle Sue pubblicazioni. La sua immensa cultura è provata non solo dagli svariatissimi corsi universitarii svolti oltre a quello di Geometria Analitica, ma anche dai suoi numerosi trattati: di Geometria Differenziale, di teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, di teoria dei gruppi continui e discontinui, oltre a quelli sulla teoria aritmetica delle forme quadratiche e dei numeri algebrici.

Mi si consenta ora una breve parentesi dedicata agli studii puramente analitici del BIANCHI, prima di giungere alla parte più importante di questo rapporto, relativa alle fondamentali ricerche geometriche del nostro Autore; del resto molte di queste si potrebbero interpretare come ricerche di Analisi, perchè hanno condotto alla scoperta di nuove e notevoli proprietà di molti tipi di equazioni differenziali, specialmente delle equazioni di LAPLACE e di MOUTARD. Dei lavori di Analisi pura ricorderò quello dei «Math. Ann.», 17,

---

(1) Pensi il lettore p. es. quanti legami il BIANCHI ha scoperto tra la teoria delle trasformazioni asintotiche, la teoria delle deformazioni infinitesime d'una superficie, la teoria del rotolamento e quasi tutti i Capitoli della Geometria differenziale.

in cui l'A. sviluppa per alcuni integrali ellittici l'idea del KLEIN di coordinare i varii tipi di tali integrali ai varii sottogruppi congruenziali del gruppo modulare. Ricorderò le notevoli applicazioni del metodo delle approssimazioni successive per le equazioni di tipo iperbolico in R. L. 5, 3_1 e le estensioni del metodo d'integrazione che RIEMANN aveva dato per tali equazioni (R. L. 5, 4_1 e seg.). Pure notevoli sono la nota in R. L. 4, 5_2 in cui si danno semplici e importanti teoremi di unicità per le equazioni di tipo ellittico, e le tre note in R. L. 4, 2 in cui si studia il sistema di due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine con variabili indipendenti, aprendo così la via alla più recente teoria dei sistemi in involuzione. Una nota in R. L. 5, 9_2, tra l'altro, risolve in modo assai elegante il problema di DIRICHLET nello spazio iperbolico indefinito ([1]).

Un gruppo di ricerche è dedicato alla teoria dei gruppi continui: la Memoria di M. XL, 3, 11 ha un interesse forse prevalentemente geometrico, perchè trova tutte le metriche di RIEMANN a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, insieme ad alcune proprietà generali dei gruppi, che si possono considerare gruppi di movimenti, ed agli spazii corrispondenti. In T. 38 sono caratterizzati i gruppi simili a gruppi che conservano i volumi, o li alterano in modo proporzionale. E veramente brillante è la nota dei R. L. 5, 12_1, in cui si estende a un gruppo continuo G la nozione di gruppo complementare $\frac{G}{\Gamma}$ rispetto a un suo sottogruppo Γ, con notevolissime applicazioni al gruppo derivato di G e alla ricerca dei gruppi transitivi oloedricamente isomorfi a G.

Esaurita questa breve parentesi, parliamo dei contributi del BIANCHI alla Geometria Differenziale; i quali, per universale consenso, sono l'opera Sua più importante e a Lui, ancora giovanissimo, hanno assicurato rinomanza vasta e sicura. In questi studii, i fatti analitici più semplici ricevono le più inaspettate applicazioni geometriche; problemi che sembrano inaffrontabili vengono risoluti con estrema facilità, perchè un'osservazione geometrica li trasforma e semplifica in modo insperato ([2]). Nella esposizione il lato intuitivo

([1]) Non ho parlato nè di una nota in R. L. 5, 19_1 [in cui estende alle estremali dell'integrale $\int y^p\sqrt{1+y'^2}dx$, $(p>0)$, cioè alle geodetiche di $y^{2p}(dx^2+dy^2)$ un teorema del LINDELÖF], nè di una Nota in R. L. 4, 5_1 in cui studia certe notevoli coppie di sistemi di equazioni ai differenziali totali.

([2]) A titolo di es. ricordo la dimostrazione del teorema di esistenza per le famiglie di LAMÉ di superficie a curvatura costante (P. VIII), le tante proprietà scoperte per le superpassa sovente in seconda linea, per quanto sempre le proprietà analitiche siano illustrate geometricamente con considerazioni spesso imprevedute (¹).

Ciò che talvolta è dovuto al fatto che il teorema era stato previsto per induzione guidata dall'esame preliminare di casi particolari. Talora il lato intuitivo del problema trattato ci appare riassunto in una sola frase, in una sola citazione; altre volte invece l'A. pone all'improvviso una domanda, un problema preliminare, senza che il lettore riesca subito a capire quanto sia essenziale tale questione per la ricerca che l'A. si è proposto. Nonostante questo è indubbio che il BIANCHI non affrontava mai un calcolo, anche semplice, se non era guidato dalla intuizione geometrica (²).

L'opera del BIANCHI ha fatto progredire quasi tutti i Capitoli della Geometria Differenziale: e chi voglia avere un'idea ordinata di una parte importante delle sue ricerche deve consultare le sue classiche *Lezioni* di Geometria Differenziale, nelle loro varie edizioni italiane e tedesche. Noi cercheremo solo di vedere, almeno in parte, la storia delle sue scoperte, di mettere in luce le idee che lo hanno guidato: tra queste specialmente due notevolissime, che predominano, si può dire, in tutta la sua attività.

L'una è quella di trattare anche problemi relativi alle geometrie non euclidee, anche indefinite (p. es. di elemento lineare $dx^2+dy^2-dz^2$). Nessuno potrà però credere che il BIANCHI li studii solo per gusto di generalizzazioni, sovente non difficili. Per il BIANCHI le metriche non euclidee sono un efficace strumento di ricerca che gli permette anche di conseguire sia nuovi risultati analitici, sia nuovi teoremi di geometria euclidea. Ricorderò p. es. soltanto la importante scoperta delle trasformazioni generalizzate T delle superficie iso-

---

ficie per cui la curvatura totale K vale $-(U+V)^{-2}$, ove U è funzione della sola u, V della v (essendo u, v i parametri delle asintotiche), la determinazione dei sistemi tripli ortogonali con una famiglia di superficie a linee di curvature piane (dedotta dai sistemi ciclici osculatori), quella delle superficie a curvatura nulla negli spazi non euclidei, delle Σ non paraboliche (*AM*2, 24) dedotta dalla costruzione delle Σ paraboliche, la geniale inversione dei teoremi di GUICHARD per le quadriche rotonde dedotta dallo studio geometrico della corrispondenza tra le deformate di tali quadriche e le corrispondenti superficie a curvatura media costante, le applicazioni del metodo di WEINGARTEN al problema dell'applicabilità delle superficie, e infine il meraviglioso uso delle quadriche confocali e della affinità di IVORY nella teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili su quadriche.

(¹) Cfr. p. es. la Nota in R. L. 24_2 [Settem. 1915] e le Memorie sul rotolamento.

(²) Così p. es. il BIANCHI, sebbene avesse le formole relative alla composizione di due trasformazioni di BÄCKLUND, non fece il semplice calcolo relativo alla composizione di due tali trasformazioni complesse coniugate (ciò che lo avrebbe subito condotto alla scoperta di trasformazioni *reali* di superficie a curvatura costante positiva) prima che i metodi geometrici non lo illuminassero sulla teoria delle trasformazioni, che così avrebbe ottenute.

terme (§ 9 di A. M. 3, 12 [1905]), le geniali applicazioni della rappresentazione di Clifford negli spazi ellittici al problema delle deformazioni di una superficie euclidea e ad altre ricerche del più alto interesse, ecc. ([1]).

L'altra idea fondamentale del Bianchi è quella di *trasformazione*. Sia per opera sua, sia per opera dei suoi contemporanei e dei suoi discepoli, essa è penetrata in tutti i Capitoli della Geometria Differenziale, e li ha perfezionati e talvolta completamente rinnovati. I più illustri geometri se ne sono occupati; anche le ricerche più moderne ed inspirate a nuovi indirizzi hanno trovato coi metodi del Bianchi risultati nuovi e fecondi. Ma, per bene vedere l'importanza delle idee del Bianchi, dobbiamo pensare alle idee che più appassionavano i matematici nel tempo della sua giovinezza. Era l'epoca in cui, per opera sia di S. Lie, sia di matematici specialmente francesi, fervevano gli studii per l'integrazione delle equazioni differenziali. Si creavano con la teoria dei sistemi in involuzione e delle trasformazioni di contatto nuovi metodi a tale scopo. Col Bianchi si presenta per la prima volta un metodo con cui da una soluzione nota di una certa equazione alle derivate parziali (l'equazione delle superficie pseudosferiche) si potevano dedurre altre infinite soluzioni contenenti un certo numero di costanti arbitrarie. Tale trasformazione era di tipo assolutamente nuovo, non essendo nè una trasformazione di punti, nè una trasformazione di contatto, nè altrimenti estendibile allo spazio; e la novità del risultato rese ben presto nota sia tale trasformazione, che il suo scopritore. S. Lie, Bäcklund se ne occuparono tosto sia per superare le difficoltà inerenti alla successiva applicazione del metodo del Bianchi, sia per studiarla da un punto di vista più analitico. Il primo riconobbe che, se di una superficie pseudosferica si conoscevano le trasformazioni del Bianchi, le successive applicazioni di tali trasformazioni non richiedevano più l'integrazione di alcuna equazione differenziale; riconobbe che nessuno dei metodi noti riusciva a integrare l'equazione delle superficie pseudosferiche, oggetto degli studi del Bianchi; e trovò anche una nuova trasformazione, semplicissima da un punto di vista analitico, ma la cui interpretazione geo-

([1]) Ricordo ancora le relazioni tra le deformate dell'iperboloide rotondo euclideo sia con le superficie di Voss nello spazio ellittico (R. L. 5, 4_1), sia con gli studii da lui compiuti nella geometria euclidea indefinita; le nuove superficie isoterme euclidee dedotte dalle superficie ad area minima non euclidea in M. L. 4, 4 (Cfr. anche A. M. 3, 12); l'interpretazione euclidea (T. 38) delle superficie a curvatura nulla dello spazio iperbolico, le impensate relazioni tra alcune classi di superficie non euclidee e certe classi di superficie euclidee applicabili (A. M. 3, 2) con applicazione al problema delle superficie applicabili su quadriche (P. 22). E l'enumerazione potrebbe continuare.

metrica venne assai più tardi per via affatto indiretta (cfr. p. es. la Nota del BIANCHI in R. L. 5, 1_2). Il BÄCKLUND studiò da un punto di vista molto generale il fondamento analitico di tale trasformazione, ponendo anche un problema (*il problema di Bäcklund*) che fu oggetto fino ad oggi di lunghe ricerche da parte di GOURSAT e dei suoi allievi Di più, scoprì una nuova trasformazione, di cui quella del BIANCHI è caso particolare, e che il BIANCHI trovò scomponibile in trasformazioni del BIANCHI e del LIE. Il BIANCHI in un altro modo molto semplice e suggestivo (M. L. 4, 5) interpretò analiticamente simili trasformazioni, ed assai più tardi (cfr. il § 39 del Vol. III delle sue *Lezioni*) pose un problema analitico generale (suscettibile di ulteriori generalizzazioni) che, sotto qualche riguardo, si può avvicinare al problema di BÄCKLUND. Dal lato geometrico il BIANCHI portò un contributo essenziale, riconoscendo che la trasformazione del BÄCKLUND era una trasformazione asintotica (1) determinata da una congruenza pseudosferica di rette (2). Se la congruenza è normale, si ritorna alla primitiva trasformazione del BIANCHI. Più tardi, lasciati i metodi del LIE, il BIANCHI col celebre *teorema di permutabilità* [1892] dimostra che, se di una superficie pseudosferica si conoscono tutte le trasformazioni asintotiche (per il che basta integrare un'equazione di RICCATI), le successive applicazioni di tali trasformazioni non richiedono che *derivazioni e calcoli algebrici*. Con queste sole operazioni si possono ottenere così superficie pseudosferiche, dipendenti da tante costanti arbitrarie quante si vuole; e tutte queste superficie non soddisfano ad altra equazione differenziale che non sia quella delle superficie pseudosferiche. Si è quasi tentati di dire che così si è ottenuto l'integrale generale di questa e che il metodo del BIANCHI è un metodo di effettiva integrazione. E così infatti sarebbe, se si potesse provare che tutte le trasformazioni asintotiche di una superficie pseudosferica generica e le loro superficie limiti esauriscono tutte le superficie pseudosferiche.

Certo una gran parte dell'opera del BIANCHI si basa su questi due principii: *trasformazioni* e *teorema di permutabilità*. Egli non solo ha trovato amplissime classi di enti geometrici, per cui ha dato trasformazioni asintotiche

(1) Cioè il passaggio dall'una all'altra falda focale di una congruenza W (che fa cioè corrispondere le asintotiche di tali due falde). Se una tale congruenza è *normale*, le falde sono applicabili su una superficie di rotazione, e le superficie normali sono W (i loro raggi di curvatura sono funzioni uno dell'altro). Il nome W (iniziale di WEINGARTEN) è stato dato dal BIANCHI in omaggio ai celebri teoremi di questo geometra.

(2) Queste congruenze (R. L. 4, 3_1 ed A. M. 2, 15) sono caratterizzate dall'aver costanti sia la distanza di fuochi che quella dei punti limiti.

ed ha dimostrato il teorema di permutabilità, ma ha trovato anche molti nuovi metodi di trasformazione, per parecchi dei quali vale un *teorema di permutabilità.* Tra le varie trasformazioni studiate ricorderò le trasformazioni di RIBAUCOUR (passaggio dall'una all'altra falda dell'inviluppo di un sistema di sfere, se tra le due falde si corrispondono le linee di curvatura). E, se tali trasformazioni si possono dedurre dalle trasformazioni asintotiche nel caso di superficie, valendosi della nota trasformazione di contatto di LIE di rette in sfere, altrettanto non si può sempre affermare nel caso che si studino trasformazioni delle famiglie di LAMÉ di superficie. Tutte queste trasformazioni, tutte le relázioni trovate tra enti a prima vista affatto disparati, ci rendono ben chiaro il perchè la Geometria Differenziale sia stata da Lui in gran parte completamente rinnovata.

Vogliamo seguire più da vicino il corso delle sue ricerche. La prima idea di trasformazione compare già nella sua tesi di Abilitazione (« Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », 4, 2 (1); cfr. anche G. B. 17, G. B. 20, « Math. Ann. », 16). Ivi chiama *complementari* due superficie S, S' che insieme costituiscano le due falde dell'evoluta (falde focali delle rette normali) di una stessa superficie Σ. E, se Σ è W, allora S, S' sono applicabili su superficie di rotazione. Oltre a molti altri casi particolari, il BIANCHI studia specialmente il caso che S ed S' siano entrambe pseudosferiche, per fissar le idee, a curvatura costante -1. Il passaggio da S da S' è chiamato trasformazione *complementare* (2); punti omologhi di S, S' hanno una distanza uguale ad 1; e quindi ogni punto A' di S' si trova sul cerchio che ha per centro il punto omologo A di S, giace nel corrispondente piano tangente ed ha per raggio 1. Anzi le ∞^1 superficie pseudosferiche S', che si possono dedurre da S con una trasformazione complementare sono le traiettorie ortogonali del sistema *ciclico* (3), formato da questi cerchi. Questo sistema ciclico era già studiato in lavori del RIBAUCOUR, ignoti al BIANCHI. Ma anche se così non fosse stato, non sarebbe per nulla sminuito il valore della ricerca del BIANCHI, precisa-

(1) Per brevità non parlo della sua tesi di laurea (ibidem) (cfr. anche G. B. 16) in cui si studiano casi particolari di superficie applicabili.

(2) In tal caso la differenza dei raggi di curvatura di Σ vale 1; più tardi [1890] in R. L. 4, 6, il BIANCHI osserva che, in virtù di un teorema di WEINGARTEN, la determinazione di tali Σ equivale alla ricerca degli elementi lineari sferici del tipo $E du^2 + \frac{1}{E} dv^2$.

(3) *Ciclico*, perchè formato da cerchi tagliati ortogonalmente da ∞^1 superficie S'. Per un qualsiasi sistema ciclico, le superficie ortogonali S' formano una famiglia di LAMÉ. Le altre due famiglie di LAMÉ, che con quella formano un sistema triplo ortogonale, sono gene-

mente come non è sminuito dal fatto che il BIANCHI conosceva i teoremi del WEINGARTEN. La novità dell'idea del BIANCHI è di aver avuto il pensiero di concepire questi fatti geometrici come definenti un metodo di *trasformazione*. Ma è ben naturale che il BIANCHI sia tosto passato a studiare i sistemi *ciclici* e più in generale i *sistemi tripli ortogonali.* I primi lavori sono editi in G. B. 21 e 22 [1], in cui si dà una teoria generale dei sistemi ciclici e si studiano casi particolari (tra cui quello in cui i cerchi del sistema sono tangenti ad una stessa superficie), alcuni dei quali furono più tardi studiati per altra via in A. M. (2) 18 e 19. Passato poi allo studio più generale dei sistemi tripli ortogonali, in R. L. (4) 1 e 2, in A. M. (2) 13 e 14, l'A. sfrutta in modo mirabile l'equazione del CAYLEY per la distanza di due superficie infinitamente vicine di una stessa famiglia di LAMÉ. Oltre a molti casi notevoli (p. es. quello di una famiglia di LAMÉ formata di elicoidi) il BIANCHI scopre famiglie di LAMÉ formate con superficie a curvatura costante K (la quale può anche variare dall'una all'altra superficie della stessa famiglia). Memorabili sono i *teoremi di esistenza* di tali famiglie, ivi dedotti per via intuitiva, e che solo più tardi il BIANCHI riuscirà (P. VIII) a dimostrare con rigore, con la considerazione delle superficie *secondarie* del sistema (quella delle due famiglie che insieme alla famiglia di superficie a curvatura costante formano il sistema triplo ortogonale considerato).

L'importanza di queste Memorie è assai grande: ivi per la prima volta si dà l'interpretazione della trasformazione di BÄCKLUND come trasformazione asintotica e si dimostra che tali sistemi tripli ortogonali costituiscono *una classe di enti geometrici, a cui si può estendere la teoria delle trasformazioni.* Se la famiglia è composta di superficie aventi tutte una stessa curvatura K (p. es. se $K = -1$), il sistema è detto di WEINGARTEN; e ad esso si può applicare in due modi una trasformazione *complementare* (generalizzazione delle trasformazioni complementari delle superficie pseudosferiche) e si ottiene così una successione, illimitata nei due versi, di famiglia di LAMÉ del tipo precedente, tale che ogni famiglia è complementare delle due famiglie contigue. Vi è però scoperta una classe di tali famiglie specialmente notevole

---

rate dai cerchi del sistema che escono dai punti di una linea di curvatura di S' (dell'uno e dell'altro sistema). Ecco perchè *la teoria dei sistemi ciclici è caso particolare della teoria dei sistemi tripli ortogonali.*

[1] In questi Volumi vi sono anche altre due Note: l'una che caratterizza le coppie di BONNET di superficie ad area minima applicabili una sull'altra: l'altra che estende a curve qualsiasi risultati che il LIE aveva dedotto per le curve a torsione costante dalla trasformata complementare delle superficie pseudosferiche.

(le famiglie di LAMÉ del tipo di WEINGARTEN *a flessione costante*): quella per cui una, e quindi tutte le traiettorie ortogonali delle superficie della famiglia, hanno una flessione costante, uguale ad 1. Ciascuna di queste famiglie ammette una sola trasformazione complementare. Se in più la torsione di queste traiettorie è nulla, queste traiettorie sono cerchi, e si ritorna ai sistemi *ciclici* (con cerchi di ugual raggio). In R. L. 5, 26_2 egli caratterizza geometricamente le già citate superficie secondarie; le quali, nel caso di famiglia a *flessione costante*, diventano superficie *ipercicliche* (cioè con un sistema di linee di curvatura a flessione costante). E anche queste superficie costituiscono una nuova classe di enti, a cui si può *estendere una teoria di trasformazione.*

In una Memoria assai posteriore, in A. M. 3, 24 [1915], egli studia tutti i sistemi tripli ortogonali paralleli ai (ossia trasformati di COMBESCURE dei) sistemi tripli ortogonali con una famiglia di superficie a curvatura costante, non solo estendendo loro la trasformazione di BÄCKLUND, ma anche trovando *nuove trasformazioni*, che con sole derivazioni fanno passare da un tale sistema a un sistema parallelo, e indagando poi i rapporti che intercedono tra tutte queste trasformazioni. Si approfondisce il caso particolare dei sistemi paralleli a quelli di flessione costante (trovando per loro notevolissime proprietà geometriche) insieme ad altri casi particolari di grande interesse.

In questo gruppo di lavori compare, fin dal principio, un teorema che prelude al *teorema di permutabilità* dimostrato solo più tardi [1892] in R. L. 5, 1_2 sia per le superficie pseudosferiche, sia per i sistemi qui considerati. Nè si deve dimenticare che il BIANCHI in R. L. 5, 3_2, sfruttando l'equazione di MOUTARD, dimostra in generale il teorema di permutabilità per due trasformazioni asintotiche qualsiasi di una stessa superficie, provando (se S_1 ed S_2 sono trasformate asintotiche di una stessa superficie S) l'esistenza di ∞^1 superficie S', trasformate asintotiche sia di S_1 che di S_2 (anzi di ∞^1 altre superficie Σ, al sistema delle quali appartengono S_1 ed S_2) (1). Se S, S_1, S_2

(1) È qui il luogo di ricordare i risultati di R. L. 5, 33_2. Siano date due congruenze di rette in corrispondenza biunivoca. Consideriamo gli ∞^3 elementi (nel senso di S. LIE) formati da un punto di una retta della prima e dal piano che lo proietta dalla retta omologa della seconda. Se tali elementi o faccette si possono distribuire in ∞^1 superficie, le due congruenze si dicono (semplicemente) *stratificabili*; se la proprietà sussiste anche scambiando le due congruenze, queste si dicono *doppiamente* stratificate. Di queste un esempio è dato dal teorema di permutabilità: punti omologhi delle S' giacciono su una retta, punti omologhi delle Σ giacciono su un'altra retta. Queste due rette generano due congruenze doppiamente stratificate. L'Autore cerca le coppie di congruenze doppiamente stratificate tali che la normale comune a due rette omologhe qualsiasi passi per un punto fisso (e quindi due rette omologhe siano normali) trovando notevoli riavvicinamenti con le deformazioni euclidee del paraboloide

sono p. es. pseudosferiche, tra queste ∞^1 superficie S' esiste generalmente *una e una sola superficie pseudosferica.* E in ciò consiste il particolare teorema di permutabilità, che il BIANCHI in principio aveva trovato per queste superficie e per le famiglie di LAMÉ formate con esse, e che estenderà poi a molteplici classi di enti geometrici. In P. 25 [1908] si studiano poi notevoli configurazioni geometriche, che si deducono da tale teorema ([1]).

Si affollano, si succedono ora le generalizzazioni di tali risultati, e insieme lo studio dei problemi più svariati. Ma da questi primi lavori sorge e permane nel BIANCHI l'amore alla ricerca delle famiglie di LAMÉ. E, come risulterà da quanto segue, il BIANCHI, quando scopre una classe di superficie, subito cerca se con esse si può formare una tale famiglia. Ben numeroso è pertanto l'elenco dei sistemi tripli ortogonali, scoperti dal BIANCHI; per molti di essi Egli ha saputo costruire una teoria di trasformazione e dimostrare un teorema di permutabilità. *Sulle più importanti generalizzazioni di queste ricerche si riferirà negli ultimi paragrafi di questo rapporto* (pag. 70 e segg.; cfr. anche pag. 63).

Una prima generalizzazione. -- Un primo tipo di ricerche di questo indirizzo è svolto in alcuni lavori (R. L. (4) 6_1 e 7_1; R. L. 5, 1_2, A. M. 2, 18) in cui l'A. si occupa delle deformazioni infinitesime d'una superficie (supposta

---

rotondo e con le superficie a curvatura nulla non euclidee. Invece lo studio delle congruenze semplicemente stratificate, di cui la prima normale, equivale allo studio dei sistemi ciclici. Se una coppia di congruenze, entrambe normali, è semplicemente stratificata, la prima congruenza è formata dalle normali ad una superficie di curvatura costante.

([1]) Due curve si dicono trasformate asintotiche l'una dell'altra se intercede tra i loro punti una corrispondenza biunivoca tale che la congiungente di due punti omologhi è anche intersezione dei relativi piani osculatori. Se C_1, C_2 sono trasformate asintotiche di una stessa curva C, si può scegliere (in ∞^1 modi) una curva C_{12} trasformata asintotica di entrambe. Quattro punti omologhi M, M_1, M_2, M_{12} delle 4 curve e i corrispondenti piani osculatori formano un sistema 4_3 di MÖBIUS di 4 punti e 4 piani: ogni punto giace in 3 dei 4 piani, ogni piano passa per 3 dei 4 punti. Se C_1, C_2, C_3 sono trasformate asintotiche di C, scegliamo similmente una C_{12}, una C_{23}, una C_{31}. I piani osculatori in 3 punti omologhi M_{12}, M_{23}, M_{31} di queste danno un punto M_{123} che genera una curva C_{123} di cui il piano $M_{12}M_{23}M_{31}$ è osculatore. Così ogni sistema di 8 punti omologhi e dei corrispondenti piani osculatori delle 8 curve qui considerate forma un sistema 8_4 di 8 punti ed 8 piani: ogni piano contiene 4 degli 8 punti e dualmente. Così continuando si giunge a sistema 16_5, 32_6 ecc. di punti e piani suscettibili di ∞^1 posizioni. Si può studiare il caso che tali sistemi di punti e piani siano ∞^2, corrispondenti a più superficie dedotte da una stessa S con trasformazioni asintotiche, e a quelle che se ne deducono usando del teorema di permutabilità. Rinvio alla Memoria originale per maggiori particolari.

flessibile e inestendibile (1). Si trovano le relazioni *tra tali problemi e le trasformazioni asintotiche d'una superficie,* usufruendo di molti risultati del GUICHARD, si definiscono le superficie *associate* e le *congruenze rettilinee di Ribaucour* (cfr. le *Lezioni* per maggiori notizie). Detti u, v i parametri delle asintotiche d'una superficie, si studiano le superficie, la cui curvatura totale K vale $-(U+V)^2$, essendo U funzione della sola u, V della v (le quali superficie si riducono alle pseudosferiche se U e V sono costanti). Queste superficie si dimostrarono così importanti che non possiamo non soffermarci un po' sulle proprietà che il BIANCHI ne ha scoperte. Esse *sono caratterizzate* p. es. *dalla proprietà di essere associate alle superficie che si possono deformare in ∞^1 modi, conservando coniugato un sistema coniugato* [così come le superficie pseudosferiche sono associate delle superficie Σ di VOSS, cioè delle superficie che hanno due sistemi di ∞^1 geodetiche tra loro coniugati; si noti che alle ∞^1 deformazioni di una tale Σ che conservano coniugato tale sistema corrisponde *la trasformazione di Lie per la superficie pseudosferica associata*]. Esse *sono caratterizzate anche dalla proprietà che con le loro deformazioni infinitesime danno luogo a congruenze di Ribaucour cicliche* (formate dagli assi di un sistema ciclico); e *queste congruenze sono le sole infinite volte cicliche* (cioè esistono ∞ sistemi ciclici, per cui una tale congruenza è la congruenza degli assi dei cerchi). E il BIANCHI studiò anche le falde focali di queste congruenze e le superficie normali al sistema ciclico corrispondente. (In R. L. 5, 26_1 trovò altre proprietà geometriche caratteristiche di queste superficie, che qui non riassumo). Fondamentale è l'ulteriore proprietà che può pure da sola servire a definire tali superficie: *esse sono le uniche superficie* S *che posseggono una trasformazione asintotica* S' *tale che in punti omologhi* S, S' *hanno ugual curvatura.* Data S, la S' dipende da due costanti arbitrarie. Ecco il teorema da cui il BIANCHI ha dedotto che per tali superficie si può *dare sia una teoria di trasformazione* (asintotica), *sia un teorema di permutabilità.*

Il BIANCHI si è occupato anche dei teoremi di esistenza per tali superficie. In R. L. 5, 3_1 aveva dimostrato, col metodo delle successive approssimazioni

(1) A questo argomento si riattaccano due Note in R. L., 5, 28_2 sulle superficie applicate su superficie spirali (cioè su superficie che ammettono un gruppo conforme di trasformazioni in sè). Esse, insieme alle superficie di rotazione, sono le uniche che ammettono una funzione caratteristica per le loro deformazioni infinitesime invariante per tutte le flessioni della superficie. Esse sono le sole superficie S per cui esiste una superficie S', che loro corrisponde per ortogonalità di elementi (e che è un piano se la S stessa è spirale) tale che il piano tangente in un punto di S passa per il punto corrispondente di S'.

di PICARD, l'esistenza d'una superficie pseudosferica, di cui erano prefissate due asintotiche di diverso sistema (purchè fossero soddisfatte alcune condizioni necessarie ([1])). In R. L. 22_1 il BIANCHI costruisce la teoria delle superficie riferite al triedro (mobile) principale delle asintotiche di un sistema. E ne deduce (almeno nel caso analitico) l'esistenza di una e una sola superficie, per cui sono date due asintotiche C, Γ di diverso sistema, e l'espressione $K(u, v)$ della curvatura riferita ai parametri u, v delle asintotiche, che si suppongono p. es. ridursi su C, Γ agli archi di queste curve (e ciò purchè siano soddisfatte le evidenti condizioni necessarie). Queste condizioni necessarie determinano $K(u, v)$ se si prefigge che $K = -(U+V)^{-2}$; ne segue perciò che, *date due curve* C, Γ *che nel punto d'incontro hanno lo stesso piano osculatore e torsioni uguali e di segno opposto, esiste una e una sola delle superficie qui considerate per cui* C, Γ *sono asintotiche* (di diverso sistema) ([2]). Infine in A. M. 3, 19 il BIANCHI estende a queste superficie alcuni risultati ottenuti per le superficie pseudosferiche, di cui parleremo più avanti.

Sulle congruenze cicliche il BIANCHI ritorna in A. M. 2, 19, ridimostrando anche alcuni dei precedenti risultati. Il punto di partenza é l'osservazione che l'*essere una congruenza ciclica o no dipende solo dalla sua immagine sferica e che lo studio delle congruenze cicliche normali equivale a quello delle superficie che con una superficie pseudosferica hanno comune l'immagine sferica delle linee di curvatura. Sono dati teoremi di esistenza assai notevoli per le superficie con un sistema di linee di curvature piane e per le famiglie di Lamè formate con tali superficie*: dove è molto singolare l'uso dei sistemi ciclici (di cui tali famiglie sono una generalizzazione) come di uno strumento di ricerca. *Lo studio del caso, in cui le superficie*

([1]) Che cioè le curve avessero torsioni costanti uguali e di segno opposto e nel punto comune avessero lo stesso piano osculatore.

([2]) Altri studii sulle asintotiche d'una superficie sono svolti in T. 40 [1885] in cui si dimostra che una superficie si può deformare in guisa che due curve prefissate uscenti da un suo punto O e ivi non tangenti diventino asintotiche. Se la superficie e le curve sono reali, la deformazione è reale se in O la curvatura K è negativa. In modo simile vi si dimostra l'esistenza su una superficie data di una rete u, v di CEBICEF (che divide la superficie in parallelogrammi infinitesimi), quando siano prefissati una curva iniziale per ciascuno dei sistemi u, v.

Altri studi sulle asintotiche d'una superficie sono svolti in R. L. 5, 27_1 ricorrendo all'immagine sferica della superficie. Vi si dimostra che esiste una e una sola superficie, la cui curvatura K è una funzione prefissata della direzione (dei coseni direttori) della normale, quando siano date le immagini sferiche di due asintotiche di diverso sistema. Se ne deduce l'esistenza di una classe di superficle per cui si può *tanto costruire una teoria di trasformazioni, quanto dimostrare un teorema di permutabilità.*

dell'altra famiglia di Lamé, ortogonale alle linee piane di curvatura della famiglia di superficie considerata, *incontrano i piani di queste linee sotto angolo costante è ridotto a quello delle coppie di superficie pseudosferiche trasformate asintotiche l'una dell'altra.* Chè, se tale angolo, pure essendo costante lungo una stessa superficie, varia da una superficie all'altra della famiglia, *si è ricondotti alle superficie precedenti, per cui una delle funzioni* U, V *è costante.* Tante sono le applicazioni che il BIANCHI ha saputo fare della teoria delle superficie pseudosferiche e delle superficie più generali da lui scoperte!

Nuove generalizzazioni; le equazioni di Moutard. — Il BIANCHI ha in A. M. 3, 22 generalizzato le congruenze pseudosferiche con lo studio delle congruenze a parametro costante ([1]).

Più importanti e di più vasta portata sono però le trasformazioni, che il BIANCHI ha saputo dedurre dai precedenti risultati geometrici, per le equazioni di MOUTARD con un gruppo di soluzioni legate da una relazione qua-

([1]) Tale parametro H vale $\sqrt{d^2 - \lambda^2}$, se d è la distanza dei punti limiti, λ quella dei fuochi. Il BIANCHI studia il caso $H = a =$ cost. (che comprende il caso delle congruenze pseudosferiche, per cui $d =$ cost., $\lambda =$ cost., e il caso delle congruenze normali, per cui $a = 0$). Dato a, una tale congruenza, di cui sia prefissata una falda focale a curvatura $K \neq$ cost., se esiste, è unica. Se fosse $K =$ cost., ma $K \neq -\frac{1}{a^2}$, tale congruenza dipende invece da due costanti arbitrarie (se invece fosse $K = -\frac{1}{a^2}$, la congruenza si riduce a quella delle normali principali delle asintotiche dell'uno o dell'altro sistema): e la integrazione, nel caso $a \neq 0$, delle equazioni da cui dipendono tali congruenze, si riduce al caso $a = 0$ mediante una trasformazione di LIE (o di LIE-BONNET) delle falda focale assegnata. *Alle congruenze così ottenute si può applicare la trasformazione di Bäcklund.*

Mentre l'equazione di MOUTARD (relativa alla falda focale a curvatura K costante) ha tre soluzioni legate da una relazione quadratica, l'equazione di MOUTARD della seconda falda ne ha quattro legate da una tale relazione. Le congruenze per cui $H =$ cost. e per cui alle due falde focali corrisponde una stessa equazione di MOUTARD $\theta_{uv} = 0$ si ottengono dalle superficie di traslazione, le cui curve generatrici hanno torsioni costanti di segno opposto, prendendo la intersezione dei piani osculatori alle due curve generatrici uscenti da un punto variabile A della superficie. Oltre ad altri risultati, si giunge al teorema che sole le superficie applicabili sul paraboloide rotondo sono tali che l'equazione di MOUTARD corrispondente non varia col flettersi della superficie (nel qual caso si riduce necessariamente alla $\theta_{uv} = 0$). Esse sono le falde focali delle precedenti congruenze, quando le torsioni delle curve generatrici sono uguali ed opposte; caso in cui la congruenza è normale (precisamente ad una delle superficie W determinate da WEINGARTEN). Le precedenti superficie di traslazione sono (A. M. 4, 1), insieme alla superficie d'area minima, le sole superficie di traslazione, per cui la congruenza delle rette intersezioni dei piani osculatori in un punto A della superficie alle curve generatrici che ne escono è una congruenza normale.

dratica (R. L. 5, 13_2 [1904] e M. XL., 3, 13). Dalle formole di LELIEUVRE appare che la ricerca delle superficie pseudosferiche equivale a quella delle equazioni $\theta_{uv} = M\theta$ di MOUTARD che posseggono tre soluzioni θ_1, θ_2, θ_3 tali che $\Sigma\theta_i^2$ sia costante. Per le superficie, di cui abbiamo discorso più sopra e per cui $K = -(U+V)^{-2}$, vale un risultato analogo: per esse $\Sigma\theta^2$ vale $U+V$. Ad equazioni di MOUTARD di tipo simile conducono anche le superficie citate testè a piè di pagina; infine le superficie studiate nella nota già citata in R. L. 27_1 conducono ad equazioni di MOUTARD che posseggono due soluzioni, i cui quadrati hanno una somma costante. Alle trasformazioni studiate dal BIANCHI per tutte queste classi di superficie corrispondono trasformazioni per le corrispondenti equazioni di MOUTARD, che le trasformano in equazioni di MOUTARD, le quali ancora posseggono un gruppo quadratico di soluzioni.

Egli parte pertanto dal problema seguente: *Per quali equazioni di Moutard avviene che esistono* $n+1$ *soluzioni* θ_i *tali che le soluzioni omologhe* $\overline{\theta}$ *per una equazione di Moutard, dedotta dalla prima con una trasformazione di Moutard, soddisfino* alla $\Sigma\theta^2 = \Sigma\overline{\theta}^2$? Riconosce che deve essere $\Sigma\theta^2 = U+V$, ove $U(V)$ è funzione della sola u (della v); e che, viceversa, se l'equazione possiede un tale gruppo *quadratico* di soluzioni θ, esistono ∞^n sue trasformazioni di MOUTARD, che soddisfano alla condizione voluta. Ecco così creata *una teoria delle trasformazioni* di tali equazioni; e, con un *teorema di permutabilità,* si prova che se di una cosiffatta equazione di MOUTARD si sanno trovare le ∞^n trasformate, altrettanto si sa fare per queste e per le loro successive trasformate. Vi sono notevoli configurazioni di tali equazioni, analoghe a quelle date in P. 25 per le trasformate asintotiche d'una superficie. Per $n=2$ si ritrovano le superficie con $K = -(U+V)^{-2}$, o, ciò che è lo stesso, (A. M. 2, 18) le loro associate con un sistema coniugato persistente in ∞^1 flessioni. Per $n=4$ si trovano le superficie analoghe dello spazio ellittico, il cui studio equivale a quello delle ipersuperficie V_3 deformabili in un S_4 euclideo a quattro dimensioni [1]. *Per queste superficie, come per le corrispondenti* V_3 *di* S_4 *si può quindi dare una teoria di trasformazione.* Il BIANCHI approfondisce poi il caso che il sistema coniugato sia di linee geodetiche (superficie analoghe a quelle di VOSS dello spazio euclideo). Le superficie duali posseggono una rete coniugata di CEBICEF

---

(1) Tali V_3 sono ipersuperficie rigate formate da ∞^2 rette, la cui immagine ipersferica (su una ipersfera di S_4 che si può considerare come uno spazio ellittico a tre dimensioni) è, per un teorema di SCHUR, una superficie con un sistema coniugato persistente in ∞^1 flessioni.

(a invarianti di punto uguali); anche *per queste superficie viene così creata una teoria di trasformazione*, di cui vengono studiate le proprietà geometriche. E se ne deducono notevoli conseguenze per certe coppie curiosissime di superficie applicabili in geometria euclidea, sfruttando le proprietà delle loro immagini di CLIFFORD con metodi di cui parleremo più avanti. Oltre ad alcune applicazioni allo spazio iperbolico, sono notevoli le relazioni tra certe superficie di VOSS nello spazio ellittico corrispondenti alle deformate *euclidee* dell'ellissoide generato dalla rotazione dell'ellisse (immaginaria) $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + 1 = 0$, alcune delle quali hanno notevoli relazioni con le superficie pseudosferiche euclidee.

Con questi studii il BIANCHI ha già edificato un edificio geometrico cospicuo, completando capitoli essenziali della Geometria Differenziale, e scoprendo intime relazioni tra essi e la sua teoria di *trasformazione*. E la terza edizione delle sue *Lezioni* rende conto di una buona parte dei risultati conseguiti.

Altre applicazioni delle superficie e delle congruenze pseudosferiche. — Ora è necessaria una digressione, che, tra l'altro, ci farà vedere come il BIANCHI abbia scoperto sia nuove famiglie di LAMÉ, sia nuove applicazioni delle congruenze pseudosferiche. Comincieremo col ricordare quel caso particolare (già studiato nella Memoria sopra citata di A. M. 2, 18) delle congruenze di RIBAUCOUR, che, avendo una superficie pseudosferica come generatrice, sono cicliche. Sulle superficie S normali ai cerchi di un sistema ciclico corrispondente le linee di *livello* (1) tagliano le linee di curvatura sotto angolo costante. Prescindendo dal sistema ciclico, tali superficie S si possono considerare come superficie *su cui un doppio sistema di traiettorie isogonali* (sotto angolo opportuno) *delle linee di curvatura determinano un sistema di infiniti parallelogrammi infinitesimi equivalenti*. Questa proprietà, se trascuriamo le superficie sviluppabili, appartiene inoltre *soltanto* alle superficie che da un opportuno sistema di piani paralleli sono tagliate secondo linee isogonali delle linee di curvatura. *Anche con queste superficie* (la cui determinazione è ridotta, per mezzo dell'immagine sferica, alla integrazione dell'equazione $\rho_{uv} + \rho = 0$) *si possono formare famiglie di Lamé*. Il BIANCHI osserva che la precedente proprietà dipende solo dall'immagine sferica delle linee di curvatura ed è così condotto al problema di dividere la sfera in infiniti parallelogrammi infinitesimi equivalenti mediante due sistemi di ∞^1 linee, che si intersecano sotto angolo costante; e trova che tale problema

(1) Cioè le linee, lungo cui è costante la distanza da una delle superficie considerate ad una superficie infinitamente vicina.

è risoluto nel modo più generale *dalle traiettorie ortogonali delle immagini sferiche delle sviluppabili di una congruenza pseudosferica* (la rete ortogonale determinata dai sistemi bisettori corrispondendo poi alle asintotiche delle falde focali). In una nota di R. L. 5, 3_2 trova che alcune superficie considerate da GUICHARD, anzi più generalmente *quelle per cui è costante il rapporto delle distanze da un punto fisso* O *ai due piani principali*, sono casi particolari delle precedenti. Anche per queste si ha una *trasformazione*, che le porta in superficie della stessa specie; queste si ottengono come superficie normali ai cerchi che tagliano ortogonalmente la superficie data e una qualsiasi sfera di centro O. Il BIANCHI studia anche *le famiglie di Lamè* formate con tali superficie, ed altre superficie di tipo analogo. I precedenti risultati sono sovente utilizzati in ricerche posteriori.

Altre applicazioni delle congruenze pseudosferiche si trovano in P. 40 e in R. L. 5, 24_2. Rispetto al triedro principale (¹) (*mobile*) di una superficie S si considerino le coordinate (*variabili*) di un punto *fisso* W_1, W_2, W_3. La superficie $x = W_1$, $y = W_2$, $z = W_3$, che si può considerare essere la superficie tracciata dal punto fisso entro il triedro mobile, si dirà la superficie *traccia* (²). Il BIANCHI studia quando essa è una quadrica avente i piani principali come piani di simmetria, dimostrando che le immagini sferiche delle linee di curvatura di S si possono ottenere partendo dalle *congruenze pseudosferiche a falde focali reali, immaginarie o coincidenti.* P. es. nel caso che la quadrica si riduca a un cono retto avente per asse una tangente principale (³) (se si esclude il caso elementare di certe superficie modanate) esse sono *le linee che corrispondono alle asintotiche di una superficie pseudosferica nella rappresentazione sferica* ottenuta tirando dal centro della sfera immagine le parallele a un sistema di tangenti asintotiche della superficie pseudosferica considerata. Le tangenti alle qui considerate linee di curvatura di S generano una congruenza di GUICHARD (le cui sviluppabili tagliano le falde focali secondo le linee di curvatura): la seconda falda focale di questa

---

(¹) Triedro *principale* per una superficie in un suo punto A è quello determinato dalla normale e dalle tangenti di curvatura in A. Le sue due faccie che passano per la normale in A sono i *piani principali.*

(²) Pure con l'ausilio di queste coordinate W_i il BIANCHI nel Fasc. 4° (Anno III) delle Esercitazioni del Circolo Matematico di Catania [1923] dimostra che le superficie che sono rappresentate conformemente nella regione corrispondente della podaria rispetto ad un punto O sono (particolari) superficie di rotazione con l'asse passante per O.

(³) Cioè ogni linea di curvatura di S taglia sotto angolo costante le generatrici del cono che la proietta dal punto fisso O.

è una superficie dello stesso tipo. Alle inversioni di centro O (che portano una delle superficie qui considerate in una superficie dello stesso tipo) corrispondono trasformazioni asintotiche della corrispondente superficie pseudosferica.

Sistemi tripli ortogonali e loro trasformazioni. — I metodi usati in questi studii sono analoghi a quelli usati nelle ricerche di A. M. 3, 25 e di una Nota in R. L. 5, 24_1 (generalizzata agli iperspazi in R. L. 5, 24_2). Il Bianchi parte dall'osservazione che, date le *rotazioni* β_{ih} di un sistema triplo ortogonale, la determinazione di questo si può compiere assumendo come incognite o le H_i (se $H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$ è l'elementare lineare), o le distanze W_i (variabili) da un punto *fisso* O al triedro principale (mobile) del sistema. I due sistemi di equazioni differenziali così ottenute godono di tali proprietà analitiche che si possono chiamare *aggiunti* l'uno dell'altro. E, come esistono sistemi tripli ortogonali (quelli con una famiglia di superficie a curvatura costante) per cui $H_1^2 + cH_2^2 = \text{cost.}$ ($c = \text{cost.}$), l'A. si domanda se esistono sistemi per cui $W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost.}$ (o più generalmente $\sum_1^3 h_i W_i^2 = \text{cost.}$ [$h_i = \text{cost.}$]). Studia tali sistemi ed i sistemi ad essi paralleli (cioè trasformati di Combescure, cioè con le stesse *rotazioni*) e dà i relativi teoremi di esistenza. Una particolare classe di questi sistemi contiene una famiglia di superficie (del tipo sopra citato), per cui è costante il rapporto delle distanze da un punto fisso ai due piani principali; le loro traiettorie ortogonali sono piane. Trova poi che i sistemi studiati e quelli ad essi paralleli sono sempre formati di tre famiglie di superficie, ciascuna delle quali, come altre citate poco sopra, sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti da opportune traiettorie isogonali delle linee di curvature. Di più *con sole derivazioni* si definiscono delle *trasformazioni* che fanno passare da uno dei sistemi studiati a un sistema parallelo; si trovano altre *trasformazioni analoghe a quelle di Bäcklund e di Lie*, si definisce qualche *trasformazioni del tipo di Ribaucour*. Ci è impossibile riassumere tutti i legami scoperti dal Bianchi tra queste teorie e quella delle congruenze pseudosferiche e dei sistemi obliqui, che il Bianchi chiama di Weingarten, di cui parleremo ben presto e le generalizzazioni che se ne possono dare corrispondenti alle possibili generalizzazioni di questi ultimi [1].

---

[1] Dei sistemi tripli ortogonali l'A. tratta anche in « Ann. de la Fac. de Toulouse » (11, H.) in cui parla dei risultati conseguiti in A. M. (2) 13 e 19 e dei sistemi tripli ortogonali, che posseggono una famiglia di superficie, che si ottengono da una particolare superficie della stessa famiglia con un moto elicoidale o con un gruppo di trarformazioni conformi.

Si debbono poi ricordare i lavori in R. L. (5) vol. 24_2, 25_1, 26_2 ed in A. M. (3) vol. 27 e 28, che studiano le *trasformazioni di Ribaucour* per i sistemi tripli ortogonali. Vi si dimostra che una costruzione data da RIBAUCOUR esaurisce tutte le trasformazioni di questo tipo; e che, se le superficie di una famiglia di un sistema triplo ortogonale si ottengono con trasformazioni di RIBAUCOUR dalle superficie di una famiglia di un altro sistema triplo ortogonale, allora anche le superficie delle altre due famiglie del primo sistema si ottengono con trasformazioni di RIBAUCOUR dalle superficie omologhe del secondo ([1]). Tali trasformazioni (che si compongono di trasformazioni parallele e di inversioni per raggi rettori reciproci) si possono riguardare come nuovi enti geometrici, mentre le trasformazioni analoghe per le superficie isolate si ottengono dalle trasformazioni asintotiche mediante la trasformazione di contatto di rette in sfere. Ciononostante *il Bianchi dimostra anche per queste trasformazioni più generali un teorema di permutabilità,* che enuncia in forma molteplice. E sono numerosi e importanti i casi particolari che vengono studiati: i sistemi tripli ortogonali *simmetrici* (le cui rotazioni β soddisfano alle $\beta_{ik} = \beta_{ki}$), certi sistemi Q che sono una generalizzazione delle famiglie di LAMÉ formate di superficie con la stessa curvatura costante, ecc. ecc. Per ciascuno di questi sistemi il teorema di permutabilità acquista una forma più precisa, come avviene del teorema analogo relativo alle trasformazioni asintotiche delle superficie pseudosferiche e loro generalizzazioni. L'A. tratta i problemi analoghi negli spazii a curvatura costante, il caso particolare delle famiglie di LAMÉ formate con superficie parallele: ciò che si collega alle Memorie, di cui parleremo più tardi, sul rotolamento di superficie applicabili e sulle trasformazioni di DARBOUX delle superficie isoterme. *E i metodi che servono in questi studii si possono applicare anche alle superficie isolate,* quando siano prefissate alcune proprietà dell'elemento lineare riferito alle linee di curvatura. Si trovano così in R. L. 5, 25_1 molti risultati nuovi, e insieme *nuove classi di superficie e di ipersuperficie per cui si può costruire una teoria di trasformazione* (per inviluppi di sfere) analoga a quella di DARBOUX per le superficie isoterme.

Così in « Comptes Rendus », 170, considera per l'elemento lineare $H_1^2du_1^2 + H_2^2du_2^2$ di una superficie riferita alle linee di curvatura le *rotazioni* $\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}$, che sono uguali per la superficie e per la sua immagine sfe-

([1]) Ogni coppia di punti A_1, A_2 omologhi nei due sistemi determina quindi tre sfere tangenti in A_1, A_2 rispettivamente ad una superficie di ciascuna delle tre famiglie di LAMÉ. I loro *tre* centri descrivono, al variare dei punti A, tre sistemi tripli coniugati.

rica. E studia il caso che per le rotazioni β, β' di due superficie S, S' valgano le $\beta_{ik} = \beta'_{ki}$.

Trova molti casi di tali coppie di superficie (a linee di curvature *associate*): alcune si collegano alla teoria delle superficie pseudosferiche, alle falde focali di una congruenza di GUICHARD, ecc. Anche per tali coppie di superficie stabilisce *una teoria di trasformazione.*

Altri sistemi di superficie. — Analoghi alle famiglie di LAMÉ formate con superficie a curvatura costante sono altri notevoli sistemi di superficie, che il BIANCHI ha scoperto con metodo geniale, che sarà senza dubbio fecondo anche in altri Capitoli della Geometria differenziale. Prescindendo da una nota in R. L. 5, 20_1. [1] sono da ricordarsi insieme le Memorie di A. M. (3) 18 e 19, R. L. 5, 21_1, M. XL 3, 18. Da una *superficie pseudosferica* S *si può passare a un' altra superficie pseudosferica* infinitamente vicina in tre modi specialmente notevoli:

1°) Col metodo di WEINGARTEN si può passare ad una superficie pseudosferica infinitamente vicina di una stessa famiglia di LAMÉ, che le corrisponde perciò con conservazione delle asintotiche (e del loro arco) e delle linee di curvatura;

2°) si può deformare S (pensata flessibile e inestendibile) in modo che ogni punto descriva un segmento infinitesimo parallelo alla normale nel punto omologo di una superficie S' trasformata di S mediante una trasformazione asintotica (di BÄCKLUND) B_σ. Tali segmenti fòrmano con S un angolo costante σ, cioè la deformazione è *isogonale*;

3°) si può deformare S con una trasformazione infinitesima di BÄCKLUND. Supposto cioè p. es. che la curvatura di S valga -1, consideriamo S come dedotta da una S' (pure a curvatura -1) mediante una trasformazione B_σ di BÄCKLUND (cosicchè $\cos\sigma$ è la distanza di due punti omologhi di S, S'). E tra le ∞^1 trasformazioni di S' mediante una B_σ (una delle quali è la S) consideriamo quella S_1 infinitamente vicina ad S, che chiameremo trasformata di S

[1] In qnesta si dimostrano e completano alcune formole di WEINGARTEN, e si studiano i sistemi di superficie generati nel modo seguente. Sia S una superficie, su cui sia segnata una rete di curve u, v. Il BIANCHI cerca se essa si può deformare (generalmente *non* al modo di GAUSS) così che le curve u, v restino rigide (ma possa variare l'angolo da esse determinato) e ogni punto della S e delle superficie che se ne ottengono con tali trasformazioni si muova normalmente alla superficie su cui giace. Abbandonata poi soltanto questa ultima condizione, studia il caso in cui S sia un piano che scorra in sè stesso: in tal caso la rete è una rete di CEBICEF.

mediante la trasformazione infinitesima B_σ^ε (dedotta da B_σ). Anche qui le direzioni in cui si muovono i punti di S formano un angolo costante $\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)$ con S (ciò che ravvicina una B_σ^ε ad una trasformazione isogonale) (1).

La corrispondenza stabilita tra S ed S_1 non è però (come avveniva per le trasformazioni isogonali) una corrispondenza di applicabilità; invece, come nel primo tipo (di WEINGARTEN), su S, S_1 si corrispondono le asintotiche (con uguaglianza d'arco) e le linee di curvatura.

Applichiamo ora ad S una trasformazione infinitesima del primo tipo, alla superficie così ottenuta applichiamo di nuovo una tale trasformazione, e così via indefinitamente. Riusciremo così a provare per via intuitiva (proprio quella seguita inizialmente dal BIANCHI) l'esistenza dei sistemi tripli ortogonali di WEINGARTEN. Con lo stesso procedimento, applicato alle trasformazioni del secondo tipo, costruiremo i sistemi *isogonali* di superficie pseudosferiche, in cui le curve luogo di punti omologhi tagliano una di queste superficie sotto uno stesso angolo (anche variabile da una superficie all'altra) e stabiliscono tra tali superficie una corrispondenza d'applicabilità. Il BIANCHI dà *teoremi di esistenza* per tali sistemi, estende la teoria *delle trasformazioni di Bäcklund* (inclusa la trasformazione complementare). Notevole l'osservazione che una tale trasformazione (che tra due superficie pseudosferiche, una trasformata dell'altra, non dà una corrispondenza d'applicabilità) non conserva le traiettorie isogonali. Lo studio del come variano queste traiettorie in tali trasformazioni si riattacca a quella affinità di IVORY che, come vedremo, il BIANCHI ha saputo così genialmente sfruttare per le trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche, per le quali del resto l'A. prevede l'estendibilità anche delle ricerche ora riassunte. Senza ricordare altri risultati che ci è impossibile riassumere, accennerò solo alle estensioni in geometria non euclidea, allo studio dei sistemi isogonali con superficie a curvatura nulla sia euclidea che non euclidea; e ricorderò che il passaggio da una superficie pseudosferica alle altre di uno stesso sistema isogonale si può ridurre a un semplice movimento solo in un caso particolare, in cui tutte le superficie sono elicoidi.

Applicando lo stesso procedimento (con cui il BIANCHI ha così costruita in via intuitiva i sistemi di WEINGARTEN e i sistemi isogonali) alle trasformazioni infinitesimali del terzo tipo, il BIANCHI costruisce i sistemi che chiama

(1) In questa trasformazione e in quella isogonale corrispondente alla stessa trasformazione asintotica B_σ si hanno per ogni punto di S due spostamenti di uguale ampiezza *normali tra loro* e normali anche al raggio della corrispondente congruenza pseudosferica.

obliqui di Weingarten di superficie pseudosferiche. Le traiettorie di un punto tagliano una delle superficie sotto uno stesso angolo $\frac{\pi}{2} - \sigma$ [1]; se questo angolo è lo stesso per tutte le superficie, si ottengono sistemi che il BIANCHI indica con Ω_σ. Il caso *elementare* di tali sistemi è dato dalle ∞^1 superficie pseudosferiche S trasformate di una S' pure pseudosferica mediante le trasformazioni asintotiche B_σ; in tal caso le traiettorie di un punto di S sono cerchi di raggio $\cos\sigma$. Per i sistemi qui studiati il BIANCHI, oltre a dimostrare con rigore i *teoremi di esistenza*, estende *la teoria delle trasformazioni di Bäcklund e il teorema di permutabilità.* E in R. L. (5), 21_2, 22_1, 22_2 si dimostra *che questi studii si possono estendere alle più volte citate superficie per cui* $K = -(U + V)^{-2}$. Molto notevole il passaggio dai sistemi di WEINGARTEN negli spazi a curvatura costante ai sistemi Ω_σ mediante l'uso di trasformazioni di LIE e di quella trasformazione involutoria (di cui parleremo più avanti) che il BIANCHI ha scoperto e chiamato *coniugio in deformazione.* Per i sistemi Ω_σ euclidei le traiettorie dei singoli punti sono *curve di Bertrand*, e le *normali alle superficie pseudosferiche di un tale sistema lungo una di esse sono applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda;* per questa via il BIANCHI avrebbe potuto giungere *alle trasformazioni di queste superficie* (di cui discorriamo più avanti). E i metodi qui riassunti possono condurre a nuovi enti geometrici, *a cui si può applicare la teoria delle trasformazioni di Bäcklund.* Così p. es. applichiamo a un sistema triplo ortogonale di WEINGARTEN una trasformazione *infinitesima* del BÄCKLUND, ripetendo, come sopra, infinite volte un tale procedimento: otterremo così certi sistemi Ω di ∞^1 famiglie di LAMÉ di superficie pseudosferiche: un punto dello spazio genera una curva di BERTRAND, una traiettoria ortogonale della famiglia iniziale descrive superficie che contengono ∞^1 geodetiche di BERTRAND; *per le quali superficie è possibile dunque dare una teoria di trasformazione.* Se invece che da un sistema di WEINGARTEN, fossimo partiti da un sistema Ω_{σ_1}, applicando le trasformazioni infinitamente corrispondenti a uno stesso angolo σ_2, avremmo ottenuto un sistema $\Omega_{\sigma_1\sigma_2}$ di ∞^2 superficie pseudosferiche. Una traiettoria del primitivo sistema avrebbe descritto una superficie $\Phi_{\sigma_1\sigma_2}$, contenente due famiglie di curve di BERTRAND, tali che le due curve, uscenti da uno stesso punto d'una superficie, hanno comune il piano osculatore delle loro coniugate. A queste superficie *si possono naturalmente estendere le tras-*

[1] Le superficie si corrispondono con conservazione delle asintotiche (e dei loro archi) e delle linee di curvatura.

formazioni studiate dal Bianchi; si possono studiare sistemi $\Phi_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$ formati con tali superficie ecc. ecc.; e naturalmente si trovano nuove relazioni con le deformate dell' iperboloide rotondo.

Ricerche di geometria non euclidea. — Di alcune abbiamo già parlato incidentalmente. I primi lavori in questo indirizzo sono in M. L. 4, 4 (1) (se si trascura una nota in R. L. 3, 2 sulle superficie di rotazione non euclidee). In questi studii si sviluppa per la prima volta completamente la teoria delle superficie negli spazii a curvatura costante, si estende la teoria dei sistemi tripli ortogonali con una famiglia di superficie a curvatura costante in detti spazii, e si studiano in questi spazii le superficie ad area minima (dimostrandone la deformabilità con conservazione dei raggi di curvatura), deducendone, con una rappresentanza conforme, nuovi risultati per nuove classi *di superficie isoterme euclidee.* Nello spazio euclideo *indefinito* (di elemento lineare $dx^2+dy^2-dz^2$) (in R. L. 4, 4_2 e M. L. 4, 5) è sviluppata pure sia la *teoria delle superficie a curvatura costante e delle loro trasformazioni,* sia quella delle *superficie ad area minima.* In questi lavori vi sono due idee *estremamente notevoli.* La prima consiste nella deduzione della trasformazione di BÄCKLUND dalla risoluzione del seguente semplicissimo problema: *Quando mai due equazioni* $z_x + t_y = F(z, t)$ *e* $z_y - t_x = \Phi(z, t)$ [oppure $z_x + t_x = F(z, t)$ e $z_y - t_y = \Phi(z, t)$] *hanno condizioni d'integrabilità del tipo* $z_{xx} + z_{yy} = \varphi(z)$ *e* $t_{xx} + t_{yy} = \psi(t)$ [oppure $z_{xy} = \varphi(z)$, $t_{xy} = \psi(t)$] *secondo che si considerano come incognite* la z o la t*?* Ed è importantissima l'applicazione che più tardi il BIANCHI farà dei risultati ottenuti *alla trasformazione delle superficie euclidee applicabili sul paraboloide.* L'altra idea che si sviluppa in queste Memorie è una singolare generalizzazione del problema di PLATEAU. Come è noto, lo SCHWARZ, studiando quel particolare problema di PLATEAU che consiste nel determinare una superficie ad area minima passante per un dato contorno formato da segmenti di retta (trascurando qui per brevità il caso di piani di simmetria prefissati), e la sua riduzione al problema della rappresentazione conforme di un poligono *sferico* sul piano, ha trovato curiosissime superficie ad area minima in relazione coi gruppi finiti discontinui dei poliedri regolari.

(1) Della stessa epoca è una Nota in cui la trasformazione asintotica di una superficie pseudosferica non euclidea è trovata, partendo da considerazioni analitiche affatto analoghe a quelle del BÄCKLUND stesso, e un'altra in cui si dimostra che l'equazione del CAYLEY per una superficie può avere una soluzione invariante per tutte le deformazioni della superficie stessa, solo se questa è di rotazione.

Nella geometria euclidea indefinita il problema analogo si riduce similmente a quello della rappresentazione conforme di un poligono *pseudosferico* sul piano. L'A. perviene così alla rappresentazione di larghe classi di gruppi fuchsiani mediante superficie, che nella metrica non euclidea sono ad area minima, e i cui punti hanno coordinate esprimibili mediante funzioni zetafuchsiane.

Si occupano pure di geometria non euclidea la nota di T. (30) e la Memoria in A. M. (2) 24, in cui si determinano *le superficie non euclidee a curvatura nulla*. Per lo spazio iperbolico egli trova: Consideriamo i cerchi che incontrano il piano della variabile $x+iy$ in due punti che si corrispondono in una trasformazioni conforme diretta. Le superficie ortogonali sono tutte e sole le superficie a curvatura nulla nella geometria iperbolica $\left(\text{di elemento lineare } \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}\right)$. Per lo spazio ellittico a curvatura $+1$, dimostra che le superficie a curvatura nulla sono superficie di scorrimento generate da due curve, l'una a torsione $+1$, l'altra a torsione -1, che hanno a comune un punto e il relativo piano osculatore. Oltre a molti studii relativi alle loro evolute, alle superficie rigate, alle curve, trova che *la ricerca delle famiglie di Lamé formate da tali superficie a curvatura nulla equivale a quella delle coppie di superficie pseudosferiche euclidee ed estende sia a tali superficie che a tali famiglie di Lamé la teoria della trasformazione.*

In R. L. 5, 21_1 dimostra che le superficie cerchiate euclidee ad area minima di RIEMANN in una rappresentazione conforme dello spazio euclideo su uno spazio non euclideo diventano semplicemente il luogo delle binormali ad una certa curva di torsione costante.

In A. M. 3, 10 studia le congruenze non euclidee di rette di data prima falda focale (che riferisce alle linee di curvature ed alle asintotiche). Generalizza le congruenze pseudosferiche, le congruenze di THIBAUT con falde ad area minima e le loro relazioni con le deformate del paraboloide rotondo, le congruenze di GUICHARD, dimostrando che ogni tale congruenza è determinata da una coppia di superficie pseudosferiche euclidee e che un sistema triplo ortogonale di cui una famiglia è formata con superficie a curvatura nulla ha le altre due famiglie formate con superficie di GUICHARD. È impossibile riassumere i tanti risultati ottenuti: mi basterà ricordare che egli ha scoperto le superficie (analoghe a quelle euclidee per cui $K=-(U+V)^{-2}$) che sono falde focali di una congruenza W, quando in punti omologhi le due falde hanno uguali curvature. Ecco così trovata *una nuova classe di superficie, a cui si può estendere la teoria delle trasformazioni del Bianchi.*

Di singolare importanza per le applicazioni alla geometria euclidea sono alcuni lavori in T. 38 [1903], R. L. (5), 12_1 e 13_1. Le due immagini di CLIFFORD d'una superficie isoterma Σ dello spazio ellittico sono le immagini sferiche di due superficie euclidee S, $\bar{S}$ applicabili con conservazione della curvatura media; e viceversa. Data Σ le S, $\bar{S}$ si costruiscono con quadrature; altrettanto avviene per le S, $\bar{S}$ quando è data Σ. Se Σ è ad area minima, le S, $\bar{S}$ sono a curvatura media costante trasformate di HAZZIDAKIS. Alle trasformazioni asintotiche (di THIBAUT) per tali superficie ad area minima *corrispondono quelle trasformazioni delle* S, $\bar{S}$, che il BIANCHI ha dedotto (cfr. più avanti) in altro modo, *e che avrebbe così potuto,* forse più semplicemente, *trovare per questa via.* Se Σ è a curvatura media costante, altrettanto avviene per le S, $\bar{S}$ che sono trasformate di LIE-BONNET. Si trovano così nuove relazioni tra trasformazioni già scoperte negli spazi euclidei e non euclidei. Altre relazioni si deducono da ciò che le *immagini sferiche delle asintotiche di due superficie pseudosferiche euclidee trasformate di Lie danno le immagini di Clifford delle asintotiche di una superficie a curvatura costante dello spazio ellittico.* Si dimostra anche che, *se un sistema coniugato di una superficie* S *si conserva coniugato in una deformazione finita della* S, *la sua immagine sferica coincide con l'immagine di Clifford delle asintotiche di una superficie* Σ *dello spazio ellittico e viceversa,* ecc. ecc.

Trova che *in generale* una superficie dello spazio ellittico è determinata dalle immagini di CLIFFORD delle sue asintotiche (naturalmente a meno di uno scorrimento). Di tutti questi teoremi l'A. fa numerose applicazioni alle *coppie di superficie euclidee applicabili* (p. es. nel caso che alle asintotiche di una corrisponda un sistema couiugato sull'altra, oppure nel caso che le normali in punti omologhi formino un angolo costante, ecc.) e scopre, tra l'altro, nuove proprietà per le superficie *euclidee* associate alle superficie a curvatura costante. Si studiano sia le congruenze di GUICHARD nello spazio ellittico, che le congruenze isotrope, e le isotrope normali (necessariamente a una superficie di curvatura nulla). E infine si ridimostrano direttamente molti dei risultati così ottenuti per la geometria euclidea.

Studii di geometria iperspaziale. — In R. L. 5, 7_2 dimostra in modo semplice l'applicabilità di due spazi con una stessa curvatura costante; in R. L. 5, 11_2 dimostra l'identità che lega le derivate covarianti dei simboli a quattro indici di RIEMANN, deducendone una semplice dimostrazione di un teorema di SCHUR; in R. L. 5, 25_1 prova che gli spazii a tre dimensioni che hanno costanti le curvature principali, e le cui congruenze principali sono normali, appartengono a classi di spazi, già determinati dal BIANCHI, che ammettono un gruppo continuo di movimenti. Questi studii sono generalizzati in R. L. (5), 25_1 e 26_1, in cui si studiano le corrispondenze tra due S_n di RIEMANN, tali che le congruenze principali siano normali e i moduli principali siano costanti. (Sono principali le n congruenze di linee, generalmente determinate in modo univoco, che si conservano ortogonali nella corrispondenza; e principali sono i corrispondenti moduli di dilatazione lineare).

Se $n = 2$, tra due S_n, cioè tra due S_2, si può sempre porre una corrispondenza siffatta; e, studiando il caso di due piani o di due sfere uguali, si trovano *relazioni con le congruenze pseudosferiche.* Più notevole lo studio di due S_3, specialmente nel caso che essi siano a curvatura costante. Anche per tali corrispondenze esiste *una teoria di trasformazione e un teorema di permutabilità* in intima connessione *con le trasformazione di Ribaucour negli spazi a curvatura costante.*

Un caso particolare di questi studii conduce ai sistemi di WEINGARTEN, e anche a quelli di flessione costante. Notevoli risultati sono ottenuti con l'ausilio delle geometrie non euclidee.

Infine nei « Rend. della R. Accad. di Napoli », 3, 28 [1922] e nel Vol. I, del « Boll. dell'Un. Matem. Ital. », il BIANCHI studia il parallelismo di LEVI-CIVITA, definendo per un sistema di direzioni t uscenti dai punti di una curva Γ un altro sistema di direzioni, che dice *associato* alle t (indeterminato se le t sono parallele, e coincidente con le normali principali di Γ, se le t sono tangenti a Γ). Notevoli le applicazioni, specialmente quelle alle reti di CEBICEF.

Sul metodo di Weingarten nel problema dell'applicabilità. — Sono assai notevoli le ricerche in R. L. 5, 5_1, A. M. (2), 24 e (3), 2 relative a questo metodo e alle sue generalizzazioni non euclidee. Senza purtroppo poter riassumere le osservazioni generali sulle superficie Σ che con tale metodo si deducono dalle superficie applicabili su una superficie di rotazione, ricordiamo che, se questa è complementare di una pseudosferica, le Σ corrispondenti possono essere di tre tipi; per il tipo ellittico e iperbolico le congruenze delle normali alla Σ è tale che le sfere descritte come diametro sul segmento terminato ai fuochi di una sua retta tagliano una sfera fissa F ortogonalmente oppure secondo un cerchio massimo; se la Σ è parabolica, tali sfere passano per un punto fisso F. Le congruenze (anche non normali) che godono di questa proprietà, sono cicliche. E i cerchi del corrispondente sistema ciclico o tagliano la sfera F ortogonalmente o in due punti diametralmente opposti, oppure passano per un punto F. Le superficie ortogonali ai cerchi sono Σ paraboliche.

Se ne trae una costruzione, meravigliosa per semplicità, delle Σ non paraboliche, partendo dalle paraboliche; la costruzione delle quali si riconduce *alla trasformazione complementare delle superficie pseudosferiche.* Si dimostra l'esistenza di *famiglie di Lamé composte di superficie paraboliche.*

Nelle applicazioni del metodo di WEINGARTEN il BIANCHI osserva che la ricerca delle classi di superficie applicabili *euclidee* si può anche ridurre a quella delle superficie *non euclidee* che soddisfano a un'equazione analoga a quella di WEINGARTEN. E lo stesso A. osserva che tale risultato non dice nulla di essenzialmente nuovo. Ma il suo genio geometrico gli permette di dedurre magnifici risultati anche da un'osservazione quasi insignificante: così p. es., *dalle superficie non euclidee a curvatura nulla* deduce quelle superficie applicabili dello spazio euclideo, che sono evolute delle superficie W di WEINGARTEN, e complementari delle superficie applicabili sul parabolico rotondo [1]. Altre superficie euclidee deduce dalle superficie non euclidee ad area minima.

E viceversa da certe superficie euclidee deduce le superficie dello spazio iperbolico (a curvatura -1) per cui la somma delle curvature principali vale 2. E ne trova notevoli proprietà geometriche, partendo dal teorema che in tale spazio solo la sfera e le superficie per cui la curvatura media vale ± 2 sono in corrispondenza conforme con l'immagine sferica (ottenuta al modo di GAUSS, ma usando delle parallele di LOBACEVSKIJ). Con una rappresentazione conforme si trovano le *superficie euclidee S* caratterizzate dalla seguente proprietà (analoga a quella già citata per le superficie euclidee immagini di quelle a curvatura nulla nello spazio iperbolico): tiriamo i cerchi ortogonali alla S e ad un certo piano; delle *due* rappresentazioni così ottenute della S sul piano una è conforme.

Le superficie applicabili sulle quadriche. — Una parte cospicua di lavori del BIANCHI tratta di queste superficie; e trae l'inizio dai celebri teoremi di GUICHARD per le quadriche rotonde (nonostante che, come abbiamo già visto,

---

(1) Inspirata dai metodi di WEINGARTEN è pure la Memoria sui sistemi ciclici negli « Ann. de l'École Norm. Supér. » 3, 19. Vi si studiano i sistemi ciclici, i cui piani sono tangenti ad una sfera. Si prova che le superficie normali agli assi (che hanno l'immagine sferica delle linee di curvatura a comune con le superficie a curvatura costante) soddisfano a un'equazione di AMPÈRE, a cui corrisponde, per i risultati di WEINGARTEN, una classe di superficie applicabili, le quali, o sono complementari d'una superficie a curvatura costante, o sono applicabili su una certa quadrica tangente all'assoluto. La costruzione *di queste superficie applicabili su quadriche* è eseguita con elegante metodo geometrico partendo dalle famiglie di LAMÉ composte con superficie a curvatura costante.

il BIANCHI avrebbe potuto giungere coi suoi metodi e per vie molteplici e semplicissime agli stessi risultati). Cominciamo dal ricordare alcune definizioni. Sia S una superficie (supposta flessibile e inestendibile). Da ogni suo punto A esca una retta r (ogni suo punto O sia centro di una sfera r); quando la superficie si flette, ogni elemento di S trascini invariabilmente connessa la retta o la sfera r. Noi diremo che la congruenza delle rette (o delle sfere) r ha subito una flessione o deformazione (al modo di BELTRAMI). Se la retta (non la sfera), anzichè uscire da A giacesse nel corrispondente piano tangente α, parleremmo di una *deformazione di Ribaucour* [1]. Il teorema di GUICHARD afferma che, deformando (al modo di BELTRAMI) la congruenza delle rette che proiettano dai punti di una quadrica rotonda S uno dei suoi fuochi, la congruenza resta normale ad una superficie di curvatura media costante (che è il luogo delle nuove posizioni del fuoco considerato, se questo è a distanza finita; se il fuoco è a distanza infinita, come può avvenire per il paraboloide rotondo, fra le superficie normali ai raggi vi è una superficie ad area minima). Ogni deformata della quadrica dà perciò due tali superficie corrispondenti ai due fuochi; e queste due superficie si possono ottenere anche come inviluppo della congruenza di sfere ottenuta deformando una congruenza di sfere aventi il centro sulla quadrica considerata. Si noti poi che le superficie a curvatura media costante sono parallele a superficie di curvatura (totale) costante; esistono perciò *due* tali superficie reali per es. per ogni deformata dell'ellissoide allungato rotondo; ciò che ha fatto subito prevedere al BIANCHI che da questi teoremi si potevano dedurre trasformazioni *reali* anche per le superficie a curvatura costante positiva. Questi teoremi, oltre agli studii del BIANCHI, hanno provocato moltissime ricerche (specialmente del DARBOUX e dello stesso GUICHARD) in varii indirizzi:

1°) Studiare in generale gli inviluppi dei sistemi di sfere conformi di RIBAUCOUR, cioè di quei sistemi che, come i precedenti, rappresentano le due falde dell'inviluppo conformemente l'una sull'altra con conservazione delle linee di curvature. Ne è sorta una *teoria di trasformazioni per le superficie isoterme* con applicazioni alle *superficie applicabili su quadriche* (DARBOUX, BIANCHI).

---

[1] Se la retta r fosse invece in posizione generica rispetto all'elemento (A, α) che la trascina con sè, il BIANCHI in R. L. 5, 11_1 dimostra che, se tale retta r genera una congruenza che resta normale qualunque flessione sia data ad S, allora S è applicabile su una superficie S_0 di rotazione. Una congruenza siffatta è data p. es. dalle ∞^2 posizione dell'asse di S_0 quando S_0 rotola sulla S.

2°) Studiare in generale le deformazioni al modo di BELTRAMI o di RIBAUCOUR delle congruenze di rette, invertire i teoremi di GUICHARD, studiare le trasformazioni generali delle superficie applicabili su quadriche, e scoprirne le relazioni con trasformazioni asintotiche (BIANCHI).

3°) Si osserva che p. es. un teorema di GUICHARD si può enunciare così: Un ellissoide rotondo allungato Q *rotoli* su una superficie applicabile S; se F ne è un fuoco, le ∞^2 posizioni di F formano una superficie a curvatura media costante, che perciò si potrà chiamare superficie di *rotolamento*. Sorge spontanea l'idea di sostituire alle Q, S due superficie applicabili qualunque e al fuoco un qualsiasi punto F invariabilmente legato a Q, studiando poi la superficie di *rotolamento* così generata. Se al punto F sostituiamo un piano π, o una retta r legata a Q, otterremo un inviluppo o una congruenza di *rotolamento* per cui S sarà chiamata la superficie di *appoggio*. Ecco così sorgere la teoria degli enti di rotolamento (BIANCHI).

Noi considereremo separatamente questi tre indirizzi di studii, nonostante che essi siano intimamente connessi tra loro. Ma anzitutto dovremo parlare di una geniale scoperta del BIANCHI: il *coniugio in deformazione* (R. L. 12_1 [1903]). Due superficie si dicono coniugate in deformazione se è stabilita tra i loro punti una corrispondenza che conserva le asintotiche virtuali (cioè le linee che con una opportuna flessione della superficie possono diventare asintotiche). È necessario e sufficiente a tal fine che la corrispondenza conservi asintotiche e geodetiche; e in tal caso i problemi delle flessioni per l'una o per l'altra delle due superficie sono equivalenti. Le due superficie sono applicabili su due quadriche omofocali che sono pure coniugate in deformazione.

E voglio anche ricordare un altro teorema in R. L. 5, 22_2, della cui grande importanza per altri campi della geometria differenziale (per il problema della deformazione proiettiva) forse neanche lo stesso A. ebbe un chiaro concetto. Il sistema coniugato u, v permanente su una superficie applicabile su una quadrica non solo è isotermo, ma è R; cioè le tangenti sia alle linee u che alle linee v generano due congruenze W.

Cominciando dalle ricerche del secondo dei tipi sopra citati, esse comprendono moltissimi lavori in R. L. (5) 8_1, 8_2, 9_2, 14_1, 14_2, 16_1, 18_1, 20_1, 23_1, 23_2, in *Comptes Rendus* 142 e 143, in T. 38 [1903], P. 22 [1906], in A. M. (3) 3, 4, 5, 6, 9, 12, 23, in M. XL (3) 14 [1905], in « Amer. Math. Society » Bull. 23 e in « Trans. of the Amer. Math. Soc. », 16 e infine in « Mém. pres. par divers sav. à l'Académ. des Sciences de l'Inst. de France », (Paris [1909] 34).

L'A. comincia a chiedersi quando per *ogni* deformata (al modo di BELTRAMI) di una congruenza di rette normale esista *una* superficie Σ normale alla congruenza, i cui raggi di curvatura sono legati sempre da una *stessa* relaziona. E deve premettere una trattazione speciale per il caso che tutte queste congruenze ottenute per deformazione abbiano un sistema di sviluppabili formato di cilindri. Il risultato ottenuto è che, oltre ai casi segnalati dal GUICHARD, ve ne sono altri pochi relativi al caso che Σ sia pseudosferica. Questo studio è esteso sia agli spazii non euclidei, sia alla deformazione al modo di RIBAUCOUR (la quale porta a qualche tipo assenzialmente nuovo). Dopo ciò il BIANCHI cerca, invertendo i teoremi di GUICHARD, di risalire da una superficie a curvatura media o totale costante alle superficie applicabili su una quadrica rotonda di cui parlano i teoremi di GUICHARD o alle altre superficie, di cui qui sopra è stato fatto rapido cenno. Per le deformate di RIBAUCOUR sono estremamente notevoli le relazioni che si scoprono con le famiglie di LAMÉ di superficie a curvatura costante. Per ciò che riguarda le deformazioni al modo di BELTRAMI, cioè l'inversione vera e propria dei teoremi di GUICHARD, le gravissime difficoltà analitiche furono vinte con la notevole scoperta che le linee di curvatura delle due superficie a curvatura costante corrispondono al sistema coniugato permanente sulla deformata della corrispondenza quadrica rotonda e che le asintotiche delle superficie a curvatura costante si corrispondono tra loro. Fu allora ben facile risalire da una superficie a curvatura costante positiva ad una deformata di un ellissoide allungato rotondo e da questo ad una nuova superficie a curvatura costante positiva, *reale* se la superficie data era *reale*.

La parte analitica della trattazione era grandemente facilitata dai teoremi sui sistemi ciclici, e si trova che le trasformazioni così scoperte sono prodotto di trasformazioni asintotiche immaginarie. Viene spontanea la domanda se queste trasformazioni possono estendersi alle superficie applicabili su quadriche rotonde (da cui esse hanno origine) e ad essa il BIANCHI risponde affermativamente in un modo assai semplice, che gli viene suggerito dal risultato precedente. Siano S_0, S due superficie complementari applicabili p. es. sullo stesso ellissoide rotondo; le due coppie di superficie a curvatura costante, che se ne deducono col metodo di GUICHARD formano una quaterna del teorema di permutabilità. Alle trasformazioni asintotiche di tale quaterna corrispondono trasformazioni asintotiche per S_0. Le deformate dell'iperbolico rotondo si possono porre in relazione con *le equazioni di Moutard con un gruppo quadratico di soluzioni*, cosicchè la loro ricerca equivale a quella, già studiata dal BIANCHI, delle superficie di VOSS nello spazio ellittico.

Il primo passo alle trasformazioni per le superficie applicabili su quadriche non rotonde è stato fatto per le deformate del paraboloide con metodi affatto distinti, sfruttando cioè il sistema coniugato permanente nel modo già tenuto dal CALAPSO. Le equazioni a cui giunge sono affatto simili a quelle da lui trovate per le superficie a curvatura costante nella metrica euclidea indefinita. Giunge così a trasformazioni definite però soltanto in modo analitico. Ma, nonostante i bei teoremi ottenuti sui sistemi ciclici inviluppanti un paraboloide (la cui ricerca si dimostra potersi ricondurre alla composizione di trasformazioni di BÄCKLUND nello spazio euclideo definito o indefinito), lo spirito geometrico del BIANCHI non poteva accontentarsi dei risultati ottenuti. E, cominciando dall'esame di alcuni casi particolari relativi a paraboloidi tangenti all'assoluto, e confrontando i risultati ottenuti col suo metodo con quelli che col metodo di WEINGARTEN si deducono dalla teoria delle superficie pseudosferiche degli spazii euclideo ed ellittico, riesce a provare che *anche le nuove trasformazioni sono trasformazioni asintotiche!*

E taccio della scoperta di congruenze W le cui falde focali sono applicabili su quadriche distinte. Mancavano ora soltanto le quadriche generali a centro. Il BIANCHI aveva ben osservato le trasformazioni che per esse si potevano dedurre dai teoremi di DARBOUX (di cui parleremo più tardi); ma tali trasformazioni dovettero subito apparire a Lui non essere quelle trasformazioni più semplici, che avrebbero costituito la base della teoria, e che ancora erano ignote. Egli non dubitava che queste trasformazioni esistessero, e che fossero trasformazioni asintotiche, come nei casi particolari già studiati da Lui. E, partendo appunto dai risultati già acquisiti, egli riesce ad intuire e dimostrare quanto segue. Ogni superficie S, applicabile su una quadrica Q, è falda focale di ∞^2 congruenze W, di cui la seconda falda è ancora applicabile su Q. Deformiamo S fino a sovrapporla a Q, tenendo fissa la prima delle costanti da cui dipende la congruenza. Questa resterà deformata (è indifferente dire se al modo di BELTRAMI o di RIBAUCOUR). E i suoi secondi fuochi si disporranno su una quadrica Q_1 omofocale a Q; anzi, al variare della seconda costante da cui dipende la congruenza, essi descriveranno tutta la Q_1; gli ∞^1 punti di Q_1 che corrispondono ad un punto A di Q, saranno sulla conica intersezione di Q_1 col piano tangente in A alla Q. E le punteggiate descritte su queste ∞^2 coniche di Q_1 saranno proiettivamente identiche, il che spiega come nella determinazione di queste ∞^1 congruenze si presenti una equazione di RICCATI.

Costruite così queste congruenze W di cui S era prima falda focale, era *difficilissimo* provare che anche la seconda falda focale era applicabile su Q (1).

(1) Come già nel caso delle superficie pseudosferiche, la corrispondenza definita dai raggi della congruenza non è una corrispondenza di applicabilità.

