

N° D'ORDRE

221.

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. ALFRED TERQUEM,

Ancien Élève de l'École Normale.

---

1<sup>re</sup> THÈSE. — DE PHYSIQUE. — ÉTUDE DES VIBRATIONS LONGITUDINALES  
DES VERGES PRISMATIQUES LIBRES AUX DEUX EXTRÉMITÉS.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DE CHIMIE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Soutenues le 22 Août 1859 devant la Commission d'Examen.

---

MM. DESPRETZ, *Président.*

HENRI SAINTE-CLAIRE DEVILLE, }  
P. DESAINS, } *Examineurs.*

---

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

---

1859.

# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

<b>DOYEN</b> .....	MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie.
<b>PROFESSEURS HONORAIRES.</b> {	BIOT. PONCELET.
	DUMAS..... Chimie. DESPRETZ..... Physique. DELAFOSSÉ..... Minéralogie. BALARD..... Chimie. LEFÈBURE DE FOURCY... Calcul différentiel et intégral. CHASLES..... Géométrie supérieure. LE VERRIER..... Astronomie. DUHAMEL..... Algèbre supérieure. GEOFFROY-SAINT-HILAIRE. Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
<b>PROFESSEURS.</b> .....	LAMÉ..... Calcul des probabilités, Physique mathématique. DELAUNAY..... Mécanique physique. PAYER..... Botanique. C. BERNARD..... Physiologie générale. P. DESAINS..... Physique. LIOUVILLE..... Mécanique rationnelle. HÉBERT..... Géologie. PUISEUX..... Astronomie.
	BERTRAND..... } Sciences mathématiques. J. VIEILLE..... }
<b>AGRÉGÉS</b> .....	MASSON..... } Sciences physiques. PELIGOT..... }
	DUCHARTRE..... Sciences naturelles.
<b>SECRETÉAIRE</b> .....	E. PREZ-REYNIER.

---

---

# THÈSE DE PHYSIQUE.

---

ÉTUDE

DES

## VIBRATIONS LONGITUDINALES DES VERGES PRISMATIQUES

LIBRES AUX DEUX EXTRÉMITÉS.

---

L'étude des vibrations longitudinales des verges ne présente presque aucune difficulté, quand on ne s'occupe que des nœuds produits par le mouvement longitudinal et de la relation qui existe entre le son rendu par la verge et le coefficient d'élasticité de la substance qui la forme. La théorie de ces vibrations est la même que celle des tuyaux sonores, et l'expérience la vérifie aussi complètement que possible. Chladni (1), et après lui M. Wertheim (2) déterminèrent à l'aide du son longitudinal rendu par une verge, le premier, la vitesse du son dans les corps solides, et le second, leurs coefficients d'élasticité. Savart (3) de son côté, étudiant le mouvement du

---

(1) Chladni, *Traité d'Acoustique*.

(2) *Annales de Physique et de Chimie*, 3<sup>e</sup> série, tome XII.

(3) *Annales de Physique et de Chimie*, 2<sup>e</sup> série, tome LXVII.

sable répandu à la surface d'une verge ébranlée longitudinalement, avait reconnu que, outre les nœuds que la théorie indique, il se formait d'autres lignes nodales présentant une disposition toute particulière. Sur les verges prismatiques, en effet, ces dernières sont disposées alternativement sur les deux faces opposées; sur les verges cylindriques, elles forment des espèces d'hélices qui rampent autour de la verge; de plus, ces nœuds sont presque toujours très-voisins de ceux qui se forment quand on fait rendre à la verge le son transversal le plus rapproché du son longitudinal.

Savart reconnut immédiatement que ces nœuds devaient être dus à des vibrations transversales qui accompagneraient les vibrations longitudinales; mais il se trompa sur la nature de ce mouvement transversal. Voyant le sable lancé tangentiellement à la surface de la verge, il crut que cela ne pouvait être dû qu'à un mouvement longitudinal des molécules, analogue à celui que produirait un choc brusque exercé à l'extrémité; une fois dans cette voie, il lui fallut recourir à de nouvelles hypothèses pour compléter sa théorie.

Voici ce qu'il dit à ce sujet :

« On est forcé d'admettre que tout corps qui vibre longitudinalement » est le siège de deux mouvements, l'un qui est analogue à celui des » colonnes d'air, l'autre qui se compose d'inflexions transversales alternatives, qui ont pour caractère distinctif de s'établir toujours du même » côté de l'axe, sans jamais passer du côté opposé, mais qui se font d'ailleurs dans le même temps que si elles passaient périodiquement de » l'autre côté de l'axe. »

Voici, selon Savart, la cause de ces inflexions. La verge étant comprimée dans le sens de sa longueur par suite de la contraction longitudinale qui accompagne par exemple la première période d'une vibration longitudinale, au lieu de rester rectiligne, s'infléchit en différents points, présentant ainsi un nombre plus ou moins considérable de courbures alternatives. Ces inflexions se maintiennent tant que la verge est assez fortement comprimée et cessent avant qu'elle ait repris sa longueur primitive; pendant la dilatation qui accompagne la seconde période de la même vibration, il ne se produit rien de particulier; à chacun des angles formés par deux parties infléchies en sens contraire, il y a dilatation des molécules à la partie externe et compression à la partie interne; le sable suivant le mouvement des molécules doit se porter vers l'angle externe.

Telle est, exposée d'une manière sommaire, la théorie proposée par Savart. Elle fut admise à défaut d'autre explication, mais toujours avec une certaine défiance. Elle présente comme défaut capital de n'être basée sur

aucune expérience directe et d'être même en contradiction avec des expériences faites par Savart lui-même. Ayant fait reposer la moitié d'une verge par sa tranche à la surface d'un bain de mercure, il vit en ébranlant longitudinalement l'autre moitié, que le mercure restait en repos vis-à-vis des points où se rassemblait le sable, et au contraire était extrêmement agité dans l'intervalle ; suivant sa théorie, le contraire devait avoir lieu. En second lieu, en appliquant cette même théorie aux vibrations transversales des verges, on en conclurait que le sable ne doit pas quitter les ventres, puisqu'il s'y fait alternativement des contractions et des dilatations, quand la verge en ces points passe de la forme concave à la forme convexe. On a lieu de s'étonner que Savart ait pu ainsi se laisser aller à des idées aussi peu rationnelles ; ce qui, je crois, l'a induit en erreur, ce sont les expériences qu'il avait faites précédemment sur la communication du mouvement vibratoire entre divers corps solides en contact, par lesquelles il avait cru démontrer que le sable répandu à la surface des corps en vibration se meut toujours parallèlement à la direction de l'ébranlement, principe qui est loin d'avoir toute la généralité qu'il lui supposait. Dans le cas actuel, voyant le sable posséder un mouvement tangentiel, il crut indispensable d'admettre un mouvement semblable dans les molécules de la verge. Ces remarques suffisent évidemment pour faire voir combien cette théorie est peu satisfaisante.

Savart a également essayé d'appliquer sa théorie à l'explication du son à l'octave grave du son longitudinal que rendent parfois les verges. M. Wertheim (1) a depuis proposé une autre explication du même fait. Il suppose qu'il peut exister dans une verge deux ondes sonores, comme la théorie le démontre pour les milieux indéfinis ; sur l'une, les molécules auraient des déplacements perpendiculaires à la surface de l'onde ; sur l'autre, des déplacements parallèles, et cette dernière se propagerait avec une vitesse moitié moindre que la première. Nous discuterons cette explication quand nous aurons à examiner ce phénomène.

Dans la théorie que nous proposons, nous admettons comme Savart que les nœuds supplémentaires sont dus à des vibrations transversales ; mais tandis qu'il divise la verge en diverses parties qui exécutent des mouvements d'oscillation autour de leurs milieux, je suppose que les molécules ont simultanément des mouvements vibratoires parallèles et perpendiculaires à l'axe de la verge ; la coexistence de ces deux mouvements rend, en effet, à

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, tome XXXI.

peu près compte de toutes les particularités que présentent les verges. Aug. Seebeck, dans la partie relative à l'acoustique du *Répertoire de Physique* de Dove, tome VI, avait déjà émis cette idée, mais il ne l'avait pas développée, ni étendue à l'explication de tous les phénomènes que présentent les verges ébranlées longitudinalement.