Al solito *questa gravissima difficoltà è superata con una superba intuizione geometrica* relativa alla corrispondenza che su Q, Q_1 era l'immagine della corrispondenza per applicabilità tra le citate due falde focali. *Ebbene questa corrispondenza tra* Q, Q_1 *non è che una affinità* (la affinità di IVORY)! *La teoria delle trasformazioni asintotiche e del teorema di permutabilità* può raggiungere ora l'assetto definitivo anche *per le superficie applicabili su quadriche.* Vi si aggiunge il teorema *che i sistemi coniugati persistenti* (le linee di curvatura nel caso di superficie a curvatura costante) *si corrispondono su due tali superficie* S, S' *trasformate asintotiche l'una dell'altra* e l'osservazione che, se S si deforma conservando rigida una sua asintotica, anche la S' si deforma conservando rigida l'asintotica corrispondenza. Cosicchè *tale trasformazione si può concepire come una trasformazione di curve* (le asintotiche delle superficie considerate). Cito soltanto gli studii relativi al caso singolare, al caso che Q_1 si riduca a una conica focale, quelli per le deformate *rigate* dell'iperboloide rotondo, e del paraboloide iperbolico; così ricordo soltanto che in R. L. 27_2 ed A. M. 3, 26 il BIANCHI *scopre nuovi enti, a cui si possono applicare le sue trasformazioni* (le congruenze normali di rette formate da ∞^1 rigate ciascuna delle quali è applicabile su un iperboloide rotondo). Le trasformazioni dedotte dal metodo di DARBOUX e almeno la prima classe delle trasformazioni scoperte da GUICHARD sono prodotti di *trasformazioni asintotiche,* le quali appaiono perciò come il più semplice e il fondamentale elemento della teoria. E taccio delle distinzioni tra superficie reali o complesse, tra *applicabilità effettive od ideali,* che il BIANCHI ha studiato con tanta cura! Il BIANCHI inizia in R. L. 5, 23_1 ed A. M. 3, 23 uno studio (che non ha condotto a termine) sui sistemi tripli coniugati, di cui una delle famiglie è formata da superficie applicabili su quadriche su cui si corrispondono le asintotiche e i sistemi coniugati permanenti; questi studii sono l'estensione naturale al caso attuale delle famiglie di LAMÉ formate con superficie a curvatura costante. Così, a quanto io so, il BIANCHI si è accontentato di accennare alle possibili estensioni della teoria dei sistemi isogonali e dei sistemi obliqui di WEINGARTEN.

Ricorderò ancora che in R. L. 5, 23 il BIANCHI cerca le superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ applicabili tali che sia costante il rapporto delle distanze da un punto *fisso* O ad una coppia di punti omologhi. Trova che entrambe soddisfano ad una equazione di AMPÈRE, da cui, coi metodi di WEINGARTEN, si deduce una coppia di superficie applicabili su una quadrica a centro, e trasformate di COMBESCURE di due superficie S, $\overline{S}$ a curvatura costante positiva. Ad una inversione per raggi vettori reciproci di polo O, che porta Σ in una superficie dello stesso tipo, corrispondono per le S proprie le trasformazioni dedotte dai teoremi di GUICHARD. Il BIANCHI studia anche le *famiglie di Lamé formate con superficie* Σ.

Studii sulle superficie isoterme (R. L. 5, 13; A. M. (3), 11, 12). — Dimostra *il teorema di permutabilità* per le trasformazioni che DARBOUX ha trovato per le superficie isoterme, e che sono trasformazioni *conformi* di RIBAUCOUR. E approfondisce il caso delle superficie isoterme che il DARBOUX chiama *speciali*. Per ogni superficie S isoterma speciale con sole derivazioni si deducono tre trasformate di DARBOUX, che si dicono le superficie complementari di S. I piani dei cerchi normali in punti omologhi ad S ed ad una delle complementari individuano una superficie applicabile su una quadrica. Abbiamo già parlato delle trasformazioni, che con questo metodo si deducono per tali superficie. E sorvoliamo sui casi particolari studiati anche con l'ausilio della geometria non euclidea. Fondamentale è però *la scoperta di nuove trasformazioni* T (che valgono anche nel solo campo delle superficie speciali, e da cui si può di nuovo dedurre l'esistenza di quadriche coniugate in deformazioni) *e di trasformazioni ancora più generali*, che certo non avrebbe trovato senza l'ausilio della geometria non euclidea.

Studii sul rotolamento e sulle congruenze di sfere. — Questi sono importantissimi perchè servono a collegare insieme risultati del BIANCHI stesso con quelli di DARBOUX, CALAPSO, EISENHART, CALÒ, ecc. ed a completarli (sei note in R. L. (5), 23_1, 24_1, 24_2; P. 38 e 39; M, L. (5), 12; M. XL (3), 19 oltre ad una Memoria postuma edita dallo Zanichelli). Sia data una congruenza di sfere; la superficie S_0 sia il luogo dei centri, le superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ ne siano l'inviluppo; ne sia R il raggio funzione delle coordinate curvilinee u, v. Al deformarsi di S_0, senza mutare R, la congruenza si deforma. Lo studio di queste deformazioni porta ai teoremi di BELTRAMI e DUPIN sulle congruenze normali di rette. La ragione geometrica di queste relazioni tra congruenze di sfere e di rette sta in ciò che le rette congiungenti un punto di S_0 al punto omologo di Σ formano una congruenza normale; che (quando la congruenza di sfere si deforma nel modo citato) si deforma pure al modo di BELTRAMI. L'A. cerca poi quando esiste una flessione di S_0 tale che la congruenza di sfere si riduca a una congruenza di sfere passanti per un punto fisso A, o tangenti a un piano fisso (la determinazione di tali congruenze si riduce naturalmente alla equazione dell'applicabilità per S_0). Questo studio equivale a quello delle superficie e degli inviluppi di rotolamento. Se, flettendo S_0 in una superficie applicabile Q, le sfere vengono a passare per A, una delle falde del loro inviluppo si può generare come superficie di rotolamento, facendo rotolare Q (a cui A si immagina rigidamente connesso) sopra S_0. Una proprietà analoga vale se le sfere diventano tangenti ad un piano fisso. Mentre Q rotola su S_0, ad ogni istante il suo atto di movimento si riduce a una semplice rotazione; e naturalmente si deve considerare a parte il caso che Q ed S_0 siano rigate e quindi Q assuma solo ∞^1 posizioni.

Si trovano eleganti proprietà del sistema di linee che sulla superficie rotolante corrispondono alle linee di curvatura della superficie o dell'inviluppo di rotolamento. Data una superficie Σ si risolve il problema di trovare in quali modi essa si possa generare come superficie di rotolamento: nel caso che Σ sia una sfera o un piano si ritrovano alcune formole del CALÒ che ricorrono alla teoria delle funzioni di variabile complessa: il risultato, interpretato in geometria non euclidea, porta alle superficie (già citate) di curvatura media 2 nello spazio di curvatura -1. Ritrova i teoremi di GUICHARD sia cercando quando il sistema coniugato comune di S_0 e Q corrisponde a un sistema coniugato su Σ, sia cercando quando una congruenza di sfere di RIBAUCOUR (1) resta di RIBAUCOUR in tutte le flessioni della superficie dei centri S_0. Studia le congruenze di sfere di RIBAUCOUR, le riduce con trasformazioni di COMBESCURE (2) a semplicissimi tipi canonici, e ne trova importanti proprietà geometriche caratteristiche. Trova infine *nuove classi notevoli di superficie, con le quali si possono pure formare famiglie di Lamé*. Ritrova le *trasformazioni di Darboux per le superficie isoterme* dimostrando che la teoria di queste trasformazioni *equivale a considerare le superficie isoterme come superficie di rotolamento* (la superficie di appoggio essendo il luogo dei centri della congruenza di sfere che definisce la trasformazione, e le linee di curvatura delle superficie isoterme corrispondendo al sistema coniugato permanente, cioè coniugate sulla superficie d'appoggio e sulla rotolante). Tutte e sole le trasformate di COMBESCURE delle congruenze di sfere di DARBOUX restano congruenze di RIBAUCOUR per almeno una flessione della superficie dei centri.

---

(1) Una congruenza di sfere è di RIBAUCOUR, se si corrispondono le linee di curvatura delle due falde focali (le quali allora corrispondono necessariamente a un sistema coniugato sulla superficie luogo dei centri).

(2) Due congruenze di sfere sono trasformazioni di COMBESCURE, se le falde focali della prima hanno comune l'immagine sferica delle linee di curvatura con le falde focali dell'altra.

Non possiamo parlare di tante altre proprietà geometriche, nè dei risultati (che chiamerei quasi *duali*) per le superficie di EISENHART a rappresentazione sferica isoterma delle linee di curvatura. Alle generazioni per rotolamento delle superficie isoterme ed ai sistemi coniugati permanenti o ciclici (¹) di una quadrica si collegano certi elementi lineari sferici (R. L. 5, 17_1).

Per le congruenze (di rette) di rotolamento (²) l'A., oltre ad aver determinato quelle a sviluppamenti coincidenti, trova proprietà geometriche che le caratterizzano; e le pone in relazione con la teoria delle congruenze di sfere nel modo seguente. Ogni retta di una congruenza di rotolamento ha una simmetrica rispetto al piano tangente nel punto omologo della superficie di appoggio; la congruenza di queste rette simmetriche si dice *la simmetrica* della congruenza iniziale, e con questa ha comune una falda focale. Le altre due falde focali delle due congruenze costituiscono l'inviluppo di una congruenza di sfere coi centri sulla superficie d'appoggio. L'A. determina le congruenze di rotolamento a parametro medio costante, quelle per cui è costante l'angolo δ dei piani focali (che sono normali se δ è retto), e alcune classi di congruenze W di rotolamento. Trova che le sole congruenze che sono in infiniti modi di rotolamento sono le congruenze pseudosferiche e quelle generate dalle tangenti alle linee di curvatura (di un sistema) delle superficie di JOACHIMSTHAL (³), generate dal rotolamento di due superficie di PETERSON (⁴) applicabili. A questo indirizzo di studii appartiene la Memoria postuma in cui, oltre ad alcune estensioni non euclidee, si studiano negli spazii euclidei e non euclidei certe congruenze di sfere che rimangono di RIBAUCOUR per ∞^1 flessioni della superficie dei centri. Questa è una superficie di PETERSON, le falde

(¹) Così si chiama il sistema coniugato *reale* permanente di una superficie *reale* S in una sua deformazione *puramente immaginaria*, perchè esistono ∞^3 sistemi ciclici *reali* formati di cerchi posti sui piani tangenti ad S, tali che le superficie ad essi normali hanno per linee di curvatura quelle che corrispondono al dato sistema coniugato.

(²) A queste congruenze si riallaccia un bel teorema nei « Comptes Rendus », 176 e R. L. 5, 32_1. Se un quadrilatero $M_1M_2M_3M_4$ a *lati uguali* si deforma con la sola condizione che ognuno dei vertici descriva una superficie toccata dai due suoi lati che concorrono in quel vertice, la retta congiungente i punti medii delle diagonali descrive una congruenza normale W, mentre i lati descrivono congruenze che, in doppio modo, si possono considerare congruenze di rotolamento. Ogni congruenza normale W si può in ∞^2 modi generare col procedimento qui citato.

(³) Che hanno un sistema coniugato formato dalle sezioni della superficie coi piani passanti per una retta fissa (*asse*) e coi piani ad essa normali. Il BIANCHI ne trova notevoli proprietà.

(⁴) Che hanno un sistema di linee di curvatura in piani per l'asse, e l'altro su sfere col centro sull'asse.

focali sono superficie di JOACHIMSTHAL; e (per una conveniente flessione della superficie dei centri) una delle falde si riduce al proprio asse [1].

Due problemi del Bianchi. — Il primo consiste nel trovare *tutte le equazioni differenziali*, p. es. del tipo $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ [2], *le cui soluzioni sono superficie* $z = z(x, y)$ *isoterme*, cioè soddisfano anche all'equazione (del quarto ordine) caratteristica di queste superficie. Questo problema è stato risoluto dal BIANCHI in molti casi particolari. E altrettanto si può dire per il secondo che si può enunciare così: *Per quale delle precedenti equazioni avviene che con superficie, che le soddisfano, si può costruire una famiglia di Lamé* [3], per cui si possa scegliere ad arbitrio almeno una superficie iniziale (tra le superficie che soddisfano alla equazione considerata)? E, se noi ci inspiriamo ai metodi che in tanti casi il BIANCHI ha seguito nell'iniziare i suoi studii, possiamo trovare nel seguente modo una condizione *necessaria* (a cui deve soddisfare una tale equazione $f = 0$); la quale, quasi certamente, è anche *sufficiente*. Sia $z = z(x, y)$ una soluzione di $f = 0$. E sia εn la distanza tra tale superficie e una infinitamente vicina di una famiglia di LAMÉ ($\varepsilon =$ cost. infinitesima; n funzione di x, y). Sarà soddisfatta l'equazione del CAYLEY

$$0 = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{22} \\ 1 + p^2 & pq & 1 + q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix}.$$

Con n_{ik} indichiamo le derivate seconde, rispetto alle x, y, della n che in questo caso si possono sostituire alle derivate covarianti.

Le coordinate dei punti della superficie infinitamente vicina saranno con le abituali notazioni del BIANCHI:

$$x' = x + \varepsilon n X \qquad y' = y + \varepsilon n Y \qquad z' = z + \varepsilon n Z.$$

---

(1) Il BIANCHI trova anche la seguente proprietà delle congruenze di rotolamento: Se non si varia la superficie rotolante e si flette la superficie d'appoggio, i fuochi e i piani focali di una retta della congruenza variano, restando però invariabilmente connessi al corrispondente elemento della superficie d'appoggio. E questa proprietà è anzi caratteristica per le congruenze di rotolamento a sviluppabili distinte.

(2) Nelle solite notazioni del MONGE.

(3) Si potrebbe anche porre $f = a$ ($a =$ cost.) e supporre che a variasse dall'una all'altra superficie della famiglia [generalizzazione delle famiglie di LAMÉ formate da superficie pseudosferiche, studiate dal BIANCHI nel caso più generale].

Porremo

$$\delta x = \varepsilon n X, \quad \delta y = \varepsilon n Y, \quad \delta z = \varepsilon n Z,$$

da cui si deduce:

$$p' = p + \varepsilon \delta p, \quad q' = q + \varepsilon \delta q, \ldots, \quad t' = t + \varepsilon \delta t,$$

ove:

$$\delta p = \varepsilon[(nZ)_x - p(nX)_x - q(nY)_x] = \varepsilon(n\sqrt{1+p^2+q^2})_x + \varepsilon n(Xp_x + Yq_x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}\delta r = \varepsilon[(nZ)_{xx} - p(nX)_{xx} - q(nY)_{xx} - 2r(nX)_x - 2s(nY)_x] = \\ = \varepsilon(n\sqrt{1+p^2+q^2})_{xx} + n(Xp_{xx} + Yq_{xx})\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La nuova superficie soddisferà pure alla $f = 0$, se per tali valori delle $\delta x, \delta y, \ldots$ vale la:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t = 0$$

ossia la:

$$\begin{aligned}\frac{n}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\Big[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}p - \frac{\partial f}{\partial y}q - \frac{\partial f}{\partial p}(pp_x + qq_x) - \\ - \frac{\partial f}{\partial q}(pp_y + qq_y) - \ldots - \frac{\partial f}{\partial t}(pp_{yy} + qq_{yy})\Big] + \\ + \frac{\partial f}{\partial p}N_x + \frac{\partial f}{\partial q}N_y + \frac{\partial f}{\partial r}N_{xx} + \frac{\partial f}{\partial s}N_{xy} + \frac{\partial f}{\partial t}N_{yy} = 0,\end{aligned}$$

ove

$$N = n\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Il coefficiente di $\dfrac{n}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ vale

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1+p^2+q^2) - p\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - q\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

ove è:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s + \frac{\partial f}{\partial r}r_x + \frac{\partial f}{\partial s}s_x + \frac{\partial f}{\partial t}t_x$$

e analogamente per $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$. Essendo f identicamente nullo, questa equazione diventa pertanto:

$$\frac{\partial f}{\partial z} N + \frac{\partial f}{\partial p} N_x + \frac{\partial f}{\partial q} N_y + \frac{\partial f}{\partial r} N_{xx} + \frac{\partial f}{\partial s} N_{xy} + \frac{\partial f}{\partial t} N_{yy} = 0 \text{ (1)}.$$

E il nostro problema diventa quello di riconoscere per quali equazioni $f=0$ avviene che per ogni loro soluzione questa ultima equazione, ove è posto $N = n\sqrt{1+p^2+q^2}$, è compatibile con l'equazione del CAYLEY; meglio ancora se le soluzioni comuni dipenderanno da costanti arbitrarie.

Le ricerche di carattere algebrico ed aritmetico (2).

Vasta è pure l'opera aritmetica ed algebrica del BIANCHI. Essa ha un duplice carattere, cioè: di pura Aritmetica, di pura Algebra, e di Aritmetica-geometrica, di Algebra-geometrica.

Occupiamoci, in primo luogo, della produzione che riguarda l'*Aritmetica*, che ne è la parte più cospicua. Ha inizio nel 1890 con una Nota dei Lincei (1° sem.) in cui vengono assegnate, per le forme di DIRICHLET, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, le relazioni tra i numeri delle classi di forme primitive di seconda, di terza specie ed il numero delle classi di forme primitive di prima specie. Il metodo è quello di GAUSS, cioè fondato sulla composizione delle forme.

In seguito, il pensiero del Maestro viene rivolto a questioni di natura ben più elevata e più complessa: in un primo tempo, al problema della determinazione dei campi fondamentali del gruppo modulare nei corpi quadratici immaginari $K(\sqrt{-d})$ ($d=1$, gruppo di PICARD; $d>1$ gruppi di BIANCHI) e delle applicazioni alla teoria aritmetica delle relative forme di DIRICHLET e di HERMITE. A questi studi vengono dedicati: le Note dei Lincei: 1890, (1° sem.); 1891, (2° sem.); le Memorie dei « Math. Ann. », 1891, T. 38; 1892, T. 40; e qualche parte di quelle dei « Math. Ann. », 1893, T. 42 e 43.

Qui appunto si hanno i lavori più importanti della sua produzione aritmetica. Dopo aver stabilito il campo fondamentale, il BIANCHI, con l'introduzione del circolo indicatore per la forma di DIRICHLET, dell'indice e della sfera

(1) Essa dice soltanto che la superficie $z' = z + \varepsilon N$ soddisfa alla $f=0$, come si poteva facilmente prevedere *a priori*.

(2) La parte che segue della Commemorazione di LUIGI BIANCHI, e che riferisce sui lavori aritmetico-algebrici del compianto Maestro, è dovuto al prof. A. M. BEDARIDA, di Genova. (*N. d. R.*)

indicatrice per le forme di HERMITE, ha potuto, in modo molto elegante, stabilire la teoria aritmetica di queste forme. Si trovano anche nuovi risultati aritmetici: la corrispondenza tra l' equivalenza dei numeri frazionari di un corpo $K(\sqrt{-d})$ e l'equivalenza dei suoi ideali; corrispondenza che più tardi HURWITZ dimostrò esistere in ogni corpo algebrico $K(\theta)$; la circostanza che, per i corpi $K(\sqrt{-d})$ considerati dal BIANCHI, il numero dei vertici singolari del poliedro fondamentale, dopo l' ampliamento per riflessione, uguaglia il numero delle classi degli ideali del corpo. Questo fatto, ben notevole, non è stato ancora dimostrato in generale: la cosa sembra alquanto riposta.

In un secondo tempo, si trova un altro insieme di lavori importanti, cioè quelli che riguardano un' estensione del principio di POINCARÉ della traduzione del gruppo automorfo aritmetico di una forma in un gruppo G di proiettività su una variabile complessa, e la ricerca del relativo campo fondamentale. Le forme considerate sono le quadratiche quaternarie a coefficienti interi razionali. Il BIANCHI trovò che il gruppo G corrispondente è kleiniano (a coefficienti complessi), mentre nel caso di forme quadratiche ternarie, si trovano gruppi G fuchsiani (a coefficienti reali). Sono dedicate a queste ricerche le Memorie dei « Math. Ann. », 1893, T. 42 e 43; degli « Annali di Matematica », 1893, 1895 e la Nota dei Lincei del 1894 (1° sem.. Rientra in quest' ordine di studii la Nota dei Lincei del 1912 (1° sem.), in cui viene notata una forma semplice del gruppo modulare ordinario, in cui è tradotto il gruppo automorfo aritmetico delle forme quadratiche ternarie suscettibili di rappresentare lo zero. Per queste forme viene introdotta la nozione di densità rappresentata dall' area (non euclidea) del poligono fondamentale; nozione che sostituisce quella già introdotta da EISENSTEIN per le forme quadratiche ternarie definite. HUMBERT, con l'Aritmetica analitica, diede poi alla nozione introdotta dal BIANCHI quella generalizzazione indicata dal BIANCHI stesso.

Il nostro Maestro si occupò anche della questione inversa a quella che domina nei lavori di cui ora si è parlato e cioè, invece di definire la natura aritmetica del gruppo e ricercarne il campo fondamentale, definisce la specie di questo e determina i caratteri aritmetici dei gruppi corrispondenti: « Rend. Acc. Lin. », 1893 (2° sem.); 1909 (1° sem.). Queste ricerche furono poi riprese dal SANSONE.

I rimanenti lavori di Aritmetica, esclusa la Nota dei Lincei del 1890 (1° sem.) che si collega ad una Memoria del PICARD sopra le forme di HERMITE, riguardano la teoria degli ideali.

In una Memoria del Journal de Mathématiques (1922) e nella Nota dei Lincei del 1923 (1° sem.), il BIANCHI considerò gli ideali da Lui chiamati ideali primari assoluti, quelli cioè in cui la norma coincide col più piccolo intero razionale in essi contenuto. Ne trova interessanti e caratteristiche proprietà e ne sviluppa delle applicazioni, fra cui la dimostrazione elementare del teorema dell'infinità degli ideali primi di primo grado in ogni corpo algebrico, dimostrazione che viene poi completata nella Nota dei Lincei 1922 (2° sem.). Altra applicazione si ha nella riduzione, in un corpo algebrico, del simbolo di Dirichlet $\left[\frac{\omega}{P}\right]$ al simbolo di Legendre, per gli ideali primi di primo grado. Questa ricerca era già stata eseguita, in modo completo, per i corpi quadratici, nella sua Nota dei Lincei 1920 (2° sem.). Dirichlet si era occupato di tale questione nel caso particolare del corpo $K(\sqrt{-1})$.

Il Bianchi completò, per i corpi algebrici, la ricerca dell'esistenza o meno delle radici primitive col considerare, per moduli, gli ideali composti (« Rend. Acc. Lincei », 1923, 1° sem.). Questi risultati e quelli relativi alle formule di riduzione del simbolo di Dirichlet sono stati inseriti nel suo Trattato: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici* (Zanichelli, Bologna, 1923), che riproduce, in modo molto esteso, il corso litografato di Analisi Superiore tenuto all'Università di Pisa nell'anno 1920-21. Nel 1911-12, il Bianchi tenne pure un corso (litografato) di Teoria dei Numeri e precisamente: *Lezioni sulla Teoria aritmetica delle forme quadratiche binarie e ternarie.*

Andiamo ora a parlare della produzione del Bianchi che riguarda l'*Algebra.*

L'opera più importante, in questo ramo, è il Trattato: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* (Spoerri, Pisa, 1900). Si ha inoltre la Memoria degli « Annali di Matematica », 1882-83 (T. XI), sopra la risolvente di Lagrange per le equazioni di grado primo risolubili per radicali. In questo lavoro viene completata una ricerca del Betti, col determinare la struttura di tale risolvente. A base di queste ricerche il Bianchi pone nuove considerazioni sopra il gruppo metaciclico (gruppo di Galois delle equazioni in esame).

Inoltre si hanno due Note del « Giornale di Battaglini », 1878, vol. 16 e 1879, vol. 17, in cui il Maestro dà un metodo geometrico per ottenere infiniti sistemi piani omaloidici di curve di grado qualunque; e, dimostra, pure per via geometrica, che la trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano è l'unica trasformazione birazionale (oltre alle similitudini) che conservi gli angoli, estendendo poi tale proposizione anche allo spazio ordinario.

Sui gruppi di corrispondenze (2, 2) sopra una curva algebrica.

Memoria di Guido Ascoli (a Torino).

Il concetto di gruppo di operazioni nella sua forma ordinaria può estendersi alle operazioni non aventi risultato unico, e in particolare alle corrispondenze non univoche tra i punti di una curva algebrica. Ma tale estensione non sembra di grande interesse, principalmente perchè in un gruppo così costruito debbono trovarsi corrispondenze con indice (numero dei corrispondenti di un elemento) grande a piacere.

Nella presente Memoria mostrerò come, per le corrispondenze su una curva algebrica, si possa, in modo assai semplice, modificare il concetto di gruppo, conservando di questo le note essenziali, ma rendendo possibile di evitare l'accrescimento indefinito degli indici. Della nuova definizione darò poi subito un'applicazione trattando il problema che primo si presenta nel nuovo ordine di idee e cioè la costruzione dei gruppi di corrispondenze aventi indici non superiore a 2 (e che risultano composti solo di corrispondenze (1, 1) e (2, 2)). Mi sembra notevole il risultato cui giungo in questa parte del lavoro: e cioè la possibilità di ottenere sempre siffatti gruppi trasformando mediante una corrispondenza (1, 2) o una (2, 1), esistente tra una certa curva W e la curva data C, un gruppo di corrispondenze birazionali tra i punti della W.

Le ultime pagine della Memoria sono dedicate principalmente al caso delle curve razionali, sulle quali si determinano immediatamente i gruppi di corrispondenze (2, 2) ricorrendo a una W razionale od ellittica. Donde, nel secondo caso, che è il più interessante, un prevedibile legame con la teoria delle funzioni ellittiche; esso si manifesta nella forma più semplice in quanto i gruppi di (2, 2) propriamente discontinui risultano finiti, ed ammettono come funzioni invarianti fondamentali (le analoghe delle ordinarie funzioni poliedriche) le funzioni razionali con cui si opera la trasformazione dei periodi nella $\wp(u)$ ellittica.

Risulta così che questi nuovi gruppi non conducono ad un ampliamento essenziale della teoria delle funzioni automorfe; ciò che vale probabilmente anche nei casi più elevati.

Il metodo usato per i gruppi di (2, 2) è suscettibile di parziale estensione anche ai casi superiori; ma presenta allora difficoltà che non sono sinora riuscito a superare. Si ottengono bensì facilmente gruppi di struttura analoga a quella dei gruppi di (2, 2) qui determinati; però non sembra che essi possano esaurire tutti i casi possibili.

L'argomento della presente Memoria non risulta aver formato oggetto di precedenti ricerche; qualche raffronto può farsi però tra alcuni particolari della trattazione e risultati di varî Autori; si veda su ciò la Nota bibliografica in fine del lavoro.

I. Gruppi di corrispondenze su una curva algebrica.

1. Poniamo a base delle nostre considerazioni una varietà algebrica irriducibile ∞^1, ad esempio una curva algebrica C, e le trasformazioni algebriche della varietà in sè, o, ciò che è sostanzialmente lo stesso, le corrispondenze algebriche tra gli elementi della varietà. Riteniamo noto tutto ciò che riguarda le operazioni di *somma* e *prodotto* di corrispondenze, come pure la nozione di *riducibilità* delle corrispondenze ([1]).

Come di consueto, diremo *(primo) indice* di una corrispondenza il numero dei punti che essa, operando in senso diretto, fa corrispondere a un punto generico della curva. *Secondo indice* potrà dirsi l'indice della corrispondenza inversa.

2. Un aggregato G di corrispondenze in una curva C si dirà un *gruppo*, se, prese due corrispondenze S e T nell'aggregato, ogni parte irriducibile del prodotto ST è anche parte (irriducibile) di una corrispondenza U dell'aggregato.

Questa definizione conserva evidentemente ciò che si considera come il carattere essenziale della nozione ordinaria di *gruppo*. Se infatti l'elemento P è mutato da S in P' e questo da T in P'', esiste una parte irriducibile di ST che muta P in P'', e quindi una certa corrispondenza U di G che muta

([1]) Si vegga per questo il recente trattato di F. Severi: *Trattato di Geometria Algebrica* (vol. I, parte 1ª, Zanichelli, Bologna, 1926) di cui seguiamo la nomenclatura e le notazioni; in particolare il cap. IV, § 2, ove i concetti suindicati vengono ricondotti ai concetti generali della teoria delle varietà algebriche, in quanto le corrispondenze vengono identificate a varietà subordinate alla varietà delle coppie dell'ente algebrico. Il Capitolo contiene anche un'ampia bibliografia.

pure P in P''. In altri termini, introdotta anche per questi gruppi la nozione di elementi *equivalenti* rispetto ad un gruppo, si può ancora affermare che la relazione di equivalenza è *transitiva.*

Alla definizione di gruppo si può dare anche la seguente forma, indipendente dal concetto di *parte irriducibile*: G è un gruppo se il prodotto di due corrispondenze di G è contenuto in una somma di corrispondenze (distinte o no) di G. Si verifica infatti facilmente l'equivalenza delle due definizioni.

3. Dall'una o dall'altra delle precedenti definizioni segue che se due aggregati G e G' di corrispondenze tra i punti di C sono tali che ogni parte irriducibile di una corrispondenza di G è parte (irriducibile) di una corrispondenza di G', e viceversa, e G è un gruppo, anche G' è un gruppo.

Considereremo due gruppi siffatti come non essenzialmente distinti. In particolare, un gruppo potrà sempre ridursi a contenere solo corrispondenze irriducibili, e ciò in un modo solo. In quest'ultimo caso la proprietà gruppale prende la forma seguente: il prodotto di due corrispondenze di G è somma di corrispondenze, distinte o no, di G.

4. Gruppi finiti. — Come facile esemplificazione, non priva tuttavia di un certo interesse, tratteremo brevemente dei gruppi contenenti corrispondenze S_1, S_2,..., S_n, in numero finito.

Le S_i potranno supporsi irriducibili; si indicherà con s_i l'indice di S_i.

Sussisteranno allora formule del tipo

$$S_i S_j = \sum_k \gamma_{ijk} S_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

dove i γ_{ijk} saranno interi positivi o nulli [1].

Sia P un punto generico di C, Q_1, Q_2,..., Q_h i suoi equivalenti rispetto a G $(h = s_1 + s_2 + \ldots + s_n)$; essendo le S_i distinte e irriducibili, essi saranno tutti distinti. Lo stesso potrà dirsi per gli equivalenti di uno dei Q_i, i quali perciò, dovendo essere in numero di h ed equivalenti anche a P, coincideranno con i Q_i stessi. Sicchè i Q_i sono tra loro equivalenti, cioè l'equivalenza è anche proprietà *riflessiva* e *simmetrica*: *un gruppo finito contiene sempre l'identità e l'inversa di ogni sua corrispondenza.*

---

[1] Notiamo di passaggio che ad ogni gruppo finito di corrispondenze viene così ad associarsi una particolare *algebra*, costituita dagli elementi della forma $\Sigma c_i S_i$, ove i c_i possono supporsi elementi del corpo razionale o di altro corpo più ampio.

Segue anche che uno dei punti Q_i determina l'intero gruppo, sicchè *i punti equivalenti rispetto a un gruppo finito descrivono un' involuzione* ([1]).

Sia I quest' involuzione, $H = \Sigma S_i$ la corrispondenza che ad un punto di C associa il gruppo di I che passa per esso.

Si ha subito, per una data S_r:

$$S_r H = s_r H;$$

infatti ad un punto P di C corrispondono in S_r certi s_r punti, appartenenti al gruppo di I che passa per P, e a questi, in H, il gruppo stesso, contato s_r volte.

Prendendo le inverse dei due membri, e detta S_t l'inversa di S_r, che appartiene anch' essa al gruppo G, otteniamo:

$$HS_t = s_r H;$$

dovranno allora essere uguali gli indici dei due membri, cioè $hs_t = s_r h$, $s_t = s_r$: *le corrispondenze di un gruppo finito sono tutte ad indici uguali*, ossia del tipo (m, m).

Segue anche $HS_t = s_t H$. Le relazioni trovate, che possono scriversi anche

$$\sum_i S_r S_i = s_r \Sigma S_i, \quad \sum_i S_i S_r = s_r \Sigma S_i$$

e l'altra che se ne deduce sommando rispetto ad r:

$$\sum_{i,r} S_i S_r = \sum_i s_i \sum_r S_r$$

costituiscono altrettante proprietà interessanti del quadro di moltiplicazione del gruppo G.

5. Inversamente, sia ora I un' involuzione semplicemente infinita di punti di C, di ordine h, e H la corrispondenza (h, h) che associa ad ogni punto di C il gruppo di I che lo contiene. *Le parti irriducibili di* H *costituiscono un gruppo.*

Ciò risulta nel modo più completo osservando che si ha evidentemente

$$H^2 = hH$$

([1]) La conclusione è immediatamente estendibile ad ogni gruppo infinito contenente l'identità e l'inversa di ogni sua corrispondenza, nel senso che un punto di C determina tutti i suoi equivalenti. Nel caso di un gruppo discontinuo si potrà parlare allora di un' *involuzione* (trascendente), di ordine infinito, i cui gruppi saranno costituiti da un' infinità discreta di punti distinti.

ossia, essendo S_1, S_2,..., S_n le parti irriducibili di H:

$$\sum_{i,j} S_i S_j = h \sum_k S_k .$$

Da ciò risulta che ciascuno dei prodotti $S_i S_j$ è somma di alcune S_k, ossia che le S_i formano un gruppo.

In tal modo ad ogni gruppo finito di corrispondenze viene associata una involuzione semplicemente infinita, e viceversa. Ciò non sembra però di grande utilità per lo studio dei gruppi finiti; generalmente infatti la H si spezzerà nell'identità e in una $(h-1, h-1)$ S, irriducibile, caso di nessun interesse. Non sembra facile indagare direttamente quando la S presenti casi di riducibilità.

Si può ad ogni modo osservare che, oltre che nel caso della involuzione costituita dai cicli di un gruppo di trasformazioni birazionali di C in sè, si ottiene una S riducibile quando l'involuzione I sia composta con un'altra involuzione I'. In tal caso la H contiene la H' corrispondente alla I', la quale H' è a sua volta riducibile; sicchè il gruppo contiene allora almeno *tre* corrispondenze. E si potrebbe proseguire su questa via.

Giova però avvertire, per l'interesse da attribuire alle presenti ricerche, che tali casi sono ben lontani da esaurire tutte le possibilità, come potrà vedersi dallo studio dei gruppi di corrispondenze (2, 2) a cui è dedicata la parte principale della Memoria.

Il legame dei gruppi finiti con le involuzioni prende forma particolarmente semplice nel caso di una curva C razionale. L'involuzione I è in tal caso una serie lineare g_h^1 formata dai gruppi di livello di una funzione razionale

$$F(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

e l'equazione della corrispondenza H prende la forma $F(x) = F(y)$ cioè

$$\alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x) = 0.$$

La costruzione dei gruppi finiti viene così ridotta alla decomposizione in fattori irriducibili di un polinomio della forma $\alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x)$. La funzione razionale $F(x)$ assume l'ufficio di *funzione invariante* fondamentale per il gruppo [1].

[1] In particolare, la determinazione dei gruppi finiti di sostituzioni lineari viene ridotta alla ricerca dei polinomi del tipo indicato decomponibili in fattori bilineari: formulazione più curiosa certo che utile che non trovo notata dai vari Autori.

6. Gruppi con indici limitati. — Tra i gruppi di corrispondenze, sembrano dotati di maggior interesse quelli nei quali i due indici di ogni corrispondenza non superano mai un certo intero N. I gruppi finiti ne sono l'esempio più semplice.

Si può assegnare una semplice proprietà di questi gruppi, già verificata per i gruppi finiti: *In un gruppo con indici limitati ogni corrispondenza è ad indici uguali.*

In un tale gruppo esista una corrispondenza (p, q), e sia S, ove è $p \neq q$. Se N è l'indice massimo del gruppo, le potenze S^r per r abbastanza grande, dovranno essere riducibili, e precisamente spezzarsi in termini T_i di indici α_i, β_i non superiori ad N. Sia

$$S^r = T_1 + T_2 + \dots + T_k$$

e quindi

$$p^r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k, \quad q^r = \beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_k.$$

Poichè $1 \leq \alpha_i \leq N$, $1 \leq \beta_i \leq N$, risulta:

$$k \leq p^r \leq kN, \quad k \leq q^r \leq kN$$

e quindi

$$\frac{1}{N} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^r \leq N.$$

Ora ciò non può valere per ogni r, nell'ipotesi posta $p \neq q$: chè può scegliersi un r tale che sia $(p/q)^r > N$ se $p > q$; $(p/q)^n < 1/N$ se $p < q$. È dunque $p = q$ come si era asserito.

II. Gruppi di corrispondenze (2, 2) sopra una curva algebrica.

7. Per l'ultimo teorema dimostrato (n.° 6) i gruppi di corrispondenze tra punti di una curva algebrica, aventi indici (primo e secondo) non superiore a 2, potranno contenere soltanto corrispondenze (1, 1) e corrispondenze (2, 2). Escludendo naturalmente che un gruppo contenga solo corrispondenze biunivoche, useremo brevemente la locuzione « gruppi di corrispondenze (2, 2) » per indicare un gruppo che contenga (2, 2) irriducibili, ed eventualmente delle (1, 1).

In un simile gruppo, il prodotto di una (1, 1) per una (2, 2), o viceversa, è ancora una (2, 2) del gruppo; invece il prodotto di due (2, 2) del gruppo, essendo una (4, 4), non sarà contenuto nel gruppo, ma vi saranno contenute le sue parti irriducibili; queste dovranno dunque essere delle (1, 1) o delle (2, 2).

Si riconosce dunque la necessità di uno studio accurato dei casi di riducibilità del prodotto di due corrispondenze (2, 2); il problema presentando per sè un certo interesse, cercheremo di darne una trattazione esauriente, fermandoci anche su qualche particolare che non sarebbe necessario ai fini del presente lavoro.

Premettiamo una distinzione nel campo delle (2, 2), semplice applicazione di un concetto generale, già noto per corrispondenze di indici qualunque [1]. Diremo che una corrispondenza (2, 2) tra due curve C, C' distinte oppur no, è *composta* se essa può essere generata da una corrispondenza biunivoca tra le coppie di un' involuzione di 2° ordine γ su C e quelle di un' involuzione di 2° ordine γ' su C'; in altre parole, se ai punti di C corrispondono su C' coppie di γ' e ai punti di C' corrispondono su C coppie di γ. Si prova facilmente che una di queste condizioni porta di conseguenza l'altra; se infatti la (2, 2) S fa corrispondere al punto P di C la coppia $Q_1 Q_2$ di γ', considerando il punto P' che insieme con P corrisponde a Q_1 nella S^{-1} e cercando i corrispondenti di P' in S, si troverà una coppia di γ' contenente Q_1, e cioè la $Q_1 Q_2$. Sicchè P' è anche corrispondente di Q_2 in S^{-1}. Dopo ciò è chiaro che P determina razionalmente e in modo simmetrico P', ossia le coppie PP' descrivono un' involuzione.

Resta anche così provato implicitamente che S è composta se per ogni elemento P esiste un elemento P' tale che P e P' hanno in S gli stessi corrispondenti.

Chiameremo talvolta *prima* e *seconda* involuzione di una (2, 2) composta le due involuzioni di 2° ordine tra le quali opera la S.

8. Riducibilità del prodotto di due corrispondenze (2, 2). — Si considerino tre curve algebriche C, C', C'' e due corrispondenze (2, 2) irriducibili, una, S, tra C e C', l'altra, T, tra C' e C''. Ci proponiamo di determinare i casi in cui la (4, 4) ST è riducibile. Proveremo anzitutto che:

Il prodotto ST *può spezzarsi solo in uno dei modi seguenti:*

$$\begin{aligned} &a) \quad ST = U + V, \\ &b) \quad ST = 2\lambda + V, \\ &c) \quad ST = 2U, \\ &d) \quad ST = 2\lambda + 2\mu, \end{aligned}$$

dove U, V *sono* (2, 2) *irriducibili distinte,* λ, μ *sono* (1, 1) *distinte.*

---

[1] SEVERI, loc. cit., n. 68, pag. 215.

Sia infatti P un punto generico di C, Q_1, Q_2 i suoi corrispondenti in S, R_{11}, R_{12}; R_{21}, R_{22} i corrispondenti di Q_1 e Q_2 in T. Ciò può rappresentarsi schematicamente nel modo seguente:

$$ST;\ P \begin{cases} Q_1 \rightarrow (R_{11},\ R_{12}) \\ Q_2 \rightarrow (R_{21},\ R_{22}). \end{cases}$$

Cominceremo a provare che ST non può contenere delle $(r, 1)$ o delle $(1, r)$ che non siano $(1, 1)$. Contenga infatti ST la $(r, 1)\ \lambda$, la quale muti P, per esempio, in R_{11}. Considerando la λT^{-1}, essa muterà P in una coppia di elementi, uno dei quali è Q_1; ma anche S muta P in Q_1 (e Q_2) ed è irriducibile; dunque λT^{-1} contiene S. Ora λT^{-1} è una $(2r, 2)$ e S una $(2, 2)$; quindi è $r = 1$ (e $\lambda T^{-1} = S$).

Contenga invece ST una $(1, r)$; $T^{-1}S^{-1}$ conterrà una $(r, 1)$, e sarà ancora $r = 1$.

Segue di qui che ST non può contenere che $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(3, 3)$ irriducibili. Escluderemo l'ultimo caso, e cioè la decomponibilità di ST in una $(3, 3)$ irriducibile e in una $(1, 1)$ provando che se ST contiene una $(1, 1)$ contiene il suo doppio. Dopo ciò il teorema potrà dirsi completamente dimostrato.

Contenga ST la $(1, 1)\ \lambda$ la quale muti P in R_{11}; come si è già visto, sarà $\lambda T^{-1} = S$ da cui $T\lambda^{-1} = S^{-1}$. Operando con i due membri su Q_2, risulterà che uno degli elementi R_{21}, R_{22}, è mutato da λ^{-1} in P. Sia esso R_{21}; allora λ muta P in R_{21}, ed è quindi $R_{21} = R_{11}$. Il prodotto ST contiene per ciò λ due volte, e la $(2, 2)$ residua non potrà più contenere λ, dovendo per questo essere $R_{12} = R_{11}$ o $R_{22} = R_{21}$, contro l'ipotesi della irriducibilità di T. Dovrà quindi, se è riducibile, contenere un'altra $(1, 1)\ \mu$, anzi ridursi al suo doppio.

9. Mantenendo le precedenti notazioni, proponiamoci di vedere come gli elementi R_{ik}, corrispondenti di P in ST, si ripartiscano tra le varie componenti di ST, nei varî casi di riducibilità di questo prodotto.

Ciò è immediato nei casi *b), c), d)* e i risultati possono simboleggiarsi nel modo seguente:

$$b)\quad ST = 2\lambda + V; \quad \lambda;\ P \rightarrow R_{11} (= R_{21}); \quad V;\ P \begin{cases} R_{12} \\ R_{22} \end{cases};$$

$$c)\quad ST = 2U; \quad U;\ P \begin{cases} R_{11} (= R_{21}) \\ R_{12} (= R_{22}) \end{cases};$$

$$d)\quad ST = 2\lambda + 2\mu; \quad \lambda;\ P \rightarrow R_{11} (= R_{21}); \quad \mu;\ P \rightarrow R_{12} (= R_{22}).$$

Vedremo che nel caso *a)* la ripartizione è la seguente:

$$a) \quad ST = U + V; \quad U; P \begin{array}{l} \nearrow R_{11} \\ \searrow R_{21} \end{array}; \quad V; P \begin{array}{l} \nearrow R_{12} \\ \searrow R_{22} \end{array}$$

dove, come del resto negli altri casi, si è scritta una sola delle ripartizioni possibili, le altre essendo sostanzialmente identiche. Basterà che escludiamo l'altra ripartizione:

$$U; P \begin{array}{l} \nearrow R_{11} \\ \searrow R_{12} \end{array}; \quad V; P \begin{array}{l} \nearrow R_{21} \\ \searrow R_{22} \end{array}$$

dove gli R_{ik}, essendo U e V distinte e irriducibili, sono tutti distinti.

Consideriamo infatti la UT^{-1}; in essa tra i corrispondenti di P comparisce due volte Q_1, mentre in S, che è irriducibile, P ha per corrispondenti Q_1 e Q_2. Ne segue $UT^{-1} = 2S$ e $TU^{-1} = 2S'$. Applicando i due membri a Q_2, risulta che P corrisponde in U^{-1} sia a R_{21} che a R_{22}, cioè che U muta P in R_{21}, R_{22}. È allora $U = V$ contro l'ipotesi.

La ripartizione esclusa è invece caratteristica del caso *c)*.

10. Ci sarà utile ora la considerazione della *curva* (o, in generale, *varietà*) *di corrispondenza* relativa ad una data corrispondenza S tra due curve C, C'. Come è noto [1], si dà tale nome alla curva $[S]$, determinata a meno di trasformazioni birazionali, nei punti della quale si rappresentano biunivocamente le coppie costituite da un punto P di C e da un punto Q di C', corrispondenti in S. Se S è irriducibile, tale è anche $[S]$; e se S è una (2, 2), tra i punti di C e di $[S]$, come pure tra i punti di C' e di $[S]$, intercedono due corrispondenze (1, 2) poichè un punto di C (o di C') ha due corrispondenti su C' (o su C) e dà quindi luogo a due punti di $[S]$. Queste due corrispondenze potranno opportunamente indicarsi con i simboli α_S, $\alpha_{S^{-1}}$, e si ha subito

$$S = \alpha_S \alpha_{S^{-1}}^{-1}.$$

Se, come si è supposto nelle considerazioni precedenti, si hanno due corrispondenze (2, 2), una S tra C e C', una T tra C' e C'', nascerà tra le curve

(1) Cfr. Severi, loc. cit., n. 61, ove, come si è avvertito, il concetto è posto a base della definizione stessa di corrispondenza. È da avvertire che la considerazione delle varietà di corrispondenza risale al Segre (*Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.* « Ann. di Mat. », (2), t. 22, 1894) che la diede in forma astratta, mentre se ne deve al Bertini un semplice modello proiettivo.

di corrispondenza $[S]$, $[T]$ la corrispondenza (2, 2) espressa da $\alpha_{S^{-1}}^{-1}\alpha_T$. Il suo significato è chiaro: se P è un punto di C, Q un suo corrispondente in S, R', R'' i corrispondenti di Q in T, la (2, 2) considerata fa corrispondere al punto (PQ) di $[S]$ i punti (QR'), (QR'') di $[T]$. Diremo brevemente che essa è la (2, 2) *subordinata* dalla coppia di corrispondenze S, T tra le rispettive curve di corrispondenza.

Se, dopo ciò, riprendiamo a considerare il caso *a)* di riducibilità, schematicamente rappresentato da:

$$ST = U + V,$$

$$ST;\ P \begin{cases} Q_1 \to (R_{11},\ R_{12}) \\ Q_2 \to (R_{21},\ R_{22}) \end{cases},\qquad U;\ P \begin{cases} R_{11} \\ R_{21} \end{cases},\qquad V;\ P \begin{cases} R_{12} \\ R_{22} \end{cases}$$

vediamo che, noti P e Q_1, è determinato razionalmente R_{11}, come *unico* elemento di C'' che è insieme corrispondente di P in U e di Q_1 in T; e così R_{12}. Sicchè il punto (PQ_1) di $[S]$ determina razionalmente i punti (Q_1R_{11}), (Q_1R_{12}) di $[T]$ e la (2, 2) subordinata da S e T tra le rispettive curve di corrispondenza risulta riducibile.

Come subito si riconosce, lo stesso può dirsi nei casi *b)* e *d)*.

Il risultato può invertirsi: se la detta (2, 2) tra $[S]$ e $[T]$ è riducibile, e si ha cioè

$$\alpha_{S^{-1}}^{-1}\alpha_T = \beta + \gamma$$

dove β e γ sono (1, 1), sarà

$$ST = \left(\alpha_S\alpha_{S^{-1}}^{-1}\right)\left(\alpha_T\alpha_{T^{-1}}^{-1}\right) = \alpha_S(\beta+\gamma)\alpha_{T^{-1}}^{-1} = \alpha_S\beta\alpha_{T^{-1}}^{-1} + \alpha_S\gamma\alpha_{T^{-1}}^{-1},$$

e ST si spezzerà in due (2, 2).

La deduzione precedente non vale per la riducibilità di tipo *c)*, per la quale infatti il fatto stesso non sussiste. Se però si osserva il relativo schema:

$$ST = 2U,$$

$$ST;\ P \begin{cases} Q_1 \to (A,\ B) \\ Q_2 \to (A,\ B) \end{cases},\qquad U;\ P \begin{cases} A \\ B \end{cases}$$

si riconoscerà subito che S e T sono composte e che la seconda involuzione di S coincide con la prima di T. Ed infatti T è composta perchè in essa Q_1 e Q_2 hanno gli stessi corrispondenti (n.° 7), e $(Q_1, Q_2)(A, B)$ descrivono la sua prima e seconda involuzione; e S è allora composta perchè i corrispondenti di P descrivono un'involuzione, che è la seconda di S e la prima di T. La deduzione è applicabile anche al caso *d)*.

Viceversa, se si hanno su C, C', C'' le involuzioni di 2° ordine γ, γ', γ'' e S è composta con γ e γ', T con γ' e γ'', si vedrà subito che ST risulta il doppio di una corrispondenza U, composta con γ e γ'', ed eventualmente riducibile.

Si presentano dunque come possibili due soli tipi di riducibilità: uno (α), caratteristico dei casi *a)* e *b)*, uno (β) che avviene invece nel caso *c)*; nel caso *d)* i due tipi si verificano insieme.

Concludiamo: *se* S *e* T *sono corrispondenze* (2, 2) *irriducibili, la prima tra* C *e* C′, *la seconda tra* C′ *e* C″, *condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto* ST *sia riducibile è che avvenga uno almeno dei due fatti seguenti:*

α) *la corrispondenza* (2, 2) *che* S *e* T *subordinano tra le rispettive curve di corrispondenza* [S], [T] *sia riducibile*;

β) S *e* T *siano composte, e la seconda involuzione di* S *coincida con la prima di* T.

Se avviene il caso α) *e non il* β), ST *si scinde in due* (2, 2) *distinte, una delle quali può ridursi al doppio di una* (1, 1); *se avviene il caso* β) *e non quello* α), ST *è il doppio di una* (2, 2) *irriducibile*; *se avvengono insieme i casi* α) *e* β), ST *si spezza nel doppio di una* (1, 1) *e nel doppio di un' altra* (1, 1), *distinta dalla prima.*

11. In particolare, una (2, 2) irriducibile S tra i punti di una curva C avrà quadrato riducibile quando avvenga uno dei fatti seguenti:

α) la corrispondenza (2, 2) tra i punti di $[S]$, che si ottiene associando i punti del tipo $(PQ)(QR)$ è riducibile;

β) S è composta, ed opera tra le coppie di una involuzione di 2° ordine esistente su C.

Nel primo caso si può dare di S una notevole caratterizzazione. Si consideri lo schema di trasformazione relativo ad S^2:

$$S^2;\ \begin{array}{l} P_1 \searrow \\ P \begin{array}{l} \nearrow Q_1 \rightarrow (M_{11}, M_{12}) \\ \searrow Q_2 \rightarrow (M_{21}, M_{22}) \end{array} \end{array}$$

nel quale abbiamo indicato anche l'elemento P_1 che insieme a P corrisponde a Q_1 in S^{-1}. Esiste una corrispondenza biunivoca σ tra i punti di $[S]$ che muta (PQ_1) in (Q_1M_{11}); essa muterà (P_1Q_1) in uno dei punti (Q_1M_{11}), (Q_1M_{12}), quindi necessariamente nel secondo. Ne segue subito, con le notazioni adottate:

$$\alpha_{S^{-1}} = \alpha_S \sigma^{-1}$$

come si vede operando coi i due membri su Q_1. E poichè $S = \alpha_S \alpha_{S^{-1}}^{-1}$, risulta

$$S = \alpha_S \sigma \alpha_S^{-1}.$$

Ponendo $\alpha_S^{-1} = \omega$, risulta

$$S = \omega^{-1} \sigma \omega$$

cioè S è trasformata di σ mediante la (2, 1) ω operante tra $[S]$ ed S.

Viceversa, se σ è una (1, 1) tra i punti di una curva W, ω una corrispondenza (2, 1) tra W e la curva data C, ed S ha la forma indicata, S^2 è riducibile. Si ha infatti $\omega\omega^{-1} = 1 + \mu$, dove μ è la (1, 1) sussistente su W tra i due corrispondenti di un punto di S, e quindi:

$$S^2 = \omega^{-1}\sigma\omega\omega^{-1}\sigma\omega = \omega^{-1}\sigma^2\omega + \omega^{-1}\sigma\mu\sigma\omega.$$

Ma anche nel caso β) sussiste un fatto analogo. Si consideri infatti la curva W_1 in cui si rappresentano biunivocamente le coppie dell' involuzione γ con cui è composta la S; tra W_1 e C intercederà una corrispondenza (1, 2), e sia essa ω_1. La S, d' altronde, come corrispondenza (2, 2) composta con γ, induce su W_1 una corrispondenza biunivoca σ_1, e si ha subito:

$$S = \omega_1^{-1} \sigma_1 \omega_1$$

e cioè S è la trasformata di σ_1 mediante ω_1.

Viceversa, se sussiste una corrispondenza (1, 2) ω_1 tra una certa curva W_1 e la data C, e σ_1 è una (1, 1) tra i punti di W_1, ed è $S = \omega_1^{-1}\sigma_1\omega_1$, sarà:

$$S^2 = \omega_1^{-1}\sigma_1\omega_1\omega_1^{-1}\sigma_1\omega = 2(\omega_1^{-1}\sigma_1^2\omega_1)$$

verificandosi subito che $\omega_1\omega_1^{-1} = 2$.

Concludendo: *le corrispondenze* (2, 2) *irriducibili tra i punti di una curva* C, *a quadrato riducibile, sono, tutte e sole, quelle che possono ottenersi trasformando una corrispondenza biunivoca esistente su una curva* W *mediante una corrispondenza* (1, 2) *oppure una* (2, 1) *avente luogo tra la* W *e la curva data* C.

12. Costituzione dei gruppi di corrispondenze (2, 2). — Studieremo anzitutto quei gruppi di corrispondenze (2, 2) nei quali il prodotto di due (2, 2) del gruppo presenta sempre il caso (α) di riducibilità; ciò che non esclude il contemporaneo verificarsi del caso (β).

Si formi per il prodotto ST di due corrispondenze (2, 2) del gruppo il solito schema:

$$\begin{array}{l} P_1 \searrow \\ \qquad Q_1 \to (R_{11},\ R_{12}) \\ P \nearrow \\ \quad \searrow Q_2 \to (R_{21},\ R_{22}) \end{array}$$

dove anche qui P_1 indica l'elemento che insieme a P corrisponde a Q_1 in S^{-1}. Come nel n.° 11, si vedrà che la corrispondenza biunivoca β che lega il punto (PQ_1) di $[S]$ col punto (Q_1R_{11}) di $[T]$ lega anche il punto (P_1Q_1) di $[S]$ col punto (Q_1R_{12}) di $[T]$. Ne segue

$$\alpha_T = \alpha_{S^{-1}}\beta$$

come si vede operando con i due membri su Q_1.

In modo analogo, la supposta riducibilità di tipo (α) del prodotto TS porta a scrivere:

$$\alpha_S = \alpha_{T^{-1}}\gamma$$

dove γ è pure una (1, 1) tra $[T]$ e $[S]$, mentre per quella di S^2 si ha, come si è visto:

$$\alpha_{S^{-1}} = \alpha_S\sigma$$

dove σ è una (1, 1) tra i punti di $[S]$.

Ne segue:

$$T = \alpha_T\alpha_{T^{-1}}^{-1} = \alpha_{S^{-1}}\beta\gamma\alpha_S^{-1} = \alpha_S\sigma\beta\gamma\alpha_S^{-1}$$

cioè, posto $\alpha_S^{-1} = \omega$, $\sigma\beta\gamma = \sigma_T$:

$$T = \omega^{-1}\sigma_T\omega.$$

Tutte le (2, 2) del gruppo appaiono così come trasformate di corrispondenze biunivoche esistenti su una medesima curva $[S] = W$ mediante la (2, 1) ω esistente tra W e C. La precedente rappresentazione non è però unica: se ad una data σ_T corrisponde una determinata T, ogni T determina invece *quattro* σ_T, come può vedersi anche dalla deduzione esposta. In modo più diretto, si osservi che se si indica con μ la $\omega\omega^{-1} - 1$, cioè la (1, 1) involutoria che associa i due corrispondenti in ω di uno stesso elemento di C, si ha $\omega\mu = \omega$ e quindi da $T = \omega^{-1}\sigma_T\omega$ segue anche:

$$T = \omega^{-1}(\mu\sigma_T)\omega = \omega^{-1}(\sigma_T\mu)\omega = \omega^{-1}(\mu\sigma_T\mu)\omega$$

onde la T è rappresentata, oltre che da σ_T, anche da $\mu\sigma_T$, $\sigma_T\mu$, $\mu\sigma_T\mu$. E si verifica facilmente che sono queste le uniche rappresentazioni che ammette la T.

Vediamo ora se un'analoga rappresentazione ammettono le (1, 1) che eventualmente fossero contenute nel gruppo. Premettiamo un'osservazione. Se λ è una (1, 1) su W, la $\omega^{-1}\lambda\omega$ non può spezzarsi altrimenti che come doppio di una (1, 1). Se infatti si pone

$$\omega^{-1}\lambda\omega = \xi + \eta$$

dove ξ e η sono (1, 1) tra i punti di C, sarà

$$\xi^{-1}\omega^{-1}\lambda\omega = 1 + \xi^{-1}\eta,$$

cioè il prodotto della (1, 2) $\xi^{-1}\omega^{-1}$ per la (2, 1) $\lambda\omega$, ambedue irriducibili deve contenere l'identità. Si vedrà subito che ciò può avvenire solo se esse sono inverse, e in tal caso il loro prodotto vale 2. Ne viene $\xi^{-1}\eta = 1$, $\xi = \eta$.

Sia ora L una (1, 1) appartenente al nostro gruppo G: se S è la (2, 2) del gruppo, già considerata, anche $U = LS$ dovrà essere una (2, 2) irriducibile del gruppo. E si avrà perciò

$$S = \omega^{-1}\sigma_S\omega, \quad U = \omega^{-1}\sigma_U\omega$$

dove σ_U ê una (1, 1) tra i punti di W. Ora si ha:

$$US^{-1} = LSS^{-1} = L(2 + X) = 2L + LX$$

dove X è una (2, 2), quindi sostituendo:

$$\omega^{-1}\sigma_U\omega\omega^{-1}\sigma_S^{-1}\omega = 2L + LX$$

ossia

$$\omega^{-1}(\sigma_U\sigma_S^{-1})\omega + \omega^{-1}(\sigma_U\mu\sigma_S^{-1})\omega = 2L + LX.$$

Ed allora, per quanto si è prima osservato, si può affermare che una delle (2, 2) del primo membro vale $2L$. Sicchè sostituendo nel gruppo (1, 1) L con il suo doppio, può dirsi che anche questa speciale (2, 2) è trasformata di una (1, 1) di W mediante la ω.

Siamo ora in grado di dedurre il risultato finale di questa parte della nostra ricerca. Si ha anzitutto: *Sulla* W, *le corrispondenze biunivoche corrispondenti alle* (2, 2) *del gruppo* G (quattro per ogni (2, 2)) *costituiscono un gruppo.* Ed infatti se U, V sono corrispondenze di G, e si ha:

$$UV = X + Y$$

dove X e Y sono elementi di G, ed eventualmente doppi di (1, 1), si ha:

$$X + Y = (\omega^{-1}\sigma_U\omega)(\omega^{-1}\sigma_V\omega) = \omega^{-1}(\sigma_U\sigma_V)\omega + \omega^{-1}(\sigma_U\mu\sigma_V)\omega.$$

I due termini del primo membro coincideranno, in un certo ordine, con quelli del secondo; e se, per esempio, sarà

$$X = \omega^{-1}(\sigma_U \sigma_V)\omega$$

e d'altra parte, X appartenendo a G:

$$X = \omega^{-1}\sigma_X \omega$$

avremo

$$\sigma_U \sigma_V = \sigma_X, \quad \text{oppure} = \mu\sigma_X, \quad \text{oppure } \sigma_X\mu, \quad \text{oppure} = \mu\sigma_X\mu$$

e cioè $\sigma_U \sigma_V$ sarà uguale a una delle quattro (1, 1) corrispondenti ad X.

Viceversa, *se si ha su* W *un gruppo* Γ *di corrispondenze biunivoche tale che,* λ *appartenendo a* Γ, *vi appartengano anche* $\lambda\mu$, $\mu\lambda$, $\mu\lambda\mu$, *l'aggregato*

$$G = \omega^{-1}\Gamma\omega$$

di corrispondenze (2, 2) *sulla* C *è ancora un gruppo.* La verifica è immediata.

Se ci limitiamo, come si fa ordinariamente, ai gruppi contenenti l'identità e l'inversa di ogni loro corrispondenza, l'enunciato precedente si semplifica, bastando ammettere che Γ contenga μ, come è evidente.

Possiamo così ritenere completamente caratterizzati i gruppi di corrispondenze (2, 2) esistenti su una curva algebrica C e tali che il prodotto di due (2, 2) del gruppo presenti sempre il caso (α) di riducibilità: *il più generale gruppo di questa specie si ottiene trasformando mediante una corrispondenza* (2, 1), ω, *esistente tra una curva* W *e la* C *un arbitrario gruppo di corrispondenze birazionali tra i punti di* W, vincolato soltanto a contenere quella involuzione che lega i due corrispondenti di uno stesso punto di C nella citata ω.

13. Quasi immediata è la costruzione dei gruppi di (2, 2) nei quali i prodotti presentano il caso (β) di riducibilità. Ed infatti le (2, 2) del gruppo dovranno essere composte, èd anzi ridursi a corrispondenze (1, 1) tra le coppie di un'involuzione; e questa involuzione dovrà essere la stessa per tutte le (2, 2) del gruppo.

Se, come al n.° 11, introduciamo la curva W_1, immagine dell'involuzione, sicchè tra questa e la C si abbia una corrispondenza (1, 2), ω_1, ogni (2, 2) del gruppo potrà scriversi sotto la forma

$$S = \omega_1^{-1}\tau_S\omega_1$$

dove τ_S è una ben determinata (1, 1) tra i punti di W_1. La rappresentazione è qui unica.

Vediamo anche qui se una forma analoga può darsi alle (1, 1) eventualmente esistenti nel gruppo. Se L è una siffatta (1, 1) e S una (2, 2) del gruppo, anche SL deve appartenere al gruppo. Ne segue subito che L deve mutare in sè l'involuzione. Se quindi M è la (1, 1) generata dall'involuzione, deve essere:

$$LM = ML.$$

Dopo ciò si vedrà che l'aggiunta eventuale della LM al gruppo non altera la proprietà gruppale; ed infatti è

$$S(LM) = (SM)L = SL, \quad (LM)S = L(MS) = LS,$$

e i prodotti, per ipotesi, appartengono al gruppo.

Formando allora la $U = L + LM$, essa muta in sè l'involuzione, determinando quindi tra le coppie di essa una τ_U biunivoca ehe permette di scrivere

$$L + LM = \omega_1^{-1} \tau_U \, \omega_1^{-1}.$$

Ottenuto in tal modo l'aggregato delle τ_U corrispondenti ad un dato gruppo, si verifica subito che esse costituiscono pure un gruppo (nel senso ordinario), giacchè se U, V, X sono (2, 2) di G, e si ha

$$UV = 2X,$$

segue:

$$\omega_1^{-1} \tau_U \, \omega_1 \cdot \omega_1^{-1} \tau_V \, \omega = 2X,$$

ed essendo $\omega_1 \omega_1^{-1} = 2$,

$$X = \omega_1^{-1} (\tau_U \tau_V) \omega_1$$

e $\tau_X = \tau_U \tau_V$. Viceversa un gruppo di trasformazioni biunivoche su W_1 genera su C un gruppo di (2, 2) composte.

Si può osservare anche qui che se il gruppo G contiene l'identità e l'inversa di ogni sua corrispondenza, esisterà nel gruppo la M, avendosi facilmente $SS^{-1} = S^{-1}S = 2 + 2M$, sicchè non si renderà necessario alcun ampliamento del gruppo, ma soltanto l'associazione di ogni (1, 1), L, con ML, operazione che fu inteso di considerare sempre lecita.

Dopo ciò rimangono caratterizzati anche i gruppi di (2, 2) esistenti sulla curva C, e tali che i prodotti delle sue (2, 2) presentino sempre il tipo (β) di riducibilità: *il più generale gruppo di questa specie si ottiene trasformando mediante una corrispondenza* (1, 2), ω_1, *esistente tra una curva* W_1 *e* C, *un arbitrario gruppo di corrispondenze birazionali tra i punti di* W_1.

14. Potrebbero *a priori* pensarsi gruppi di (2, 2) per i quali la riducibilità del prodotto di due corrispondenze avvenga talvolta secondo lo schema (α), tal altra secondo lo schema (β); dimostrando l'impossibilità di gruppi così fatti la nostra ricerca potrà dirsi esaurita.

Introduciamo per un momento una comoda locuzione, dicendo *prodotti* (α) e *prodotti* (β) quei prodotti di due corrispondenze (2, 2) che sono riducibili secondo il tipo (α) o il tipo (β), rispettivamente. Si ha allora:

a) *Se* ST *è in pari tempo* (α) *e* (β), *è* $\mathrm{ST} = 2\lambda + 2\mu$, *dove* λ e μ *sono* (1, 1) *distinte* (n.° 10).

b) *Se* SX, SY *sono prodotti* (α) *oppure* (β), *anche* $\mathrm{X}^{-1}\mathrm{Y}$, $\mathrm{Y}^{-1}\mathrm{X}$ *sono prodotti* (α) *oppure* (β).

I prodotti SX, SY siano (α); sia P un punto di C, Q un suo corrispondente in S, M_1, M_2 i corrispondenti di Q in X, N_1, N_2 i corrispondenti di Q in Y. Vi è allora corrispondenza biunivoca tra il punto (PQ) di $[S]$ e il punto (QM_1) di $[X]$, come pure tra lo stesso (PQ) di S e (QN_1) di Y; vi è dunque corrispondenza biunivoca tra (QM_1) di $[X]$ e (QN_1) di $[Y]$, o, ciò che è lo stesso, tra (M_1Q) di $[X^{-1}]$ e (QN_1) di $[Y]$. Ciò prova che $X^{-1}Y$ è un prodotto (α); lo stesso vale per il suo inverso $Y^{-1}X$.

Se invece SX, SY sono (β), X, Y, S sono composte, e la seconda involuzione di S coincide con la prima di X e di Y. Onde la seconda involuzione di X^{-1} coincide con la prima di Y; e $X^{-1}Y$ è un prodotto (β). E lo stesso può dirsi di $Y^{-1}X$.

c) Analogamente: *Se* XS, YS *sono prodotti* (α), *oppure* (β), *anche* XY^{-1}, YX^{-1} *sono prodotti* (α), *oppure* (β).

d) *Se* S, T *sono* (2, 2) *irriducibili di un gruppo di* (2, 2), *i prodotti* S^2, ST, TS *sono insieme* (α) *o insieme* (β).

Considerati i prodotti S^2 e ST, ammettiamo che potesse essere

$$S^2 \text{ un prodotto } (\alpha), \text{ e non } (\beta),$$
$$ST \text{ un prodotto } (\beta), \text{ e non } (\alpha).$$

Ne verrà

$$ST = 2X$$

dove X è irriducibile, e appartiene al gruppo. Perciò SX deve essere riducibile. Se SX è (α), S^2 essendo (α), sarà (α) anche $S^{-1}X$. Ora $S^{-1}X = 2T$, come facilmente si verifica [1], quindi T deve essere riducibile, contro l'ipotesi. Se SX è (β), $S^{-1}X$ essendo pure (β), risulta S^2 essere (β), contro l'ipotesi.

[1] Lo si deduce considerando le (2, 2) come (1, 1) tra coppie di involuzioni.

Sia invece

$$S^2 \text{ un prodotto } (\beta), \text{ e non } (\alpha)$$
$$ST \text{ un prodotto } (\alpha), \text{ e non } (\beta).$$

Sarà

$$S^2 = 2Y$$

dove Y è irriducibile e appartiene al gruppo. Perciò YT deve essere riducibile. Se YT è (α), ST essendo (α), risulta che YS^{-1} è (α); ma $YS^{-1} = 2S$, cioè YS^{-1} è un prodotto (β); deve perciò essere S riducibile, contro l'ipotesi. Se YT è (β), YS^{-1} essendo (β), risulta ST un prodotto (β), contro l'ipotesi.

La dimostrazione è analoga per il prodotto TS, e può anche evitarsi, ricorrendo al gruppo inverso del dato.

Da quest'ultimo lemma risulta ora senz'altro che la specie del quadrato S^2 determina quella di ogni prodotto ST, TS; questa quella di ogni quadrato T^2, e poi di ogni prodotto TU di due qualunque corrispondenze del gruppo; e viceversa. E così, se S^2 è un prodotto (α), oppure (β), tutti i prodotti delle (2, 2) del gruppo saranno ancora (α) oppure (β), e ad essi saranno applicabili le rappresentazioni dei numeri precedenti. Nè è escluso (e si hanno anche facili esempi) che esistano gruppi nei quali tutti i prodotti sono insieme (α) e (β).

III. Applicazioni.

15. Gruppi di corrispondenze (2, 2) sopra una curva razionale. — Applichiamo i risultati precedenti al caso di una curva C razionale, sempre limitandoci ai gruppi contenenti l'inversa di ogni loro corrispondenza, e con particolare riguardo ai *gruppi propriamente discontinui*, e ai *gruppi continui.*

Per costruire i gruppi di tipo (α), dovremo determinare una curva W che possa porsi in corrispondenza (2, 1) con una curva razionale, e i gruppi di corrispondenze birazionali esistenti su di essa. Una tal curva, possedendo una g_2^1, non può essere che razionale, ellittica o iperellittica. L'ultimo caso è però da escludere, poichè le trasformazioni birazionali di una curva iperellittica in sè mutano in sè la sua g_2^1 e danno quindi luogo sulla C, come subito si vede, a doppi di proiettività (¹).

(¹) Si può del resto osservare che la W deve essere birazionalmente equivalente alle curve di corrispondenza delle (2, 2) del gruppo, le quali sono qui rappresentate da equazioni doppiamente quadratiche nelle variabili. Esse sono quindi quartiche piane con due punti doppi (almeno) e quindi curve di genere 0 o 1.

Sia W razionale; ogni gruppo ordinario di proiettività su W dà luogo a un gruppo di (2, 2) su C. Volendo dare alla dipendenza tra i due gruppi un'espressiva forma analitica, si chiamino x e t le coordinate correnti su C e W e si supponga, come è lecito, che la corrispondenza (2, 1) tra W e C sia data da $t^2 = x$. Ad ogni proiettività:

$$t' = \frac{at + b}{ct + d}$$

corrisponderà su C la (2, 2)

$$\sqrt{x'} = \frac{a\sqrt{x} + b}{c\sqrt{x} + d}.$$

Un semplice modello proiettivo si avrà poi assumendo come ente W una conica, come ente C un fascio di rette ad essa complanare, e il cui centro non appartenga alla conica; la corrispondenza (2, 1) risultando dalla condizione di appartenenza di due elementi corrispondenti.

I gruppi propriamente discontinui di (2, 2) su C si otterranno dai gruppi propriamente discontinui di proiettività su W. Poichè questi debbono contenere l'involuzione $t' = -t$, una funzione automorfa corrispondente avrà la forma $F(t^2)$; la $F(x)$ sarà funzione automorfa per il gruppo delle (2, 2) su C.

In modo analogo i gruppi continui di proiettività su W, che sono tutti noti, determineranno i gruppi continui di corrispondenze (2, 2) su C, del tipo (α).

16. Un caso più interessante si ha dall'ipotesi di una W ellittica: noi potremo riferirci per semplicità alla cubica di WEIERSTRASS

$$Y^2 = X^3 - g_2 X - g_3.$$

Le g_2^1 sulla curva sono allora segnate dai fasci che hanno per centri i punti della curva e sono tutte equivalenti rispetto alle trasformazioni birazionali della curva in sè. Potremo perciò assumere per il nostro scopo la g_2^1 segnata dalle rette $X = \text{cost.}$ e come curva C conviene allora assumere l'asse delle X. Ciò posto, un gruppo di corrispondenze biunivoche sulla cubica, contenente la simmetria ($X' = X$, $Y' = -Y$), subordinerà tra le ascisse X un gruppo di (2, 2) del tipo più generale nel campo che stiamo studiando.

La determinazione dei possibili gruppi di corrispondenze biunivoche tra i punti di una cubica piana non offre difficoltà, ricollegandosi ai risultati classici di WEYL e SEGRE (1); tanto più se con l'introduzione del parametro ellittico u per il quale si ha

$$X = \wp(u \mid \omega, \omega'), \quad Y = \wp'(u \mid \omega, \omega')$$

la si trasforma nella ricerca di particolari gruppi di movimenti. Vogliamo perciò soltanto indicare sommariamente qualche carattere dei gruppi che si ottengono, e in modo speciale dei gruppi continui e propriamente discontinui.

Nel caso di una cubica a moduli generali, esistono due soli tipi di corrispondenze, rappresentate, nel piano della u, rispettivamente da *traslazioni* e *simmetrie*. L'identità per la X corrispondendo al complesso $v = \pm u + 2m\omega + 2n\omega'$ contenente ambedue le specie di trasformazioni, lo stesso avviene in ogni gruppo. Il gruppo più generale risulta subito generato da quante si vogliono traslazioni e dalla simmetria $v = -u$. Sulla X, coordinata su C, quest'ultima non ha effetto, e rimangono così (2, 2) della forma

$$S = \begin{pmatrix} \wp(u \pm \alpha) \\ \wp u \end{pmatrix}$$

e che sono quindi *simmetriche*. Esse si interpretano facilmente sulla cubica di WEIERSTRASS; ma sarà anche da ricordare che esse si connettono direttamente alla costruzione dei poligoni di PONCELET (JACOBI, HALPHEN) (2). Precisamente, assumendo come curva C una conica γ, la S si ottiene facendo corrispondere due punti di C quando la loro congiungente è tangente a una seconda conica γ_α, complanare con γ. Al variare di α, la γ_α descrive un fascio a cui appartiene γ.

I gruppi propriamente discontinui si ottengono limitando a tre il numero delle trasformazioni generatrici: due traslazioni indipendenti $v = u + 2\xi$, $v = u + 2\eta$, e la simmetria $v = -u$. Al gruppo debbono appartenere le traslazioni $v = u + 2\omega$, $v = u + 2\omega'$, sicchè tra ξ, η, ω, ω' dovranno sussistere relazioni lineari:

$$a\xi + b\eta = \omega, \quad c\xi + d\eta = \omega'$$

a coefficienti interi e a determinante $ad - bc = N$ non nullo. Dopo ciò si vedrà facilmente che la più generale trasformazione del gruppo in u:

$$v = \pm u + 2m\xi + 2n\eta$$

(1) SEGRE: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche.* « Atti Acc. Sc. Torino », 24, pag. 734, (1889). V. anche SEVERI, loc. cit., n.i 54 e 59.

(2) Cfr. per una estesa trattazione dell'argomento, HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques.* 2e partie, Chap. X, pag. 367 (Paris, Gauthier-Villars, 1888).

dà luogo, al variare di m e di n, a un numero finito di trasformati di $X = \wp u$. Cioè i gruppi propriamente discontinui di questa specie sono tutti *finiti.*

Dalla teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche risulta (¹) che la funzione $\wp(u \mid \xi, \eta)$ è funzione razionale di $\wp(u \mid \omega, \omega')$ (di grado N). Posto allora:

$$\wp(u \mid \xi, \eta) = R[\wp(u \mid \omega, \omega')]$$

sarà $R(X)$ funzione invariante fondamentale per il gruppo delle (2, 2).

Se una delle quantità 2ξ, 2η è un periodo, per esempio $2\eta = 2\omega'$, si può supporre che sia $N\xi = \omega$, e le (2, 2) del gruppo hanno la forma:

$$S_r = \begin{pmatrix} \wp\left(u \pm \frac{2r\omega}{N}\right) \\ \wp u \end{pmatrix}$$

con la legge di composizione:

$$S_r S_{r'} = S_{r+r'} + S_{r-r'}.$$

Nella citata rappresentazione di JACOBI i punti equivalenti rispetto al gruppo sono in tal caso i vertici di un poligono di PONCELET, cioè di un poligono inscritto in γ e circoscritto a una certa conica γ'. Si interpretano allora facilmente le singole (2, 2) del gruppo.

Nel caso generale si hanno configurazioni analoghe, ma più complesse.

Quanto ai gruppi continui di questo tipo, è chiaro che essi si ottengono facendo variare il parametro α nella espressione di S

$$S = \begin{pmatrix} \wp(u \pm \alpha) \\ \wp u \end{pmatrix};$$

nella rappresentazione jacobiana essi saranno perciò generati da una conica γ_α che descrive un fascio contenente la conica fondamentale γ.

17. Un particolare esame richiedono i casi in cui la cubica W sia armonica o equianarmonica, potendo allora intervenire nel gruppo di corrispondenze biunivoche da considerare su W le corrispondenze singolari. Una facile discussione dà i seguenti risultati:

a) Se W è armonica, nel piano della u si ottengono nuovi gruppi ampliando i precedenti mediante una rotazione del tipo $v = iu + \alpha$. Ad essi

(¹) Cfr. p. es. BIANCHI: *Funzioni di variabile complessa e funzioni ellittiche*, pag. 423. (Pisa, Spoerri, 1901).

corrispondono gruppi di (2, 2) ove compariscono anche corrispondenze dissimmetriche.

I gruppi propriamente discontinui richiedono anzitutto

$$\frac{\eta}{\xi}=\frac{i-a}{b}$$

ove a e b sono interi e $a^2+1\equiv 0 \pmod{b}$. Essi si ottengono ampliando quelli del numero precedente mediante la $v=iu$ oppure la $v=iu+\xi$ (in quest'ultimo caso essendo a dispari, b pari). I corrispondenti gruppi di (2, 2) sono ancora finiti; nel primo caso è funzione invariante la $R^2(X)$, quadrato della $R(x)$ già considerata; nel secondo la $R_1^2(X)$, essendo $R_1(X)$ la funzione lineare fratta di $R(X)$ definita da

$$\wp(u+\xi\,|\,\xi,\eta)=R_1[\wp(u\,|\,\omega,\omega')].$$

I gruppi continui si ottengono aggiungendo alla schiera S del caso generale una nuova schiera T definita da

$$T=\begin{pmatrix}\wp(iu\pm\alpha)\\ \wp u\end{pmatrix}$$

che deriva dalla prima mediante l'involuzione $\begin{pmatrix}\wp(iu)\\ \wp u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-X\\ X\end{pmatrix}$.

b) Se W è equianarmonica, i nuovi gruppi risultano dall'aggiunta di una rotazione del tipo $v=\varepsilon u+\alpha$ (ε radice cubica primitiva dell'unità) ai gruppi del caso generale. Si ottengono anche qui (2, 2) dissimmetriche.

I gruppi propriamente discontinui richiedono che sia

$$\frac{\eta}{\xi}=\frac{\varepsilon-a}{b}$$

con a, b interi e $a^2+a+1\equiv 0 \pmod{b}$. La rotazione da aggiungere è la $v=\varepsilon u$ o la $v=\varepsilon u+\xi$. I corrispondenti gruppi di (2, 2) sono finiti; funzioni invarianti sono, nei due casi la $R^3(X)$ o la $R_1^3(X)$, R e R_1 avendo i significati già noti.

I nuovi gruppi continui si ottengono aggiungendo al gruppo delle S del caso generale due schiere T, U che derivano dalla prima moltiplicandola per la proiettività ciclica di 3° ordine

$$\begin{pmatrix}\wp(\varepsilon u)\\ \wp u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon X\\ X\end{pmatrix}$$

e per il suo quadrato.

18. Per la costruzione dei gruppi di tipo (β) su una curva C razionale si osserverà che le involuzioni di 2° ordine su C essendo lineari, W_1 sarà pure razionale e che quindi tutto si riduce a costruire su W_1 gruppi ordinari di proiettività. Se x è la coordinata su C, t quella su W_1, possiamo supporre che la corrispondenza (1, 2) tra W e C sia espressa da $t = x^2$; alla proiettività

$$t' = \frac{at + b}{ct + d},$$

su W_1, corrisponderà la (2, 2)

$$x'^2 = \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}$$

su C; ecc.

Si ha un'evidente reciprocità tra questa costruzione e quella dei gruppi di tipo (α) per W razionale (n.° 15). Essa è generale: posta una corrispondenza (1, 2) tra due curve C_1, C_2, i gruppi di corrispondenze birazionali su C_1 (o C_2) generano gruppi di corrispondenze (2, 2) su C_2 (o C_1); su C_1 i gruppi sono di tipo (α), su C_2 di tipo (β).

19. Gruppi continui di corrispondenze (2, 2) su una curva algebrica. — Abbiamo già incontrato nella precedente ricerca vari esempi di gruppi continui di (2, 2) e cioè quelli che possono esistere su una curva razionale; pochi complementi ci permettono di esaurire la questione per le curve algebriche di genere qualunque. Ed infatti, si tratti di gruppi di tipo (α) o (β), essi corrisponderanno a gruppi continui di corrispondenze birazionali sulla W o W_1; e questi possono esistere solo se questa W o W_1 è razionale o ellittica. Converrà perciò che, allargando leggermente la questione, ci diamo a ricercare tutti i gruppi, continui o no, corrispondenti a queste due ipotesi. Distinguiamo allora quattro casi:

a) Tipo (α), W razionale. — La curva C, immagine di una involuzione su W, è pure razionale, onde ricadiamo nelle ipotesi del n.° 15.

b) Tipo (α), W ellittica. — La curva C è razionale o ellittica; ricercando infatti le involuzioni di 2° ordine su una curva ellittica, che sono date dalle corrispondenze biunivoche involutorie sulla curva, si trovano le g^1_2, aventi $u + v =$ cost. come relazione corrispondente tra i valori del parametro ellittico, e tre involuzioni irrazionali, date da $v - u =$ semiperiodo. Esse sono ellittiche, poichè, per esempio, a una coppia del tipo u, $u + \omega$ corrisponde biunivocamente il punto u della cubica definita da

$$x = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right), \quad y = \wp'\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right).$$

Se C è razionale, si ricade nel caso considerato ai n.ⁱ 16 e 17. Se C è ellittica e coincide con la citata cubica, non si hanno in generale effettivi gruppi di (2, 2) perchè le corrispondenze a valenza su W ($v = \pm u + \alpha$) mutano in sè le involuzioni irrazionali e quindi danno origine su C a (2, 2) riducibili. Ciò non avviene invece per le corrispondenze singolari, quando esistono, le quali danno perciò il modo di formare gruppi di (2, 2) non tutti riducibili. Tali gruppi esistono dunque su C se, W essendo armonica o equianarmonica, il rapporto dei periodi della $\wp u$ corrispondente a C ha uno dei valori $2i$, $-1 + i\sqrt{3}$, o un valore equivalente. La costruzione dei gruppi propriamente discontinui non offre difficoltà; essi sono naturalmente finiti.

Quanto ai gruppi continui, non si ha che un gruppo per ogni caso: il gruppo totale, trasformato del gruppo di tutte le corrispondenze biunivoche esistenti su W, a valenza o singolari.

c) Tipo (β), W_1 razionale. — La C, possedendo una g_2^1 sarà razionale, ellittica o iperellittica. Il primo caso fu trattato al n.° 18; ugualmente semplici — e di scarso interesse — sono gli altri due. A tutti i casi si applica la seguente rappresentazione algebrica.

L'equazione della C sia posta sotto la forma $y^2 = P(x)$; la g_2^1 essendo data da $x = \text{cost.}$; alla proiettività

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

corrisponde su C la trasformazione (2, 2) che muta ciascun punto della coppia $\left(x, \pm\sqrt{P(x)}\right)$ nella coppia $\left(x', \pm\sqrt{P(x')}\right)$. Si formano subito i gruppi propriamente discontinui e i gruppi continui.

d) Tipo (β), W_1 ellittica. — La C dovrà possedere un'involuzione ellittica di 2° ordine, e al solito i gruppi di corrispondenze biunivoche tra le coppie di essa daranno i gruppi di (2, 2) cercati su C.

Nota bibliografica. N.ⁱ 4 e 5. — Ha qualche legame con lo studio dei gruppi finiti una ricerca del sig. A. B. COBLE [1]. In essa si parte da un'equa-

[1] *Multiple binary Forms with the closure Property.* « American Journal of Math. », XLIII, 1921, pagg. 1-17).

zione $f(t, \tau) = 0$ di grado k in t e $\varkappa$ in τ, e, assegnato a t un valore t_0, si immaginano determinati i $\varkappa$ valori di τ ad esso corrispondenti, poi i valori di t corrispondenti ai valori trovati, e così via. Se con un numero finito di operazioni si giunge a gruppi di n valori di t e di ν valori di τ tali che le ulteriori operazioni diano valori contenuti in questi gruppi, si dice che la corrispondenza definita dalla data equazione ammette una configurazione $\Delta_{n,\nu}^{k,\varkappa}$. Se ciò avviene per ogni valore di t_0, la corrispondenza è detta *poristica.*

Il sig. COBLE dà una condizione perchè l'esistenza di una configurazione porti seco il carattere poristico della corrispondenza, e trova la condizione affinchè l'equazione $f(t, \tau) = 0$ definisca una corrispondenza poristica: la funzione $f(t, \tau)$ deve essere un divisore di una funzione del tipo $\alpha(t)\beta(\tau) - \gamma(t)\delta(\tau)$, α, β, γ, δ essendo simboli di funzioni razionali intere. Seguono svariate applicazioni e casi particolari.