## I.

Supposons qu'on ébranle longitudinalement une verge prismatique libre à ses deux extrémités et fixée en son milieu. En projetant du sable sur une des faces, on voit en général se dessiner, outre le nœud médian, d'autres nœuds, comme l'avait observé Savart. Ces derniers sont, comme on le voit *Pl. I, fig. 1, b, et fig. 2, b*, disposés alternativement sur les deux faces opposées, et si l'on fixe la verge en un quelconque de ces nœuds, le son cesse aussitôt. Les verges métalliques se prêtent mieux que toutes les autres à ces expériences, à cause de la facilité avec laquelle on peut les ébranler. Toutefois on peut aussi se servir de verges de verre ou de bois. Il faut éviter d'encaster la verge dans un étau; pressée en effet dans une trop grande étendue, elle ne vibre pas facilement jusqu'au milieu. Il vaut mieux la tenir à la main, en la pressant entre le pouce et l'index, ces deux doigts étant posés sur les faces latérales. Le choix du sable n'est pas non plus indifférent pour la netteté des lignes nodales. Le sable glissant sur la surface de la verge, il convient de le prendre très-fin, en poussière impalpable. Le grès qu'on emploie habituellement est trop léger, les parties les plus ténues restent souvent sur les ventres, où il se forme ces espèces de tourbillons que l'on observe encore mieux avec la poudre de lycopode. J'ai toujours employé du sulfate de baryte réduit en poudre et passé au tamis de soie. Le sable en grains plus gros roule à la surface de la verge, tombe par les faces latérales et disparaît très-rapidement. Quand, au contraire, on ébranle une verge transversalement à l'aide de l'archet, il est peut-être préférable d'employer du sable plus gros et débarrassé de toute poussière; avec du sable très-fin les nœuds se dessinent moins vite et avec moins de netteté.

On ébranle facilement les verges métalliques en les frottant sur les faces latérales avec les doigts enduits de colophane; pour les verges de verre, on

prend un morceau de drap, légèrement humecté d'un mélange d'eau et d'acide chlorhydrique ou d'alcool.

Si, après avoir ébranlé une verge longitudinalement, on l'ébranle transversalement, de telle sorte qu'elle rende l'harmonique transversal le plus voisin du son longitudinal, les nœuds qui se forment diffèrent en général à peine de ceux qu'a produits l'ébranlement longitudinal, surtout si l'intervalle des deux sons est très-faible; seulement les nœuds qui précédemment étaient alternés, se reproduisent maintenant tous sur les deux faces opposées, comme cela résulte évidemment de la théorie des vibrations transversales des verges. Le déplacement des nœuds souvent n'atteint pas 1 millimètre; quelquefois il est plus considérable; nous verrons plus loin à quoi tiennent ces irrégularités.

Pour ébranler les verges transversalement, on les place comme l'indiquent tous les auteurs, sur de petits chevalets de liège taillés en biseau et fixés sur des disques de plomb assez lourds; le corps sonore, étant parfaitement isolé, vibre très-facilement, et les vibrations se continuent pendant un temps assez long sans s'éteindre. Comme on est obligé de faire rendre aux verges des harmoniques très-élevés qu'il n'est pas toujours facile de faire sortir, on doit d'abord placer les chevalets au-dessous de deux nœuds, et ensuite en fixer un troisième à la surface de la verge, à l'aide d'un petit morceau de bois dur taillé en biseau.

Pour nous placer d'abord dans le cas le plus simple, supposons que l'on ébranle longitudinalement une verge dont l'épaisseur et la longueur soient telles, qu'il y ait unisson presque absolu entre le son longitudinal et un des harmoniques transversaux; nous pourrions admettre qu'il se produit simultanément des vibrations longitudinales et transversales: voyons ce qui devra résulter de la coïncidence de ces deux mouvements vibratoires perpendiculaires. Le mouvement longitudinal ne donne naissance qu'à un seul nœud situé au milieu de la verge; le mouvement transversal en produit un plus grand nombre dont les positions sont déterminées par les formules qu'a données Euler et qu'ont vérifiées MM. Strekke (1) et Lissajous (2). De plus, de part et d'autre d'un nœud, le mouvement vibratoire change de sens.

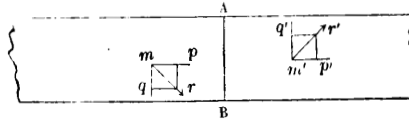
Soit AB un nœud transversal placé en un point quelconque de la verge autre que le milieu (*fig. 1*); soient  $m$  et  $m'$  deux molécules situées de part

(1) *Annales de Poggendorff*, tome XXVII.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>e</sup> série, tome XXX.

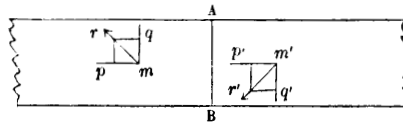
et d'autre de AB; les déplacements longitudinaux dirigés tous deux dans le même sens pourront être représentés par  $mp$ ,  $m'p'$ ; les déplacements trans-

Fig. 1.



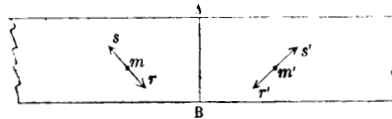
versaux de sens contraire seront représentés à ce moment par les deux lignes  $mq$ ,  $m'q'$ ; ces deux déplacements, se composant entre eux, donneront une résultante dirigée suivant les lignes  $mr$ ,  $m'r'$ . Pendant la deuxième période de la même vibration, les déplacements longitudinaux et transversaux changent de sens en même temps et sont représentés par les lignes  $mp$  et  $m'q'$  pour  $m$  (fig. 2), et par  $m'p'$  et  $m'q'$  pour  $m'$ ; les résultantes seront

Fig. 2.



$mr$ ,  $m'r'$ . Donc les molécules  $m$  et  $m'$ , situées de part et d'autre du nœud transversal AB, décriront dans leur mouvement vibratoire les deux lignes  $rs$ ,  $r's'$  (fig. 3), obliques sur l'axe de la verge et inclinées en sens contraire

Fig. 3.



par rapport au plan nodal qui les sépare; cela suppose que les vitesses longitudinales et transversales, sans être égales, restent dans un rapport constant pendant toute la durée d'une vibration.

Le sable répandu à la surface de la verge est mis en mouvement et lancé obliquement en vertu de l'impulsion qui lui est communiquée par les molécules superficielles, pendant leur mouvement vers l'extérieur; pendant qu'elles exécutent le reste de leur vibration, le sable suit la surface infléchie



sans recevoir aucune impulsion. Il devra donc prendre un mouvement de glissement qui le portera vers B, et l'éloignera de A pour le porter vers les deux nœuds voisins; la moitié des nœuds se trouvera ainsi dessinée sur une des faces; les autres seront disposés sur l'autre face dans les intervalles qui séparent les premiers.

Quand on ébranle une verge transversalement, le sable répandu à la surface glisse également vers les nœuds; mais ceux-ci ne sont plus alternes, comme dans le cas précédent. Comment, dans ce cas, le mouvement vibratoire de la verge peut-il donner au sable un mouvement tangentiel vers les nœuds? Aux ventres, les molécules décrivent des lignes parallèles aux plans nodaux; aussi le sable a-t-il une très-grande tendance à y rester et à y former des espèces de tourbillons; cela s'observe, même en prenant du sable très-lourd, tel que du sulfate de baryte. Une molécule prise au contraire près d'un nœud décrit des lignes légèrement obliques par rapport au plan nodal voisin et alternativement inclinées en sens contraires pendant les deux périodes d'une vibration. Le sable n'est mis en mouvement et lancé vers les nœuds que pendant le quart d'une vibration complète, quand la surface sur laquelle il est placé passe de la forme plane à la forme convexe; quand la surface passe de la forme concave à la forme plane, il ne peut la quitter, puisque la vitesse de la verge va en s'accéléralant, et quand la surface de convexe devient concave, il ne peut évidemment se mouvoir. Par suite, quand le mouvement transversal existe seul, le sable se porte vers tous les nœuds sur les deux faces opposées de la verge; quand il est accompagné d'un mouvement longitudinal, les nœuds sont au contraire alternes.

La disposition générale des nœuds par l'ébranlement longitudinal n'est pas la même, suivant que l'harmonique transversal à l'unisson du son longitudinal correspond à un nombre pair ou impair de nœuds. Supposons d'abord que le son longitudinal soit très-rapproché d'un son transversal correspondant à un nombre pair de nœuds, 14 nœuds par exemple; on peut obtenir cet accord avec une verge ayant 6<sup>mm</sup>,14 d'épaisseur et une longueur de 1 mètre à peu près. On a alors la disposition représentée *Pl. I, fig. 1, b*, qui est parfaitement conforme à la théorie. Sur une des faces sont les deux nœuds extrêmes; sur l'autre, le deuxième et l'avant-dernier; sur chaque face, les nœuds sont disposés symétriquement par rapport au milieu; de part et d'autre de ce point se trouvent, sur une des faces, deux nœuds consécutifs 7 et 8, dont la distance est par suite la moitié de celle de deux autres nœuds; le nœud dû au mouvement longitudinal n'est pas marqué sur cette face; sur l'autre, au contraire, il est dessiné, et sa

distance aux deux nœuds voisins 6 et 9 est égale à la distance de deux autres nœuds multipliés par  $\frac{3}{2}$ . Cela résulte évidemment du tableau suivant, où se trouvent inscrites les distances des nœuds consécutifs de cette verge. Vis-à-vis des distances mesurées, se trouvent les mêmes distances calculées à l'aide des formules données par M. Lissajous pour les vibrations transversales des verges.

NOEUDS.	DISTANCES		NOEUDS.	DISTANCES	
	mesurées.	calculées.		mesurées.	calculées.
A. 1	24,5	24,4	A. 2	92	92,5
1. 3	142	142,5	2. 4	149	148
3. 5	149	148	4. 6	148	148
5. 7	147,5	148	6. C	111,5	111
7. 8	75	74	C. 9	111,5	111
8. 10	148	148	9. 11	148	148
10. 12	148	148	11. 13	148	148
12. 14	141	142,5	13. B	91,5	92,5
14. B	24	24,4			

Si donc l'harmonique transversal correspond à un nombre pair de nœuds, on aura nécessairement l'une ou l'autre de ces deux dispositions, suivant que le nombre de nœuds sera  $4n$  ou  $4n + 2$ .

$$4n + 2.$$

Milieu.

$$\begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ face } 1 - 3 - \dots - 2n + 1 \quad | \quad 2n + 2 \text{ --- } \dots \text{ --- } 4n \text{ --- } \dots \text{ --- } 4n + 2 \\ 2^{\text{e}} \text{ face } - 2 - 4 \dots 2n \text{ --- } \quad | \quad \text{--- } 2n + 3 \dots \text{ --- } 4n + 1 \text{ --- } \end{array}$$

$$4n.$$

Milieu.

$$\begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ face } 1 - 3 \dots 2n - 1 \text{ --- } \quad | \quad \text{--- } 2n + 2 \dots 4n - 2 \text{ --- } \dots \text{ --- } 4n \\ 2^{\text{e}} \text{ face } - 2 - 4 \dots \text{ --- } 2n \quad | \quad 2n + 1 \text{ --- } \dots \text{ --- } 4n - 1 \text{ --- } \end{array}$$

Admettons au contraire que l'harmonique transversal corresponde à un nombre impair de nœuds, à 13 nœuds par exemple ; ce nouvel accord a lieu avec la même verge pour une longueur égale à 857 millimètres. Ou aura la disposition indiquée *Pl. I, fig. 2, b*. Le nœud du milieu, qui appartient à la fois au mouvement longitudinal et transversal, est marqué sur les deux faces ; à côté de ce nœud se trouve sur une des faces le nœud précédent 6, et sur l'autre le nœud suivant 8. Les nœuds extrêmes sont sur les deux faces opposées, et enfin de part et d'autre du nœud du milieu le sable se meut dans le même sens. La théorie indique en effet qu'il doit en être ainsi.

Voici le tableau des mesures prises dans ce cas :

NOEUDS.	DISTANCES		NOEUDS.	DISTANCES	
	mesurées.	calculées.		mesurées.	calculées.
A. 1	22,5	22,6	A. 2	85	85,7
1. 3	131	131,7	2. 4	136	137,1
3. 5	136	137,1	4. 6	137	137,1
5. 7	139	137,1	6. 7	69,5	68,5
7. 8	68	68,5	7. 9	137	137,1
8. 10	137	137,1	9. 11	137	137,1
10. 12	137	137,1	11. 13	131	131,7
12. B	85	85,7	13. B	22,5	22,6

La disposition générale des nœuds sera donc la suivante, le nombre des nœuds étant  $4n + 1$  ou  $4n - 1$ .

$$4n - 1.$$

$$\begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ face } 1 - 3 - \dots - 2n - 1 . 2n \text{ ——— } \dots 4n - 2 \text{ ———} \\ 2^{\text{e}} \text{ face } - 2 - 4 \dots \text{ ——— } 2n . 2n + 1 \dots \text{ ——— } 4n - 1 \end{array}$$

$$4n + 1.$$

$$\begin{array}{l} 1^{\text{re}} \text{ face } 1 - 3 - \dots - 2n + 1 . 2n + 2 \dots 4n \text{ ———} \\ 2^{\text{e}} \text{ face } - 2 - 4 \dots 2n . 2n + 1 \text{ ——— } \dots - 4n + 1 \end{array}$$

2.

On peut remarquer que dans le premier cas, c'est-à-dire quand le nombre des nœuds est pair, les nœuds sont disposés symétriquement par rapport au milieu, mais que la disposition est différente sur les deux faces opposées; quand le nombre des nœuds est impair, il y a symétrie par rapport au centre de la verge, la première moitié d'une des faces présentant la même disposition que la deuxième moitié de l'autre face.

Il est évident que les deux dispositions précédentes sont les seules que l'on puisse obtenir quand on admet l'unisson absolu des deux sons. Elles sont encore très-nettes quand l'unisson n'existe pas parfaitement; mais jamais on n'obtient quatre dispositions différentes, comme l'avait indiqué Savart.

La formation de ces nœuds supplémentaires par l'ébranlement longitudinal étant due à la coexistence du mouvement transversal synchrone, inversement en ébranlant une verge transversalement il devra se produire un mouvement longitudinal, quand l'intervalle du son transversal et du son longitudinal sera très-faible. Les deux sons n'étant pas complètement identiques, il se fait ici une espèce d'entraînement ou de communication de mouvement, comme cela a lieu quand on fait vibrer l'un à côté de l'autre deux corps sonores, soit deux tuyaux, soit deux diapasons, ou deux cordes presque à l'unisson; cette communication de mouvement doit dépendre plutôt de la différence qui existe entre les nombres de vibrations des sons rendus par les deux instruments que de leur rapport. Aussi dans le cas actuel la coexistence des deux mouvements longitudinal et transversal se produit-elle plus facilement pour les sons graves que pour les sons aigus, sans qu'il soit possible de préciser exactement la limite de l'intervalle des deux sons, pour lequel elle cesse. Si l'intervalle du son transversal au son longitudinal est assez considérable, le mouvement longitudinal ne se produira pas en ébranlant transversalement; quand il commence à devenir peu sensible à l'oreille, le mouvement longitudinal apparaît et devient de plus en plus intense à mesure que cet intervalle diminue. Or, dans une verge de dimensions quelconques, on peut toujours, en la coupant par une de ses extrémités, arriver à établir l'unisson entre le son longitudinal et un harmonique transversal. Le nombre des vibrations longitudinales varie en effet en raison inverse de la longueur de la verge; le nombre des vibrations transversales varie en raison inverse du carré de la longueur; donc, si on diminue la longueur d'une verge, le son transversal montera plus vite que le son longitudinal, et s'il est d'abord plus bas, il s'en rapprochera de plus en plus, lui deviendra égal et le dépassera.

On peut même, à l'aide du sonomètre, déterminer approximativement quelle sera la longueur de la verge pour laquelle l'unisson cherché sera atteint. Soient en effet  $L$  la longueur actuelle de la verge,  $m$  et  $m_1$  les longueurs de la corde du sonomètre qui sont à l'unisson du son longitudinal et du son transversal inférieur qui en approche le plus,  $x$  la longueur cherchée.

On aura

$$m_1 > m, \quad \frac{mx}{L} = \frac{m_1 x^2}{L^2},$$

d'où

$$x = L \times \frac{m}{m_1}.$$

La longueur obtenue ainsi n'est qu'approchée à cause des inexactitudes inhérentes à la détermination de  $m$  et  $m_1$ ; c'est plutôt l'observation même des phénomènes qui doit guider dans cette opération.

Si donc on diminue peu à peu la longueur d'une verge de manière qu'un des harmoniques transversaux plus bas que le son longitudinal s'en rapproche de plus en plus, on voit, en ébranlant transversalement, s'établir progressivement la disposition alterne des nœuds qui caractérise l'ébranlement longitudinal. Elle commence à se manifester d'abord aux extrémités, tous les nœuds voisins du milieu se reproduisant sur les deux faces; puis de nouveaux nœuds deviennent moins nets, finissent par disparaître, et enfin l'ébranlement transversal donne la même disposition que l'ébranlement longitudinal, quand les deux sons diffèrent d'un intervalle à peine appréciable à l'oreille. On voit donc que si l'unisson est encore assez éloigné, le mouvement longitudinal, d'abord très-faible, ne peut manifester son action qu'aux extrémités, où il est le plus intense; au milieu, le sable obéit encore aux impulsions qui lui sont communiquées par le mouvement transversal seul; puis, comme le mouvement longitudinal devient plus intense à mesure que les deux sons se rapprochent, son action s'étend alors jusqu'au milieu.

Néanmoins la disposition des nœuds par l'ébranlement transversal est toujours inverse de celle que produit l'ébranlement longitudinal, c'est-à-dire que les nœuds qui se trouvent sur une des faces de la verge quand on ébranle longitudinalement, se dessinent au contraire sur la face opposée par le second mode d'ébranlement et inversement, comme on le voit, *Pl. I, fig. 1, b et c, et fig. 2, b et c*; les *fig. 1, a et fig. 2, a*, donnent la disposition des nœuds quand le mouvement transversal existe seul. De plus, si l'harmonique transversal correspond à un nombre impair de nœuds, il y a

identité entre les dispositions de nœuds produits par les deux modes d'ébranlements, quoiqu'elles soient inverses; si, au contraire, il correspond à un nombre pair de nœuds, les deux nœuds voisins du milieu sont marqués sur une des faces; sur l'autre, au lieu du nœud qui occupe le milieu, il se forme quatre nœuds consécutifs. Cela tient évidemment à ce que le mouvement longitudinal est toujours très-faible vers le milieu; du reste, dans les mêmes circonstances l'ébranlement longitudinal donne souvent la même disposition. Voici par suite les dispositions nodales observées par les deux modes d'ébranlement dans les deux cas cités précédemment et représentés *Pl. I, fig. 1 et 2.*

Verge de laiton,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Longueur, } 1000 \text{ millimètres.} \\ \text{Épaisseur, } 6^{\text{mm}}, 14 \end{array} \right.$   
 Nombre de nœuds transversaux = 14.