Dal nostro punto di vista la ricerca può presentarsi nel modo seguente. Essendo S la corrispondenza tra gli enti (t) e (τ) definita da $f(t, \tau) = 0$, si costruiscono le corrispondenze SS^{-1}, $SS^{-1}S$, $SS^{-1}SS^{-1}$,... cioè le $(SS^{-1})^r$ operanti su (t) e le $(SS^{-1})^rS$ operanti tra (t) e (τ). Se le prime, che costituiscono un gruppo, danno per ogni valore di t un numero finito di corrispondenti, esse potranno formarsi con un numero finito di corrispondenze irriducibili T_1, T_2,... T_s, che costituiranno pure un gruppo (n.° 2). I punti equivalenti daranno i gruppi di una g_n^1; una analoga g_ν^1 si avrà su (t) e le due serie saranno proiettive. Fra le rispettive funzioni invarianti si avrà perciò una relazione bilineare, riducibile alla forma $R(t) = R_1(\tau)$. Onde il risultato del sig. COBLE.

La cosa è estendibile a curve algebriche qualunque e consente qualche interessante sviluppo.

N.i 8-11. — Le condizioni per la riducibilità del prodotto di due corrispondenze (2, 2), nel caso razionale, hanno formato oggetto di studio da parte di FOUCHÉ (1). Il risultato ottenuto da questo Autore può enunciarsi: Condizione necessaria affinchè la risultante rispetto a y delle relazioni doppiamente quadratiche, irriducibili:

$$f(x, y) = 0, \quad g(y, z) = 0,$$

si scinda in due fattori distinti, è che i valori critici di y (radici semplici o triple del discriminante rispetto all'altra variabile) siano i medesimi per le due equazioni.

(1) *Sur la transformation doublement quadratique, les polygones de Poncelet et l'involution multiple.* (« Bull. Soc. Math. de France », XLIV, 1916, pagg. 120-160).

Il teorema del sig. FOUCHÉ si può facilmente estendere al caso generale mediante semplici considerazioni topologiche. Si consideri, come al n.° 12, il prodotto di due (2, 2) irriducibili S, T e il relativo schema

$$ST;\quad \begin{matrix} P' \searrow & & \\ & Q_1 \to (R_{11},\ R_{12}), \\ P \nearrow & \\ P \searrow & Q_2 \to (R_{21},\ R_{22}), \end{matrix}$$

dove P' rappresenta ancora il punto che insieme a P corrisponde a Q_1 in S^{-1}. Si considerino i varî punti come appartenenti, invece che alle curve algebriche C, C', C'', alle loro riemanniane Σ, Σ', Σ'', e si segnino su Σ' i punti di diramazione della S^{-1} e della T, cioè i punti tali che un ciclo che avvolga uno di essi, descritto da Q, scambi su Σ, o Σ'', le due determinazioni di P, o di R, rispettivamente.

Se P descrive un ciclo su Σ, tale da portare Q_1 in Q_2, il punto R_{11} di Σ'' andrà in R_{21} o R_{22}, sicchè, se ST è riducibile, R_{11} e R_{21} oppure R_{11} e R_{22} corrispondono certamente a P in una *stessa* parte irriducibile di ST. Ne segue che due casi essenzialmente distinti sono solo possibili:

a) I cicli descritti da P portano R_{11} in sè o in R_{21}; si hanno allora le due corrispondenze:

$$U;\ P \begin{matrix} \nearrow R_{11} \\ \searrow R_{21} \end{matrix}, \qquad V;\ P \begin{matrix} \nearrow R_{12} \\ \searrow R_{22} \end{matrix},$$

eventualmente riducibili a doppi di (1, 1);

b) È $R_{11} = R_{21}$ e $R_{12} = R_{22}$, potendo o no i cicli di P condurre R_{11} in R_{12}.

Il caso *b)* fu già discusso nel testo e porta all'ipotesi β) dell'enunciato dato al n.° 10. Nel caso *a)*, si è visto (n.° 12) che la U che muta P in R_{11} muta anche P' in R_{12}.

Ne viene che se Q_1 descrive su Σ' un ciclo che su Σ porti P in P', su Σ'' andrà R_{11} in R_{12}. La considerazione della $T^{-1}S^{-1}$ porta ugualmente a concludere che un ciclo di Q_1 che su Σ'' porti R_{11} in R_{12} porterà, su Σ, P in P'.

Da ciò risulta subito che i punti di diramazione di S^{-1} e di T su Σ' coincidono; chè se un punto di diramazione di una delle corrispondenze non fosse tale per l'altra, esisterebbe un ciclo di Q_1 intorno a tal punto tale da dar luogo allo scambio delle determinazioni su una delle superficie Σ, Σ'' e non sull'altra.

Questo risultato dà nel caso razionale il teorema del sig. FOUCHÉ, teorema di cui egli stesso, e prima di lui il sig. Fontené ([1]), dimostrano facilmente l'inverso. Si ha però ragione di ritenere che l'inversione non possa farsi nel caso generale. Occorrerebbe infatti provare che ogni ciclo descritto da P, che porta P in sè, porta in sè anche R, e ciò come conseguenza dell'identità dei punti di diramazione. Ora ciò può dimostrarsi facilmente per i cicli riducibili a zero (cioè riducibili a più cicli elementari — *cappi* — intorno ai punti di diramazione); ma non è escluso che per i cicli non riducibili a zero, certamente esistenti se C' non è razionale, il comportamento di P e di R su Σ e Σ'' possa essere diverso. In altre parole, immaginando Σ' resa semplicemente connessa con una serie di opportuni tagli, non è escluso che ai tagli S^{-1} e T si comportino differentemente (cioè per una e non per l'altra vi sia scambio di determinazioni).

N.^{i} 15-16. — I gruppi di corrispondenze algebriche su una variabile, cioè nel caso razionale, sono stati studiati sotto l'aspetto della teoria dei gruppi di Lie, dal sig. K. Carda ([2]). Non sembra che questa ricerca abbia legami immediati con la nostra perchè, scegliendosi per le trasformazioni una speciale determinazione, non entra in questione la loro non univocità nel campo totale. Precisamente, sia

$$f(x,\ y,\ c_i)=0 \qquad\qquad (i=1,2,\dots\, n)$$

l'equazione di un gruppo ad n parametri (che per brevità supponiamo ad una sola schiera) del tipo indicato. Poste le equazioni

$$f(x,\ y,\ c_i)=0,\quad f(y,\ z,\ c_i')=0$$

dovrà, almeno per una coppia di determinazioni di y e z, esistere un sistema c_i'' di costanti tali che si abbia:

$$f(x,\ z,\ c_i'')=0;$$

in altre parole, dovrà la risultante delle due prime equazioni rispetto ad y contenere un fattore di questa forma.

Ciò equivale alla seguente formulazione geometrica del concetto di gruppo, applicabile anche a curve algebriche qualunque e a gruppi discontinui: un aggregato G di corrispondenze è un gruppo se il prodotto di due corrispon-

([1]) « Bull. de la Soc. Math. de France », XXI, 1897.

([2]) *Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Gerade und der Ebene.* (« Monatsh. für Math. u. Physik », XI, 1900, S. 31-58).

denze di G *contiene* una corrispondenza di G. Essa è dunque ben più larga di quella che ha formato oggetto del presente lavoro. Così, una corrispondenza S simmetrica ($S^{-1} = S$) e l'identità formano un gruppo nel senso ora indicato, non in generale nel nostro.

Ad ogni modo, la Nota del sig. Carda si presta a qualche confronto interessante, in quanto può dar luce su ciò che potrà risultare per il caso razionale nello studio dei gruppi continui più generali, nel senso da noi adottato.

Sugli invarianti differenziali di una forma bilineare mista.

Memoria di V. HLAVATY (a Praga).

In questa Memoria vogliamo studiare la teoria degli invarianti algebrici e differenziali di un affinore misto $P_\lambda^{\cdot\nu}$ i cui elementi siano funzioni assegnate di n variabili indipendenti $\xi^1, \ldots, \xi^n$ $(n > 1)$, limitandoci al caso in cui l'equazione caratteristica $\| P_\lambda^{\cdot\nu} - \omega \delta_\lambda^\nu \| = 0$ ci fornisce n radici distinte, diverse da zero $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. In tale supposizione l'affinore $P_\lambda^{\cdot\nu}$ individua in ogni punto dello spazio rappresentativo degli argomenti ξ una omografia vettoriale e n direzioni *unite*, linearmente indipendenti, cosicchè nello stesso spazio rimangono univocamente definite n congruenze $C_1, \ldots, C_n$ di curve.

Partendo soltanto dai dati della questione, (cioè dall'affinore $P_\lambda^{\cdot\nu}$), i vettori tangenti di tali curve risultano definiti ognuno *a meno* di un fattore *a priori* arbitrario risp. $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ (§ 1, 2). Ad ogni scelta di tali moltiplicatori corrisponderà una connessione riemanniana ben determinata $V_n^{(\rho)}$, nella quale le congruenze risultano ortogonali (§ 3). Fra tali connessioni ce n'è una (definita a meno di condizioni iniziali) per la quale le congruenze C_a sono *solenoidali* (§ 5).

D'altra parte, supponendo lo spazio delle ξ dotato di una connessione lineare generale, saremo ancora in grado di fissare le funzioni ρ basandoci unicamente alle proprietà delle congruenze C_a, (senza far intervenire — come nei casi precedenti — le connessioni ausiliarie) (§ 6, 7).

Riassumendo i risultati più importanti, vediamo che gli invarianti algebrici dell'affinore $P_\lambda^{\cdot\nu}$ si riducono alle n radici $\omega_1, \ldots, \omega_n$, nonchè alle direzioni unite, spiccate da ogni punto dello spazio ambiente, mentre la connessione $V_n^{(\rho)}$, nella quale le congruenze ortogonali C_a risultano *solenoidali* può essere riguardata come sintesi di tutti gli invarianti differenziali (nel senso di RICCI) dell'affinore $P_\lambda^{\cdot\nu}$.

Rimane con ciò, come sarà specificato nel § 8), risolto il problema della determinazione di tutti gli invarianti algebrici e differenziali spettanti all'affinore misto doppio $P_\lambda^{\cdot\nu}$, problema che, se certo non ne ha l'importanza, è forse il più vicino a quello classico, concernente l'invarianti assoluti di un ds^2 riemanniano, ossia di un *tensore covariante doppio* $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$. Un tale problema, per quanto mi è consta, non era ancora stato preso in considerazione, mentre oltre alle ricerche pure classiche, concernenti invarianti o tensori associati ad un ds^2, sono stati istituiti studi recenti su altre teorie invariantive, suggerite dai problemi della geometria del trasporto [1].

I.

1. Immaginiamo dato uno spazio a n dimensioni, dotato di una connessione lineare generale coi coefficienti $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ [2]. Tale spazio chiameremo *varietà* L_n. Ad ogni vettore generico controvariante $\boldsymbol{v}$ risp. covariante $\overline{\boldsymbol{w}}$ [3] può associarsi in modo intrinseco un affinore $\nabla_{\mu}v^{\nu}$ risp. $\nabla_{\mu}w_{\lambda}$ mediante le formule

$$\nabla_{\mu}v^{\nu}=\frac{\partial v^{\nu}}{\partial\xi^{\mu}}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}v^{\lambda}, \quad \nabla_{\mu}w_{\lambda}=\frac{\partial w_{\lambda}}{\partial\xi^{\mu}}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}w_{\nu},$$

dove ξ^{ν} designano le coordinate della varietà L_n.

Se i coefficienti $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ si riducono ai simboli di Christoffel (spettanti ad un tensore $g_{\lambda\mu}=g_{\mu\lambda}$ assegnato di rango n)

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}=1/2\, g^{\varkappa\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}}g_{\varkappa\lambda}+\frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}}g_{\varkappa\mu}-\frac{\partial}{\partial\xi^{\varkappa}}g_{\lambda\mu}\right),$$

ogni spazio dotato di tale connessione dicesi *varietà riemanniana* e si designa con V_n.

2. Sia P^{ν}_{λ} un affinore assegnato in un campo a n dimensioni, il che significa che in ogni punto di tale campo sono date le n^2 sue componenti, funzioni del posto $P^1_1(\xi),\ldots, P^n_n(\xi)$.

Consideriamo dapprima l'intorno infinitesimale del punto generico P del campo. Ove si immagini un sistema di incrementi $d\xi^{\nu}$ attribuiti alle coordinate, questi definiscono notoriamente una direzione spiccata da P, anzi, in modo più preciso, possono interpretarsi come componenti di un vettore infinitesimo contravariante, spiccato da P.

---

(1) T. Y. Thomas-Aristotle D. Michel: *Differential invariants of affinely connected manifolds.* (« Annals of Matematics », vol. 28, n. 2, pp. 196-236). Cfr. anche O. Veblen: *Invariants of quadratic differentialforms.* (« Cambridge University Press », London, 1927).

(2) Gli indici greci percorrono i valori 1, 2,...., n. Al solito sottointendiamo il segno di somma (da 1,.... a n) rispetto all'indice *muto* greco.

(3) Adopereremo di regola il criterio uniforme di designare gli affinori con lettere latine munite di indici greci (tanti quanto è il rango dell'affinore). Solo per i vettori useremo anche lettere grassette designando, per esempio, i vettori contravarianti con $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{E}$ nonchè i vettori covarianti con $\overline{\boldsymbol{w}}$, $\overline{\boldsymbol{p}}$, $\overline{\boldsymbol{r}}$,.....

L'affinore P^ν_λ consente di far corrispondere invariantivamente al vettore $d\xi^\nu$ un nuovo vettore contravariante (egualmente infinitesimo) $\delta\xi^\nu$, definito dalle formule

$$\delta\xi^\nu = P^\nu_\lambda d\xi^\lambda.$$

Se (come vogliamo supporre) il determinante $\| P^\nu_\lambda \| \neq 0$, la corrispondenza fra $\delta\xi^\nu$ e $d\xi^\nu$ è biunivoca.

La interpretazione geometrica di vettore (spiccato da P) si può astrattamente estendere dal campo infinitesimale al campo finito, attribuendola ad un generico sistema contravariante $\boldsymbol{v}$ i cui elementi siano funzioni delle ξ. L'affinore P^ν_λ ci consente di associare ad ogni vettore generico contravariante $\boldsymbol{v}$ un vettore contravariante $^*\boldsymbol{v}$ (associato di $\boldsymbol{v}$)

$$^*v^\nu = P^\nu_\lambda v^\lambda. \tag{1}$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per una funzione qualsiasi del posto ρ, si ha

$$(\rho\, ^*v^\nu) = P^\nu_\lambda (\rho v^\lambda).$$

Vediamo così che alla direzione, individuata dai vettori $\rho\, \boldsymbol{v}$, cioè dai rapporti

$$v^1 : v^2 : v^3 : \dots : v^n,$$

rimane associata univocamente una direzione individuata da uno qualunque dei vettori $\rho\, ^*\boldsymbol{v}$, cioè dai rapporti

$$P^1_\lambda v^\lambda : P^2_\lambda v^\lambda : \dots : P^n_\lambda v^\lambda.$$

È naturale di domandarsi se fra tali direzioni associate ne esistono di unite, tali cioè che sussistono le relazioni

$$\omega(\rho e^\nu) = P^\nu_\lambda \rho e^\lambda, \tag{2}$$

essendo ω un moltiplicatore *a priori* arbitrario (funzione del posto al pari dei dati della questione).

Per risolvere il sistema omogeneo (2) con valori non nulli, è necessario e sufficiente che si annulli il determinante Π

$$\Pi = \begin{vmatrix} P^1_1 - \omega, & P^1_2 & \dots & P^1_n \\ P^2_1 & P^2_2 - \omega & \dots & P^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^n_1 & \dots & \dots & P^n_n - \omega \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

In seguito supporremo sempre che l'equazione (3) (di grado n in ω) presenti il caso generale, cioè abbia le n radici $\omega_a (a = 1, \ldots, n)$ distinte; per l'ipotesi che $\| P^\nu_\lambda \| \neq 0$, esse risultano altresì diverse da zero. Tale supposizione ci consente di assegnare n direzioni *unite*, linearmente indipendenti, individuate da n vettori contravarianti e_a, i quali sono definiti — a meno di un fattore scalare (che rimane indeterminato) — dalle equazioni

$$(4) \qquad \omega_a e_{a|}{}^{\nu} = P^{\nu}_{\lambda} e_a{}^{\lambda}.$$

Scegliendo (con criterio arbitrario quanto al fattore moltiplicativo ρ) siffatti vettori e_a, ogni altra soluzione della (2) può scriversi

$$(5) \qquad E_a = \rho_a e_a,$$

dove le ρ sono funzioni arbitrarie del posto.

Ogni vettore e_a individua — nello spazio rappresentativo delle ξ — una congruenza di curve C_a mediante le equazioni differenziali

$$(6) \qquad \frac{d\xi^1}{e_a{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \ldots = \frac{d\xi^n}{e_a{}^n}.$$

Giova definire queste curve in rappresentazione parametrica, pensandone le coordinate ξ funzioni di una variabile ausiliaria s_a, il che può farsi, naturalmente, in infiniti modi. Noi converremo di assumere ds_a eguale al valore comune degli n membri della (6) ponendo complessivamente

$$(6') \qquad \frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_a{}^2} = \ldots = \frac{d\xi^n}{e_a{}^n} = \frac{ds_a}{1}.$$

Scegliendo un altro parametro S_a, le curve della C_a possono essere definite anche mediante le posizioni

$$(6'') \qquad \frac{d\xi^1}{E_a{}^1} = \frac{d\xi^2}{E_{a|}{}^2} = \ldots = \frac{d\xi^n}{E_a{}^n} = \frac{dS_a}{1}.$$

Una direzione tangente ad una curva qualsiasi della congruenza C_a risulta, in base alle (6), direzione unita, donde segue che la congruenza C_a rimane invariantivamente associata all'affinore P^ν_λ.

Ci serviremo di tali congruenze invarianti per individuare nello spazio delle ξ delle connessioni riemanniane, pur esse invarianti.

3. A tal uopo introdurremo accanto ai vettori contravarianti e_a, E_a i vettori covarianti $\bar{e}_a$, $\bar{E}_a$ le cui componenti, attesa la indipendenza degli n, e_a e quindi anche degli E_a, rimangono univocamente definite dalle equazioni

$$e_a \times \bar{e}_b = \delta_{ab}, \quad E_a \times \bar{E}_b = \delta_{ab} \text{ [1]},$$

col solito significato di δ_{ab} ($=0$ per $a \neq b$, $=1$ per $a=b$). Ne segue

$$\bar{e}_a = \rho_a \bar{E}_a. \tag{5'}$$

I vettori e_a ci consentono di costruire i tensori

$$g_{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_a e_{a|\lambda} e_{a|\mu}, \quad g^{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_a e_{a|}{}^{\lambda} e_{a|}{}^{\mu}, \tag{7}$$

(i quali risultano reciproci, nel senso che si attribuisce a tale designazione nella teoria dei determinanti) mentre i vettori E_a danno luogo ai tensori analoghi

$$G_{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_a E_{a|\lambda} E_{a|\mu}, \quad G^{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_a E_{a}{}^{\lambda} E_{a|}{}^{\mu}. \tag{7'}$$

I tensori $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ possono essere riguardati come assegnati, mentre $G_{\lambda\mu}$, $G^{\lambda\mu}$ dipendono, oltre che dai vettori e, $\bar{e}$, anche delle funzioni arbitrarie ρ, risultando dalle (7'), per le (5) e (5'):

$$G_{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_a \frac{1}{\rho_a^2} e_{a\,\lambda} e_{a|\mu}, \quad G^{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_a \rho_a^2 e_{a|}{}^{\lambda} e_{a|}{}^{\mu}. \tag{7''}$$

Possiamo costruirne i simboli di CHRISTOFFEL

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = 1/2\, g^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} g_{\alpha\lambda} + \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} g_{\alpha\mu} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} g_{\lambda\mu}\right), \tag{8}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 1/2\, G^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} G_{\alpha\lambda} + \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} G_{\alpha\mu} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} G_{\lambda\mu}\right), \tag{8'}$$

i quali sono legati dalle relazioni

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} + T^{\nu}_{\lambda\mu}, \tag{9}$$

dove l'affinore $T^{\nu}_{\lambda\mu}$ dipende dalle funzioni ρ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T^{\nu}_{\lambda\mu} = &-\sum_1^n{}_i\left(e_{i|}{}^{\nu} e_{i|\lambda} \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log\rho_i + e_i{}^{\nu} e_{i|\mu} \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} \log\rho_i\right) - 1/2 \sum_1^n{}_{i,j}\, e_i{}^{\nu} e_i{}^{\alpha} e_{j\,\mu} e_{j|\lambda}\, \rho_i^2 \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} \frac{1}{\rho_j^2} \\ &+ 1/2 \sum_1^n{}_{k \neq l}\left(\frac{\rho_k^2}{\rho_l^2} - 1\right) e_k{}^{\nu} e_{k|}{}^{\alpha}\left(e_{l|\lambda} \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} e_{l|\alpha} + e_{l\,\mu} \frac{\partial}{\partial\xi^{\lambda}} e_{l\,\alpha} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}} e_{l|\lambda} e_{l|\mu}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

---

[1] Con $v \times \bar{w}$ designeremo l'invariante $v^{\lambda} w_{\lambda}$.

Vediamo così che:

Un generico affinore P^{ν}_{λ} *dà luogo ad infinite connessioni riemanniane definite mediante* (8'), (9), (10).

Designeremo con $V_n^{(\rho)}$ il nostro spazio, in quanto dotato della connessione riemanniana (8') (la quale — ricordiamolo — dipende dalle indeterminate ρ), ed analogamente scriveremo V_n per designare la varietà riemanniana individuata dai coefficienti (8) (che sono ben determinati).

Osservazione I. I vettori $\boldsymbol{e}_a$ possono essere riguardati come versori (cioè vettori di lunghezza 1) ortogonali fra loro *nella* V_n, rispetto al tensore metrico $g_{\lambda\mu}$. Infatti si ha

$$g_{\lambda\mu} e_{a|}{}^{\lambda} e_{b|}{}^{\mu} = \Sigma_j\, e_{j|\lambda} e_{j|\mu} e_{a|}{}^{\lambda} e_{b|}{}^{\mu} = \delta_{ab}.$$

D'altra parte si deduce (sempre nella V_n)

$$g_{\lambda\mu} e_{a|}{}^{\lambda} = \sum_1^n{}_j\, e_{j|\lambda} e_{j|\mu} e_{a|}{}^{\lambda} = e_{a|\mu}\,; \quad g^{\lambda\mu} e_{a|\lambda} = \sum_1^n{}_j\, e_{j|}{}^{\lambda} e_{j|}{}^{\mu} e_{a|\lambda} = e_{a|}{}^{\mu},$$

donde segue che $e_{a|}{}^{\nu}$, $e_{a|\lambda}$ sono le componenti contravarianti risp. covarianti dello stesso versore $\boldsymbol{e}_a = \bar{e}_a$ di V_n. Tutto ciò vale naturalmente anche per i vettori $\boldsymbol{E}_a$ nella varietà $V_n^{(\rho)}$.

Osservazione II. Anche se i moltiplicatori ρ sono tutti costanti, le connessioni sono in generale distinte, ciò che risulta dalla (10). Infatti, la parte dell'affinore $T^{\nu}_{\lambda\mu}$, la quale dipende soltanto algebricamente dalle funzioni ρ

$$1/2 \sum_1^n{}_{k \neq l} \left(\frac{\rho_k^2}{\rho_l^2} - 1\right) e_{k|}{}^{\nu} e_{k|}{}^{\alpha} \left(e_{l|\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} e_{l|\alpha} + e_{l|\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} e_{l|\alpha} e_{l|\mu}\right)$$

può scriversi anche

$$1/2 \sum_1^n{}_{k \neq l} \left(\frac{\rho_k^2}{\rho_l^2} - 1\right) e_{k|}{}^{\nu} e_{k|}{}^{\alpha} \left[e_{l|\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} e_{l|\mu}\right) + e_{l|\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda}} e_{l|\alpha} - \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} e_{l|\lambda}\right)\right],$$

donde segue che, essendo le ρ costanti e distinte, le connessioni V_n, $V_n^{(\rho)}$ coincidono soltanto se i vettori $\boldsymbol{e}_a$ sono gradienti.

4. Ogni scelta delle funzioni ρ ci conduce ad una connessione particolare. Vogliamo intanto indicarne qualche esempio, limitandoci a scelte, le quali posseggono una interpretazione geometrica espressiva.

Un primo modo semplice, per quanto particolare, di vincolare le ρ, è il seguente: Supponiamo che fra tutte le trasformazioni possibili delle coordinate ξ siano ammesse sollanto quelle, il cui jacobiano è costante. Sotto tale restrizione le espressioni $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$, $\overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu}$ si comportano come componenti di vettori covarianti, i quali designeremo con G, $\overline{g}$, ponendo

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = G_{\mu}, \quad \overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu} = \overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\alpha} = g_{\mu}.$$

Ci proponiamo di trovare tutte le varietà $V_n^{(\rho)}$ per cui il vettore $\overline{G}$ risulta zero. Badando alle (9), (10), otteniamo

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} = G_{\mu} = g_{\mu} + T^{\alpha}_{\alpha\mu} = g_{\mu} - \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log \rho_1 \dots \rho_n.$$

D' altra parte, in base alle (10), si ha

$$\overset{o}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\mu} = g_{\mu} = 1/2 \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log g \qquad (g = \| g_{\lambda\mu} \|),$$

donde apparisce che è lecito porre

$$g_{\mu} = \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}} \log \rho_1 \dots \rho_n$$

o, il che è lo stesso,

$$\boxed{\sqrt{g} = \rho_1 \dots \rho_n}$$

e con tale scelta soddisfaciamo le condizioni che ogni G_{μ} si annulli.

5. Le condizioni prescritte nel numero precedente non ci forniscono le equazioni per *tutte* le funzioni ρ, cosicchè dovremo scegliere $n-1$ funzioni ρ in modo arbitrario.

Qui vogliamo indicare un procedimento intrinseco il quale ci fornirà tutti i moltiplicatori ρ, basandoci sulla nozione della divergenza vettoriale.

A tal uopo ricordiamo anzitutto il significato geometrico della divergenza vettoriale del versore tangente a una curva di una congruenza assegnata [1]. Essendo data una congruenza C di curve in una varietà riemanniana, ne scegliamo una generica c e su tale curva fissiamo due punti vicinissimi P, P', nonchè le giaciture π, π' [$(n-1)$-dimensionali] ortogonali a c nei punti P, P'. Per ogni punto Q vicinissimo a P nella giacitura π passa una delle curve

[1] Questa interpretazione geometrica della divergenza vettoriale è dovuta al sig. DUBOURDIER. Cfr.: *Sur les congruences des courbes.* « Rend. Acc. Lincei », vol. V, fasc. 4 (20 febbraio 1927) pp. 265-271.

della C la quale incontra la giacitura π' in un punto Q'. La congruenza C ci consente di stabilire così una corrispondenza fra π e π' la quale può essere riguardata come una deformazione infinitesimale H. Ora, designando con τ il volume di un elemento infinitesimale a $n-1$ dimensioni della π intorno al punto P, tale volume subisce per H una variazione $d\tau$, definita dall'equazione

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{ds} = \operatorname{div} \boldsymbol{u},$$

essendo s l'arco metrico della c e $\boldsymbol{u}$ il suo versore tangente. Ne segue in particolare che per $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ la variazione è zero. Noi chiameremo, secondo CISOTTI (¹), le congruenze, le cui curve soddisfano a tale equazione « congruenze solenoidali ».

Ciò posto, sceglieremo le funzioni ρ in tal modo che ognuna delle congruenze C_a $(a=1,\dots,n)$ risulti *solenoidale*. In tal caso devono sussistere le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} E_a{}^\mu + \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} E_a{}^\mu = 0 \qquad (a=b,\dots,n)$$

le quali, in base alla (9), possono scriversi anche

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} e_a{}^\mu + \overset{o}{\Gamma}{}^\alpha_{\alpha\mu}\, e_a{}^\mu\right) + e_{a|}{}^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \log \rho_a - e_a{}^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \log \rho_1 \dots \rho_n = 0 \quad (a=1,\dots,n). \tag{11}$$

Ora, designando con η_a la divergenza

$$\eta_a = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} e_{a|}{}^\mu + \overset{o}{\Gamma}{}^\alpha_{\alpha\mu}\, e_{a|}{}^\mu,$$

(la quale può essere riguardata come assegnata) si ha per (11)

$$\eta_a = e_a{}^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \log \rho_1 \dots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \dots \rho_n .$$

Per risolvere questa equazione ci occorre risolvere il sistema

$$\frac{d\xi^1}{e_a{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_a{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n} = \frac{d \log \rho_1 \dots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \dots \rho_n}{\eta_a}. \tag{12}$$

D'altra parte, sappiamo che la congruenza C_a è definita dalle (6')

$$\frac{d\xi^1}{e_a{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_a{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_{a|}{}^n} = \frac{ds_a}{1}. \tag{6'}$$

(¹) CISOTTI : *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XIX, (20 marzo 1910) pp. 325-329.

Confrontando (6′) con (12), risulta

$$d \log \rho_1 \dots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \dots \rho_n = \eta_a ds_a. \tag{13}$$

Se si suppongono assegnate le ρ nei punti di una varietà σ a $n-1$ dimensioni che tagli tutte le C_a (che cioè non sia costituita da linee delle stesse C_a) basta una quadratura per ottenere dalla (13)

$$\frac{\rho_1 \dots \rho_{a-1} \rho_{a+1} \dots \rho_n}{\rho_1^{(\sigma)} \dots \rho_{a-1}^{(\sigma)} \rho_{a+1}^{(\sigma)} \dots \rho_n^{(\sigma)}} = e^{\int_0^{s_a} \eta_a ds_a}$$

dove l'integrale del secondo membro è calcolato lungo la C_a (che passa per il punto generico che si vuol considerare), a partire dalla intersezione della stessa C_a colla σ.

Allora, ponendo

$$\varphi_a = \frac{1}{n-1}\left(-(n-2)\int_0^{s_a} \eta_a ds_a + \Sigma_{f \neq a} \int_0^{s_f} \eta_f ds_f\right),$$

si deduce dalle (13′)

$$\boxed{\rho_a = \rho_a^{(\sigma)} e^{\varphi_a}}.$$

Vediamo così che con questo procedimento possiamo fissare in modo intrinseco tutte le funzioni ρ a meno di condizioni iniziali (o di portata equivalente) che rimangono tuttora arbitrarie, e che (nei casi singoli) si dovrebbero esaminare ulteriormente, per esaurire la discussione.

Ad ogni affinore P_λ^ν *il quale dà luogo a* n *congruenze invarianti* C_a *può associarsi univocamente (a meno di condizioni iniziali) una connessione riemanniana, nella quale ognuna delle congruenze* C_a *risulta solenoidale.*

II.

6. Nei numeri precedenti abbiamo indicato criteri differenziali per scegliere le ρ nell'ipotesi che sia dato soltanto l'affinore P_λ^ν.

Qui vogliamo supporre che oltre a questo affinore P_λ^ν, sia data una connessione lineare generale non-metrica, cosicchè l'affinore P_λ^ν possa essere riguardato come assegnato *nella varietà* L_n (vedi § 1). Ne segue che in tal caso sarebbe artificiale di fare intervenire le ausiliare connessioni riemanniane $V_n^{(\rho)}$; ma è preferibile attenersi unicamente alla assegnata connessione lineare, ed unicamente in base ad essa, individuare le ρ mediante proprietà delle congruenze invarianti.

Designando con ∇_μ il simbolo della derivazione covariante nella L_n (vedi § 1) introdurremo i simboli

$$\Theta_a = E_{a|}{}^{\mu}\nabla_{\mu}, \quad \vartheta_a = e_{a|}{}^{\mu}\nabla_{\mu}, \tag{14}$$

con che

$$\Theta_a = \rho_a \vartheta_a . \tag{15}$$

Il vettore $\vartheta_a e_b$ può essere messo sotto la forma

$$\vartheta_a \boldsymbol{e}_b = \sum_{1}^{n}{}_c \overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} \boldsymbol{e}_c , \tag{16}$$

essendo $\overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba}$ i coefficienti, definiti dalle relazioni

$$\Lambda^c_{ba} = \left(e_{a|}{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} e_{b|}{}^{\nu} + \overset{o}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} e_a{}^{\mu} e_{b|}{}^{\lambda} \right) e_c{}^{\nu} \text{ [1].}$$

Dall'ennupla e si deduce l'ennupla generale mediante (5), (5'). Portando tali valori nella (16) e badando alla (15) si ricava

$$\frac{1}{\rho_a} \Theta_a \frac{1}{\rho_b} \boldsymbol{E}_b = \sum_{1}^{n}{}_c \overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} \frac{1}{\rho_c} \boldsymbol{E}_c ,$$

donde segue l'equazione

$$\Theta_a \boldsymbol{E}_b = \rho_a \rho_b \sum_{1}^{n}{}_c \left(\overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} \frac{1}{\rho_c} - \delta_{bc} \vartheta_a \frac{1}{\rho_c} \right) \boldsymbol{E}_c , \tag{17}$$

la quale può scriversi anche (per $f \neq b$)

$$\Theta_a \boldsymbol{E}_b = \rho_a (\overset{o}{\Lambda}{}^b_{ba} + \vartheta_a \log \rho_b) \boldsymbol{E}_b + \rho_a \rho_b \Sigma_{f \neq b} \overset{o}{\Lambda}{}^f_{ba} \frac{1}{\rho_f} \boldsymbol{E}_f . \tag{17'}$$

Ora fisseremo i coefficienti in tal modo che per ogni $a = b$ il vettore $\Theta_a \boldsymbol{E}_a$ sia contenuto nella giacitura dei vettori $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots \boldsymbol{E}_{a-1}, \boldsymbol{E}_{a+1}, \ldots \boldsymbol{E}_n$ ciò che rappresenta una condizione intrinseca. Ponendo $a = b$ nella (17) si ottiene (per $f \neq a$)

$$\Theta_a \boldsymbol{E}_a = \rho_a (\overset{o}{\Lambda}{}^a_{aa} + \vartheta_a \log \rho_a) \boldsymbol{E}_a + \rho_a^2 \Sigma_{f \neq a} \overset{o}{\Lambda}{}^f_{aa} \frac{1}{\rho_f} \boldsymbol{E}_f .$$

[1] Questa equazione segue subito dalla posizione

$$\vartheta_a e_b{}^{\nu} = \sum_{1}^{n}{}_c \overset{o}{\Lambda}{}^c_{ba} e_{c|}{}^{\nu} = e_{a|}{}^{\mu} \nabla_{\mu} e_{b|}{}^{\nu} .$$

Allora, per soddisfare la nostra condizione, basta porre

$$-\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} = \vartheta_a \log \rho_a$$

o, il che è lo stesso

$$-\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} = e_a{}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} \log \rho_a .$$

Per risolvere questa equazione, ci occorre risolvere in primo luogo il sistema

$$\frac{d\xi^1}{e_{a|}{}^1} = \frac{d\xi^2}{e_{a|}{}^2} = \dots = \frac{d\xi^n}{e_a{}^n} = - \frac{d \log \rho_a}{\overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa}} .$$

D'altra parte, si ha il sistema (6'), il quale definisce la congruenza C_a. Confrontando entrambi i sistemi si ricava

$$d \log \rho_a = - \overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} ds_a ,$$

donde segue, introducendo, come al numero precedente, una superficie σ che seghi tutte le C_a, ed i valori $\rho_a^{(\sigma)}$ delle ρ su tale superficie:

$$\boxed{\rho_a = \rho_a^{(\sigma)} e^{-\int_0^{s_a} \overset{o}{\Lambda}{}^{a}_{aa} ds_a}}$$

e tale scelta risolve il nostro problema.

7. Un' altra scelta delle funzioni ρ si presenta nella ricerca degli « archi affini » di curve delle congruenze $C_1, \dots, C_n$. Ho già avuto occasione di mostrare l'esistenza di tal arco, studiando le proprietà differenziali delle curve in una varietà L_n (¹).

Essendo data una curva qualsiasi C in una L_n mediante le equazioni parametriche $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$, si introduce in primo luogo il vettore tangente $u_{1|}{}^{\nu} = \frac{d\xi^\nu}{dt}$ nonchè i vettori derivati

$$u_{1|}{}^{\mu} \nabla_\mu u_{x-1|}{}^{\nu} = u_{x|}{}^{\nu}, \qquad (x = 2, \dots, n).$$

(¹) Cfr. Hlavaty : *Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineare generale.* (« Rendiconti Palermo », in corso di stampà) nonchè : *Ancora sulle proprietà differenziali....* (« Rendiconti Palermo », in corso di stampa).

Se i vettori $u_1, \dots, u_n$ risultano linearmente indipendenti, designeremo con $\Omega \neq 0$ il determinante dell'ennupla $u_1, \dots, u_n$. L'arco affine s è definito mediante la posizione

$$s = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\Omega}{(\Omega)_0} e^{\int_{t_0}^{t} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} u_{1|}{}^{\mu} dt} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} dt, \qquad (\Omega)_0 = (\Omega)_{t-t_0}$$

o, il che è lo stesso,

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\Omega}{(\Omega)_0} e^{\int_{t_0}^{t} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} u_{1|}{}^{\mu} dt} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

Ora, designando con Ω_a il determinante dei vettori

$$e_a, \quad \vartheta_a e_a, \quad \vartheta_a^2 e_a, \dots, \quad \vartheta_a^{n-1} e_a,$$

(da supporsi linearmente indipendenti) associati alle curve della congruenza C_a, l'arco affine $S_{(a)}$ delle curve di tale congruenza è definito dalla relazione

$$\frac{dS_{(a)}}{ds_a} = \left(\frac{\Omega_a}{(\Omega_a)_0} e^{\int_{(s_a)_0}^{s_a} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} e_{1|}{}^{\mu} ds_a} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

Ciò posto, prendiamo in considerazione le equazioni (6'), (6''). Da esse risulta che i parametri s_a e S_a sono legati dall'equazione

$$\frac{dS_a}{ds_a} = \frac{1}{\rho_a}.$$

È naturale di scegliere ρ_a in tal modo che il parametro S_a risulti come arco affine: per ciò basta porre

$$\boxed{\rho_a = \left(\frac{\Omega_a}{(\Omega_a)_0} e^{\int_{(s_a)_0}^{s_a} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} e_{1|}{}^{\mu} ds_a} \right)^{-\frac{2}{n(n+1)}}}.$$

I coefficienti ρ risultano così definiti intrinsecamente. Come nel caso precedente, anche qui il vettore $\Theta_a E_a$ è combinazione lineare dei vettori $E_1, \dots, E_{a-1}, E_{a+1}, \dots, E_n$.

Osservazione. Questo criterio fornisce per i moltiplicatori una espressione formalmente analoga a quella indicata nel numero precedente. Vale la pena di rilevare che, mentre la prima fa intervenire soltanto elementi differenziali del primo ordine, spettanti alle congruenze C_a, quest'ultima implica invece elementi differenziali fino all'ordine n.

8. Illustriamo infine i nostri risultati dal punto di vista della teoria degli invarianti. Da quanto abbiamo visto, si può desumere il sistema completo degli invarianti algebrici e differenziali spettanti al nostro affinore P^{ν}_{λ}. I primi si riducono alle n radici distinte $\omega_a \neq 0$ $(a = 1, \dots, n)$ dell'equazione caratteristica, nonchè alle n direzioni *unite*, linearmente indipendenti, spiccate da ogni punto dello spazio ambiente.

Fra gli invarianti differenziali vanno annoverati sia quelli che si deducono dalle ω, sia quelli che esprimono proprietà intrinseche delle n congruenze C_a di curve, definite dalle direzioni unite. I vettori tangenti e_a di tali curve sono determinati a meno dei fattori a priori arbitrari ρ_a, il che ci consente di associare al nostro affinore una infinità di connessioni riemanniane $V_n^{(\rho)}$, tali cioè che le congruenze aventi $\rho_a e_a$ per *versori* tangenti, risultano ortogonali in ciascuna delle $V_n^{(\rho)}$. Le connessioni $V_n^{(\rho)}$ non possono ancora essere riguardate come invarianti differenziali (nel senso di RICCI) dell'affinore P^{ν}_{λ}, perchè intervengono n funzioni ρ_a del posto (a priori arbitrarie) che non figurano tra i dati della questione. Tuttavia è possibile fare di queste ρ_a una scelta con criteri intrinsechi.

In particolare, per esempio, si può convenire di assumere le ρ_a in modo (ben definito a meno di condizioni iniziali) che nella connessione $V_n^{(\rho)}$ corrispondente, le n congruenze ortogonali C_a risultino *solenoidali* ([1]).

Di qua risulta che per l'affinore P^{ν}_{λ} il sistema completo di invarianti (algebrici e differenziali) fino ad un assegnato ordine m è costituito:

1°) dagli invarianti differenziali (fino all'ordine m incluso) spettanti in $V_n^{(\rho)}$ all'ennupla di congruenze *solenoidali*.

2°) dalle derivate delle ω_a (fino all'ordine m incluso) secondo gli archi metrici delle stesse C_a.

([1]) Confrontando tali risultati coi risultati classici di RICCI, vediamo che (per $n > 1$) l'affinore P^{ν}_{λ} di rango n dà luogo ad un numero maggiore di invarianti differenziali che non il classico tensore $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ (dello stesso rango), ciò che si spiega con il fatto che l'affinore P^{ν}_{λ} ha n^2 elementi, mentre il tensore $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$ ne ha soltanto $n\frac{n+1}{2}$, e si ha per $n > 1$, $n^2 > n\frac{n+1}{2}$.

Che se, già inizialmente si suppone l'affinore P_λ^ν associato ad una connessione lineare generale di coefficienti $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, allora la impostazione della ricerca completa degli invarianti potrebbe utilmente riattaccarsi a quanto precede, tenendo conto dei risultati esaurienti, precedentemente ottenuti dai sigg. T. Y. Thomas e A. D. Michel a proposito delle connessioni lineari (¹).

Mi riservo di approfondire questo argomento in una prossima occasione.

(¹) T. Y. Thomas-Aristotle D. Michel: *Differential invariants of affinely connected manifolds.* (« Annals of Mathematics, vol. 28, n. 2, pp. 196-236). Cfr. anche O. Veblen: *Invariants of quadratic differentialforms.* (« Cambridge University Press », London, 1927).

La risoluzione apiristica delle congruenze cubiche.

Memoria I di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

PREFAZIONE

Il prof. M. CIPOLLA con una brillante serie di Note [1] riuscì a stabilire una formula di risoluzione apiristica delle congruenze binomie. Successivamente il prof. G. SCORZA [2], facendo uso della formula di interpolazione di LAGRANGE, diede in una sua Nota assai rapidamente ragione della struttura della formula del prof. CIPOLLA. Riprese ancora la questione il prof. G. MIGNOSI [3]: egli, mercè un fortunato impiego della serie binomiale, pervenne assai elegantemente alla costruzione di una formula risolutiva per le congruenze binomie di grado e modulo potenza di un numero primo.

La lettura di queste interessanti Note ci spinse a studiare il problema della risoluzione delle congruenze cubiche e biquadratiche, e in questo lavoro esponiamo tutto quanto riguarda la risoluzione delle congruenze cubiche.

Questa questione sembra a prima vista assai facile, perchè è da presumere che sia possibile superarla trasportando in un campo di integrità finito qualcuno dei noti procedimenti di TARTAGLIA, EULERO, LAGRANGE, CAYLEY per la risoluzione delle equazioni cubiche [4]. Però ciascuno di questi proce-

---

(1) M. CIPOLLA: a) *Formule di risoluzione della congruenza binomia quadratica e biquadratica.* (« Rendic. della R. Accad. delle Scienze fisiche e matem. di Napoli », gennaio 1905): b) « *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo.* (« Math. Ann. », Bd. LXIII, 1906): c) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie.* Note 1ª e 2ª. (« Rendic. dalla R. Accad. Naz. dei Lincei », fasc. 8° e 9° del volume XVI della serie 5ª, 1° sem. 1907).

(2) G. SCORZA, *La risoluzione apiristica delle congruenze binomie e la formula di interpolazione di Lagrange.* « Rendic. della R. Accad. Naz. dei Lincei », fasc. 1° del vol. III, serie 6ª, 1° sem. 1926).

(3) G. MIGNOSI, *La convergenza in un campo di integrità finito e la risoluzione apiristica delle congruenze binomie.* (« Rendic. del Circolo Matem. di Palermo », tomo L, 1926).

(4) Il prof. U. SCARPIS in una sua Nota: *Intorno alla risoluzione per radicali di una equazione algebrica in un campo di Galois.* (« Periodico di Matematiche », serie III, vol. IX.

dimenti suppone l'esistenza di una radice cubica dell'unità, e perciò la possibilità di risolvere la congruenza:

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

con p primo. Per la risolubilità di questa nel campo razionale dovrà aversi per il simbolo di Legendre $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$, e di conseguenza il modulo p della forma $6h + 1$, si ha perciò che nessuna delle vie note può seguirsi quando sia p della forma $6h + 5$.

Viene ancora spontaneo pensare che passando nel campo di Gauss, supposto p della forma $6h + 5$, sia ancora possibile seguire qualcuna delle vie indicate; ma nel campo di Gauss, supposta la congruenza precedente possibile, deve essere p della forma $12k + 11$; essa è invece impossibile per p della forma $12k + 5$ (1).

Concludiamo che lo studio generale delle congruenze cubiche richiede una trattazione sua propria, e questa noi ci proponiamo ora di esporre.

Riassumiamo per comodità del lettore i risultati.

Data una congruenza cubica rispetto ad un modulo primo p, con $p \neq 2, 3$ (2) essa può sempre ridursi con una conveniente trasformazione lineare o ad una congruenza binomia, o ad una congruenza del tipo:

$$(1) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ p), \qquad \text{con } a \not\equiv 0.$$

Se il simbolo $D_h(a)$ indica il determinante ortosimmetrico (di Hankel)

---

p. 73, 1911) cercò di applicare la formula cardanica alla risoluzione di una congruenza cubica e constatò che in certi casi essa diventa illusoria quando la congruenza ammette tre radici ed efficace quando ne possiede una sola, mentre in certi casi succede il contrario, ma non affrontò la questione generale della risoluzione delle congruenze cubiche. Successivamente in un altro lavoro: *Intorno all'interpretazione della Teoria di Galois in un campo di razionalità finito.* (« Annali di Matematica », tomo XXIII, serie III, 1914) riprese lo studio generale delle congruenze col proposito di accennare alle modificazioni che potrebbe subire la teoria di Galois ove si volesse applicare ad equazioni di un campo finito di integrità. Conviene però a questo proposito notare che è possibile, come faremo vedere, costruire la formula apiristica di risoluzione di una congruenza cubica, senza che la sua risoluzione si possa far dipendere dalla risoluzione di congruenze binomie (cfr. n.° 16).

(1) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici.* (Bologna, Zanichelli, 1923), p. 87 e seg.

(2) Col linguaggio della teoria dei Corpi Numerici [v. G. Scorza, *Corpi Numerici e Algebre* (Messina, Principato, 1921)] *equazioni in un corpo numerico finito* costituito da un sistema completo di resti rispetto al modulo.

di ordine h

$$D_h(a) \begin{vmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a & a & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & a & a & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a & a & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a & a & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

la congruenza (1) ha tre radici incongrue modulo p, allora e allora soltanto che si abbia

$$D_{p-2}(a) \equiv 0 \qquad \pmod{p}.$$

Si determina poi la condizione cui deve soddisfare a perchè la congruenza (1) abbia soltanto una radice e si assegna in funzione di a la sua espressione (n.° 11), si trovano infine le condizioni cui deve soddisfare a perchè la congruenza (1) sia impossibile ([1]).

Quando la (1) abbia tre radici incongrue, col metodo del prof. SCORZA si indica il procedimento per la *costruzione* di tutte le formule distinte di risoluzione della congruenza in numero di 3^h con $h = \frac{p-5}{6}, \frac{p-7}{6}$ secondochè è $p \equiv 5, 7 \pmod{6}$, (n.° 10).

Si presenta poi la più ardua questione di assegnare in funzione esplicita di a una formula risolutiva della congruenza (1), nel caso che essa abbia tre radici; si ottiene allora il seguente semplicissimo risultato: Se le tre radici della (1) non hanno lo stesso carattere quadratico modulo p, quella radice che non ha il carattere delle altre due è data dalla formula:

$$(2) \qquad x \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) / D_{\frac{p-5}{2}}(a) \qquad \pmod{p}.$$

In una prossima Memoria studieremo le congruenze cubiche le cui radici

([1]) Le condizioni trovate per a perchè la congruenza (1) sia possibile ed abbia tre radici o una radice, oppure perchè essa sia impossibile sono notevolissime, in quanto forniscono dei criteri per decidere *a priori*, dato un corpo cubico, della possibilità di scomporre un numero primo razionale non critico in fattori primi ideali. (Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ([5]), p. 402 e seg.; od anche J. SOMMER, *Introduction à la théorie des nombres algébriques*, trad. par A. LÉVY (Paris, Hermann, 1911, p. 285 e seg.).

hanno lo stesso carattere quadratico rispetto al modulo e le congruenze cubiche riferite ai moduli p^n con p primo.

§ 1. Generalità sulla risoluzione delle congruenze cubiche.

1. Data la congruenza

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \equiv 0 \text{ (}^1\text{)} \qquad \text{(mod. } p) \tag{1}$$

con a_1, a_2, a_3, p interi razionali, p primo, $a_3 \not\equiv 0$ (mod. p) ([2]), l'algebra ci fornisce il seguente procedimento per trovare se essa, essendo priva di radici multiple, possiede tre radici incongrue, una, o nessuna ([3]).

Si divida il polinomio $x^{p-1} - 1$ per $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ e si abbia:

$$x^{p-1} - 1 = (x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)Q(x) + R(x), \tag{2}$$

ove con $Q(x)$ ed $R(x)$ abbiamo indicato rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione. I polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ hanno coefficienti interi, ed $R(x)$ è un polinomio di grado non superiore al secondo.

Supponiamo che la congruenza (1) abbia tre radici incongrue (non nulle perchè si ha $a_3 \not\equiv 0$), esse sono radici della congruenza $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p) (teor. di FERMAT), quindi per la (2) radici della congruenza $R(x) \equiv 0$ (mod. p); ne segue che il polinomio $R(x)$ ha i suoi coefficienti multipli di p.

Inversamente, se $R(x)$ ha i suoi coefficienti multipli di p, dall'identità modulo p

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x^3 + a_1x + a_2x + a_3)Q(x) \qquad \text{(mod. } p)$$

segue che annullandosi $x^{p-1} - 1$ per $p - 1$ valori incongrui di x, la congruenza (1) deve avere tre radici incongrue.

Quando non sia $R(x)$ identicamente nullo modulo p, le eventuali radici della congruenza (1) sono radici della congruenza di grado non superiore al secondo

$$R(x) \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p)$$

([1]) Abbiamo supposto, come è lecito, il primo coefficiente uguale ad 1, in caso opposto basta moltiplicare la congruenza per il numero *socio* del primo coefficiente.

([2]) Per $a_3 \equiv 0$ (mod. p) la congruenza (1) si riduce al caso noto delle congruenze quadratiche.

([3]) Cfr. J. A. SERRET, *Cours d'algèbre supérieure* (tomo II, 4^me ed., 1879), p. 43 e seg.; oppure P. L. TCHEBICHEF, *Teoria delle congruenze* (trad. ital. di I. MASSARINI, Roma, Loescher, 1895), pp. 52, 53.

che noi sappiamo discutere e risolvere, e il problema si riduce quindi teoricamente ad una verifica.

Le questioni che ci siamo allora proposte sono le seguenti:

1°) *Trovare come* debbono essere assegnati i coefficienti a_1, a_2, a_3, perchè la congruenza (1) abbia:

a) *tre radici incongrue modulo* p [sia cioè identicamente $R(x) \equiv 0$ (mod. p)];

b) *una sola radice* [$R(x) \equiv 0$ (mod. p) deve ammettere una radice a comune con la (1)];

c) *nessuna radice* [$R(x) \equiv 0$ (mod. p) è impossibile, oppure essa e la (1) non hanno radici comuni].

2°) *Nei casi* a) *e* b) *dare le formule risolutive della congruenza.*

§ 2. La congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p). Determinazione del numero dei valori di a per i quali la congruenza ha tre radici incongrue, o una radice, o nessuna.

2. Nella congruenza (1) supponiamo il modulo $p \neq 2, 3$ (1).

Colla trasformazione $x = y - \frac{1}{3} a_1$ $\left(\frac{1}{3}\right.$ indica il socio di 3 modulo $\left.p\right)$ la (1) diventa

$$y^3 + \alpha y + \beta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \tag{3}$$

con

$$\alpha = \frac{1}{3}(3a_2 - a_1^2), \quad \beta = \frac{1}{27}(27a_3 - 9a_1a_2 + 2a_1^3). \tag{4}$$

Se $\alpha \equiv 0$ (mod. p) la (4) si riduce ad una congruenza binomia, caso noto (2); se è $\beta \equiv 0$ (mod. p) la (2) è riducibile; *supponiamo d'ora in avanti* $\alpha \not\equiv 0$ *e* $\beta \not\equiv 0$ (mod. p).

Vediamo subito come debbono esser dati α e β perchè la (4) abbia una radice multipla (e quindi tre radici reali).

(1) Per $p = 2$ la (1) ha la soluzione $x \equiv 0$ (mod. 2) se $a_3 \equiv 0$ (mod. 2) e la soluzione $x \equiv 1$ (mod. 2) se $a_1 + a_2 + a_3 + 1 \equiv 0$ (mod. 2) ed entrambi le soluzioni se è $a_3 \equiv 0$ (mod. 2), $a_1 + a_2 \equiv 1$ (mod. 2).

Per $p = 3$ si ha $x^3 \equiv x$ (mod. 3) e la (1) diventa $a_1x^2 + (a_2 + 1)x + a_3 \equiv 0$ (mod. 3); questa congruenza avrà le radici $x \equiv 0, 1, 2$, secondochè sia rispettivamente $a_3 \equiv 0$, $a_1 + a_2 + a_3 + 1 \equiv 0$, $a_1 + 2a_2 + a_3 + 2 \equiv 0$ (mod. 3).

(2) Cfr. M. CIPOLLA, loc. cit. (1); G. SCORZA, loc. cit. (2); G. MIGNOSI, loc. cit. (3).

Se y è una radice doppia della (4), deve essere: $[f(y)=0,\ f'(y)=0]$

(5) $$y^3+\alpha y+\beta\equiv 0 \pmod{p},\quad 3y^2+\alpha\equiv 0 \pmod{p}.$$

Da queste, moltiplicando la seconda delle (5) per y e tenuto conto della prima, si ha

$$y\equiv -(2\alpha)^{-1}3\beta, \qquad (2\alpha \text{ è per ipotesi } \not\equiv 0)$$

e la seconda delle (5) diventa

(6) $$-4\alpha^3-27\beta^2\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

cioè, come è ben noto, è congruo zero modulo p il discriminante della congruenza $-4\alpha^3-27\beta^2$.

Inversamente soddisfatta la (6), due radici della congruenza (4) sono

$$y_1=y_2\equiv -(2\alpha)^{-1}3\beta, \qquad (\text{mod. } p)$$

e per l'altra radice y_3 si ha: $y_3=6\beta(2\alpha)^{-1}$. Essendo poi $\beta\not\equiv 0$ (mod. p) si ha pure $y_1\equiv y_2\not\equiv y_3$ (mod. p).

Concludiamo: *la congruenza* $y^3+\alpha y+\beta\equiv 0$ (mod. p) *ha radici multiple allora e allora soltanto che sia congruo zero modulo* p *il suo discriminante,* cioè:

$$-4\alpha^3-27\beta^2\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

e le sue radici sono:

$$y_1\equiv y_2\equiv -3\beta(2\alpha)^{-1};\quad y_3\equiv 6\beta(2\alpha)^{-1}, \qquad (\text{mod. } p).$$

3. La congruenza (4) che è trasformata a radici aumentate della congruenza (1), con la trasformazione a radici multiple

$$y=\beta\alpha^{-1}z$$

diventa:

(7) $$z^3+az+a\equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

con

$$a=\alpha^3\beta^{-2}=\frac{27(3a_2-a_1^2)^3}{(27a_3-9a_1a_2+2a_1^2)^2}\equiv 27(3a_2-a_1^2)^3(27a_3-9a_1a_2+2a_1^2)^{p-3} \ (\text{mod. } p),$$

e noi ci proponiamo di *contare quanti sono i valori incongrui di* a *per i quali la corrispondente equazione* (7) *ha tre radici incongrue, una, o nessuna.*

Possiamo supporre che sia a $\not\equiv 0$ (mod. p); *per* a $\equiv 0$ (mod. p) *la congruenza* (7) *ha la radice tripla* z $=0$, *e inversamente.*

Possiamo anche supporre che sia $4a + 27 \not\equiv 0 \pmod{p}$, in caso opposto, per quanto si è visto nel numero precedente, le radici dell'equazione sono: $z_1 = z_2 \equiv -\frac{3}{2}$, $z_3 = 3 \pmod{p}$, ed anzi soltanto per $4a + 27 \equiv 0 \pmod{p}$ l'equazione (3) ha radici multiple.

Dalla (7) si ha poi

$$a(z+1) \equiv -z^3 \pmod{p} \tag{8}$$

e questa ci dice che è sempre $z \not\equiv p - 1 \pmod{p}$, e perciò dalla (8) si ha:

$$a \equiv -z^3(z+1)^{-1} \pmod{p} \tag{9}$$

dove z percorre i valori

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ p-2. \tag{10}$$

La (9) ci dà, quando z percorre il sistema (10), tutti i valori di a per i quali la congruenza (7) è possibile (eccettuato il valore $a = 0$ corrispondente al caso $z = 0$) e andiamo ad esaminare quando accade che a due valori incongrui di z che indichiamo con x ed y scelti nel sistema (10) corrisponda un medesimo valore a modulo p. Dovrà aversi:

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}; \quad y^3 + ay + a \equiv 0 \pmod{p}, \tag{11}$$

ed anche effettuando la differenza:

$$(2y + x)^2 \equiv -4a - 3x^2 \pmod{p}. \tag{12}$$

È intanto $4a + 3x^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$, [in caso opposto da $4a + 3x^2 \equiv 0 \pmod{p}$, avendosi $a \equiv -x^3(x+1)^{-1}$ si ha anche $-4x^3(x+1)^{-1} + 3x^2 \equiv 0$ da cui $x \equiv 3$ e perciò $4a + 27 \equiv 0 \pmod{p}$ che è il caso escluso delle radici multiple] e ciò porta che debbono escludersi per x nella successione (10) i valori incongrui 3 e $\frac{p-3}{2}$ e perciò i valori leciti di x sono da scegliersi nella successione:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ldots,\ \frac{p-3}{2} - 1,\ \frac{p-3}{2} + 1,\ldots,\ p-2. \tag{13}$$

Ad un valore di x scelto nella successione (13), quando per il simbolo di LEGENDRE $\left(\frac{-4a - 3x^2}{p}\right)$ si abbia

$$\left(\frac{-4a - 3x^2}{p}\right) = 1, \tag{14}$$

corrispondono per la (12) due valori y_1, y_2 e i tre numeri x, y_1, y_2 sono tra loro incongrui. Infatti se è (15) $-4a-3x^2 \equiv \alpha^2 \pmod{p}$ si ha per la (12) $2y \equiv -x \pm \alpha \pmod{p}$ e poichè $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$ si conclude che è $y_1 \not\equiv y_2 \pmod{p}$. I due valori di y sono incongrui con x; se fosse $-x \pm \alpha \equiv 2x$ si avrebbe $3x \equiv \pm \alpha$ e per la (15); $3x^2 + a \equiv 0 \pmod{p}$ e per la prima della (11) segue che è $x \equiv \frac{p-3}{2}$ e questo è un valore che non è preso da x.

Concludendo: *se un numero* x *scelto nel sistema* (13) *soddisfa la* (14), *ad esso possiamo associare due altri numeri con i quali si formano una terna di valori incongrui, radici di una medesima congruenza*

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad \pmod{p}.$$

Dalla (14) tenuto conto della (9) si ha:

$$\left(\frac{-4a-3x^2}{p}\right) = \left(\frac{4x^3(x+1)^{-1}-3x^2}{p}\right) = \left(\frac{x+1}{p}\right)\left(\frac{x^2}{p}\right)\left(\frac{4x-3x-3}{p}\right) = \\ = \left(\frac{x+1}{p}\right)\left(\frac{x-3}{p}\right) = 1,$$

perciò i valori di x del sistema (13) per i quali si ha

(16)
$$\left(\frac{x+1}{p}\right)\left(\frac{x-3}{p}\right) = 1$$

forniscono con la formula

(9′)
$$a \equiv -x^3(x+1)^{-1} \qquad \pmod{p}$$

tutti i valori di a per i quali la congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ ha tre radici incongrue, e ognuno di questi valori a, quando x percorre il sistema (13) soddisfacendo la (16), si otterrà tre volte e tre volte soltanto.

Poniamo

(17)
$$x \equiv 4(1-u)^{-1} - 1 \qquad \pmod{p}$$

od anche

(17′)
$$u \equiv 1 - 4(1+x)^{-1} \qquad \pmod{p}.$$

Per esse, se x percorre un sistema di valori incongrui anche u percorre un sistema di valori incongrui, e al sistema dei valori (13) per x corrisponde per u il sistema di $p-4$ valori

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11, \ldots,\ p-4,\ p-2,\ p-1.$$

La (16) diventa poi

$$\left(\frac{x+1}{p}\right)\left(\frac{x-3}{p}\right)=\left(\frac{4(1-u)^{-1}}{p}\right)\left(\frac{4(1-u)^{-1}-4}{p}\right)=\left(\frac{(1-u)^{-1}}{p}\right)\left(\frac{(1-u)^{-1}-1}{p}\right)=$$
$$=\left(\frac{1-u}{p}\right)^2\left(\frac{(1-u)^{-1}}{p}\right)\left(\frac{(1-u)^{-1}-1}{p}\right)=\left(\frac{1-(1-u)}{p}\right)=\left(\frac{u}{p}\right)=1.$$

Dovrà essere quindi

$$\left(\frac{u}{p}\right)=1.$$

e perciò (17″) $u \equiv \alpha^2 \pmod{p}$ ove α^2 percorre ora il sistema di $\frac{p-5}{2}$ di valori

(18) $$2^2,\quad 4^2,\quad 5^2,\ldots,\quad \left(\frac{p-1}{3}\right)^2$$

con esclusione dell'eventuale numero α positivo minore od uguale di $\frac{p-1}{2}$ per il quale si ha

(19) $$\alpha^2 \equiv p-3 \qquad \pmod{p}.$$

Sia allora $p=6h+7$: avendosi $\left(\frac{p-3}{p}\right)=1$ la congruenza (19) è possibile, e perciò i valori di u del sistema (18) cui corrispondono per la (17) dei valori di x per i quali la (9′) fornisce dei valori di a per i quali la congruenza

$$a^3+ax+a\equiv 0 \qquad \pmod{p}$$

ammette tre radici incongrue sono $\frac{p-5}{2}-1=\frac{p-7}{2}$; ma ad ogni a corrisponde una determinata terna di valori di x, perciò *la congruenza*

$$x^3+ax+a\equiv 0 \qquad \pmod{p}$$

quando sia $p=6h+7$ *ammette tre radici incongrue per* $\frac{p-7}{6}=h$ *valori incongrui di* a.

Se invece è $p=6h+5$, è $\left(\frac{p-3}{p}\right)=-1$ e perciò la (19) è impossibile; quindi i valori leciti di u sono $\frac{p-5}{2}$ ed ancora la congruenza

$$x^3+ax+a\equiv 0 \qquad \pmod{p}$$

ammette tre radici incongrue per $\frac{p-5}{6}=h$ valori incongrui di a.

Concludiamo: *la congruenza* $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ *ammette tre radici incongrue per* h *valori incongrui di* a, *ove è* $h = \frac{p-7}{6}$, *se* $p \equiv 7 \pmod{6}$, *e* $h = \frac{p-5}{6}$ *se* $p \equiv 5 \pmod{6}$.

Per determinare il numero dei valori di a per i quali la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p} \tag{20}$$

ammette una sola radice, si osservi che se scegliamo x nel sistema (10) in guisa che si abbia $\left(\frac{-4a-3x^2}{p}\right) = -1$ la congruenza (12) è impossibile e perciò per il corrispondente valore di a [calcolato con la (9)] $a \equiv -x^3(x+1)^{-1}$ la congruenza (20) ammette una sola radice. Con la trasformazione (17), la condizione precedente diventa:

$$\left(\frac{u}{p}\right) = -1$$

e u deve percorrere il sistema di $p-4$ valori

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11, \ldots,\ p-4,\ p-2,\ p-1, \tag{21}$$

il quale esclude dei primi $p-1$ numeri naturali i numeri $1, 9, p-3$. È $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{9}{p}\right) = 1$, e se è $p = 6h+7$ è anche $\left(\frac{p-3}{p}\right) = 1$, perciò il simbolo $\left(\frac{u}{p}\right)$ quando p percorre il sistema (21), nell'ipotesi $p = 6h+7$, prende il valore -1, $\frac{p-1}{2} = 3h+3$ volte, mentre se è $p = 6h+5$, avendosi $\left(\frac{p-3}{p}\right) = -1$ anche per il numero $p-3$ escluso nel sistema (21), abbiamo che il simbolo $\left(\frac{u}{p}\right)$ quando u percorre il sistema (21) prende il valore 1, $\frac{p-1}{2} - 1 = \frac{p-3}{2} = 3h+1$ volte.

Concludendo: *la congruenza* (20) *quando sia* $p = 6h+7$ *ammette una sola radice per* $3h+3$ *valori incongrui di* a, *e quando sia* $p = 6h+5$ *per* $3h+1$ *valori incongrui di* a.

Per quanto si è finora detto segue il teorema: *Data la congruenza*

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p},$$

se è $a \equiv 0 \pmod{p}$ *essa ha le radici* $x_1 = x_2 = x_3 \equiv 0 \pmod{p}$;

se è $a \equiv -\frac{27}{4} \pmod{p}$ *essa ha le radici* $x_1 \equiv 3$, $x_2 \equiv x_3 \equiv -\frac{3}{2} \pmod{p}$;

se è p = 6h + 7 (p = 6h + 5) *essa ammette tre radici incongrue per* h *valori incongrui di* a, *ammette una sola radice per* 3h + 3 (3h + 1) *valori incongrui di* a, *ed è quindi impossibile per* 2h + 2 *valori incongrui di* a [1].

§ 3. Condizione cui deve soddisfare a perchè abbia tre radici incongrue, la congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p).

4. Dividiamo, come abbiamo detto al n.° 1, il polinomio $x^{p-1} - 1$ per $x^3 + ax + a$, e sia

$$x^{p-1} - 1 = (x^3 + ax + a)Q(x) + A(a)x^2 + B(a)x + C(a) - 1, \tag{22}$$

ove $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ sono polinomi razionali interi in a. Se la congruenza proposta ammette per un dato valore di a tre radici incongrue, deve essere

$$A(a) \equiv 0, \quad B(a) \equiv 0, \quad C(a) - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Facilmente si prova per induzione che per $p = 6h + 7$ si ha:

$$A(a) = a^{\frac{p-1}{3}} A_1(a), \quad B(a) = a^{\frac{p-1}{3}} B_1(a), \quad C(a) = a^{\frac{p-1}{3}} C_1(a) \tag{23}$$

e per $p = 6h + 5$ si ha:

$$A(a) = a^{\frac{p-2}{3}} A_1(a), \quad B(a) = a^{\frac{p-2}{3}} B_1(a), \quad C(a) = a^{\frac{p-2}{3}} C_1(a) \tag{24}$$

ove i polinomi $A_1(a)$, $B_1(a)$, $C_1(a)$ *sono del grado* h *rispetto ad* a [2].

Allora se a è un numero tale che per esso la congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) abbia tre radici incongrue, poichè è $a \not\equiv 0$, sarà

$$A_1(a) \equiv 0, \quad B_1(a) \equiv 0, \quad a^{\delta} C_1(a) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

dove *come faremo sempre nel seguito, per* p = 6h + 7 *poniamo* $\delta = \frac{p-1}{3}$, *e per* p = 6h + 5, $\delta = \frac{p-2}{3}$.

Inversamente se a soddisfa simultaneamente queste congruenze, per esso la congruenza proposta ammette tre radici incongrue. Ma abbiamo detto nel numero precedente che i valori di a per i quali la congruenza data ammette

---

[1] Vogliamo osservare che per la congruenza $x^3 + \alpha x + \beta \equiv 0$ (mod. p) quando sia $p = 6h + 5$, con la trasformazione $x = \beta^{-(2h+1)} y$, diversa da quella indicata nel numero 2, diventa $y^3 + \alpha\beta^{2(2h+1)} y + 1 \equiv 0$ (mod. p) che è del tipo $y^3 + ay + 1 \equiv 0$ (mod. p). Ragionando anche su questa congruenza, si arriva ancora ai risultati ora enunciati per il caso $p = 6h + 5$. Ritroveremo in parte questo risultato al n.° 24.

[2] Ritroveremo questo risultato direttamente al n.° 8.

tre radici incongrue sono h, e *poichè i polinomi* $A_1(a)$ *e* $B_1(a)$ *sono di grado* h *in* a, ne segue il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

abbia tre radici incongrue, è che il numero a *soddisfi la congruenza*

$$B_1(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

[*o, ciò che è lo stesso, la congruenza* $A_1(a) \equiv 0$ (mod. p)].

Il ragionamento fatto ci dice anzi che i due polinomi $A_1(a)$, $B_1(a)$ differiscono modulo p per un fattore di proporzionalità [1] e che il polinomio $a^8 C_1(a) - 1$ è divisibile modulo p per $B_1(a)$ [oppure per $A_1(a)$].

§ 4. Dimostrazione di una formula fondamentale.

5. Dei polinomi $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ vogliamo trovare la loro espressione, stabiliremo per questo una formula fondamentale cui converrà ricorrere spesso nel nostro studio.

Rispetto al modulo $x^3 + ax + a$, qualunque sia l'intero $h > 3$ sussistono le $h - 2$ congruenze:

$$\begin{array}{lllll} & & & x^3 & \equiv -ax - a \\ & & x^4 & & \equiv -ax^2 - ax \\ & x^5 & & +ax^3 & \equiv -ax^2 \\ x^6 & & +ax^4 & +ax^3 & \equiv 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x^h & & +ax^{h-2} & +ax^{h-3} & \equiv 0; \end{array} \qquad (\text{mod. } x^2 + ax + a).$$

e da questo sistema lineare rispetto $x^3, x^4, x^5, \ldots, x^h$ risolvendo si ha:

$$(-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} x^h \equiv \begin{vmatrix} ax + a & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ ax^2 + ax & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ ax & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 \ldots\ldots 1 & 0 & a & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \quad 0 \quad 1 & 0 \quad a & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 & a \quad a & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 \quad 0 \quad a & a \quad 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix} \qquad (\text{mod. } x^3 + ax + a),$$

---

[1] Cfr. n.° 8.

e indicando con P_1, P_2, P_3 i complementi algebrici degli elementi di posto (1, 1), (2, 1), (3, 1) in questo determinante, si ha:

$$(25)\qquad (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} x^h \equiv a(P_2+P_3)x^2 + a(P_1+P_2)x + aP_1 \pmod{x^3+ax+a}.$$

Se indichiamo con $D_h(a)$ *il determinante ortosimmetrico* (di HANKEL) *di ordine* h

$$D_h(a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & \ldots & 0\;\;1 & 0 & a & a & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & a & a & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a & a & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a & a & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{per } h = 3, 4, \ldots.$$

e poniamo

$$(26)\qquad D_0(a) = 1, \quad D_1(a) = 0, \quad D_2(a) = a$$

troviamo facilmente che è:

$$P_1 = D_{h-3}(a), \quad P_2 = (-1)^{h+1} D_{h-4}(a), \quad P_3 = -D_{h-5}(a),$$

e perciò

$$(25')\qquad (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} x^h \equiv a[(-1)^{h+1}D_{h-4}(a) - D_{h-5}(a)]x^2 +$$
$$+ a[D_{h-3}(a) + (-1)^{h+1}D_{h-4}(a)]x + aD_{h-3}(a), \pmod{x^3+ax+a}.$$

Dall' espressione di D_h si ha facilmente

$$(26')\qquad D_3(a) = a, \quad D_4(a) = a^2, \quad D_5(a) = -2a^2$$

e si verifica anche facilmente la relazione ricorrente [1]:

$$(27)\qquad D_h(a) = aD_{h-2}(a) + (-1)^h a D_{h-3}(a).$$

---

[1] Sviluppiamo infatti il determinante $D_h(a)$ per i minori del secondo ordine della matrice formata con le prime due righe. Essa contiene soltanto i minori non nulli $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, che hanno per complementi algebrici il primo $D_{h-2}(a)$ e il secondo un determinante di ordine $h-2$ che sviluppato per gli elementi dell' ultima colonna è uguale a: $(-1)^h a D_{h-3}(a)$.

In virtù di questa formula dalla (25′) si ha la *formula fondamentale*:

(I) $(-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} x^h \equiv (-1)^{h+1} D_{h-2}(a)x^2 + D_{h-1}(a)x + aD_{k-3}(a)$, [mod. $x^3 + ax + a$].

6. La (I) per $h = p - 1$ diventa [p primo dispari]:

(28) $(-1)^{\frac{p-1}{2}} x^{p-1} \equiv - D_{p-3}(a)x^2 + D_{p-2}(a)x + aD_{p-4}(a)$ [mod. $x^3 + ax + a$]

e confrontando con la (22) del numero 4, si ha:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} A(a) = - D_{p-3}(a), \quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} B(a) = D_{p-2}(a), \quad (-1)^{\frac{p-1}{2}} C(a) = aD_{p-4}(a).$$

Abbiamo allora per i risultati del numero 4 stesso:

Tutti e soltanto i valori di a *per i quali la congruenza*

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ha tre radici incongrue, sono i valori di a $\not\equiv 0$ (mod. p) *i quali soddisfano la congruenza:*

$$D_{p-2}(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

[*o, ciò che è lo stesso, l'altra congruenza* $\mathrm{D}_{p-3}(\mathrm{a}) \equiv 0$ (mod. p)].

§ 5. Sviluppo dei determinanti $D_h(a)$.

7. Le formule (26), (26′) e la (27) sono sufficienti per determinare gli sviluppi dei determinanti $D_h(a)$.

Noi vogliamo dimostrare che hanno luogo i seguenti sviluppi:

Per $\mathrm{k} \geq 2$ *è*:

$$(29) \quad D_{2k}(a) = \binom{k}{0} a^k - \binom{k-1}{2} a^{k-1} + \binom{k-2}{4} a^{k-2} - \binom{k-3}{6} a^{k-3} + \dots + (-1)^r \binom{k-r}{2r} a^{k-r}$$

con

$$r = \left[\frac{k}{3}\right] \quad \left(r \text{ massimo intero contenuto in } \frac{k}{3}\right)$$

e per $\mathrm{k} \geq 1$ *è*:

$$(30) \quad D_{2k+1}(a) = - \binom{k}{1} a^k + \binom{k-1}{3} a^{k-1} - \binom{k-2}{5} a^{k-2} + \binom{k-3}{7} a^{k-3} + \dots + (-1)^{r+1} \binom{k-r}{2r+1} a^{k-r}$$

ove è ora

$$r = \left]\frac{k-1}{3}\right],$$

e dove i coefficienti sono i noti simboli binomiali.

Si osservi che le (29) e (30) sono vere per $k = 1, 2, 3$; basta infatti tener conto delle (26′) e (27).

Procediamo allora per induzione, supponiamole vere per k e dimostriamole per il valore $k+1$.

Cominciamo dalla (30). Supposto dapprima $\left[\frac{k-1}{3}\right] = \left[\frac{k}{3}\right] = r$ per la (27) abbiamo:

$$D_{2k+3}(a) = a D_{2k+1}(a) - a D_{2k}(a) =$$

$$= -\binom{k}{1}a^{k+1} + \binom{k-1}{3}a^k - \binom{k-2}{5}a^{k-1} + \binom{k-3}{7}a^{k-2} + \ldots + (-1)^{r+1}\binom{k-r}{2r+1}a^{k-r+1} -$$

$$-\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k-1}{2}a^k - \binom{k-2}{4}a^{k-1} + \binom{k-3}{6}a^{k-2} + \ldots + (-1)^{r+1}\binom{k-r}{2r}a^{k-r+1},$$

e poichè si ha $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$ si trova per $D_{2k+3}(a)$ lo sviluppo (30) quando in esso si muti k in $k+1$.

Sia invece $\left[\frac{k-1}{3}\right] = r = \left[\frac{k}{3}\right] - 1$, perciò $k = 3(r+1)$; si avrà come prima:

$$D_{2k+3}(a) = -\binom{k+1}{1}a^{k+1} + \binom{k}{3}a^k -$$

$$-\binom{k-1}{3}a^{k-1} + \ldots + (-1)^{r+1}\binom{k-r+1}{2r+1}a^{k-r+1} + (-1)^{r+2}\binom{k-r-1}{2(r+1)}a^{k-r},$$

ma si ha $\binom{k-r-1}{2(r+1)} = \binom{2(r+1)}{2(r+1)} = 1 = \binom{k-r}{2r+3}$ e ritroviamo ancora la (30) quando in essa si muti k in $k+1$.

Analogamente si ragiona sulla (29), perciò la (29) e (30) sono vere in generale. Dalle (29) e (30) si ha ad es.

$$D_6(a) = a^3 - a^2; \quad D_7(a) = -3a^3; \quad D_8(a) = a^4 - 3a^3; \quad D_9(a) = -4a^4 + a^3;$$

$$D_{10}(a) = a^5 - 6a^4; \quad D_{11}(a) = -5a^5 + 4a^4; \quad D_{12}(a) = a^6 - 10a^5 + a^4;$$

$$D_{13}(a) = -6a^6 + 10a^5; \quad D_{14}(a) = a^7 - 15a^6 + 5a^5; \quad D_{15}(a) = -7a^7 + 20a^6 - a^5;$$

$$D_{16}(a) = a^8 - 21a^7 + 15a^6; \quad D_{17}(a) = -8a^8 + 35a^7 - 6a^6;$$

$$D_{18}(a) = a^9 - 28a^8 + 35a^7 - a^6.$$

§ 6. Forma definitiva della condizione cui deve soddisfare a perchè la congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) abbia tre radici incongrue.

8. Dalla formula (28) si ha

$$(31)\quad \begin{aligned}(-1)^{\frac{p-1}{2}}(x^{p-1}-1) \equiv -D_{p-3}(a)x^2 + D_{p-2}(a)x^2 + \\ + aD_{p-4}(a) - (-1)^{\frac{p-1}{2}}\end{aligned} \qquad (\text{mod. } x^3 + ax + a).$$

Cominciamo dal verificare la proprietà, dimostrata nel n.° 4, che i due polinomi $D_{p-2}(a)$, $D_{p-3}(a)$ differiscono modulo p di un fattore di proporzionalità, che è anzi

$$(32)\qquad D_{p-2}(a) \equiv \frac{p-3}{2}[-D_{p-3}(a)] \qquad (\text{mod. } p).$$

Distinguiamo i due casi $p = 6h + 7$, $p = 6h + 5$.
Se è $p = 6h + 7$ per le (29) e (30) si ha:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} D_{p-2}(a) &= -\binom{3h+2}{1}a^{3h+2} + \binom{3h+1}{3}a^{3h+1} - \binom{3h}{5}a^{3h} + \\ &\quad + \binom{3h-1}{7}a^{3h-1} + \ldots + (-1)^{h+1}\binom{2h+2}{2h+1}a^{2h+2}, \\ -D_{p-3}(a) &= -\binom{3h+2}{0}a^{3h+2} + \binom{3h+1}{2}a^{3h+1} - \binom{3h}{4}a^{3h} + \\ &\quad + \binom{3h-1}{6}a^{3h-1} + \ldots + (-1)^{h+1}\binom{2h+2}{2h}a^{2h+2}, \end{aligned}\right.$$

e basterà provare che è

$$(34)\qquad \binom{3h+h-t}{2t+1} \equiv (3h+1)\binom{3h+2-t}{2t} \quad (\text{mod. } 6h+7);\ t = 1, 2, \ldots, h.$$

Infatti si ha

$$3h - 3t + 2 \equiv (3h+2)(2t+1) \qquad (\text{mod. } 6h+7),$$

e moltiplicando i due membri per $\binom{3h+2-t}{2t}$ e dividendo per $2t+1$, primo con $6h+7$, si ritrova la (34).

Analogamente si prova la (32) per $p = 6h + 5$; ed è ora:

$$(35)\quad \begin{cases} D_{p-2}(a) = -\binom{3h+1}{1}a^{3h+1} + \binom{3h}{3}a^{3h} - \binom{3h-1}{5}a^{3h-1} + \\ \qquad + \binom{3h-2}{7}a^{3h-2} + \ldots + (-1)^{h+1}\binom{2h+1}{2h+1}a^{2h+1}, \\ -D_{p-3}(a) = -\binom{3h+1}{0}a^{3h+1} + \binom{3h}{2}a^{3h} - \binom{3h-1}{4}a^{3h-1} + \\ \qquad + \binom{3h-2}{7}a^{3h-2} + \ldots + (-1)^{h+1}\binom{2h+1}{2h}a^{2h+1}. \end{cases}$$

E siccome per la (31) tutti e soltanto i valori di a per i quali la congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ ammette tre radici incongrue sono le radici $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ della congruenza $D_{p-2}(a) \equiv 0 \pmod{p}$ $\left[\text{o dell'altra } -D_{p-3}(a) \equiv \frac{p-3}{2} D_{p-2}(a) \equiv 0 \pmod{p}\right]$ per le (33) e (35) abbiamo il seguente *teorema finale:*

Condizione necessaria e sufficiente perchè la conguenza

$$x^3 + ax + a = 0 \qquad \pmod{p}$$

abbia tre radici incongrue è che a *sia radice della congruenza*

$$\text{(II)} \qquad \sum_{0}^{h} {}_i (-1)^i \binom{\frac{p-3}{2} - i}{2i+1} a^{h-i} \equiv 0 \qquad \pmod{p},$$

o della congruenza equivalente:

$$\text{(II*)} \qquad \sum_{0}^{h} {}_i (-1)^i \binom{\frac{p-3}{2} - i}{2i} a^{h-i} \equiv 0 \qquad \pmod{p},$$

essendo

$$h = \left[\frac{p-3}{6}\right].$$

9. Abbiamo visto al n.° 4 che il polinomio $aD_{p-4}(a) - (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ è divisibile modulo p per il polinomio $-D_{p-3}(a)/a^\delta$ ove poniamo:

$$\delta = \frac{p-1}{3} \quad \text{se} \quad p = 6h + 7 \quad \text{e} \quad \delta = \frac{p-2}{3} \quad \text{se} \quad p = 6h + 5.$$

Indicando con $\theta(a)$ il quoziente della divisione vogliamo trovare, essendoci necessaria per il seguito, la legge di formazione dei coefficienti.