*Ébranlement longitudinal.*

Milieu.

1 <sup>re</sup> face.	1	—	3	—	5	—	7		8	—	10	—	12	—	14.
2 <sup>e</sup> face.	—	2	—	4	—	6	—		—	9	—	11	—	13	—.

*Ebranlement transversal.*

1 <sup>re</sup> face.	—	2	—	4	—	6.	7.	8.	9	—	11	—	13	—.
2 <sup>e</sup> face.	1	—	3	—	5	—	7.	8	—	10	—	12	—	14.

---

Verge de laiton,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Longueur, } 856 \text{ millimètres.} \\ \text{Épaisseur, } 6^{\text{mm}}, 14, \end{array} \right.$   
 Nombre des nœuds = 13.

*Ébranlement longitudinal.*

1 <sup>re</sup> face.	1	—	3	—	5	—	7.	8	—	10	—	12	—.
2 <sup>e</sup> face.	—	2	—	4	—	6.	7	—	9	—	11	—	13.

*Ebranlement transversal.*

1 <sup>re</sup> face.	—	2	—	4	—	6.	7	—	9	—	11	—	13.
2 <sup>e</sup> face.	1	—	3	—	5	—	7.	8	—	10	—	12	—.

Quand, en continuant à raccourcir la verge, l'intervalle des deux sons ne peut plus être apprécié par l'oreille, le son longitudinal et le son transver-

sal sortent très-difficilement. En ébranlant longitudinalement la verge, on entend en même temps le troisième harmonique longitudinal, pour lequel il existe également un nœud au milieu. En outre le sable, après s'être réuni aux nœuds qui s'étaient formés précédemment, par un ébranlement plus énergique se sépare brusquement à la fin, et tend à se réunir sur les nœuds intermédiaires qui appartiennent à la face opposée. Si, au lieu de tenir la verge entre les doigts, on la pose sur des chevalets de liège disposés de la même manière que pour l'ébranler transversalement, le son sort plus facilement, même sans fixer le milieu, en fixant au contraire un des points où doit se faire un des nœuds du mouvement transversal.

L'ébranlement transversal devient également difficile ; le plus souvent, au lieu de l'harmonique transversal à l'unisson du son longitudinal, on obtient soit l'harmonique inférieur, soit l'harmonique supérieur. On réussit mieux en ébranlant d'abord longitudinalement la verge posée sur des chevalets de liège, puis ensuite passant l'archet sur l'extrémité pendant que le son persiste encore. La disposition des nœuds, dans ce cas, tantôt est identique à celle que donne l'ébranlement longitudinal, tantôt inverse comme précédemment. Il suffit souvent de presser plus ou moins fortement l'archet contre l'extrémité de la verge pour obtenir l'une ou l'autre disposition ; le même changement se produit quelquefois en ébranlant la verge par l'une ou par l'autre extrémité.

A mesure que l'on se rapproche de l'unisson, l'ébranlement longitudinal devient de plus en plus difficile ; le sable montre quand l'unisson absolu est atteint, une indécision complète, se réunissant tantôt sur certains nœuds, tantôt sur les nœuds intermédiaires, souvent sur tous les nœuds qui alors cessent d'être alternes ; néanmoins ils ne sont jamais nets, à cause du peu d'énergie du mouvement vibratoire et des oscillations du sable, qui tend successivement à se réunir soit sur l'un, soit sur l'autre système de nœuds ; ces oscillations sont accompagnées de battements provenant d'une augmentation d'intensité du son, quand un certain système de vibrations s'établit pendant quelques instants. Il semble par suite que le mouvement longitudinal ne puisse pas exister seul et qu'il doive nécessairement être accompagné d'un mouvement transversal isochrone, la direction relative des deux mouvements venant à changer, quand l'un des sons, d'abord plus bas que l'autre, l'atteint et le dépasse. Si on raccourcit davantage la verge, le son transversal devenant plus élevé que le son longitudinal, l'ébranlement longitudinal redevient plus facile, et les nœuds présentent définitivement la disposition inverse de celle qui existait avant l'unisson ; le sable conserve

encore au commencement de l'ébranlement, une légère hésitation, qui diminue de plus en plus à mesure que l'on s'écarte de l'unisson.

L'ébranlement transversal donne des résultats moins nets avant comme après l'unisson, la disposition alterne des nœuds étant tantôt identique à celle que donne l'ébranlement longitudinal, tantôt inverse. Quand les deux sons commencent à différer, la disposition inverse se produit seule, et en même temps l'ébranlement devient plus facile. Souvent l'ébranlement transversal donne après l'unisson, quand le renversement des nœuds par l'ébranlement longitudinal s'est déjà opéré, la même disposition qu'avant l'unisson ; le renversement ne s'opère que quand le son transversal est déjà assez élevé au-dessus du son longitudinal : c'est à ce moment surtout que l'ébranlement transversal devient le plus difficile.

La longueur qui correspond à l'unisson absolu du son transversal et du son longitudinal peut, par l'observation des faits précédents, être déterminée en général à moins de 1 millimètre près, surtout avec des verges de 1 mètre à 1<sup>m</sup>,50 ; c'est ce que démontrent les observations suivantes :

Verge de laiton. — Épaisseur = 6<sup>mm</sup>,14.

*Ebranlement longitudinal.* — 15 nœuds.

Longueur = 1156 millimètres.

1<sup>re</sup> face : 1 — 3 — 5 — 7. 8 — 10 — 12 — 14 —.

2<sup>e</sup> face : — 2 — 4 — 6 — 8. 9 — 11 — 13 — 15.

Le sable, qui s'était d'abord réuni aux nœuds indiqués, tend à la fin de l'ébranlement à les quitter pour se porter sur les nœuds intermédiaires.

Longueur = 1153.

La disposition des nœuds est devenue inverse :

1<sup>re</sup> face : — 2 — 4 — 6 — 8. 9 — 11 — 13 — 15.

2<sup>e</sup> face : 1 — 3 — 5 — 7. 8 — 10 — 12 — 14 —.

L'ébranlement transversal donne exactement la même disposition que l'ébranlement longitudinal, et cette identité se conserve jusqu'à ce que la longueur se réduise à 1146 millimètres pour laquelle les nœuds changent de face.

Il serait facile de multiplier ces exemples.

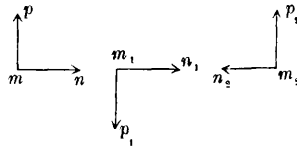
On voit donc en résumé que l'on peut expliquer d'une manière générale



les faits exposés précédemment, en admettant la coexistence de deux mouvements vibratoires de même période, l'un transversal, l'autre longitudinal; mais un grand nombre de faits échappent encore à la théorie et semblent dépendre de la constitution moléculaire de la substance même, d'une manière qui nous est complètement inconnue.

En admettant ainsi l'existence de deux mouvements perpendiculaires qui se composent, il y a au point de vue de la théorie une indifférence complète sur la direction relative de ces deux mouvements; cela ne dépend que de la constitution de la verge. Si le son longitudinal et le son transversal diffèrent peu, les deux modes d'ébranlements donnent aux molécules des mouvements analogues. Seulement si  $mp$  et  $mn$  (*fig. 4*) représentent à un moment

Fig. 4.



donné les déplacements d'une molécule  $m$  quand on ébranle longitudinalement la verge, les déplacements dus à l'ébranlement transversal seront, pour la même molécule,  $m_1 n_1$  et  $m_1 p_1$ , ou bien  $m_2 p_2$  et  $m_2 n_2$ .

Quand l'unisson est atteint, par l'ébranlement longitudinal un des deux mouvements élémentaires change de sens, probablement le mouvement longitudinal. L'ébranlement transversal donne, au contraire, les deux dispositions de lignes nodales aussi bien au-dessous qu'au-dessus de l'unisson, probablement à cause de l'indifférence de la direction relative des deux mouvements élémentaires. L'unisson même est caractérisé par une véritable indifférence dans le sens des mouvements, par la difficulté qu'on éprouve à ébranler la verge longitudinalement et transversalement, et enfin par les battements qui accompagnent les oscillations du sable quand il semble hésiter entre une certaine disposition de nœuds et l'inverse.

Des faits que nous exposerons plus loin conduisent à admettre que c'est le sens du mouvement longitudinal qui change suivant le mode d'ébranlement, et quand la différence entre les deux sons change de signe.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que la largeur n'a aucune influence sur ces phénomènes, à la condition d'être toujours très-petite relativement à la longueur, de telle sorte qu'on puisse considérer toutes les molécules d'une même section comme ayant le même mouvement.

## II.

D'après ce qui précède, il est facile de prévoir la disposition de nœuds qui se produira quand il y aura unisson entre un harmonique longitudinal autre que le son fondamental, et un harmonique transversal; je n'ai examiné que ce qui est relatif au deuxième harmonique longitudinal. Pour les harmoniques plus élevés, cette étude serait beaucoup plus difficile, à cause de l'acuité des sons et du rang de l'harmonique transversal à l'unisson du son longitudinal; il est convenable même dans ce cas d'employer des verges minces, avec lesquelles les harmoniques transversaux d'un rang élevé se produisent plus facilement qu'avec des verges plus épaisses. Pour faire sortir le deuxième harmonique longitudinal d'une verge, il suffit de la faire reposer sur des chevalets de liège placés au-dessous des points où doivent se faire les deux nœuds; on ébranle la verge d'une main, pendant que de l'autre on la serre latéralement à l'un des nœuds.

Les nœuds dus au mouvement longitudinal sont à une distance des extrémités égale au quart de la longueur de la verge; au milieu et aux extrémités sont des ventres. Il est facile de reconnaître que jamais il ne pourra y avoir coïncidence entre les nœuds du mouvement longitudinal et un des nœuds du mouvement transversal. Soit en effet  $n$  le nombre de nœuds du son transversal à l'unisson du deuxième harmonique longitudinal. La distance du deuxième nœud et de l'avant-dernier à l'extrémité est donnée par l'expression  $\frac{5l}{2(2n-1)}$ ,  $l$  étant la longueur de la verge. Donc la distance de ce même nœud au nœud du mouvement longitudinal le plus voisin sera

$$\frac{l}{4} - \frac{5l}{2(2n-1)} = \frac{(2n-1)l}{4(2n-1)}$$

A partir du deuxième nœud, surtout pour un harmonique aussi élevé, tous les nœuds sont équidistants et leur distance est égale à  $\frac{2l}{2n-1}$ . Supposons que le nœud du mouvement longitudinal tombe entre les deux nœuds du mouvement transversal  $m$  et  $m+1$ , comptés à partir du second, on aura

$$m \frac{2l}{2n-1} < \frac{(2n-1)l}{4(2n-1)} < (m+1) \frac{2l}{2n-1},$$

d'où

$$m < \frac{2n-11}{8} < m+1;$$

$m$  est donc égal à la partie entière du quotient de  $2n - 11$  par 8. Pour avoir le rang absolu de ce nœud à partir de l'extrémité, il faudra ajouter 2 à ce nombre. Ainsi le rang du nœud qui précède immédiatement le nœud du mouvement longitudinal est égal à la partie entière du nombre fractionnaire  $\frac{2n-11}{8} + 2$  ou  $\frac{2n+5}{8}$ . Cette expression ne pourra jamais représenter un nombre entier, puisque  $2n + 5$  est un nombre impair; par suite, il n'y aura jamais coïncidence entre un des deux nœuds dus au mouvement longitudinal et un de ceux que produit le mouvement transversal. Le premier nœud du mouvement longitudinal tombera entre les deux nœuds du mouvement transversal dont les rangs sont exprimés par les parties entières des deux expressions  $\frac{2n+5}{8}$  et  $\frac{2n+13}{8}$ , et le second entre les nœuds dont les rangs sont les quotients entiers des nombres  $\frac{6n+3}{8}$  et  $\frac{6n+11}{8}$ .

La distance du nœud du mouvement longitudinal au nœud le plus voisin dépend de la longueur de la verge, du nombre de nœuds et de la forme de ce dernier nombre. Un calcul très-simple donne en effet les valeurs suivantes pour cette distance.

Nombre de nœuds.	Distance au nœud précédent.	Distance au nœud suivant.
$n = 4n'$ ,	$\frac{5l}{4(2n-1)}$ ,	$\frac{3l}{4(2n-1)}$ .
$n = 4n' + 1$ ,	$\frac{7l}{4(2n-1)}$ .	$\frac{l}{4(2n-1)}$ .
$n = 4n' + 2$ ,	$\frac{l}{4(2n-1)}$ ,	$\frac{7l}{4(2n-1)}$ .
$n = 4n' + 3$ ,	$\frac{3l}{4(2n-1)}$ ,	$\frac{5l}{4(2n-1)}$ .

Ou bien, en ne prenant que la distance au nœud le plus voisin :

Nombre de nœuds.	Distance au nœud le plus voisin.
$n \left\{ \begin{array}{l} = 4n' \\ = 4n'-1 \end{array} \right.$	$\frac{3l}{4(2n-1)}$ .
$n \left\{ \begin{array}{l} = 4n'+1 \\ = 4n'+2 \end{array} \right.$	$\frac{l}{4(2n-1)}$ .

3.

Cela posé, voyons ce qui résultera pour la disposition des nœuds de la coexistence du mouvement longitudinal et du mouvement transversal. De part et d'autre du milieu qui est un ventre, les déplacements longitudinaux s'exécutent dans le même sens ; donc l'alternance des nœuds dus au mouvement transversal concomitant se continuera comme en tout autre point de la verge. De part et d'autre d'un nœud du mouvement longitudinal, les déplacements suivant l'axe étant de sens contraires, il y aura inversion dans la disposition des nœuds dus au mouvement transversal. Supposons que le nœud du mouvement longitudinal tombe entre les deux nœuds du mouvement transversal  $m$  et  $m + 1$  ; sur une des faces le nœud du mouvement longitudinal ne sera pas marqué, les deux nœuds  $m$  et  $m + 1$  le seront au contraire ; sur l'autre il le sera et les nœuds du mouvement transversal les plus voisins seront  $m - 1$  et  $m + 2$ . La disposition des nœuds sera donc la même que celle qui existe au milieu d'une verge quand il y a unisson entre le son longitudinal fondamental et un des sons transversaux correspondant à un nombre pair de nœuds. Par suite, à chaque nœud du mouvement longitudinal il s'opère un changement dans la parité des nœuds du mouvement transversal qui sont distribués sur chaque face, et comme il y a nécessairement deux changements semblables, si le nombre des nœuds du mouvement transversal est pair, sur une même face se trouvent le premier et l'avant-dernier nœud ; si ce nombre est impair, sur une face seront le premier et le dernier nœud, et sur l'autre le deuxième et l'avant-dernier.

Comme exemple des dispositions précédentes, nous indiquerons les résultats fournis par une verge de laiton ayant pour dimensions :

Longueur...	1158 <sup>mm</sup> ,
Largeur.....	24 <sup>mm</sup> ,
Epaisseur...	3 <sup>mm</sup> ,96.

Il y a pour cette longueur sensiblement unisson entre le deuxième harmonique longitudinal et le son transversal correspondant à 26 nœuds. On voit, *Pl. I, fig. 3, a*, la disposition des nœuds du mouvement transversal existant seul, et *fig. 3, b*, celle qui est produite par l'ébranlement longitudinal. Voici du reste les nombres d'après lesquels cette figure a été construite. Comme précédemment, en face des longueurs observées nous avons placé les mêmes longueurs calculées à l'aide des formules de M. Lissajous et celles que nous avons données plus haut.

1 <sup>re</sup> FACE.			2 <sup>e</sup> FACE.		
NOEUDS.	DISTANCES		NOEUDS.	DISTANCES	
	observées.	calculées.		observées.	calculées.
A. 1	15 <sup>mm</sup>	15 <sup>mm</sup>	A. 2	56 <sup>mm</sup>	56,76 <sup>mm</sup>
1. 3	87	87,17	2. 4	91	90,82
3. 5	91	90,82	4. 6	91	90,82
5. 7	91	90,82	6. L	51	51,08
7. 8	45,5	45,41	L. 9	85	85,15
8. 10	91	90,82	9. 11	91	90,82
10. 12	91	90,82	11. 13	91	90,82
12. 14	91	90,82	13. 15	91	90,82
14. 16	91	90,82	15. 17	91	90,82
16. 18	91	90,82	17. 19	91	90,82
18. L'	85	85,15	19. 20	46,5	45,41
L'. 21	51	51,08	20. 22	91	90,82
21. 23	91	90,82	22. 24	91	90,82
23. 25	91	90,82	24. 26	87	87,17
25. B	57	56,76	26. B	15,5	15

En calculant les rangs des nœuds du mouvement transversal entre lesquels tombent ceux du mouvement longitudinal, on a

$$\frac{2n+5}{8} = \frac{57}{8} = 7 + \frac{1}{8}, \quad \frac{6n+3}{8} = \frac{159}{8} = 19 + \frac{7}{8}.$$

Donc les nœuds du mouvement longitudinal tomberont, l'un entre le 9<sup>e</sup> et le 10<sup>e</sup> nœud du mouvement transversal et l'autre entre les nœuds 19 et 20, ce que l'on observe en effet.

En faisant varier la longueur de la verge, on voit se reproduire les mêmes phénomènes que ceux déjà signalés dans le cas de l'unisson du son longitudinal et d'un harmonique transversal.