Se è $p = 6h + 7$ abbiamo:

$$aD_{p-4} - (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -\binom{3h+1}{1}a^{3h+2} + \binom{3h}{3}a^{3h+1} - \binom{3h-1}{5}a^{3h} +$$
$$+\binom{3h-2}{7}a^{3h-1} + \ldots + (-1)^{h+1}\binom{2h+1}{2h}a^{2h+2} - (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$\frac{-D_{p-3}(a)}{a^{2h+2}} = -\binom{3h+2}{0}a^h + \binom{3h+1}{2}a^{h-1} - \binom{3h}{4}a^{h-2} +$$
$$+\binom{3h-1}{6}a^{h-3} + \ldots + (-1)^{h+1}\binom{2h+2}{2h},$$

perciò $\theta(a)$ è un polinomio in a del grado $2h+2$, e si ha:

$$\theta(a) = c_0 a^{2h+2} + c_1 a^{2h+1} + c_2 a^{2h} + \ldots + c_{2h}a^2 + c_{2h+1}a + c_{2h+2}.$$

Tenuto conto che deve essere

$$aD_{p-4}(a) - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \frac{-D_{p-3}(a)}{a^{2h+2}}\theta(a) \pmod{p} \tag{36}$$

troviamo

$$c_0 = \frac{p-5}{2}, \quad c_1 = \frac{p+7}{2}$$

e per il coefficiente c_r il determinante di ordine $r+1$

$$c_r = (-1)^r \begin{vmatrix} \binom{3h+2}{0} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & \binom{3h+1}{1} \\ \binom{3h+1}{2} & \binom{3h+2}{0} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & \binom{3h}{3} \\ \binom{3h}{4} & \binom{3h+1}{2} & \binom{3h+2}{0} \ldots\ldots 0 & \binom{3h-1}{5} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{3h+3-r}{2(r-1)}\binom{3h+4-r}{2(r-2)} & \ldots\ldots\ldots & \binom{3h+2}{0} & \binom{3h+2-r}{2r-1} \\ \binom{3h+2-r}{2r}\binom{3h+3-r}{2(r-1)}\binom{3h+4-r}{2(r-2)} & \ldots & \binom{3h+1}{2} & \binom{3h+1-r}{2r+1} \end{vmatrix}$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots, 2h+2.$$

In generale qualunque sia p abbiamo:

$$c_0 = \frac{p-5}{2} \tag{37}$$

$$c_r = (-1)^r \begin{vmatrix} \binom{\frac{p-3}{2}}{0} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \binom{\frac{p-3}{2}-1}{1} \\ \binom{\frac{p-3}{2}-1}{2} & \binom{\frac{p-3}{2}}{0} & 0 & \cdots\cdots & 0 & \binom{\frac{p-2}{2}-2}{3} \\ \binom{\frac{p-3}{2}-2}{4} & \binom{\frac{p-3}{2}-1}{2} & \binom{\frac{p-3}{2}}{0} & \cdots\cdots & 0 & \binom{\frac{p-3}{2}-3}{5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{\frac{p-3}{2}-(r-1)}{2(r-1)} & \binom{\frac{p-3}{2}-(r-2)}{2(r-2)} & \cdots\cdots & & \binom{\frac{p-3}{2}}{0} & \binom{\frac{p-3}{2}-2}{2r-1} \\ \binom{\frac{p-3}{2}-r}{2r} & \binom{\frac{p-3}{2}-(r-1)}{2(r-1)} & \cdots\cdots & & \binom{\frac{p-3}{2}-1}{2} & \binom{\frac{p-3}{2}-(r+1)}{2r+1} \end{vmatrix} \tag{37'}$$

$$r = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \delta.$$

§ 7. Costruzione delle formule apiristiche risolutive della congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ nel caso che essa ammetta tre radici incongrue.

10. La congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ abbia tre radici incongrue x_1, x_2, x_3. Nota una di esse, possiamo determinare le altre due. Infatti in questo caso il discriminante della congruenza:

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 = -4a^3 - 27a^2 = -a^2(4a + 27)$$

è residuo quadratico di p $\left[\left(\frac{-4a-27}{p}\right) = 1\right]$ e posto $k^2 \equiv \Delta \pmod{p}$ per le due radici x_2, x_3 si ha [1]:

$$x_2 + x_3 = -x_1, \quad x_2 - x_3 = \frac{k}{f'(x_1)} \quad [f'(x_1) = 3x_1^2 + a \not\equiv 0 \pmod{p}]$$

e perciò

$$2x_2 \equiv \frac{k}{f'(x_1)} - x_1, \quad 2x_3 \equiv -\frac{k}{f'(x_1)} - x_1 \qquad (\text{mod. } p).$$

Basterà quindi costruire una radice della congruenza proposta.

Per risolvere apiristicamente la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p), \tag{38}$$

posto $h = \left[\frac{p-3}{6}\right]$, dobbiamo costruire un polinomio di grado $h-1$

$$x = f(a) = A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + A_{h-1} a^{h-1} \tag{39}$$

tale che ogni valore di a radice della congruenza di grado h [2]

$$\Omega(a) = \sum_0^h {}_i (-1)^i \binom{\frac{p-3}{2} - i}{2i+1} a^{h-i} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \tag{II}$$

fornisca una radice della congruenza (38).

Seguendo il prof. SCORZA [3] osserviamo che l'espressione (39) soddisfa alle nostre condizioni allora e allora soltanto che sia:

$$f(a_1) = x_1, \quad f(a_2) = x_2, \ldots, \quad f(a_h) = x_h, \tag{40}$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_h$ indicano le h radici incongrue della (I) e x_i una qualunque delle tre radici dell'equazione (I) corrispondente al valore a_i.

Ora fissati $x_1, x_2, \ldots, x_h$ e perciò $a_1, a_2, \ldots, a_h$ $[a_i = -x_i^3(x_i+1)^{-1}]$ le (40) individuano univocamente $f(x)$; il sistema $x_1, x_2, \ldots, x_h$ può fissarsi in 3^h modi differenti, perciò *per le equazioni cubiche* (38) *le quali ammettono tre soluzioni incongrue, di polinomi atti a risolverla apiristicamente ne esistono* 3^h *e la determinazione di tali polinomi si ottiene con un problema di interpolazione.*

---

[1] Con l'aggiunta di $\sqrt{\Delta}$ l'equazione di terzo grado coincide con la sua risolvente di GALOIS e perciò due radici possono esprimersi razionalmente per la terza. Cfr. ad es. H. WEBER, *Traité d'algèbre supérieure.* (Paris, 1898, Gauthier-Villars, p. 602).

[2] Cfr. n.° 8.

[3] Cfr. G. SCORZA, loc. cit. [2].

Si ha per la formula di LAGRANGE

$$f(a)=\sum_{1}^{h}{}_i\, x_i \frac{(a-a_1)\dots(a-a_{i-1})(a-a_{i+1})\dots(a-a_h)}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_h)}$$

od anche

$$f(a)=\sum_{1}^{h}{}_i\, x_i \frac{\Omega(a)}{(a-a_i)\Omega'(a_i)} \tag{41}$$

e poichè si ha

$$\frac{\Omega(a)}{a-a_i}=\sum_{0}^{h-1}{}_r\,(q_0a_i^{\,r}+q_1a_i^{\,r-1}+\dots+q_{r-1}a_i+q_r)a^{h-1-r},$$

ove abbiamo indicato per la (II)

$$q_i=(-1)^i\binom{\frac{p-3}{2}-i}{2i+1},$$

la (41) diventa

$$f(a)=\sum_{0}^{h-1}{}_r\, a^{h-1-r}\sum_{1}^{h}{}_i\, x_i \frac{q_0a_i^{\,r}+q_1a_i^{\,r-1}+\dots+q_r}{\Omega'(a_i)};$$

perciò, confrontando con la (39):

$$A_{h-1-r}=\sum_{1}^{h}{}_i\, x_i \frac{q_0a_i^{\,r}+q_1a_i^{\,r-1}+\dots+q_r}{\Omega'(a_i)}; \quad r=0,\,1,\,2,\dots,\,h-1; \tag{42}$$

$$q_i=(-1)^i\binom{\frac{p-3}{2}-i}{2i+1}.$$

Per i resultati del n.° 3 [(17) e (17″)] si ha per x_i l'espressione

$$x_i=\frac{3+\alpha_i^2}{1-\alpha_i^2}, \tag{43}$$

$$[a_i=-x_i^3(x_i+1)^{-1}], \tag{43'}$$

ove α_i^2 prende h convenienti valori della successione

$$2^2,\quad 4^2,\quad 5^2,\dots,\quad \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \tag{43''}$$

con l'esclusione, nel caso $p=6h+7$, del quadrato α^2 per il quale si ha $\alpha^2\equiv p-3 \pmod{p}$.

Vogliamo precisare come debbono essere scelti h valori nel sistema (43″) in guisa che la (43) ci fornisca h valori x_i ai quali per la (43′) corrispondono gli h valori incongrui a_i.

Si osservi che essendo x_i una radice della congruenza (38), tenuto conto del procedimento indicato nel n.° 3, poichè si ha

$$-4a_i - 3x_i^2 = 4x_i^3(x_i+1)^{-1} - 3x_i^2 = x_i^2(x_i+1)^{-1}(x_i-3) = \alpha_i^2 x_i^2,$$

per le altre due radici y della congruenza è:

$$2y + x_i \equiv \pm \alpha_i x_i \qquad (\text{mod. } p)$$

perciò i tre valori di x_i ai quali la (43′) fa corrispondere uno stesso a_i sono:

$$(44) \qquad \frac{3+\alpha_i^2}{1-\alpha_i^2}, \quad -\frac{3+\alpha_i^2}{2(1+\alpha_i)}, \quad -\frac{3+\alpha_i^2}{2(1-\alpha_i)},$$

e il valore a_i corrispondente è:

$$a_i = -\frac{(3+\alpha_i^2)^3}{4(1+\alpha_i^2)^2}.$$

Ora facilmente si prova che se nell'espressione $\dfrac{3+\alpha^2}{1-\alpha^2}$ poniamo per α^2 rispettivamente

$$\alpha_i^2, \quad \left(\frac{\alpha_i+3}{\alpha_i-1}\right)^2, \quad \left(\frac{\alpha_i-3}{\alpha_i+1}\right)^2$$

otteniamo i tre numeri (44), e allora, concludendo, segue il teorema:

Per formare la soluzione apiristica delle congruenze

$$(38) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \ (\text{mod. } p), \qquad [p = 6h+5,\ 6h+7]$$

le quali ammettono tre radici incongrue, si liberi la successione

$$2^2, \quad 4^2, \quad 5^2, \ldots, \quad \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

nel caso di $p = 6h + 7$ *del quadrato per il quale si ha* $\alpha^2 \equiv -3$ (mod. p) *e con i* $3h$ *numeri restanti si formino le* 3^h *successioni di quadrati:*

$$(45) \qquad \alpha_1^2, \quad \alpha_2^2, \ldots, \quad \alpha_h^2,$$

nelle quali non vi siano mai due termini diversi α_i, α_J ($i, J = 1, 2, \ldots, h$) *per i quali si abbia:*

$$\left(\frac{\alpha_J+3}{\alpha_J-1}\right)^2 \equiv \alpha_i^2; \quad \left(\frac{\alpha_J-3}{\alpha_J+1}\right)^2 \equiv \alpha_i^2 \qquad (\text{mod. } p).$$

Allora la soluzione apiristica della congruenza (38) *è:*

$$(39') \qquad x \equiv \sum_{0}^{h-1}{}_r A_{h-1-r} a^{h-1-r} \pmod{p}$$

ove si ha:

$$A_{h-1-r} \equiv \sum_{1}^{h}{}_i x_i \frac{q_0 a_i^r + q_1 a_i^{r-1} + \ldots + q_r}{\Omega'(a_i)} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, h-1,$$

con

$$q_i = (-1)^i \binom{\frac{p-3}{2} - i}{2i}, \quad x_i \equiv \frac{3 + \alpha_i^2}{1 - \alpha_i^2}, \quad a_i \equiv -\frac{(3 + \alpha_i^2)^3}{4(1 - \alpha_i^2)^2},$$

essendo in queste α_i *preso nella successione* (45), *ed essendo infine* $\Omega(a)$ *il primo membro della* (II).

Ad es. per $p = 19$, $h = 2$, possiamo formare $3^2 = 9$ successioni (45), esse sono:

$[2^2, 7^2]$, $[2^2, 8^2]$, $[2^2, 9^2]$; $[5^2, 7^2]$, $[5^2, 8^2]$, $[5^2, 9^2]$; $[6^2, 7^2]$, $[6^2, 8^2]$, $[6^2, 9^2]$.

§ 8. Condizioni cui deve soddisfare a perchè la congruenza (38) $x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$ abbia una sola radice, o nessuna. Formula risolutiva nel caso che la congruenza abbia una sola radice.

11. Abbiamo visto nei n.i 4, 8, 9 che posto $\delta = \frac{p-2}{3}$ se $p = 6h + 5$, e $\delta = \frac{p-1}{3}$ se $p = 6h + 7$, le eventuali radici della congruenza (38) debbono soddisfare la congruenza:

$$-D_{p-3}(a)x^2 + \frac{p-3}{2}[-D_{p-3}(a)]x + \frac{[-D_{p-3}(a)]}{a^\delta}\theta(a) \equiv 0 \pmod{p},$$

od anche *posto* $a' = a^{-1}$, nell'ipotesi che sia $D_{p-3}(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ (e perciò l'equazione proposta *non* può avere tre radici incongrue) le eventuali radici della congruenza (38) debbono soddisfare la congruenza:

$$(46) \qquad x^2 + \frac{p-3}{2}x + a^\delta\theta(a) \equiv 0 \ (^1) \pmod{p}.$$

(1) La forma della congruenza (46) è assai semplice, e questo ci ha reso possibile lo studio completo del caso in esame. Ad es. si osservi che per $a = -\frac{27}{4}$ la (38) ammette le radici $x_1 = 3$; $x_2 = x_3 = -\frac{3}{2}$ e perciò la (46) ha le radici $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; e il secondo coefficiente della (46) è proprio uguale alla somma di queste radici.

Si ha poi identicamente

$$x^3 + ax + a = \left[x^2 + \frac{p-3}{2}x + a'^{\delta}\theta(a)\right]\left[x + \frac{p-3}{2}\right] +$$
$$+ \left[a + \left(\frac{p-3}{2}\right)^2 - a'^{\delta}\theta(a)\right]x + \left[a + \frac{p-3}{2}a'^{\delta}\theta(a)\right]$$

e perciò se la (38) non ammette tre radici incongrue ma possiede radici, esse debbono soddisfare la congruenza di 1° grado:

$$(47) \qquad \left[a + \left(\frac{p-3}{2}\right)^2 - a'^{\delta}\theta(a)\right]x + a + \frac{p-3}{2}a'^{\delta}\theta(a) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Questa congruenza è identica se a soddisfa simultaneamente le due congruenze

$$(48) \qquad a + \left(\frac{p-3}{2}\right)^2 - a'^{\delta}\theta(a) \equiv 0, \quad a + \frac{p-3}{2}a'^{\delta}\theta(a) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

dalle quali moltiplicando la prima per $\frac{p-3}{2}$ e sommando si ha:

$$4a + 27 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

cioè la congruenza proposta (38) ha radici multiple (cfr. n.° 2). Inversamente se $4a + 27 \equiv 0$ (mod. p), la (38) ammette due radici incongrue le quali soddisfano la congruenza di 1° grado (47), perciò questa è identica.

Supposto, come abbiamo già dichiarato, $4a + 27 \not\equiv 0$ (mod. p), *la* (47) *non è identica*, e poichè le congruenze (48) sono equivalenti rispettivamente alle altre due:

$$4\theta(a) \equiv a^{\delta}[4a + 9], \quad 2\theta(a) - 2a^{\delta+1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

concludiamo che *se è:*

a) $D_{p-3}(a) \not\equiv 0$ (mod. p) *e* $4\theta(a) \equiv a^{\delta}[4a + 9]$ (mod. p);

b) *oppure* $D_{p-3}(a) \not\equiv 0$ (mod. p) *e* $3\theta(a) \equiv 2a^{\delta+1}$ (mod. p), *la congruenza* (38) *è impossibile.*

Se invece è $D_{p-3}(a) \not\equiv 0$; $4\theta(a) \not\equiv (4a + 9)a^{\delta}$; $3\theta(a) \not\equiv 2a^{\delta+1}$ (mod. p), *se la congruenza proposta è possibile, essa ammette una sola radice* x *data dalla formula:*

$$(49) \qquad x \equiv -\frac{4a^{\delta+1} - 6\theta(a)}{a^{\delta}[4a + 9] - 4\theta(a)}, \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Se poniamo ora

$$2\theta(a) + 9a^{\delta} = \varphi(a),$$

ove $\varphi(a)$ è un polinomio in a di grado δ, la (49) diventa

$$x \equiv -\frac{a^\delta(4a+27)-3\varphi(a)}{a^\delta(4a+27)-2\varphi(a)}, \qquad (\mathrm{mod.}\ p). \tag{50}$$

Siccome per $a = -\frac{27}{4}$ abbiamo visto che la (48) è identica, segue che il polinomio $\varphi(a)$ è divisibile per $4a+27$, e posto

$$\varphi(a) = (4a+27)\psi(a)$$

$\psi(a)$ è un polinomio di grado $\delta - 1$ in a. Si ha allora

$$\psi(a) = \frac{\varphi(a)}{4a+27} = \frac{2\theta(a)+9a^\delta}{4a+27}$$

e la (50) diventa:

$$x \equiv -\frac{a^\delta - 3\psi(a)}{a^\delta - 2\psi)a)}, \qquad (\mathrm{mod.}\ p). \tag{51}$$

Questo valore soddisfa la congruenza proposta se è:

$$[27+4a]\psi^3(a) - [27+4a]a^\delta\psi(a) + [9+a]a^{2\delta}\psi(a) - a^{3\delta} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p). \tag{52}$$

Si verifica facilmente che se a soddisfa questa congruenza non può essere $a \equiv 0$ (mod. p) [1], nè $\psi(a) \equiv \frac{a^\delta}{2}, \frac{a^\delta}{3}$ (mod. p); proveremo nel numero seguente che tutti i valori di $a \not\equiv 0$ (mod. p) che annullano $D_{p-3}(a)$ annullano anche $\psi(a)$ e perciò non soddisfano la (52); abbiamo allora il seguente teorema:

La congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) *ha una e una sola radice, allora e allora soltanto che per il valore* a *considerato sia* $4a+27 \not\equiv 0$ (mod. p) *e il valore del polinomio* $\psi(a)$ *espresso dalla formula* (cfr. n.° 9)

$$\psi(a) = \left[4a^\delta + \sum_1^\delta{}_r\, 2c_r a^{\delta-r}\right](4a+27)^{p-2}$$

ove i coefficienti c_r *hanno l'espressione* (37'), *soddisfa la congruenza*

$$[27+4a]\psi^3(a) - [27+4a]a^\delta\psi(a) + [9+a]a^{2\delta}\psi(a) - a^{3\delta} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p). \tag{III}$$

La soluzione della congruenza proposta è data dalla formula:

$$x \equiv -[a^\delta - 3\psi(a)][a^\delta - 2\psi(a)]^{p-2} \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

---

[1] L'ipotesi $a \equiv 0$ porta per la (52) $\psi(a) \equiv 0$, quindi $\theta(a) \equiv 0$, e poichè si ha $aD_{p-4}(-1)^{\frac{p-1}{2}} = \frac{D_{p-3}(a)}{a^\delta}[-\theta(a)]$ segue l'assurdo $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0$ (mod. p).

Dal teorema enunciato al n.° 8 e dal teorema ora dimostrato segue l'altro: *La congruenza* $x^3+ax+a\equiv 0$ (mod. p) *è impossibile per tutti i valori di* a *i quali non soddisfano nè la* (II) *del n.° 8, nè la* (III), *e non siano congrui con lo zero o con* $-\frac{27}{4}$ *modulo* p.

12. I teoremi ora enunciati si basano sulla proprietà che dobbiamo dimostrare, che se per un valore $a \not\equiv 0$ (mod. p) si ha $D_{p-3}(a)\equiv 0$ (mod. p) per lo stesso valore di a è $\psi(a)\equiv 0$ (mod. p), od anche, poichè per un tale valore è $4a+27\not\equiv 0$ (mod. p) [1], deve essere

$$\varphi(a)\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Con le posizioni dei n.[i] 9, 11 si ha:

$$2aD_{p-4}(a)-2(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\frac{D_{p-3}(a)}{a^{\delta}}[-2\theta(a)]=\frac{D_{p-3}(a)}{a^{\delta}}[9a^{\delta}-\varphi(a)]$$

cioè

$$2aD_{p-4}(a)-9D_{p-3}(a)-2(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-\frac{D_{p-3}(a)}{a^{\delta}}\varphi(a),$$

e per provare che l'equazione $\varphi(a)\equiv 0$ (mod. p) ha tutte le radici della congruenza $\frac{D_{p-3}(a)}{a^{\delta}}\equiv 0$ (mod. p), basterà provare che è

$$\left[2aD_{p-4}(a)-9D_{p-3}(a)-2(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right]'\equiv 0 \qquad \left[\mathrm{mod.}\ \frac{D_{p-3}(a)}{a^{\delta}},\ p\right],$$

od anche

$$2[aD_{p-4}(a)]'-9D'_{p-3}(a)\equiv 0 \qquad \left[\mathrm{mod.}\ \frac{D_{p-3}(a)}{a^{\delta}},\ p\right].$$

Supponiamo dapprima $p6=h+5$; abbiamo:

$$\frac{1}{a^{2h}}\{2[aD_{p-4}(a)]'-9D'_{p-3}(a)\}=-(3h+1)\left[2\binom{3h}{1}+9\binom{3h+1}{0}\right]a^{h}+$$
$$+3h\left[2\binom{3h-1}{3}+9\binom{3h}{2}\right]a^{h-1}-(3h-1)\left[2\binom{3h}{5}+9\binom{3h-1}{4}\right]a^{h+2}+$$
$$+(3h-2)\left[2\binom{3h-3}{7}+9\binom{3h-2}{6}\right]a^{h-3}+\ldots+$$
$$+(-1)^{h}(2h+2)\left[2\binom{2h+1}{2h-1}+9\binom{2h+2}{2h-2}\right]a+9(-1)^{h-1}(2h+1)\binom{2h+1}{2h}.$$

[1] L'ipotesi $D_{p-3}(a)\equiv 0$ (mod. p) porta che la congruenza proposta ha tre radici incongrue, mentre l'altra $4a+27\equiv 0$ (mod. p) porta che la congruenza ha una radice doppia.

È poi:

$$-\frac{D_{p-3}}{a^{2h+1}}=-\binom{3h+1}{0}a^h+\binom{3h}{2}a^{h-1}-\binom{3h-1}{4}a^{h-2}+$$
$$+\binom{3h-2}{6}a^{h-3}+\ldots+(-1)^{h+1}\binom{2h+1}{2h},$$

ed è subito visto che i secondi membri di queste ultime uguaglianze differiscono per il fattore -6 modulo $6h+5$.

Per questo basterà verificare che è

$$(3h-r+1)\left[2\binom{3h+r}{2r+1}+9\binom{3h-r+1}{2r}\right]\equiv-6\binom{3h-r+1}{2r}\quad(\text{mod. } 6h+5),$$

ovvero

$$(6h-2r+2)\binom{3h-r}{2r+1}+(27h-9r+15)\binom{3h-r+1}{2r}\equiv 0\quad(\text{mod. } 6h+5)$$

od anche moltiplicando per $\dfrac{(2r+1)!}{(3h-r)(3h-r-1)\ldots(3h-3r+2)}$ (i fattori del numeratore e del denominatore sono primi con $6h+5$) basterà provare che è:

$$(6h-2r+r)(3h-3r+1)(3h-3r)+$$
$$+(27h-9r+15)(3h-r+1)(2r+1)\equiv 0\quad(\text{mod. } 6h+5),$$

la quale è subito verificata sostituendo a $3h$ il valore congruo $-\dfrac{5}{2}$.

Analogamente si ragiona nel caso $p=6h+7$.

§ 9. Relazioni di secondo grado fra i determinanti D_h. Formula risolutiva della congruenza $x^3+ax+a\equiv 0$ (mod. p), nel caso che le tre radici non abbiano lo stesso carattere quadratico modulo p.

13. Ricordiamo la formula fondamentale (I) (cf. n.° 6)

$$\text{(I)}\quad (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}}x^h\equiv(-1)^{h+1}D_{h-2}(a)x^2+D_{h-1}(x)+aD_{h-3}(a)\ [\text{mod. } x^3+ax+x].$$

Cambiando in questa h in $2h$ si ha:

$$(1)\qquad (-1)^h x^{2h}\equiv -D_{2h-2}(a)x^2+D_{2h-1}(a)x+aD_{2h-3}(a)\ [\text{mod. } x^3+ax+a].$$

Elevando al quadrato la (I) e riducendo rispetto al modulo $x^3 + ax + a$ otteniamo:

$$x^{2h} \equiv [- aD^2_{h-2}(a) + 2a(-1)^{h+1} D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) + D^2_{h-1}(a)]x^2 +$$
$$+ [- aD^2_{h-2}(a) - 2a(-1)^{h+1} D_{h-1}(a) D_{h-2}(a) + 2aD_{h-1}(a)D_{h-3}(a)]x -$$
$$- 2a(-1)^{h+1}D_{h-1}(a)D_{h-2}(a) + a^2D^2_{h-3}(a) \qquad [\text{mod. } x^3 + ax + a],$$

e confrontando con la (I), ne deduciamo per i determinanti $D_h(a)$ le relazioni del secondo grado cercate:

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} &aD^2_{h-2}(a) - 2a(-1)^{h+1}D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) - D^2_{h-1}(a) = (\quad 1)^h D_{2(h-1)}, \\ &-aD^2_{h-2}(a) - 2a(-1)^{h+1}D_{h-1}(a)D_{h-2}(a) + 2aD_{h-1}(a)D_{h-3}(a) = (-1)^h D_{2h-1}, \\ &-2a(-1)^{h+1}D_{h-1}(a)D_{h-2}(a) + a^2D^2_{h-3}(a) = (-1)^h aD_{2h-3}(a). \end{aligned}$$

14. Snpponiamo che le tre radici $x_1\, x_2\, x_3$ della congruenza

$$(2) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

soddisfino le condizioni

$$(3) \qquad x_1^{2h} \equiv x_2^{2h} \equiv x_3^{2h} \qquad (\text{mod. } p)$$

ma *non* sia simultaneamente

$$(4) \qquad x_1^{h} \equiv x_2^{h} \equiv x_3^{h} \qquad (\text{mod. } p).$$

Tenuto conto delle ipotesi (3) in virtù della (1) si ha che il secondo membro di essa deve assumere qualunque sia x lo stesso valore modulo p, cioè:

$$(5) \qquad D_{2h-2}(a) \equiv 0, \quad D_{2h-1}(a) \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p),$$

e queste portano per la (27) del n.° 6 anche:

$$(5') \qquad D_{2k+1}(a) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Le formule (IV) diventano:

$$\text{(IV}') \quad \begin{aligned} &aD^2_{h-2}(a) - 2a(-1)^{h+1}D_{h-2}(a)D_{h-3}(a) - D^2_{h-1}(a) \equiv 0 \\ &-aD^2_{h-2}(a) - 2a(-1)^{h+1}D_{h-1}(a)D_{h-2}(a) + 2aD_{h-1}(a)D_{h-3}(a) \equiv 0 \ (\text{mod. } p). \\ &-2a(-1)^{h+1}D_{h-1}(a)D_{h-2}(a) + a^2D^2_{h-3}(a) \equiv (-1)^h aD_{2h-3}(a) \end{aligned}$$

Si ha da qui che per il valore di a considerato non può aversi $D_{h-1}(a) \equiv 0$, perchè dalla seconda delle (IV) si avrebbe $D_{h-2}(a) \equiv 0$ e perciò per la (I), $x_1^h \equiv x_2^h \equiv x_3^h$ contro l'ipotesi.

Analogamente non può essere $D_{h-2}(a) \equiv 0$, perchè la prima delle (IV) darebbe $D_{h-1}(a) \equiv 0$ e si avrebbe lo stesso assurdo.

Poniamo

$$(6) \qquad D_{h-1}(a) \equiv (-1)^{h+1} X D_{h-2}(a) \pmod{p}.$$

Le prime due delle (IV′) diventano

$$\begin{cases} D_{h-2}(a)(X^2-a)+2a(-1)^{h+1}D_{h-3}(a)\equiv 0 \\ -D_{h-2}(a)(a+2aX)+2aX(-1)^{h+1}D_{h-3}(a)\equiv 0 \end{cases} \pmod{p},$$

ed avendosi $D_{h-3}(a) \not\equiv 0$, ne segue che per il valore di X considerato deve aversi:

$$\begin{vmatrix} X^2-a & 1 \\ -a-2aX & X \end{vmatrix} = X^3+aX+a\equiv 0 \pmod{p},$$

cioè a motivo della (6), nelle ipotesi fatte una radice della congruenza proposta è

$$X \equiv (-1)^{h+1}\frac{D_{h-1}(a)}{D_{h-2}(a)} \pmod{p}.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema generale:

Se a *è un intero tale, che per esso la congruenza*

$$(2) \qquad x^3+ax+a\equiv 0 \pmod{p}$$

possiede tre radici incongrue x_1, x_2, x_3, *ed* h *un esponente tale che per esso si abbia*

$$x_1^{2h}\equiv x_2^{2h}\equiv x_3^{2h} \pmod{p}$$

mentre non è simultaneamente

$$x_1^{h}\equiv x_2^{h}\equiv x_3^{h} \pmod{p},$$

o ciò che è lo stesso a *è tale che si ha:*

$$(7) \qquad D_{2h-1}(a)\equiv 0,\quad D_{2h-2}(a)\equiv 0,\quad D_{h-1}(a)\not\equiv 0,\quad D_{h-2}(a)\not\equiv 0 \pmod{p},$$

allora, una radice della congruenza (2) *ha la forma:*

$$(\mathrm{V}) \qquad x\equiv(-1)^{h+1}\frac{D_{h-1}(a)}{D_{h-2}(a)}.$$

15. *a)* Si osservi che per il teorema di Fermat, qualunque siano i numeri x_1, x_2, x_3 si ha:

$$x_1^{2\frac{p-1}{2}}\equiv x_2^{2\frac{p-1}{2}}\equiv x_3^{2\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

e se *non* si ha simultaneamente

$$x_1^{\frac{p-1}{2}}\equiv x_2^{\frac{p-1}{2}}\equiv x_3^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

se cioè non è $\left(\frac{x_1}{p}\right) = \left(\frac{x_2}{p}\right) = \left(\frac{x_3}{p}\right)$, allora una radice della congruenza (2) ha la forma

$$(V') \qquad x = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{D_{\frac{p-3}{2}}(a)}{D_{\frac{p-5}{2}}(a)}.$$

Abbiamo quindi il teorema:

Se le tre radici della congruenza

$$(2) \qquad x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p}$$

non hanno lo stesso carattere quadratico modulo p, *se cioè si ha:*

$$(8) \qquad D_{p-2}(a) \equiv 0, \quad D_{\frac{p-3}{2}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-5}{2}}(a) \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ (1)},$$

allora una radice della congruenza (2), (e come proveremo al n.° 17 quella che non ha il carattere quadratico delle altre due) *si ottiene con la formula:*

$$(V') \qquad x \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{D_{\frac{p-3}{2}}(a)}{D_{\frac{p-5}{2}}(a)} \pmod{p} \text{ (2)}.$$

Diamo qualche esempio.

Sia $p = 17$, i valori di a per i quali la congruenza

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{17}$$

ha tre radici incongrue, sono i valori non nulli di a che soddisfano la congruenza

$$D_{15}(a) \equiv 0 \pmod{17}$$

ossia (n.° 7)

$$-7a^2 + 20a - 1 \equiv 0 \pmod{17}.$$

Si ha per questa $a = 7$, $a = 8$, e applicando la (V′) troveremo per la congruenza $x^3 + 7x + 7 \equiv 0 \pmod{17}$, la radice

$$x = -\frac{D_7(a)}{D_6(a)} = \frac{+3a}{a-1} = \frac{+21}{6} = +\frac{7}{2} \equiv 12 \pmod{17}.$$

Analogamente per la congruenza $x^3 + 8x + 8 \equiv 0 \pmod{17}$ la (V′) fornisce la radice $x = 1$.

---

(1) Tralasciamo per i resultati del n.° 8 la seconda condizione (7) $D_{p-3}(a) \equiv 0 \pmod{p}$.

(2) Questa formula, se valgono le (8), si applica *anche* per $p = 12k + 5$, ed abbiamo visto nella prefazione che la risoluzione delle congruenze (2) non si può far dipendere in questo caso dalla risoluzione di congruenze binomie.

Così pure, applicando la (V') alle congruenze:

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ 37)$$

si trova che per $a = 5$, 10, 18, 28 la congruenza ha rispettivamente la radice $x = 24$, 10, 15, 33; mentre per la congruenza

$$x^3 + 22x + 22 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ 37)$$

la formula (V') non è applicabile. Si ha infatti in questo caso

$$D_{17}(a) \equiv 0, \quad D_{16}(a) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ 37).$$

Del resto per le tre radici 2, 6, 29 della congruenza proposta si ha:

$$\left(\frac{2}{37}\right) = \left(\frac{6}{37}\right) = \left(\frac{29}{37}\right) = -1.$$

b) Siccome per $h = \frac{p-1}{2}$ si ha $x_1^{2h} \equiv x_2^{2h} \equiv x_3^{2h}$ (mod. p), è lecito considerare il *più piccolo* esponente positivo 2λ per il quale le radici della congruenza (2) soddisfano la condizione

$$x_1^{2\lambda} \equiv x_2^{2\lambda} \equiv x_3^{2\lambda} \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

È subito visto che λ è un divisore di $\frac{p-1}{2}$, e se per un altro esponente $2h$ si ha:

$$x_1^{2h} \equiv x_2^{2h} \equiv x_3^{2h} \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

h è multiplo di λ, ossia posto $h = \lambda q$, deve aversi perchè sia lecito applicare la (V)

$$x_1^{2\lambda q} \equiv x_2^{2\lambda q} \equiv x_3^{2\lambda q} \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

e *non* deve essere

$$x_1^{\lambda q} \equiv x_2^{\lambda q} \equiv x_3^{\lambda q} \qquad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Si ha allora che *se* 2λ *è il più piccolo esponente (pari) positivo per il quale si ha:*

$$x_1^{2\lambda} \equiv x_2^{2\lambda} \equiv x_3^{2\lambda} \qquad (\mathrm{mod.}\ p),$$

[*cioè se* 2λ *è il più piccolo indice pari positivo per il quale si ha simultaneamente:*

$$D_{2\lambda-1}(a) \equiv 0, \quad D_{2\lambda-2} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)],$$

e se non è simultaneamente $x_1^{\lambda} \equiv x_2^{\lambda} \equiv x_3^{\lambda}$ (mod. p), [*cioè si ha:*

$$D_{\lambda-1}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\lambda-2}(a) \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)],$$

allora si può applicare la (V); *se invece si ha:*

$$D_{\lambda-1}(a) \equiv 0, \quad D_{\lambda-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

allora qualunque sia l'esponente h *considerato non si potrà mai applicare la formula* (V).

Per eliminare questa difficoltà, faremo vedere nel n.° 25, che si può trovare una trasformata lineare della congruenza (2) nella quale le tre radici non hanno lo stesso carattere quadratico modulo p, e per la quale è perciò lecito applicare la (V').

Vogliamo infine osservare che se il modulo p è un numero primo di GAUSS si può sempre applicare la forma (V).

Si abbia infatti

$$p = 2^n + 1$$

e ammettiamo che sia $x_1^{\frac{p-1}{2}} \equiv x_2^{\frac{p-1}{2}} \equiv x_3^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. p). Considereremo le potenze $x_1^{\frac{p-1}{4}}$, $x_2^{\frac{p-1}{4}}$, $x_3^{\frac{p-1}{4}}$ e se accade ancora che si ha $x_1^{\frac{p-1}{4}} \equiv x_2^{\frac{p-1}{4}} \equiv x_3^{\frac{p-1}{4}}$ (mod. p); continueremo a considerare le potenze successive

$$x_1^{\frac{p-1}{2^r}}, \quad x_2^{\frac{p-1}{2^r}}, \quad x_3^{\frac{p-1}{2^r}} \qquad \text{con } r = 3, 4, \ldots,$$

e al più quando $r = n - 2$ troveremo che non si ha contemporaneamente $x_1^4 \equiv x_2^4 \equiv x_3^4$ (mod. p), giacchè in caso opposto si dovrebbe avere con i tre numeri incongrui x_1, x_2, x_3; $x_1^2 + x_1 \equiv x_2^2 + x_2 \equiv x_3^2 + x_3$ (mod. p), e ciò non può essere.

§ 10. La formula $x \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a)/D_{\frac{p-5}{2}}(a)$ applicata ad una congruenza $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) le cui radici non abbiano lo stesso carattere quadratico modulo p, fornisce la radice che non ha il carattere quadratico delle altre due.

16. Se nella formula fondamentale (I) del n.° 6 poniamo $x = y^2$ essa diventa:

$$(-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} y^{2h} \equiv (-1)^{h+1} D_{h-2}(a) y^4 + D_{h-1}(a) y^2 + a D_{h-3}(a) \qquad [\text{mod. } y^6 + ay^2 + a].$$

Facendo in questa $h = \dfrac{p-1}{2}$ abbiamo che *le radici della congruenza*

$$(1) \qquad y^6 + ay^2 + a \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

sono anche radici della congruenza

$$(2)\qquad (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-5}{2}}(a)y^4 + D_{\frac{p-3}{2}}(a)y^2 + aD_{\frac{p-7}{2}}(a) - (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

La congruenza (3) $x^3 + ax + a \equiv 0$ (mod. p) *non abbia le sue tre radici con lo stesso carattere quadratico modulo* p, questo porta come abbiamo detto

$$D_{\frac{p-3}{2}}(a) \not\equiv 0, \quad D_{\frac{p-5}{2}}(a) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

cioè la (2) non è identicamente soddisfatta, o ciò che è lo stesso (cfr. n.° 1) la (1) ha un numero di radici inferiore al suo grado [4 al più].

Posto per comodità

$$(4)\qquad \lambda = D_{\frac{p-3}{2}}(a), \quad \mu = D_{\frac{p-5}{2}}(a), \quad \nu = D_{\frac{p-7}{2}}(a)$$

dividiamo il primo membro della (1) moltiplicato per $(-1)^{\frac{p+1}{2}}\mu$ per il primo membro della (2); otteniamo.

$$(5)\qquad \begin{aligned} &(-1)^{\frac{p+1}{2}}\mu[y^6 + ay^2 + a] = \\ &= \left[(-1)^{\frac{p+1}{2}}\mu y^4 + \lambda y^2 + a\nu - (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}\right]\left(y^2 - (-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{\lambda}{\mu}\right) + \\ &+ (-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{\mu}\left[a\mu^2 - a\mu\nu(-1)^{\frac{p-1}{2}} + (-1)^{\frac{(p-3)(p+3)}{8}}\mu + \lambda^2\right]y^2 + \\ &+ (-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{a\lambda\nu + a\mu^2 - (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}}{\mu}, \end{aligned}$$

e il resto di questa divisione, siccome per $y^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{\lambda}{\mu}$ si riduce a:

$$\frac{\lambda^3 + a\lambda\mu^2 + a(-1)^{\frac{p+1}{2}}\mu^3}{\mu^2},$$

e per le cose dette al n.° 15 *a)* è congruo zero modulo p.

Ciò premesso, nella (3) sia $\left(\frac{-a}{p}\right) = -1$, ossia la congruenza abbia due radici residuo quadratico del modulo e una non residuo quadratico.

In questa ipotesi la (1) ha quattro radici le quali soddisfano la (2) e perciò il resto nella (5) è identicamente nullo modulo p; abbiamo quindi qualunque sia y

$$\begin{aligned} &(-1)^{\frac{p+1}{2}}\mu[y^6 + ay^2 + a] \equiv \\ &\equiv \left[(-1)^{\frac{p+1}{2}}\mu y^4 + \lambda y^2 + a\nu - (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}\right]\left[y^2 - (-1)^{\frac{p+1}{2}}\frac{\lambda}{\mu}\right] \qquad (\text{mod. } p). \end{aligned}$$

Il primo membro ha quattro radici modulo p, le quali sono radici del primo fattore del secondo membro, quindi la congruenza

$$y^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{(mod. } p)$$

è impossibile, cioè $(-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{\lambda}{\mu} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) / D_{\frac{p-5}{2}}$ non è residuo quadratico di p, ossia è vero che in questo caso *la formula* (V) *dà della congruenza* (3) *la radice che non ha il carattere quadratico delle altre due.*

Sia invece $\left(\frac{-a}{p}\right) = 1$, la congruenza (3) ha tre radici, di cui una è residuo quadratico del modulo e due non residuo quadratico; la congruenza $y^6 + ay^2 + a \equiv 0$ (mod. p) ha due sole radici, le quali sono radici di $(-1)^{\frac{p+1}{2}} \mu y^4 + \lambda y^2 + a\nu - (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} \equiv 0$ (mod. p) e quindi del resto della loro divisione che *non può* essere ora identicamente nullo. Ma il resto si annulla per $y^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{\lambda}{\mu}$ (mod. p), quindi questa congruenza deve essere possibile, cioè $(-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{\lambda}{\mu} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) / D_{\frac{p-5}{2}}(a)$ è residuo quadratico del modulo p, ossia *è vero che anche in questo caso la formula* (V′) *dà della congruenza* (3), *la radice che non ha il carattere quadratico delle altre due.*

Abbiamo così dimostrato il teorema: *Se la congruenza*

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p),$$

possiede tre radici che non hanno lo stesso carattere quadratico, la formula (V′)

$$x \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) / D_{\frac{p-5}{2}}(a)$$

fornisce la radice che ha lo stesso carattere quadratico di $\left(\frac{-a}{p}\right)$, [o ciò che è lo stesso, essendo $\left(\frac{x_1}{p}\right)\left(\frac{x_2}{p}\right)\left(\frac{x_3}{p}\right) = \left(\frac{-a}{p}\right)$ la radice che non ha il carattere quadratico delle altre due].

Sur la monogénéité des fonctions d'une variable complexe.

Par M. Wladimir Fédoroff (à Jvanovo-Vosnesensk).

§ 1. Rappelons d'abord la définition bien connue de la monogénéité des fonctions uniformes d'une variable complexe :

Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe z sera dite *monogène* au point $z = u$, lorsque cette fonction est bien déterminée et uniforme pour tous les points d'un cercle $(u, R > 0)$ [1] et si, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$\left| \frac{f(z') - f(u)}{z' - u} - \frac{f(z) - f(u)}{z - u} \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

pour tous les points z et z' du cercle (u, δ).

Il en résulte que cette fonction $f(z)$ est continue au point $z = u$ et qu'il existe la dérivée, $f'(u)$, définie comme il suit

$$f'(u) = \lim_{z \to u} \frac{f(z) - f(u)}{z - u}. \tag{2}$$

Nous employons toujours dans la suite le mot « monogène » au sens classique, donné plus haut. Ainsi, lorsqu'on dit qu'une fonction est monogène sur un ensemble M, il s'ensuit que cette fonction est bien déterminée non seulement sur M, mais de plus dans le voisinage de chaque point de M (c'est-à-dire dans un cercle autour de chaque point de M).

Le but de cette Note est de déterminer une fonction $F(z)$ qui possède les propriétés suivantes :

a) cette fonction $F(z)$ est uniforme et continue sur toute la sphère complexe.

b) $F(z)$ est monogène sur un ensemble M qui est partout dense sur la sphère complexe (c'est-à-dire dans chaque aire il y a des points de M) et qui contient une infinité de domaines (connexes et ouverts)

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \ldots.$$

[1] Nous désignons toujours par (u, R), (u, δ),... etc., un cercle de centre u,... et de rayon R, δ,... etc.

sans points communs deux à deux. De plus, on peut unir deux points quelconques de l'ensemble M par un arc simple de JORDAN dont tous les points appartiennent à M.

c) La fonction $F(z)$ coïncide dans chaque domaine D_k avec une fonction analytique $f_k(z)$ pour laquelle D_k est son domaine naturel d'existence.

Ainsi cette fonction $F(z)$ réalise un prolongement bien naturel des fonctions analytiques au delà de leur domaine d'existence.

On sait que M. É. BOREL découvrit des *fonctions monogènes non analytiques* définies dans les *domaines* C (ce sont des ensembles connexes d'une nature spéciale). Mais la définition de la monogénéité donnée par cet illustre analyste est plus large que la définition classique [1].

§ 2. **Quelques remarques préliminaires.** — Considérons sur la sphère Ω de la variable complexe z un ensemble parfait E ne contenant aucun point intérieur (E peut être partout discontinu ou peut contenir des continus linéaires). Nous supposons que E admet le diamètre $\delta < +\infty$ et que chaque portion de E est de mesure (superficielle) positive.

Cela posé, considérons l'intégrale (au sens de M. H. LEBESGUE)

$$J(z \mid \varphi) = \int_E \frac{\varphi(u)d\omega}{u - z} \tag{3}$$

où u est la variable d'intégration ; z est un point de $\Omega - E$;
$d\omega$ est « l'élément d'aire » ;
$\varphi(u)$ est une fonction bornée sur E :

$$|\varphi(u)| < N. \tag{4}$$

L'intégrale (3) est l'intégrale bien connue de M. M. A. DENJOY-D. POMPEIU [2].

Nous aurons besoin dans la suite des propriétés suivantes de l'integrale (3):

a) L'intégrale $J(z \mid \varphi)$ tend vers une limite unique bien déterminée, quelle que soit la façon dont z tend vers un point u de l'ensemble E, et nous posons, par définition,

$$J(u \mid \varphi) = \lim_{z \to u} J(z \mid \varphi). \tag{5}$$

---

(1) Voir, par ex., É. BOREL, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe.* (Collection Borel, Paris, 1917), pp. 151-163.

(2) Voir, par ex., L. ZORETTI, *Leçons sur le prolongement analytique.* (Collection Borel, Paris, 1911), p. 89.

Ainsi $J(z \mid \varphi)$ définit une fonction de la variable complexe partout uniforme et continue sur la sphère complexe.

b) Pour chaque point z de la sphère complexe nous avons, en vertu de (4), [1]

$$|J(z \mid \varphi)| < K \cdot N \cdot \delta \tag{6}$$

où K est une constante absolue.

§ 3. **Construction de l'ensemble M.** — Considérons dans un carré, dont la diagonale est < 1, une infinité dénombrable de courbes simples fermées de JORDAN, deux à deux extérieures.

Soient Q l'ensemble formé de tous les points de ces courbes et S l'ensemble des points d'accumulation de ces courbes (cela veut dire que dans chaque cercle dont le centre est un point de S il y a une infinité de points appartenant aux courbes différentes). Nous supposons que l'ensemble S est formé d'un nombre *fini* de points. Couvrons ce carré d'une infinité dénombrable de réseaux ayant des mailles carrées infiniment petites et déterminons dans chaque maille, qui contient des points de l'ensemble $Q+S$, un ensemble parfait punctiforme de mesure (superficielle) positive. Désignons par E la somme des ensembles Q et S et les ensembles punctiformes ainsi obtenus.

L'ensemble E est un ensemble parfait, sans point intérieur, et dont chaque portion est de mesure (superficielle) positive. De plus l'ensemble $\Omega - E$ est composé d'une infinité dénombrable de domaines (ouverts et connexes), sans points commun deux à deux, que nous désignons par

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \ldots .$$

Déterminons enfin un ensemble dénombrable R, qui est partout dense sur l'ensemble E et qui ne contient aucun point de l'ensemble S.

Posons

$$M = R + D_1 + D_2 + D_3 + \ldots .$$

On peut évidemment unir deux points quelconques de l'ensemble M par un arc simple de JORDAN dont chaque point appartient à M.

---

[1] L'inégalité (6) est due à M. D. POMPEIU. Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'intégrale (3) atteint son *module-maximum* sur l'ensemble E et qu'on a

$$|J(z \mid \varphi)| < N \cdot \int_E \frac{d\omega}{|u - z|} .$$

Nous désignons dans la suite les points de l'ensemble R par

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_m, \ldots$$

et par u nous désignons toujours un point quelconque de l'ensemble E.

Celà posé, nous avons toujours pour deux valeurs quelconques u' et u'' de la variable u l'inégalité suivante

$$(*) \qquad |u' - u''| < 1,$$

puisque le diamètre de l'ensemble E est < 1.

§ 4. **Construction des ensembles auxiliaires E_h^0 et E_h ($h = 1, 2, 3, \ldots$).** — Pour obtenir l'ensemble E_h^0 excluons les points de l'ensemble E, situés à l'intérieur des cercles ayant pour centres les points

$$u_h, \quad u_{h+1}, \quad u_{h+2}, \ldots, \quad u_{h+n}, \ldots$$

c'est-à-dire chaque point u_m pour $m \geqq h$.

L'ensemble E_h^0 est, par définition, l'ensemble des points de E, situés à l'extérieur de ces cercles, dont les rayons sont supposés assez petits pour qu'on ait

$$(7) \qquad \text{mes}\, E_h^0 > 0,$$

et

$$(8) \qquad \text{mes}\, E_h^0 \to \text{mes}\, E \quad \text{pour} \quad h \to \infty$$

E_h est, par définition, l'ensemble des points d'épaisseur superficielle de E_h^0 [1] et des points d'accumulation de ces points. Il est évident que chaque portion de E_h est de mesure (superficielle) positive et qu'un point u_m de R est situé à distance positive des ensembles $E_m, E_{m-1}, E_{m-2}, \ldots, E_1$.

§ 5. **Fonctions $\varphi_h(u)$ et $J(z|\varphi_h)$ ($h = 1, 2, 3, \ldots$).** — Posons

$$\varphi_1(u) = 1\,; \quad \varphi_2(u) = \frac{1}{4}(u - u_1)\,; \quad \varphi_3(u) = \frac{1}{4^2}(u - u_1)(u - u_2)\,;$$

et, en général,

$$(9) \qquad \varphi_h(u) = \frac{1}{4^{h-1}}(u - u_1)(u - u_2) \ldots (u - u_{h-1}).$$

---

[1] On dit qu'un point u est point d'épaisseur superficielle de E_h^0, lorsqu'on a

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\text{mes}\, E(\rho)}{\pi \rho^2} = 1\,;$$

$E(\rho)$ étant la partie de E_h^0 dans (u, ρ).

Considérons les intégrales (voir § 2)

(10) $$J(z \mid \varphi_h) = \int_{E_h} \frac{\varphi_h(u)d\omega}{u-z}.$$

Il est évident que l'intégrale (10) représente une fonction holomorphe dans chaque domaine situé hors de l'ensemble E_h. Il s'ensuit, en particulier, que $J(z \mid \varphi_h)$ est monogène aux points u_h, u_{h+1}, u_{h+2},.....

Supposons maintenant h fixe et considérons un point u_m pour $m < h$. Posons

$$g_h(u, u_m) = \frac{\varphi_h(u)}{u-u_m} = \frac{1}{4^{h-1}}(u-u_1)\ldots(u-u_{m-1})(u-u_{m+1})\ldots(u-u_h)$$

(11) $$\Phi_h(z, u_m) = \frac{J(z \mid \varphi_h) - J(u_m \mid \varphi_h)}{z-u_m}$$

où l'on a, en vertu de (5) et (6) (voir § 2),

(12) $$J(u_m \mid \varphi_h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{E_h(\varepsilon)} \frac{\varphi_h(u)d\omega}{u-u_m} = \int_{E_h} g_h(u, u_m)d\omega$$

en désignant par $E_h(\varepsilon)$ la partie de E_h, située à l'extérieur du cercle (u_m, ε).

Il en résulte pour un point z, situé hors de E_h,

(13) $$\Phi_h(z, u_m) = \frac{1}{z-u_m}\int_{E_h} g_h(u, u_m)\cdot\left(\frac{u-u_m}{u-z}-1\right)d\omega = \int_{E_h} \frac{g_h(u, u_m)d\omega}{u-z}.$$

Le diamètre de l'ensemble E_h étant < 1, il s'ensuit que $|g_h(u, u_m| < \frac{1}{4^{h-1}}$ sur E_h. Par suite on peut définir *par continuité* les valeurs de $\Phi_h(z, u_m)$ sur toute la sphère complexe (voir § 2). En particulier, il existe la limite suivante

$$\Phi_h(u_m, u_m) = \lim_{z \to u_m} \Phi_h(z, u_m),$$

quelle que soit la façon dont z tend vers u_m (z peut coïncider avec des points de l'ensemble E_h). Nous avons ainsi démontré que $J(z \mid \varphi_h)$ est monogène au point u_m ($m < h$). On peut énoncer le théorème suivant:

L'intégrale $J(z \mid \varphi_h)$ définit une fonction uniforme et continue sur toute la sphère de la variable complexe z et cette fonction est monogène sur l'ensemble R et, de plus, holomorphe dans chaque domaine situé hors de l'ensemble E_h.

§ 6. **Fonction $F(z)$.** — Nous posons, par définition,

$$F(z) = \sum_{h=1}^{\infty} J(z \mid \varphi_h). \tag{14}$$

Cette série est uniformément convergente sur toute la sphère complexe, puisqu'on a, en vertu de (6) et (9),

$$|J(z, \varphi_h)| < \frac{K}{4^{h-1}}. \tag{15}$$

Considérons le rapport suivant

$$\frac{F(z) - F(u_m)}{z - u_m} = \sum_{h=1}^{h-m} \Phi_h(z, u_m) + \sum_{h=m+1}^{\infty} \Phi_h(z, u_m). \tag{16}$$

La série

$$\sum_{h-m+1}^{\infty} \Phi_h(z, u_m).$$

est uniformément convergente sur toute la sphère de la variable complexe z, puisqu'on a, en vertu de (6) et (13),

$$|\Phi_h(z, u_m| < \frac{K}{4^{h-1}}. \tag{17}$$

Il en résulte qu'il existe la limite suivante (unique et bien déterminée)

$$\lim_{z \to u_m} \frac{F(z) - F(u_m)}{z - u_m} = \sum_{h=1}^{\infty} \lim_{z \to u_m} \Phi_h(z, u_m),$$

quelle que soit la façon dont z tend vers un point quelconque u_m de R.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

La fonction $F(z)$ est uniforme et continue sur toute la sphère complexe et est monogène en chaque point hors de l'ensemble E et sur l'ensemble R qui est une partie de E.

On peut dire aussi que $F(z)$ est monogène sur l'ensemble M et de plus holomorphe dans chaque domaine D_k (voir § 3).

§ 7. **Fonction analytiques $f_k(z)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$).** — Soit $f_k(z)$ la fonction analytique qui coïncide avec $F(z)$ dans le domaine D_k. Il reste à montrer que le domaine D_k est le domaine d'existence de la fonction analytique $f_k(z)$. Il suffit pour cela de montrer que dans chaque cercle K, qui contient une portion quelconque $\mathcal{E}$ de E, on peut déterminer une telle circonférence Γ qu'on ait

$$\left| \int_{\Gamma} F(z)dz \right| > 0. \tag{18}$$

Déterminons cette circonférence Γ de la manière suivante :

Considérons les ensembles E_h pour $h = 1, 2, 3, 4,\ldots$ et remarquons que l'ensemble $\mathcal{E}$ contient une portion *(de mesure positive)* de E_h si h est assez grand (en effet chaque portion de E_h est de mesure positive et mes $E_h \to$ mes E pour $h \to \infty$).

Supposons que $\mathcal{E}$ contienne une portion de chaque ensemble E_h pour $h \geqq k$ et que tous les points des ensembles $E_{k-1}, E_{k-2}, E_{k-3},\ldots$ soient situés à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle K (lorsqu'on a $k = 1$, tout ensemble E_h possède une portion à l'intérieur de K).

Soit $\mathcal{E}_k$ la portion de $\mathcal{E}$, formée par des points de E_k, situés à l'intérieur de K. On a évidemment

$$\text{(19)} \qquad \text{mes}\, \mathcal{E}_k > 0.$$

Soit u' un point d'épaisseur superficielle de $\mathcal{E}_k$, qui ne coïncide avec aucun point u_m de R. Celà posé, nous allons montrer que pour chaque cercle assez petit (u', ρ) on a

$$\text{(20)} \qquad \left| \int_{e_k} \varphi_k(u) d\omega \right| > \sum_{h=k+1}^{\infty} \int_{e_h} | \varphi_h(u) | \, d\omega$$

où e_k est la partie de $\mathcal{E}_k$ comprise dans le cercle (u', ρ) et e_h est la partie de E_h située dans ce cercle.

Pour démontrer l'inégalité (20), remarquons d'abord qu'on a (puisque u' ne coïncide avec aucun point de R)

$$\text{(21)} \qquad | \varphi_k(u') | = m > 0.$$

D'autre part u' est un point d'épaisseur superficielle de $\mathcal{E}_k$.

Il s'ensuit que pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait pour $\rho \leq \delta$

$$\text{(22)} \qquad \left| \int_{e_k} \varphi_k(u) d\omega \right| > \frac{m}{2} (1 - \varepsilon) \cdot \pi \rho^2.$$

Enfin nous avons, en vertu de (9) (voir § 5) et de l'inégalité (*) (voir § 3),

$$| \varphi_{k+1}(u) | < \frac{1}{4} | \varphi_k(u) |$$

$$| \varphi_{k+2}(u) | < \frac{1}{4^2} | \varphi_k(u) |$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

il s'ensuit, en vertu de (21), que pour ρ assez petit on peut écrire pour les points u de (u', ρ) : $|\varphi_{k+1}(u)| < \frac{m}{4}(1+\varepsilon)$

$$|\varphi_{k+2}(u)| < \frac{m}{4^2}(1+\varepsilon) \text{ etc.,}$$

et

$$\sum_{h=k+1}^{\infty} \int_{e_h} |\varphi_h(u)|\, d\omega < \frac{m}{3}(1+\varepsilon)\pi\rho^2. \tag{23}$$

On conclut donc, en combinant les formules (22) et (23), que l'inégalité (20) est valable à condition que ρ soit assez petit $\left(\text{il suffit de prendre } \varepsilon < \frac{1}{5}\right)$.

Soit Γ la circonférence de ce cercle (u', ρ). Nous avons, en vertu de la convergence uniforme de la série (14) (voir § 6) :

$$\int_{\Gamma} F(z)dz = \sum_{h=1}^{h=k-1} \int_{\Gamma} J(z\,|\,\varphi_h)dz + \int_{\Gamma} J(z\,|\,\varphi_k)dz + \sum_{h=k+1}^{\infty} \int_{\Gamma} J(z\,|\,\varphi_h)dz. \tag{24}$$

D'autre part, $J(z\,|\,\varphi_h)$ étant holomorphe dans le cercle K pour $h < k$ (puisque l'ensemble E_h pour $h < k$ ne contient aucune portion à l'intérieur de ce cercle) nous avons

$$\sum_{h=1}^{h=k-1} \int_{\Gamma} J(z\,|\,\varphi_h)dz = 0. \tag{25}$$

Enfin nous avons pour $h \geqq k$ [1]

$$\int_{\Gamma} J(z\,|\,\varphi_h)dz = 2\pi i \int_{e_h} \varphi_h(u)d\omega. \tag{26}$$

En combinant les formules (20), (24), (25) et (26) nous aurons l'inégalité (18).

Nous avons ainsi démontré que la fonction $F(z)$ ne peut pas être holomorphe dans un domaine contenant des points de l'ensemble E.

Il s'ensuit que $F(z)$ coincïde dans le différents domaines D_k avec des fonctions analytiques différentes, c. q. f. d..

---

[1] Pour la démonstration de la formule (26) voir, par ex., D. POMPEIU (« Math. Annalen », 1913, Bd. 74, p. 275).

Ricerche sopra il numero delle classi di forme aritmetiche di Hermite.

Memoria 2ª di A. M. BEDARIDA (a Genova).

Sunto. - *È il seguito della Memoria pubblicata in questi* « Annali » *nel Tomo III (1925-1926). Si tratta della ricerca delle relazioni tra i numeri delle classi di forme di* HERMITE, *appartenenti ad un corpo quadratico immaginario* $K(\sqrt{-d})$, *quando i determinanti differiscono per il fattore* mm_0, *essendo* m *un intero del corpo* $K(\sqrt{-d})$, m_0 *il suo coniugato.*

INTRODUZIONE

La presente Memoria è il seguito di quella pubblicata, con lo stesso titolo, nel Tomo III (1925-1926) di questi « Annali di Matematica ».

In tale Memoria [1] è trattata la ricerca delle relazioni tra i numeri delle classi di forme aritmetiche di HERMITE, appartenenti ad un corpo quadratico immaginario $K(\sqrt{-d})$, quando i determinanti differiscono per il fattore mm_0, essendo m un intero del corpo, m_0 l'intero coniugato. E la ricerca viene esaurita per le forme definite che appartengono ai corpi $K(\sqrt{-d})$, privi di ideali secondari.

In questa seconda Memoria è completato il caso delle forme definite, col supporre che appartengano a *corpi quadratici immaginari aventi anche ideali secondari*; cioè a quei corpi $K(\sqrt{-d})$ in cui è resa indispensabile la introduzione degli ideali (KUMMER-DEDEKIND) per potervi stabilire le ordinarie teorie aritmetiche.

---

(1) Che nel seguito sarà indicata con M. I.

È divisa in due parti: nella prima, le considerazioni svolte valgono tanto per le forme definite, quanto per le forme indefinite; nella seconda sono limitate alle forme definite. Nella prima parte e nel secondo paragrafo della seconda, il corpo $K(\sqrt{-d})$ è generico; nel seguito, entrando in considerazione il gruppo automorfo aritmetico delle forme (definite), dovremo [1] fissare il numero fondamentale d e prenderemo $d=5$ e $d=6$.

I corpi $K(\sqrt{-5})$ e $K(\sqrt{-6})$ possiedono, come è noto, ideali secondari.

A questo riguardo, si può dire che il prof. BIANCHI ha osservato, per i valori del numero fondamentale d, per i quali ha determinato il poliedro fondamentale [2] dei gruppi modulari corrispondenti (gruppi di BIANCHI), (tra i quali vi sono i valori $d=5$ e $d=6$) che, dopo l'ampliamento di tali gruppi per riflessione, *il numero dei vertici singolari del poliedro fondamentale, uguaglia il numero delle classi degli ideali del corpo* $\mathrm{K}(\sqrt{-\mathrm{d}})$ *a cui appartiene il gruppo modulare* [3]. Questa notevole circostanza non è stata, fino ad ora, dimostrata in generale. La questione sembra alquanto riposta: indubbiamente essa sarebbe una bella ed elegante interpretazione geometrica del numero delle classi degli ideali di un corpo quadratico immaginario.

Il procedere con la teoria degli ideali. in parecchi punti del nostro lavoro, non è stata cosa facile. Tuttavia, ritrovate le proprietà fondamentali delle attuali ricerche, attraverso a questa teoria, esse apparvero con la semplicità della Memoria precedente.

La forma algebrica delle relazioni che qui otteniamo è, come era ben prevedibile, quella osservata nella Memoria I (vedi Introduzione ed Osservazione del § 9). Però, si ottengono dei *nuovi sistemi* di relazioni; e, precisamente, avendosi tra i determinanti Δ e Δ', il legame $\Delta'=\Delta\mu\mu_0$, ove μ è un intero indecomponibile del corpo $K(\sqrt{-d})$, a cui appartengono le forme aritmetiche definite di HERMITE, corrispondono al caso in cui l'ideale principale (μ) non sia primo [4]; cioè:

a) se μ è razionale $=p$ [5], si hanno due nuovi sistemi di relazioni, rispettivamente, per $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ e per $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$,

b) se μ è complesso $=\pi$, si ha un terzo nuovo sistema di relazioni.

---

(1) Cfr. Memoria I, § 6.

(2) Cfr. BIANCHI: « Math. Ann. », 40 Bd.

(3) Il BIANCHI chiama *vertici singolari* del poliedro fondamentale, quei vertici situati all'infinito (metrica non euclidea).

(4) Tale caso non poteva aversi nei corpi $K(\sqrt{-d})$ privi di ideali secondari.

(5) Conserveremo nella presente Memoria le stesse notazioni della Memoria precedente.

Le relazioni vengono scritte per i corpi $K(\sqrt{-5})$ e $K(\sqrt{-6})$. E risulta che per questi due corpi e per il corpo $K(\sqrt{-2})$, considerato nella Memoria precedente, si hanno, negli stessi casi, *le stesse relazioni.* Ora, dalle nostre ricerche, si può asserire che questo fatto ha *carattere generale*; cioè queste stesse relazioni si hanno per tutti i corpi quadratici immaginari $K(\sqrt{-d})$ (esclusi i corpi $K(\sqrt{-1})$ e $K(\sqrt{-3})$) in cui è possibile determinare il poliedro fondamentale del relativo gruppo di BIANCHI ed inoltre valga sempre la proprietà invariantiva del nostro numero n (§ 6), rispetto alla posizione degli indici delle forme sul contorno del poliedro fondamentale.

Intorno a tale carattere generale, occorre tener presente [1] che la forma algebrica delle relazioni è, generalmente, legata ai *numeri primi critici* del corpo (cioè ai numeri primi razionali che entrano nel discriminante), che non dividono il determinante delle forme.

In un terzo lavoro saranno esaurite le attuali ricerche sopra il numero delle classi di forme aritmetiche di HERMITE, col completare il caso delle forme indefinite.

Osservazione. La lettura della Memoria precedente è indispensabile per seguire quanto è qui sviluppato, poichè sono *unicamente* riportate le nuove considerazioni relative agli ideali secondari e cioè corrispondenti a casi *a*) e *b*). I titoli dei paragrafi sono gli stessi e si può dire che questi completano i corrispondenti della prima Memoria.

PARTE PRIMA

FORME DEFINITE ED INDEFINITE DI HERMITE

§ 1. **Equivalenza delle sostituzioni aritmetiche a modulo indecomponibile.**

Sia $K(\sqrt{-d})$ un corpo quadratico immaginario avente *anche ideali secondari.* Il modulo delle sostituzioni aritmetiche

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

appartenenti al corpo $K(\sqrt{-d})$, sia un intero μ, indecomponibile nel corpo. L'ideale principale (μ) sarà un ideale primo oppure si decomporrà nei suoi

[1] Cfr. la mia Nota: *Sulle forme di Hermite.* « Bollettino dell' U. M. I. », 1928, pag. 133.

ideali primi diversi P_1, $P_2,\dots$, P_s. Considereremo in tutto il seguito di questa Memoria solo questo secondo caso, perchè il primo è stato esaurito completamente nella prima Memoria. Si avrà dunque:

$$(\mu) = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_s^{r_s} \qquad (s > 1)$$

ove r_1, $r_2,\dots$, r_s sono interi ordinari convenienti.

Si noti che gli ideali P_1, $P_2,\dots$, P_s saranno tutti secondari ed inoltre, se uno coincide col proprio coniugato, il corrispondente esponente r non può essere che 1; perchè, diversamente, l'ideale (μ) conterrebbe come fattore un ideale principale, cioè l'intero μ non sarebbe indecomponibile in $K(\sqrt{-d})$.

Le sostituzioni (1) verranno, come in M. I. (§ 1), distribuite in classi di sostituzioni equivalenti rispetto al gruppo delle sostituzioni aritmetiche unimodulari, appartenenti al corpo $K(\sqrt{-d})$, qui in considerazione. Sulla loro equivalenza vale la proposizione seguente (M. I., pag. 194), di cui ci serviremo ripetutamente nel seguito:

Perchè due sostituzioni aritmetiche a modulo μ, *indecomponibile:* $\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *e* $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix}$, *con i primi e terzi coefficienti primi tra loro, siano equivalenti, occorre e basta che sia verificata la congruenza:*

$$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mu). \tag{2}$$

Invero, qui risulterà (M. I., pag. 195):

$$\alpha(\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P_i^{r_i})$$
$$\gamma(\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P_i^{r_i})$$

$(i = 1, 2,\dots, s)$; ed essendo gli ideali principali (α) e (γ) primi tra loro, avremo:

$$\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P_i^{r_i})$$

e quindi

$$\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mu)$$

e perciò α' intero, ecc.

Il numero delle classi di sostituzioni (1) è un numero finito, dato sempre da $N(\mu) + 1$. E, poichè le sostituzioni normali (M. I., § 1):

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad S_2 \equiv \begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$$

ove, in S_2 il coefficiente t percorre i valori di un sistema completo di resti (mod. μ), appartengono, per la proposizione ora osservata, a classi diverse, ne viene che si può ancora assumere il loro insieme come un sistema di rappresentanti delle classi, che si dirà, come in M. I., *il sistema completo normale di sostituzioni.*

§ 2. **Il sistema completo normale di sostituzioni applicato alle forme di Hermite.**

Applicando ad una forma di HERMITE $f \equiv (a, b, c)$ appartenente al corpo $K(\sqrt{-d})$, a determinante Δ, primitiva, di prima o di seconda specie ([1]), le sostituzioni del sistema completo normale a modulo μ ([2]), si ottengono $N(\mu)+1$ forme f' di HERMITE, appartenenti allo stesso corpo, a determinante $\Delta' = \Delta\mu\mu_0$, primitive e non primitive.

Andiamo ora a studiare queste forme f' nei casi in cui l'ideale principale (μ) non sia primo, riprendendo le considerazioni svolte in M. I., pagine 198-201.

I). *Sia l'intero indecomponibile* μ, *razionale:* $\mu = p$.

Sarà $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ oppure $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$. Le forme f' del tipo β) saranno non primitive, e quindi a divisore p oppure p^2, quando in esse t sarà soluzione della congruenza:

$$(at + b_0)(at_0 + b) \equiv \Delta \pmod{p}. \tag{1}$$

Determiniamo il numero delle sue soluzioni incongrue (mod. p).

1°) Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$, la (1) si riduce a:

$$(at + b_0)(at_0 + b) \equiv 0 \pmod{p}; \tag{2}$$

ed indichiamo con P e P' i due ideali primi, coniugati, che entrano nell'ideale principale (p). Se t soddisfa alla (2), t è la soluzione della congruenza lineare:

$$at + b_0 \equiv 0 \pmod{P} \tag{3}$$

oppure, t_0 è la soluzione di quest'altra:

$$at_0 + b \equiv 0 \pmod{P}. \tag{4}$$

([1]) Quando si considereranno forme primitive di seconda specie si supporrà che per Δ siano soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti per la loro esistenza. Quelle primitive di prima specie esistono qualunque sia Δ. (Cfr. M. I. introd.).

([2]) In tutto il seguito della Memoria, come nella precedente, si supporrà, per evitare minute discussioni, che $N(\mu)$ sia dispari.

Sia ora t la soluzione della congruenza:

(5) $$at + b_0 \equiv 0 \pmod{p},$$

sarà t_0 quella della congruenza:

(6) $$at_0 + b \equiv 0 \pmod{p},$$

e quindi si può ritenere che t e t_0 siano rispettivamente le soluzioni della (3) e della (4). Consideriamo i due sistemi di valori incongrui (mod. p), ma congrui (mod. P), rispettivamente alle suddette soluzioni t e t_0: ciascun sistema è, manifestamente, costituito da p numeri, soddisfacenti tutti alla (1). Converrà ora distinguere i due casi $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ e $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$.

Sia $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$. I due ideali primi P e P' saranno distinti. Escluso il valore t_0, soluzione della (6), non può accadere che il coniugato di un valore del secondo sistema sia un valore del primo sistema, cioè sia congruo (mod. p) ad un valore del primo sistema. Infatti, se τ è un valore del secondo sistema tale che $\tau_0 \equiv \tau'$ (mod. p), essendo τ' un valore del primo sistema, sarà:

$$a\tau' + b_0 \equiv 0 \pmod{P}$$

ed anche:

$$a\tau_0 + b_0 \equiv 0 \pmod{P}$$

e perciò:

$$a\tau + b \equiv 0 \pmod{P'}.$$

Ma è pure

(7) $$a\tau + b \equiv 0 \pmod{P}$$

onde

$$a\tau + b \equiv 0 \pmod{p},$$

cioè necessariamente $\tau \equiv t_0$ (mod. p). Segue allora di qui che nel caso in esame le soluzioni della (1), incongrue (mod. p), sono in numero di $2p - 1$.

Sia $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$. I due ideali primi P e P' saranno uguali. I valori coniugati dei valori del secondo sistema, che costituiscono essi pure un sistema di p valori incongrui (mod. p), sono i valori del primo sistema. Infatti, se τ è un valore qualunque del secondo sistema, vale la (7), ed essendo qui $P = P'$, sarà:

$$a\tau_0 + b_0 \equiv 0 \pmod{P},$$

e perciò τ_0 è del primo sistema. La congruenza (1) ha dunque in questo caso p soluzioni incongrue (mod. p).

Si può quindi concludere col risultato: *Sia* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$: *la congruenza* (1) *ammette* $2p-1$ *oppure* p *soluzioni incongrue* (mod. p) *secondo che è* $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ *oppure* $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$.

Notiamo, esplicitamente, che tra le soluzioni della (1) vi sarà sempre la soluzione della (5).

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0$. Consideriamo la congruenza:

$$XX_0 \equiv \Delta \pmod{p} \tag{8}$$

nel corpo $K(\sqrt{-d})$. Questa ha $p-1$ soluzioni incongrue (mod. p), se $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$; ne ha $2p$ oppure nessuna rispettivamente per $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ oppure $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$, se $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$ [1]. La congruenza:

$$x^2 \equiv \Delta \pmod{p} \tag{9}$$

nel corpo $K(\sqrt{-d})$ è solubile ed insolubile secondo che è $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ oppure $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$: nel caso della solubilità essa ha, se $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ quattro soluzioni incongrue (mod. p); se $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, ne ha due [2]. Allora questo, unitamente a quanto si è detto nel caso corrispondente di M. I. (pag. 199-200), ci permette di enunciare il risultato: *Sia* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0$: *se* $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$, *la congruenza* (1) *am-*

---

(1) Hermite ha determinato il numero delle soluzioni incongrue (mod. p) della (8) nei casi $\left(\frac{-d}{p}\right)=-1$ e $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ (Cfr. « Oeuvres », t. I, pagg. 248-250); ma tale numero, nel caso $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, si ha subito osservando che se $d\not\equiv -1$ (mod. 4), ponendo $X=x+y\sqrt{-d}$, con x e y interi razionali, la (8) si riduce a $x^2\equiv\Delta$ (mod. p). Medesimamente, se $d\equiv -1$ (mod. 4), ponendo $X=x+y\frac{1+\sqrt{-d}}{2}$ con x ed y interi razionali, la (8) si riduce a $(2x+y)^2\equiv 4\Delta$ (mod. p), da cui si trae la stessa conclusione.

(2) Cfr. Bianchi: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici* (Zanichelli) pag. 341. Nel caso della solubilità della (9) il numero delle soluzioni incongrue (mod. p) risulta subito osservando che si estendono agli ideali quanto è esposto nelle *Lezioni sulla Teoria dei Numeri di* Dirichlet-Dedekind (trad. italiana di A. Faifofer) a pag. 78 ed a pag. 82, ed inoltre che per $P\neq P'$ si ha $\left[\frac{\Delta}{P}\right]=\left[\frac{\Delta}{P'}\right]$. (Cfr. Bianchi: *Lezioni*, ecc., pag. 343, formula (4)).

mette $2p-6$ *oppure* $2p-2$ *soluzioni incongrue* (*mod.* p), *secondo che è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ *oppure è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$; *se* $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, *ne ha* $2p-2$ *oppure nessuna secondo che è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ *oppure è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$.

Alle soluzioni della (1) corrisponderanno altrettante forme f' del tipo β), tutte a divisore p, escluso il caso $\Delta\equiv 0$ (mod. p^2) in cui si ha invece una sola a divisore p^2 (1) e le rimanenti a divisore p.

Si può dunque enunciare la conclusione nel caso di μ indecomponibile razionale $=p$:

Per $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$: *se* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$, *delle* p^2+1 *forme* f' *che si ottengono dalla forma* f, *applicandovi le sostituzioni del sistema completo normale a modulo* p, $2p-1$ *sono non primitive e precisamente:* $2p-1$ *a divisore* p *se* $\Delta \not\equiv 0$ (mod. p^2); $2p-2$ *a divisore* p *ed una a divisore* p^2 *se* $\Delta\equiv 0$ (mod. p^2); *le rimanenti* $(p-1)^2+1$ *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f;

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$, *se ne hanno* $2p-6$ *a divisore* p *e le rimanenti* $(p-1)^2+6$ *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f;

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$, *se ne hanno* $2p-2$ *a divisore* p *e le rimanenti* $(p-1)^2+2$ *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f.

Per $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$: *se* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$, *delle* p^2+1 *forme* f' *che si ottengono dalla forma* f *applicandovi le sostituzioni del sistema completo normale a modulo* p, p *sono non primitive e precisamente:* p *a divisore* p, *se* $\Delta\not\equiv 0$ (mod. p^2); $p-1$ *a divisore* p *ed una a divisore* p^2, *se* $\Delta\equiv 0$ (mod. p^2); *le rimanenti* p^2+1-p *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f;

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$, *se ne hanno* $2p-2$ *a divisore* p *e le rimanenti* $(p-1)^2+2$ *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f;

(1) Che è la forma f' del tipo β) non primitiva, corrispondente al valore di t, soluzione della congruenza (5).

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$, *sono tutte primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f.

II). *Sia l'intèro indecomponibile* μ, *complesso:* $\mu = \pi$.

Se (§ 1):

$$(\pi) = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_s^{r_s},$$

sarà

$$N(\pi) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s},$$

ove l'intero p_i è il numero primo razionale coordinato all'ideale primo P_i $(i = 1, 2, \dots, s)$.

Una forma f' del tipo β) non primitiva ha un divisore che è un fattore di $N(\pi)$, (M. I., pag. 197), cioè un numero del tipo $p_1^{r'_1} p_2^{r'_2} \dots p_s^{r'_s}$ essendo $r'_1, r'_2, \dots, r'_s$ interi ordinari tali che $0 \leq r'_i \leq r_i (i = 1, 2, \dots, s)$. Ora perchè una tale forma abbia come divisore il numero $p_1^{r'_1} p_2^{r'_2} \dots p_s^{r'_s}$ deve aversi (M. I., pag. 198):

$$b' = -(at + b_0)\pi_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p_1^{r'_1} p_2^{r'_2} \dots p_s^{r'_s})$$

e quindi:

$$at + b_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P_1^{r'_1} P_2^{r'_2} \dots P_s^{r'_s}),$$

perchè se l'ideale principale (π_0) contenesse uno solo degli ideali $P_1, P_2, \dots, P_s$, ne risulterebbe π_0 razionale oppure non indecomponibile nel corpo $K(\sqrt{-d})$: il primo caso è già stato studiato in I), il secondo è contro l'ipotesi che π sia indecomponibile. Allora perchè sia anche $a' \equiv 0$ (mod. $p_1^{r'_1} p_2^{r'_2} \dots p^{r'_s}$), dovrà essere:

$$aa' = (at + b_0)(at_0 + b) - \Delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p_1^{r'_1} p^{r'_2} \dots p^{r'_s}),$$

cioè $\Delta \equiv 0$ (mod. $p_1^{r'_1} p_2^{r'_2} \dots p_s^{r'_s}$). Quindi: *i divisori delle forme* f' *del tipo* β), *sono divisori comuni di* N(π) *e* Δ.

Viceversa, ad ogni divisore comune a $N(\pi)$ e Δ corrispondono forme f' del tipo β) non primitive, perchè se $l = p_1^{r''_1} p_2^{r''_2} \dots p_s^{r''_s}$) $(0 \leq r''_i \leq r_i,\ i = 1, 2, \dots, s)$, è un tal divisore, la soluzione della congruenza:

$$at + b_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P_1^{r''_1} P_2^{r''_2} \dots P_s^{r''_s})$$

darà luogo a $\frac{N(\pi)}{l}$ valori di t, incongrui (mod. π) a cui corrisponderanno altrettante forme f' del tipo β), non primitive [1].

---

[1] A divisore $\geq l$.

Ciò premesso, andiamo a determinare il numero totale delle forme f' del tipo β), non primitive.

Siano P_{i_1}, P_{i_2},..., P_{i_u} gli ideali primi, che entrano nel massimo comun divisore di $N(\pi)$ e Δ, (i_1, i_2,..., i_u sono u numeri tra 1, 2,..., s).

Le forme f' del tipo β) non primitive corrispondono, per quanto si è ora veduto, a valori di t che soddisfano almeno ad una delle u congruenze:

$$(10) \quad at + b_0 \equiv 0 \pmod{P_{i_1}}, \quad at + b_0 \equiv 0 \pmod{P_{i_2}}, \ldots, \quad at + b_0 \equiv 0 \pmod{P_{i_u}}.$$

Il valore di t soddisfacente alla congruenza i_v ($v = 1, 2,..., u$) delle precedenti, considerato (mod. π), darà luogo a $\dfrac{N(\pi)}{p_{i_v}}$ valori incongrui (mod. π). Abbiamo quindi u sistemi di valori per t, ciascuno di valori incongrui (mod. π) ed i valori di ogni sistema congrui ad una stessa soluzione di una delle precedenti congruenze, rispetto al relativo modulo.

Andiamo ora a vedere quando in due o più di tali sistemi vi siano valori congrui (mod. π). Quindi calcoleremo il numero dei numeri incongrui tra loro (mod. π) contenuti negli u sistemi. Tale numero sarà quello delle forme f' del tipo β), non primitive, che occorre determinare.

Se in due o più sistemi vi sono valori congrui (mod. π), tale valore (mod. π), è soluzione comune alle corrispondenti congruenze. Ora è noto [1] che esiste un valore di t che soddisfa ad $j \leq u$ congruenze simultanee delle (10) e tale valore è completamente determinato rispetto al modulo, prodotto dei moduli delle j congruenze considerate. Viceversa, alla soluzione comune ad j ($j \leq u$) congruenze delle (10), abbiamo, nei corrispondenti j sistemi di valori (mod. π), sistemi di valori congrui (mod. π).

Allora consideriamo il valore t_1, soluzione, ad es. delle prime due congruenze (10); tale valore è completamente determinato (mod. $P_{i_1} P_{i_2}$). Consideriamo inoltre i due sistemi di valori di t, ciascuno di valori incongrui (mod. $P_{i_1} P_{i_2}$), che sono rispettivamente $\equiv t_1$ (mod. P_{i_1}) e $\equiv t_1$ (mod. P_{i_2}): nel primo sistema vi saranno $\dfrac{p_{i_1} p_{i_2}}{p_{i_1}} = p_{i_2}$ valori, nel secondo $\dfrac{p_{i_1} p_{i_2}}{p_{i_2}} = p_{i_1}$. Evidentemente non può accadere che un valore del primo sistema sia congruo ad un valore del secondo (mod. $P_{i_1} P_{i_2}$), escluso t_1. Segue quindi che questi due sistemi di valori (mod. $P_{i_1} P_{i_2}$) danno luogo, considerati (mod. π), a due nuovi sistemi: uno di $\dfrac{N(\pi)}{p_{i_1}}$ valori, l'altro di $\dfrac{N(\pi)}{p_{i_2}}$, ciascuno di valori incongrui (mod. π),

[1] Cfr. Bianchi: *Lezioni*, ecc., pag. 305.

in cui vi sono $\frac{N(\pi)}{p_{i_1} p_{i_2}}$ valori comuni (provenienti dal valore t_1), ma esclusi questi non può accadere che un valore di un sistema sia congruo ad un valore dell'altro sistema (mod. π).

Similmente, consideriamo la soluzione t'_1 comune, ad es. alle prime tre congruenze (10), soluzione completamente determinata (mod. $P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3}$), ed inoltre i tre sistemi di valori incongrui (mod. $P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3}$), che rispettivamente sono $\equiv t'_1$ (mod. P_{i_1}), $\equiv t'_1$ (mod. P_{i_2}) e $\equiv t'_1$ (mod. P_{i_3}) e contengono rispettivamente $p_{i_2} p_{i_3}$, $p_{i_1} p_{i_3}$ e $p_{i_1} p_{i_2}$ valori. Non può accadere che vi sia un valore comune (mod. $P_{i_1} P_{i_2} P_{i_3}$) ai tre sistemi, escluso t'_1.

Questi tre sistemi di valori danno luogo, considerati (mod. π), a tre nuovi sistemi, rispettivamente con $\frac{N(\pi)}{p_{i_1}}$, $\frac{N(\pi)}{p_{i_2}}$ e $\frac{N(\pi)}{p_{i_3}}$ valori, ciascuno di valori incongrui (mod. π), in cui vi sono $\frac{N(\pi)}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}}$ valori comuni (mod. π) (provenienti da t'_1), ma, esclusi questi, non si può avere un valore comune (mod. π) ai tre nuovi sistemi.

Si osservi che per soluzione comune alle due prime congruenze si può prendere t'_1 ed inoltre le $\frac{N(\pi)}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}}$ terne di valori comuni (mod. π) ai tre sistemi sono incluse nelle tre coppie di valori comuni (mod. π), prendendo i tre sistemi due a due.

Si possono ora continuare le considerazioni ora esposte fino alla considerazione di tutte le congruenze (10); e, pensare come soluzione comune a due, a tre, ... ad $u - 1$, delle u congruenze (10) il valore, soluzione comune a tutte, completamente determinato (mod. $P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_u}$).

Questo valore darà origine a $\frac{N(\pi)}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_u}}$ valori incongrui (mod. π) e comuni (mod. π) a tutti gli u sistemi di valori in questione. Tali valori sono compresi nelle $u - 1^{ple}$ di valori comuni (mod. π), in numero di $\binom{u}{u-1}$, che si hanno prendendo gli u sistemi ad $u - 1$, $u - 1$, che alla loro volta sono compresi nelle $u - 2^{ple}$ di valori comuni (mod. π), in numero di $\binom{u}{u-2}$, che si hanno prendendo gli u sistemi ad $u - 2$, $u - 2$, ecc..., sono compresi nelle coppie di valori comuni (mod. π), in numero di $\binom{u}{2}$, che si ottengono prendendo gli u sistemi due a due.

Di qui risulta il numero dei valori, incongrui tra loro (mod. π), contenuti negli u sistemi che sorgono, dalle soluzioni delle congruenze (10), considerandole rispetto al modulo π. Tale numero sarà cioè dato dalla funzione aritmetica:

$$\Phi(\pi, \Delta) = \sum \frac{N(\pi)}{p_{i_v}} - \sum \frac{N(\pi)}{p_{i_v} p_{i_{v'}}} + 2 \sum \frac{N(\pi)}{p_{i_v} p_{i_{v'}} p_{i_{v''}}} - 3 \sum \frac{N(\pi)}{p_{i_v} p_{i_{v'}} p_{i_{v''}} p_{i_{v'''}}} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k-1}(k-1) \sum \frac{N(\pi)}{p_{i_v} p_{i_{v'}} \dots p_{i_{v^{(k)}}}} + \dots + (-1)^{u-1}(u-1) \sum \frac{N(\pi)}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_u}};$$

in cui: nella prima somma v percorre i numeri 1, 2,..., u; nella seconda v e v' percorrono le $\binom{u}{2}$ coppie di valori dati dalle combinazioni della seconda classe dei numeri 1, 2,..., u; nella terza v, v' e v'' percorrono le $\binom{u}{3}$ terne di valori dati dalle combinazioni della terza classe degli stessi numeri, ecc.

La funzione $\Phi(\pi, \Delta)$ darà dunque, per quanto si è detto più sopra, il numero totale delle forme f' del tipo β), non primitive, che cercavamo.

Allora, possiamo concludere col risultato, nel caso di μ indecomponibile, complesso $= \pi$:

Delle $N(\pi) + 1$ *forme* f$'$ *che si ottengono applicando alla forma* f *le sostituzioni del sistema completo normale a modulo* π, *se* Δ *e* $N(\pi)$ *sono primi tra loro, sono tutte primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f; *se* Δ *e* $N(\pi)$ *non sono primi tra loro e se* $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_u}$ *sono i fattori primi, razionali, diversi che entrano nel loro massimo comun divisore, il numero delle forme non primitive è dato dalla funzione numerica* $\Phi(\pi, \Delta)$ *ed il numero delle forme primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f, *risulterà dato dall'espressione:* $N(\pi) - \Phi(N, \Delta) + 1$ (1).

Dalla discussione superiore si trae il corollario, di cui ci serviremo in seguito (§ 4), e cioè: *Se* $N(\pi)$ *divide il determinante* Δ *della forma* f, *di forme* f$'$ *del tipo* β), *a divisore* $N(\pi)$, *se ne ha una ed una sola.*

Invero, basta osservare, che tali forme corrispondono alla soluzione della congruenza:

$$at + b_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } P_1^{r_1} P_2^{r_2} \dots P_s^{r_s}).$$

(1) Si può osservare che se l'ideale (π) fosse primo $(u = 1)$ questo risultato diventa quello corrispondente di M. I., pag. 201, poichè allora è $\Phi(\pi, \Delta) = 1$.

§ 3. **Continuazione.**

Nel paragrafo corrispondente della Memoria I viene dimostrato come l'esame delle forme f', primitive di prima o di seconda specie, non equivalenti tra di loro, venga collegato con la ricerca del gruppo automorfo aritmetico della forma f, da cui hanno origine le forme f'. Ciò dipende dal fatto che la sostituzione, unimodulare, T' (M. I., pag. 203) è, nel corpo $K(\sqrt{-d})$, aritmetica, cioè a coefficienti interi in tale corpo.

Ora, le considerazioni finali di tale paragrafo (pag. 204), che provano questa circostanza, devono qui essere completate con le seguenti.

Intanto, nessuna considerazione è da aggiungersi se $\mu = p$; similmente si dica se $\mu = \pi$, ed una almeno delle due coppie di ideali principali (a'), (π) e (b'), (π) sia di ideali primi tra di loro. Il caso invece che può presentarsi nei corpi considerati nell'attuale Memoria, ed in questi soltanto, è quello in cui ciascuna delle due coppie di ideali ora osservati sia di ideali non primi tra di loro. Allora indichiamo con A e B i loro rispettivi ideali (secondari) massimi comun divisori: questi due ideali non possono avere un ideale primo in comune, perchè se ciò fosse, per le relazioni β) a pag. 198 di M. I., ne verrebbe che la forma f' non sarebbe primitiva, il che è escluso. Allora, gli ideali A e B, non avendo alcun ideale primo in comune, ogni ideale C fattore dell'ideale (π) è primo con uno almeno degli ideali (a') e (b') e quindi dalle relazioni (4) e (5) del § 3 di M. I., risulta: $\beta \equiv 0 \pmod{C}$ e $\delta \equiv 0 \pmod{C}$; perciò anche $\beta \equiv 0 \pmod{\pi}$ e $\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$ e quindi la sostituzione T' appartiene ancora al gruppo automorfo aritmetico della forma f.

§ 4. **Osservazione fondamentale.**

L'osservazione fondamentale per le attuali ricerche, esposta al § 4 di M. I. (pag. 205), vale, senza alcuna modificazione ed aggiunta, anche nei corpi $K(\sqrt{-d})$ aventi ideali secondari.

Invero, basterà quì osservare che, nell'applicazione alla forma $f' \equiv (a', b', c')$ a determinante $\Delta\mu\mu_0$, del sistema completo normale a modulo μ, per quanto si è veduto in I) e nel corollario finale di II) del § 2, della presente Memoria, si ottiene ancora una ed una sola forma che sia a divisore $N(\mu)$.

PARTE SECONDA

RELAZIONI SOPRA IL NUMERO DELLE CLASSI
DI FORME DEFINITE DI HERMITE

§ 5. I gruppi automorfi aritmetici delle forme definite di Hermite.

Le forme di Hermite che considereremo nel seguito della presente Memoria saranno *definite* (il determinante $\Delta < 0$); e, per fissare le idee, saranno *positive.*

Il corpo quadratico immaginario $K(\sqrt{-d})$ a cui esse appartengono sarà ora uno di quelli in cui è stato determinato, oppure è possibile determinare, il poliedro fondamentale del corrispondente gruppo di Bianchi $G^{(d)}$ (M. I., pagina 207 e seg.).

Le forme saranno, come è lecito supporre, *ridotte*, cioè i loro indici apparterranno al poliedro fondamentale.

Le considerazioni generali relative al gruppo automorfo aritmetico, esposte al § 6 di M. I., ove non viene fissato il numero fondamentale d, valgono, manifestamente, anche nei corpi $K(\sqrt{-d})$ aventi ideali secondari. Si hanno dunque quì per tale gruppo anche i casi I), II), III) e IV) (pag. 210-211).

Dovendo ora fissare il numero d, per potere determinare tutti i casi possibili per il gruppo automorfo aritmetico, sceglieremo $d=5$ e $d=6$.

I corpi $K(\sqrt{-5})$ e $K(\sqrt{-6})$ possiedono ideali secondari [1].

Ora l'esame di ulteriori casi possibili per il gruppo automorfo aritmetico, oltre a quelli generali I), II), III) e IV) equivale, come si è veduto in M. I. (§ 5 e § 6), alla ricerca di ulteriori movimenti ellittici dei gruppi $G^{(5)}$ e $G^{(6)}$, oltre a quelli da cui derivano i gruppi I), II), III) e IV) che portano i poliedri fondamentali in uno aderente delle rispettive reti poliedriche, oppure li mutano in loro medesimi.

Sopra gli assi di tali nuovi movimenti ellittici dovranno giacere gli indici aventi ulteriori casi per il gruppo automorfo aritmetico, e tali assi non potranno essere qui che circoli ortogonali al piano limite $\zeta = 0$.

---

[1] Cfr. Introduzione.

$$K(\sqrt{-5}).$$

Il poliedro fondamentale del gruppo di BIANCHI $G^{(5)}$ sarà la regione dello spazio non euclideo compresa tra i quattro piani di riflessione [1]:

$$\xi = \pm\frac{1}{2}, \quad \eta = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

ed esterna alle cinque sfere di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi^2 + \left(\eta \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$
$$\left(\xi \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{20},$$

ove devono essere presi i segni superiori e quelli inferiori, distintamente.

Allora, conformemente a quanto più sopra si è detto, qui vi sarà da aggiungere il movimento ellittico definito dalla sostituzione di $G^{(5)}$:

$$\begin{pmatrix} +i\sqrt{5}, & 2 \\ 2, & +i\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

a periodo 2, il cui asse è l'intersezione del piano di riflessione $\xi = 0$ con la sfera di riflessione $\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$.

Corrispondentemente, nel corpo $K(\sqrt{-5})$, per il gruppo automorfo aritmetico, ai casi I), II), III) e IV) di M. I., occorre aggiungere:

V) *se l'indice della forma è sull'arco intersezione tra il piano* $\xi = 0$ *e la sfera* $\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$, *il gruppo costituito dalle quattro sostituzioni:*

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{5}, & \pm 2 \\ \pm 2, & \mp i\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

È utile, per il seguito, determinare il tipo della forma $f \equiv (a, b, c)$, $(b = b_1 + b_2\sqrt{-5}$ e $\Delta = b_1^2 + 5b_2^2 - ac)$, avente questo gruppo automorfo aritmetico.

Perchè l'indice si trova sopra l'arco suddetto, dovrà aversi $b_1 = 0$ e

$$\left(\frac{b_2\sqrt{5}}{a} - \frac{\sqrt{5}}{a}\right)^2 - \frac{\Delta}{a^2} = \frac{1}{4};$$

[1] Cfr. BIANCHI: « Math. Ann. », 40 Bd., pag. 365 e seg.

da cui risulta $c = 5b_2 - a$ e quindi $\Delta = 5b_2(b_2 - a) + a^2$. Si conclude dunque che: *Le forme (ridotte) avente per gruppo automorfo aritmetico il gruppo* V), *sono del tipo* $f \equiv (a, b\sqrt{-5}, 5b - a)$; *ove* a *e* b *sono interi razionali, positivi,* $5b > a$, *con* $\Delta = 5b(b - a) + a^2$. *Se sono primitive,* a *e* b *saranno primi tra di loro, e non possono essere che di prima specie* (1).

$K(\sqrt{-6})$.

Il poliedro fondamentale del gruppo di BIANCHI $G^{(6)}$ sarà la regione dello spazio non euclideo compresa tra i quattro piani di riflessione (2):

$$\xi = \pm\frac{1}{2}, \quad \eta = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ed esterna alle cinque sfere di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \left(\xi \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xi^2 + \left(\eta \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{24},$$

ove i segni superiori e quelli inferiori devono essere presi distintamente.

Qui non si hanno nuovi movimenti ellittici e perciò, per il gruppo automorfo aritmetico, nel corpo attuale, si hanno soltanto i casi generali più sopra notati.

Si può dunque concludere col risultato:

Le forme aritmetiche definite di Hermite, nei corpi $K(\sqrt{-5})$ *e* $K(\sqrt{-6})$, *(escluse particolari forme) hanno per gruppo automorfo aritmetico, gruppi ciclici degli ordini 2, 4 e 6: quelle primitive di prima specie, degli ordini 2 e 4, quelle primitive di seconda specie, anche di ordine 6* (3).

---

(1) Perchè una forma primitiva di seconda specie dovrebbe avere b pari il che non può essere.

(2) Cfr. BIANCHI: « Math. Ann. », 40 Bd., pag. 668.

(3) Conformemente a quanto si è veduto in M. I. (Osserv. pag. 237 e 238), essendo qui $d \not\equiv -1 \pmod{4}$, non esistono forme primitive di prima specie a gruppo automorfo aritmetico del 6° ordine; e, perciò nelle relazioni corrispondenti che stabiliremo (§ 7) si avrà la *espressione binomia* per il numero delle classi $h(\Delta\mu\mu_0)$.

§ 6. I valori del numero n per le forme definite primitive di Hermite.

Andiamo ora a completare la ricerca dei valori del *numero* n, cioè del numero delle forme f' definite, a determinante $\Delta' = \Delta\mu\mu_0$ (μ indecomponibile), primitive di prima o di seconda specie, non equivalenti tra di loro, che si ottengono applicando alla forma $f \equiv (a, b, c)$, definita, a determinante Δ, primitiva, rispettivamente di prima o di seconda specie, le sostituzioni del sistema completo normale a modulo μ, con l'esame del caso in cui l'ideale principale (μ) non sia primo; cioè, secondo le notazioni sempre usate, dei casi $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$ e l'ideale principale (π) non primo.

Le considerazioni che seguono, corrispondenti a questi casi, completano le tabelle a pag. 217, 221 e 225 di M. I., in relazione al fatto che la forma f sia rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico di ordine 2, 4 e 6.

I). *La forma* f *sia a gruppo automorfo aritmetico* G_2:

Avendosi $n = m$, tenendo conto dei risultati ottenuti al § 2, si ha la tabella, che completa la corrispondente a pag. 217 di M. I.:

$$\text{per } \mu = p \begin{cases} \left(\frac{-d}{p}\right) = +1 & \begin{cases} \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 & \text{è} \quad n = (p-1)^2 + 1 \\ \text{»} \ \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 & \text{»} \quad n = (p-1)^2 + 2 \\ \text{»} \ \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 & \text{»} \quad n = (p-1)^2 + 6 \end{cases} \\ \left(\frac{-d}{p}\right) = 0 & \begin{cases} \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 & \text{è} \quad n = (p-1)^2 + p \\ \text{»} \ \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 & \text{»} \quad n = p^2 + 1 \\ \text{»} \ \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 & \text{»} \quad n = (p-1)^2 + 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{per } \mu = \pi \left\} N(\pi) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s} \begin{cases} \text{se } \left(\frac{\Delta}{p_i}\right) \neq 0 \qquad \text{è } n = N(\pi) + 1 \\ (i = 1, 2, \dots s) \\ \text{se } \left(\frac{\Delta}{p_{i_v}}\right) = 0 \text{ e } \left(\frac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right) \neq 0 \text{ è } n = N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1 \\ (v = 1, 2, \dots, u;\ v' = 1, 2, \dots u') \\ (u + u' = s;\ u > 0). \end{cases}\right.$$

II). *La forma* f *sia a gruppo automorfo aritmetico* G_4:

Per quanto si è veduto al § 1, tenuto conto di quanto si è esposto nel caso corrispondente di M. I. (pag. 217), dovremo in primo luogo esaminare la congruenza:

$$t^2 \equiv -1 \pmod{\mu} \tag{1}$$

quando sia $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$ e l'ideale (π) non primo.

Sia μ *razionale* $= p$: la (1), se poniamo $t = t_1 + t_2\sqrt{-d}$ ove t_1 e t_2 sono interi razionali, nel corpo razionale, si scinde in:

$$t_1^2 - t_2^2 d \equiv -1 \pmod{p} \tag{2}$$

$$t_1 t_2 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

Per $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ e $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$ la (1) sarà solubile od insolubile nel corpo $K(\sqrt{-d})$ secondo che è $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$ oppure $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, ossia secondo che è $p \equiv 1 \pmod{4}$ oppure $p \equiv 3 \pmod{4}$: se $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$, nel caso della solubilità abbiamo quattro soluzioni incongrue $(\text{mod. } p)$; se $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$, nel caso della solubilità due [1]. Vediamo come si possono assumere le soluzioni: osservando le (2) e (3), risulta facilmente, che per $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$, due si possono assumere razionali, e due puramente complesse; per $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$, si possono assumere razionali. Queste stesse conclusioni si hanno, se $d \equiv -1 \pmod{4}$ e sia $t = t_1 + t_2 \frac{1+\sqrt{-d}}{2}$ (t_1 e t_2 razionali).

Sia μ *complesso* $= \pi$. L'ideale principale (π), decomposto nei suoi ideali primi diversi, sia $(\pi) = P_1^{r_1} P_2^{r_2} \ldots P_s^{r_s}$: se la (1) è solubile, saranno solubili le s congruenze:

$$t^2 \equiv -1 \pmod{P_i^{r_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{4}$$

e quindi le altre

$$t^2 \equiv -1 \pmod{P_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{5}$$

e perciò, essendo p_i il numero primo razionale coordinato all'ideale primo P_i (p_i dispari) sarà $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$ onde $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ $(i =, 1, 2, \ldots, s)$. Viceversa se tutti i numeri p_i sono $\equiv 1 \pmod{4}$, le (5) sono tutte solubili in $K(\sqrt{-d})$ e

---

[1] Vedi nota [2] a pag. 175.

quindi anche le (4), con due soluzioni incongrue (mod. $P_i^{r_i}$) [1] e perciò la (1) sarà solubile con 2^s soluzioni incongrue (mod. π).

Corrispondentemente, completiamo lo studio delle composizioni $T \cdot S$ (M. I., pag. 218), distinguendo i soliti casi.

Sia μ *razionale* $= \mathrm{p}$.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$: essendo $b^2 d \equiv a^2$ (mod. p) ed $a \not\equiv 0$ (mod. p), p non potrà essere un numero primo critico, quindi non si avrà che il caso $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$. Inoltre, risultando $\left(\frac{d}{p}\right) = +1$, sarà $p \equiv 1$ (mod. 4) e perciò la (1) solubile. Abbiamo:

Per $\left(\frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{p}}\right) = +1$, *tre delle quattro soluzioni che ammette la congruenza* (1) *offrono tre soluzioni normali che applicate alla forma* f *producono tre forme* f′ *non primitive, e l'altra offre una sostituzione normale che applicata ad* f *produce una forma* f′ *primitiva.*

I valori di t (mod. p) che corrispondono a forme f' non primitive sono soluzioni della congruenza:

$$(at - b\sqrt{-d})(at_0 + b\sqrt{-d}) \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p), \tag{6}$$

che nel caso attuale ha $2p - 1$ soluzioni incongrue (mod. p) [§ 2, I), 1°)].

Ora la (6) è soddisfatta dalle due soluzioni razionali $t \equiv \pm t_1$ (mod. p) della (1) e da una delle due sue soluzioni puramente complesse $t \equiv \pm t_2 \sqrt{-d}$ (mod. p); perchè, per le soluzioni razionali risulta:

$$(\pm at_1 - ib\sqrt{d})(\pm at_1 + ib\sqrt{d}) = at_1^2 + b^2 d \equiv -a^2 + bd = \Delta \equiv 0 \quad \text{(mod. } p);$$

e, per le radici complesse, si può ripetere quanto si è esposto in M. I. pag. 219 nel caso $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$. È dunque provato l'enunciato ora scritto.

Segue di qui che per $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ si ha, *per le composizioni* T·S, *le stesse distribuzioni in classi* che si aveva per $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$. Allora si può concludere:

---

[1] Se $r_i \geq 2$ l'ideale (secondario) P_i è diverso dal proprio coniugato (§ 1); allora se $(p_i, \alpha + \theta)$ è una base di questo ideale, $(p_i^{r_i}, \beta + \theta)$ con $\beta \equiv \alpha$ (mod. p_i) sarà una base dell'ideale $P_i^{r_i}$ (cfr. VERA MYLLER-LEBEDEFF: *Sur les racines primitives et les systèmes des bases et indices dans le corps quadratique général*, « Journal de Mathématiques », 1919). Segue allora che se la congruenza $t^2 \equiv -1$ (mod. P_i) è solubile, potendosi assumere t razionale, risulterà $t^2 \equiv -1$ (mod. p_i) e da questa risulta solubile la congruenza $t^2 \equiv -1$ (mod. $p_i^{r_i}$) e per l'osservazione fatta ora risulterà solubile la congruenza $t^2 \equiv -1$ (mod. $P_i^{r_i}$) con due soluzioni incongrue (mod. $P_i^{r_i}$).

Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$, *non può aversi che* $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$; *sarà necessariamente* $p\equiv 1$ (mod. 4), *e risulta:*

$$n=\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}. \tag{7}$$

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0$. Abbiamo:

Nel caso della solubilità della (1), *le sue due soluzioni per* $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, *e due delle sue quattro soluzioni per* $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$, *offrono due sostituzioni normali, che applicate alla forma* f *producono due forme* f′ *non primitive. Le altre due soluzioni per* $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$, *offrono due sostituzioni normali, che applicate ad* f *producono due forme* f′ *primitive.*

La dimostrazione di questo enunciato è analoga al caso corrispondente per $\left(\frac{-d}{p}\right)=-1$ di M. I. (pag. 219-220).

Si potrà dire allora che:

Per $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ *con* $p\equiv 3$ (mod. 4) *e per* $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, *le composizioni* T·S *ove* $S=\begin{pmatrix} t, & -p \\ 1, & 0\end{pmatrix}$, *si distribuiscono in due classi distinte per gli* m − 1 *valori assumibili dal coefficiente* t; *per* $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ *con* $p\equiv 1$ (mod. 4), *tali composizioni si distribuiscono in due classi distinte per* m − 3 *valori di* t *ed in una sola classe, per due valori.*

Si ha perciò:

Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0$, *si ha:*

$$\text{per } \left(\frac{-d}{p}\right)=+1 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \text{ (mod. 4) è } n=\dfrac{m-2}{2}+2=\dfrac{m}{2}+1 & (8)\\ \text{» } p\equiv 3 \text{ (mod. 4) » } n=\dfrac{m}{2}; & (9)\end{cases}$$

$$\text{per } \left(\frac{-d}{p}\right)=0 \quad \text{è} \quad n=\frac{m}{2}. \tag{10}$$

Si noti che nel caso $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, avendosi $\Delta\equiv -a^2$ (mod. p), sarà $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ e perciò $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1$ oppure $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1$ secondo che è $p\equiv 1$ (mod. 4), oppure, $p\equiv 3$ (mod. 4).

Sia μ *complesso* $= \pi$.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p_{t_v}}\right) = 0$, $\left(\frac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right) \neq 0$, essendo sempre p_{t_v}, $p_{j_{v'}}$ i fattori primi razionali diversi di $N(\pi)$, $(v = 1, 2,..., u;\ v' = 1, 2,..., u';\ u + u' = s;\ u > 0)$. Si ha la proposizione:

Delle 2^s *soluzioni della* (1), *nel caso della sua solubilità, una metà dà luogo a sostituzioni normali che applicate alla forma* f *producono forme* f′ *non primitive e l'altra metà dà luogo a sostituzioni normali che applicate ad* f *producono forme* f′ *primitive.*

Invero, ogni soluzione della congruenza (1) è pure soluzione della:

$$t^2 \equiv -1 \pmod{P_{t_v}} \qquad (v = 1, 2,..., u);$$

assumendo $t \equiv t_{i_v} \pmod{P_{t_v}}$ con t_{i_v} razionale, come è lecito; poichè è:

$$\Delta = -a^2 + b^2 d \equiv 0 \qquad \pmod{p_{i_v}},$$

sarà:

$$a^2 t^2_{i_v} + b^2 d \equiv 0 \qquad \pmod{p_{i_v}}$$

e perciò:

$$(at_{i_v} - b\sqrt{-d})(at_{i_v} + b\sqrt{-d}) \qquad \pmod{p_{i_v}}$$

e quindi:

(11) $$at_{t_v} - b\sqrt{-d} \equiv 0 \qquad \pmod{P_{i_v}}$$

oppure, ma non simultaneamente [1]:

$$at_{i_v} + b\sqrt{-d} \equiv 0 \qquad \pmod{P_{i_v}}.$$

Ne segue che se t_{i_v} soddisfa alla (11), $-t_{i_v}$ non vi soddisfa; se t_{t_v} non soddisfa alla (11), vi soddisfa $-t_{t_v}$. Risulta allora di qui (§ 2, II)) la proposizione enunciata.

Si ha quindi:

Le composizioni T·S, *con* $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{t}, & \pi \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$, *se la congruenza* (1) *è solubile, si distribuiscono, per* $\mathrm{m} - 2^{s-1} - 1$ *valori degli* $\mathrm{m} - 1$ *valori assumibili del coefficiente* t, *in due classi distinte e per* 2^{s-1} *in una sola classe; se la* (1) *è insolubile, tali composizioni si distribuiscono in due classi distinte per tutti gli* $\mathrm{m} - 1$ *valori assumibili da* t.

---

[1] Perchè, se ciò fosse, si avrebbe $2at_{i_v} \equiv 0 \pmod{P_{i_v}}$, il che non può aversi.

E perciò risulta:

Se $\left(\frac{\Delta}{p_{i_v}}\right)=0,\ \left(\frac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right)\neq 0 (v=1,2,\dots,u;\ v'=1,2,\dots,u';\ u+u'=s,\ u>0)$ *si ha:*

(12) per $p_i\equiv 1 \pmod{4}$ $(i=1,2,\dots,s)$ è $n=\frac{m-2^{s-1}}{2}+2^{s-1}=\frac{m}{2}+2^{s-2}$;

(13) per $p_{i_\rho}\equiv 1 \pmod{4}$, $p_{j_{\rho'}}\equiv 3 \pmod{4}$

$$(\rho=1,2,\dots,v;\ \rho'=1,2,\dots,v';\ v+v'=s;\ v'>0) \quad \text{è} \quad n=\frac{m}{2}.$$

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p_i}\right)\neq 0$ $(i=1,2,\dots,s)$. Poichè tutte le forme f' sono primitive (§ 2, II)), per quanto è noto sopra la congruenza (1), si conclude subito:

Se $\left(\frac{\Delta}{p_i}\right)\neq 0$ $(i=1,2,\dots,s)$ *si ha:*

(14) per $p_i\equiv 1 \pmod{4}$ $(i=1,2,\dots,s)$ è $n=\frac{m-2^s}{2}+2^s=\frac{m}{2}+2^s$;

(15) per $p_{i_\rho}\equiv 1 \pmod{4}$, $p_{j_{\rho'}}\equiv 3 \pmod{4}$

$$(\rho=1,2,\dots,v;\ \rho'=1,2,\dots,v';\ v+v'=s;\ v'>0) \quad \text{è} \quad n=\frac{m}{2}.$$

Specificando ora nelle formule (7), (8), (9), (10), (12), (13), (14) e (15), col tener conto dei risultati ottenuti al § 2, si ha la tabella seguente, che completa la corrispondente a pag. 221 di M. I.:

$$\text{per } \mu=p \begin{cases} \left(\frac{-d}{p}\right)=+1 \begin{cases} \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right)=0 \quad (p\equiv 1 \pmod{4}) \quad \text{è } n=\frac{(p-1)^2}{2}+1 \\ \text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \pmod{4} \ \text{» } n=\frac{(p-1)^2}{2}+2 \\ \text{» } p\equiv 3 \pmod{4} \ \text{» } n=\frac{(p-1)^2}{2}+1 \end{cases} \\ \text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \pmod{4} \ \text{» } n=\frac{(p-1)^2}{2}+4 \\ \text{» } p\equiv 3 \pmod{4} \ \text{» } n=\frac{(p-1)^2}{2}+3 \end{cases} \end{cases} \\ \left(\frac{-d}{p}\right)=0 \begin{cases} \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right)=-1 \ (p\equiv 3 \pmod{4}) \quad \text{è } n=\frac{p^2+1}{2} \\ \text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right)=+1 \ (p\equiv 1 \pmod{4}) \quad \text{» } n=\frac{(p-1)^2}{2}+1 \end{cases} \end{cases}$$

$$
\text{per } \mu=\pi \quad N(\pi)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_s^{r_s}
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{se } \left(\dfrac{\Delta}{p_i}\right)\neq 0 \\ (i=1,2,\dots,s)
&
\left\{
\begin{array}{lll}
\text{e } p_i\equiv 1 \pmod{4} \ (i=1,2,\dots,s) & \text{è} & n=\dfrac{N(\pi)+1}{2}+2^s \\
\text{e } p_{i_\rho}\equiv 1 \pmod{4},\ p_{j_{\rho'}}\equiv 3 \pmod{4} \\ (\rho=1,2,\dots,\nu;\ \rho'=1,2,\dots,\nu';\ \nu+\nu'=s;\ \nu'>0) & \text{»} & n=\dfrac{N(\pi)+1}{2}
\end{array}
\right.
\\[4ex]
\text{se } \left(\dfrac{\Delta}{p_{i_v}}\right)=0,\left(\dfrac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right)\neq 0 \\ (v=1,2,\dots,u;\ v'=1,2,\dots,u';\ u+u'=s;\ u>0)
&
\left\{
\begin{array}{lll}
\text{e } p_i\equiv 1 \pmod{4} \ (i=1,2,\dots,s) & \text{è} & n=\dfrac{N(\pi)-\Phi(\pi,\Delta)+1}{2}+2^{s-2} \\
\text{e } p_{i_\rho}\equiv 1 \pmod{4},\ p_{j_{\rho'}}\equiv 3 \pmod{4} \\ (\rho=1,2,\dots,\nu;\ \rho'=1,2,\dots,\nu';\ \nu+\nu'=s;\ \nu'=0) & \text{»} & n=\dfrac{N(\pi)-\Phi(\pi,\Delta)+1}{2}.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

III) *La forma* f *sia a gruppo automorfo aritmetico* G_6.

Basterà anche qui esaminare la congruenza quadratica:

$$t^2-t+1\equiv 0 \pmod{\mu} \tag{16}$$

nei casi $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$, $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$ e (π) ideale non primo [1] (M. I., pag. 222). La (16), ponendo:

$$y\equiv 2t-1 \pmod{\mu} \tag{17}$$

si scrive:

$$y^2\equiv -3 \pmod{\mu}. \tag{18}$$

Gli ideali principali (3) e (μ) siano, in primo luogo, primi tra di loro.

Sia μ *razionale* $=$ p. Per $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$ e $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$ la (18) è solubile od insolubile, nel corpo $K(\sqrt{-d})$, secondo che è $\left(\frac{-3}{p}\right)=+1$ oppure $\left(\frac{-3}{p}\right)=-1$; cioè secondo che è $p\equiv 1 \pmod{3}$ oppure $p\equiv 2 \pmod{3}$: nel caso della solubilità abbiamo quattro soluzioni incongrue $(\text{mod. } p)$ se $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$, due se

---

[1] Si noti che gli ideali $(t+1)$ e (t) sono primi tra loro e quindi in tutte le composizioni $T\cdot S$ da considerarsi in questo caso per il gruppo automorfo aritmetico, i primi e terzi coefficienti sono primi tra loro e perciò è sempre applicabile la (2) del § 1, che qui diventa la (16).

$\left(\frac{-d}{p}\right)=0$. Altrettanto accadrà per la (16) in virtù della (17). Vediamo come si possono assumere le soluzioni della (16). Intanto, evidentemente, se $\left(\frac{-d}{p}\right)=0$, le due soluzioni si possono assumere razionali. Sia $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$: la (16), se si pone, al solito $t=t_1+t_2\sqrt{-d}$, nel campo razionale, si scinde nelle due congruenze:

$$(19)\qquad \begin{cases} t_1^2-t_1-t_2^2d+1\equiv 0 & (\text{mod. } p)\\ t_2(2t_1-1)\equiv 0 & (\text{mod. } p)\end{cases}$$

da cui, se $t_2\equiv 0$ (mod. p) è $2t_1 \not\equiv 1$ (mod. p), se $2t_1\equiv 1$ (mod. p) è $t_2\not\equiv 0$ (mod. p) (M. I., pag. 223). Segue allora che due soluzioni della (16) si possono assumere razionali e due complesse, tali però che la parte reale t_1 sia $2t_1\equiv 1$ (mod. p). Se, quando sia $d\equiv -1$ (mod. 4) fosse $t=t_1+t_2\frac{1+\sqrt{-d}}{2}$, risulta che due soluzioni ancora si possono assumere razionali e due complesse, tali che si abbia $t_2+2t_1-1\equiv 0$ (mod. p).

Sia μ *complesso* $=\pi$. Analogamente a quanto si è detto in II), per la congruenza (1), si trova che la (16) è solubile se tutti i fattori razionali primi di $N(\pi)$ sono $\equiv 1$ (mod. 3), insolubile, se uno almeno di questi fattori è $\equiv 2$ (mod. 3). Nel caso della solubilità, possiede 2^s soluzioni incongrue (mod. π), indicando s sempre il numero di tali fattori diversi.

Gli ideali (3) e (μ) siano non primi tra loro. Se l'ideale (3) è primo, allora deve essere (a meno di un fattore unità) $\mu=3$: caso ovvio (M. I., pag. 223). Se l'ideale (3) non è primo e $\mu=p$ si ha ancora $p=3$; sia $\mu=\pi$: allora si può ripetere quanto si è detto più sopra, nel caso corrispondente, quando (3) e (π) erano ideali primi tra di loro, soltanto, il numero delle soluzioni della (16), nel caso della solubilità, sarà 2^r con $1<r\leq s-1$. Nel seguito, però, per evitare troppe minute discussioni, si supporrà sempre che gli ideali principali (3) e (μ) *siano primi tra loro*. Si può notare, infine, che se t è soluzione della (16), un'altra si ha in $-t+1$.

Ciò premesso sopra la congruenza (16), si può completare lo studio delle composizioni $T\cdot S$ (M. I., pag. 222).

Sia μ *razionale* $=$ p.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$. Essendo $b^2d\equiv 3a^2$ (mod. p), il numero p non sarà un numero primo critico e quindi non può che aversi $\left(\frac{-d}{p}\right)=+1$; e, risultando $\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right)$, sarà necessariamente $p \equiv 1$ (mod. 3), cioè siamo nel caso della solubilità della (16). Si ha:

Per $\left(\frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{p}}\right) = +1$, *tre delle quattro soluzioni della* (16) *danno luogo a sostituzioni normali che applicate alla forma* f *producono forme* f′ *non primitive; una soluzione offre una sostituzione normale che applicata ad* f *produce una forma* f′ *primitiva.*

Questa proposizione si dimostra in modo analogo alla corrispondente del caso II) precedente, tenuto conto dei risultati ottenuti sopra la congruenza (16).

Segue che si ha la distribuzione in classi delle composizioni $T \cdot S$ che si aveva per $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$ (M. I., pag. 223) e perciò si può concludere:

Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$, *non può aversi che* $\left(\frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{p}}\right) = +1$ *e necessariamente* $\mathrm{p} \equiv 1$ (mod. 3) *e risulta:*

(20) $$n = \frac{m-1}{3} + 1 = \frac{m+2}{3}.$$

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$. Si ha:

Nel caso della solubilità della (16), *le sue due soluzioni, per* $\left(\frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{p}}\right) = 0$, *e due delle sue quattro soluzioni, per* $\left(\frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{p}}\right) = +1$, *offrono due sostituzioni normali che applicate alla forma* f, *producono due forme* f′ *non primitive. Le altre due sue soluzioni, per* $\left(\frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{p}}\right) = +1$, *offrono due sostituzioni normali, che applicate ad* f, *producono due forme* f′ *primitive.*

La prima parte di questo teorema si dimostra come nel caso corrispondente quando f sia a gruppo automorfo aritmetico G_4, prendendo le soluzioni razionali della (16). Per la seconda, ponendo ancora:

$$X \equiv at - \frac{a}{2} - b\sqrt{-d} \qquad \text{(mod. } p\text{)},$$

ove però t è una soluzione complessa della (16), ad es. $t = t_1 + t_2\sqrt{-d}$; poichè è $t_2 \not\equiv 0$ (mod. p) e $2t_1 \equiv 1$ (mod. p), tenendo conto delle (19), dopo facili calcoli, risulta:

(21) $$2XX_0 \equiv 2\Delta + 3a^2 - 4abt_2d \qquad \text{(mod. } p\text{)}.$$

Di qui segue che le forme f' sono primitive; perchè, se non lo fossero, dovrebbe aversi:

$$3a \equiv 4bt_2d \qquad \text{(mod. } p\text{)},$$

da cui

$$at_2 \equiv b \qquad (\text{mod. } p).$$

Ma da questa congruenza ne verrebbe $XX_0 \equiv 0$ (mod. p) e perciò, dalla (21), anche $\Delta \equiv 0$ (mod. p), contro l'ipotesi. C. v. d.

Segue allora:

Le composizioni T·S, *ove* $S = \begin{pmatrix} t, & -p \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$: *per* $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$ *e per* $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ *con* $p \equiv 2$ (mod. 3), *si distribuiscono in tre classi distinte per tutti gli* $m-1$ *valori che può assumere* t (mod. p); *per* $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$ *con* $p \equiv 1$ (mod. 3) *in tre classi distinte per* $m-3$ *dei valori assumibili da* t (mod. p) *ed in una sola classe per due valori.*

Risulta da quanto si è esposto:

Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$, *si ha:*

$$\text{per } \left(\frac{-d}{p}\right) = +1 \begin{cases} \text{e } p \equiv 1 \ (\text{mod. } 3) \text{ è } n = \frac{m-2}{3} + 2 = \frac{m+1}{3} + 1 & (22) \\ \text{» } p \equiv 2 \ (\text{mod. } 3) \text{ » } n = \frac{m}{3} & (23) \end{cases}$$

$$\text{per } \left(\frac{-d}{p}\right) = 0 \text{ è } n = \frac{m}{3}. \tag{24}$$

Si aggiunga che per $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$, avendosi $4\Delta \equiv -3a^2$ (mod. p), sarà $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)$ e quindi $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ oppure $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$ secondo che è $p \equiv 1$ (mod. 3) oppure $p \equiv 2$ (mod. 3).

Sia μ *complesso* $= \pi$.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p_{i_v}}\right) = 0$, $\left(\frac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right) \neq 0$ $(v = 1, 2, \ldots, u, v' = 1, 2, \ldots, u'; u + u' = s'; u > 0)$.

Si ha la stessa proposizione osservata nel caso corrispondente per f a gruppo automorfo aritmetico G_4 e perciò si potrà qui dire:

Le composizioni T·S, *ove* $S = \begin{pmatrix} t, & -\pi \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$: *se la congruenza* (16) *è solubile, si distribuiscono in tre classi distinte per* $m - 2^{s-1} - 1$ *valori degli* $m-1$ *valori assumibili da* t (mod. π) *ed in una sola classe per* 2^{s-1}; *se la* (16) *è insolubile, si distribuiscono in tre classi distinte per tutti gli* $m-1$ *valori di* t.

Risulterà in conseguenza:

Se $\left(\dfrac{\Delta}{p_{i_v}}\right)=0$, $\left(\dfrac{\Delta}{p_{i'_{v}}}\right)\neq 0$ $(v=1, 2,\ldots, u;\ v'=1, 2,\ldots, u';\ u+u'=s;\ u>0)$, *si ha:*

(25) per $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ $(i=1, 2,\ldots, s)$ è $n=\dfrac{m-2^{s-1}}{3}+2^{s-1}=\dfrac{m+2^s}{3}$;

(25) per $p_{i_\rho} \equiv 1 \pmod{3}$, $p_{j_{\rho'}} \equiv 2 \pmod{3}$ $(\rho=1, 2,\ldots, \nu;\ \rho'=1, 2,\ldots, \nu';\ \nu+\nu'=s;\ \nu'>0)$ è $n=\dfrac{m}{3}$.

2°) *Sia* $\left(\dfrac{\Delta}{p_i}\right)\neq 0$ $(i=1, 2,\ldots, s)$. Come in II) risulterà subito:

(26) per $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ è $n=\dfrac{m-2^s}{3}+2^s=\dfrac{m+2^{s+1}}{3}$;

(27) per $p_{i_\rho} \equiv 1 \pmod{3}$, $p_{j_{\rho'}} \equiv 2 \pmod{3}$ $(\rho=1, 2,\ldots, \nu;\ \rho'=1, 2,\ldots, \nu';\ \nu+\nu'=s;\ \nu'>0)$ è $n=\dfrac{m}{3}$.

Specificando ora nelle formule (20), (22), (23), (24), (25), (26) e (27) col tenere conto dei risultati ottenuti al § 2, si ha la seguente tabella, che completa la corrispondente a pag. 225 di M. I.:

$$
\text{per } \mu=p \begin{cases}
\left(\dfrac{-d}{p}\right)=+1 \begin{cases}
\text{se } \left(\dfrac{\Delta}{p}\right)=0 \quad (p\equiv 1 \pmod{3}) \text{ è } n=\dfrac{(p-1)^2}{3}+1 \\
\text{»} \left(\dfrac{\Delta}{p}\right)=-1 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \pmod{3} \text{ » } n=\dfrac{(p-1)^2}{3}+2 \\ \text{» } p\equiv 2 \pmod{3} \text{ » } n=\dfrac{(p-1)^2+2}{3} \end{cases} \\
\text{»} \left(\dfrac{\Delta}{p}\right)=+1 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \pmod{3} \text{ » } n=\dfrac{(p-1)^2}{3}. \\ \text{» } p\equiv 2 \pmod{3} \text{ » } n=\dfrac{(p-1)^2+2}{3}+1 \end{cases}
\end{cases} \\
\left(\dfrac{-d}{p}\right)=0 \begin{cases}
\text{se } \left(\dfrac{\Delta}{p}\right)=-1 \quad (p\equiv 1 \pmod{3}) \text{ è } n=\dfrac{(p-1)^2}{3} \\
\text{»} \left(\dfrac{\Delta}{p}\right)=+1 \quad (p\equiv 2 \pmod{3}) \text{ » } n=\dfrac{(p-1)^2+2}{3}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$\text{per } \mu=\pi \quad N(\pi)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_s^{r_s}\ \left\{\begin{array}{ll} \text{se } \left(\dfrac{\Delta}{p_i}\right)\neq 0 \\ (i=1,2,\ldots,s) & \left\{\begin{array}{ll} \text{e } p_i\equiv 1 \pmod 3 \\ (i=1,2,\ldots,s) & \text{è } n=\dfrac{N(\pi)+2^{s+1}+1}{3}. \\[2ex] \text{e } p_{i_\rho}\equiv 1 \pmod 3, \\ p_{j_{\rho'}}\equiv 2 \pmod 3) \\ (\rho=1,2,\ldots,\nu; \\ \rho'=1,2,\ldots,\nu'; \\ \nu+\nu'=s;\ \nu'>0) & \text{»}\ n=\dfrac{N(\pi)+1}{3} \end{array}\right. \\[8ex] \text{se } \left(\dfrac{\Delta}{p_{i_v}}\right)=0,\ \left(\dfrac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right)\neq 0 \\ (v=1,2,\ldots,u; \\ v'=1,2,\ldots,u'; \\ u+u'=s;\ u>0) & \left\{\begin{array}{ll} \text{e } p_i\equiv 1 \pmod 3 \\ (i=1,2,\ldots,s) & \text{è } n=\dfrac{N(\pi)-\Phi(\pi,\Delta)+2^{s+1}+1}{3} \\[2ex] \text{e } p_{i_\rho}\equiv 1 \pmod 3, \\ p_{j_{\rho'}}\equiv 2 \pmod 3) \\ (\rho=1,2,\ldots,\nu; \\ \rho'=1,2,\ldots,\nu'; \\ \nu+\nu'=s;\ \nu'>0) & \text{»}\ n=\dfrac{N(\pi)-\Phi(\pi,\Delta)+1}{3}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

I risultati che abbiamo ottenuto servono *per tutti* i corpi quadratici immaginari in cui vi sono forme definite di Hermite ridotte col primo coefficiente primo con μ, e completano quelli, generali, ottenuti nel paragrafo corrispondente della Memoria precedente (pag. 215-225).

Si supponga ora che le forme appartengano ai corpi considerati $K(\sqrt{-5})$ e $K(\sqrt{-6})$; e, completiamo la ricerca dei valori del numero n.

$K(\sqrt{-5})$.

Nel paragrafo precedente si è notato che per le forme definite di Hermite, appartenenti a questo corpo, primitive, solo quelle di prima specie possono avere l'ulteriore gruppo automorfo aritmetico V), oltre quelli generali.

Si dovrà quindi completare, per queste forme, la ricerca dei valori del numero n, e ciò viene effettuato col teorema:

I valori del numero n, *per le forme a gruppo automorfo aritmetico* G_4, *sono invarianti, rispetto alla posizione dei relativi indici sul contorno del poliedro fondamentale del gruppo di Bianchi* $G^{(5)}$.

Evidentemente, non vi sarà da provare che i valori del numero n, quando la forma f appartenga all'arco intersezione del piano di riflessione $\xi=0$ con la sfera di riflessione $\xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4}$, sono quelli determinati in II) del presente paragrafo e del paragrafo corrispondente di M. I. (pag. 217-221).

Se la forma f, primitiva (di 1ª specie), ha l'indice appartenente all'arco ora notato, essa è, come si è veduto, del tipo $f \equiv (a,\ b\sqrt{-5},\ 5b-a)$ ove a e b sono interi razionali, positivi, con $5b > a$, primi tra loro e $\Delta = 5b(b-a)+a^2$.

Consideriamo le relative composizioni $T \cdot S$; si ha:

$$\begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}+i\sqrt{5}, & 2\\ 2, & -i\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\sqrt{5}, & 2\mu\\ 2, & -i\mu\sqrt{5}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}+i\sqrt{5}, & 2\\ 2, & -i\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}it\sqrt{5}+2, & -i\mu\sqrt{5}\\ 2t-i\sqrt{5}, & -2\mu\end{pmatrix}.$$

Ora, gli ideali principali (2) e $(i\sqrt{5})$ sono primi tra di loro, perchè l'ideale $(i\sqrt{5})$ è primo e diverso dall'ideale primo, il cui quadrato è il numero 2. Così sono primi tra di loro gli ideali principali $(it\sqrt{5}+2)$ e $(2t-i\sqrt{5})$ [1]. Allora è applicabile la (2) del § 1, ciò che qui offre il risultato [2]:

Le composizioni T·S *si distribuiscono in due classi distinte se la sostituzione normale* S *è del tipo* $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}$, *oppure è del tipo* $\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ *e* t *non è soluzione della congruenza:*

$$2t^2-2it\sqrt{5}-2\equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mu); \tag{28}$$

si distribuiscono invece in una sola classe se S *è di questo secondo tipo e* t *soddisfa a questa congruenza.*

Per evitare minute discussioni, escluderemo il caso che l'ideale (μ) abbia come fattore l'ideale primo $(2,\ 1+\sqrt{-5})$, ed esaminiamo allora la congruenza (28). Essa sarà equivalente alla:

$$t^2-it\sqrt{5}-1\equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mu) \tag{29}$$

---

(1) Si noti che il discriminante del corpo $K(\sqrt{-5})$ è -20 e perciò 2 è un numero primo critico e quindi è il quadrato di un ideale primo. Inoltre, è pure critico il numero primo 5 e perciò anche $(5)=P^2$ ove P è un ideale primo; onde $(\sqrt{-5})(\sqrt{-5})=P^2$ e quindi sarà $(\sqrt{-5})=P\cdot Q$ con Q ideale conveniente, ed anche $P\cdot Q\cdot(\sqrt{-5})=P^2$, $Q(\sqrt{-5})=P$ e perciò l'ideale Q deve essere l'ideale unità, cioè l'ideale principale $(\sqrt{-5})$ è primo, come si è asserito. Che poi la seconda coppia di ideali principali sia di ideali primi tra loro basta vedere che è possibile determinare due interi del corpo $K(\sqrt{-5})$, x ed y, tali che:

$$(it\sqrt{5}+2)x+(2t-i\sqrt{5})y=1;$$

e questo risulta prendendo ad es. $x=-2$ ed $y=i\sqrt{5}$.

(2) Supporremo per brevità $\mu \neq 2$. Si tenga presente che nel corpo $K(\sqrt{-5})$ il numero 2 mentre si decompone come ideale $(2)=(2,\ 1+\sqrt{-5})^2$, è *indecomponibile come numero*.

e ponendo

$$y \equiv 2t - i\sqrt{5} \pmod{\mu}$$

assumerà la forma:

$$y^2 \equiv -1 \pmod{\mu}; \tag{30}$$

e, se la (29) è solubile, è pure solubile la (30) ed inversamente. La congruenza (30) è quella studiata in II) dell'attuale e della precedente Memoria. Osservando il tipo delle forme ora in considerazione e quelle considerate in II), si può concludere subito la proprietà invariantiva dei valori del numero n euunciata nel teorema.

$K(\sqrt{-6})$.

Per le forme definite di Hermite, appartenenti a questo corpo, tenuto conto di quanto si è concluso nel paragrafo precedente, sopra i relativi gruppi automorfi aritmetici, si può concludere subito che la ricerca dei valori del numero n è già esaurita con le considerazioni generali stabilite nel presente paragrafo e nel § 7 di M. I..

§ 7. Le formule sopra il numero delle classi di forme definite di Hermite.

Dimostrata l'Osservazione fondamentale (§ 4), determinato il gruppo automorfo aritmetico delle forme definite di Hermite, appartenenti ai corpi $K(\sqrt{-5})$ e $K\sqrt{(-6)}$, primitive di prima e di seconda specie (§ 5) e calcolati i valori del numero n (§ 6), è possibile stabilire le relazioni sopra il numero delle classi, oggetto delle attuali ricerche.

Nella prima parte del presente paragrafo ci occuperemo delle forme definite di prima specie; nella seconda, di quelle primitive di seconda specie.

I) Forme primitive di prima specie.

Sia il corpo $K(\sqrt{-5})$.

Quanto si è stabilito sopra il gruppo automorfo aritmetico delle forme definite, appartenenti a questo corpo, primitive di prima specie, ci permette di asserire che: forme a gruppo G_2 ne esistono sempre; ad es. le principali

$(1, 0, -\Delta)$, con $\Delta \neq 1$; forme a gruppo G_4 ne esistono, se il determinante Δ è rappresentabile da una almeno delle due forme indefinite di Gauss:

$$\varphi_1 = 5x^2 - y^2,$$
$$\varphi_2 = x^2 - 5xy + 5y^2$$

con x e y interi, razionali, primi tra loro, e: in φ_1 con $y \equiv 1 \pmod{2}$; in φ_2, positivi, $5y > x$ con $x \equiv 1 \pmod{2}$ e $y \equiv 0 \pmod{2}$, oppure $x \equiv 0 \pmod{2}$ e $y \equiv 1 \pmod{2}$.

E, da quanto è noto da M. I. (Oss. § 9) non esistono forme primitive di prima specie a gruppo G_6.

Si avrà qui l'espressione binomia per il numero delle classi $h(\Delta\mu\mu_0)$, cioè:

(1) $$h(\mu\mu_0) = n_1 h_1(\Delta) + n_2 h_2(\Delta) \text{ [1]}$$

a cui viene associata:

(2) $$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta).$$

Tali formule ci permettono di enunciare il risultato:

Siano h(Δ) *ed* h($\Delta\mu\mu_0$) *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* K($\sqrt{-5}$), *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un intero indecomponibile del corpo, e primitive di prima specie; siano inoltre* h$_1$(Δ) *ed* $h_2(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G$_2$ *e* G$_4$.

Si hanno le seguenti relazioni:

Sia μ *un intero razionale indecomponibile* p:

Per $\left(\frac{-5}{\mathrm{p}}\right) = -1$ [2]:

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$, $(p \equiv 3 \pmod{4})$,

$$h(\Delta p^2) = p^2 h_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h_2(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \left\{ \begin{array}{l} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2]h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta); \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2]h_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h_2(\Delta); \end{array} \right.$$

---

[1] Per il significato dei numeri n_1, n_2, $h_1(\Delta)$, $h_2(\Delta)$, cfr. M. I., § 8.

[2] I valori dei numeri n_1, n_2 sono, per $\left(\frac{-5}{p}\right) = -1$, dati dalla M. I. (§ 7).

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \begin{cases} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = (p-1)^2 h_1(\Delta) + \dfrac{(p-1)^2}{2} h_2(\Delta); \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = (p-1)^2 h_1(\Delta) + \left[\dfrac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta). \end{cases}$$

Per $\left(\frac{-5}{p}\right) = +1$:

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$ ($p \equiv 1 \pmod{4}$),

$$h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 1] h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \begin{cases} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 2] h_1(\Delta) + \left[\dfrac{(p-1)^2}{2} + 2\right] h_2(\Delta); \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 2] h_1(\Delta) + \left[\dfrac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta); \end{cases}$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \begin{cases} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 6] h_1(\Delta) + \left[\dfrac{(p-1)^2}{2} + 4\right] h_2(\Delta); \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 6] h_1(\Delta) + \left[\dfrac{(p-1)^2}{2} + 3\right] h_2(\Delta). \end{cases}$$

Per $\left(\frac{-5}{p}\right) = 0$: $p = 5$:

se $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = +1$ [1]

$$h(25\Delta) = 18 h_1(\Delta) + 9 h_2(\Delta).$$

Sia μ *un intero complesso indecomponibile* π, $N(\pi) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \mathfrak{p}_2^{r_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{r_s} (s \geq 1)$:

$$\begin{matrix} \text{Se} \left(\dfrac{\Delta}{p_{i_v}}\right) = 0, \left(\dfrac{\Delta}{p_{j_{v'}}}\right) \neq 0 \\ (v = 1, 2, \ldots, u; \\ v' = 1, 2, \ldots, u'; \\ u + u' = s;\ u > 0) \end{matrix} \begin{cases} \text{e } p_i \equiv 1 \pmod{4}\ (i = 1, 2, \ldots, s), \\ h(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1] h_1(\Delta) + \left[\dfrac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{2} + 2^{s-2}\right] h_2(\Delta); \\ \text{e } p_{i_\rho} \equiv 1 \pmod{4},\ p_{j_{\rho'}} \equiv 3 \pmod{4}, \\ (\rho = 1, 2, \ldots, \nu;\ \rho' = 1, 2, \ldots, \nu';\ \nu + \nu' = s;\ \nu' = 0) \\ h(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1] h_1(\Delta) + \left[\dfrac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{2}\right] h_2(\Delta). \end{cases}$$

[1] Non può aversi $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = 0$, $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = -1$ (§ 6, II).

$$\text{Se}\left(\frac{\Delta}{p_i}\right) \neq 0 \quad (i = 1, 2,\dots s) \left\{\begin{array}{l} \text{e } p_i \equiv 1 \text{ (mod. 4) } (i = 1,\ 2,\dots s), \\ h(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) + 1]h_1(\Delta) + \left[\frac{N(\pi)+1}{2} + 2^s\right] h_2(\Delta); \\ \text{e } p_{i_\rho} \equiv 1 \text{ (mod. 4)}, \ p_{j_{\rho'}} \equiv 3 \text{ [mod. 4)}, \\ (\rho = 1, 2,\dots v;\ \rho' = 1, 2,\dots v';\ v + v' = s;\ v' > 0), \\ h(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) + 1]h_1(\Delta) + \left[\frac{N(\pi)+1}{2}\right] h_2(\Delta). \end{array}\right.$$

Ed inoltre:

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta).$$

Sia il corpo K$(\sqrt{-6})$.

Si può dire che forme definite di Hermite, appartenenti a questo corpo, primitive di prima specie, a gruppo automorfo aritmetico G_2 ne esistono sempre (ad es. le principali $(1, 0, -\Delta)$, $(\Delta \neq -1)$); forme a gruppo G_4 ne esistono se Δ è rappresentabile dalla forma indefinita di Gauss:

$$\psi = 6x^2 - y^2,$$

con x, y primi tra loro ed $y \equiv 1 \pmod{2}$ e non esistono forme a gruppo G_6.

Si hanno quindi le formule (1) e (2); nelle quali con la specificazione dei valori dei numeri n_1 ed n_2, *si ha il sistema di relazioni ottenuto nel corpo* K$(\sqrt{-5})$. Il numero primo critico da considerarsi nel corpo $K(\sqrt{-6})$ è $p = 3$.

Notiamo che: nel corpo $K(\sqrt{-5})$, $h_2(\Delta)$ sarà nullo se il determinante Δ non è rappresentabile da una almeno delle due forme φ_1 e φ_2 nel modo specificato; nel corpo $K(\sqrt{-6})$, $h_2(\Delta)$ sarà nullo se Δ non è rappresentabile, nel modo detto, dalla forma ψ.

II) **Forme primitive di seconda specie** [1].

Sia il corpo K$(\sqrt{-5})$.

I risultati sopra il gruppo automorfo aritmetico delle forme definite di Hermite, appartenenti a questo corpo, primitive di seconda specie, ci permettono di dire che: forme a gruppo automorfo aritmetico G_2 ne esistono sempre:

---

(1) Naturalmente si suppongono soddisfatte per il determinante Δ le condizioni necessarie e sufficienti per la loro esistenza (cfr. Introduzione di M. I.) e precisamente: nel corpo $K(\sqrt{-5})$ dovrà essere $\Delta \equiv 1$ (mod. 4) oppure $\Delta \equiv 2$ (mod. 4); nel corpo $K(\sqrt{-6})$ dovrà non essere $\Delta \equiv 0$ (mod. 4).

ad es. se $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$, la forma $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$, se $\Delta \equiv 2 \pmod{4}$, la forma $\left(2,\ 1+\sqrt{-5},\ 3-\frac{\Delta}{2}\right)$; forme a gruppo G_4, ne esistono se Δ è rappresentabile dalla forma φ_1 con x ed y interi, razionali, primi tra loro con $y \equiv 0 \pmod{2}$; forme a gruppo G_6 ne esistono se 4Δ è rappresentabile dalla forma indefinita di GAUSS:

$$f \equiv 20x^2 - 3y^2$$

con x, y interi razionali, primi tra loro ed $y \equiv 0 \pmod{2}$.

Si ha dunque l'espressione trinomia per il numero delle classi $h'(\Delta\mu\mu_0)$, cioè:

$$h'(\Delta\mu\mu_0) = n_1 h'_1(\Delta) + n_2 h'_2(\Delta) + n_3 h'_3(\Delta) \quad (3)$$ [1]

a cui viene associata

$$h'(\Delta) = h'_1(\Delta) + h'_2(\Delta) + h'_3(\Delta). \quad (4)$$

Con la specificazione dei numeri n_1, n_2 ed n_3 si ha il risultato:

Siano $h'(\Delta)$ *e* $h'(\Delta\mu\mu_0)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* $K(\sqrt{-5})$, *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un intero indecomponibile del corpo, e primitive di seconda specie; siano inoltre* $h'_1(\Delta)$, $h'_2(\Delta)$ *ed* $h_3'(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di seconda specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2, G_4 *e* G_6. *Si hanno le relazioni seguenti:*

Sia μ *un intero razionale indecomponibile* p.

Per $\left(\frac{-5}{p}\right) = -1$:

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$ ($p \equiv 3 \pmod{4}$, $p \equiv 2 \pmod{3}$),

$$h'(\Delta p^2) = p^2 h'_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{p^2+2}{3} h'_3(\Delta);$$

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$ ($p \equiv 2 \pmod{3}$): con $p \equiv 1 \pmod{4}$,

$$h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2]h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} - 1\right]h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2-1}{3} + 1\right]h'_3(\Delta);$$

con $p \equiv 3 \pmod{4}$,

$$h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2]h'_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2-1}{3} + 1\right]h'_3(\Delta);$$

[1] Per i significati dei numeri n_1, n_2, n_3, $h'_1(\Delta)$, $h'_2(\Delta)$ ed $h'_3(\Delta)$ cfr. § 9 di M. I.

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ $(p \equiv 1 \ (\text{mod. } 3))$: con $p \equiv 1$ (mod. 4),

$$h'(\Delta p^2) = (p-1)^2 h'_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta);$$

con $p \equiv 3$ (mod. 4),

$$h'(\Delta p^2) = (p-1)^2 h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2}\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta).$$

Per $\left(\frac{-5}{p}\right) = +1$:

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$ $(p \equiv 1$ (mod. 4), $p \equiv 1$ (mod. 3)),

$$h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 1] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{3} + 1\right] h'_3(\Delta);$$

$$\text{se}\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \left\{\begin{array}{l}
\text{e } p \equiv 1 \ (\text{mod. } 3) \left\{\begin{array}{l}
p \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 2] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 2\right] h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{3} + 2\right] h'_3(\Delta); \\
p \equiv 3 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 2] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{3} + 2\right] h'_3(\Delta);
\end{array}\right. \\
\text{e } p \equiv 2 \ (\text{mod. } 3) \left\{\begin{array}{l}
p \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 2] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 2\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2 + 2}{3} h'_3(\Delta); \\
p \equiv 3 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 2] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2 + 2}{3} h'_3(\Delta);
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

$$\text{se}\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \left\{\begin{array}{l}
\text{e } p \equiv 1 \ (\text{mod. } 3) \left\{\begin{array}{l}
p \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 6] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 4\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta); \\
p \equiv 3 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 6] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 3\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta);
\end{array}\right. \\
\text{e } p \equiv 2 \ (\text{mod. } 3) \left\{\begin{array}{l}
p \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 6] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 4\right] h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2 + 2}{3} + 1\right] h'_3(\Delta); \\
p \equiv 3 \ (\text{mod. } 4) \\
h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 + 6] h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 3\right] h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2 + 2}{3} + 1\right] h'_3(\Delta).
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Per $\left(\frac{-5}{p}\right) = 0;\ p = 5$ (1):

se $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = -1$

$$h'(25\Delta) = 26h'_1(\Delta) + 6h'_3(\Delta);$$

se $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = +1$

$$h'(25\Delta) = 18h'_1(\Delta) + 9h'_2(\Delta).$$

Sia μ *un intero complesso indecomponibile* π: $N(\pi) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s} (s \geq 1)$:

se $\left(\frac{\Delta}{p_{i_\nu}}\right) = 0$, $\left(\frac{\Delta}{p_{j_{\nu'}}}\right) \neq 0$ $(\nu = 1, 2, \dots u;\ \nu' = 1, 2, \dots u';\ u + u' = s;\ u > 0)$

$p_i \equiv 1 \pmod{3}$ $(i = 1, 2, \dots s)$

$p_i \equiv 1 \pmod{4}$ $(i = 1, 2, \dots, s)$,

$$h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1]h'_1(\Delta) + \left[\frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{2} + 2^{s-2}\right]h'_2(\Delta) + \frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 2^{s+1} + 1}{3} h'_3(\Delta);$$

$p_{i_\rho} \equiv 1 \pmod{4}$, $p_{j_{\rho'}} \equiv 3 \pmod{4}$ $(\rho = 1, 2, \dots \nu;\ \rho' = 1, 2, \dots \nu';\ \nu + \nu' = s;\ \nu' > 0)$,

$$h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1]h'_1(\Delta) + \frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 2^{s+1} + 1}{3} h'_3(\Delta);$$

$p_{i_{\rho_1}} \equiv 1 \pmod{3}$, $p_{i'_{\rho'_1}} \equiv 2 \pmod{3}$ $(\rho_1 = 1, 2, \dots \nu_1;\ \rho'_1 = 1, 2, \dots \nu'_1;\ \nu_1 + \nu'_1 = s;\ \nu'_1 > 0)$

$p_i \equiv 1 \pmod{4}$ $(i = 1, 2, \dots, s)$,

$$h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1]h'_1(\Delta) + \left[\frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{2} + 2^{s-2}\right]h'_2(\Delta) + \frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{3} h'_3(\Delta);$$

$p_{i_\rho} \equiv 1 \pmod{4}$, $p_{j_{\rho'}} \equiv 3 \pmod{4}$ $(\rho = 1, 2, \dots \nu;\ \rho' = 1, 2, \dots \nu';\ \nu + \nu';\ \nu' > 0)$,

$$h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1]h'_1(\Delta) + \frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{N(\pi) - \Phi(\pi, \Delta) + 1}{3} h'_3(\Delta);$$

---

(1) Non può aversi $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = 0$ (§ 6, II). E, conformemente a quanto in generale è stato stabilito nella mia Nota già citata: *Sulle forme di Hermite* (« Bollettino dell' U. M. I. », 1928, pag. 133), il numero primo critico 5 (che è il solo numero primo critico dispari del corpo $K(\sqrt{-5})$) essendo $\equiv 1 \pmod{4}$ e $\equiv 2 \pmod{3}$, darà luogo a relazioni binomie (eventualmente monomie); precisamente con $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = -1$ sarà $h'_2(\Delta) = 0$; con $\left(\frac{\Delta}{5}\right) = +1$ sarà $h'_3(\Delta) = 0$.

$$
\text{se } \left(\frac{\Delta}{p_i}\right) \neq 0 \ (i=1,2,\dots,s)
\begin{cases}
p_i \equiv 1 \pmod 3 \\ (i=1,2,\dots,s)
\begin{cases}
p_i \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \ (i=1,2,\dots,s), \\
h'(\Delta\pi_0\pi_0) = [N(\pi)+1]h'_1(\Delta) + \left[\dfrac{N(\pi)+1}{2} + 2^s\right] h'_2(\Delta) + \dfrac{N(\pi)+2^{s+1}+1}{3} h'_3(\Delta); \\[2ex]
p_{i_\rho} \equiv 1 \ (\text{mod. } 4), \ p_{j_{\rho'}} \equiv 3 \ (\text{mod. } 4), \\
\qquad (\rho = 1,2,\dots,\nu;\ \rho' = 1,2,\dots,\nu';\ \nu+\nu' = s;\ \nu' > 0) \\
h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi)+1]h'_1(\Delta) + \dfrac{N(\pi)+1}{2} h'_2(\Delta) + \dfrac{N(\pi)+2^{s+1}+1}{3} h'_3(\Delta);
\end{cases} \\[6ex]
p_{i_{\rho_1}} \equiv 1 \pmod 3 \\ p_{j_{\rho'_1}} \equiv 2 \pmod 3 \\ (\rho_1 = 1,2,\dots,\nu_1; \\ \rho'_1 = 1,2,\dots,\nu'_1; \\ \nu_1+\nu'_1 = s;\ \nu'_1 > 0)
\begin{cases}
p_i \equiv 1 \ (\text{mod. } 4) \ (i=1,2,\dots,s), \\
h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi)+1]h'_1(\Delta) + \left[\dfrac{N(\pi)+1}{2} + 2^s\right] h'_2(\Delta) + \dfrac{N(\pi)+1}{3} h'_3(\Delta); \\[2ex]
p_{i_\rho} \equiv 1 \ (\text{mod. } 4). \ p_{j_{\rho'}} \equiv 3 \ (\text{mod. } 4), \\
\qquad (\rho = 1,2,\dots,\nu;\ \rho' = 1,2,\dots,\nu';\ \nu+\nu' = s;\ \nu' > 0) \\
h'(\Delta\pi\pi_0) = [N(\pi)+1]h'_1(\Delta) + \dfrac{N(\pi)+1}{2} h'_2(\Delta) + \dfrac{N(\pi)+1}{3} h'_3(\Delta).
\end{cases}
\end{cases}
$$

Ed inoltre:

$$h'(\Delta) = h'_1(\Delta) + h'_2(\Delta) + h'_3(\Delta).$$

Si noti che, conformemente ai risultati generali della mia citata Nota, nel corpo $K(\sqrt{-5})$, il numero primo critico 5 (l'unico dispari) essendo $\equiv 1$ (mod. 4) e $\equiv 2$ (mod. 3), la forma ternaria di queste relazioni si potrà avere solo per quei determinanti Δ delle forme che sono divisibili per 5; diversamente, le relazioni assumono la forma binaria (eventualmente monomia).

Sia il corpo $K(\sqrt{-6})$.

Si ha che le forme definite di Hermite, appartenenti a questo corpo, primitive di seconda specie, a gruppo automorfo aritmetico G_2, ne esistono sempre: ad es. se $\Delta \equiv 1$ (mod. 4) la forma $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$; se $\Delta \equiv 2$ (mod. 4), la forma $\left(2,\ \sqrt{-5},\ 3-\frac{\Delta}{2}\right)$, se $\Delta \equiv 3$ (mod. 4), la forma $\left(2,\ 1+\sqrt{-5},\ 3+\frac{1-\Delta}{2}\right)$; forme a gruppo G_4, ne esistono se Δ è rappresentabile dalla forma ψ di questo paragrafo, nel modo detto, però con $y \equiv 0$ (mod. 2); forme a gruppo G_6 ne esistono se 4Δ è rappresentabile dalla forma indefinita di Gauss:

$$f' \equiv 24x^2 - 3y^2,$$

con x, y primi tra loro e $y \equiv 0$ (mod. 2).

Si hanno le formule (3) e (4); in cui, con la specificazione dei numeri n_1, n_2 ed n_3 si ha il *sistema di relazioni ottenuto nel corpo* $K(\overline{-5})$. Il numero primo critico da considerarsi è $p = 3$.

I numeri $h'_2(\Delta)$ e $h'_3(\Delta)$ possono, tanto in $K(\overline{-5})$, quanto in $K(\overline{-6})$, essere uno, oppure entrambi nulli; ciò in relazione al fatto che Δ e 4Δ non siano rappresentabili, nel modo specificato, dalle forme φ_1, ψ, f ed f' di questo paragrafo, od anche come risulta da quanto è stabilito nella mia Nota.

Osservazione. Si è veduto che per le forme definite di HERMITE nei corpi $K(\sqrt{-2})$, $K(\sqrt{-5})$ e $K(\sqrt{-6})$ si hanno, negli stessi casi, *le stesse relazioni* (1), tanto per le forme primitive di prima specie, quanto per le forme primitive di seconda specie. Dalle nostre ricerche si può asserire che questo fatto *ha carattere generale*: cioè queste stesse relazioni si hanno in tutti quei corpi quadratici immaginari, esclusi i corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-3})$, in cui è possibile determinare il poliedro fondamentale del relativo gruppo di BIANCHI ed inoltre valga sempre la proprietà invariantiva del numero n, rispetto alla posizione degli indici delle forme del contorno del poliedro fondamentale. (Cfr. anche l'*Osserv.* di M. I. del § 9). Intorno a tale carattere generale, occorre tenere presente che la forma algebrica della relazione è, generalmente, legata ai numeri primi critici del corpo $K(\sqrt{-d})$ a cui appartengono le forme di HERMITE (2).

---

(1) Nei corpi $K(\sqrt{-5})$ e $K(\sqrt{-6})$, le relazioni corrispondenti al caso di μ complesso $= \pi$, se l'ideale (π) è primo $(s = 1)$ diventano le corrispondenti del corpo $K(\sqrt{-2})$, essendo allora $\Phi(\pi, \Delta) = 0$ oppure $\Phi(\pi, \Delta) = 1$, secondo che $N(\pi)$ e Δ sono, oppure no, primi tra di loro.

(2) Cfr. la mia Nota citata.

Strain and torsion in Riemannian space.

By A. J. Mc Connell (Dublin).

1. INTRODUCTION

1.1. **Summary.** — In this paper we shall first consider the general problem of strain in an N-dimensional manifold, showing that it is compounded of two parts, a pure strain and what is equivalent to a rigid-body movement in Riemannian space. Applying these results in particular to a congruence of curves, we discuss the torsion of the congruence, and new geometrical interpretations are given of normal and geodesic congruences, as well as of Ricci's canonical congruences.

1.2. **Notation; metric; angle.** — We consider a manifold of N dimensions, whose metric is assumed to be given by a non-definite quadratic form,

$$\varphi = g_{mn} dx^m dx^n, \tag{1.21}$$

so that the square of the line-element is given by the equation

$$ds^2 = e g_{mn} dx^m dx^n, \quad e^2 = 1, \tag{1.22}$$

where e is chosen to make the right-hand side positive, and is called the *indicator* of the direction dx^r.

The *magnitude* of a vector X^r is defined as X, where

$$X^2 = e_X g_{mn} X^m X^n, \quad X \geqq 0, \tag{1.23}$$

e_X being the indicator of X^r. A *unit vector* is one whose magnitude is unity, and a *null-vector* one whose magnitude is zero. The aggregate of null-vectors at a point constitutes the *null-cone* at the point.

We confine ourselves to defining the *angle* between two vectors X^r, Y^r, which are such that one can move continuously into the other without its maguitude vanishing, and which therefore have the same indicator e. We have two cases, according as the two-space of X^r, Y^r cuts the null-cone in imaginary or real vectors. In the first case we define the angle by the equation

$$\cos\theta = \frac{eg_{mn}X^mY^n}{XY}; \tag{1.24}$$

in the second case, by the equation

$$\cosh\theta = \frac{eg_{mn}X^mY^n}{XY}. \tag{1.241}$$

The angle, thus defined, is always real (¹).

We deduce that when λ^r and μ^r are two such unit vectors and θ is the angle between them,

$$4\sin^2\theta/2 = |g_{mn}(\lambda^m - \mu^m)(\lambda^n - \mu^n)|, \tag{1.25}$$

or

$$4\sinh^2\theta/2 = |g_{mn}(\lambda^m - \mu^m)(\lambda^n - \mu^n)|, \tag{1.251}$$

according as we are in the first or second case.

Any two vectors X^r, Y^r are defined to be *perpendicular* when

$$g_{mn}X^mY^n = 0. \tag{1.26}$$

If X^r is defined as a function of a parameter t, we shall denote by $\frac{\delta X^r}{\delta t}$ its *contravariant derivative* with respect to t, that is,

$$\frac{\delta X^r}{\delta t} = \frac{dX^r}{dt} + \left\{ {r \atop mn} \right\} X^m \frac{dx^n}{dt}. \tag{1.27}$$

Also the vector is *propagated parallelly* along a curve when its contravariant derivative with respect to the arc of the curve vanishes at every point, and we know that the magnitudes and angle of two vectors, both propagated parallelly along a curve, remain constant.

1.3. Coplanar vectors; hyperplanes; quadrics. — A vector λ^r is said to be *coplanar* with two unit vectors λ^r_1 and λ^r_2 when A_1 and A_2 exist such that

$$\lambda^r = A_1\lambda^r_1 + A_2\lambda^r_2, \tag{1.31}$$

and A_1, A_2 may be called the *components* of λ^r along λ^r_1, λ^r_2. We also call the aggregate of vectors satisfying this equation the *vector two-space* defined by λ^r_1 and λ^r_2.

(¹) Cfr. *The Derived Directions of a Vector defined along a Curve in Riemannian Space*, Proc. Lond. Math. Soc., (2). 28, (1928), 501-509.

If λ^r_{ι} is a unit vector, we shall call the quantity

$$g_{mn}\lambda^m\lambda^n_{\iota} \tag{1.32}$$

the *projection* of the vector λ^r along λ^r_{ι}. For a positive definite line-element it becomes $\lambda \cos\theta$, where λ is the magnitude of λ^r and θ is the angle between the two vectors.

Now, x'^r being any point near the point x^r of the manifold, let us denote the small vector, $x'^r - x^r$, by η^r, so that $x'^r = x^r + \eta^r$. In analogy with Euclidean three-space we shall call the elementary surface

$$A_r\eta^r = 0 \tag{1.33}$$

at the point x^r a *hyperplane*. It contains all the vectors at the point x^r which are perpendicular to the vector $g^{rs}A_s$ or A^r, as it may be written.

A *quadric* will be defined as the elementary surface represented by an equation of the form

$$a_{mn}\eta^m\eta^n = \text{const.}, \tag{1.34}$$

a_{mn} being a symmetrical tensor. Two vectors X^r, Y^r are said to be *conjugate* with respect to this quadric when they satisfy the equation

$$a_{mn}X^mY^n = 0, \tag{1.35}$$

and all vectors, conjugate to the vector λ^r, lie on the *conjugate hyperplane*

$$a_{mn}\lambda^m\eta^n = 0. \tag{1.36}$$

The vector perpendicular to this hyperplane is $a^r_{.n}\lambda^n$, where $a^r_{.n} = g^{rm}a_{mn}$.

The *principal axes* of a quadric are those directions which are perpendicular to their conjugate hyperplanes Thus if λ^r is a principal axis of the quadric, then

$$a^r_{.n}\lambda^n = \theta\lambda^r. \tag{1.37}$$

It follows that θ must be a root of the determinantal equation

$$|a^r_{.n} - \theta\delta^r_n| = 0, \quad \delta^r_n = \begin{cases} 0, & \text{if } r \neq n \\ 1, & \text{if } r = n \end{cases}; \tag{1.38}$$

and hence there are in general N principal axes, which are conjugate with respect to both the quadrics, $a_{mn}\eta^m\eta^n = \text{const.}$ and $g_{mn}\eta^m\eta^n = \text{const.}$, the latter property showing that they are orthogonal. If the roots of the equation (1.38) be denoted by θ_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$, we see that the sum of the roots is given by

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha = a^r_{.r}. \tag{1.39}$$

1.4. **Congruences.** — Let the vector, λ^r, defined at every point of space, determine a congruence of curves. We shall denote by $\lambda^r_{,s}$ the *covariant derivative of λ^r with respect to x^s*, so that

$$\lambda^r_{,s} = \frac{\partial \lambda^r}{\partial x^s} + \left\{ {r \atop ms} \right\} \lambda^m. \tag{1.41}$$

We shall suppose that λ^r is a unit vector.

Since λ^r is a unit vector, we have

$$\lambda^r_{,s}\lambda_r = 0, \tag{1.42}$$

and consequently

$$|\lambda^r_{,s}| = 0. \tag{1.421}$$

A congruence is said to be *normal* when its curves are the orthogonal trajectories of a family of surfaces. We know that the necessary and sufficient conditions that a congruence be normal are (1)

$$\Omega_{mnp} = \omega_{mn}\lambda_p + \omega_{np}\lambda_m + \omega_{pm}\lambda_n = 0, \quad 2\omega_{mn} = (\lambda_{m,n} - \lambda_{n,m}). \tag{1.43}$$

We shall now show that for the normality of a congruence it is also necessary and sufficient that

$$\omega_{mn}\mu^m\nu^n = 0, \tag{1.44}$$

where μ^r, ν^r are any two vectors perpendicular to λ^r. Let ξ^r, η^r, ζ^r be any three vectors at a point, and let us resolve ξ^r into a vector along λ^r and a vector ξ^r_1 perpendicular to λ^r, with similar resolutions for η^r and ζ^r. Then we see without difficulty that

$$\Omega_{mnp}\xi^m\eta^n\zeta^p = A\omega_{np}\eta^n_1\zeta^p_1 + B\omega_{pm}\zeta^p_1\xi^m_1 + C\omega_{mn}\xi^m_1\eta^n_1,$$

from which it follows immediately that (1.43) and (1.44) are equivalent conditions and our result is proved.

A congruence is *geodesic* when each curve of the congruence is a geodesic. From the well-known expression for the first curvature of a curve (2) we conclude that the necessary and sufficient conditions that a congruence be geodesic are

$$\lambda^r_{,s}\lambda^s = 0. \tag{1.45}$$

These can also be written

$$\omega_{rs}\lambda^s = 0, \tag{1.451}$$

---

(1) Levi-Civita, *The Absolute Differential Calculus*, (1927), p. 275.

(2) Levi-Civita, loc. cit., p. 275.

using (1.42), and as a consequence we have

(1.452) $$|\omega_{rs}| = 0.$$

It follows from (1.44) and (1.451) that

(1.46) $$\omega_{mn}\xi^m\eta^n = 0,$$

where ξ^r, η^r are any two vectors at each point, expresses the necessary and sufficient condition that a congruence be both normal and geodesic. In other words this condition is

(1.461) $$\omega_{mn} = 0.$$

2. Small strain in Riemannian space.

2.1. **Small deformation of a medium.** — Let x_0^r be the co-ordinates of any point O of the manifold, and let us suppose that the manifold is deformed so that O occupies a near position O', of co-ordinates $x_0'^r$. Since the deformation is small, $(x_0'^r - x_0^r)$ is an infinitesimal vector and we may write

(2.11) $$x_0'^r - x_0^r = \xi_0^r \delta t,$$

δt being an infinitesimal of the first order. When the deformation is given ξ^r is a given vector at every point of space, and the equations

(2.12) $$\frac{dx^1}{\xi^1} = \frac{dx^2}{\xi^2} = \dots = \frac{dx^N}{\xi^N} = dt$$

define a congruence of curves, together with a parameter t along each curve of the congruence. For an increment δt of the parameter, each point of the manifold moves along a curve of the congruence and takes up its deformed position.

We wish to investigate how the medium in the neighbourhood of O has been modified by the strain. Let $\overline{O}$ be any point near O, and let us denote by η_0^r the small vector $O\overline{O}$. If along C, $\overline{C}$, the curves of the congruence through O and $\overline{O}$, we take points P, $\overline{P}$ at equal parameter values t, these corresponding points will determine a vector η_P^r, provided t be small enough; and the value of η_P^r for a small increment δt is to the first order the strained position of η_0^r. The comparison between η_P^r and η_0^r, for all values of η_0^r so as to include all points $\overline{O}$ near O, will show how the medium in the neighbourhood of O has been deformed. In discussing the strain we shall neglect quantites of the second and higher orders in δt.

2.2. **Equations for the magnitude and direction of η^r.** — Let unbarred letters refer to the curve C and barred letters to the curve $\bar{C}$. We have

$$\eta^r = \bar{x}^r - x^r, \tag{2.21}$$

$\bar{x}^r$ and x^r being corresponding points on the two curves. Also, by (2.13),

$$\frac{d\bar{x}^r}{dt} = \bar{\xi}^r, \quad \frac{dx^r}{dt} = \xi^r. \tag{2.22}$$

Therefore

$$\frac{d\eta^r}{dt} = \frac{d\bar{x}^r}{dt} - \frac{dx^r}{dt} = \bar{\xi}^r - \xi^r$$
$$= \frac{\partial \xi^r}{\partial x^s}\eta^s,$$

to the nearest order in the η's. Adding $\left\{ {r \atop ms} \right\} \dfrac{dx^m}{dt}\eta^s$ to each side, we get

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta t} = \xi^r_{,s}\eta^s. \tag{2.23}$$

We shall assume that η^r is not a null-vector, and let η be its magnitude and μ^r the unit vector co-directional with it; that is,

$$\eta^r = \eta\mu^r.$$

Differentiating contravariantly with respect to t,

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta t} = \eta\,\frac{\delta\mu^r}{\delta t} + \frac{d\eta}{dt}\,\mu^r.$$

We know that μ^r and its contravariant derivative are perpendicular; hence, multiplying the last equation by $g_{rt}\mu^t$ and denoting the indicator of μ^r by e, we have

$$\frac{d\eta}{dt} = e\eta\xi_{m,n}\mu^m\mu^n. \tag{2.24}$$

Also

$$\frac{\delta\mu^r}{\delta t} = \xi^r_{,s}\mu^s - e\mu^r\xi_{m,n}\mu^m\mu^n. \tag{2.25}$$

When we are given the initial vector, η^r_0, at O, the differential equations (2.23), (2.24) and (2.25) define the vector η^r, its magnitude and direction at every point of C.

Now let us write

$$(2.26) \qquad \varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(\xi_{m,n} + \xi_{n,m}), \quad \omega_{mn} = \frac{1}{2}(\xi_{m,n} - \xi_{n,m}),$$

so that we have the relations

$$(2.27) \qquad \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}, \quad \omega_{mn} = -\omega_{nm}, \quad \xi_{m,n} = \varepsilon_{mn} + \omega_{mn},$$

and let us put

$$\varepsilon^{r}_{.s} = g^{rm}\varepsilon_{ms}, \quad \omega^{r}_{.s} = g^{rm}\omega_{ms}.$$

Our formulae for the vector η^r become

$$(2.231) \qquad \frac{\delta\eta^r}{\delta t} = \varepsilon^{r}_{.s}\eta^s + \omega^{r}_{.s}\eta^s,$$

$$(2.241) \qquad \frac{d\eta}{dt} = e\eta\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n,$$

$$(2.251) \qquad \frac{\delta\mu^r}{\delta t} = \varepsilon^{r}_{.s}\mu^s - e\mu^r\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n + \omega^{r}_{.s}\mu^s.$$

If η^r and ζ^r are any two vectors satisfying (2.231), we deduce at once the equation

$$(2.28) \qquad \frac{d}{dt}(g_{mn}\eta^m\zeta^n) = 2\varepsilon_{mn}\eta^m\zeta^n.$$

2.3. **Small strain; elongation; strain quadric.** — To compare the values of η^r at O and P, we obtain two equivalent vectors at the same point. Let us propagate η^r_P parallelly back along C from P to O, and let us denote the resulting vector by η'^r_0. Now $(\eta'^r_0 - \eta^r_0)$ is the vector at O which must be added to η^r_0 in order to give η'^r_0, the parallel of the strained vector at P. Thus $(\eta'^r_0 - \eta^r_0)$ measures the strain of the vector η^r_0 at O, and we shall now find an expression for it.

We have

$$\eta^r_P = \eta^r_0 + \left(\frac{d\eta^r}{dt}\right)_0 \delta t + O(\delta t^2),$$

and, by the definition of parallel propagation,

$$\eta'^r_0 = \eta^r_P + \left\{ {r \atop mn} \right\}_P \eta^m_P \xi^n_P \delta t + O(\delta t^2).$$

Therefore, dropping the suffices O,

$$\eta'^r - \eta^r = \frac{\delta\eta^r}{\delta t}\delta t + O(\delta t^2),$$

that is, from (2.231),

$$\eta'^r - \eta^r = (\varepsilon^{\cdot r}_{\cdot s}\eta^s + \omega^{\cdot r}_{\cdot s}\eta^s)\delta t. \tag{2.31}$$

Hence to the first order the change in η^r is along the vector $(\varepsilon^{\cdot r}_{\cdot s}\eta^s + \omega^{\cdot r}_{\cdot s}\eta^s)$.