Si le son longitudinal diffère très-peu du son transversal, en ébranlant la verge transversalement, on obtient également des nœuds disposés alternativement sur les deux faces opposées; les nœuds commencent à disparaître

d'abord au milieu et aux extrémités, c'est-à-dire aux ventres du mouvement longitudinal, puis l'alternance se continue jusqu'aux nœuds du même mouvement; la disposition des nœuds que donne l'ébranlement transversal est alors inverse de la disposition obtenue par l'ébranlement longitudinal. Elle se trouve représentée *Pl. I, fig. 3, c*, pour la verge dont il s'est agi plus haut. Il faut remarquer cependant que, dans le voisinage des nœuds du mouvement longitudinal, il y a bien, comme l'indique la théorie, sur une des faces deux nœuds consécutifs, 7 et 8, 19 et 20; mais sur l'autre, au lieu des nœuds du mouvement longitudinal, souvent on a 4 nœuds consécutifs 6, 7, 8 et 9, et 18, 19, 20, 21; cela est évidemment dû à ce que dans cette partie de la verge le mouvement longitudinal est très-faible; quelquefois même l'ébranlement longitudinal donne la même disposition. Les nœuds peuvent paraître moins régulièrement disposés quand le nœud du mouvement longitudinal est très-voisin d'un des nœuds du mouvement transversal, comme cela a lieu ici; alors, au lieu des deux nœuds qui sont en trop, un seul se dessine, 7 et 20, et la disposition est la même que s'il y avait coïncidence absolue du nœud du mouvement longitudinal et d'un nœud du mouvement transversal, comme cela se produit au milieu d'une verge, quand le son longitudinal est à l'unisson d'un son transversal correspondant à un nombre impair de nœuds.

Quand les deux sons diffèrent encore moins l'un de l'autre, l'ébranlement longitudinal devient difficile, de même que l'ébranlement transversal, et celui-ci donne tantôt la même disposition que le premier mode d'ébranlement, tantôt l'inverse; quand l'unisson est atteint, les nœuds changent de faces par l'ébranlement longitudinal; la disposition reste encore indéfinie par l'ébranlement transversal, puis elle se renverse définitivement, quand le son transversal commence à monter sensiblement au-dessus du son longitudinal. Ensuite, si on continue à raccourcir la verge, l'alternance des nœuds par l'ébranlement transversal cesse peu à peu, les nœuds réapparaissent d'abord autour des nœuds du mouvement longitudinal, puis ensuite peu à peu jusqu'au milieu et aux extrémités. Comme les sons produits correspondent à un très-grand nombre de vibrations, des variations de longueur très-faibles suffisent pour produire une notable différence entre les deux sons, et changer totalement les dispositions nodales.

Les phénomènes seraient évidemment les mêmes s'il y avait unisson entre le 3<sup>e</sup> harmonique longitudinal ou un harmonique plus élevé et un son transversal. L'étude en serait plus difficile, à cause de l'acuité excessive des sons et ne m'a pas semblé devoir présenter un très-grand intérêt.



## III.

Nous avons dit, en parlant de la théorie de Savart, que certaines verges soumises à un ébranlement longitudinal énergique rendent quelquefois un son à l'octave grave du son longitudinal; ce son, d'un timbre particulier, est souvent désigné sous le nom de son *rauque*. Quand on le produit à l'aide d'une verge de verre, il n'est pas rare de la voir se briser en quelque point, même de la partie non frottée; cet accident se produit plus facilement avec les verges épaisses qu'avec les verges minces.

Savart, comme nous l'avons dit, avait essayé avec sa théorie d'expliquer ce nouveau fait. M. Wertheim, après avoir démontré l'insuffisance de la théorie de Savart, proposa d'admettre l'existence de deux ondes sonores, dont les vitesses de propagation seraient dans le rapport de 1 à 2; la plus rapide, accompagnée de déplacements normaux, donnerait naissance au son longitudinal ordinaire; la seconde, accompagnée de déplacements parallèles à la surface de l'onde, et ici perpendiculaires à l'axe, donnerait naissance au son à l'octave grave du son longitudinal.

Il m'a semblé qu'il était plus naturel d'appliquer à ce cas l'explication qui convenait aux cas précédents, c'est-à-dire d'admettre que le son à l'octave grave est dû à un mouvement transversal ordinaire, produit par un harmonique transversal à l'octave grave du son longitudinal. J'ai reconnu en effet, en opérant sur des verges d'épaisseur très-différentes et dont les longueurs variaient depuis 2 mètres jusqu'à 700 millimètres, que le son à l'octave grave ne se produit pas constamment, avec quelque énergie qu'on ébranle la verge; au contraire, il se produit toujours quand on donne à la verge une longueur telle, qu'il y ait un harmonique transversal assez rapproché de l'octave grave du son longitudinal, même quand les deux sons diffèrent encore notablement. Or, avec des verges longues et minces, dans lesquelles les harmoniques transversaux sont assez rapprochés les uns des autres, cette condition est très-souvent satisfaite; par suite on devra rencontrer un grand nombre de verges dans lesquelles le son à l'octave grave se produira; mais il suffira souvent de les raccourcir de 1 à 2 centimètres pour qu'il cesse de sortir; inversement, avec des verges courtes et épaisses, qui le donnent plus rarement, on le produira aussi facilement, en amenant un harmonique transversal à l'unisson de l'octave grave du son longitudinal. Examinons maintenant les phénomènes particuliers qui accompagnent la production de ce son, et voyons jusqu'à quel point la théorie peut en rendre compte.

Supposons que l'on prenne une verge, avec laquelle on peut facilement obtenir le son à l'octave grave du son longitudinal et qui par suite possède un harmonique transversal sensiblement à la même hauteur.

Pour faire sortir le son à l'octave grave en ébranlant une verge longitudinalement, il faut le plus souvent la presser fortement entre les doigts qui servent à l'ébranler. Ce deuxième son ne dure qu'un instant très-court, et en même temps le sable réuni aux nœuds qui se forment lorsque le son longitudinal sort seul, est lancé avec une grande violence à la surface de la verge, pour revenir ensuite vers sa position primitive, quand le 2<sup>e</sup> son vient à cesser. La verge paraît ainsi éprouver une secousse passagère que l'on ressent parfaitement dans les doigts, qui, en la pressant latéralement, servent à la soutenir. Ces faits avaient déjà été observés par Savart; il avait reconnu en outre, en faisant reposer par sa tranche une des moitiés de la verge à la surface d'un vase rempli d'eau, qu'il se forme les mêmes nœuds que ceux que l'on observe quand la verge rend l'harmonique transversal à l'unisson de l'octave grave du son longitudinal. Ses observations s'étaient arrêtées là.

M. Wertheim a employé, pour étudier le mouvement vibratoire des verges dans ce cas, le procédé déjà employé par M. Duhamel; il plaçait une petite pointe à l'extrémité d'une verge fixée en son milieu et donnant le son à l'octave grave; il étudiait ensuite les courbes tracées sur une lame de verre couverte de noir de fumée, en donnant à la pointe différentes positions, et en imprimant à la lame de verre des déplacements dans diverses directions. Ces courbes ont en général des formes fort compliquées, à cause des mouvements vibratoires qui existent à la fois dans les trois directions parallèles aux arêtes de la verge, et de plus elles se modifient suivant la vitesse du déplacement de la lame de verre.

J'ai observé, dans ce cas, quelques faits qui n'avaient pas encore été signalés, et qui, pour la plupart, s'expliquent très-facilement par l'hypothèse de la coexistence des deux mouvements vibratoires.

Si, le son transversal étant plus bas que l'octave grave du son longitudinal, on raccourcit la verge, l'intervalle de ces deux sons, comme nous l'avons vu, va en diminuant. Alors le son rauque sort plus facilement, par un ébranlement longitudinal moins énergique, et même souvent il est impossible de toucher la verge sans qu'il se produise; en même temps son timbre change de nature; il perd son caractère particulier pour devenir semblable à celui des autres sons rendus par la verge; mais ce qui caractérise surtout ce mode de vibrations, c'est le mouvement particulier que prend le sable par l'ébranlement longitudinal et transversal. Au moment



où se produit le son à l'octave grave, le sable est lancé vivement à la surface de la verge, et il revient ensuite vers les nœuds sur lesquels il était primitivement accumulé. Si le son transversal est très-rapproché de l'octave grave du son longitudinal, mais cependant encore au-dessous, ce mouvement devient plus énergique; le sable se porte du milieu et des différents nœuds auxquels il était rassemblé vers les extrémités, en s'arrêtant quelques instants sur les nœuds du mouvement transversal à l'octave grave du son longitudinal; il ne dépasse pas certains nœuds de cet harmonique, il franchit les autres au contraire très-facilement, et continue son mouvement vers l'extrémité sans revenir en arrière. En même temps que l'intervalle des deux sons diminue, le son à l'octave grave persiste pendant un temps plus considérable; mais on reconnaît à l'oreille, de même que par le mouvement du sable, que ce son n'est jamais continu. Pendant tout le temps qu'on ébranle la verge, il sort en produisant une espèce de roulement, et on entend, pendant les instants qui séparent ces battements, le son longitudinal persister seul; si on abandonne la verge à elle-même, le mouvement vibratoire s'éteignant peu à peu, le son à l'octave grave sort par battements de plus en plus écartés, pour s'éteindre ensuite tout à fait et ne laisser subsister que le son longitudinal. Mais le son longitudinal peut encore être entendu quand sort le son à l'octave grave, quoiqu'il ne soit pas toujours très-facile de le distinguer, à cause de l'intensité beaucoup plus grande de ce dernier son.