We next examine the change in magnitude of η^r. Let us denote by η' the magnitude of η'^r, and by μ'^r the unit vector in the same direction. Since the magnitude of a vector is unchanged by parallel propagation we see that η' is also the magnitude of the strained vector at P, and

$$\eta' - \eta = \frac{d\eta}{dt}\delta t = e\eta\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n\delta t, \tag{2.32}$$

using (2.241). The *elongation* of η^r is defined as the ratio $(\eta' - \eta)/\eta$. Therefore, if we put

$$\text{Elongation} = \varepsilon\delta t,$$

we get

$$\varepsilon = e\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n. \tag{2.321}$$

Let us take the quadric

$$e\varepsilon_{mn}\eta^m\eta^n = k, \tag{2.33}$$

which we shall refer to as the quadric Q. Then, η being the radius vector of Q in the direction η^r. we have that its elongation is given by the equation

$$\varepsilon\delta t = \frac{k\delta t}{\eta^2}. \tag{2.331}$$

Hence the elongation of any radius vector of the quadric Q is inversely proportional to the square of the length of that vector. The quadric Q is called the *strain quadric.* We see that all vectors of the same elongation, $\varepsilon\delta t$, satisfy the relation, $\varepsilon\eta^2 = k$, that is, they belong to the quadric

$$(\varepsilon_{mn} - \varepsilon g_{mn})\eta^m\eta^n = 0. \tag{2.34}$$

In particular those vectors having zero elongation belong to the quadric

$$\varepsilon_{mn}\eta^m\eta^n = 0. \tag{2.341}$$

Equation (2.28) shows that if η^r and ζ^r are two conjugate vectors of the strain quadric, their inner product, $g_{mn}\eta^m\zeta^n$, remains constant under the deformation, and we see that two orthogonal vectors will remain orthogonal if they are also conjugate with respect to Q.

We shall now find a measure for the change in direction of η^r, that is, we wish to find the relation between μ'^r and μ^r at O. In exactly the same manner as we arrived at equations (2.31) we obtain

$$\mu'^r - \mu^r = \frac{\delta\mu^r}{\delta t}\delta t + O(\delta t^2), \tag{2.35}$$

which gives the change in the unit vector μ^r. Also, when t is small, the vector μ^r, μ'^r, are such that we can define the small angle $\delta\theta$ between them by 1.2, and from (2.25) and (2.251) we have to the first order

$$\delta\theta^2 = |g_{mn}(\mu'^m - \mu^m)(\mu'^n - \mu^n)|.$$

Therefore

$$\delta\theta^2 = \left|g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta t}\frac{\delta\mu^n}{\delta t}\right|(\delta t)^2,$$

or, denoting the magnitude of $\frac{\delta\mu^r}{\delta t}$ by $\frac{\delta\mu}{\delta t}$,

$$\delta\theta = \frac{\delta\mu}{\delta t}\delta t, \tag{2.36}$$

and the magnitude of $\frac{\delta\mu^r}{\delta t}$ is given by (2.251).

Since

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta t} = \eta\frac{\delta\mu^r}{\delta t} + \frac{d\eta}{dt}\mu^r,$$

we see that, to the first order, the change in η^r is in the two-space containing μ^r and $\frac{\delta\mu^r}{\delta t}$, and the angle through which it is twisted in this two-space is $\frac{\delta\mu}{\delta t}\delta t$.

2.4. **Pure strain.** — We shall now consider a strain for which $\omega_{mn} = 0$. Equations (2.31) become

$$\eta'^r - \eta^r = \varepsilon^r_{.p}\eta^p\delta t. \tag{2.41}$$

From 1.3, we see that $\varepsilon^r_{.p}\eta^p$ is perpendicular to the conjugate hyperplane of η^r with respect to Q. Let ν^r be the unit vector in this direction, and let us put

$$b = g_{mn}\mu^m\nu^n.$$

Then we have

$$\varepsilon^r_{.p}\eta^p = A\nu^r,$$

where

$$\varepsilon_{mn}\eta^m\eta^n = Ab\eta.$$

Thus

$$\eta'^r - \eta^r = \varepsilon^r_{.p}\eta^p\delta t = \frac{ek\delta t}{b\eta}\nu^r. \tag{2.42}$$

These last equations show that *the straining of η^r is along the perpendicular to the conjugate plane of η^r with respect to the strain quadric, and the magnitude of the vector to be added is inversely proportional to the projection of η^r on ν^r.* Such a strain is called a *pure strain.*

We have also, from (2.251),

$$\mu'^r - \mu^r = \frac{\delta\mu^r}{\delta t}\delta t = \frac{ek\delta t}{b\eta^2}\nu^r - \frac{k\delta t}{\eta^2}\mu^r$$
$$= \frac{k\delta t}{\eta^2}\left(\frac{e\nu^r}{b} - \mu^r\right).$$

Therefore, if e' be the indicator of ν^r,

$$\delta\theta = \frac{k\delta t}{\eta^2}\left|\frac{e'}{b^2} - e\right|^{1/2}. \tag{2.43}$$

For a positive definite line-element, b is the cosine of the angle β between μ^r and ν^r, and

$$\delta\theta = \frac{k\delta t}{\eta^2}\,|\tan\beta\,|. \tag{2.431}$$

The principal axes of the strain quadric Q are called the *principal axes of the strain,* and the elongations for these directions are called the *principal elongations.* The principal axes are given by the equations

$$\varepsilon^r_{.s}\mu^s = \theta\mu^r,$$

where θ is a root of the equation

$$|\,\varepsilon^r_{.s} - \theta\delta^r_s\,| = 0.$$

For vectors along the principal axes of Q we have

$$\eta'^r - \eta^r = \theta\eta^r\delta t. \tag{2.44}$$

Hence the principal axes of the strain quadric are not twisted but are lengthened in the ratio $(1 + \theta\delta t)$ along their own directions.

Let the principal axes be denoted by μ^r_α and the corresponding values of θ by θ_α, where $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. If small lenghts η_α be taken along these directions, then their strained lengths η'_α are given by

(2.441) $$\eta'_\alpha/\eta_\alpha = 1 + \theta_\alpha \delta t.$$

The quantities $\theta_\alpha \delta t$ are the principal elongations of the pure strain.

2.5. **General strain; conditions that a strain may be pure.** — The equations of a general strain differ from those of a pure strain by the addition of the terms involving the ω's. The equations of a strain for which $\varepsilon_{mu} = 0$ are

(2.51) $$\eta'^r - \eta^r = \omega^r_{.p} \eta^p \delta t.$$

Now, since we are neglecting terms of order higher than the first in δt, we see that we obtain the general strain by compounding successively the pure strain (2.41) and the deformation represented by (2.51). Hence we have to investigate what kind of deformation is represented by the equations (2.51).

First, equation (2.32) shows that

(2.52) $$\eta' = \eta,$$

and therefore magnitudes are unaltered.

Next, to investigate the change in direction, we have

(2.53) $$\mu'^r - \mu^r = \omega^r_{.p} \mu^p \delta t,$$

since the magnitudes are equal. Let us now take an orthogonal ennuple, μ^r_α ($\alpha = 1, 2, ..., N$), and let μ'^r_α be its deformed position. Then equation (2.28) shows that the latter also form an orthogonal ennuple. If we have

(2.54) $$\mu^r = \sum_{\alpha\ 1}^{N} A_\alpha \mu^r_\alpha,$$

it follows immediately that

(2.541) $$\mu'^r = \sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha \mu'^r_\alpha,$$

and we see that the relations between any number of vectors μ'^r will be exactly the same as those between the corresponding vectors μ^r. Thus all relations such as magnitude and angle are unaltered by the transformation (2.51). Also if we suppose the strain or transformation to vary continuously from the zero position to its final position, the ennuple could not change its sense; as, for example, in Euclidean three-space a left-handed trihedral could not change into a right-handed one.

Therefore the deformation represented by (2.51) is the natural extension of a rotation to Riemannian space. We shall therefore call it, by analogy, a *rotation.*

We now have the following result:

A general strain consists of three parts, a pure strain, a rotation, and finally a parallel propagation of each vector at O *to the displaced position of* O.

Note that if the strain reduces to a rotation, the vectors ξ^r satisfy the equations

$$2\varepsilon_{mn} = \xi_{m,n} + \xi_{n,m} = 0. \tag{2.55}$$

These are Killing's equations [1], and our space admits an infinitesimal motion, whose paths are the curves of our congruence.

In order that a strain be pure, it is necessary and sufficient that

$$2\omega_{mn} = \xi_{m,n} - \xi_{n,m} = 0 \tag{2.56}$$

that is,

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial x^n} = \frac{\partial \xi_n}{\partial x^m},$$

which shows immediately that ξ_r must be a gradient, and a fnnction φ exists such that

$$\xi_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x^r} = \varphi_{,r}. \tag{2.57}$$

Also

$$\varphi = \int_0^P \xi_r dx^r, \tag{2.58}$$

where O is a standard position and the integration may be taken along any path joining O and P. φ is called the *strain potential.*

2.6. **Dilatation.** — If, under any strain, an elementary volume V at O is deformed into a volume V', then the *dilatation* of the strain is defined as the ratio $(V' - V)/V$.

Now, if we take N elementary lengths η_α along N mutually orthogonal directions, α ranging from 1 to N, the volume V of the small hyperparallelepiped thus given is

$$V = \prod_{\alpha=1}^{N} \eta_\alpha. \tag{2.61}$$

---

[1] Eisenhart, *Riemannian Geometry*, (1926), pp. 234-235.

Since the rotation and parallel displacement alter neither lengths nor angles, we see that volume is unaltered by these parts of the strain and the dilatation will involve only the components of the pure strain.

Let us take the small lengths η_α along the principal axes of the strain. These directions remain mutually orthogonal under the strain, and their strained lengths are given by (2.441),

$$\eta'_\alpha/\eta_\alpha = 1 + \theta_\alpha \delta t.$$

The strained volume V' is

$$V' = \prod_{\alpha=1}^{N} \eta'_\alpha . \tag{2.611}$$

Therefore, denoting the dilatation by $\Delta\delta t$,

$$\begin{aligned}\Delta\delta t = (V' - V)/V &= \prod_{\alpha=1}^{N} (\eta'_\alpha/\eta_\alpha) - 1 \\ &= \prod_{\alpha=1}^{N} (1 + \theta_\alpha \delta t) - 1 \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha \delta t,\end{aligned}$$

to the nearest order of small quantities. Hence, using (1.39),

$$\Delta = \varepsilon^{r}_{.r} = \xi^{r}_{,r}, \tag{2.62}$$

and *the dilatation is equal to the divergence of the displacement vector* $\xi^r \delta t$.

For a pure strain, we have a strain potential φ, and

$$\xi_r = \varphi_{,r}, \quad \xi_{r,s} = \varphi_{,rs}. \tag{2.63}$$

Thus, for a strain which is both pure and of zero dilatation, the strain potential satisfies the harmonic equation

$$g^{mn} \varphi_{,mn} = 0. \tag{2.64}$$

2.7. **Geometrical interpretation of the components of strain.** — We shall now give geometrical interpretations of the quantities ε_{mn} and ω_{mn}.

Let us take the direction given by the tangent at O to the curve whose parameter is x^M, which we shall call the *Mth co-ordinate direction at* O; and let us denote by μ^r_M the unit vector in this direction. Obviously $\mu^r_M = 0$, when $r \neq M$, and $g_{mn}\mu^m_M \mu^n_M = e_M$, where e_M is the indicator of this direction. Hence we have the relations

$$\mu^M_M = 1/\sqrt{e_M g_{MM}}, \quad \mu^r_M = 0, \quad (r \neq M). \tag{2.71}$$

First of all, from our formula (2.321) for the elongation, we have

$$\varepsilon = e\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n.$$

Therefore, putting $\varepsilon_M\delta t$ for the elongation of the *Mth* co-ordinate direction,

$$\varepsilon_M = e_M\varepsilon_{mn}\overset{m}{\mu}_M\overset{n}{\mu}_M = \varepsilon_{MM}/g_{MM},$$

that is,

$$\varepsilon_{MM} = g_{MM}\varepsilon_M \tag{2.72}$$

which gives the component ε_{MM} in terms of the elongation of the *Mth* co-ordinate direction at O.

Next let η^r_R and η^r_S be two small vectors in the directions of the *Rth* and *Sth* co-ordinate directions respectively. From (2.28), we have

$$g_{mn}\overset{'m}{\eta}_R\overset{'n}{\eta}_S - g_{mn}\overset{m}{\eta}_R\overset{n}{\eta}_S = 2\varepsilon_{mn}\overset{m}{\eta}_R\overset{n}{\eta}_S\delta t.$$

But

$$\eta/\eta' = 1 - \varepsilon\delta t$$

$\varepsilon\delta t$ being the elongation of the direction η^r. Therefore

$$\begin{aligned} g_{mn}\overset{'m}{\mu}_R\overset{'n}{\mu}_S &= (1-\varepsilon_R\delta t)(1-\varepsilon_S\delta t)(g_{mn}\overset{m}{\mu}_R\overset{n}{\mu}_S + 2\varepsilon_{mn}\overset{m}{\mu}_R\overset{n}{\mu}_S\delta t) \\ &= g_{mn}\overset{m}{\mu}_R\overset{n}{\mu}_S + 2\varepsilon_{mn}\overset{m}{\mu}_R\overset{n}{\mu}_S\delta t - (\varepsilon_R + \varepsilon_S)g_{mn}\overset{m}{\mu}_R\overset{n}{\mu}_S\delta t. \end{aligned}$$

Let δ_{RS} be the change in the quantity $g_{mn}\overset{m}{\mu}_R\overset{n}{\mu}_S$ due to the strain. Then, using (2.71), we get

$$2\varepsilon_{RS} = g_{RS}(\varepsilon_R + \varepsilon_S) + \left(\frac{\delta_{RS}}{\delta t}\right)\sqrt{e_R e_S g_{RR} g_{SS}}. \tag{2.73}$$

For a positive definite line-element, δ_{RS} is the change in the cosine of the angle between the *Rth* and *Sth* co-ordinate directions. If $\delta\theta_{RS}$ is the change in the angle between these directions we can easily deduce from (2.73) that

$$2\varepsilon_{RS} = g_{RS}(\varepsilon_R + \varepsilon_S) - \left(\frac{\delta\theta_{RS}}{\delta t}\right)\sqrt{|g_{RS}g_{SS} - g^2_{RS}|}. \tag{2.731}$$

Lastly, to find an interpretation of the components ω_{mn}, we shall suppose all the quantities, save $\omega_{RS} = -\omega_{SR}$, to be zero and find what kind of transformation we obtain. μ^r_α being the *αth* co-ordinate direction, we have from (2.53)

$$\overset{'r}{\mu}_\alpha = \mu^r_\alpha + \omega^r_{.p}\mu^p_\alpha\delta t.$$

Hence, if α be not equal to R or S,

$$\overset{'r}{\mu}_\alpha = \mu^r_\alpha. \tag{2.74}$$

Therefore all the co-ordinate directions axcept the *Rth* and *Sth*, together with all vectors coplanar with them, remain fixed. Thus under this transformation an elementary $N-2$ space remains invariable. Also, multiplying the equations

$$\eta'^r - \eta^r = \omega^r_{.p}\eta^p\delta t$$

by $g_{rs}\mu^s_\alpha$ we deduce immediately that

$$g_{rs}\eta'^r\mu^s_\alpha = g_{rs}\eta^r\mu^s_\alpha, \quad (\alpha \neq R,\ S);$$

that is, the projection of any vector along any one of the fixed co-ordinate directions remains constant under transformation. We see that our result is analogous to a simple rotation in three dimensions round one of the co-ordinate axes.

If $\delta\theta_R$ be the small angle between the strained and unstrained directions of μ^r_R, we get from (1.25) and (1.251) the result

$$\begin{aligned}(\delta\theta_R)^2 &= |g_{mn}(\mu'^m_R - \mu^m_R)(\mu'^m_R - \mu^n_R)| \\ &= |g_{mn}\omega^m_{.p}\omega^n_{.q}\mu^p_R\mu^q_R|\,(\delta t)^2 \\ &= \omega^2_{RS}|g^{SS}/g_{RR}|\,(\delta t)^2.\end{aligned}$$

Therefore

$$|\omega_{RS}| = \left(\frac{\delta\theta_R}{\delta t}\right)\sqrt{|g_{RR}/g^{SS}|}. \tag{2.75}$$

Similarly

$$|\omega_{RS}| = \left(\frac{\delta\theta_S}{\delta t}\right)\sqrt{|g_{SS}/g^{RR}|}. \tag{2.751}$$

If we suppose that μ^r_R and μ^r_S are perpendicular to all the other co-ordinate directions, we have

$$g^{RR} = g_{SS}/(g_{RR}g_{SS} - g^2_{RS}), \quad g^{SS} = g_{RR}/(g_{RR}g_{SS} - g^2_{RS}),$$

from which we conclude that all vectors in the two-space of μ^r_R and μ^r_S are twisted in this two-space through the constant angle

$$\delta\theta = |\omega_{RS}|\,\delta t/\sqrt{|g_{RR}g_{SS} - g^2_{RS}}\ . \tag{2.76}$$

3. **Torsion of a congruence.**

3.1. **The twisting of a vector by a congruence.** — Let O be any point of space and C the curve of the congruence through it. We take a point $\bar{O}$ near O, and let $\bar{C}$ be the curve of the congruence through $\bar{O}$. We shall assume that none of the vectors we are dealing with is a null-vector, so that we shall be able to speak of the unit vectors in these directions. Let λ^r be the unit tangent vector of the congruence.

We now take equal distances s along C and $\overline{C}$, measured from O and $\overline{O}$ respectively, thus giving us the points P and $\overline{P}$. If s be small, $\overline{P}$ will be near P, and $P\overline{P}$ will be a small vector η^r. Thus, as s varies, our construction defines an infinitesimal vector at all points of C near O. η^r will not in general be propagated parallelly along C; in other words, it will be *twisted* by the congruence, and it is this twisting we wish to investigate for all points $\overline{O}$ in the neighbourhood of O.

Our problem is only a particular case of 2, where $t = s$, the arc of the curve; and we only require to put

$$\xi^r = \lambda^r, \quad \delta t = \delta s, \tag{3.11}$$

in order to obtain the corresponding results for the torsion of a congruence.

Thus 2.2 gives us the equations for the vector η^r, and we have from 2.3 a measure of the twisting of η^r by the congruence. We shall write down for convenience the equations for η^r, its magnitude and direction. They are

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta s} = \varepsilon^r_{.s}\eta^s + \omega^r_{.s}\eta^s, \tag{3.12}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = e\eta\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n, \tag{3.13}$$

$$\frac{\delta\mu^r}{\delta s} = \varepsilon^r_{.s}\mu^s - e\mu^r\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n + \omega^r_{.s}\mu^s, \tag{3.14}$$

where

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(\lambda_{m,n} + \lambda_{n,m}), \quad \omega_{mn} = \frac{1}{2}(\lambda_{m,n} - \lambda_{n,m}). \tag{3.15}$$

Also equation (2.28) becomes

$$\frac{d}{ds}(g_{mn}\eta^m\zeta^n) = 2\varepsilon_{mn}\eta^m\zeta^n. \tag{3.16}$$

We take as before the quadric Q, and the torsion, which possesses with respect to it the geometrical properties described in 2.4, we shall call a *pure torsion*. Hence we see that a general torsion consists of three parts, a pure torsion, a rotation and a parallel propagation.

Since λ^r is a unit vector, equation (1.421) is true; consequently there exists a direction, μ^r, such that

$$\lambda^r_{,s}\mu^s = 0.$$

If we take a small vector η^r along this direction and examine how it is deformed by the congruence, we see that

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta s}=0.$$

Hence there is one and, in general, only one direction such that any small vector in this direction is altered neither in magnitude nor direction by the congruence to the first order of small quantities. When the congruence is geodesic, this direction coincides with the tangent to the curve C.

3.2. **Pure torsion; rotation; dilatation of a congruence.** — We have said that a torsion is pure when

$$\omega_{mn}=0. \tag{3.21}$$

It follows from 1.4 that these equations are the conditions that the congruence may be normal and geodesic. Therefore we conclude that:

The necessary and sufficient conditions that the torsion of a congruence be pure are that the congruence be normal and geodesic.

In this particular case, we have

$$\varepsilon_{mn}\lambda^n=0. \tag{3.22}$$

Therefore the equations in 2.4 for the principal axes of the quadric Q are satisfied by

$$\mu^r=\lambda^r,\quad \theta=0;$$

that is, λ^r is now a principal axis of Q, and we have $N-1$ directions normal to λ^r, which are not twisted and have stationary values for their elongations.

Let us next find the conditions that the torsion may reduce to a rotation. These may be written

$$2\varepsilon_{mn}=\lambda_{m,n}+\lambda_{n,m}=0, \tag{3.23}$$

so that the curves of the congruence are the paths of a motion [1]. Also, using (1.42), we have

$$\lambda_{m,n}\lambda^n=0,$$

and the congruence is geodesic. Conversely we can show that if the curves of a geodesic congruence are paths of a motion, then (3.23) are true. For, under these circumstances, there must exist an invariant φ such that the vector,

$$\xi^r=\varphi\lambda^r,$$

[1] EISENHART, loc. cit., pp. 233-234.

satisfies Killing's equations; that is,

(3.24) $$\xi_{m,n} + \xi_{n,m} = \varphi(\lambda_{m,n} + \lambda_{n,m}) + \varphi_{,m}\lambda_n + \varphi_{,n}\lambda_m = 0.$$

Multiplying (3.24) by λ^n, we find that

$$e_\lambda \varphi_{,m} + \frac{d\varphi}{ds}\lambda_m = 0.$$

If we multiply this last equation by λ^m, it follows that $\frac{d\varphi}{ds}$ is zero; that is, $\varphi_{,m}$ is also zero, and (3.23) is an immediate consequence, which proves our result.

The necessary and sufficient conditions that the torsion of a congruence reduce to a rotation are that the congruence be geodesic and that its curves form the paths of a motion.

In order that the torsion may be zero, that is, that the congruence may propagate each vector η^r parallelly, it is necessary and sufficient that

(3.25) $$\lambda_{r,s} = 0.$$

The congruence is then parallel.

We define the *dilatation* $\Delta\delta s$ *of a congruence* as in 2.6, and

(3.26) $$\Delta = \lambda^r_{,r}.$$

Let us call the quantity Δ the *space-rate of dilatation.*

The space-rate of dilatation of a congruence is equal to the divergence of the tangent vector λ^r.

3.3. **Principal axes of torsion.** — We know that the small vectors, whose elongations have stationary values, are along the principal axes of the quadric Q. These directions satisfy the equations

(3.31) $$\varepsilon^r_{.s}\mu^s = \theta\mu^r,$$

and we easily see that under the torsion they merely undergo the rotation and the parallel translation. We shall call these directions the *absolute principal axes.*

Let us now take a hyperplane through O, and let its equation be

(3.32) $$\omega_s\eta^s = 0.$$

The directions in this hyperplane, for which the elongations are stationary, we shall call the *principal axes relative to the hyperplane.* They are the principal axes of the section of Q by the hyperplane. We shall now find their equations.

In order that μ^r may be a principal direction of this section, every direction which is conjugate to μ^r with respect to Q and perpendicular to ω^r, must at the same time be perpendicular to μ^r. Hence, for all vectors η^r satisfying

$$\varepsilon_{rs}\eta^r\mu^s = 0$$

and

$$\omega_r\eta^r = 0,$$

we must have

$$\mu_r\eta^r = 0.$$

In addition,

$$\omega_s\mu^s = 0.$$

Therefore we have

$$(3.33) \qquad \begin{aligned} (\varepsilon_{rs} - \theta g_{rs})\mu^s - \varphi\omega_r = 0, \\ \omega_s\mu^s = 0, \end{aligned}$$

and θ must be a root of the equation

$$(3.34) \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_{rs} - \theta g_{rs}, & \omega_r \\ \omega_s, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

These equations give the $N-1$ directions required. Also, since these directions are both orthogonal and conjugate with respect to Q, equation (3.16) shows that to the first order they remain orthogonal under the torsion.

The principal axes relative to the normal hyperplane are of special interest since they form with λ^r an orthogonal ennuple. We shall call them the *normal principal axes*. These directions are given by equations (3.33) where we replace ω_r by λ_r; but these are exactly the equations defining the congruences canonical with respect to the congruence λ^r, given by RICCI [1].

Ricci's canonical directions are therefore the normal principal axes.

Another interpretation can be given to the canonical directions. For these directions

$$(3.35) \qquad \varepsilon^{r}_{.s}\mu^s = \theta\mu^r + \varphi\lambda^r.$$

Now $\varepsilon^{r}_{.s}\mu^s$ is the vector along which η^r is twisted by the pure torsion. Hence these directions are not twisted by the pure torsion out of the two-spaces determined by themselves together with λ^r, and we have, by (3.14),

$$(3.36) \qquad \frac{\delta\mu^r}{\delta s} = \omega^{r}_{.s}\mu^s + \varphi\lambda^r.$$

(1) EISENHART, loc. cit., p. 125; LEVI-CIVITA, loc. cit., pp. 278-282.

Ricci's canonical directions are the directions perpendicular to λ^r which are not twisted out of the two-spaces containing them and λ^r under the pure torsion alone.

If the congruence is normal and geodesic, the torsion is wholly pure, and λ^r is now one of the principal axes of Q. Hence we see, either geometrically or from the fact that φ is now zero, that the canonical directions are the remaining $N-1$ principal axes of Q.

Therefore, for a normal and geodesic congruence, the canonical directions are those directions which are not twisted by the congruence but are propagated parallelly to the first order along each curve of the congruence.

This result follows immediately from equations (3.36).

3.4. **Focal directions of a congruence.** — Let $\bar{O}$ be any point in the neighbourhood of O, and let $\bar{\lambda}^r$ be the unit tangent vector to the curve of the congruence through $\bar{O}$. As before, we denote by η^r the infinitesimal vector, $O\bar{O}$, and by μ^r the unit vector in this direction. The parallel at O to the vector $\bar{\lambda}^r$ at $\bar{O}$ is, to the first order, the vector $(\lambda^r + \lambda^r_{,s}\eta^s)$. If this vector lies in the two-space containing λ^r and μ^r, we shall say that the direction μ^r is a *focal direction.*

When the congruence is one of straight lines in Euclidean three-space and the direction μ^r has the property above described, the straight lines through O and $\bar{O}$ will lie in the same plane and will therefore meet. Hence in this particular case our definition of the focal directions is the same as that usually given for such a congruence.

From our definition, the conditions that μ^r be a focal direction are that μ^r should satisfy the equations

$$\lambda^r_{,s}\mu^s = \theta\mu^r + \varphi\lambda^r. \tag{3.41}$$

We shall show that in every hyperplane through O there are $N-1$ focal directions. Let

$$\omega_s\eta^s = 0 \tag{3.42}$$

be the equation of a hyperplane through O. Then, if μ^r is a focal direction in this hyperplane, it will satisfy simultaneously the equations (3.41) and (3.42); that is, θ must be a root of the determinantal equation

$$\begin{vmatrix} \lambda_{r,s} - \theta g_{rs}, & \lambda_r \\ \omega_s & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.43}$$

Since this has $N-1$ roots, we see that in general there are $N-1$ focal directions in the hyperplane (3.42), which proves our result.

We shall call the focal directions of the normal hyperplane the *normal focal directions.* They are given by the equations (3.41) and (3.42), where ω_s is equal to λ_s. If μ^r is a normal focal direction, we obtain, on multiplying (3.41) by λ_r, $\varphi = 0$. Hence the normal focal directions satisfy the equations

(3.411) $$\lambda^r_{,s}\mu^s = \theta\mu^r.$$

The determinantal equation,

$$|\lambda_{r,s} - \theta g_{rs}| = 0,$$

has N roots, one of which is zero. The zero root, in conjunction with (3.411), gives the unique vector of 3.1, along which small vectors are altered neither in magnitude nor direction, whilst the remaining $N-1$ roots give the normal focal directions.

Let us now find the conditions that the normal focal directions be mutually orthogonal. They will form an orthogonal ennuple with the congruence at every point.

Let μ^r and ν^r be two of the normal focal directions. Then, multiplying (3.411) by ν_r, we see that

$$\lambda_{r,s}\nu^r\mu^s = 0;$$

that is, μ^r, ν^r are conjugate directions of the quadric Q. Therefore, when the normal focal directions are orthogonal, they are the principal axes of the section of Q by the normal hyperplane and coincide with the normal principal axes of torsion.

These normal principal axes are given by the equations

(3.44) $$\varepsilon^r_{.s}\mu^s = \theta\mu^r + \varphi\lambda^r.$$

Hence the conditions we seek are that the equations (3.411) and (3.44) should be satisfied by the same $N-1$ vectors in the normal hyperplane. The values of θ in the two equations are seen to be the same, namely, $e\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n$; and so, for these $N-1$ vectors, we have

(3.441) $$\omega^r_{.s}\mu^s = -\varphi\lambda^r.$$

Consequently, if η^r and ζ^r are any two vectors perpendicular to λ^r,

$$\omega^r_{.s}\eta^s = K\lambda^r,$$

and therefore

(3.45) $$\omega_{mn}\eta^m\zeta^n = 0,$$

which, from 1.4, are the conditions that the congruence be normal. Conversely, if the congruence is normal, (3.441) is true for all vectors μ^r, perpendicular to λ^r, and (3.411), (3.44) are satisfied by the same set of normal vectors. Thus we have the theorem:

The necessary and sufficient condition that the normal focal directions be mutually orthogonal is that the congruence be normal, and these directions then coincide with Ricci's canonical directions.

Let us examine how the focal directions are twisted by the congruence. From the equations (3.14) and (3.41), we see that for these directions

$$\frac{\delta\mu^r}{\delta s} = A\mu^r + B\lambda^r. \tag{3.46}$$

Therefore a focal direction is not twisted out of the two-space containing it and λ^r, and this is a characteristic property. When the focal direction is also normal,

$$\frac{\delta\mu^r}{\delta s} = 0. \tag{3.461}$$

Hence the normal focal directions are not twisted by the congruence at O *but are propagated parallelly along the curve of the congruence.*

3.5. **Focal two-spaces of a congruence.** — We shall call a *focal two-space of the congruence* a two-space through λ^r such that every vector in it is a focal direction; and let us now find conditions necessary for the existence of such two-spaces.

Let ν^r be a unit vector perpendicular to λ^r. If the two-space containing λ^r and ν^r is a focal two-space, then, for all vectors μ^r in it,

$$\lambda^r_{,s}\mu^s = \theta\mu^r + \varphi\lambda^r. \tag{3.51}$$

Hence, putting

$$\mu^r = A\lambda^r + B\nu^r, \tag{3.52}$$

we see that

$$\lambda^r_{,s}(A\lambda^s + B\nu^s) = (A\theta + \varphi)\lambda^r + B\theta\nu^r, \tag{3.511}$$

for all values of the ratio A/B. Multiplying this equation by λ_r, it follows that the coefficient of λ^r is zero; therefore

$$\lambda_{r,s}\nu^s = \alpha\nu_r, \tag{3.53}$$

and

$$\lambda_{r,s}\lambda^s = \beta\nu_r. \tag{3.531}$$

This last equation shows that ν^r is the principal normal of the curve of the congruence and β is its first curvature. If the congruence is not geodesic, β is not zero. Equations (3.53) and (3.531) are then consistent only if

$$\lambda_{r,s}\lambda^s_{,t}\lambda^t = \alpha\lambda_{r,s}\lambda^s, \tag{3.54}$$

which must be satisfied if a focal two-space is to exist. When it is satisfied, the two-space containing the tangent and principal normal of the curve is a focal two-space.

If the congruence be geodesic, then β is zero, and the focal two-spaces if they exist, will be given by the equations (3.53). But these equations are exactly those defining the normal focal directions of the congruence.

Therefore, for a geodesic congruence, there are N — 1 *focal two-spaces, namely, those containing* λ^r *and the* N — 1 *normal focal directions of the congruence.*

We have the interesting result that in a geodesic congruence the intersections of the focal two-spaces by any hyperplane give the focal directions of this hyperplane.

If, in addition to being geodesic, the congruence is normal, then the normal focal directions are orthogonal and coincide with the canonical directions. Also we may say that two-spaces through λ^r are orthogonal when the two vectors of the two-spaces, which are perpendicular to λ^r, are also orthogonal.

The focal two-spaces of a normal and geodesic congruence are mutually orthogonal, and contain the canonical directions of the congruence.

3.6. **Another type of torsion.** — Instead of taking equal distances along the curves C and $\overline{C}$ as in 3.1, we can set up a correspondence between these curves such that the vector η^r always remains perpendicular to λ^r, and in this way we obtain another type of torsion for a congruence [1].

The equations for η^r under the most general correspondence are given in 2.2. Now let us choose the parameter t such that on C it equals the arc s of C, and at the same time makes η^r always orthogonal to λ^r.

If ξ is the magnitude of ξ^r, we have

$$\xi^r = \xi\lambda^r, \quad \xi^r_{,s} = \xi\lambda^r_{,s} + \frac{\partial\xi}{\partial x^s}\lambda^r; \tag{3.61}$$

[1] Such a correspondence has been discussed by J. Dubourdieu, *Sur les congruences des courbes.* « Rend. R. Acc. Lincei, febbraio 1927, pp. 265-271.

and, since $t = s$ on the curve C,

(3.611) $$\xi = 1, \quad \frac{d\xi}{ds} = 0,$$

along C. Also we must have along C

(3.62) $$\lambda_{r,}\eta^r = 0,$$

for all vectors η^r, which are initially perpendicular to λ^r. Hence denoting by $\varkappa$ the first curvature and by ρ^r the first normal of C,

(3.621) $$\lambda_r \frac{\delta\eta^r}{\delta s} = -\varkappa\rho_r\eta^r.$$

Combining (3.621), (3.61), and (2.23), we see that

$$\left(e_\lambda \frac{\partial\xi}{\partial x^s} + \varkappa\rho_s\right)\eta^s = 0$$

for all values of η^r, which are perpendicular to λ^r. It follows that

$$e_\lambda \frac{\partial\xi}{\partial x^s} + \varkappa\rho_s = \theta\lambda_s$$

from which we have that $\theta = \frac{d\xi}{ds} = 0$; consequently,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^s} = -e_\lambda\varkappa\rho_s.$$

Therefore, finally, our formulae for the vector η^r becomes

(3.63) $$\frac{\delta\eta^r}{\delta s} = \varepsilon^r_{.s}\eta^s + \omega^r_{.s}\eta^s - e_\lambda\varkappa\rho_s\eta^s\lambda^r.$$

This correspondence is suitable for discussing only the torsion of vectors perpendicular to λ^r, and we shall restrict η^r in this way. The formulae for the rate of change of the magnitude and direction of η^r become

(3.64) $$\frac{d\eta}{ds} = e\eta\varepsilon_{mn}\mu^m\mu^n,$$

(3.65) $$\frac{\delta\mu^{r'}}{\delta s} = \varepsilon^r_{.s}\mu^s + \omega^r_{.s}\mu^s - e\mu^r e_{mn}\mu^m\mu^n - e_\lambda\varkappa\rho_s\mu^s\lambda^r.$$

Also equation (2.28) becomes

(3.66) $$\frac{d}{ds}(g_{mn}\eta^m\zeta^n) = 2\varepsilon_{mn}\eta^m\zeta^n.$$

We can therefore conclude that, as regards change in the magnitudes and angles of vectors perpendicular to λ^r, this torsion has exactly the same effect as the torsion defined in 3.1. Hence all the results already established for normal vectors are also true for this type of torsion.

We note that if the congruence is geodesic, $\varkappa = 0$, and the two types of torsion are exactly equivalent for all vectors at the point O.

Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano [1].

Memoria di CARLO ROSATI (a Pisa).

Sunto. - *In questa Memoria, proseguendo le sue ricerche sulla teoria delle corrispondenze, l'A. stabilisce alcune proprietà delle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica* C. *Partendo poi da alcune ipotesi di permutabilità sul gruppo* G *delle corrispondenze di* C, *studia la struttura di tale gruppo, in relazione ai numeri base delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche, e quella del gruppo* Γ *costituito dalle schiere di trasformazioni birazionali in sè della varietà di* JACOBI V *inerente a* C.

È noto che le trasformazioni birazionali in sè della varietà di JACOBI V_p relativa ad una curva C del genere p, o di una qualsiasi varietà abeliana di dimensione p, si distribuiscono in *schiere* continue ∞^p non aventi a due a due alcuna trasformazione comune, e che il prodotto in un ordine assegnato di due trasformazioni variabili in due schiere (o nella medesima schiera) varia pure in una schiera. La totalità delle schiere può dunque concepirsi come un gruppo Γ, il quale o è finito o è infinito discontinuo. Se la curva C non possiede che corrispondenze a valenza, Γ è il gruppo ciclico del 2° ordine costituito dalle due schiere di trasformazioni ordinarie di 1ª e di 2ª specie; si hanno in Γ schiere di trasformazioni *singolari* soltanto quando C possiede corrispondenze *singolari*. In una Memoria del 1921 [2] ho dimostrato che, data sopra una curva C una corrispondenza singolare T ad equazione minima irriducibile, all'*ordine* $O(T)$, cioè all'insieme delle corrispondenze che sono funzioni razionali intere di T, risponde su V_p un gruppo abeliano Γ', sottogruppo di Γ, il quale ammette una *base finita*, cioè un numero finito di schiere, tali che i prodotti delle loro potenze generano ad una ad una tutte le schiere di Γ'.

---

[1] Gli enunciati dei principali risultati di questa ricerca furono comunicati all'Accademia dei Lincei nel giugno 1927. Vedasi: C. ROSATI, *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano*, (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. V, serie 6ª, giugno 1927).

[2] C. ROSATI, *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica*, (« Annali di Matematica », serie III, tomo XXXI, p. 37).

Se quindi si suppone che V_p sia *pura*, cioè priva di sistemi regolari riducibili, col variare dell'ordine $O(T)$, si ottiene la distribuzione delle schiere di Γ in sottogruppi Γ'; e le proprietà che ho stabilito per gli ordini di corrispondenze verranno a riflettersi in proprietà dei sottogruppi Γ', riguardanti il numero delle loro schiere generatrici, il modo del loro intersecarsi, ecc. Ciò ho ottenuto in base al teorema di DIRICHLET sulle unità dei corpi algebrici, e credo che anteriormente non vi sia stato altro esempio di applicazione della teoria dei numeri algebrici allo studio delle funzioni abeliane (3).

Nel caso particolare in cui le corrispondenze della curva C sono a due a due permutabili, avviene il fatto notevolissimo che *le schiere di trasformazioni birazionali in sè di* V_p *costituiscono un unico gruppo abeliano* Γ, *del quale può assegnarsi una base finita.* Sebbene questa proprietà possa dedursi (sempre a norma del risultato generale stabilito nella mia Memoria) applicando all'insieme delle corrispondenze della curva C il noto teorema della teoria delle algebre secondo cui un'algebra razionale, se è primitiva e commutativa, è potenziale (4), pure ho creduto utile di darne una dimostrazione diretta. E ciò ho fatto nel § VI di questa Memoria, partendo anzi dall'ipotesi, *a priori* più larga, della permutabilità del gruppo G delle omografie immagini delle corrispondenze (*gruppo di moltiplicabilità di* V_p).

Il metodo qui seguito, oltre il vantaggio di dare il risultato nella sua forma più precisa, ha anche l'altro di porgere l'occasione di enunciare proprietà che hanno già importanza di per sè; come l'introduzione dell'indice di permutabilità di due omografie, la nozione di corrispondenze direttamente e inversamente permutabili, la determinazione del numero delle corrispondenze indipendenti permutabili con una involuzione irrazionale, ecc.

Altro risultato che mi sembra di qualche rilievo è il seguente.

È noto che due corrispondenze T, T^{-1} l'una inversa dell'altra posseggono due gruppi di *valenze* immaginari coniugati, e che una valenza di T e l'immaginaria coniugata di T^{-1} sono associate a sistemi lineari d'integrali abeliani di 1ª specie della stessa dimensione, ma generalmente distinti. Nel § III (n.° 9) dimostro che condizione necessaria e sufficiente perchè per ogni coppia di tali valenze i sistemi suddetti coincidano, o, come dicesi, perchè T e T^{-1} siano

(3) Nella Memoria di S. LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties*, (« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 22, n.° 4, 1921, p. 439), comparsa contemporaneamente alla mia, trovasi dimostrata la proprietà analoga per le varietà abeliane.

(4) Vedi l'opera di SCORZA, *Corpi numerici e Algebre*. (Messina, Principato, 1921), parte II, p. 404.

a valenze sovrapposte, è che le corrispondenze stesse siano permutabili. Nel § V vengono studiate le curve su cui la detta circostanza si verifica per ogni coppia di corrispondenze inverse l'una dell'altra: proprietà caratteristica di tali curve è che su di esse le corrispondenze simmetriche costituiscono un ordine. Le curve medesime contengono dunque come casi particolari quelle, di cui sopra si è discorso, le cui varietà di JACOBI sono a gruppo di moltiplicabilità abeliano.

Infine (§ VII) faccio sulla varietà V_p l'ipotesi meno restrittiva della permutabilità del gruppo Γ, anzichè del gruppo di moltiplicabilità G, e ne traggo le conseguenze.

§ I. Omografie permutabili.

1. Indichiamo con A, B,... delle matrici quadrate dello stesso ordine n e con (A), (B),... le corrispondenti omografie dello spazio S_{n-1} ([5]).

Se le omografie (A) e (B) sono permutabili, si avrà l'uguaglianza

$$BA = \varepsilon AB \tag{1}$$

in cui ε è un conveniente fattore di proporzionalità. Escluso il caso in cui l'omografia prodotto delle date è nulla, nel quale ε è indeterminato, è facile provare che il fattore stesso dipende solo dalle date omografie, cioè non muta al variare delle matrici associate alle omografie medesime. Infatti se A_1, B_1 sono due nuove matrici corrispondenti alle omografie (A), (B), si avrà $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \mu B$, e quindi

$$B_1 A_1 = \mu B \cdot \lambda A = \lambda\mu BA = \lambda\mu\varepsilon AB = \varepsilon \cdot \lambda A \cdot \mu B = \varepsilon A_1 B_1 .$$

Si ha ora la proprietà:

Se il prodotto delle due omografie permutabili è un' omografia non nulla, nè pseudonulla, il fattore ε è una radice d' unità.

([5]) Avvertiamo che qui si adottano le locuzioni e le notazioni in uso nel calcolo delle matrici. (Vedasi ad es. l'opera di SCORZA citata in (4), parte II, cap. I; ed anche MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Teubner, Leipzig, 1899, § 2). Ricordiamo in particolare che una matrice dicesi ***nulla*** se sono nulli tutti i suoi elementi; ***pseudonulla*** se non è nulla, ma è nulla qualche sua potenza; ***regolare*** se il suo polinomio caratteristico è a divisori elementari lineari, od anche se la sua equazione minima ammette radici tutte semplici; ***irregolare*** se tale circostanza non si verifica. Queste denominazioni, applicate alle matrici, si trasportano poi alle relative omografie. Un' omografia sarà poi regolare o irregolare se i suoi spazi fondamentali appartengono o no allo spazio ambiente.

È noto infatti che se A, B sono due matrici quadrate dello stesso ordine, nei prodotti AB, BA sono uguali le somme s_1, s_2,... dei minori principali dei vari ordini ([6]). Ma per l'ipotesi fatta, le matrici AB, BA non sono pseudonulle; dunque una almeno delle dette somme è diversa da zero. Se tale è s_k, in virtù della (1) si avrà $s_k = \varepsilon^k s_k$, e quindi $\varepsilon^k = 1$.

Osservazione. La condizione che la matrice AB (e quindi anche la BA) non sia pseudonulla è essenziale per la validità del precedente risultato.

Infatti se A, B, X indicano matrici dello stesso ordine, è noto che l'equazione $AX = XB$ ammette soluzioni quando e solo quando A e B hanno almeno una radice caratteristica comune ([7]). Presa allora una matrice B la quale possegga due radici caratteristiche ρ, $\rho\varepsilon$ il cui rapporto è un numero *arbitrario* ε, le matrici B, εB hanno comune la radice caratteristica $\rho\varepsilon$, onde esisterà una matrice A tale che $BA = A\varepsilon B = \varepsilon AB$.

2. Nell'ipotesi che le due omografie permutabili diano per prodotto una omografia nè nulla, nè pseudonulla, all'esponente r cui appartiene la radice d'unità ε $\left(\text{ed anche la radice } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ diamo il nome di *indice di permutabilità* delle due omografie.

Quando una delle omografie date è non degenere, l'indice di permutabilità assume un importante significato geometrico, che occorre mettere in luce per le deduzioni che dovremo fare in seguito.

Supposto che ad es. l'omografia (B) sia non degenere, indicando con B^{-1} la matrice *reciproca* di B e con I la matrice identica, si avrà l'uguaglianza

$$(2)\qquad B^{-1}(A-\rho I)^k B = [B^{-1}(A-\rho I)B]^k = (B^{-1}AB-\rho I)^k =$$
$$= \left(\frac{1}{\varepsilon}A-\rho I\right)^k = \frac{1}{\varepsilon^k}(A-\rho\varepsilon I)^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

valida qualunque sia il coefficiente ρ. Si osservi ora che, non essendo la matrice AB nè nulla nè pseudonulla, anche la matrice A non è nè nulla nè pseudonulla. Invero, se fosse $A = 0$ si avrebbe $AB = 0$; se fosse $A^l = 0$ $(l > 1)$,

---

([6]) Cfr. ad es. E. Pascal, « *I determinanti...* », Manuale Hoepli, 1897, p. 69.

([7]) La necessità della condizione è dimostrata in Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, (« Journal für die reine und angewandte Matematik », Bd. LXXXIV, 1878, p. 28); la sufficienza in Sylvester, *Sur l'équation en matrices* px = xq, (« Comptes Rendus », vol. IC, 1884, 2° sem., pp, 67-70, 115-116). Vedasi anche: Cecioni, *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici*, (« Annali della R. Scuola normale superiore », Pisa, 1909) ove è determinata inoltre, per via razionale, la soluzione generale dell'equazione.

si avrebbe, in forza della (1), $(AB)^l = \varepsilon^{\frac{l(l-1)}{2}} A^l B^l = 0$. Dunque l'equazione caratteristica di A, anche nel caso in cui (A) è degenere, ammette almeno una radice $\neq 0$. Se ρ_1 è una radice caratteristica non nulla di A, dalla (2) si ricava che anche $\rho_1\varepsilon$ è radice caratteristica di A e che gli spazi singolari delle omografie degeneri $(A - \rho_1 I)$, $(A - \rho_1 I)^2, \ldots$ sono mutati dall'omografia (B) negli spazi singolari delle omografie degeneri $(A - \rho_1 \varepsilon I)$, $(A - \rho_1 \varepsilon I)^2, \ldots$. È poi manifesto che se (A) è degenere, cioè se $\rho = 0$ è radice caratteristica di A, l'omografia (B) muta ciascuno in sè gli spazi singolari delle omografie (A), $(A)^2, \ldots$.

Se le due omografie permutabili (A), (B) sono entrambe non degeneri, è chiaro che il prodotto è un'omografia nè nulla, nè pseudonulla e la precedente considerazione può farsi per entrambe le omografie: onde si ha il teorema:

Se due omografie non degeneri permutabili hanno l'indice r *di permutabilità, gli spazi fondamentali di una qualunque di esse possono distribuirsi in gruppi di* r *ciascuno, in guisa che gli spazi di ogni gruppo hanno la stessa dimensione, la stessa molteplicità, le stesse caratteristiche e sono permutati circolarmente dall'altra.*

OSSERVAZIONE I. Particolarmente importante è il caso $r = 1$, nel quale, non solo le omografie, ma anche le matrici ad esse associate sono permutabili. In tal caso, supposto che una delle omografie sia non degenere, questa muta ciascuno in sè gli spazi fondamentali dell'altra. Vedremo nel numero seguente come, inversamente, questa condizione, aggiunta all'ipotesi della regolarità delle due omografie, porti alla permutabilità delle due matrici.

OSSERVAZIONE II. Se le omografie permutabili (A), (B) il cui prodotto non è l'omografia nulla, sono reali o, in particolare, razionali, nella (1) il fattore ε deve essere reale o razionale. Supposto inoltre che l'omografia prodotto non sia nemmeno pseudonulla, dovrà essere addirittura $\varepsilon = \pm 1$. Per due omografie reali, il cui prodotto non è nè nullo nè pseudonullo, in particolare per due omografie reali non degeneri, si hanno dunque a distinguere due soli casi di permutabilità, secondochè $\varepsilon = \pm 1$, cioè secondochè l'indice di permutabilità ha il valore 1 o il valore 2.

§ II. **Matrici permutabili.**

3. Si dimostri il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due matrici regolari A, B *siano permutabili, è che gli spazi fondamentali dell'omografia* (A) *seghino* *quelli dell'omografia* (B) *in un gruppo di spazi (indipendenti e) appartenenti allo spazio ambiente.*

Siano A, B due matrici regolari e si indichino con $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_r$ le radici caratteristiche di A e con $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ i corrispondenti spazi fondamentali dell'omografia (A); con $\rho'_1 \rho'_2 \dots \rho'_s$ le radici caratteristiche di B e con $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$ i corrispondenti spazi fondamentali dell'omografia (B). Ammettiamo che sia $AB = BA$, e consideriamo dapprima il caso che una delle matrici, ad es. la B, sia a determinante non nullo. Poichè le omografie (A), (B) sono permutabili con l'indice 1 di permutabilità, l'omografia non degenere (B) muterà in sè ogni spazio α_i (n.° 2, Osserv. I); ed essendo (B) regolare, l'omografia indotta da B in α_i sarà pure regolare. Segue che ciascuno degli spazi α_i sega il gruppo degli spazi β_j in un gruppo dí spazi indipendenti e appartenenti ad α_i. Ma per la regolarità di (A) gli spazi $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ appartengono all'ambiente S_{n-1}; dunque le intersezioni degli spazi α_i coi β_j formano un gruppo di spazi indipendenti e appartenenti a S_{n-1}. Se poi entrambe le matrici sono a determinante nullo, si ponga $B_1 = B + tI$, scegliendo t in guisa che B_1 risulti a determinante non nullo. Poichè B_1 è pure regolare e permutabile con A, e poichè gli spazi fondamentali di (B_1) coincidono con quelli di (B), anche in questo caso la proprietà è verificata.

Ammettiamo inversamente che gli spazi α_i seghino i β_j in un gruppo di spazi (indipendenti e) appartenenti a S_{n-1}, e si indichi con $(\alpha_i\beta_j)$ l'intersezione, quando esista, di α_i con β_j, e con l il numero di queste intersezioni. Sia ora $C = \lambda A + \mu B$ una matrice qualsiasi del fascio individuato da A e B. Poichè ogni spazio $(\alpha_i\beta_j)$ è un luogo di punti uniti o di punti singolari per l'omografia (C), si deduce intanto che la matrice C, qualunque siano i coefficienti λ, μ è regolare. È facile ora provare che, escludendo per il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ un numero finito di valori $\left(\text{al massimo } \frac{l(l-1)}{2}\right)$, le matrici A e B risultano funzioni razionali di C. Se infatti per ogni coppia $(\alpha_i\beta_j)$, $(\alpha_h\beta_k)$ delle suddette intersezioni poniamo la condizione

$$(a) \qquad \frac{\lambda}{\mu} \neq \frac{\rho'_k - \rho'_j}{\rho_i - \rho_h},$$

(la quale significhi $\lambda \neq 0$ nel caso $j = k$, $\mu \neq 0$ nel caso $i = h$), è chiaro che l'espressione $\lambda\rho_i + \mu\rho'_j$ in corrispondenza agli l spazi $(\alpha_i\beta_j)$ assume l valori distinti. E poichè questi valori sono le radici dell'equazione caratteristica di C associate agli spazi $(\alpha_i\beta_j)$ di punti uniti o singolari per l'omografia (C), segue che gli spazi $(\alpha_i\beta_j)$ sono addirittura gli spazi fondamentali di (C). Gli spazi fondamentali delle omografie (A) e (B) si ottengono dunque congiungendo opportunamente quelli di (C), ed allora, per una proprietà nota [8], le matrici A e B risultano funzioni razionali della stessa matrice C; del che segue che A e B sono permutabili.

Osservazione I. Nel teorema dimostrato è contenuta la seguente proprietà, con cui resta invertita la considerazione dell'Osserv. I del numero precedente:

Se di due omografie regolari una è non degenere e muta ciascuno in sè gli spazi fondamentali dell'altra, le matrici associate ad esse sono permutabili.

Osservazione II. Un altro risultato, contenuto nelle precedenti considerazioni, e che occorre rilevare in modo esplicito, è il seguente:

Se due matrici A, B *dello stesso ordine sono regolari e permutabili, ogni matrice del loro fascio è regolare, ed esistono nel fascio stesso infinite matrici di cui le date sono funzioni razionali.*

A complemento di questo, si osservi che se le matrici A, B sono definite nel corpo complesso, ogni matrice C del loro fascio di cui le date sono funzioni razionali appartiene in generale allo stesso corpo. Nel caso in cui A e B siano reali o, in particolare, razionali, scegliendo per $\lambda\mu$ valori reali o razionali, anche C risulta reale o razionale.

Si osservi inoltre che le equazioni minime delle infinite matrici C corrispondenti alle coppie $(\lambda\mu)$ soddisfacenti alle (a) hanno tutte lo stesso grado l che è il numero delle intersezioni $(\alpha_i\beta_j)$, e si ha $l \leq rs$, essendo r ed s i gradi delle equazioni minime di A e di B. Se poi A e B sono reali e i coefficienti $\lambda\mu$ soddisfacenti alle (a) si assumono reali, poichè lo spazio $(\alpha_i\beta_j)$ è reale quando e solo quando sono reali gli spazi $\alpha_i\beta_j$, si deduce che il numero delle radici reali dell'equazione minima di C non supera il prodotto dei numeri analoghi per le matrici A e B.

§ III. **Corrispondenze permutabili.**

4. Corrispondenze direttamente e inversamente permutabili. — Coi simboli T, U,... indichiamo ora delle corrispondenze appartenenti ad una curva C del genere p ed anche le matrici formate dagli interi *caratteristici* delle

(8) C. Rosati, loc. cit. (2), § 2.

medesime [9], e con (T), (U),... denotiamo le omografie immagini delle corrispondenze stesse [10]. Diremo inoltre che una corrispondenza T è *regolare*, *irregolare*, *nulla*, *pseudonulla*, se tali attributi competono alla sua matrice caratteristica. Una corrispondenza T è regolare o irregolare secondochè i sistemi lineari d'integrali di 1ª specie associati alle sue valenze appartengono o no al sistema totale ∞^{p-1} degli integrali della curva. Una corrispondenza T è nulla quando è a valenza zero; è pseudonulla se non è a valenza zero ma è tale una sua potenza.

Se le omografie (T), (U) sono permutabili, si dovrà avere $TU = \varepsilon UT$ con ε razionale, cioè le corrispondenze TU e UT sono dipendenti. In virtù dell'Osserv. II del n.° 2, si ha che le corrispondenze TU, UT o sono nulle, o sono pseudonulle dello stesso grado, ovvero è $\varepsilon = \pm 1$. Si ha dunque la proprietà:

Se le corrispondenze TU, UT *sono dipendenti, dovrà essere verificata una delle alternative* [11]:

$$(TU)^k = (UT)^k = 0, \quad (k \geq 1) \tag{I}$$

$$TU = UT \neq 0, \tag{II}$$

$$TU = -UT \neq 0. \tag{III}$$

Due corrispondenze T, U per cui si ha $TU = UT = 0$, ovvero $TU = UT \neq 0$, si dicono *direttamente permutabili*, od anche, senz'altro, *permutabili*; due corrispondenze T, U per cui si ha $TU = -UT \neq 0$, si dicono *inversamente permutabili*.

5. Spesse volte la conoscenza di ulteriori condizioni a cui soddisfino due corrispondenze T, U aventi per immagini omografie permutabili, può decidere della permutabilità diretta o inversa delle corrispondenze stesse.

---

(9) Cioè le matrici ad elementi interi associate alle corrispondenze nella classica rappresentazione di Hurwitz. (Cfr. Hurwitz, *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenz-princip*, « Math. Annalen », Bd. 28, 1886).

(10) C. Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due*, (« Annali di Matematica », serie III, tomo XXV, 1915).

(11) Non è escluso che due corrispondenze T, U possano verificare contemporaneamente due delle condizioni. Sia ad es. A una corrispondenza irregolare la cui equazione minima $\psi(z) = 0$ abbia almeno due radici di diversa molteplicità. Indicando con $h_1 h_2 \dots h_t (t > 1)$ le molteplicità delle radici dell'equazione stessa, si avrà $\psi(z) = \varphi_1(z)^{h_1} \varphi_2(z)^{h_2} \dots \varphi_t(z)^{h_t}$, essendo $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z) \dots \varphi_t(z)$ polinomi a coefficienti interi. Se allora il prodotto $\varphi_1(A)\varphi_2(A) \dots \varphi_t(A)$ si spezza in due fattori, questi rappresentano due corrispondenze T, U per cui si ha contemporaneamente $TU = UT \neq 0$, $(TU)^k = (UT)^k = 0$ $(k > 1)$.

Siano ad es. T ed U due corrispondenze simmetriche. Le corrispondenze TU, UT sono allora l'una equivalente all'inversa dell'altra; se quindi TU e UT sono dipendenti e non a valenza zero, dovranno, com'è noto ([12]), essere o equivalenti o residue, e nel 1° caso TU è una corrispondenza simmetrica, nel 2° è emisimmetrica. Se T ed U sono emisimmetriche, vale la stessa considerazione; e considerazione analoga può farsi se l'una è simmetrica e l'altra è emisimmetrica, nel qual caso TU è equivalente a $-UT$. Dunque:

Se le corrispondenze T, U *sono entrambe simmetriche o entrambe emisimmetriche e i prodotti* TU, UT *sono dipendenti e non a valenza zero, le corrispondenze stesse sono direttamente o inversamente permutabili; nel 1° caso* TU *è simmetrica, nel 2° caso* TU *è emisimmetrica. L'opposto accade se delle due corrispondenze* T, U *l'una è simmetrica e l'altra è emisimmetrica* ([13]).

Di questo teorema è vero, com'è immediato, il reciproco.

6. Si osservi che se si verifica l'alternativa (I) del n.° 4, nella matrice TU si annullano tutte le somme dei minori principali dello stesso ordine, e se si verifica la (III) si annullano le somme dei minori principali di ordine dispari; in entrambi i casi è nulla la somma degli elementi in diagonale principale. Ora questa somma, per una nota formula di HURWITZ ([14]), è uguale alla somma degli indici della corrispondenza diminuita del numero dei punti uniti; e il suo annullarsi abbiamo altra volta espresso col dire che la corrispondenza stessa è *coniugata dell'identità*. Si ha dunque la proprietà:

Se i prodotti TU *e* UT *sono dipendenti e* TU *non è coniugata dell'identità, deve essere* $\mathrm{TU} = \mathrm{UT} \neq 0$.

([12]) ROSATI, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica*, Note I e II (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXII, 1913).

([13]) Ecco un esempio di corrispondenze inversamente permutabili. Si consideri una curva di genere $p = 2$ coi numeri base $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 1$. Nella configurazione relativa alla curva (cfr. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XLI, 1916; parte II, § 3) si ha una schiera rigata di *pseudoassi* (che può contenere o no infiniti *assi*), nella quale il sistema nullo fondamentale Λ induce un'involuzione ellittica J, i cui elementi doppi sono gli spazi fondamentali dell'omografia immagine della corrispoudenza emisimmetrica E. Le corrispondenze simmetriche che hanno per immagini involuzioni gobbe i cui assi sono le coppie di J sono inversamente permutabili con E, e due delle suddette corrispondenze simmetriche associate a due coppie armoniche di J sono fra loro inversamente permutabili.

([14]) HURWITZ, loc. cit. (9).

Di qui discende il seguente corollario che ci sarà utile in seguito:

Se le corrispondenze di una rete contenente l'identità hanno per immagini omografie a due a due permutabili, le corrispondenze stesse sono a due a due direttamente permutabili.

Siano infatti T, U due corrispondenze della rete. Se TU non è coniugata dell'identità, si ha $TU = UT \neq 0$. Se TU è coniugata dell'identità, ma non lo è una almeno delle corrispondenze date, ad es. la T, si considerino le corrispondenze T, $U' = U + I$. Queste hanno ancora per immagini omografie permutabili, e poichè $TU' = TU + T$ non è coniugata dell'identità, si avrà $TU' = U'T$, e quindi $TU = UT$. Se poi le corrispondenze TU, T, U sono tutte coniugate dell'identità, basta ripetere la considerazione per le corrispondenze $T' = T + I$, $U' = U + I$ e si trova ancora che $TU = UT$.

Sempre nell'ipotesi che TU e UT siano dipendenti, si supponga inoltre che una delle corrispondenze date, ad es. la U, sia non speciale. In tal caso, se TU fosse nulla o pseudonulla, anche la T sarebbe nulla o pseudonulla e quindi coniugata dell'identità. Se poi fosse $TU = -UT$, l'equazione caratteristica della matrice T ammetterebbe insieme ad ogni radice diversa da zero anche la contraria con la stessa molteplicità (n.° 2), e quindi T sarebbe ancora coniugata dell'identità. Dunque:

Se i prodotti TU, UT *sono dipendenti, la corrispondenza* U *è non speciale, e la* T *non è coniugata dell'identità, deve essere* $\mathrm{TU} = \mathrm{UT} \neq 0$.

7. Corrispondenze permutabili con una involuzione irrazionale. — I prodotti TU, UT siano dipendenti e T sia un'involuzione irrazionale di ordine n. Se la corrispondenza TU è a valenza zero, sarà $TU = UT = 0$; se non è a valenza zero si avrà la relazione

$$TU = \varepsilon UT$$

con ε razionale $\neq 0$. Da essa si deduce l'altra

$$T^2 U = \varepsilon T \cdot UT = \varepsilon^2 \cdot UT^2;$$

e sottraendo da questa la precedente moltiplicata per εn, si ottiene

$$(T - \varepsilon n I) TU = \varepsilon^2 U (T^2 - nT).$$

Ma, com'è noto, $T^2 - nT = 0$, dunque sarà $(T - \varepsilon n I) TU = 0$; e poichè TU non è a valenza zero, la $T - \varepsilon n I$ deve essere speciale; perciò, non essendo $\varepsilon = 0$, sarà $\varepsilon = 1$. Dunque:

Se i prodotti TU, UT *sono dipendenti e* T *è un'involuzione irrazionale, le corrispondenze* T *ed* U *sono direttamente permutabili.*

8. Si indichi ora con q il genere dell'involuzione T $(0 < q < p)$, con $R_{2(p-q)-1}$, R_{2q-1} gli *assi* della medesima, con λ il loro *coefficiente d'immersione* ([15]), e con μ il numero base per l'insieme delle corrispondenze della curva C. Vogliamo esprimere in funzione di λ, μ il numero delle corrispondenze indipendenti permutabili (direttamente) con l'involuzione T.

Si dica perciò H la rete delle corrispondenze permutabili con T, e K quella delle corrispondenze aventi per immagini omografie che mutano ciascuno in sè i due assi $R_{2(p-q)-1}$, R_{2q-1}. Poichè entrambe le reti H e K contengono le corrispondenze a ordinaria valenza, la corrispondenza generica delle medesime sarà non speciale. Se allora proveremo che ogni corrispondenza non speciale dell'una è contenuta nell'altra, potremo conchiudere che le due reti coincidono.

Sia X una corrispondenza non speciale della rete H, cioè tale che $TX = XT$. Per l'Osserv. del n.° 2, l'omografia non degenere (X) dovrà mutare in sè ciascuno degli spazi fondamentali R_{2p-q-1}, R_{2q-1} dell'omografia (T); dunque X è contenuta in K. Inversamente sia Y una corrispondenza non speciale della rete K ([16]); poichè l'omografia non degenere (Y) muta ciascuno in sè gli spazi $R_{2(p-q)-1}$, R_{2q-1}, l'omografia $(Y)^{-1}(T)(Y)$ sarà degenere ed avrà, come la (T), lo spazio $R_{2(p-q)-1}$ come luogo di punti singolari ed R_{2q-1} come luogo di punti uniti. Sarà dunque $(Y)^{-1}(T)(Y) = (T)$, cioè $(T)(Y) = (Y)(T)$; ne segue (n.° 7) che $TY = YT$, e quindi Y è contenuta in H.

Determiniamo ora la specie della rete K.

Nello spazio $S_{\mu-1}$ in cui sono rappresentate le corrispondenze della curva C, siano M_{l-1}, N_{m-1} le immagini delle reti *di 1ª e di 2ª specie* associate all'asse $R_{2(p-q)-1}$, ed M'_{m-1}, N'_{l-1} le immagini delle reti analoghe per l'asse R_{2q-1}; le due coppie sono congiunte da due spazi $S_{\mu-1-\lambda}$, $S'_{\mu-1-\lambda}$ che rappresentano le due reti di corrispondenze aventi per immagini omografie che mutano in sè rispettivamente $R_{2(p-q)-1}$ ed R_{2q-1}. La rete K sarà dunque rappresentata dall'intersezione di $S_{\mu-1-\lambda}$ con $S'_{\mu-1-\lambda}$; e poichè gli spazi M_{l-1}, M'_{m-1}, per il fatto che gli assi suddetti sono complementari, appartengono a $S_{\mu-1}$, segue che $S_{\mu-1-\lambda}$, $S'_{\mu-1-\lambda}$ si intersecano in un $S_{\mu-1-2\lambda}$. Dunque:

Le corrispondenze indipendenti permutabili con una involuzione irrazionale T *sono in numero di* $\mu - 2\lambda$, *essendo* μ *il numero base delle corri-*

([15]) Per questa nozione e per le altre richiamate in questo numero, vedasi: ROSATI, *Sui sistemi regolari d'integrali abeliani riducibili e sulle reti di corrispondenze ad essi associate*, (« Annali di Matematica », serie IV, tomo III, 1925-26).

([16]) Non possiamo qui invocare l'Oss. I del n.° 3, perchè nulla sappiamo circa la regolarità o meno di Y.

spondenze della curva C *e* λ *il coefficiente d'immersione dei sistemi regolari riducibili associati a* T.

Ne segue il corollario:

Condizione necessaria e sufficiente perchè i sistemi regolari riducibili associati a una involuzione irrazionale siano isolati, è che l'involuzione stessa sia permutabile con ogni corrispondenza appartenente alla curva.

9. Corrispondenze permutabili con le loro inverse. — Importante è il caso della permutabilità di una corrispondenza con la inversa. Si ha, a questo proposito, il teorema:

Se i prodotti TT^{-1}, $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}$ *di due corrispondenze l'una inversa dell'altra e non a valenza zero sono dipendenti, si ha* $\mathrm{TT}^{-1}=\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}\neq 0$ *e le corrispondenze* T, T^{-1} *sono regolari e funzioni razionali l'una dell'altra.*

È noto che se T non è a valenza zero, la corrispondenza simmetrica TT^{-1} possiede *valenze* tutte negative all'infuori di una eventualmente nulla ([17]); la TT^{-1} non è quindi coniugata dell'identità. Se dunque TT^{-1}, $T^{-1}T$ sono dipendenti, in virtù della 1ª proposizione del n.° 6, si avrà $TT^{-1}=T^{-1}T\neq 0$.

Indichiamo ora, per maggior chiarezza, con A, B le matrici caratteristiche delle corrispondenze T, T^{-1} e supponiamo dapprima che T, e quindi anche T^{-1}, siano non speciali. L'omografia (AB), immagine della corrispondenza simmetrica TT^{-1} è regolare ed ha gli spazi fondamentali reali, di dimensione dispari e *incidenti* agli spazi τ, $\bar{\tau}$ dei periodi: denotiamo tali spazi con $R_{2q_1-1},\ldots, R_{2q_t-1}$. Le matrici A e B, essendo fra loro permutabili, saranno permutabili anche con la matrice AB; ne segue (n.° 2, Osserv. I) che le omografie non degeneri (A) e (B) mutano ciascuno in sè gli spazi suddetti; e poichè in ognuno di essi l'omografia prodotto (AB) induce l'identità, le (A) e (B) indurranno in R_{2q_i-1} $(i=1, 2,\ldots, t)$ due omografie α_i, α_i^{-1}, l'una inversa dell'altra, ed aventi perciò gli stessi spazi di punti uniti. Proviamo ora che questi spazi sono addirittura fondamentali per le omografie (A) e (B), cioè che corrispondono a radici caratteristiche distinte delle matrici A e B.

Invero, se uno spazio fondamentale di α_i ed uno di α_k $(i\neq k)$ fossero associati alla medesima radice caratteristica θ della matrice A, anche per la B sarebbero associati alla medesima radice $\bar{\theta}$ (immaginaria coniugata di θ) ([18]);

([17]) ROSATI, loc. cit. (2), n.° 3.

([18]) Ciò in virtù della seguente proprietà: *Un punto* P *che sia unito per entrambe le omografie* (A) *e* (B) *deve corrispondere a radici caratteristiche immaginarie coniugate delle rispettive matrici* A *e* B.

Invero, dette $\theta\theta'$ queste radici, è chiaro che il punto P è unito (o singolare) per le omoe allora lo spazio che li congiunge sarebbe di punti uniti per entrambe le omografie (A) e (B) e quindi anche per l'omografia prodotto (AB), il che è assurdo. Le omografie (A), (B) hanno dunque comuni gli spazi fondamentali e ognuno di essi è associato a radici caratteristiche immaginarie coniugate delle matrici A e B; quando dunque sia assicurata la regolarità della matrice A, e quindi anche della B, sarà al tempo stesso dimostrato che le matrici A, B, e perciò anche le corrispondenze T, T^{-1} sono funzioni razionali l'una dell'altra [19]. Proviamo dunque che ogni spazio fondamentale di (A) non interseca il sostegno della stella coniugata.

Siano S_{q-1}, S_{2p-1-q} lo spazio di punti uniti e il sostegno della stella di iperpiani uniti corrispondenti alla radice caratteristica θ della matrice A e quindi alla immaginaria coniugata $\bar{\theta}$ della matrice B. Se θ è reale $(\theta = \bar{\theta})$, il numero q è pari $(q = 2q')$ e gli spazi suddetti sono reali, di dimensione dispari, incidenti agli spazi τ, $\bar{\tau}$ dei periodi e polari l'uno dell'altro rispetto al sistema nullo fondamentale Λ; per una proprietà nota, essi sono allora indipendenti. Se poi θ è complessa, si considerino gli spazi $\bar{S}_{q-1}$, $\bar{S}_{2p-1-q}$, immaginari coniugati dei precedenti, i quali sono ancora per le omografie (A), (B) spazio di punti uniti e sostegno della stella di iperpiani uniti associati alle radici caratteristiche $\bar{\theta}$, θ. Gli spazi S_{2p-1-q}, $\bar{S}_{2p-1-q}$ contengono rispettivamente gli spazi $\bar{S}_{q-1}$, S_{q-1} e questi sono i polari dei primi nel sistema nullo Λ [20]. Se allora S_{2p-1-q} intersecasse S_{q-1} in un S_{l-1} $(l \geq 1)$, e quindi $\bar{S}_{2p-1-q}$ intersecasse $\bar{S}_{q-1}$ in un $\bar{S}_{l-1}$, lo spazio R_{2l-1}, che congiunge S_{l-1}, $\bar{S}_{l-1}$, sarebbe comune allo spazio R_{2q-1}, congiungente S_{q-1}, $\bar{S}_{q-1}$, e allo spazio $R_{2(p-q)-1}$ intersezione di S_{2p-1-q}, $\bar{S}_{2p-1-q}$. Ma ciò è assurdo, essendo R_{2q-1}, $R_{2(p-q)-1}$ reali, incidenti agli spazi dei periodi e polari l'uno dell'altro nel sistema nullo Λ. Nel caso in cui le corrispondenze T, T^{-1} sono non speciali il teorema è dunque dimostrato.

Quando T, T^{-1} fossero speciali, si scelga un intero γ tale che la corrispondenza $U = T + \gamma I$ sia non speciale. Poichè, come sopra si è dimostrato,

---

grafie $(A + B)$, $(A - B)$ e corrispondente alle radici caratteristiche $\theta + \theta'$, $\theta - \theta'$ delle matrici $A + B$, $A - B$. Ma la matrice $A + B$, associata alla corrispondenza simmetrica $T + T^{-1}$, ammette radici caratteristiche tutte reali, e la matrice $A - B$, associata alla corrispondenza emisimmetrica $T - T^{-1}$, ammette radici caratteristiche immaginarie pure (all'infuori di una eventualmente nulla); dovrà dunque essere $\theta + \theta'$ reale e $\theta - \theta'$ immaginario puro, e quindi θ, θ' sono immaginari coniugati.

(19) Rosati, loc. cit. (2), n.° 5.

(20) Quest'affermazione è giustificata dalla relaziene $B = \Lambda A' \Lambda^{-1}$ esistente fra le matrici associate alle corrispondenze T e T^{-1}.

$TT^{-1} = T^{-1}T$, dovrà anche essere $UU^{-1} = U^{-1}U$; ma allora U, U^{-1} sono regolari e funzioni razionali l'una dell'altra, e perciò anche T, T^{-1} posseggono queste stesse proprietà.

OSSERVAZIONE I. Le considerazioni precedenti provano che per la permutabilità delle corrispondenze T, T^{-1} è condizione necessaria la coincidenza degli spazi fondamentali delle omografie immagini; e poichè, come si desume dalle considerazioni stesse, la coincidenza di tali spazi porta di conseguenza la regolarità di T e di T^{-1}, e quindi (n.° 3) la loro permutabilità, se ne deduce la sufficienza della condizione medesima. Ora, se si tien conto della relazione esistente fra le matrici associate a T e a T^{-1} (cfr. la nota ([20])) si vede che la condizione stessa si verifica quando e solo quando nell'omografia immagine di T lo spazio fondamentale associato a una qualsiasi radice caratteristica θ e il sostegno della stella fondamentale associata alla radice $\bar{\theta}$ sono polari l'uno dell'altro nel sistema nullo Λ; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una corrispondenza T *sia permutabile con la sua inversa* T^{-1} *è che nell'omografia immagine di* T *ogni spazio fondamentale sia mutato nel sostegno della stella coniugata dall'antireciprocità* $\mathrm{K}\Lambda$, *prodotto del coniugio* K *per il sistema nullo* Λ.

OSSERVAZIONE II. È nota la relazione esistente fra i due gruppi di valenze delle corrispondenze T, T^{-1}: le valenze di T^{-1} sono immaginarie coniugate di quelle di T; inoltre ogni valenza γ di T e la immaginaria coniugata $\bar{\gamma}$ di T^{-1} hanno la stessa *dimensione*, cioè sono associate a due sistemi lineari della stessa dimensione di integrali abeliani di 1ª specie. I sistemi stessi sono però generalmente distinti; nel caso che coincidano, le due valenze γ, $\bar{\gamma}$ si diranno *sovrapposte*. Per l'osservazione della nota ([18]), è poi chiaro che una valenza di T non può *sovrapporsi* che con la immaginaria coniugata di T^{-1}. Dimostrammo altrove ([21]) che condizione necessaria e sufficiente perchè T e T^{-1} siano a valenze sovrapposte è che l'una corrispondenza sia funzione razionale dell'altra; il teorema ora dimostrato ci consente di dare a quel risultato la forma più espressiva:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due corrispondenze T, T^{-1} *siano a valenze sovrapposte, è che esse siano permutabili.*

Ne segue il corollario:

Una corrispondenza T, *permutabile con la sua inversa, se ammette valenze tutte reali, è simmetrica; se ammette valenze tutte immaginarie pure, è emisimmetrica.*

([21]) ROSATI, loc. cit. (2), § 3.

§ VI. Le corrispondenze contenute in un ordine [22].

10. Dimostriamo ora la seguente proprietà che dovremo in seguito applicare:

Un insieme H, *costituito da un numero finito o infinito di corrispondenze regolari a due a due permutabili, è contenuto in un ordine* O(T), *la cui corrispondenza generatrice è una combinazione lineare di corrispondenze dell' insieme.*

Sia A una qualsiasi corrispondenza di H e si consideri l'ordine $0(A)$. Se $0(A)$ non contiene tutte le corrispondenze di H, si indichi con A_1 una corrispondenza di H esterna ad $0(A)$. Poichè le corrispondenze A ed A_1 sono regolari e permutabili, nella rete di specie 2 da esse individuata potrà scegliersi una corrispondenza B di cui A e A_1 sono funzioni razionali (n.° 3, Osserv. II) ed allora l'ordine $0(B)$, contenendo A e A_1, conterrá $0(A)$ ma sarà più ampio di $0(A)$. Se $0(B)$ non contiene tutte le corrispondenze di H, ed A_2 indica una corrispondenza di H esterna ad $0(B)$, nella rete individuata da B ed A_2 si scelga una corrispondenza C di cui B ed A_2 sono funzioni razionali e si continui il procedimento. Siccome i gradi delle equazioni minime di A, B, C,... vanno crescendo, ma non possono superare il numero base μ per la totalità delle corrispondenze, dovremo infine giungere a una corrispondenza T, tale che l'ordine $0(T)$ contiene tutte le corrispondenze di H. Se infine si osserva che B è una combinazione lineare di A e A_1, che C è combinazione lineare di B e A_2, ecc., si conchiude che T è combinazione lineare di corrispondenze appartenenti all'insieme H.

Si deduce che ogni ordine il quale contenga tutte le corrispondenze di H deve contenere T e perciò $0(T)$; sicchè l'ordine $0(T)$ così costruito è quello *minimo* contenente l'insieme H.

11. Il precedente risultato conduce a una conseguenza notevole. Si indichi con Σ la rete delle corrispondenze simmetriche appartenenti alla curva C. Dal teorema dimostrato al n.° 5 si trae che se le corrispondenze di Σ sono a due a due permutabili, la rete Σ è un gruppo; e, inversamente, se la rete Σ è un gruppo, tale gruppo è abeliano, cioè costituito di corrispondenze a due a due permutabili. Si può ora provare che:

---

[22] Per la definizione e le proprietà degli ordini di corrispondenze, vedasi: ROSATI, loc. cit. (2), § 5.

Se le corrispondenze di Σ formano gruppo, il gruppo stesso è anche un ordine.

È noto infatti che le corrispondenze simmetriche sono regolari. Se dunque esse formano gruppo, la rete Σ è un insieme di corrispondenze regolari a due a due permutabili. Esisterà allora in Σ una corrispondenza S tale che l'ordine $O(S)$ contiene tutte le corrispondenze di Σ; ma poichè ogni funzione razionale di una corrispondenza simmetrica è ancora una corrispondenza simmetrica, l'ordine $O(S)$ dovrà essere contenuto in Σ, e quindi è $O(S) = \Sigma$.

12. Vogliamo ora stabilire una proprietà dell'ordine $O(T)$ generato da una corrispondenza T permutabile con la sua inversa.

Poichè T è regolare (n.° 9), la sua equazione minima $\psi(z) = 0$ avrà radici tutte semplici. Indichiamo con n il grado dell'equazione stessa, e supponiamo che essa possegga r radici reali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, ed s coppie di radici complesse coniugate $\beta_1\bar{\beta}_1, \beta_2\bar{\beta}_2, \ldots \beta_s\bar{\beta}_s$, $(r + 2s = n)$; l'omografia immagine di T avrà r spazi fondamentali reali $A_1 A_2 \ldots A_r$ associati alle prime, ed s coppie di spazi fondamentali immaginari coniugati $B_1\bar{B}_1, B_2\bar{B}_2, \ldots B_s\bar{B}_s$ associati alle seconde. Essendo le corrispondenze T e T^{-1} funzioni razionali l'una dell'altra, l'ordine $O(T)$ contiene l'inversa di ogni sua corrispondenza, onde, se non è tutto di corrispondenze simmetriche, (il che avviene quando e soltanto quando è $s = 0$), dovrà congiungere una rete Σ_1 di corrispondenze simmetriche con una rete Σ_2 di corrispondenze emisimmetriche. Vogliamo ora esprimere le specie ν_1, ν_2 delle reti Σ_1, Σ_2 $(\nu_1 + \nu_2 = n)$ in funzione dei numeri r, s.

A tal fine cerchiamo entro Σ_2 una corrispondenza di cui tutte quelle della rete stessa sono funzioni razionali. Perciò, supposto dapprima $s \geq 2$, si pongano i numeri β_j sotto forma trigonometrica

$$\beta_j = \rho_j(\cos\theta_j + i \operatorname{sen}\theta_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots s),$$

e si osservi che i numeri di ciascuna delle coppie

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \rho_j \operatorname{sen}\theta_j, & \rho_j^2 \operatorname{sen} 2\theta_j & (j = 1, 2, \ldots s) \\
(b) & \rho_j \operatorname{sen}\theta_j - \rho_k \operatorname{sen}\theta_k, & \rho_j^2 \operatorname{sen} 2\theta_j - \rho_k^2 \operatorname{sen} 2\theta_k & \multirow{2}{*}{$(j, k = 1, 2, \ldots s;\ j < k)$} \\
(c) & \rho_j \operatorname{sen}\theta_j + \rho_k \operatorname{sen}\theta_k, & \rho_j^2 \operatorname{sen} 2\theta_j + \rho_k^2 \operatorname{sen} 2\theta_k &
\end{array}
$$

non possono annullarsi contemporaneamente. Infatti, in ogni coppia (a) è certo diverso da zero il primo numero; e se si annullassero contemporaneamente i due numeri di una coppia (b) o di una coppia (c), insieme ad una delle uguaglianze $\rho_j \operatorname{sen}\theta_j = \pm \rho_k \operatorname{sen}\theta_k$, si avrebbe l'altra $\rho_j \cos\theta_j = \rho_k \cos\theta_k$, onde sarebbe o $\beta_j = \beta_k$, o $\beta_j = \bar{\beta}_k$, il che è assurdo essendo $j \neq k$. Sarà dunque possibile, e in infiniti modi, soddisfare con numeri interi alle disuguaglianze

$$(a') \qquad a_0 \rho_j^2 \operatorname{sen} 2\theta_j + a_1 \rho_j \operatorname{sen} \theta_j \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots s),$$

$$\left.\begin{aligned} &(b') \quad a_0(\rho_j^2 \operatorname{sen} 2\theta_j - \rho_k^2 \operatorname{sen} 2\theta_k) + a_1(\rho_j \operatorname{sen} \theta_j - \rho_k \operatorname{sen} \theta_k) \neq 0 \\ &(c') \quad a_0(\rho_j^2 \operatorname{sen} 2\theta_j + \rho_k^2 \operatorname{sen} 2\theta_k) + a_1(\rho_j \operatorname{sen} \theta_j + \rho_k \operatorname{sen} \theta_k) \neq 0 \end{aligned}\right\} (j, k = 1, 2, \ldots s;\ j < k);$$

sicchè, ponendo $f(z) = a_0 z^2 + a_1 z$, i valori $f(\beta_j)$, $f(\beta_j) - f(\beta_k)$, $f(\beta_j) + f(\beta_k)$ saranno immaginari.

Si consideri ora la corrispondenza $E = f(T) - f(T^{-1})$, e si osservi che per l'omografia (E) gli spazi A_i $(i = 1, 2, \ldots r)$, associati alla radice caratteristica $f(\alpha_i) - f(\alpha_i) = 0$ della matrice E, sono spazi di punti singolari; e che gli spazi $\beta_j \bar{\beta}_j$ $(j = 1, 2, \ldots s)$, associati rispettivamente alle radici $\pm [f(\beta_j) - f(\bar{\beta}_j)]$, immaginarie pure fra loro coniugate, sono spazi di punti uniti. Inoltre le radici caratteristiche corrispondenti alle coppie $B_j \bar{B}_j$, $B_k \bar{B}_k$ $(j \neq k)$ sono disuguali, perchè se fosse

$$f(\beta_j) - f(\bar{\beta}_j) = \pm [f(\beta_k) - f(\bar{\beta}_k)]$$

si avrebbe rispettivamente

$$f(\beta_j) \mp f(\beta_k) = f(\bar{\beta}_j) \mp f(\bar{\beta}_k)$$

contrariamente al fatto che i numeri $f(\beta_j) - f(\beta_k)$, $f(\beta_j) + f(\beta_k)$ sono immaginari. La corrispondenza E, manifestamente emisimmetrica e quindi contenuta in Σ_2, ha dunque per immagine un'omografia degenere per la quale sono spazi singolari (1° e 2°) lo spazio A congiungente gli spazi A_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ e lo spazio B congiungente gli spazi B_j, $\bar{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$; e in B induce una omografia che ammette B_j, $\bar{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ come spazi fondamentali. Proviamo ora che ogni corrispondenza E_1 della rete Σ_2 è funzione razionale di E, cioè che gli spazi A, B_j, $\bar{B}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ sono contenuti negli spazi fondamentali dell'omografia (E_1). Per gli spazi B_j, $\bar{B}_j$ la cosa è manifesta, essendo E_1 funzione razionale di T; se poi si osserva che, supposto $E_1 = \varphi(T)$, lo spazio A_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ è associato alla radice caratteristica $\varphi(\alpha_i)$ della matrice E_1, e che una radice caratteristica reale di E_1 è necessariamente nulla, si deduce che $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = \ldots = \varphi(\alpha_r) = 0$ e che quindi lo spazio A è per l'omografia (E_1) tutto di punti singolari. L'asserto è dunque provato, e risulta di più che le corrispondenze della rete Σ_2, quando è $r > 0$, sono tutte speciali e di livello costante per il sistema regolare riducibile che ha per asse lo spazio B.

L'ordine $O(E)$, contenuto in $O(T)$, è del grado $2s + 1$ se $r > 0$, del grado $2s$ se $r = 0$; e poichè contiene anch'esso l'inversa di ogni sua corrispondenza, dovrà congiungere due reti $\Sigma'_1\Sigma'_2$ di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche. La rete Σ'_1 nel 1° caso è di specie $s+1$ e definita dalle corrispondenze simmetriche $I, E^2, \ldots E^{2s}$, nel secondo caso è di specie s e definita dalle corrispondenze $I, E^2, \ldots E^{2s-2}$; la rete Σ'_2 in entrambi i casi è di specie s e definita dalle corrispondenze emisimmetriche $E, E^3, \ldots E^{2s-1}$. Ma per il modo come è stata costruita E, le reti Σ'_2 e Σ_2 coincidono; si avrà dunque $\nu_2 = s$ e quindi $\nu_1 = r + s$.

Le uguaglianze ora stabilite valgono anche nei casi, che avevamo esclusi, $s = 0, 1$. Se è $s = 0$, l'ordine $0(T)$ è tutto di corrispondenze simmetriche e si ha $\nu_1 = r$, $\nu_2 = 0$. Se è $s = 1$, dei gruppi di disuguaglianze $(a')(b')(c')$ le (b') (c') non hanno più luogo e alle (a') si può soddisfare ponendo ad es. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, onde la rete Σ'_2 è definita dalla sola corrispondenza emisimmetrica $E = T - T^{-1}$, e si avrà $\nu_1 = r + 1$, $\nu_2 = 1$.

Notiamo infine che, supposto $E = \varkappa(T)$, il polinomio $\varkappa(z)$ ha comuni con $\psi(z)$ tutte e sole le radici reali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$; se dunque è $r > 0$, $s > 0$, il polinomio $\psi(z)$ deve essere riducibile e si avrà $\psi(z) = H(z)K(z)$, il fattore $H(z)$ contenendo le radici reali, e il fattore $K(z)$ le radici complesse. Non è escluso che i fattori stessi siano ulteriormente riducibili. Ne segue che se l'equazione $\psi(z) = 0$ è irriducibile, deve aversi $s = 0$, ovvero $r = 0$; e poichè nel 1° caso l'omografia (T) possiede r spazi fondamentali della stessa dimensione dispari, e nel 2° caso $2s$ spazi fondamentali della stessa dimensione, i numeri r ed s saranno, nei due casi, divisori del genere p.

Possiamo dunque enunciare:

Se l'equazione minima $\psi(\mathrm{z}) = 0$ *di una corrispondenza* T *permutabile con la sua inversa possiede* r *radici reali ed* s *coppie di radici complesse coniugate, l'ordine* O(T) *da essa generato congiunge una rete di specie* $\nu_1 = \mathrm{r} + \mathrm{s}$ *di corrispondenze simmetriche con una rete di specie* $\nu_2 = \mathrm{s}$ *di corrispondenze emisimmetriche, e, nell'ipotesi* $\mathrm{r} > 0$ $\mathrm{s} > 0$, *le corrispondenze emisimmetriche sono tutte speciali e di livello costante per lo stesso sistema regolare riducibile. Se l'equazione* $\psi(\mathrm{z}) = 0$ *è irriducibile, deve essere* $\mathrm{s} = 0$ *ovvero* $\mathrm{r} = 0$, *cioè l'ordine* O(T) *o è tutto di corrispondenze simmetriche o in esso il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche, e, nei due casi, i numeri* r *ed* s *sono divisori del genere* p [23].

---

(23) L'ultima parte del teorema trovasi dimostrata, con altro procedimento, al n.° 22 della mia Memoria citata in (2).

§ V. Le curve su cui ogni corrispondenza è permutabile con la sua inversa.

13. Particolare interesse presentano le curve sulle quali ogni corrispondenza è permutabile con la sua inversa, cioè le curve su cui due qualsivogliano corrispondenze T, T^{-1} inverse l'una dell'altra sono a valenze sovrapposte.

È facile intanto dimostrare la proprietà:

Perchè sopra una curva C *ogni corrispondenza sia permutabile con la sua inversa, è necessario e sufficiente che le corrispondenze simmetriche di* C *siano permutabili con le emisimmetriche.*

La necessità della condizione si ha subito osservando che se S è una corrispondenza simmetrica ed E una emisimmetrica qualsivogliano, la corrispondenza $T = S + E$ ha per inversa la $T^{-1} = S - E$; allora dalla supposta equivalenza $TT^{-1} = T^{-1}T$ si deduce $SE = ES$.

La condizione è anche sufficiente, perchè se T, T^{-1} sono due qualsivogliano corrispondenze inverse l'una dell'altra, la corrispondenza $S = T + T^{-1}$ è simmetrica e la $E = T - T^{-1}$ è emisimmetrica; e dalla supposta equivalenza $SE = ES$ segue $TT^{-1} = T^{-1}T$.

14. Per dedurre dall'ipotesi fatta su C le conseguenze più espressive, bisogna far ricorso ad alcuni teoremi sulle matrici di Riemann dimostrati in una mia recente Memoria ([24]); per ragioni di chiarezza sarà bene richiamare qui i risultati di questa che sono strettamente necessari al nostro scopo.

Si indichi con ω la matrice di Riemann definita (di fronte alla relazione di equivalenza) dalla curva C e si ricordino le nozioni di omografia, di reciprocità (in particolare di sistema nullo e di polarità) *appartenenti ad* ω, nonchè quella di *pseudoasse* ([25]).

Se μ, μ_1, μ_2 sono i numeri base della curva C, nello spazio $S_{\mu-1}$, i cui punti razionali rappresentano le corrispondenze di C, due corrispondenze inverse l'una dell'altra hanno per immagine due punti razionali omologhi nell'omografia involutoria J, cha ha per assi gli spazi S_{μ_1-1}, S_{μ_2-1}, immagini delle reti di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche di C. Chiamando congiunte due omografie di ω (reali o complesse) che hanno per immagini

---

([24]) Rosati, *Sulle matrici di Riemann*, [« Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. LIII (1929), pp. 79-134].

([25]) Per queste nozioni vedasi Scorza, loc. cit. (13).

due punti di $S_{\mu-1}$ omologhi in J, il teorema dimostrato al n.° 9 può estendersi a due omografie *reali* congiunte di ω: se due tali omografie sono permutabili, esse sono regolari ed hanno comuni gli spazi fondamentali. Vale altresì la deduzione contenuta nell' Osserv. I del detto numero, cioè se un' omografia *reale* di ω è permutabile con la sua congiunta, l' antireciprocità $K\Lambda$ muta ogni suo spazio fondamentale nel sostegno della stella coniugata, e inversamente. In particolare, se la detta omografia è degenere, i suoi spazi singolari (1° e 2°) sono l' uno polare dell' altro rispetto a Λ.

15. Ad ogni pseudoasse R_{2q-1} si possono associare entro il sistema lineare delle omografie di ω, due sistemi lineari *reali* di omografie degeneri; l' uno *(di 1ª specie)* costituito dalle omografie degeneri di ω che hanno il 1° spazio singolare passante o coincidente con R_{2q-1}, l' altro *(di 2ª specie)* costituito da quelle che hanno il 2° spazio singolare contenuto o coincidente con R_{2q-1}. Se $l-1$, $m-1$ sono le loro dimensioni, i numeri l, m diconsi gli *indici* dello pseudo-asse e si dimostra che $l+m=\mu$ e inoltre che due pseudo-assi complementari hanno comuni gl' indici in ordine scambiato.

Se gli spazi M_{l-1}, N_{m-1} immagini dei sistemi associati a R_{2q-1} si intersecano in un $S_{\lambda-1}$ $(\lambda \geq 0)$ e quindi appartengono a un $S_{\mu-1-\lambda}$, quest' ultimo spazio (manifestamente reale) è l' immagine del sistema lineare di omografie di ω che mutano in sè R_{2q-1}. Il numero λ prende il nome di *coefficiente di immersione* dello pseudo-asse R_{2q-1}, e quando è $\lambda=0$, nel qual caso R_{2q-1} è mutato in sè da tutte le omografie di ω, lo pseudo-asse stesso dicesi *isolato*.

Infine, nell' ipotesi che R_{2q-1} sia uno pseudo-asse *puro*, le omografie di ω che lo mutano in sè o inducono tutte in esso l' identità, o inducono un sistema lineare ∞^1 di omografie biassali aventi per assi due spazi S_{q-1}, S_{q-1} immaginari coniugati fissi, o inducono un sistema lineare ∞^3 di omografie biassiali aventi per assi due spazi immaginari S_{q-1}, S'_{q-1} variabili in una schiera ∞^1 di una varietà di SEGRE. Quest' ultimo caso può avvenire solo quando q è pari. Corrispondentemente alle tre suddette circostanze, lo pseudo-asse puro R_{2q-1} dicesi *di 1ª, di 2ª, di 3ª specie.*

16. Ciò premesso, siamo in grado di dimostrare che:

Se sulla curva C *ogni corrispondenza è permutabile con la sua inversa, le corrispondenze simmetriche sono permutabili con tutte le corrispondenze di* C.

Sia infatti S una qualsiasi corrispondenza simmetrica della curva C, e si indichino con R_{2q_1-1}, $R_{2q_2-1}, \ldots$, R_{2q_l-1} gli spazi fondamentali dell' omografia (S).

È noto che tali spazi, indipendenti e appartenenti a S_{2p-1}, sono *pseudo-assi* della matrice ω a due a due coniugati nel sistema nullo Λ. Proviamo ora che i detti pseudo-assi sono isolati.

Si avverta perciò che dall'ipotesi, che su C ogni corrispondenza è permutabile con la sua inversa, segue che ogni omografia di ω (reale o complessa) è permutabile con la sua congiunta, e che quindi se tale omografia è reale e degenere, i suoi spazi singolari sono polari l'uno dell'altro nel sistema nullo Λ (n.° 14). Si trae di qui che le omografie reali degeneri di ω che hanno il 2° spazio singolare contenuto in R_{2q_i-1} $(i = 1, 2, \dots, l)$ sono tutte e sole quelle che hanno il 1° spazio singolare passante per lo pseudo-asse $R_{2(p-q_i)-1}$ congiungente i rimanenti spazi fondamentali di (S). Se allora l, m $(l + m = \mu)$ denotano gl'indici dello pseudo-asse R_{2q_i-1} ed M_{l-1}, N_{m-1} le immagini dei sistemi di 1ª e di 2ª specie associati ad esso, lo spazio N_{m-1} sarà pure l'immagine del sistema di 1ª specie per lo pseudo-asse $R_{2(p-q_i)-1}$; e dal fatto che R_{2q_i-1}, $R_{2(p-q_i)-1}$ sono pseudo-assi complementari, segue che M_{l-1}, N_{m-1} sono spazi indipendenti, e perciò R_{2q_i-1} è uno pseudo-asse isolato. Sia ora T una qualsiasi corrispondenza della curva. Se T è non speciale, l'omografia (T) è non degenere, regolare (n.° 9), e muta ciascuno in sè gli spazi fondamentali di (S); per l'Osserv. I del n.° 3 si avrà dunque $ST = TS$. Se poi T è speciale, preso un intero γ tale che $T_1 = T + \gamma I$ sia non speciale, sarà $ST_1 = T_1 S$ e quindi $ST = TS$. L'asserto è dunque dimostrato.

17. In particolare, sulla curva C, soddisfacente all'ipotesi del precedente teorema, le corrispondenze simmetriche saranno a due a due permutabili. Ora è notevole il fatto che di questa ultima proprietà sussiste la reciproca; è vero cioè che:

Se le corrispondenze simmetriche della curva C *sono a due a due permutabili, ogni corrispondenza di* C *è permutabile con la sua inversa.*

Nel caso $\mu_1 = 1$, in cui le corrispondenze simmetriche sono tutte a valenza, ogni altra corrispondenza è *hermitiana* e la proprietà è subito verificata. Supposto $\mu_1 > 1$, si osservi che le corrispondenze simmetriche, essendo a due a due permutabili, devono formare un gruppo che è anche un ordine (n.° 11). Sia S la corrispondenza generatrice di quest'ordine ed R_{2q_1-1}, $R_{2q_2-1}, \dots$ R_{2q_l-1} indichino gli spazi fondamentali dell'omografia (S).

È noto che i sistemi nulli *riemanniani* di ω si ottengono moltiplicando per il sistema nullo fondamentale Λ le omografie immagini di corrispondenze simmetriche; essi saranno perciò tutti della forma $f(S)\Lambda$, in cui f è un polinomio di grado $l - 1$ coi coefficienti variabili nel campo razionale. I sistemi nulli reali o complessi appartenenti a ω si otterranno dunque facendo variare i coefficienti di f nel campo reale o nel campo complesso: e quelli reali e degeneri si avranno quando $f(S)$ risulta un'omografia reale e degenere. Gli pseudo-assi di ω sono dunque gli spazi di punti singolari delle omografie reali degeneri $f(S)$, e saranno perciò dati dagli spazi R_{2q_1-1}, R_{2q_2-1}, ... R_{2q_l-1} e da quelli che congiungono i medesimi a due a due, a tre a tre, ecc.; dal che segue che gli pseudo-assi R_{2q_1-1}, ... R_{2q_l-1} sono *puri* e *isolati*.

Escluso che le corrispondenze della curva siano tutte simmetriche, giacchè allora la proprietà è in modo ovvio verificata, si indichi con E una qualsiasi corrispondenza emisimmetrica. Se E è non speciale, l'omografia (E) è non degenere, regolare, e muta ciascuno in sè gli spazi fondamentali di (S); si avrà dunque $SE = ES$ (n.° 3, Oss. I). Se poi E è speciale, sia γ un intero tale che la corrispondenza $T = E + \gamma I$ risulti non speciale; l'omografia (T) è allora non degenere, ed avendo comuni con (E) gli spazi fondamentali, è pure regolare. E poichè muta ciascuno in sè gli spazi fondamentali di (S), si avrà $ST = TS$, dal che segue $SE = ES$. Le corrispondenze simmetriche sono dunque permutabili con le emisimmetriche; ed allora (n.° 13) ogni corrispondenza é permutabile con la sua inversa.

OSSERVAZIONE. Le precedenti considerazioni, quando si tenga conto dell'Oss. II del n.° 9, conducono dunque al risultato:

Perchè sulla curva C *due qualsivogliano corrispondenze* T, T^{-1}, *inverse l'una dall'altra, siano a valenze sovrapposte, è necessario e sufficiente che su di essa le corrispondenze simmetriche costituiscano un ordine.*

18. Abbiamo visto che le matrici di RIEMANN associate alle curve C soddisfacenti alla condizione sopra enunciata sono dotate di un numero finito (≥ 0) di pseudo-assi. Proviamo che questa proprietà é caratteristica per le curve medesime.

Infatti, se la matrice ω associata a C è priva di pseudo-assi, si ha $\mu_1 = 1$ e le corrispondenze simmetriche di C, essendo tutte a valenza, sono a due a due permutabili.

Se il numero degli pseudo-assi di ω è finito e > 0, si avrà $\mu_1 > 1$ e dovrà esistere un sol gruppo fondamentale di pseudo-assi puri R_{2q_1-1}, R_{2q_2-1}, ... R_{2q_l-1} $(q_1 + q_2 + ... + q_l = p)$, ogni altro pseudo-asse ottenendosi congiungendo questi a due a due, a tre a tre, ecc. Siano ora S, S' due corrispondenze simmetriche qualsivogliano di C; poiché in ciascuna delle omografie (S), (S') gli spazi fondamentali formano un gruppo di pseudo-assi complementari, nei due gruppi dovranno esser contenuti tutti gli pseudo-assi puri su nominati. Gli spazi fondamentali di (S) segano dunque quelli di (S') in un gruppo di spazi indipendenti e appartenenti a S_{2p-1}; perciò sarà (n.° 3) $SS' = S'S$. Dunque:

Le curve C *su cui ogni corrispondenza* T *e la inversa* T^{-1} *sono a valenze sovrapposte sono tutte e sole quelle associate a matrici di Riemann dotate di un numero finito di pseudo-assi.*

19. Sempre nella precedente ipotesi, si indichi con S una corrispondenza simmetrica *primitiva* di C, atta cioè a generare l'ordine delle corrispondenze simmetriche di C, e sia $\psi(z) = 0$ la sua equazione minima.

É noto che questa è riducibile allora e solo allora che in $0(S)$ sono contenute corrispondenze speciali; ed è pur noto che l'esistenza di corrispondenze simmetriche speciali è condizione necessaria e sufficiente perchè C ammetta sistemi regolari riducibili; si ha dunque:

La matrice ω *relativa alla curva* C *è pura o impura secondochè l'equazione minima* $\psi(z) = 0$ *di una corrispondenza simmetrica primitiva di* C *è irriducibile o riducibile.*

Gli spazi fondamentali dell'omografia (S) sono pseudo-assi puri e isolati; e, quando $\psi(z) = 0$ è irriducibile, sono tutti della stessa dimensione; quando $\psi(z) = 0$ è riducibile, quelli associati ad ogni fattore irriducibile sono della stessa dimensione ([26]). Nella mia Memoria « *Sulle matrici di Riemann* » ([27]) è dimostrato che gli pseudo-assi associati ad ognuno di tali fattori sono anche della medesima specie, e vengono inoltre espressi i numeri base $\mu_1 \mu_2$ in funzione dei numeri di tali pseudo-assi che appartengono alla 1ª, alla 2ª, alla 3ª specie (n.° 15).

Invocando quel risultato si ottiene:

In una curva C *su cui ogni corrispondenza* T *e la sua inversa* T^{-1} *sono a valenze sovrapposte, i numeri base delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sono dati dalle formule*

$$\mu_1 = \nu' + \nu'' + \nu''', \quad \mu_2 = \nu'' + 3\nu'''$$

nelle quali ν', ν'', ν''' *indicano i numeri complessivi degli pseudo-assi puri della relativa matrice* ω *che sono rispettivamente di 1ª, di 2ª, di 3ª specie.*

In particolare:

Se la curva C, *di cui al precedente teorema, è priva di sistemi regolari riducibili, e* ν *indica il numero degli pseudo-assi puri della relativa*

([26]) Per questa e per le precedenti affermazioni, vedasi: Rosati, loc. cit. (2), § 5.
([27]) Rosati, loc. cit. (24), § XII, n.° 47.

matrice ω, *i numeri base* μ_1, μ_2 *sono espressi dalle formule*

$$\mu_1 = \nu,\ \mu_2 = 0; \quad \mu_1 = \nu,\ \mu_2 = \nu; \quad \mu_1 = \nu,\ \mu_2 = 3\nu$$

secondochè gli pseudo-assi medesimi sono di 1^a, *di* 2^a, *di* 3^a *specie; il* 3^o *caso potendosi presentare solo quando il genere* p *della curva è pari e* > 2.

§ VI. **Le varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano.**

20. Si consideri ora la varietà di Jacobi V_p relativa alla curva C e facciamo l'ipotesi che il *gruppo di moltiplicabilità* di V_p, cioè il gruppo discontinuo delle omografie razionali immagini delle corrispondenze di C, sia permutabile. Per una delle proprietà dimostrate al n.° 6 avviene allora che le corrispondenze di C sono a due a due permutabili; ed essendo in particolare ogni corrispondenza permutabile con la sua inversa, le corrispondenze stesse saranno tutte regolari (n.° 9). Le curve su cui la circostanza ora detta si verifica sono dunque casi particolari di quelle studiate al paragrafo precedente, sulle quali la permutabilità sussiste per le sole corrispondenze simmetriche. Inoltre, invocando il teorema del n.° 10, si ottiene:

Se il gruppo di moltiplicabilità della varietà di Jacobi $\mathrm{V_p}$ *relativa alla curva* C *è abeliano, le corrispondenze di* C *costituiscono un ordine.*

Se T indica una corrispondenza *primitiva* di C, cioè una corrispondenza generatrice di detto ordine, e $\psi(z) = 0$ è la sua equazione minima, è chiaro che questa è riducibile o irriducibile secondochè C ammette o non ammette sistemi regolari riducibili. Infine il teorema del n.° 12 conduce al risultato:

Se l'equazione minima $\psi(\mathrm{z}) = 0$ *della corrispondenza primitiva* T *possiede* r *radici reali ed* s *coppie di radici complesse coniugate, i numeri base delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche di* C *sono*

$$\mu_1 = r + s, \quad \mu_2 = s;$$

se la curva è priva di sistemi regolari riducibili, deve essere $\mathrm{s} = 0$, *ovvero* $\mathrm{r} = 0$; *e, nei due casi,* r *ed* s *sono divisori del genere* p.

Osservazione. La proprietà ora stabilita rientra in quella enunciata in fine del n.° precedente. Ciò si verifica subito osservando che gli pseudo-assi puri della matrice ω sono, nel caso attuale, gli spazi fondamentali reali dell'omografia (T), e gli spazi che congiungono le coppie di spazi fondamentali immaginari coniugati; e che i primi sono di 1^a specie, e i secondi di 2^a specie.

21. Nell'ipotesi che la curva C sia priva di sistemi regolari riducibili, si richiamino e si applichino all'ordine $0(T)$ le considerazioni che, in una mia Memoria del 1921 ([28]), furono fatte per qualsiasi ordine irriducibile di corrispondenze.

Indichiamo con n il grado dell'equazione minima (irriducibile), $\psi(z)=0$ della corrispondenza T e con $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n$ le sue radici, le quali sono o tutte reali o tutte complesse a coppie coniugate secondochè è verificato il 1° $(n=r)$ o il 2° $(n=2s)$ dei due casi enumerati nel precedente teorema. I numeri $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n$ sono altresì le radici dell'equazione caratteristica di T ed hanno in essa la stessa molteplicità $q=\frac{2p}{n}$.

Se U è una corrispondenza variabile su C, si avrà $U=f(T)$, essendo f un polinomio del grado $n-1$ a coefficienti razionali; e l'equazione caratteristica di U ammette, con la stessa molteplicità q, le radici

$$\xi_1=f(\theta_1),\quad \xi_2=f(\theta_2),\ldots,\quad \xi_n=f(\theta_n).$$

Tali radici, che sono numeri interi algebrici dei rispettivi corpi coniugati $(\theta_1)(\theta_2)\ldots(\theta_n)$, al variare della corrispondenza U descrivono entro i corpi medesimi degli *ordini* $0_1 0_2 \ldots 0_n$. E poichè due corrispondenze U, U', cui sia associato lo stesso numero in uno dei detti ordini, sono equivalenti, cioè appartengono alla medesima *classe*, segue che le classi di corrispondenze della curva C possono associarsi biunivocamente ai numeri dell'ordine 0_1; ed avviene che in tale riferimento *le classi a matrici unimodulari hanno per corrispondenti le unità di* 0_1. D'altronde, le classi di corrispondenze a matrici unimodulari corrispondono biunivocamente alle schiere continue ∞^p di trasformazioni birazionali in sè della varietà di Jacobi V_p, dunque fra le dette schiere e le unità di 0_1 si ha corrispondenza biunivoca. La corrispondenza è poi tale che se G', G'' sono le schiere associate alle unità η', η'' di 0_1, all'unità $\eta'\eta''$ corrisponde la schiera $G'G''$, cioè la schiera generata dal prodotto di due trasformazioni variabili entro G' e G''. Invocando allora il teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici o degli ordini contennti in tali corpi, si giunge al risultato:

Le schiere di trasformazioni birazionali in sè di una varietà di Jacobi V_p, *priva di sistemi regolari riducibili e a gruppo di moltiplicabilità abeliano, formano un gruppo discontinuo abeliano e sono date ciascuna una sola volta dalla formula*

$$G=G_0^r G_1^{n_1} G_2^{n_2} \ldots G_{\nu-1}^{n_{\nu-1}},$$

([28]) Rosati, loc. cit. (2), § 6, *c*).

nella quale G_0 *indica una schiera generante un sottogruppo ciclico di ordine pari* 2k, $G_1 G_2 \dots G_{\nu-1}$ *un sistema fondamentale di schiere aperiodiche, il numero* r *percorrendo i valori interi da* 1 *a* 2k *e gli esponenti* $n_1 n_2 \dots n_{\nu-1}$ *i valori interi da* $-\infty$ *a* $+\infty$ (29). *Il numero* ν *è un divisore di* p *ed è uguale al numero base per le corrispondenze della curva* C, *o è la metà di questo numero.*

OSSERVAZIONE. La schiera G_0^{2k} è quella delle trasformazioni ordinarie di 2ª specie, ed ogni sua trasformazione, esclusa l'identità, è priva di coincidenze. È facile provare che una trasformazione variabile in ogni altra schiera G possiede un numero costante, finito e > 0 di coincidenze. Che tal numero non possa divenire infinito risulta dal fatto che l'ipotesi contraria condurrebbe all'esistenza su C di sistemi regolari riducibili (30); tale numero è dunque finito e costante al variare con continuità della trasformazione entro G. Osservando poi che la schiera G può essere generata moltiplicando una sua trasformazione fissa per una di 2ª specie variabile, si vede che una traformazione di G resta individuata quando si assegni una coppia arbitraria di punti omologhi, in particolare un punto unito; onde il detto numero di coincidenze è > 0. Si trae di qui la proprietà:

Le trasformazioni della schiera G_0 *sono tutte cicliche di periodo* 2k, *e le trasformazioni della schiera* G_0^ν $(\nu = 2, 3, \dots, 2k-1)$ *sono le potenze* ν^{me} *di quelle di* G_0.

Invero se ω_0 è una qualsiasi trasformazione di G_0, la ω_0^{2k} appartiene alla schiera G_0^{2k}, cioè è un'ordinaria trasformazione di 2ª specie; e poichè ω_0 possiede punti uniti, si avrà $\omega_0^{2k} = 1$, senza che l'uguaglianza si verifichi con esponente $< 2k$. Sia ora ω_ν una qualsiasi trasformazione della schiera G_0^ν ed A un suo punto unito; se ω_0 è la trasformazione di G_0 che possiede A come

(29) La schiera G_i^{-1}, inversa di G_i, è quella che moltiplicata per G_i dà luogo alla schiera G_0^{2k} delle trasformazioni ordinarie di 2ª specie. La schiera G_i^{-n} significa $(G_i^{-1})^n$.

(30) Siano infatti

$$u'_i = \pi_{i1} u_1 + \pi_{i2} u_2 + \dots + \pi_{ip} u_p + \pi_i \qquad (i = 1, 2, \dots p)$$

le equazioni della trasformazione. Se essa possedesse infinite coincidenze, queste si distribuirebbero in una o più varietà algebriche irriducibili. Lungo una di tali varietà, e sia $V_k (k \geq 1)$, si avrebbe

$$U_i = \pi_{i1} u_1 + \dots + (\pi_{ii} - 1) u_i + \dots + \pi_{ip} u_p = -\pi_i \qquad (i = 1, 2, \dots p),$$

e fra le espressioni $U_1 U_2 \dots U_p$ una almeno non è costante su tutta la V_p, perchè la corrispondenza considerata non è l'identità. Lungo V_k sarebbero dunque costanti degli integrali di 1ª specie appartenenti a V_p, ed allora, per un classico risultato di CASTELNUOVO, (cfr. CASTELNUOVO, *Sugli integrali semplici appartenenti a una superficie irregolare*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, 1915) la V_p conterrebbe sistemi regolari riducibili.

punto unito, la ω_0^ν appartiene alla schiera G_0^ν ed ha ancora A come punto unito; sarà dunque $\omega_0^\nu = \omega_\nu$.

22. Le schiere G_0, G_0^2,..., G_0^{2k} formanti un sottogruppo finito ciclico e ciascuna (ad eccezione dell'ultima) costituita da trasformazioni cicliche, sono associate alle unità ridotte dell'ordine 0_1.

Nel 1° dei due casi enumerati in fine al n.° 20, in cui la curva C possiede solo corrispondenze simmetriche ($\mu_1 = r$, $\mu_2 = 0$), gli ordini coniugati 0_1, 0_2, ... 0_n sono tutti reali e in 0_1 esistono le sole unità ridotte ± 1, cioè si ha $k = 1$. Il sottogruppo ciclico suddetto è allora del 2° ordine e costituito dalle due schiere di trasformazioni ordinarie di 1ª e di 2ª specie. Nel 2° caso, in cui la curva possiede due reti della stessa specie di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche ($\mu_1 = s$, $\mu_2 = s$), gli ordini 0_1, 0_2, ... 0_n, ($n = 2s$) sono a coppie immaginari coniugati e possono esservi in 0_1 anche unità ridotte immaginarie, cioè può essere $k > 1$.

In generale, se ρ è una radice primitiva $2k^{ma}$ dell'unità ($k \geq 1$), le unità ridotte di 0_1 (o di un altro qualsiasi degli ordini coniugati) sono $\pm\rho$, $\pm\rho^2$,..., $\pm\rho^k$. Indicando con T_i la classe di corrispondenze associata a ρ^i ($i = 1, 2, ..., k$), alle unità ridotte rispondono le classi $\pm T_1$, $\pm T_2$,..., $\pm T_k$ a matrici unimodulari. Essendo T_i associata all'unità ρ^i, la classe inversa T_i^{-1} sarà associata all'unità immaginaria coniugata ρ^{-i}, e la $T_i T_i^{-1}$ all'unità $+1$. Si avrà dunque $T_i T_i^{-1} = I$, cioè la T_i è *hermitiana* del 1° ordine; dal che segue ([31]) che in una delle classi $\pm T_i$, o in entrambe, se la curva è iperellittica, è contenuta una corrispondenza biunivoca. Poichè inversamente una corrispondenza biunivoca di C, essendo a periodo finito, deve essere associata a un'unità ridotta di 0_1, si conchiude che il numero delle corrispondenze biunivoche esistenti su C è $2k$ ovvero k secondochè la curva C è o non è iperellittica. È facile provare che in entrambi i casi il gruppo costituito da tali corrispondenze è ciclico. Nel 1° la cosa è immediata, giacchè il gruppo stesso di ordine $2k$ è oloedricamente isomorfo al gruppo (ciclico) delle unità ridotte di 0_1. Nel 2° caso, dovendo ogni corrispondenza biunivoca di C avere periodo $\leq k$, delle due classi $\pm T_1$ quella contenente una corrispondenza biunivoca sarà $-T_1$. Ma poichè la radice $-\rho$ appartiene all'esponente $2k$ o all'esponente k secondochè k è pari o dispari, si conchiude che k deve essere dispari e che la detta corrispondenza genera con le sue potenze il gruppo di ordine k delle corrispondenze biunivoche della curva C. Si ha dunque il risultato:

([31]) Rosati, loc. cit. (2), § IV, n.° 11.

Nel gruppo formato dalle schiere di trasformazioni birazionali in sè della varietà di Jacobi V_p, *le schiere costituite da trasformazioni cicliche formano un sottogruppo ciclico isomorfo a un gruppo (ciclico) di trasformazioni birazionali in sè posseduto dalla curva* C*; e l'isomorfismo è oloedrico o meriedrico col grado 2 di meriedria secondochè* C *è o non è iperellittica.*

È poi chiaro che l'involuzione generata su C dal suddetto gruppo è razionale.

§ VII. Le varietà di Jacobi su cui le schiere di trasformazioni birazionali in sè formano un gruppo abeliano.

23. Si parta ora dall'ipotesi che sia abeliano il gruppo Γ costituito dalle schiere di trasformazioni birazionali in sè della varietà V_p, cioè si ammetta la permutabilità non per l'intero gruppo delle corrispondenze di C, ma solo per il sottogruppo H costituito dalle corrispondenze a matrici unimodulari.

Poichè in H insieme ad ogni corrispondenza è contenuta anche l'inversa, le corrispondenze di H saranno tutte regolari (n.° 9); donde segue (n.° 10) che esse sono contenute in un ordine $O(T)$, essendo T una combinazione lineare di corrispondenze appartenenti ad H. È chiaro che l'ordine $O(T)$ coincide con l'inverso $O(T^{-1})$, giacchè altrimenti il sottogruppo H apparterrebbe all'ordine intersezione di $O(T)$ e di $O(T^{-1})$ e non sarebbe $O(T)$ l'ordine minimo contenente H. Supposto che C sia priva di sistemi regolari riducibili, l'ordine $O(T)$ è allora irriducibile e Γ risulta oloedricamente isomorfo al gruppo delle unità di uno degli ordini coniugati di numeri associati ad $O(T)$. Il gruppo Γ possiede dunque una base finita, ed ha la struttura descritta nell'enunciato al n.° 21.

24. Occorre ora stabilire una proprietà importante dell'ordine $O(T)$; proviamo cioè che:

Ogni corrispondenza della curva C *che possegga almeno una valenza reale è contenuta in* O(T).

Sia S una corrispondenza di C la cui equazione minima $\varphi(z) = 0$ possegga almeno una radice reale, ed n sia il grado di detta equazione. Se è $n = 1$, la proprietà è subito verificata, giacchè allora S è a ordinaria valenza, e contenuta perciò in qualsiasi ordine di corrispondenze. Supposto $n > 1$, si indichino con $O_1 O_2 \dots O_n$ gli ordini coniugati di numeri associati ad $O(S)$, dei quali almeno uno, e sia O_1, è costituito da numeri tutti reali. È noto allora che in O_1 esiste una unità ε_1 di modulo > 1 e tale che le unità coniugate $\varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$ dei rimanenti ordini $0_2 \ldots\ldots 0_n$ hanno tutte modulo < 1 [32]. L'unità ε_1, essendo distinta dalle sue coniugate, è un numero *primitivo* del corpo algebrico cui appartiene 0_1, cioè può assumersi come numero generatore di detto corpo; se allora U è una corrispondenza a matrice unimodulare associata all'unità ε_1, la U potrà assumersi come generatrice di $0(S)$, cioè si avrà $0(S) = 0(U)$. Ma poichè U e contenuta in $0(T)$, ogni corrispondenza dell'ordine $0(U)$, e quindi anche S, è contenuta in $0(T)$.

Dal teorema ora dimostrato segue in particolare che ogni corrispondenza simmetrica è contenuta in $0(T)$. Se dunque μ_1 indica il numero base delle corrispondenze simmetriche, l'ordine $0(T)$ o è del grado μ_1 e coincide con la rete delle corrispondenze simmetriche, o è del grado $2\mu_1$ e congiunge tale rete con una rete della stessa specie μ_1 di corrispondenze emisimmetriche (n.° 12). Verificandosi il 1° caso, le corrispondenze a matrici unimodulari costituenti il gruppo H sono tutte simmetriche; verificandosi il 2°, in H dovranno esistere anche corrispondenze non simmetriche, giacchè, altrimenti, la T che è combinazione lineare di corrispondenze appartenenti ad H, sarebbe simmetrica, e l'ordine $0(T)$ sarebbe tutto di corrispondenze simmetriche.

I due casi che può presentare l'ordine $0(T)$ si riflettono quindi in due casi che può presentare il gruppo Γ; nel 1° caso ogni schiera di Γ è associata a moltiplicatori tutti reali; nel 2° esistono in Γ schiere associate a moltiplicatori complessi.

25. Dalla precedente considerazione si trae che le corrispondenze simmetriche della curva C, essendo tutte contenute nell'ordine $0(T)$, sono a due a due permutabili. Ne segue che le curve prive di sistemi regolari riducibili soddisfacenti all'ipotesi del n.° 23 rientrano in quelle che furono studiate al § V, sulle quali ogni corrispondenza è permutabile con la sua inversa, e precisamente in quelle cui si riferisce l'ultimo teorema del n.° 19. Come abbiam visto, tali curve possono presentare 3 casi distinti, secondochè gli pseudoassi delle relative matrici di RIEMANN, il cui numero indichiamo con ν, sono tutti di 1ª, o di 2ª, o di 3ª specie. Nel 1° caso ($\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = 0$) le corrispondenze su tali curve costituiscono un ordine di grado ν di corrispondenze simmetriche; nel 2° caso ($\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = \nu$) costituiscono un ordine di grado 2ν congiungente due reti di specie ν di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche; nel 3° caso ($\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = 3\nu$), che può verificarsi solo quando p è pari e > 2, si distribuiscono in infiniti ordini di grado 2ν congiungenti una

[32] Cfr. ad es. L. BIANCHI, *Teoria dei numeri algebrici*, (Bologna, Zanichelli, 1923, p. 210).

rete fissa di specie ν di corrispondenze simmetriche con una rete variabile di specie ν di corrispondenze emisimmetriche. Dei 3 casi, soltanto il 1° e il 2° presentano la particolarità che l'intero gruppo di moltiplicabilità di V_p è abeliano. Se dunque esistono curve C prive di sistemi regolari riducibili per le quali il gruppo Γ della relativa varietà di Jacobi V_p è abeliano senza che sia abeliano l'intero gruppo di moltiplicabilità, tali curve devono appartenere al 3° tipo, e intanto essere di genere pari e > 2; inoltre su di esse l'ordine $O(T)$ cui appartiene il sottogruppo H delle corrispondenze a matrici unimodulari o è tutto di corrispondenze simmetriche, ed allora è comune a tutti gli ordini di grado 2ν, o contiene anche corrispondenze non simmetriche ed allora coincide con uno degli ordini suddetti. Raccogliendo, si ottiene:

Se il gruppo Γ *costituito dalle schiere di trasformazioni birazionali in sè della varietà di Jacobi* V_p *relativa ad una curva* C *priva di sistemi regolari riducibili è abeliano, il gruppo stesso possiede una base finita, cioè ha la struttura descritta nell'enunciato del n.° 21. Se* ν *è il numero delle schiere generatrici di* Γ, *i numeri base della curva* C *possono assumere soltanto i valori*

(I) $$\mu_1 = \nu, \quad \mu_2 = 0;$$

(II) $$\mu_1 = \nu, \quad \mu_2 = \nu;$$

(III) $$\mu_1 = \nu, \quad \mu_2 = 3\nu.$$

Le alternative (I), (II) *si hanno quando l'intero gruppo di moltiplicabilità di* V_p *è abeliano, la* (III), *che può verificarsi solo sulle curve di genere pari* > 2, *quando il detto gruppo non è abeliano. La* (I) *è esclusa se in* Γ *esistono schiere a moltiplicatori complessi.*

26. Nel caso particolare $\nu = 1$, Γ è un gruppo finito ciclico, riducendosi la sua base alla sola schiera ciclica G_0, e sulla curva C le corrispondenze a matrici unimodulari si riducono alla corrispondenza U, associata a G_0, e alle sue potenze. Poichè la radice d'unità corrispondente ad U deve appartenere a un esponente pari ed essere o reale o un numero quadratico immaginario, l'equazione minima di U dovrà presentare uno dei tre aspetti

(I) $$U + I = 0,$$

(II) $$U^2 + I = 0,$$

(III) $$U^2 - U + I = 0,$$

e corrispondentemente il periodo di G_0 sarà 2, 4, 6. Nei casi (I) (III) la curva sarà o non sarà iperellittica secondochè in entrambe le classi $\pm U$ o nella sola classe $-U$ è contenuta una corrispondenza biunivoca; nel caso (II), essendo U emisimmetrica, e quindi $U^{-1} \equiv -U$, in entrambe le classi $\pm U$ è contenuta una corrispondenza biunivoca, e la curva è necessariamente iperellittica. Si ha dunque il risultato:

Se sopra una varietà di Jacobi V_p $(p > 1)$ *relativa a una curva* C *priva di sistemi regolari riducibili le schiere di trasformazioni birazionali in sè formano un gruppo abeliano finito, tale gruppo è ciclico del 2°, del 4° o del 6° ordine, e su* C *i numeri base possono assumere soltanto i valori*

$$\text{(I)} \qquad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0;$$

$$\text{(II)} \qquad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1;$$

$$\text{(III)} \qquad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 3.$$

L'alternativa (I) *è esclusa quando il suddetto gruppo è ciclico del 4° o del 6° ordine; la* (II) *può verificarsi solo sulle curve iperellittiche di genere* $p > 2$, *e la* (III) *solo sulle curve di genere pari* > 2.

Deformazioni finite di sistemi continui.

Memoria 3ª dell'ing. R. Ariano (a Milano) (1).

Sunto. - *In questa Memoria e nelle due precedenti (questi « Annali », serie IV, tomo II e V) si studiano la cinematica e la statica delle deformazioni finite di sistemi continui qualsiasi, con riferimento sia ad elementi propri allo stato indeformato, sia ad elementi propri allo stato deformato. Lo studio è fatto avendo cura di procedere su grandezze vettoriali aventi anche un senso fisico preciso e semplice, e di stabilire delle analogie formali notevoli fra la cinematica e la statica. Quanto ai legami fra sforzi e deformazioni corrispondenti si indicano alcune relazioni generali e si ricavano alcune espressioni invariantive miste.*

10. **Relazione fra i valori delle componenti normali e tangenziali degli sforzi espresse in funzione di due diversi sistemi di coordinate.** — Il vettore $\boldsymbol{V}_{1,s}$ ci consente di trovare facilmente le espressioni dei detti sforzi quando si assumono come assi coordinati $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ in funzione di quelli espressi a mezzo del sistema d'assi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

(Indicheremo tutte le funzioni con apice se sono riferite alla terna $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, senza apice se sono riferite alla terna $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$).

Infatti il vettore $\boldsymbol{V}_{1,s}$ relativo a $\boldsymbol{i}'$, cioè $\boldsymbol{V}_{1,i'}$, è:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{1,i'} &= \boldsymbol{V}_{1,i}A_1 + \boldsymbol{V}_{1,j}A_2 + \boldsymbol{V}_{1,k}A_3\\ &= X_x'\boldsymbol{i}' + Y_x'\boldsymbol{j}' + Z_x'\boldsymbol{k}'.\end{aligned}$$

D'altra parte è noto che:

$$\boldsymbol{V}_{1,i} = X_x\boldsymbol{i} + Y_x\boldsymbol{j} + Z_x\boldsymbol{k}$$
e simili per $\boldsymbol{V}_{1,j}$ e $\boldsymbol{V}_{1,k}$

quindi

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}&X_x' = \boldsymbol{V}_{1,i'}\times\boldsymbol{i}' = X_xA_1^2 + Y_yA_2^2 + Z_zA_3^2 + 2X_yA_1A_2 + 2Y_zA_2A_3 + 2Z_xA_3A_1.\\ &\text{Formole analoghe si ricavano per } Y_y', Z_z'. \text{ Inoltre si trova:}\\ &X_y' = X_xA_1B_1 + Y_yA_2B_2 + Z_zA_3B_3 + X_y(A_1B_2 + A_2B_1) +\\ &\qquad\qquad + Y_z(A_2B_3 + A_3B_2) + Z_x(A_3B_1 + A_1B_3) \text{ ecc.}\end{aligned}\right.$$

(1) V. Memoria 1ª questi « Annali », serie IV, t. II, pag. 217; Memoria 2ª, serie IV, t. V, pag. 55.

Le (40) mostrano che le X_x, Y_y ecc. subiscono, in virtù dell'indicato cambiamento di assi coordinati, la stessa trasformazione che è subita dalle $\mathcal{E}$ e dalle Γ.

Si noti che poichè l'equazione della quadrica direttrice è:

$$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2X_y\xi\eta + 2X_z\xi\zeta + 2Y_z\eta\zeta = \pm 1$$

(tutti i simboli vanno intesi con o senza apici a seconda che si assume come terna $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ o $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$) le formole precedenti danno le espressioni dei coefficienti che compaiono nell'equazione di una quadrica riferita ad $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ rispetto a quelli della stessa quadrica riferita ad una terna senza apici.

11. **L'omografia β.** — Dal punto di vista della teoria delle omografie vettoriali, il problema dello studio della distribuzione degli sforzi interni derivanti dalla deformazione, può ridursi allo studio dell'omografia β definita da

$$\beta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_{1,i} & \boldsymbol{V}_{1,j} & \boldsymbol{V}_{1,k} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Questa omografia presenta notevoli analogie formali, con l'omografia α e insieme con questa dà gli elementi essenziali della teoria dell'elasticità.

Infatti la α definisce la dipendenza fra elementi non deformati e elementi deformati dal punto di vista della sola deformazione, cioè sostituisce a degli elementi di lunghezza comunque orientati nello stato iniziale gli elementi di lunghezza che ad essi corrispondono nello stato deformato; nel mentre la β definisce la dipendenza fra i detti elementi e i vettori delle azioni che si destano in virtù della deformazione su elementi piani ad essi normali.

L'omografia β come vedemmo, è inoltre caratteristica dell'equilibrio. Lo studio di un sistema elastico qualsiasi può quindi ridursi alla ricerca dei corrispondenti $\boldsymbol{V}_s$, $\boldsymbol{V}_{1,s}$ di tre qualsiasi vettori formanti triedro trirettangolo, e alla conseguente individuazione di due omografie vettoriali, di cui una, la β deve soddisfare le relazioni (18) e (20) perchè il sistema considerato sia, a deformazione avvenuta, in equilibrio.

L'omografia β ci sarà anche utile, come mostreremo in seguito come mezzo d'indagine.

Intanto vogliamo mostrare una sua proprietà.

La quadrica indicatrice di β — se con S indicheremo un suo punto generico — è

$$(S - M) \times \beta(S - M) = h$$

dove h è una costante che noi assumeremo eguale ad uno.

Scrivendo la stessa equazione in coordinate cartesiane, dove con ξ, η, ζ si indichino le coordinate del punto S rispetto ad un sistema di assi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ di origine in M, poichè è

$$\beta \boldsymbol{i} = \boldsymbol{V}_{1,i}; \quad \beta \boldsymbol{j} = \boldsymbol{V}_{1,j}; \quad \beta \boldsymbol{k} = \boldsymbol{V}_{1,k}$$

si ha

$$(\xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}) \times (\boldsymbol{V}_{1,i}\xi + \boldsymbol{V}_{1,j}\eta + \boldsymbol{V}_{1,k}\zeta) = 1$$

ossia

$$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2X_y\xi\eta + 2Y_z\zeta\eta + 2Z_x\xi\zeta = 1$$

che è l'equazione della quadrica direttrice delle pressioni.

Ne deriva il teorema:

« *La quadrica indicatrice dell'omografia* β *coincide con la quadrica direttrice delle pressioni* ».

Vale inoltre il teorema:

« *L'ellissoide delle pressioni è il trasformato della sfera di raggio unitario a mezzo dell'omografia* β ».

Infatti l'equazione della sfera di raggio uno è

$$\boldsymbol{u}^2 = 1$$

dove $\boldsymbol{u}$ è un vettore definito da

$$\boldsymbol{u} = \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}.$$

Evidentemente:

$$\beta \boldsymbol{u} = \xi \cdot \beta \boldsymbol{i} + \eta \cdot \beta \boldsymbol{j} + \zeta \cdot \beta \boldsymbol{k} = \boldsymbol{V}_{1,i}\xi + \boldsymbol{V}_{1,j}\eta + \boldsymbol{V}_{1,k}\zeta.$$

Ne deriva che

$$(\beta \boldsymbol{u})^2 = 1$$

è l'equazione dell'ellissoide delle pressioni.

Un altro teorema interessante è il seguente: « *Il potenziale interno è l'invariante primo dell'omografia* $\beta\alpha$ ».

Infatti

$$\begin{aligned} I_1(\beta\alpha) &= \beta\alpha \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + \beta\alpha \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + \beta\alpha \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \alpha \boldsymbol{i} \times \beta \boldsymbol{i} + \alpha \boldsymbol{j} \times \beta \boldsymbol{j} + \alpha \boldsymbol{k} \times \beta \boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{V}_i \times \boldsymbol{V}_{1,i} + \boldsymbol{V}_j \times \boldsymbol{V}_{1,j} + \boldsymbol{V}_k \times \boldsymbol{V}_{1,k} = W. \end{aligned}$$

12. **Invarianti di pressione.** — Analogamente a quanto abbiamo fatto nel capitolo precedente, sarà qui utile ricavare delle espressioni diverse degli invarianti formati a mezzo degli sforzi interni normali e tangenziali, o a mezzo delle loro funzioni $\mathcal{E}$ e Γ.

Ci serviremo anche qui, per la ricerca, delle espressioni invariantive fornite dalla teoria delle omografie vettoriali e da quella delle quadriche.

Com'è logico, le espressioni ricavate a mezzo delle due teorie devono differire solo apparentemente, deve cioè essere possibile desumere le une dalle altre.

I tre invarianti forniti dalla teoria delle omografie vettoriali sono:

$$(42)\quad \begin{cases} I_1\beta = \boldsymbol{i} \times \beta\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \times \beta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \times \beta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{V}_{1,i} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{V}_{1,j} + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_{1,k} = \\ \quad = X_x + Y_y + Z_z \\ I_2\beta = (\beta\boldsymbol{j}) \wedge (\beta\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} + (\beta\boldsymbol{k}) \wedge (\beta\boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{j} + (\beta\boldsymbol{i}) \wedge (\beta\boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{k} = \\ \quad = \boldsymbol{V}_{1,j} \wedge \boldsymbol{V}_{1,k} \times \boldsymbol{i} + \boldsymbol{V}_{1,k} \wedge \boldsymbol{V}_{1,i} \times \boldsymbol{j} + \boldsymbol{V}_{1,i} \wedge \boldsymbol{V}_{1,j} \times \boldsymbol{k} \\ I_3\beta = (\beta\boldsymbol{i}) \wedge (\beta\boldsymbol{j}) \times \beta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{V}_{1,i} \wedge \boldsymbol{V}_{1,j} \times \boldsymbol{V}_{1,k}. \end{cases}$$

Queste tre espressioni possono essere scritte diversamente. Infatti:

A) Il primo invariante permette l'enunciazione del seguente teorema: *La somma delle azioni normali che si destano in virtù della deformazione in un sistema continuo, relative alle tre facce di un triedro trirettangolo di dato vertice, sono indipendenti dal triedro considerato:*

B)
$$I_2\beta = \begin{vmatrix} Y_y & Z_y \\ Y_z & Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z_z & X_z \\ Z_x & X_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{vmatrix}$$

e tenendo presente l'eguaglianza delle tensioni tangenziali due a due:

$$I_2\beta = (Y_yZ_z + Z_zX_x + X_xY_y) - (X_y^2 + Y_z^2 + Z_y^2)$$

C)
$$I_3\beta = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} = X_xY_yZ_z + 2X_yY_zZ_x - X_xY_z^2 - \\ - Y_yZ_x^2 - Z_zX_y^2.$$

Queste espressioni sono formalmente identiche a quelle ottenute in cinematica a mezzo della considerazione dell'omografia α; per passare dalle une alle altre base operare la sostituzione

$$\begin{matrix} x_x; & x_y + y_x; & x_z + y_z; & y_y; & y_z + z_y; & z_z \\ X_x; & X_y + Y_x; & X_z + Z_x; & Y_y; & Y_z + Z_y; & Z_z. \end{matrix}$$

Gli invarianti formati a mezzo dei coefficienti della quadrica direttrice delle pressioni sono:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_1\beta; \quad I_2 = \frac{1}{4} I_2\beta; \quad I_3 = \frac{1}{8} I_3\beta.$$

Considereremo infine la quadrica definita dalla (30). Essa ci consentirà di scrivere espressioni invariantive perfettamente eguali, dal punto di vista formale s'intende, alle espressioni invariantive trovate trattando delle deformazioni. S'intende che alle funzioni ε ed γ — componenti della deformazione — si troveranno sostituite le $\mathcal{E}$ e Γ, componenti degli sforzi.

Scriviamo la (30) in modo esplicito; si ricava:

$$(30') \quad \boldsymbol{V}_{1,i}^2\xi^2 + \boldsymbol{V}_{1,j}^2\eta^2 + \boldsymbol{V}_{1,k}^2\zeta^2 + 2\boldsymbol{V}_{1,i}\times\boldsymbol{V}_{1,j}\xi\eta + 2\boldsymbol{V}_{1,j}\times\boldsymbol{V}_{1,k}\eta\zeta + {} + 2\boldsymbol{V}_{1,k}\times\boldsymbol{V}_{1,i}\xi\zeta = 1$$

o anche

$$(30'') \quad (1+2\mathcal{E}_1)\xi^2 + (1+2\mathcal{E}_2)\eta^2 + (1+2\mathcal{E}_3)\zeta^2 + 4\Gamma_3\xi\eta + 4\Gamma_1\eta\zeta + 4\Gamma_2\xi\zeta = 1$$

equazioni queste che richiamano senz'altro alla mente quella dell'ellissoide di dilatazione.

Da esse si ricavano gli invarianti

$$(43)\quad \begin{cases} J_1 = \boldsymbol{V}_{1,i}^2 + \boldsymbol{V}_{1,j}^2 + \boldsymbol{V}_{1,k}^2 = 3 + 2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \\ J_2 = -4(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2) + [(1+2\mathcal{E}_1)(1+2\mathcal{E}_2) + (1+2\mathcal{E}_2)(1+2\mathcal{E}_3) + (1+2\mathcal{E}_3)(1+2\mathcal{E}_1)] = \\ \qquad = \boldsymbol{V}(_{1,i}\wedge\boldsymbol{V}_{1,j})^2 + (\boldsymbol{V}_{1,j}\wedge\boldsymbol{V}_{1,k})^2 + (\boldsymbol{V}_{1,k}\wedge\boldsymbol{V}_{1,i})^2 \\ J_3 = \begin{vmatrix} 1+2\mathcal{E}_1 & 2\Gamma_3 & 2\Gamma_2 \\ 2\Gamma_3 & 1+2\mathcal{E}_2 & 2\Gamma_1 \\ 2\Gamma_2 & 2\Gamma_1 & 1+2\mathcal{E}_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Si noti che:

A) J_1 consente l'enunciazione del seguente teorema:

« La somma dei quadrati delle intensità delle azioni che si esercitano sulle facce di un triedro trirettangolo contenuto in un sistema deformato è indipendente dal triedro considerato e dipende solo dal vertice di questo ».

B) $$J_2 = 2J_1 - 3 + 4[\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_3\mathcal{E}_1 - (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)].$$

È quindi invariante:

$$J_2' = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_3\mathcal{E}_1 - (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2).$$

C) Si verifica facilmente che

$$J_3 = (I_3\beta)^2,$$

$$I_2\beta = \frac{1}{2}(I_1\beta^2 - J_1).$$

13. **Invarianti misti.** — Chiameremo con questo nome delle espressioni invariantive in cui compaiono insieme le funzioni caratteristiche delle deformazioni e quelle caratteristiche degli sforzi.

Per ricercarli introdurremo una nuova omografia che chiameremo γ e che permette di passare dai vettori proprii alla deformazione a quelli proprii degli sforzi. La definiremo quindi

$$\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,i} & \mathbf{V}_{1,j} & \mathbf{V}_{1,k} \\ \mathbf{V}_i & \mathbf{V}_j & \mathbf{V}_k \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Evidentemente essa deve essere funzione delle omografie α e β.

Anzi fra le tre intercede, com'è ovvio, la relazione semplice:

$$\beta = \gamma\alpha. \tag{45}$$

Gli invarianti misti sono quindi

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k \cdot I_1\gamma = \mathbf{V}_j \wedge \mathbf{V}_k \times \mathbf{V}_{1,i} + \mathbf{V}_k \wedge \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_{1,j} + \mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_{1,k} \\ &\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k \cdot I_2\gamma = \mathbf{V}_{1,j} \wedge \mathbf{V}_{1,k} \times \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{1,k} \wedge \mathbf{V}_{1,i} \times \mathbf{V}_j + \mathbf{V}_{1,i} \wedge \mathbf{V}_{1,j} \times \mathbf{V}_k \\ &\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k \cdot I_3\gamma = \mathbf{V}_{1,i} \wedge \mathbf{V}_{1,j} \times \mathbf{V}_{1,k}. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Si noti che, mentre $I_3\gamma$ non è che il rapporto dei due noti invarianti $I_3\beta$ e $I_3\alpha$, gli altri sono invarianti nuovi.

Nel riscriverli trascureremo il moltiplicatore $\mathbf{V}_i \wedge \mathbf{V}_j \times \mathbf{V}_k$ che — com'è noto — equivale al noto invariante $\theta + 1$ — ed avremo:

$$A)\quad I_1\gamma = \begin{vmatrix} x_y & 1+y_y & z_y \\ x_z & y_z & 1+z_z \\ X_x & Y_x & Z_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_z & y_z & 1+z_z \\ 1+x_x & y_x & z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+x_x & y_x & z_x \\ x_y & 1+y_y & z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix};$$

$$B)\quad I_2\gamma = \begin{vmatrix} X_y & Y_y & Z_y \\ Z_z & Y_z & Z_z \\ 1+x_x & y_x & z_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_z & Y_z & Z_z \\ X_x & Y_x & Z_x \\ x_y & 1+y_y & z_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ x_z & y_z & 1+z_z \end{vmatrix}.$$

14. Teorema di reciprocità o teorema di Betti. — Si può estendere alle deformazioni finite il teorema di Betti, che si enuncia:

« La proiezione $T_{n'}$, dell'azione $\mathbf{T}$ che si esercita su un elemento $d\sigma$ nella direzione n' normale a $d\sigma'$ — dove $d\sigma$ e $d\sigma'$ sono due elementi passanti per un punto del mezzo deformato — è uguale alla proiezione T_n' dell'azione $\mathbf{T}'$ che si esercita su un elemento $d\sigma'$, nella direzione n, normale a $d\sigma$ ».

Infatti si ha successivamente dalle (8) e da

$$\mathbf{T} = X_n\mathbf{i} + Y_n\mathbf{j} + Z_n\mathbf{k}$$

la relazione:

$$\begin{aligned} T_{n'} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n}' &= X_n \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{i}) + Y_n \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{j}) + Z_n \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{k}) = \\ &= [X_x \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{i}) + Y_x \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{j}) + Z_x \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{k})] \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}) + \\ &+ [X_y \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{i}) + Y_y \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{j}) + Z_y \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{k})] \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}) + \\ &+ [X_z \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{i}) + Y_z \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{j}) + Z_z \cos(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{k})] \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{k}) = \\ &= \boldsymbol{T}' \times \boldsymbol{n} = T_n'. \end{aligned}$$

15. **L'omografia γ.** — Cercheremo in questo paragrafo una diversa espressione dell'omografia γ, la cui importanza è evidente. Si considerino i vettori $\boldsymbol{R}_i$, $\boldsymbol{R}_j$, $\boldsymbol{R}_k$ definiti da:

$$\boldsymbol{R}_i = k\gamma \boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{R}_j = k\gamma \boldsymbol{j}; \quad \boldsymbol{R}_k = k\gamma \boldsymbol{k},$$

Da

$$\gamma \boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{V}_{1,i}$$

si ricava

$$\gamma \boldsymbol{V}_i \times \boldsymbol{i} = X_x$$

ossia pel teorema di commutazione:

$$\boldsymbol{V}_i \times k\gamma \boldsymbol{i} = X_x .$$

Analogamente si ricava

$$\boldsymbol{V}_j \times k\gamma \boldsymbol{i} = X_y$$

$$\boldsymbol{V}_k \times k\gamma \boldsymbol{i} = X_z .$$

Se poniamo

$$\boldsymbol{R}_i = r_{ii} \boldsymbol{i} + r_{ij} \boldsymbol{j} + r_{ik} \boldsymbol{k}$$

dalle relazioni precedenti ricaviamo tre equazioni in r_{ii}, r_{ij}, r_{ik} che risolute danno

$$\begin{matrix} r_{ii} \\ r_{ij} \\ r_{ik} \end{matrix} = \left(\frac{X_x \boldsymbol{V}_j \wedge \boldsymbol{V}_k + X_y \boldsymbol{V}_k \wedge \boldsymbol{V}_i + X_z \boldsymbol{V}_i \wedge \boldsymbol{V}_j}{\theta + 1} \right) \begin{matrix} \times \boldsymbol{i} \\ \times \boldsymbol{j} \\ \times \boldsymbol{k} \end{matrix}$$

da cui si ricava

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{X_x \boldsymbol{V}_j \wedge \boldsymbol{V}_k + X_y \boldsymbol{V}_k \wedge \boldsymbol{V}_i + X_z \boldsymbol{V}_i \wedge \boldsymbol{V}_j}{\theta + 1}$$

e analogamente

$$\boldsymbol{R}_j = \frac{X_y \boldsymbol{V}_j \wedge \boldsymbol{V}_k + Y_y \boldsymbol{V}_k \wedge \boldsymbol{V}_i + Y_z \boldsymbol{V}_i \wedge \boldsymbol{V}_j}{\theta + 1}$$

$$\boldsymbol{R}_k = \frac{X_z \boldsymbol{V}_j \wedge \boldsymbol{V}_k + Y_z \boldsymbol{V}_k \wedge \boldsymbol{V}_i + Z_z \boldsymbol{V}_i \wedge \boldsymbol{V}_j}{\theta + 1} .$$

Le relazioni precedenti possono anche scriversi

$$k\gamma \boldsymbol{i} = \boldsymbol{R}_i = \frac{X_x \cdot R\alpha \boldsymbol{i} + X_y \cdot R\alpha \boldsymbol{j} + X_z \cdot R\alpha \boldsymbol{k}}{\theta + 1} = \frac{R\alpha \cdot \boldsymbol{V}_{1,i}}{\theta + 1}$$

$$k\gamma \boldsymbol{j} = \boldsymbol{R}_j = \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad = \frac{R\alpha \cdot \boldsymbol{V}_{1,j}}{\theta + 1}$$

$$k\gamma \boldsymbol{k} = \boldsymbol{R}_k = \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad = \frac{R\alpha \cdot \boldsymbol{V}_{1,k}}{\theta + 1}.$$

È quindi

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} \gamma \boldsymbol{i} = \boldsymbol{P}_i = \dfrac{X_x \cdot Rk\alpha \boldsymbol{i} + X_y \cdot Rk\alpha \boldsymbol{j} + X_z Rk\alpha \boldsymbol{k}}{\theta + 1} = \\ = \dfrac{X_x \operatorname{grad}_M y \wedge \operatorname{grad}_M z + X_y \operatorname{grad}_M z \wedge \operatorname{grad}_M x + X_z x \operatorname{grad}_M \wedge \operatorname{grad}_M y}{\theta + 1} = \dfrac{kR\alpha \cdot \boldsymbol{V}_{1,i}}{\theta + 1} \\ \text{e analogamente} \\ \gamma \boldsymbol{j} = \boldsymbol{P}_j = \quad . \quad = \dfrac{kR\alpha \cdot \boldsymbol{V}_{1,j}}{\theta + 1} \\ \gamma \boldsymbol{k} = \boldsymbol{P}_k = \quad . \quad = \dfrac{kR\alpha \cdot \boldsymbol{V}_{1,k}}{\theta + 1}. \end{array} \right.$$

Per la terna degli assi principali di pressione $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{j}_2$, $\boldsymbol{k}_2$ — per cui sono nulle le azioni tangenziali — è

$$(47') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{P}_{i_2} = \dfrac{X_x \operatorname{grad}_M y \wedge \operatorname{grad}_M z}{\theta + 1} \\ \boldsymbol{P}_{j_2} = \dfrac{Y_y \operatorname{grad}_M z \wedge \operatorname{grad}_M x}{\theta + 1} \\ \boldsymbol{P}_{k_2} = \dfrac{Z_z \operatorname{grad}_M x \wedge \operatorname{grad}_M y}{\theta + 1}. \end{array} \right.$$

Si notino poi le seguenti relazioni:

$$(48) \qquad \gamma \boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{V}_{1,s}$$

$$(49) \qquad \gamma \boldsymbol{s} = \boldsymbol{P}_s$$

dove

$$\boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{P}_i \lambda + \boldsymbol{P}_j \mu + \boldsymbol{P}_k \nu.$$

La (48) si ricava facilmente notando che

$$\gamma \boldsymbol{V}_s = \gamma(\boldsymbol{V}_i \lambda + \boldsymbol{V}_j \mu + \boldsymbol{V}_k \nu) = \boldsymbol{V}_{1,i} \lambda + \boldsymbol{V}_{1,j} \mu + \boldsymbol{V}_{1,k} \nu = \boldsymbol{V}_{1,s}$$

e la (49):

$$\gamma \boldsymbol{s} = \gamma(\lambda \boldsymbol{i} + \mu \boldsymbol{j} + \nu \boldsymbol{k}) = \lambda \boldsymbol{P}_i + \mu \boldsymbol{P}_j + \nu \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_s.$$

Dalle (47') si ottengono facilmente le seguenti altre relazioni:

$$(50) \qquad \begin{cases} X_x = \boldsymbol{P}_i \times \operatorname{grad}_M x \\ X_y = \boldsymbol{P}_j \times \operatorname{grad}_M x = \boldsymbol{P}_i \times \operatorname{grad}_M y \\ X_z = \boldsymbol{P}_k \times \operatorname{grad}_M x = \boldsymbol{P}_i \times \operatorname{grad}_M z \\ \qquad \text{e simili.} \end{cases}$$

Cioè le $\boldsymbol{P}_i$ non sono altro che i vettori $\boldsymbol{B}$ avanti introdotti.

Come si vede, le reazioni tangenziali sono esprimibili in due modi. Ciò corrisponde all'essere $\alpha\gamma$ una dilatazione. Infatti si considerino ad esempio le due espressioni che definiscono X_y.

Esse possono scriversi come i due membri della seguente eguaglianza:

$$\gamma \boldsymbol{i} \times k\alpha \boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{j} \times k\alpha \boldsymbol{i}$$

ossia pel teorema di commutazione

$$\boldsymbol{i} \times k\gamma \cdot k\alpha \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \times k\gamma \cdot k\alpha \boldsymbol{i}$$

o anche [1]

$$\boldsymbol{i} \times k(\alpha\gamma)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \times k(\alpha\gamma)\boldsymbol{i}$$

la quale ultima relazione *dimostra che $\alpha\gamma$ è una dilatazione.*

Si noti che $\gamma\alpha = \beta$ è pure essa una dilatazione.

Si noti inoltre che da:

$$\begin{cases} X_x = \beta \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \gamma\alpha \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} \\ X_y = \beta \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \gamma\alpha \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} \\ X_z = \beta \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = \gamma\alpha \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \end{cases}$$

e dalle relazioni seguenti desumibili dalle (50)

$$\begin{cases} X_x = \gamma \boldsymbol{i} \times k\alpha \boldsymbol{i} = \alpha\gamma \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} \\ X_y = \gamma \boldsymbol{i} \times k\alpha \boldsymbol{j} = \alpha\gamma \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} \\ X_z = \gamma \boldsymbol{i} \times k\alpha \boldsymbol{k} = \alpha\gamma \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \end{cases}$$

si ricava

$$\alpha\gamma \boldsymbol{i} = \gamma\alpha \boldsymbol{i}$$

Analogamente si ricava

$$\alpha\gamma \cdot \boldsymbol{j} = \gamma\alpha \boldsymbol{j}$$
$$\alpha\gamma \cdot \boldsymbol{k} = \gamma\alpha \boldsymbol{k}$$

e quindi

$$(51) \qquad \alpha\gamma = \gamma\alpha.$$

[1] T. L., pag. 33, (1).

Essendo

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{B}_3 \end{cases}$$

è

$$\boldsymbol{P}_i \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{P}_j \times \boldsymbol{i} \text{ (e simili)}$$

e quindi *l'omografia* γ *è una dilatazione.*

Quindi

$$V\gamma = 0$$

ossia [1]

$$2V\gamma = \frac{1}{\boldsymbol{V}_i \wedge \boldsymbol{V}_j \times \boldsymbol{V}_k} \left\{ (\boldsymbol{V}_j \wedge \boldsymbol{V}_k) \wedge \boldsymbol{V}_{1,i} + (\boldsymbol{V}_k \wedge \boldsymbol{V}_i) \wedge \boldsymbol{V}_{1,j} + (\boldsymbol{V}_i \wedge \boldsymbol{V}_j) \wedge \boldsymbol{V}_{1,k} \right\} = 0,$$

e se come terna d'assi coordinati si assume la terna $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1$, è:

$$(52) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\delta_{i_1}\delta_{j_1}\delta_{k_1}} \left\{ \frac{\delta_{j_1}\delta_{k_1}}{\delta_{i_1}} \boldsymbol{V}_{i_1} \wedge \boldsymbol{V}_{1,i_1} + \frac{\delta_{k_1}\delta_{i_1}}{\delta_{j_1}} \boldsymbol{V}_{j_1} \wedge \boldsymbol{V}_{1,j_1} + \frac{\delta_{i_1}\delta_{j_1}}{\delta_{k_1}} \boldsymbol{V}_{k_1} \wedge \boldsymbol{V}_{1,k_1} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\boldsymbol{V}_{i_1} \wedge \boldsymbol{V}_{1,i_1}}{\delta_{i_1}^2} + \frac{\boldsymbol{V}_{j_1} \wedge \boldsymbol{V}_{1,j_1}}{\delta_{j_1}^2} + \frac{\boldsymbol{V}_{k_1} \wedge \boldsymbol{V}_{1,k_1}}{\delta_{k_1}^2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Quindi per sistemi deformati, per cui non può essere contemporaneamente nè

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{i_1} = 0 \\ \boldsymbol{V}_{j_1} = 0 \\ \boldsymbol{V}_{k_1} = 0 \end{cases}$$

nè

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{1,i_1} = 0 \\ \boldsymbol{V}_{1,j_1} = 0 \\ \boldsymbol{V}_{1,k_1} = 0 \end{cases}$$

può verificarsi una delle seguenti combinazioni:

A)

$$(53) \quad \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{V}_{i_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{i_1}} = \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,i_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{1,i_1}} \\ \dfrac{\boldsymbol{V}_{j_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{j_1}} = \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,j_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{1,j_1}} \\ \dfrac{\boldsymbol{V}_{k_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{k_1}} = \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,k_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{1,k_1}}; \end{cases}$$

[1] T. L. 28, (2).

Nel caso di sistemi isotropi vedremo che sono verificate appunto queste relazioni

B)

(54)
$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{i_1} = 0 \\ \boldsymbol{V}_{j_1} = 0 \\ \dfrac{\boldsymbol{V}_{k_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{k_1}} = \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,k_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{1,k_1}}. \end{cases}$$

Oltre a questo caso può presentarsi uno degli altri due che si ottengono permutando circolarmente $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Queste relazioni corrispondono a una deformazione in virtù della quale le dimensioni del sistema in due direzioni ortogonali si riducono infinitamente piccole, mentre la dimensione della restante conserva valori finiti.

E ciò che si verificherebbe ad es. nel caso della trazione di un filo di una sostanza che subisse una contrazione trasversale enormemente grande. Essendo questo un caso che non si presenta in pratica non accenneremo alle altre possibili relazioni ottenibili considerando una o due delle relazioni $\boldsymbol{V}_s = 0$

C)

(55)
$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_{1,i_1} = 0 \\ \boldsymbol{V}_{1,j_1} = 0 \\ \dfrac{\boldsymbol{V}_{1,k_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{1,k_1}} = \dfrac{\boldsymbol{V}_{k_1}}{\text{mod. } \boldsymbol{V}_{k_1}} \end{cases}$$

(oltre a questo caso può presentarsi uno degli altri due che si ottengono permutando circolarmente $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$).

Alle (55) corrisponde

(56)
$$\begin{cases} X_x = Y_y = 0 \\ X_y = X_z = Y_z = 0. \end{cases}$$

È questo il caso che si suppone d'ordinario verificarsi nel problema di SAINT-VENANT; vale a dire nel caso di trazione di un cilindro di una sostanza formata di fibre disposte parallelamente all'asse del cilindro, fibre fra le quali si ammette che non esistano azioni laterali.

Può essere utile studiare alcune proprietà della *quadrica indicatrice di* γ. Essa ha per equazione:

$$(S - M) \times \gamma(S - M) = (\xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}) \times (\xi \boldsymbol{P}_i + \eta \boldsymbol{P}_j + \zeta \boldsymbol{P}_k) = h$$

dove S è un punto generico della quadrica, e h è una costante.

Rispetto alla terna principale di γ, che chiameremo i_3, j_3, k_3 la detta quadrica ha per equazione

$$\boldsymbol{P}_{i_3} \times \boldsymbol{i}_3 \cdot \xi^2 + \boldsymbol{P}_{j_3} \times \boldsymbol{j}_3 \cdot \eta^2 + \boldsymbol{P}_{k_3} \times \boldsymbol{k}_3 \cdot \zeta^2 = h.$$

È inoltre

$$\begin{cases} P_{i_3} \times j_3 = P_{j_3} \times i_3 = 0 \\ P_{j_3} \times k_3 = P_{k_3} \times j_3 = 0 \\ P_{k_3} \times i_3 = P_{i_3} \times k_3 = 0. \end{cases}$$

Queste tre relazioni possono scriversi diversamente. Infatti si consideri la prima. È

$$\begin{aligned} P_{i_3} \times j_3 &= X_{x_3} \operatorname{grad}_M y_3 \wedge \operatorname{grad}_M z_3 \times j_3 + X_{y_3} \operatorname{grad}_M z_3 \wedge \operatorname{grad}_M x_3 \times j_3 + \\ &\quad + X_{z_3} \operatorname{grad}_M x_3 \wedge \operatorname{grad}_M y_3 \times j_3 = \\ &= X_{x_3} \cdot kR\alpha i_3 \times j_3 + X_{y_3} \cdot kR\alpha j_3 \times j_3 + X_{z_3} \cdot kR\alpha k_3 \times j_3 = \\ &= X_{x_3} \cdot R\alpha j_3 \times i_3 + X_{y_3} \cdot R\alpha j_3 \times j_3 + X_{z_3} \cdot R\alpha j_3 \times k_3 = \\ &= V_{1, i_3} \times R\alpha j_3 = \\ &= V_{1, i_3} \times V_{k_3} \wedge V_{i_3} = 0. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} P_{j_3} \times i_3 &= V_{1, j_3} \times V_{k_3} \wedge V_{j_3} = 0 \\ P_{j_3} \times k_3 &= V_{1, j_3} \times V_{i_3} \wedge V_{j_3} = 0 \\ P_{k_3} \times j_3 &= V_{1, k_3} \times V_{i_3} \wedge V_{k_3} = 0 \\ P_{k_3} \times i_3 &= V_{1, k_3} \times V_{j_3} \wedge V_{k_3} = 0 \\ P_{i_3} \times k_3 &= V_{1, i_3} \times V_{j_3} \wedge V_{i_3} = 0. \end{aligned}$$

Cioè il vettore V_{1, i_3} è all'intersezione dei piani (V_{i_3}, V_{k_3}) e (V_{i_3}, V_{j_3}) cioè ha la stessa direzione di V_{i_3}.

Altrettanto dicasi per i vettori restanti. Ne deriva il seguente importante teorema:

I vettori $\mathbf{V}_{i_3}$, $\mathbf{V}_{j_3}$, $\mathbf{V}_{k_3}$ *sono rispettivamente paralleli a* $\mathbf{V}_{1, i_3}$, $\mathbf{V}_{1, j_3}$, $\mathbf{V}_{1, k_3}$.

L'importanza della terna i_3, j_3, k_3 è quindi evidente.

Calcoliamo ora i valori dei moduli di P_{i_3}, P_{j_3}, P_{k_3}. Da:

$$\begin{cases} P_{i_3} = p_{i_3} i_3 \\ P_{j_3} = p_{j_3} j_3 \\ P_{k_3} = p_{k_3} k_3 \end{cases}$$

moltiplicando scalarmente e rispettivamente per i, j, k si ricava, tenendo presente le espressioni che definiscono in generale P_i, P_j, P_k:

$$(57) \qquad \begin{cases} p_{i_3} = \dfrac{1}{\theta + 1} (V_{1, i_3} \times V_{j_3} \wedge V_{k_3}) \\[2ex] p_{j_3} = \dfrac{1}{\theta + 1} (V_{1, j_3} \times V_{k_3} \wedge V_{i_3}) \\[2ex] p_{k_3} = \dfrac{1}{\theta + 1} (V_{1, k_3} \times V_{i_3} \wedge V_{j_3}). \end{cases}$$

Per verifica, si noti che sommando le tre precedenti espressioni si ricava:

$$I_1\gamma = p_{1,i_3} + p_{1,j_3} + p_{1,k_3}$$

formola valida per qualsiasi dilatazione, quando la terna $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{j}_3$, $\boldsymbol{k}_3$ sia la terna principale (1).

Si è visto che *esiste sempre una terna di vettori* $\mathbf{V}_{i_3}$, $\mathbf{V}_{j_3}$, $\mathbf{V}_{k_3}$ *paralleli rispettivamente a* $\mathbf{V}_{1,i_3}$, $\mathbf{V}_{1,j_3}$, $\mathbf{V}_{1,k_3}$.

Supponiamo ora ne esista un'altra i_3', j_3', k_3' che goda delle stesse proprietà; vale a dire supponiamo sia:

$$\left\{\begin{aligned} V_{1,i_3'} &= p_{i_3'} V_{i_3'} \\ V_{1,j_3'} &= p_{j_3'} V_{j_3'} \\ V_{1,k_3'} &= p_{k_3'} V_{k_3'} \end{aligned}\right. \tag{58}$$

dove $p_{i_3'}$, $p_{j_3'}$, $p_{k_3'}$ sono delle funzioni numeriche. Ciò equivale a scrivere come si vede facilmente:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma \boldsymbol{i}_3' &= p_{i_3'} \boldsymbol{i}_3' \\ \gamma \boldsymbol{j}_3' &= p_{j_3'} \boldsymbol{j}_3' \\ \gamma \boldsymbol{k}_3' &= p_{k_3'} \boldsymbol{k}_3'. \end{aligned}\right.$$

Dalle relazioni precedenti si ricava facilmente tenendo presente che γ è una dilatazione:

$$\gamma \boldsymbol{i}_3' \times \boldsymbol{i}_3 = p_{i_3'} \cos(\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_3') = \boldsymbol{i}_3' \times \gamma \boldsymbol{i}_3 = p_{i_3} \cos(\boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_3')$$

ossia

$$\left\{\begin{aligned} p_{i_3} &= p_{i_3'} \\ p_{j_3} &= p_{j_3'} \\ p_{k_3} &= p_{k_3'} \end{aligned}\right.$$

ne deriva il teorema: *Se esistono più terne di vettori unitari tali che i vettori degli sforzi e quelli delle deformazioni ad essi corrispondenti siano fra loro paralleli, i rapporti fra le intensità degli sforzi e i valori delle corrispondenti deformazioni che a dette terne si riferiscono, devono essere gli stessi tre, per tutte le terne.*

Notiamo che p_{i_3}, p_{j_3}, p_{k_3} per l'eguaglianza già dimostrata dei vettori P e B sono eguali rispettivamente ai valori assunti da E_1, E_2, E_3 allorchè come terna fondamentale si assume $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{j}_3$, $\boldsymbol{k}_3$.

(1) T. L. 29, [4].

Inoltre riferendo il sistema a questa terna si ha che

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0$$

ossia il potenziale interno W è esprimibile sotto forma di funzione delle sole tre variabili ε_1, ε_2, ε_3.

I valori assunti dalle componenti degli sforzi — sempre quando si prende come terna d'assi coordinati la terna $\boldsymbol{i}_3$, $\boldsymbol{j}_3$, $\boldsymbol{k}_3$ — sono:

$$(59)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}(E_1^2 \boldsymbol{V}_{i_3}{}^2 - 1) = \frac{1}{2}[E_1^2(1+2\varepsilon_1) - 1] \\ \text{e due analoghe per } \mathcal{E}_2 \text{ e } \mathcal{E}_3, \\ \Gamma_1 = \frac{1}{2} E_2 E_3 \boldsymbol{V}_{j_3} \times \boldsymbol{V}_{k_3} = E_2 E_3 \gamma_1, \\ \text{e due analoghe per } \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_3. \end{cases}$$

Nelle (59) compaiono esplicitamente indicate le relazioni intercedenti fra le componenti degli sforzi e quelle delle deformazioni.

Vedremo che per particolari sistemi esse assumono forme più semplici.

16. **Statica delle deformazioni in coordinate euleriane.** — A) *Equazioni di equilibrio.* Assumiamo come variabili indipendenti di cui è funzione il potenziale interno, le variabili

$$(60)\quad \begin{cases} x'_x = \dfrac{\partial u'}{\partial x}; \quad y'_x = \dfrac{\partial v'}{\partial x}; \quad z'_x = \dfrac{\partial w'}{\partial x} \\ x'_y = \dfrac{\partial u'}{\partial y}; \quad y'_y = \dfrac{\partial v'}{\partial y}; \quad z'_y = \dfrac{\partial w'}{\partial y} \\ x'_z = \dfrac{\partial u'}{\partial z}; \quad y'_z = \dfrac{\partial v'}{\partial z}; \quad z'_z = \dfrac{\partial w'}{\partial z} \end{cases}$$

dove com'è noto

$$u' = -u; \quad v' = -v; \quad w' = -w.$$

Ne deriva

$$W = W(x'_x,\ x'_y,\ x'_z,\ y'_x,\ y'_y,\ y'_z,\ z'_x,\ z'_y,\ z'_z)$$

e quindi, con ragionamento eguale a quello indicato nella 2ª Memoria, si ricavano:

a) le equazioni indefinite di equilibrio:

$$(61)\quad \begin{cases} \rho X = \dfrac{\partial X'_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X'_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X'_z}{\partial z} \\ \rho Y = \dfrac{\partial Y'_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y'_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y'_z}{\partial z} \\ \rho Z = \dfrac{\partial Z'_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z'_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z'_z}{\partial z}; \end{cases}$$

b) le equazioni al contorno:

$$(62)\qquad \begin{cases} L = X'_x \cos(n, i) + X'_y \cos(n, j) + X'_z \cos(n, k); \\ M = Y'_x \cos(n, i) + Y'_y \cos(n, j) + Y'_z \cos(n, k); \\ N = Z'_x \cos(n, i) + Z'_y \cos(n, j) + Z'_z \cos(n, k); \end{cases}$$

dove si è fatto:

$$(63)\qquad \begin{cases} X'_x = \dfrac{\partial W}{\partial x'_x}; \quad Y'_y = \dfrac{\partial W}{\partial y'_y}; \quad Z'_z = \dfrac{\partial W}{\partial z'_z}; \\ X'_y = \dfrac{\partial W}{\partial x'_y}; \quad X'_z = \dfrac{\partial W}{\partial x'_z}; \\ Y'_x = \dfrac{\partial W}{\partial y'_x}; \quad Y'_z = \dfrac{\partial W}{\partial y'_z}; \\ Z'_x = \dfrac{\partial W}{\partial z'_x}; \quad Z'_y = \dfrac{\partial W}{\partial z'_z}. \end{cases}$$

Si dimostra anche qui che

$$X'_y = Y'_x; \quad X'_z = Z'_x; \quad Y'_z = Z'_y.$$

Si noti che se si sostuiscono ai vettori delle forze esterne $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ i vettori $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{G}'$ di componenti rispettivamente

$$X', \quad Y', \quad Z',$$
$$L', \quad M', \quad N',$$

tali che

$$\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$$
$$\boldsymbol{G}' = -\boldsymbol{G}$$

le equazioni precedenti si riducono formalmente alle stesse di quella prima considerate, salvo l'aggiunta di un apice alle forze e la sostituzione di

$$x, \quad y, \quad z$$

ad

$$a, \quad b, \quad c.$$

Si può quindi senz'altro enunciare un teorema analogo ad un teorema enunciato nella 2ª Memoria:

« Le derivate della funzione potenziale rispetto alle nove variabili di cui essa è funzione: x'_x, x'_y, x'_z, y'_x, y'_y ecc. misurano — salvo il segno — le componenti delle azioni che emanano dalla materia circostante in virtù della deformazione e che si esercitano su elementi piani normali alle direzioni degli assi coordinati ».

Vale a dire valgono le relazioni:

$$X'_x = -X_x; \quad Y'_y = -Y_y; \quad Z'_z = -Z_z;$$
$$X_y = -X'_y; \quad X_z = -X'_z; \quad Y_z = -Y'_x.$$

La differenza di segno di cui nel teorema precedente deriva dall'aver considerato u', v', w' invece di u, v, w. Ciò si è fatto per simmetria di trattazione, avendo trovato comodo nel primo Capitolo la detta sostituzione.

Si noti poi che le (63) non portano alla conclusione dell'inutilità di questa introduzione delle nuove funzioni x', y', z, perchè se eguali sono i valori numerici di

$$X'_x, \quad X'_y, \quad X'_z, \quad Y'_y, \quad Y'_z, \quad Z'_z$$

rispettivamente a quelli di

$$X_x, \quad X_y, \quad X_z, \quad Y_y, \quad Y_z, \quad Z_z,$$

diverse sono le espressioni funzionali, risultando espresse le funzioni con apice a mezzo delle variabili indipendenti x, y, z e permettendo quindi esse di rispondere alla domanda: « Quali reazioni si sono destate nel punto P del mezzo deformato? »; nel mentre le funzioni senza apice risultano espresse a mezzo delle variabili indipendenti a, b, c, e quindi permettono di rispondere alla domanda: « Quali reazioni si desteranno nel punto in cui si trasporterà il punto M del mezzo iniziale, allorchè la deformazione si sarà prodotta? ».

L'analogia formale ricordata precedentemente — quella cioè che intercede fra le (5) della 2ª Memoria e le (61), le (6) della 2ª Memoria e le (62) — quando si operi la sostituzione:

$$(64) \qquad \left\{ \begin{array}{llllll} X', & Y', & Z', & L', & M', & N'; \\ X, & Y, & Z, & L, & M, & N; \end{array} \right.$$

consentono di scrivere senz'altro delle formole notevoli la cui rapidità di ottenimento giustifica l'uso fatto di u', v', w' invece di u, v, w.