Le sable, comme nous l'avons dit plus haut, se trouve lancé vers les extrémités de la verge; il ne franchit pas certains nœuds qui restent par suite marqués, tant que le deuxième son se fait entendre; les autres ne sont indiqués que par un léger temps d'arrêt du sable dans son mouvement tangentiel. Les nœuds qui restent marqués ne sont pas en général distribués très-régulièrement à la surface de la verge. Ainsi pour la verge citée précédemment (épaisseur = 3<sup>mm</sup>,96, largeur = 20 millimètres) on obtient facilement le son à l'octave grave pour une longueur égale à 1226 millimètres, le son transversal qui est à l'unisson correspondant à 13 nœuds. La disposition des nœuds quand sort le son à l'octave grave, est la suivante :

1<sup>re</sup> face : — 2 — — 5. 6. 7. 8. 9 — — 12 — .

2<sup>e</sup> face : 1 — 3. 4 — — 7 — — 10. 11 — 13.

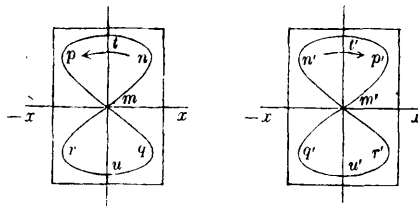
Aux nœuds indiqués par des chiffres, le sable s'arrête sans les dépasser; à ceux qui sont représentés par des traits, il ne s'arrête qu'un instant et continue sa marche vers l'extrémité; quand le son à l'octave grave vient à

cesser, et dans l'intervalle des battements qu'il produit, le sable quitte les nœuds indiqués pour se reporter en arrière vers les nœuds qui accompagnent le son longitudinal ordinaire.

On peut expliquer par la coexistence des deux mouvements vibratoires le mouvement du sable vers les extrémités de la verge au moment de la production du son à l'octave grave, ainsi que la disposition des nœuds.

Chaque molécule de la verge, en effet, est animée simultanément de deux mouvements perpendiculaires de périodes différentes, le mouvement transversal ayant une durée double de celle du mouvement longitudinal. Par suite les molécules doivent décrire dans l'espace des courbes semblables à celles que l'on observe dans les remarquables expériences de M. Lissajous, quand un rayon de lumière vient se réfléchir sur deux miroirs portés par des diapasons vibrant dans des plans perpendiculaires et à l'octave l'un de l'autre. Le plan de ces trajectoires est parallèle à l'axe de la verge et perpendiculaire aux deux faces opposées sur lesquelles on observe les nœuds. En admettant, ce qui est naturel, qu'il n'y a aucune différence de phase entre les deux sons, la courbe décrite a la forme d'un 8. De part et d'autre d'un nœud du mouvement transversal la courbe est décrite dans le même sens, seulement la molécule parcourt la branche inférieure avant la branche supérieure ; de part et d'autre d'un nœud longitudinal les mouvements sont de sens contraires. Soient en effet  $m$  et  $m'$  (fig. 5) deux molécules

Fig. 5.



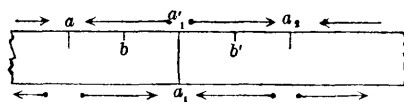
situées de part et d'autre du milieu ; pour l'une le déplacement longitudinal est dirigé vers  $x$  par exemple à l'origine du mouvement, et pour l'autre vers  $-x$ , quel que soit du reste le mouvement transversal ; les molécules décriront donc les mêmes courbes, mais en sens contraires, comme l'indiquent les flèches.

La forme des trajectoires décrites par les molécules superficielles explique le mouvement du sable à la surface de la verge. Quoique le sable se meuve tangentiellement, néanmoins son mouvement ne peut être dû qu'aux vibrations transversales modifiées par l'existence simultanée

des vibrations longitudinales. Comme nous l'avons vu précédemment, le mouvement transversal ne peut avoir d'action que quand la portion de verge considérée passe de la forme plane à la forme convexe, c'est-à-dire pendant le quart d'une vibration complète; mais même pendant cette période les molécules décrivent des lignes  $mn$  et  $nt$  inclinées en sens contraires par rapport aux faces sur lesquelles se trouve placé le sable; il semble naturel d'admettre que l'impulsion sera communiquée au sable au moment où la verge possède sa plus grande vitesse, c'est-à-dire quand la molécule va de  $m$  en  $n$ ; de  $n$  en  $t$  la vitesse est moins considérable, et de plus la trajectoire étant tangente dans une assez grande étendue à la surface de la verge, le sable ne saurait se mouvoir, à cause de son adhérence à cette surface et du frottement qui l'empêche de glisser. Ainsi se trouverait expliqué le mouvement que possède le sable au moment où se produit le son à l'octave grave.

La disposition des nœuds est encore plus facile à expliquer. Le son à l'octave grave, en effet, n'est pas continu; il a pour caractère d'être intermittent, même quand il sort le plus facilement sous forme d'un roulement continu. Au moment où il se produit, le sable est lancé des nœuds où il se trouvait rassemblé vers les nœuds du son à l'octave grave du son longitudinal, en marchant vers les extrémités; pendant les intervalles qui séparent les instants où sort le son à l'octave grave, il est ramené vers les premiers nœuds. Afin d'abrégier, désignons par A la disposition des nœuds quand sort le son longitudinal ordinaire, et B celle qui se produit quand on fait rendre à la même verge le son transversal à l'octave grave de ce premier son. Soient  $a, a_1, a_2$ , trois nœuds consécutifs de A (*fig. 6*) et  $b$  un

Fig. 6.



nœud de B;  $a$  et  $a_2$  sont sur la même face, et  $a_1$  sur la face opposée; le milieu de la verge est supposé placé du côté de  $a$ . Quand sort le son longitudinal ordinaire, le sable se sépare en  $a_1$  pour se porter en sens contraire vers  $a$  et  $a_2$ ; quand sortira le son à l'octave grave, le sable sera lancé de  $a$  vers  $b$ , nœud de B le plus voisin; si  $b$  est situé entre  $a$  et  $a_1$ , le sable reviendra vers  $a$  quand cessera le son à l'octave grave; s'il est situé entre  $a_1$  et  $a_2$  en  $b'$ , il continuera à se mouvoir dans le même sens et se portera sur  $a_2$ ,

d'où il sera de nouveau lancé vers un nouveau nœud de B, quand se reproduira le son à l'octave grave. Ainsi donc, lancé vers les nœuds de l'harmonique à l'octave grave du son longitudinal, le sable ne pourra dépasser ceux qui se trouvent placés en des points de la verge tels, que le mouvement tangentiel soit dirigé vers le milieu quand sort le son longitudinal ordinaire ; il y sera constamment agité, porté vers le nœud du son transversal à l'octave grave quand sort ce dernier son, reporté en arrière quand il vient à cesser ; comme le son à l'octave grave s'éteint le premier, le sable est définitivement ramené en arrière vers les nœuds qui correspondent au son longitudinal. Si les nœuds de B auxquels le sable tend à se réunir sont situés, au contraire, en des points tels, qu'il soit de nouveau lancé vers l'extrémité quand se reproduit la disposition A, le sable ne s'arrête que quelques instants, tout le temps que dure le son à l'octave grave. Il se trouvera ensuite entraîné vers un nouveau nœud de A plus éloigné du milieu, et il continuera à glisser jusqu'à ce qu'il rencontre un nœud de B situé en un point tel, qu'il puisse ensuite être ramené en arrière, ou bien il s'écoulera par l'extrémité de la verge, s'il se meut bien parallèlement aux arêtes, ou par les côtés s'il se meut un peu obliquement. Comme il n'y a pas de relation simple entre la disposition des nœuds qui correspond au son longitudinal ordinaire et celle qui accompagne le son transversal à l'octave grave de ce dernier son, que ceux de A peuvent être plus ou moins irréguliers, parce que le son longitudinal est en général assez éloigné de tout harmonique transversal, les nœuds de B seront disposés alternativement sur les deux faces opposées, mais sans aucune loi apparente. Dans le cas cité plus haut, il y a symétrie par rapport au milieu, mais cela n'aura pas toujours lieu. Toutefois on pourra déterminer la relation des nœuds de B et de A, en ayant soin de marquer ceux-ci sur les faces de la verge quand sort le son longitudinal ordinaire. On voit, *Pl. I, fig. 4, a*, la disposition relative des nœuds du 12<sup>e</sup> et du 17<sup>e</sup> harmonique, le premier différant peu de l'octave grave, l'autre de l'unisson du son longitudinal, et, *fig. 4, b*, la disposition des nœuds de B que nous avons indiquée plus haut. Quand le son à l'octave grave est très-intense, le sable dépasse même les nœuds qui doivent rester marqués.