Precisamente, se poniamo:

$$(65) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} E_1' = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_1'}; & G_1' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \gamma_1'}; \\[2ex] E_2' = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_2'}; & G_2' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \gamma_2'}; \\[2ex] E_3' = \dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon_3'}; & G_3' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial W}{\partial \gamma_3'}; \end{array} \right.$$

e introduciamo i vettori

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1' &= E_1'i + G_3'j + G_2'k = P_i'; \\ B_2' &= G_3'i + E_2'j + G_1'k = P_j'; \\ B_3' &= G_2'i + G_1'j + E_3'k = P_k'; \end{aligned}\right.$$

e

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} V_{1,i}' &= \frac{\partial a}{\partial x} B_1' + \frac{\partial a}{\partial y} B_2' + \frac{\partial a}{\partial z} B_3'; \\ V_{1,j}' &= \frac{\partial b}{\partial x} B_1' + \frac{\partial b}{\partial y} B_2' + \frac{\partial b}{\partial z} B_3'; \\ V_{1,k}' &= \frac{\partial c}{\partial x} B_1' + \frac{\partial c}{\partial y} B_2' + \frac{\partial c}{\partial z} B_3'; \end{aligned}\right.$$

ricaviamo le nuove espressioni:

a) *delle equazioni indefinite di equilibrio:*

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho X' + \operatorname{div}_P V_{1,i} &= 0, \\ \rho Y' + \operatorname{div}_P V_{1,j} &= 0, \\ \rho Z' + \operatorname{div}_P V_{1,k} &= 0, \end{aligned}\right.$$

o in una sola equazione:

$$(69)\qquad \rho F' + \operatorname{grad}_P \beta' = 0;$$

b) *delle equazioni al contorno:*

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} L' + V_{1,i}' \times n &= 0, \\ M' + V_{1,j}' \times n &= 0, \\ N' + V_{1,k}' \times n &= 0, \end{aligned}\right.$$

o in una sola equazione:

$$(71)\qquad G' + \beta' n = 0,$$

dove l'omografia β' è definita da

$$(72)\qquad \beta' = \begin{pmatrix} V_{1,i}' & V_{1,j}' & V_{1,k}' \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

e ε_1', ε_2', ε_3', γ_1', γ_2', γ_3' sono le funzioni componenti della deformazione introdotte nella 1ª Memoria.

B) *Relazione cui devono soddisfare le omografie* α, β, β'. — Questa relazione può ottenersi direttamente dalla (18) della 2ª Memoria e dalla (69) ricordando alcune formole relative al cambiamento di variabili, allorchè fra le variabili — come avviene in questo caso per i punti P ed M — vi è dipendenza funzionale [1].

Infatti dalla equazione indefinita d'equilibrio e dalla nota relazione:

$$\operatorname{grad}_M \beta = k\alpha \operatorname{grad}_P \beta,$$

si ricava:

$$\rho F' - k\alpha \operatorname{grad}_P \beta = 0,$$

relazione che — paragonata alla (69) — permette di scrivere:

$$\operatorname{grad}_P \beta' = k\alpha \operatorname{grad}_P \beta.$$

C) *Quadriche delle pressioni, invarianti, ecc.* — Si può, dopo quanto si è detto, esprimere facilmente le equazioni di queste quadriche in funzione delle variazioni x, y, z considerate come variabili indipendenti fondamentali, scrivere le equazioni degli invarianti di pressione, ecc.

Basterà considerare i vettori $\boldsymbol{V}_{1,i}'$; $\boldsymbol{V}_{1,j}'$; $\boldsymbol{V}_{1,k}'$ analoghi a $\boldsymbol{V}_{1,i}$; $\boldsymbol{V}_{1,j}$; $\boldsymbol{V}_{1,k}$ ed operare, tenendo conto opportunamente dei segni, la sostituzione delle funzioni senza apici, con le corrispondenti funzioni munite di apici. Noteremo che si ritroveranno, in particolare, per le componenti degli sforzi, relazioni analoghe a quelle ricavate nel Capitolo precedente e relative alle funzioni componenti di deformazione, in quanto in virtù del significato fisico di $\boldsymbol{V}_{1,s}$ e $\boldsymbol{V}_{1,s}'$ è

$$\boldsymbol{V}_{1,s} = -\boldsymbol{V}_{1,s}'$$

e quindi è

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1; \quad \mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_2; \quad \mathcal{E}_3' = \mathcal{E}_3; \quad \Gamma_1' = \Gamma_1; \quad \Gamma_2' = \Gamma_2; \quad \Gamma_3' = \Gamma_3,$$

cioè « *le funzioni che abbiamo definite come componenti degli sforzi hanno lo stesso valore, tanto se si fa uso di variabili lagrangiane, quanto se si fa uso di variabili euleriane* ».

---

[1] Vedere al riguardo T. L., pag. 90.

On spherical quasi-spherical Curves.

By Arthur Ranum (New-York).

1. The discovery [1] in 1909 of the quasi-osculating sphere of a twisted curve, dual to the osculating sphere, has naturally opened up a new field of research, which has already led to certain new types of curves [2].

It has also tended to emphasize the duality between a spherical curve C, having a fixed osculating sphere S, and what I shall call a quasi-spherical curve C', having a fixed quasi-osculating sphere S'. Just as the points of C lie on S and the tangents to C touch S, so, dually, the osculators [3] (osculating planes) and tangents to C' touch S'. Hence the tangent surface of C' is a developable [4] circumscribed about S', and C' itself is a geodesic on a cone whose vertex is the center of S'.

A curve that is at the same time spherical and quasi-spherical is therefore self-dual. It has a fixed osculating sphere S_1 and a fixed quasi-osculating sphere S_2. Its points lie on S_1, its osculators touch S_2, and its tangents touch both spheres [5]. While spherical curves have long been extensively studied, quasi-spherical curves have been comparatively neglected and spherical quasi-spherical curves do not seem to have been noticed at all, altho they occupy a central position in the differential geometry of twisted curves, from the standpoint of their relation to spheres.

In this paper an attempt will be made to fill the gap. We shall first (§§ 3-9) set up the intrinsic equations of a spherical quasi-spherical curve C and of a

(1) Hostinsky, « Journal de Mathématiques », sér. 6, vol 5, p. 285. Ranum, « Bulletin of the American Mathematical Society », vol. 17, pp. 67-68; « Quarterly Journal of Mathematics », vol. 46, (1915), pp. 364-366.

(2) Ranum, *Spheres osculating a curve and quasi-osculating another curve,* « Mathematische Annalen », vol. 101 (1929), pp. 147-160; « Annals of Mathematics », ser. 2, vol. 29 (1928), pp. 445-458.

(3) G. Loria, *Curve sghembe speciali,* (1921), vol. 1, p. 2.

(4) Called a « spherical developable » in the « Quarterly Journal », loc. cit., pp. 366-368.

(5) Hence its tangents form a developable surface belonging to the rectilinear congruence whose focal surfaces are the spheres S_1, S_2.

certain pair of curves C_1 and C_2, closely related to C. We shall then (§§ 10-29) make a study of these three curves directly from their intrinsic equations. Finally, in §§ 30-37, we shall also derive their Cartesian equations, and show that they involve certain elliptic integrals of the third kind, which in one special case degenerate into logarithmic integrals. We shall confine ourselves entirely to real curves.

2. Let S_1 and S_2 be any two real spheres each of which is wholly or partly exterior to the other. Then there exists a real spherical quasi-spherical curve C, whose points lie on S_1 and whose osculators touch S_2. If a and b are the respective radii of S_1 and S_2, and if c is the distance between their centers, then

(1) $$c > |a - b|.$$

Obviously the curves C form a 3-parameter family F [1], depending on a, b and c, provided any two congruent curves, as usual, are regarded as the same curve.

Since a curve is spherical, if and only if, its evolutes [2] are quasi-spherical, it follows that any quasi-spherical curve C, whose evolutes $\overline{C}_1$ are also quasi-spherical, will belong to the family F, and conversely.

The osculators of an evolute $\overline{C}_1$ of a curve C of the family F all touch a sphere $\overline{S}_1$ concentric with S_1 and of radius $\bar{a} \lesseqgtr a$. If $\bar{a} < a$, the sphere $\overline{S}_1$ is enveloped by (the osculators of) two of these evolutes; while if $\bar{a} = a$, the sphere $\overline{S}_1$ $(= S_1)$ is enveloped by only one, which we shall call C_1.

Since a curve is quasi-spherical, if and only if, its involutes [1] are spherical, it follows that any spherical curve C, whose involutes $\overline{C}_2$ are also spherical, will belong te the family F, and conversely.

The points of an involute $\overline{C}_2$ of a curve C of the family F all lie on a sphere $\overline{S}_2$ concentric with S_2 and of radius $\bar{b} \gtreqless b$. If $\bar{b} > b$, the sphere $\overline{S}_2$ contains two of these involutes; while if $\bar{b} = b$, the sphere $\overline{S}_2$ $(= S_2)$ contains only one, which we shall call C_2.

The evolutes $\overline{C}_1$, of C are, of course, all geodesics on the same cone, having its vertex at the center of the sphere S_1; this cone is the polar developable of C.

---

(1) Denoted by the symbol $(J_1 J_2)$ in the « Annals of Mathematics », loc. cit., §§ 2, 11.
(2) « Quarterly Journal », loc. cit., §§ 21, 24.
We shall use the terms « evolute » and « involute » to denote « filar evolute » and « filar involute », respectively.

The evolutes $\bar{C}_1$ of the various curves C of the family F constitute a four-parameter family. Any quasi-spherical curve having a quasi-spherical involute will belong to this family, and conversely.

The curve C_1 defined above is that particular evolute of C whose tangent surface touches the sphere S_1 along the curve C. As C varies, C_1 will describe a three-parameter family F_1.

Any curve C_1 of this family may be defined as a curve whose osculators touch a fixed sphere S_1 along a curve C, whose osculators touch another fixed sphere S_2; or as a quasi-spherical curve such that the curve of contact C of its tangent surface with its fixed quasi-osculating sphere S_1 is another quasi-spherical curve.

The involutes $\bar{C}_2$ of the various curves C of the family F constitute a four-parameter family. Any spherical curve having a spherical evolute will belong to this family, and conversely.

The curve C_2 defined above is that particular involute of C which is the curve of contact of the sphere S_2 with the tangent surface of C. As C varies, C_2 will describe a three-parameter family F_2.

Any curve C_2 of this family may be defined as a curve lying on a fixed sphere S_2 such that the tangent planes to S_2 at the points of C_2 osculate a curve C lying on another fixed sphere S_1; or as a spherical curve (on a sphere S_2) such that the edge of regression C of the developable circumscribing S_2 along C_2 is another spherical curve.

Of the three curves C, C_1, C_2 the first bears the same relation to the second as the second to the third. Any one of them, if chosen in its appropriate family, will uniquely determine the other two.

Intrinsic equations.

3. We now proceed to find the intrinsic equations of these three curves and to express C_1 and C_2 in terms of C. Exactly as in the earlier paper [1], we shall use the six intrinsic variables s, θ, η, ρ, σ, τ, where s is the arc-length, $1/\rho$ and $1/\tau$ are the curvature and torsion, respectively, $\theta = \int ds/\rho$, $\eta = \int ds/\tau$, and $\sigma = \rho/\tau = d\eta/d\theta$. Also $\sigma = -\cot\omega$, where ω is the angle between the tangent

[1] « Mathematische Annalen », loc. cit., § 1.

and the rectifying line. For the curves C_1 and C_2 the corresponding variables will be written with the subscripts 1 and 2, respectively.

Since C lies on the sphere S_1 of radius a and its osculators touch the sphere S_2 of radius b, we have

$$\rho = a \sin \eta, \quad s = b\sigma (= b\rho/\tau), \tag{2}$$

where η is the angle which its osculator makes with the corresponding tangent plane to S_1 and s^2 is the power of the corresponding point with respect to S_2 [1]. Hence $sds/d\eta = s\tau = b\rho = ab \sin \eta$, $sds = ab \sin \eta d\eta$, and

$$s^2 = k - 2ab \cos \eta, \tag{3}$$

where k is a constant of integration depending on the distance c between the centers of the spheres (See § 12). Eliminating η between (2) and (3), we have

$$\rho = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{4a^2b^2 - (s^2 - k)^2}, \tag{4}$$

and by (2), (3) and (4), we have

$$\tau = \frac{ab \sin \eta}{s} = \pm \frac{ab \sin \eta}{\sqrt{k - 2ab \cos \eta}} = \pm \frac{1}{2s} \sqrt{4a^2b^2 - (s^2 - k)^2}; \tag{5}$$

(4) and (5) give us the intrinsic equations in the usual form. Since $\theta = \int \sigma^{-1} d\eta = = b\int d\eta/s$, we have

$$\theta = \pm b \int \frac{d\eta}{\sqrt{k - 2ab \cos \eta}} = \pm 2b \int \frac{ds}{\sqrt{4a^2b^2 - (s^2 - k)^2}}, \tag{5'}$$

which are elliptic integrals of the first kind.

4. In order to study the curves C_1 and C_2 and their relation to C, let us consider figure 1, where the centers O_1 and O_2 of the spheres S_1, S_2 are taken on the x-axis, O_1 being the origin. P_1, P, and P_2 are corresponding points of the three curves, P_2 being chosen in the xy-plane in order to simplify the drawing; we shall soon see that P_1 must then also lie in the xy-plane. The plane P_1PP_2 touches the sphere S_1 at P and is therefore the osculator of C_1 at P_1; similarly the vertical plane PDP_2 (parallel to the z-axis) touches the sphere S_2 at P_2 and is therefore the osculator of C at P. P_1P is tangent to C_1

[1] G. LORIA, loc. cit., vol. 2, p. 55, equation (35), and p. 211, equation (17).

and normal to C; similarly PP_2 is tangent to C and normal to C_2; hence P_1P is perpendicular to PP_2; $P_2P = s$.

The plane PP_2O_2, which is more completely drawn in figure 2, § 6, is the normal plane of C_2 and the rectifying plane of C. Hence its characteristic PO_2

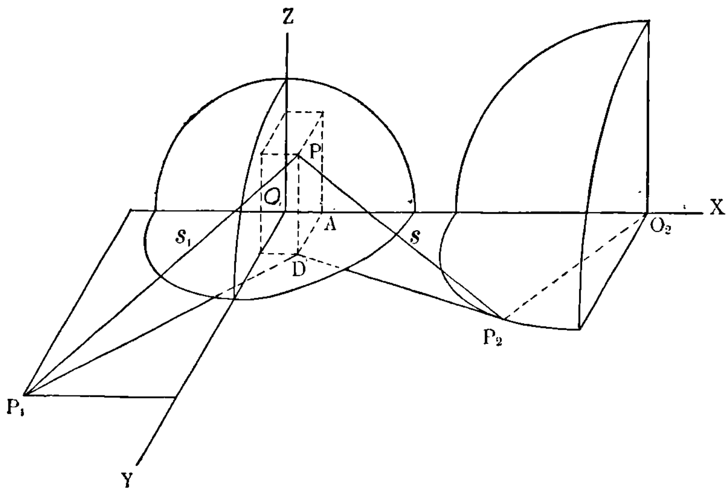

Fig. 1

is the polar line of C_2 and the rectifying line of C; that is, it is a generator of the cone on which C is a geodesic. P_2N_2, drawn perpendicular to PO_2 in figure 2, is the principal normal to C_2, and N_2 is its center of curvature.

In a similar manner the plane PP_1O_1, drawn again in figure 3, § 9 is the normal plane of C and the rectifying plane of C_1; and P_1O_1 is the polar line of C and a generator of the cone on which C_1 is a geodesic. P_1O_1 and P_2O_2 are parallel lines, being both perpendicular to the plane PDP_2. P_1O_1 will meet P_2D in the center of curvature N of C (figure 3); η is the angle between P_1P and PN.

These various observations lead at once to the equations

$$\eta_2 = \pm\,\omega + \text{const.}, \qquad \eta = \pm\,\omega_1 \text{ const.},$$
$$s_2/b = \pm\,\eta + \text{const.}, \quad s/a = \pm\,\eta_1 \text{ const.}$$

5. In order to make these equations more precise, we introduce Cartesian coordinates. Putting $P = (x, y, z)$ let $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ be the Cartesian equations of C; their explicit form will be found in § 31. Let (α, β, γ), (l, m, n), and (λ, μ, ν) be the direction cosines of the tangent, principal normal, and binormal, respectively. Similarly let $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, etc.

Then we express C_2 in terms of C by the equations [1]

(6)
$$x_2 = x - s\alpha,\quad y_2 = y - s\beta,\quad z_2 = z - s\gamma.$$

Differentiating as to s and using the FRÉNET formulae, we have

$$\alpha_2 \frac{ds_2}{ds} = -\frac{s}{\rho}\, l, \text{ etc.}$$

Choosing

(7)
$$\alpha_2 = -l, \text{ etc.},$$

we have

(8)
$$\frac{ds_2}{ds} = \frac{s}{\rho} = \frac{b}{\tau}.$$

Hence $ds_2 = b\,ds/\tau = b\,d\eta$, and

(9)
$$s_2 = b\eta,$$

where $s_2 = 0$, when $\eta = 0$. Differentiating (7) and using (8), we have

$$\frac{l_2}{\rho_2} = \frac{\rho}{s}\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{\tau}\right) = \frac{1}{s}(\alpha + \sigma\lambda) = \frac{1}{s}(\alpha - \lambda \cot\omega) = \frac{1}{s \sin\omega}(\alpha \sin\omega - \lambda\cos\omega).$$

Choosing

(10)
$$l_2 = \alpha \sin\omega - \lambda \cos\omega,$$

we have

(11)
$$\rho_2 = s \sin\omega = -b \cos\omega,$$

and since

(12)
$$\cot\omega = -\sigma = -s/b,$$

we have, by (3)

(13)
$$\rho_2 = \frac{bs}{\sqrt{b^2+s^2}} = \pm b \sqrt{\frac{k - 2ab\cos\eta}{b^2 + k - 2ab\cos\eta}}.$$

Hence

(13′)
$$\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{s^2}.$$

From (7) and (10) we derive

(14)
$$\lambda_2 = \alpha\cos\omega + \lambda\sin\omega.$$

[1] Hereafter we shall usually write only the first of a set of three such equations.

Differentiating this and reducing by (10) and (8), we have

$$(15) \qquad \tau_2 = -\frac{s(s^2+b^2)}{b\rho} = -\frac{s^2+b^2}{\tau}.$$

Since $ds_2 = bds/\tau$, we obtain

$$(16) \qquad \eta_2 = \int \frac{ds_2}{\tau_2} = -\int \frac{bds}{s^2+b^2} = \cot^{-1}\frac{s}{b} = -\omega,$$

where $\eta_2 = 0$, when $\omega = 0$. By means of (4), (3), and (2), (15) becomes

$$(17) \qquad \tau_2 = \pm \frac{2s(s^2+b^2)}{\sqrt{4a^2b^2-(s^2-k)^2}} = \pm \frac{(b^2+k-2ab\cos\eta)\sqrt{k-2ab\cos\eta}}{ab\sin\eta}.$$

Formulae (13) and (17) give us

$$(18) \qquad \sigma_2 = \pm \frac{b\sqrt{4a^2b^2-(s^2-k)^2}}{2(s^2+b^2)^{3/2}} = \pm \frac{ab^2\sin\eta}{(b^2+k-2ab\cos\eta)^{3/2}}.$$

So far we have merely expressed the curve C_2 intrinsically in terms of C. To find the intrinsic equations of C_2 itself, we must express some of its variables in terms of others. Thus (11) and (16) give us

$$(19) \qquad \rho_2 = -b\cos\eta_2,$$

which verifies the fact that C_2 lies on a sphere S_2 of radius b. Moreover, if we put $\eta = s_2/b$, by (9), in (13_2) and (17_2), we obtain the intrinsic equations of C_2 in the usual form.

6. Some of the results of the last section, for the case in which s is positive, are illustrated by figure 2. The rays PT and PB, indicated by arrows, give the positive directions of the tangent and binormal to C; similarly the rays P_2N_2 and P_2B_2 give the principal normal and binormal to C_2. The principal normal PN to C and the tangent P_2T_2 to C_2 are perpendicular to the plane of the figure and their respective positive directions are away from and toward the observer, in agreement with (7). We have assumed that ω is the angle which the *ray* PO_2, indicated by an arrow, makes with the tangent PT; this makes our figure agree with (10) and (14). Hence ω is here in the *2nd* quadrant, as fixed by (12). The radius of curvature $\rho_2(= P_2N_2)$ is positive, in agreement with (11), (16), and (19).

In case s is negative, the figure must be slightly altered by reversing the directions of the rays PT, PN, P_2N_2, and P_2T_2; ω will then be in the first quadrant and ρ_2 will be negative. But P_2B_2 will always have the same

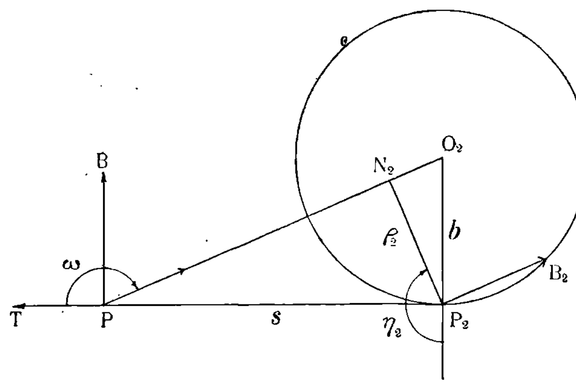

Fig. 2

by (14); and PB will always have the same direction as P_2O_2, direction as PO_2. From this last fact, since $O_2=(c,\ 0,\ 0)$, we have

(20) $$x_2=c-b\lambda,\quad y_2=-b\mu,\quad z_2=-b\nu.$$

7. We turn now to the curve C_1, which, being quasi-spherical, satisfies the equation

(21) $$s_1=a\sigma_1(=-a\cot\omega_1),$$

where s_1^2 is the power of the point P_1 with respect to the sphere S_1, i. e., $s_1=PP_1$. Since C_1 is an evolute of C, it is known that

$$x_1=x+\rho l+\rho\lambda\tan(\eta+c_1),\ \text{etc.}$$

In this case c_1 is obviously zero; hence, by (2_1) we have

(22) $$x_1=x+a\tan\eta(l\cos\eta+\lambda\sin\eta).$$

Differentiating as to s and reducing, we have

$$\alpha_1\frac{ds_1}{ds}=\frac{a\sec^2\eta}{\tau}(l\cos\eta+\lambda\sin\eta).$$

Choosing

(23) $$\alpha_1=l\cos\eta+\lambda\sin\eta,$$

we have

(24) $$\frac{ds_1}{ds}=\frac{a\sec^2\eta}{\tau}=a\sec^2\eta\,\frac{d\eta}{ds}.$$

Hence

(25) $$ds_1 = a \sec^2 \eta d\eta, \quad s_1 = a \tan \eta,$$

where $s_1 = 0$, when $\eta = 0$. By (25) and (21) we have

(26) $$\omega_1 = \eta - \pi/2 + n\pi, \quad \text{and choosing} \quad n = 0,$$
$$\omega_1 = \eta - \pi/2.$$

We know in advance that $l_1 = \pm \alpha$ and therefore by (23) that $\lambda_1 = \pm (l \sin \eta - \lambda \cos \eta)$. We now choose

(27) $$l_1 = \alpha, \quad \lambda_1 = l \sin \eta - \lambda \cos \eta.$$

Differentiating (23) and reducing, we have, by (24),

$$\frac{l_1}{\rho_1} \cdot \frac{a \sec^2 \eta}{\tau} = - \frac{\alpha \cos \eta}{\rho},$$

and by (27_1) and (2_2),

(28) $$\rho_1 = - \frac{a\rho}{\tau \cos^3 \eta} = - \frac{a\sigma}{\cos^3 \eta} = - \frac{as}{b \cos^3 \eta},$$

which, by (3), becomes

(29) $$\rho_1 = \frac{8a^4b^2s}{(s^2 - k)^3} = \pm \frac{a \sqrt{k - 2ab \cos \eta}}{b \cos^3 \eta}.$$

The differentiation of (27_1) gives us, by (24) and (2_1),

$$-\left(\frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\lambda_1}{\tau_1}\right) \frac{a \sec^2 \eta}{\tau} = \frac{l}{a \sin \eta},$$

which, by (23) and (28), reduces to

$$\frac{\lambda_1}{\tau_1} = - \frac{\tau \cos^2 \eta}{a^2} (l \sin \eta - \lambda \cos \eta),$$

and by (27_2), gives us

(30) $$\tau_1 = - \frac{a^2}{\tau \cos^2 \eta}.$$

By means of (3) and (4_2), this becomes

(31) $$\tau_1 = \pm \frac{a \sqrt{k - 2ab \cos \eta}}{b \sin \eta \cos^2 \eta} = \pm \frac{8a^4b^2s}{(s^2 - k)^2 \sqrt{4a^2b^2 - (s^2 - k)^2}}.$$

By (21), (25), and (3), we have

$$\sigma_1 = \tan\eta = \pm \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (s^2 - k)^2}}{s^2 - k}, \tag{32}$$

and by (25) and (30),

$$\eta_1 = \int \frac{ds_1}{\tau_1} = -\frac{1}{a}\int \tau d\eta = -\frac{1}{a}\int ds,$$

whence

$$\eta_1 = -s/a, \quad s = -a\eta_1, \tag{33}$$

provided $\eta_1 = 0$, when $s = 0$. Finally, by (25) and (29), since $\theta_1 = \int ds_1/\rho_1$, we have

$$\theta_1 = \pm b \int \frac{\cos\eta d\eta}{\sqrt{k - 2ab\cos\eta}}. \tag{33'}$$

which, like θ, is an elliptic integral.

8. Having expressed C_1 intrinsically in terms of C, we shall now find the intrinsic equations of C_1 itself, one of which we already have, namely (21). By means of (26) and (33), equation (3) becomes

$$a^2\eta_1^2 = k + 2ab\sin\omega_1,$$

which, by (21), gives us

$$s_1^2 + a^2 = a^2(1 + \cot^2\omega_1) = \frac{a^2}{\sin^2\omega_1} = \frac{4a^4b^2}{(a^2\eta_1^2 - k)^2}, \tag{34}$$

and therefore

$$a^2\eta_1^2 - k = \pm \frac{2a^2b}{\sqrt{s_1^2 + a^2}}. \tag{35}$$

Moreover (29_1) and (33) give us

$$\rho_1 = -\frac{8a^5b^2\eta_1}{(a^2\eta_1^2 - k)^3}. \tag{36}$$

Finally (21) can be written

$$\tau_1 = \frac{a\rho_1}{s_1}. \tag{37}$$

The required intrinsic equations of C_1, in the usual form, are (35), (36) and (37); the elimination of η_1 between (36) and (35) gives ρ_1 in terms of s_1, and (37) then gives τ_1 in terms of s_1.

9. Some of the results of §§ 7, 8, for the case in which η is in the *2nd* quadrant, are illustrated by figure 3; ω_1 is in the 1st quadrant, by (26); $s_1 (= PP_1)$ is negative, by (25) and (21); $\rho (= PN)$ is positive, by (2_1). The directions of the rays P_1T_1, P_1B_1, PN, and PB agree with (23) and (27_2).

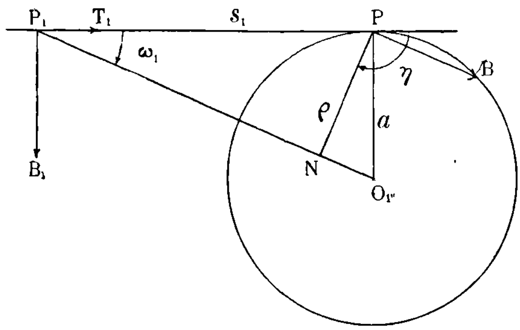

Fig. 3

The tangent to C and the principal normal to C_1 are perpendicular to the plane of the figure and are both directed away from the observer, in agreement with (27_1).

In case η is in the 1st quadrant, s_1 will be positive and P_1 will lie to the right of P instead of to the left. But in every case the positive direction of the binormal P_1B_1 is that of the ray PO_1, by (27_2). Hence

(38) $$x = -a\lambda_1, \quad y = -a\mu_1, \quad z = -a\nu_1.$$

Also, if we make the ray O_1P_1 positive or negative, according as its direction is that of PB or the opposite, then $O_1P_1 = a \sec \eta$, whence

(39) $$x_1 = a\lambda \sec \eta, \quad y_1 = a\mu \sec \eta, \quad z_1 = a\nu \sec \eta.$$

Comparing this with (20), we have

(40) $$\begin{aligned} x_1 &= -(a/b) \sec \eta (x_2 - c), \\ y_1 &= -(a/b) \sec \eta \cdot y_2, \\ z_1 &= -(a/b) \sec \eta \cdot z_2. \end{aligned}$$

10. Let us now try to extract from our formulae their geometric significance. First of all, a glance at formulae (15) and (30) shows that *the torsions of the curves* C_1 *and* C_2 *at any two corresponding points are of the same* *sign, which is opposite to the sign of the torsion of the curve* C *at its corresponding point.*

Since in the proof of (15) the spherical character of C was not used, and in the proof of (30) the quasi-spherical character of C was not used, we can state the following more general pair of theorems.

If C is any quasi-spherical curve (whose osculators touch a sphere S_2) and C_2 is their curve of contact with S_2, then C and C_2 have torsions of opposite signs at corresponding points.

If C is any spherical curve (on a sphere S_1) and C_1 is the curve osculated by the tangent planes to S_1 at the points of C, then C and C_1 have torsions of opposite signs at corresponding points.

11. Moreover, by (20) we see that *the curve* C_2 *is practically the spherical indicatrix of the binormal to the curve* C, the only difference being that the radius of the sphere S_2 on which C_2 lies is b instead of unity, and that every point of C_2 is diametrically opposite to the corresponding point of the indicatrix.

In a precisely similar manner, in view of (38), *the curve* C *is practically the spherical indicatrix of the binormal to the curve* C_1.

12. It will now be advisable to distinguish between the various cases that arise, depending on the relative position and sizes of the spheres S_1 and S_2. If ε is the angle between them, then in every case

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\varepsilon, \\ &= (a-b)^2 + 4ab\cos^2(\varepsilon/2) \\ &= (a+b)^2 - 4ab\sin^2(\varepsilon/2). \end{aligned} \tag{41}$$

By (3), § 3, if f is the maximum value of $|s|$, then $f^2 = k + 2ab$; and when $s^2 = f^2$, then $\eta = \pi + 2n\pi$, so that the osculator to C is a common tangent plane to both spheres, and f *is equal to the length of a common external tangent coplanar with their centers* O_1, O_2. By an elementary construction, this gives $f^2 = c^2 - (a-b)^2$, and f is always real and positive, by (1). Hence, by (41),

$$f^2 = k + 2ab = c^2 - (a-b)^2 = 4ab\cos^2(\varepsilon/2) \tag{42}$$

and

$$k = c^2 - a^2 - b^2 = 2ab\cos\varepsilon. \tag{43}$$

We also define g and $\bar{g}(=ig)$ by the equations

$$\begin{aligned} g^2 &= k - 2ab = c^2 - (a+b)^2 = -4ab\sin^2(\varepsilon/2), \\ \bar{g}^2 &= 2ab - k = (a+b)^2 - c^2 = 4ab\sin^2(\varepsilon/2), \end{aligned} \tag{44}$$

where the real one of the two is positive. Hence

$$\begin{aligned} 2k &= f^2 + g^2 = f^2 - \bar{g}^2, \\ 4ab &= f^2 - g^2 = f^2 + \bar{g}^2. \end{aligned} \tag{45}$$

The following cases will occur:

CASE (a). The spheres are completely external to one another, as in figure 1. Then $c > a+b$, $k > 2ab$, $f > 2\sqrt{ab}$, ε and $\bar{g}$ are imaginary, and g is real.

CASE (b). The spheres are tangent externally. Then $c = a+b$, $\varepsilon = 0$, $k = 2ab$, $g = \bar{g} = 0$, $f = 2\sqrt{ab}$.

CASE (c). The spheres intersect (in a real circle). Then $c < a+b$, $0 < \varepsilon < \pi$, $2ab > k > -2ab$, g is imaginary. $\bar{g}$ is real, f and $\bar{g}$ lie between 0 and $2\sqrt{ab}$.

For some purposes it will be convenient to subdivide case (c) as follows:

SUBCASE (c_1). The angle between the spheres is acute, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $k > 0$, $f > \sqrt{2ab} > \bar{g}$.

SUBCASE (c_2). The spheres are orthogonal, $\varepsilon = \pi/2$, $k = 0$, $c^2 = a^2 + b^2$, $f = \sqrt{2ab} = \bar{g}$.

SUBCASE (c_3). The angle between the spheres is obtuse, $\varepsilon > \pi/2$, $k < 0$, $f < \sqrt{2ab} < \bar{g}$.

In cases (a) or (b), where g is real, it is clear that *g is equal to the length of a common internal tangent to the spheres that is coplanar with their centers*, and is also, by (3), § 3, the minimum value of $|s|$, attained when $\eta = 0$.

When $\eta = \pi/2$, so that the osculator PDP_2 (fig. 1) of C passes through the center O_1 of S_1, then $s^2 = k$. Hence $\sqrt{k}$, which is real in cases (a), (b), (c_1) and (c_2), *is equal to the length of a common tangent* PP_2 *to the spheres* S_1 *and* S_2, *such that the two planes* O_1PP_2, O_2PP_2, *connecting it with the centers of the spheres, are perpendicular to each other.*

Another geometrical interpretation of k is the following: let Q_i be the point of contact of a tangent drawn from the center of either sphere S_i to the other sphere; then k is the power of Q_i with respect to S_i.

Singular points.

13. We shall find that the curves C, C_1, C_2, in the various cases (a), (b), (c), possess singular points of four different types, if we agree to regard points at infinity and asymptotic points as singular.

A third type is a cusp or stationary point of the simplest kind, namely a point at which ρ and τ vanish and change signs, σ is finite and $\neq 0$, and ds changes sign, while $d\theta$ and $d\eta$ do not. By the term « cusp » we shall mean a point of this kind.

The fourth type is the dual of the third, and is therefore a point at which σ and $1/\tau$ vanish and change signs, ρ is finite and $\neq 0$, and $d\eta$ changes sign, while ds and $d\theta$ do not. A point of this kind has a stationary osculator; hence we shall call it an *SO*-point for the sake of brevity.

14. Let us now put $\eta = \pi$ and therefore $|s| = f$, and consider the corresponding triad of points P_1, P, P_2 lying on the respective curves C_1, C, C_2; they are real in every case. By (25), $s_1 = 0$ and P_1 coincides with P. PP_2 is coplanar with O_1O_2 and is a common external tangent to the spheres. By (7) and (23), $\alpha_1 = \alpha_2 = -l$; hence the plane $P_1P_2O_1O_2$, which is the rectifying plane of C, is also the common normal plane of C_1 and C_2; and the tangents to C_1 and C_2 are parallel to one another and are perpendicular to PP_2, the tangent to C. Moreover, C and C_1 not only meet at right angles at the point $P(= P_1)$, but by (27_2) they have a common osculator at that point, namely the tangent plane to S_1.

It is easy to see that all three points are singular points on their respective curves. For, by (2) we have $|\sigma| = f/b \neq 0$, $\rho = 0$, and therefore $\tau = 0$; also ρ and τ change signs, and by (3), $|s|$ is a maximum and ds changes sign. Hence P is a cusp on C; we shall call it an *outer cusp*.

Again, by (13), (15) and (18), we have $|\rho_2| = bf/\sqrt{b^2+f^2} \neq 0$, $1/\tau_2 = \sigma_2 = 0$; and by (16) and (9), $d\eta_2$ changes sign, while ds_2 does not. Hence P_2 is an *SO*-point on C_2, an *outer SO* point.

Finally, by (28), (30) and (32), we have $|\rho_1| = af/b \neq 0$, $1/\tau_1 = \sigma_1 = 0$; and by (33) and (25), $d\eta_1$ changes sign, while ds_1 does not. Hence P_1 is an outer *SO*-point on C_1.

In case (a) there exists another triad of singular points, similar to the last, for which $\eta = 0$ and therefore, by (3) and (44), $|s| = g$. As before, P is a cusp, P_1 and P_2 are *SO*-points, and P_1 coincides with P. PP_2 is now, however, an *internal* common tangent to the spheres; and we shall call P an *inner cusp* on C, etc.

15. An entirely different triad of singular points P_1, P, P_2 is obtained by putting $s = 0$ and therefore, by (3) and (43), $\eta = \pm \varepsilon + 2n\pi$; we choose $\eta = \varepsilon$. These points are real only in cases (b) or (c). For the present we confine ourselves to case (c). Since $s = 0$, P_2 coincides with P and lies on the circle of intersection of the spheres. By (2_2), $\sigma(= -\cot\omega) = 0$ and $\omega = \frac{\pi}{2}$. Hence by (10) and (27_1), $l_1 = l_2 = \alpha$, and the plane $P_1 P_2 O_1 O_2$ is not only the normal plane of C, but also the common rectifying plane of C_1 and C_2. The tangent to C is the tangent to the circle of intersection of the spheres, and the tangents to C_1 and C_2 meet it at right angles. By (14), C and C_2 have a common osculator at $P(= P_2)$, namely the tangent plane to S_2.

P is an SO-point on C. For by (2) we have $\rho = a \sin\varepsilon \neq 0$, $\sigma = 1/\tau = 0$, and by (3), ε is a minimum value of η and $d\eta$ changes sign, while since s changes sign, ds does not.

Moreover, P_2 is a cusp on C_2. For by (18), (42) and (44), $|\sigma_2| = f\bar{g}/2b^2 = (a/b)\sin\varepsilon \neq 0$; by (13) and (17), $\rho_2 = \tau_2 = 0$; and by (9), ds_2 changes sign.

Finally, P_1 is a cusp on C_1, provided $\varepsilon \neq \pi/2$ $(k \neq 0)$. For by (32), we have $\sigma_1 = \tan\varepsilon$, which is finite and $\neq 0$; by (29) and (31), $\rho_1 = \tau_1 = 0$; and by (25), s_1 has a minimum (or maximum) value $a \tan\varepsilon$, so that ds_1 changes sign. But in subcase (c_2), where the spheres are orthogonal $(\varepsilon = \pi/2)$, P_1 becomes a point at infinity, and PP_1 an asymptote to the curve C_1.

16. Even if $\varepsilon \neq \pi/2$, the curve C_1 will have a point at infinity P_1 and an asymptote PP_1 when $\eta = \pi/2$, $|s| = \sqrt{k}$. For when $\eta \to \pi/2$, we see by (25), (29), (31), and (33) that $s_1 \to \infty$, $\rho_1 \to \infty$, $\tau_1 \to \infty$, and $|\eta_1| \to \sqrt{k}/a$. The asymptote will be real in cases (a), (b), (c_1) and (c_2).

The corresponding points P, P_2 of the other two curves are obviously finite, and are non-singular, except in subcase (c_2). P is a point on C at which ρ has its maximum value a. In figure 1 (slightly altered) the osculator PDP_2 of C at P then passes through O_1 and the points P_1, P, P_2, O_2 are coplanar; their plane is not only a rectifying plane of C and a normal plane of C_2, but also an asymptotic plane of C_1 (osculator at the infinite point P_1); hence the asymptote PP_1 is parallel to $O_2 P_2$.

Case (a).

17. We are now prepared to give a general account of the shape and properties of the curves C, C_1, C_2 in the various cases (a), (b), (c). Case (b) is radically different from the other two and will be left to tha last (§§ 26-29).

We begin with case (a), in which the spheres are completely external to one another. By (42) and (44_1), we have

$$4a^2b^2 - (s^2 - k)^2 = (f^2 - s^2)(s^2 - g^2), \tag{46}$$

by means of which we can write formulae (4), (5), (17), (18), (31) and (32) in a more convenient form. For instance, (4) becomes

$$\rho = \pm (1/2b)\sqrt{(f^2 - s^2)(s^2 - g^2)}. \tag{47}$$

Since s never changes sign, we can assume it to be always positive, and $f \geqq s \geqq g$. When $0 < \eta < \pi$, (2) and (5) show that ρ and τ are positive.

As η increases from 0 to π, and s therefore increases from g to f, the point P will describe what we shall call a *semi-arch* of the curve C, starting from an inner cusp K and ending at an outer cusp M. Figure 1 illustrates the case where P lies on this semi-arch and corresponds to a value of η somewhat greater than $\pi/2$.

As η increases from π to 2π, and s decreases from f to g, P will describe another semi-arch, extending from M to another inner cusp K', on which ρ and τ are negative. This semi-arch is evidently symmetric to the first with respect to the rectifying plane MO_1O_2 at the outer cusp M. The entire curve C consists, in general, of an infinite number of congruent arches, and if Φ is the dihedral angle $K - O_1O_2 - K'$, the curve will be carried into itself by a rotation about the axis O_1O_2 through an angle $n\Phi$, the arches being interchanged. Obviously *the total length of every arch of the curve* C, *in case* (a), *is equal to* 2(f — g).

Returning to the semi-arch KM, we see by (2), (3) and (45) that ρ will have its maximum value a at an interior point L, for which

$$\eta = \pi/2, \quad s^2 = k = \frac{1}{2}(f^2 + g^2). \tag{48}$$

Also, since by (5) and (46),

$$\tau = \frac{1}{2s}\sqrt{(f^2 - s^2)(s^2 - g^2)}, \tag{49}$$

therefore

$$\frac{d}{ds}(4\tau^2) = \frac{2}{s^3}(f^2g^2 - s^4),$$

and τ will have its maximum value $(f-g)/2$ at an interior point L', for which

$$(50) \qquad s = \sqrt{fg}, \quad \cos\eta = (f-g)/(f+g).$$

Formulae (48) and (50) give us the

Theorem: *On any semi-arch* KM *of a curve* C, *in case* (a), *the value of* s^2 *at the point* L *where* $|\rho|$ *is a maximum, is the arithmetic mean of its values at the extremities* K *and* M; *and the value of* s *at the point* L′ *where* $|\tau|$ *is a maximum, is the geometric mean of its values at* K *and* M.

Hence neither of these points is the midpoint of the arc KM; L lies nearer to the outer cusp M, and L' lies nearer to the inner cusp K.

18. Continuing with case (a), we now turn to the curve C_2, which, like C, is made up of a set of congruent arches, each arch consisting of two symmetric semi-arches. As η increases from 0 to π, the point P_2 will describe a semi-arch K_2M_2 extending from an inner SO-point K_2 to an outer SO-point M_2; by (13) and (13′), ρ_2 will constantly increase from its minimum value $bg/\sqrt{b^2+g^2}$, at K_2, to its maximum value $bf/\sqrt{b^2+f^2}$, at M_2; by (15), τ_2 and σ_2 are negative; and by (17) and (18) it is easy to see that $|1/\tau_2|$ and $|\sigma_2|$ have each just one maximum value at some interior point of the semi-arch.

Since by (9) $s_2 = b\eta$, the length of the semi-arch is πb. Hence we have the

Theorem: *In case* (a) *the total length of every arch of the curve* C_2, *lying on the sphere* S_2, *is equal to the circumference* $2\pi b$ *of a great circle of the sphere.*

Moreover, putting $\eta = \pi/2$ and referring to the proof of the theorem of § 17, we see that the point L_2 of the curve C_2 that corresponds to the point L of the curve C, at which $|\rho|$ is a maximum, is precisely the midpoint of the semi-arch K_2M_2.

19. Finally, consider the curve C_1 in case (a), and in particular the semi-arch K_1M_1 described by P_1, as η increases from 0 to π. K_1 is an inner and M_1 an outer SO-point on C_1; at each of them the curve touches the sphere S_1. Corresponding to $\eta = \pi/2$ we get a point at infinity L_1 (and an asymptote LL_1), which divides the semi-arch into two open branches.

Since by (25) $s_1(=a\sigma_1) = a\tan\eta$, s_1 is positive on the first branch ($\eta < \pi/2$). Hence, by § 9, P_1 moves to the right from K_1 to L_1, that is, x_1 increases. On the second brauch, where s_1 is negative, P_1 moves in from the left to M_1 (from L_1), as in figure 1. Hence the two branches approach the asymptote in opposite directions.

From (28) and (29) it is easy to show that the curvature $1/\rho_1$ constantly increases from its minimum value $-b/ag$, at K_1, to its maximum value b/af, at M_1, and therefore that $|1/\rho_2|$ has two maxima, of which the first, namely b/ag, is the absolute maximum. The torsion $1/\tau_1$ is negative throughout the semi-arch except at the three point K_1, L_1, M_1, where it vanishes. From (31) we can show that $|1/\tau_1|$ has just one maximum on each branch.

Case (c).

20. In this case the spheres intersect (in a real circle); by means of (43), formula (3) becomes

$$s^2 = 2ab(\cos\varepsilon - \cos\eta), \tag{50}$$

while (42) and (44_2) give us

$$4a^2b^2 - (s^2 - k)^2 = (f^2 - s^2)(\bar{g}^2 + s^2), \tag{51}$$

so that (4) becomes

$$\rho = \pm\frac{1}{2b}\sqrt{(f^2 - s^2)(\bar{g}^2 + s^2)}, \tag{52}$$

where ε, f and $\bar{g}$ are all real. The angle η can now be restricted to the range $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$; and when $\eta = \varepsilon$ (or $2\pi - \varepsilon$), s vanishes and changes sign, while by (2) and (52), $\rho = \pm a \sin\varepsilon = \pm f\bar{g}/2b$.

Now consider a semi-arch KM of the curve C, such that as P moves from K to M, η increases from ε to π and s increases from 0 to $f(= 2\sqrt{ab}\cos\varepsilon/2)$; K is then an SO-point at which C touches the circle of intersection of the spheres, and M is an outer cusp. The variables ρ, τ and σ are all positive; σ and $1/\tau$ constantly increase from 0 to f/b and ∞, respectively. The behavior of ρ, however, depends on the subcase; if $\varepsilon < \pi/2$, ρ increases from $a\sin\varepsilon$ to a and then decreases to 0; while if $\varepsilon \geqq \pi/2$, ρ steadily decreases.

Obviously, *the total length of every arch of the curve* C, *in case* (c), *is equal to* 2f.

21. Continuing with case (c), we now turn to the curve C_2, lying on the sphere S_2. Again let η increase from ε to π and s from 0 to f. Then the point P_2 will describe a semi-arch K_2M_2 of C_2. K_2 is a cusp lying on the circle of intersection of the spheres, and C_2 is there perpendicular to the circle. M_2, on the other hand, is an outer *SO*-point. The variables τ_2 and σ_2 are negative, while ρ_2 is positive; ρ_2 increases from 0 to $bf/\sqrt{b^2+f^2}$ and τ_2 decreases from 0 to $-\infty$; but σ_2, which varies from $-(a/b)\sin\varepsilon$ to 0, may in certain cases have a minimum value at some interior point of the semi-arch. We shall omit the discussion of this circumstance. Since $s_2 = b\eta$, we have the

THEOREM: *In case* (c) *the total length of every arch of the curve* C_2, *on the sphere* S_2, *is equal to* $2(\pi - \varepsilon)b$; *and therefore, in subcase* (c_2), *where the spheres are orthogonal, it is equal to the semi-circumference* πb *of a great circle of* S_2.

22. Finally, we take up the curve C_1 in case (c), and consider the semi-arch K_1M_1 described by the point P_1, as η increases from ε to π and s from 0 to f. K_1 is a cusp, if $\varepsilon \neq \pi/2$, and is a point at infinity, if $\varepsilon = \pi/2$; M_1, however, is always an outer *SO*-point at which the curve touches the sphere S_1. Since by § 16 the shape of the curve is radically different in the three subcases, we shall discuss them separately.

23. Subcase (c_1), spheres intersecting at an acute angle, $\varepsilon < \pi/2$. K_1 is a cusp at which s_1 ($= a\tan\varepsilon$) is positive. Hence, by § 9, K_1 lies to the right of the corresponding point K of the curve C; i. e., $x_1 > x$. As in case (a), § 19, the semi-arch K_1M_1 consists of two open branches having a common asymptote LL_1 ($\eta = \pi/2$), which they approach in opposite directions. On the first branch P_1 moves to the right from K_1 to L_1. Since K_1, by § 15, is coplanar with K, O_1, and O_2, a littfe easy trigonometry soon gives us the following

THEOREM: *If the spheres* S_1, S_2 *intersect at an acute angle* ε, *then the cusps* K_1 *of the curve* C_1 *will lie inside, upon, or outside the sphere* S_2, *according as* a *is less than, equal to, or greater than* $2b\cos\varepsilon$.

If the cusps lie on the sphere, the rest of the curve lies outside the sphere. If $\varepsilon = \pi/3$, the criterion becomes $a <, =,$ or $> b$.

24. Subcase (c_2), spheres orthogonal, $\varepsilon = \pi/2$. K_1 is an infinite point, which may be regarded as a·cusp at infinity. The semi-arch K_1M_1 contains only one branch. As η decreases from π to $\pi/2$, P_1 will start from the *SO*-point M_1 and will approach the asymptote K_1K by moving toward the left, since s_1 ($= a\tan\eta$) is negative. Any two adjacent semi-arches having a common asymptote K_1K, being symmetrical to one another with respect to the plane $K_1KO_1O_2$, approach the asymptote in the same direction, namely toward the left ($x_1 \rightarrow -\infty$ as $\eta \rightarrow \pi/2$).

In this subcase it is a simple matter to find the interior point of a semi-arch at which the absolute value of the torsion $1/\tau_1$ is a maximum. Since $k=0$, formula (31) gives us

$$\frac{1}{\tau_1^2} = -\frac{b}{2a^3}\sin^2\eta\cos^3\eta,$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\tau_1^2}\right) = -\frac{b}{2a^3}\sin\eta\cos^2\eta(2\cos^2\eta - 3\sin^2\eta) = 0,$$

whence $\cos\eta = -\sqrt{3/5}$, $\tan\eta = \pm\sqrt{2/3}$, $s_1 = \pm a\sqrt{2/3}$, and the maximum value of $|1/\tau_1|$ is

$$\frac{3\sqrt{3}}{25}\sqrt{\frac{b}{a^3}}.$$

25. Subcase (c_3), spheres intersecting at an obtuse angle, $\varepsilon > \pi/2$. K_1 is a finite cusp again, as in subcase (c_1); but since η cannot be $=\pi/2$, the curve has no infinite point and no asymptote. As η decreases from π to ε, P_1 moves to the left from the *SO*-point M_1 to the cusp K_1.

By (29), ρ_1 varies from af/b to 0, but af/b is not necessarily its maximum value. By means of (43) and (29) we have

$$\rho_1^2 = \frac{2a^3(\cos\varepsilon - \cos\eta)}{b\cos^6\eta},$$

$$\frac{d}{d\eta}(\rho_1^2) = \frac{2a^3\sin\eta}{b\cos^7\eta}(6\cos\varepsilon - 5\cos\eta),$$

and ρ_1^2 will be a maximum, when $\cos\eta = (6/5)\cos\varepsilon$, which requires ε to be $\leq \cos^{-1}(-5/6) = \pi - \cos^{-1}(5/6)$. The converse holds. Hence we have the

THEOREM: *The curve* C_1 *in case* (c) *will have a maximum* $|\rho_1|$ *at some interior point of a semi-arch, if and only if*

$$\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \pi - \cos^{-1}\frac{5}{6}.$$

If so, ρ_1^2 will have its maximum value

$$\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^6\frac{a^3}{b}(-\sec\varepsilon)^5,$$

when $\cos\eta = (6/5)\cos\varepsilon$, and therefore when $s^2 = -(2/5)ab\cos\varepsilon$ and $s_1 = \pm(a/b)\sqrt{25\sec^2\varepsilon - 36}$.

Obviously *every arch of the curve* C_1, *in subcase* (c_3), *is of finite length, namely* $|2a\tan\varepsilon| = 2a\tan(\pi - \varepsilon)$.

Case (b).

26. Up to this point every curve we have studied consists, in general, of an infinite number of congruent arches connected by cusps or SO-points. We now come to case (b), in which we shall find that each of the curves, C, C_1, C_2 consists of a single arch. In this case the spheres S_1 and S_2 are tangent externally, and by § 12, we have $k = 2ab$, $f^2 = 4ab$.

As in case (a), we can choose s to be always positive. As η varies from 0 to 2π, each curve is completely described. Some of our formulae will now assume a somewhat simpler aspect. Thus formulae (3), (4), (5), and (5′) of § 3 become

$$s = f \sin \eta/2, \tag{53}$$

$$\rho = \pm \frac{s}{2b} \sqrt{f^2 - s^2}, \tag{54}$$

$$\tau = \frac{f}{2} \cos \frac{\eta}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{f^2 - s^2}, \tag{55}$$

$$\theta = \frac{f}{2a} \log \tan \frac{\eta}{4}, \tag{56}$$

where $\theta = 0$, when $\eta = \pi$. For the curve C_2, formulae (17) and (18) of § 5 take the form

$$\tau_2 = \pm \frac{2(b^2 + s^2)}{\sqrt{f^2 - s^2}} = - \frac{2(b^2 + f^2 \sin^2 \eta/2)}{f \cos \eta/2}, \tag{57}$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{s \sqrt{f^2 - s^2}}{2(b^2 + s^2)^{3/2}}. \tag{58}$$

Finally, formulae (29), (31) and (33′) of § 7, relating to the curve C_1, become

$$\rho_1 = - \frac{af \sin \eta/2}{b \cos^3 \eta}, \tag{59}$$

$$\tau_1 = - \frac{af}{2b \cos^2 \eta \cos \eta/2}, \tag{60}$$

$$\theta_1 = - \frac{f}{2a}\left(2 \cos \frac{\eta}{2} + \log \tan \frac{\eta}{4}\right), \tag{61}$$

where $\theta_1 = 0$, when $\eta = \pi$. Hence θ_1 and θ are no longer elliptic integrals.

27. Beginning with the curve C, let us now see what happens to the point P on it, as $\eta \to 0$. By (53), (54), (55) and (56) we see that

$$s \to 0, \quad \rho \to 0, \quad \tau \to f/2, \quad \theta \to -\infty. \tag{62}$$

Since θ is the angle swept out by the tangent to the curve, we see that P will approach a limiting position K, namely the point of contact of the spheres, by winding around it an infinite number of times. Hence K is an asymptotic point. Similarly when $\eta \to 2\pi$, then $s \to 0$, $\rho \to 0$, $\tau \to -f/2$, and $\theta \to +\infty$, so that P again approaches the same asymptotic point K, winding around it in the opposite direction. When $\eta = \pi$ (and $s = f$), we get an outer cusp M, as in the other cases.

Hence the curve consists of two symmetric semi-arches connected by the outer cusp M, and both approaching the same asymptotic point K; the total length of the curve is evidently $2f$. When $\eta = \pi/2$, and therefore $s = f/\sqrt{2}$, we get a point L at which ρ has its maximum value a.

28. Coming to the curve C_2, in case (b), we see by (9), (13) and (57) that when $\eta \to 0$, then

$$s_2 \to 0, \quad \rho_2 \to 0, \quad \tau_2 \to -2b^2/f, \tag{63}$$

and altho by reason of its messy appearance we have not quoted the formula for θ_2, we know geometrically that $\theta_2 \to -\infty$ and that P_2 approaches an asymptotic point K_2 coinciding with K. As η increases from 0 to π, P_2 describes a semi-arch K_2M_2, where M_2 is an outer SO-point; $|\sigma_2|$ has one maximum value at an interior point of the semi-arch. The curve is of total length $2\pi b$ and consists of two symmetrical semi-arches connected by the SO-point M_2, and both havlng the same asymptotic point K_2 $(= K)$.

29. Finally, the curve C_1, still in case (*b*), also consists of two symmetrical semi-arches each having the same asymptotic point K_1 $(= K)$. For by (25), (59), (60) and (61) we see that when $\eta \to 0$, then

$$s_1 \to 0, \quad \rho_1 \to 0, \quad \tau_1 \to -\frac{af}{2b}, \quad \theta_1 \to +\infty. \tag{64}$$

When $\eta \to \pi/2$, $s_1 \to \infty$ and the point P_1 approaches an infinite point L_1 and an asymptote LL_1. When $\eta = \pi$, we get an outer SO-point M_1 $(= M)$. Hence as η increases from 0 to π, P_1 will describe a semi-arch K_1M_1 consisting of two open branches having a common asymptote. On the second branch $(\eta > \pi/2)$, s_1 is negative and the curve extends to the left from the SO-point M_1. On the first branch s_1 is positive and the curve extends to the right from the asymptotic K_1 (the point of contact of the spheres), but of course lies outside of both spheres.

On the second branch the torsion $1/\tau_1$, which vanishes at both extremities of the branch, has a minimum value

$$-\frac{32}{25\sqrt{10}}\cdot\frac{b}{af}$$

at the interior point where $\cos\eta = -4/5$, $s_1 = 3a/4$. This is easily seen by differentiating (60).

By (62), (63) and (64) we see that when $\eta \to 0$, the limiting values of τ, τ_1 and τ_2 satisfy the equation $\tau^2 = \tau_1\tau_2$, and if $b = a$, then $\tau_1 = \tau_2 = -\tau = \pm a$. Hence we have the

THEOREM: *When the spheres are tangent externally, their point of contact* K *is a common asymptotic point of both semi-arches of all three curves* C, C_1 and C_2. *At this point the torsion of* C *is the geometric mean of the torsions of* C_1 and C_2.

Cartesian equations.

30. Having shown that we can get along fairly well without the Cartesian equations of the curves C, C_1 and C_2, we shall now, nevertheless, proceed to find them.

First, however, it will be advisable to prepare the way by introducing a number of new constants and variables, by means of which certain long formulae may be simplified. Thus, letting a, b, c, ε retain their former definitions (§§ 2, 12), we put

$$\begin{aligned} h_1 &= c + a + b \\ h_2 &= c - a + b \\ h_3 &= c + a - b \\ h_4 &= c - a - b, \end{aligned} \tag{65}$$

and

$$\begin{aligned} h &= -h_1h_2h_3h_4 = 4a^2b^2\sin^2\varepsilon \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - c^4 - a^4 - b^4, \end{aligned} \tag{66}$$

so that by (1),

$$h_1 > h_2 > 0, \quad h_1 > h_3 > 0, \quad h_2 > h_4, \quad h_3 > h_4; \tag{67}$$

h_4 and $-h$ are positive in case (a), zero in case (b), and negative in case (c).

We also put

$$
(68)\qquad \begin{aligned} f^2 &= h_2 h_3 = c^2 - (a-b)^2 = 4ab\cos^2\frac{\varepsilon}{2} \\ g^2 &= h_1 h_4 = c^2 - (a+b)^2 = -4ab\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}
$$

$$
(69)\qquad \begin{aligned} f_1^2 &= h_1 h_3 = (c+a)^2 - b^2 = 2a(c+a+b\cos\varepsilon) \\ g_1^2 &= h_2 h_4 = (c-a)^2 - b^2 = 2a(-c+a+b\cos\varepsilon) \end{aligned}
$$

$$
(70)\qquad \begin{aligned} f_2^2 &= h_1 h_2 = (c+b)^2 - a^2 = 2b(c+b+a\cos\varepsilon) \\ g_2^2 &= h_3 h_4 = (c-b)^2 - a^2 = 2b(-c+b+a\cos\varepsilon), \end{aligned}
$$

where f^2 and g^2 agree with their former definitions (§ 12) and f_1^2, f_2^2, g_1^2, g_2^2 are somewhat analogous. From (67) we see that f^2, f_1^2, and f_2^2 are always positive and that

$$
(71)\qquad f_1^2 > f^2, \quad f_2^2 > f^2, \quad f^2 > g^2, \quad f^2 > g_1^2, \quad f^2 > g_2^2;
$$

also that while g^2, g_1^2 and g_2^2 may be positive, zero or negative, we always have

$$
(72)\qquad |g^2| \gtreqless |g_1^2|, \quad |g^2| \gtreqless g_2^2.
$$

Further, we put

$$
(73)\qquad \begin{aligned} k &= \frac{1}{2}(f^2+g^2) = c^2 - a^2 - b^2 = 2ab\cos\varepsilon, \\ k_1 &= \frac{1}{2}(f_1^2+g_1^2) = c^2 + a^2 - b^2 = 2a(a+b\cos\varepsilon), \\ k_2 &= \frac{1}{2}(f_2^2+g_2^2) = c^2 - a^2 + b^2 = 2b(b+a\cos\varepsilon), \end{aligned}
$$

where k is defined as before (§ 12) and k_1, k_2 are analogous. From these definitions we immediately derive the following identities:

$$
(74)\qquad k_1 - k = 2a^2, \quad k_2 - k = 2b^2, \quad k_1 + k_2 = 2c^2,
$$

$$
(75)\qquad \begin{aligned} k + 2ab &= f^2, \quad k - 2ab = g^2 \\ k_1 + 2ac &= f_1^2, \quad k_1 - 2ac = g_1^2 \\ k_2 + 2bc &= f_2^2, \quad k_2 - 2bc = g_2^2, \end{aligned}
$$

$$
(76)\qquad f^2 - g^2 = 4ab, \quad f_1^2 - g_1^2 = 4ac, \quad f_2^2 - g_2^2 = 4bc,
$$

$$
(77)\qquad \begin{aligned} -h &= f^2 g^2 = f_1^2 g_1^2 = f_2^2 g_2^2 \\ &= k^2 - 4a^2b^2 = k_1^2 - 4a^2c^2 = k_2^2 - 4b^2c^2 \\ &= kk_1 + kk_2 - k_1k_2. \end{aligned}
$$

The newly defined constants can be interpreted geometrically as follows: Let the equators of the spheres S_1, S_2 be their circles of intersection with the planes $x=0$ and $x=c$, respectively; then k_1 (k_2) is equal to the power of a point on the equator of S_1 (S_2) with respect to S_2 (S_1). Let the axis O_1O_2 of the spheres meet S_1 in the points F_1, G_1 and S_2 in the points F_2, G_2, where F_1, F_2 are the outer points of intersection and G_1, G_2 the inner; then f_1^2 (g_1^2) is equal to the power of F_1 (G_1) with respect to the sphere S_2, and similarly f_2^2 (g_2^2) is the power of F_2 (G_2) with respect to S_1.

31. In order to derive the Cartesian equations of the curve C, consider figure 1 (§ 4). Since $P=(x, y, z)$, we have $x=O_1A$, $y=AD$, $z=DP$. Let

$$y=u\cos\varphi,\quad z=u\sin\varphi, \tag{78}$$

so that u and φ are the polar coordinates of the projection of P on the yz-plane, and φ is also the longitude of P on the sphere S_1, referred to O_1O_2 as axis. Then $u=AP$ and φ is the angle DAP. Also $O_1P=a$, $O_2P_2=b$, $AO_2=c-x$, and $P_2P=s$. The three right triangles O_1AP_2, O_2AP and PP_2O_2, right-angled at A, A and P_2, respectively, give us

$$\begin{aligned}u^2&=a^2-x^2,\\ PO_2^2&=u^2+(c-x)^2=s^2+b^2,\\ 2cx&=c^2+a^2-b^2-s^2,\end{aligned}$$

and therefore, by (73_2) and (77),

$$x=\frac{1}{2c}(k_1-s^2), \tag{79}$$

and

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{2c}\sqrt{4a^2c^2-(k_1-s^2)^2}=\frac{1}{2c}\sqrt{h+2k_1s^2-s^4}\\ &=\frac{1}{2c}\sqrt{(f_1^2-s^2)(s^2-g_1^2)},\end{aligned} \tag{80}$$

which is always positive. Moreover, denoting derivatives as to s by primes, we have

$$\alpha(=x')=-\frac{s}{c}, \tag{81}$$

which also follows directly from the figure, and

$$uu'=\frac{s(k_1-s^2)}{2c^2}. \tag{82}$$

From (78) we have

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{z}{y}, \quad \varphi' = \frac{yz' - zy'}{y^2 + z^2}. \tag{83}$$

We now make use of the identity

$$(yz' - zy')^2 = (y'^2 + z'^2)(y^2 + z^2) - (yy' + zz')^2,$$

which, since $y'^2 + z'^2 = 1 - x'^2$, $y^2 + z^2 = u^2$ and $yy' + zz' = uu'$, reduces, by (81), (80), (82), (74_1) and (77), as follows:

$$\begin{aligned}(yz' - zy')^2 &= (1 - \alpha^2)u^2 - (uu')^2 \\ &= \frac{1}{4c^2}[4a^2(c^2 - s^2) - (k_1 - s^2)^2] \\ &= \frac{1}{4c^2}(h + 2ks^2 - s^4).\end{aligned} \tag{84}$$

By definition and by (73_1) and (77), we now put

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2b^2 - (k - s^2)^2} = \frac{1}{2c}\sqrt{h + 2ks^2 - s^4} \\ &= \frac{1}{2c}\sqrt{(f^2 - s^2)(s^2 - g^2)}.\end{aligned} \tag{85}$$

Hence, by (84) and (83_2), we have

$$yz' - zy' = ev, \tag{86}$$

$$\varphi' = e\frac{v}{u^2} = \frac{e}{v}\cdot\frac{v^2}{u^2}, \tag{87}$$

where $e = \pm 1$. By (4) and (2), § 3, we see that φ' changes sign, when and only when, ρ (and therefore $\sin\eta$) changes sign; and by inspecting figure 1 we also see that φ is an increasing function of s when ρ is positive. Hence

$$e = \pm 1, \quad e\rho > 0, \quad e\sin\eta > 0. \tag{88}$$

We proceed to put (87) into a more convenient form. First, by (85), (80), (74_1) and (76_2) we have

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{u^2} &= \frac{h + 2ks^2 - s^4}{h + 2k_1s^2 - s^4} = 1 - \frac{4a^2s^2}{h + 2k_1s^2 - s^4} \\ &= 1 - \frac{4a^2s^2}{(f_1^2 - s^2)(s^2 - g_1^2)} = 1 - \frac{a}{c}\left(\frac{f_1^2}{f_1^2 - s^2} + \frac{g_1^2}{s^2 - g_1^2}\right).\end{aligned}$$

Hence, using (85) again, we obtain from (87) the formula

$$(89)\qquad \varphi = e\int_f^s \frac{vds}{u^2}$$

$$= 2e\int_f^s \left[c - a\left(\frac{f_1^2}{f_1^2 - s^2} + \frac{g_1^2}{s^2 - g_1^2}\right)\right] \frac{ds}{\sqrt{(f^2 - s^2)(s^2 - g^2)}},$$

so that when $\varphi = 0$, $s = f$, and the point P coincides with an outer cusp M (Compare §§ 17, 20, 27). Hence we have chosen M in the xy-plane.

By means of (89) we have expressed φ in terms of s as a sum of three elliptic integrals, one of which is of the first kind and the other two of the third kind. In case (b), however, they degenerate, as we shall see, into logarithmic integrals.

The Cartesian equations of the curve C have now been found and are given by (79) and (78), where u and φ are expressed in terms of s by (80) and (89).

32. Passing to the curve C_2, we can find its Cartesian equations by means of (6), § 5, provided we can express α, β, γ in terms of s; α we already have, by (81); in order to find β and γ, consider the equations

$$yy' + zz' = uu',$$
$$zy' - yz' = -ev,$$

the second one being (86). Here everything is known in terms of s except $y'(=\beta)$ and $z'(=\gamma)$. Solving for y' and z', we have

$$(y^2 + z^2)y' = yuu' - ezv,$$
$$(y^2 + z^2)z' = zuu' + ezv.$$

Using (78) and dividing through by u, which never vanishes, we have

$$(90)\qquad \begin{aligned} u\beta &= uu' \cos\varphi - ev \sin\varphi \\ u\gamma &= uu' \sin\varphi + ev \cos\varphi. \end{aligned}$$

We are now ready to make use of (6). First, (6_1), (79) and (81) give us

$$(91)\qquad x_2 = \frac{1}{2c}(h_1 + s^2).$$

Then (6_2), (6_3), (78) and (90) give us

$$uy_2 = (u^2 - suu')\cos\varphi + esv \sin\varphi$$

and a similar expression for uz_2. Putting $w = u^2 - suu'$, we have, by (80), (82) and (77),

$$w = \frac{1}{4c^2}(h + s^4) = \frac{1}{4c^2}(s^2 - fg)(s^2 + fg). \tag{92}$$

Hence

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{w}{u}\cos\varphi + e\,\frac{sv}{u}\sin\varphi, \\ z_2 &= \frac{w}{u}\sin\varphi - e\,\frac{sv}{u}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{93}$$

The equations (91) and (93), where u, v, w and φ are expressed in terms of s by (80), (85), (92) and (89), are then the Cartesian parametric equations of the curve C_2, the parameter being not its own arc-length, but that of C.

Now let

$$y_2 = u_2 \cos\varphi_2, \quad z_2 = u_2 \sin\varphi_2, \tag{94}$$

so that u_2 and φ_2 are the polar coordinates of the projection of P_2 on the yz-plane, and φ_2 is the longitude of P_2 on the sphere S_2. By (93) we have

$$u_2^2 = y_2^2 + z_2^2 = \frac{w^2 + s^2v^2}{u^2},$$

and this easily reduces, by (74_3) and (77), to the form $(1/4c^2)(h + 2k_2s^2 - s^4)$, which is always positive. Hence choosing u_2 to be positive, we have, by (73_3) and (77) again,

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - (k_2 - s^2)^2} = \frac{1}{2c}\sqrt{h + 2k_2s^2 - s^4} \\ &= \frac{1}{2c}\sqrt{(f_2^2 - s^2)(s^2 - g_2^2)}. \end{aligned} \tag{95}$$

Notice the parallelism between u, v, and u_2, as given by (80), (85) and (95).

In order to express the longitude φ_2 in terms of s, we put

$$\varphi_2 = \varphi + \psi, \quad \psi = \varphi_2 - \varphi, \tag{96}$$

so that ψ is the difference in longitude between the corresponding points P_2, P of the curves C_2, C. Figure 1 represents the special case in which $\varphi_2 = 0$, $\psi = -\varphi$. Then (94) becomes

$$y_2 = u_2 \cos(\varphi + \psi), \quad z_2 = u_2 \sin(\varphi + \psi), \tag{97}$$

which, by the trigonometric addition formulae and (93), gives us

(98) $$\cos\psi = \frac{w}{uu_2}, \quad \sin\psi = -e\,\frac{sv}{uu_2}, \quad \tan\psi = -e\,\frac{sv}{w}.$$

Hence φ_2 is expressed in terms of s by (96), (89) and (98). When $\varphi = 0$, $\varphi_2 = 2n\pi$; we choose $\varphi_2 = 0$ and therefore $\psi = 0$; P_2 is then an outer SO-point M_2 lying in the xy-plane.

33. Finally, we come to the curve C_1, which, by (40), § 9, is an easy step from C_2. Since by (3), § 3, sec $\eta = 2ab/(k - s^2)$, we soon find, using (74_3), that

(99) $$x_1 = \frac{a^2(s^2 - k_2)}{c(s^2 - k)},$$

and that

(100) $$y_1 = \frac{2a^2}{s^2 - k}\,y_2, \quad z_1 = \frac{2a^2}{s^2 - k}\,z_2.$$

Here also, as in the case of the other two curves, we introduce the polar coordinates u_1, φ_1 of the projection of P_1 on the yz-plane, so that

(101) $$y_1 = u_1 \cos\varphi_1, \quad z_1 = u_1 \sin\varphi_1.$$

Since by § 4 O_1P_1 is parallel to O_2P_2, we have $\varphi_1 = \varphi_2 + n\pi$; we choose $n = 0$, so that

(102) $$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi + \psi.$$

Hence, by comparing (100), (101) and (94), and using (95), we have

(103) $$u_1 = \frac{2a^2u_2}{s^2 - k} = \frac{a^2\sqrt{h + 2k_2s^2 - s^4}}{c(s^2 - k)},$$

which is positive or negative, according as $s^2 > k$ or $< k$; if $s^2 = k$, P_1 is a point at infinity. Substituting from (93) in (100), we have

(105) $$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2a^2w}{u(s^2 - k)}\cos\varphi + e\,\frac{2a^2sv}{u(s^2 - k)}\sin\varphi, \\ z_1 &= \frac{2a^2w}{u(s^2 - k)}\sin\varphi - e\,\frac{2a^2sv}{u(s^2 - k)}\cos\varphi, \end{aligned}$$

which, together with (99), supplies us with the Cartesian equations of C_1.

34. Case (a), spheres external. We now take up the special peculiarities of the separate cases, beginning with case (a). Here g^2, g_1^2, g_2^2 are positive and all the quantities considered in §§ 31-33 are therefore real.

Let Φ be the real modulus of periodicity of the integral φ in (89). Then $\Phi/2$ is the amount by which the longitnde of P increases, as P describes a semi-arch of the curve C. Similarly let Φ_1 and Φ_2 be the real moduli of periodicity of φ_1 and φ_2, respectively, and let $\Psi = \Phi_2 - \Phi$; hence, by (102),

(106) $$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi + \Psi.$$

The particular semi-arch MK' described by P as φ increases from O to $\Phi/2$ we shall call the *first semi-arch* of C. Since s decreases from f to g, φ' is negative; hence, by (87), $e = -1$, and by (89),

(107) $$\Phi = -2\int_f^g \frac{v\,ds}{u^2}.$$

By (88), $\sin\eta < 0$, so that this first semi-arch is precisely the second one mentioned in § 17.

Now consider (98) and see what happens to ψ as P describes the first semi-arch MK'. Since u, u_2 and s are always positive, $\sin\psi$ vanishes, by (85), only when $s = f$ or g, and $\cos\psi$ vanishes, by (92), only when $s = \sqrt{fg}$. Hence as s decreases from f through $\sqrt{fg}$ to g, ψ increases from O through $\pi/2$ to π. It follows that $\Psi = 2\pi$ and that (106) becomes

(108) $$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi + 2\pi,$$

which means that *as the corresponding points* P, P_1, P_2 *describe complete arches of their respective curves, the common longitude of* P_2 *and* P_1 *increases* 2π *more than the longitude of* P *does.*

By reference to the theorem of § 17 we see that $\psi = 2n\pi \pm \pi/2$, if and only if, τ is a minimum or maximum; that is, *the plane joining* P *to the axis* $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ *of the spheres will be perpendicular to the plane joining* P_1 *and* P_2 *to the axis, if and only if,* P *is a point at which the radius of torsion* τ *of the curve* C *is a minimum or maximum.*

By putting $\varphi = n\Phi$ and therefore $s = f$, we easily find the coordinates of the outer cusps of the curve C, which are also the outer SO-points of C_1, to be

(109) $$\left[\frac{a}{c}(a-b),\ \ \frac{af}{c}\cos n\Phi,\ \ \frac{af}{c}\sin n\Phi\right],$$

and the coordinates of the outer SO-points of C_2 to be

$$(110)\qquad \left[c+\frac{b}{c}(a-b),\ \ \frac{bf}{c}\cos n\Phi,\ \ \frac{bf}{c}\sin n\Phi\right],$$

where n is an integer; for $n=0$, these are the points $M\ (=M_1)$ and M_2. Similarly, putting $\varphi=(2n+1)\Phi/2$ and $s=g$, we find the coordinates of the inner cusps of the curve C, which are also the inner SO-points of C_1, to be

$$(111)\qquad \left[\frac{a}{c}(a+b),\ \ \frac{ag}{c}\cos(2n+1)\frac{\Phi}{2},\ \ \frac{ag}{c}\sin(2n+1)\frac{\Phi}{2}\right],$$

and the coordinates of the inner SO-points of C_2 to be

$$(112)\qquad \left[c-\frac{b}{c}(a+b),\ \ -\frac{bg}{c}\cos(2n+1)\frac{\Phi}{2},\ \ -\frac{bg}{c}\sin(2n+1)\frac{\Phi}{2}\right].$$

34. CASE (c), spheres intersecting. In this case g, g_1 and g_2 are imaginary, but g^2, g_1^2 and g_2^2 are real and negative, and all the other constants involved in the formulae of §§ 31-33 are real.

We define Φ, Φ_1, Φ_2 and Ψ exactly as in case (a). To find $\Phi/2$, we integrate $d\varphi$ over the first semi-arch MK' of C, on which s decreases from f to 0 and η increases from π to $2\pi-\varepsilon$, and obtain, since $e=-1$,

$$(113)\qquad \Phi=-2\int_f^0\frac{v\,ds}{u^2}.$$

This first semi-arch is not the one discussed in § 20, but the next one to it.

Now consider (98) and see what happens to ψ this time, as P describes the first semi-arch. By (92) $w>0$, since $h>0$; and since $uu_2>0$, $\cos\psi>0$. By (85) $sv>0$, except when $s=f$ or 0; hence $\sin\psi\geqq 0$, and $\pi/2>\psi\geqq 0$. It follows that ψ increases from 0 to a maximum ($<\pi/2$) at some interior point on the semi-arch, and then decreases to 0 again. On the next semi-arch ψ obviously is negative and has a minimum value at an interior point. Hence $\Psi=0$ and by (106) we have

$$(114)\qquad \Phi_1=\Phi_2=\Phi.$$

We have shown, therefore, that *the difference between the common longitude of* P$_1$ *and* P$_2$ *and the longitude of* P *is always less in absolute value than* $\pi/2$ *and oscillates about the value zero, which value it assumes when these points are cusps or* SO-*points.*

To find just where on the first semi-arch ψ is a maximum is a bit difficult, as it depends on the solution of a certain quartic equation. In subcase (c_2), however, where $\varepsilon = \pi/2$, $g^2 = -f^2$, and $h = f^4$, it is easy. For by (98), (92) and (85) we have, since $e = -1$,

$$\tan\psi = \frac{2cs\sqrt{f^4 - s^4}}{f^4 + s^4},$$

and by putting $(\tan^2\psi)' = 0$, we get

$$s^8 - 6f^4 s^4 + f^8 = 0,$$
$$s^2 = (\sqrt{2} - 1)f^2, \quad \cos\eta = -(\sqrt{2} - 1),$$

which locates the required point; and the maximum value of ψ is

$$\tan^{-1}\frac{c}{f} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab},$$

which is $\geqq \pi/4$, and is $= \pi/4$ only when $a = b$.

The singular points at which $s = f$ are still given by (109) and (110), as in case (a). On the other hand, by putting $s = 0$ we find the coordinates of the SO-points of C, which are also the cusps of C_2, to be

$$(115) \quad \left[\frac{a}{c}(a + b\cos\varepsilon),\ \ \frac{ab}{c}\sin\varepsilon\cos(2n+1)\frac{\Phi}{2},\ \ \frac{ab}{c}\sin\varepsilon\sin(2n+1)\frac{\Phi}{2}\right],$$

and the coordinates of the cusps of C_1 to be

$$(116) \quad \left[\frac{a}{c}(a + b\sec\varepsilon),\ \ -\frac{a^2}{c}\tan\varepsilon\cos(2n+1)\frac{\Phi}{2},\ \ -\frac{a^2}{c}\tan\varepsilon\sin(2n+1)\frac{\Phi}{2}\right],$$

provided $\varepsilon \neq \pi/2$. If $\varepsilon = \pi/2$, these cusps of C_1 are points at infinity.

36. In case (a) or case (c) it may happen that C, C_1 and C_2 are closed curves, namely when Φ is a rational multiple of π. If $\Phi = 2\pi p/q$, where p/q is a rational number in its lowest terms, then in case (a), by (108), $\Phi_1 = \Phi_2 = 2\pi(p + q)/q$, and in case (c), by (114), $\Phi_1 = \Phi_2 = 2\pi p/q$. Hence *in both cases the curves consist of exactly* q *arches.* As the corresponding points P, P_1, P_2 describe the complete curves C, C_1, C_2, *they all three wind around the* x-*axis exactly* p *times in ease* (c); *in case* (a), *however*, P *winds around* p *times, while* P_1 *and* P_2 *wind around* p + q *times.*

In connection with these closed curves three interesting problems present themselves for investigation by someone having a thorough knowledge of elliptic functions: (1) to find the relations that must subsist between a, b and c, in order that the curves may be closed; (2) to ascertain whether the closed curves are algebraic; (3) to discuss the simpler types of closed curves.

37. Case (b), spheres tangent externally. In this case, by § 30, we have

$$
\begin{aligned}
&g^2 = g_1^2 = g_2^2 = h = 0, \\
&f^2 = 4ab, \quad f_1^2 = 4ac, \quad f_2^2 = 4bc, \\
&k = 2ab, \quad k_1 = 2ac, \quad k_2 = 2bc, \\
&f_1^2 - f^2 = 4a^2, \quad f_2^2 - f^2 = 4b^2, \quad f_1^2 + f_2^2 = 4c^2.
\end{aligned} \tag{117}
$$

Since $s > 0$ (§ 26), formulae (85), (80), (95), (92), (103), (87) and (98) reduce to the following:

$$
\begin{aligned}
&v = \frac{s}{2c}\sqrt{f^2 - s^2}, \quad u = \frac{s}{2c}\sqrt{f_1^2 - s^2}, \quad u_2 = \frac{s}{2c}\sqrt{f_2^2 - s^2}, \\
&w = \frac{s^4}{4c^2}, \quad u_1 = \frac{a^2 s\sqrt{f_2^2 - s^2}}{c(s^2 - k)},
\end{aligned} \tag{118}
$$

$$
\varphi' = e\,\frac{2c\sqrt{f^2 - s^2}}{s(f_1^2 - s^2)}, \tag{119}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cos\psi = \frac{s^2}{\sqrt{(f_1^2 - s^2)(f_2^2 - s^2)}}, \quad \sin\psi = -e\,\frac{2c\sqrt{f^2 - s^2}}{\sqrt{(f_1^2 - s)(f_2^2 - s^2)}}, \\
&\tan\psi = -e\,\frac{2c\sqrt{f^2 - s^2}}{s^2}.
\end{aligned} \tag{120}
$$

By integrating (119), we obtain

$$
\varphi = -e\,\frac{f}{2a}\log\frac{f + \sqrt{f^2 - s^2}}{s} + e\tan^{-1}\frac{\sqrt{f^2 - s^2}}{2a}. \tag{121}
$$

We can get rid of the inconvenient factor e $(= \pm 1)$ by using (53), § 26, and expressing φ in terms of η. For since $0 < \eta < 2\pi$, we have, by (88), $e\cos\eta/2 > 0$ and $e\sqrt{f^2 - s^2} = f\cos\eta/2$. The result is

$$
\varphi = \frac{f}{2a}\log\tan\frac{\eta}{4} + \tan^{-1}\left(\frac{f}{2a}\cos\frac{\eta}{2}\right). \tag{122}
$$

When $s \to 0$, and therefore $\eta \to 0$ or 2π, then $\varphi \to -\infty$ or $+\infty$, as was to be expected. By means of (56) and (55), § 27, we reduce (122) to the form

$$
\varphi = \theta + \tan^{-1}\frac{\tau}{a}, \tag{123}
$$

and also, if we put

$$\chi = -\tan^{-1}\frac{\tau}{a} = -\tan^{-1}\left(\frac{f}{2a}\cos\frac{\eta}{2}\right), \tag{124}$$

to the form

$$\varphi = \theta - \chi. \tag{125}$$

The semi-arch of the curve C for which the longitude φ is positive, and therefore $\eta > \pi$, $\rho > 0$, $\tau < 0$, $e = -1$, we shall call the *positive semi-arch*; the corresponding semi-arches of C_1 and C_2 are then also positive. Of course the positive and negative semi-arches of any one of the curves are symmetrical with respect to the xy-plane. On the positive semi-arch of C the angles φ, θ and χ are evidently all positive, and χ is $< \pi/2$; indeed it is $< \tan^{-1}(f/2a)$. Hence we have the

THEOREM: *The angle* θ *swept out by the tangent to the curve* C, *in case* (b), *as the point of contact moves along the positive semi-arch from the cusp* M *to a position* P *is equal to the longitude* φ *of* P *increased by the positive angle* $\chi = \tan^{-1}(-\tau/a) < \tan^{-1}(f/2a)$.

As P winds around and approaches its limiting asymptotic point K, θ and φ both become positively infinite, but their difference $\theta - \varphi \to \tan^{-1}(f/2a)$.

An particular, if the spheres are congruent ($b = a$), then $\theta - \varphi \to \pi/4$.

Turning now to (120) and introducing η, we have

$$\psi = \tan^{-1}\left(-e\frac{2c\sqrt{f^2 - s^2}}{s^2}\right) = -\tan^{-1}\frac{2c\cos\eta/2}{f\sin^2\eta/2}. \tag{126}$$

As P describes the positive semi-arch of C from M to K, ψ increases from 0 to $\pi/2$. Hence, by (102), § 33, we have the

THEOREM: *As the corresponding points* P, P_1, P_2 *describe the positive semi-arches of the respective curves* C, C_1, C_2, *starting from the outer singular points* M, M_1, M_2 *and approaching the common asymptotic point* K, *the common longitude* $\varphi_1 (= \varphi_2)$ *of* P_1 *and* P_2 *exceeds the longitude* φ *of* P *by an angle* ψ *that constantly increases from zero and approaches* $\pi/2$ *as a limit.*

INDICE DEL TOMO VI DELLA SERIE 4ª