Pour observer ces faits d'une manière nette, il convient de prendre des verges minces, afin que le mouvement transversal soit énergique ; toutefois il faut que l'épaisseur et surtout la largeur soient suffisantes pour que les vibrations ne s'éteignent pas trop vite par suite de la communication du mouvement vibratoire aux molécules de l'air environnant. Les di-

mensions qui paraissent les plus convenables sont, pour l'épaisseur, de 4 à 6 millimètres, et, pour la largeur, de 20 à 30 millimètres. Avec des verges très-épaisses de 10 à 15 millimètres, les mêmes faits se reconnaissent encore, mais ils sont moins nets.

Comme dans les cas précédents, l'ébranlement transversal est accompagné de phénomènes analogues à ceux qu'on observe par l'ébranlement longitudinal. Si l'on fait rendre à la verge, en effet, l'harmonique transversal à l'octave grave du son longitudinal, le sable se trouve animé d'un mouvement tangentiel à la surface de la verge, mais qui est dirigé ici des extrémités vers le milieu, si, comme nous l'avons supposé, le son transversal est au-dessous de l'octave grave du son longitudinal. Voici, du reste, comment ce mouvement s'établit à mesure que l'intervalle des deux sons, qui doivent être égaux, diminue.

Quand on ébranle transversalement une verge de dimensions quelconques, le sable se sépare habituellement à chaque ventre pour se porter en sens contraire vers les deux nœuds voisins. Quand il y a un harmonique assez voisin de l'octave grave du son longitudinal, mais au-dessous, et qu'on le fait sortir, le point à partir duquel le sable se sépare pour marcher en sens contraire vers les deux nœuds voisins, se rapproche de l'extrémité de la verge ; puis si l'intervalle des deux sons diminue encore, il commence vers les extrémités à se mouvoir, en un seul sens, vers le milieu ; il s'arrête en général aux nœuds ; quelquefois il les dépasse spontanément, quand on ébranle énergiquement la verge en pressant fortement l'extrémité avec l'archet ; mais si, avec un morceau de bois, on lui fait dépasser un nœud quelconque, au lieu d'y revenir, il continue sa marche. Toutefois, vers le milieu de la verge, on voit souvent le sable posséder encore deux mouvements de sens contraires de part et d'autre d'un nœud, à cause de la faiblesse du mouvement longitudinal vers ces points. Les phénomènes sont même dans ce cas plus nets que quand on les ébranle longitudinalement, parce que le son est continu et que d'autres modes de vibration ne viennent pas changer la disposition des lignes nodales.

Le mouvement du sable peut évidemment être expliqué de la même manière qu'on l'a fait précédemment. Seulement le sable, par l'ébranlement longitudinal, allant du milieu vers les extrémités, le mouvement vibratoire longitudinal doit commencer par une dilatation, puisque, dans la partie de la trajectoire que nous avons supposé agir sur le sable, le mouvement est dirigé dans le même sens que le déplacement initial, quel que soit du reste le mouvement transversal ; par l'ébranlement transversal, au con-

traire, le mouvement longitudinal commence par une contraction. L'unisson est encore caractérisé dans ce cas par des phénomènes analogues à ceux qui ont été signalés précédemment. Au moment où il est atteint par l'ébranlement longitudinal, le sable paraît complètement indécis entre les deux mouvements, tendant tantôt à marcher vers les extrémités, tantôt vers le milieu. Dès qu'il est dépassé, il se meut, au contraire, de l'extrémité vers le milieu, comme précédemment par l'ébranlement transversal. La même indécision, au moment de l'unisson, existe pour l'ébranlement transversal ; tantôt le sable se meut rapidement vers le milieu, tantôt c'est le mouvement inverse qui se produit ; mais dans ce cas cette indécision ne persiste pas aussi longtemps que dans les deux cas précédents ; elle cesse à peu près en même temps pour les deux modes d'ébranlement dès que l'unisson a été dépassé ; alors, par l'ébranlement longitudinal, le sable se meut des extrémités vers le milieu, et, par l'ébranlement transversal, du milieu vers les extrémités. Par suite, on doit admettre que le sens du mouvement transversal restant indéterminé, le mouvement longitudinal commence par une contraction quand on ébranle la verge longitudinalement, le son transversal étant au-dessus de l'octave grave du son longitudinal, et, au contraire, par une dilatation quand on l'ébranle transversalement. On peut admettre que, dans le cas de l'unisson du son longitudinal et d'un des harmoniques transversaux, la même inversion s'effectue aussi dans le sens du mouvement longitudinal avec le mode d'ébranlement et le signe de la différence des deux sons. Si la disposition des nœuds reste alors plus longtemps indécise par l'ébranlement transversal que dans ce dernier cas, cela tient évidemment à ce que dans celui-ci le mouvement du sable ne dépend que du mouvement longitudinal, et qu'il est complètement indépendant du sens relatif du mouvement transversal.

De l'inversion qui s'est produite dans le mouvement tangentiel du sable, il résulte que la disposition générale des nœuds qui accompagne la production d'un son à l'octave grave est renversée, comme on le voit *Pl. I, fig. 4, b et c*.

On a en effet avec la verge citée plus haut :

$L = 1126$ . — Avant l'unisson.

1<sup>re</sup> face. — 2 — — 5 . 6 . 7 . 8 . 9 — — 12 —  
2<sup>e</sup> face. 1 — 3 . 4 — — 7 — — 10 . 11 — 13.

$L = 1115$ . — Après l'unisson.

1<sup>re</sup> face. 1 — 3 . 4 — — 7 — — 10 . 11 — 13  
2<sup>e</sup> face. — 2 — — 5 . 6 . 7 . 8 . 9 — — 12 —.

L'inversion s'est effectuée pour la longueur 1117. Comme dans les deux cas précédents on peut donc connaître à moins de 1 ou 2 millimètres la longueur qui donne l'unisson, sans emprunter le secours de l'oreille, qui, du reste, ne donnerait pas la même précision, à cause de la limite au delà de laquelle il est impossible de déterminer l'intervalle de deux sons très-peu différents.

Si l'on continue à diminuer la longueur de la verge, l'unisson cesse d'exister; le son à l'octave grave se produit plus difficilement par l'ébranlement longitudinal; les battements cessent plus vite et le son finit par se produire une seule fois pendant un temps très-court; il reprend en même temps son timbre rauque particulier.

Par l'ébranlement transversal, les phénomènes suivent également la marche inverse de celle qui a été indiquée précédemment quand on se rapprochait de l'unisson.

La composition des deux mouvements vibratoires perpendiculaires qui existent explique donc d'une manière satisfaisante quelques-uns des faits qu'on observe dans la production du son à l'octave grave; il en est d'autres au contraire dont l'explication nous échappe. Ainsi on ne peut se rendre compte de la raison pour laquelle le son à l'octave grave, au lieu d'être continu, sort sous forme de battements séparés dont le nombre dépend de l'énergie de l'ébranlement longitudinal et de l'intervalle plus ou moins considérable qui existe entre deux sons que la théorie suppose à l'unisson. On comprend jusqu'à un certain point qu'il faille ébranler fortement la verge pour produire le son à l'octave grave; le même fait se présente du reste dans le cas général, quand il y a coïncidence du mouvement longitudinal et d'un mouvement transversal synchrone; en ébranlant la verge faiblement, le sable reste immobile; pour que le mouvement transversal prenne naissance et que les nœuds se dessinent, il faut un ébranlement énergique. Le fait de la discontinuité du son à l'octave grave reste encore inexpliqué.

La théorie proposée par M. Wertheim rend-elle compte d'une manière plus satisfaisante de tous les faits? L'onde transversale dont M. Wertheim suppose l'existence, ne peut expliquer la production du mouvement transversal qui accompagne le mouvement longitudinal, puisque ce mouvement transversal est dû à des flexions de la verge, et non à des glissements des diverses tranches les unes devant les autres. Cette onde, si elle se produit, ne pourrait avoir d'autre effet que de déterminer la production du mouvement transversal. De plus, en adoptant uniquement cette théorie, on ne comprendrait que difficilement pourquoi le son à l'octave grave ne se pro-

duit pas toujours, mais seulement quand il existe un son transversal à l'octave grave du son longitudinal.

Il est encore d'autres faits que je dois signaler et dont je n'ai pas non plus pu rendre compte. On obtient avec quelques verges, et pour une certaine longueur, en les ébranlant longitudinalement, un son encore plus grave que l'octave grave du son longitudinal; il ne dure qu'un instant très-court et ne se produit que par un ébranlement énergique; il a toujours présenté le timbre rauque particulier du son à l'octave grave, quand le son transversal est sensiblement plus haut ou plus bas que l'octave grave du son longitudinal; à cause de sa faible durée il est difficile d'en prendre l'unisson, d'autant plus qu'il n'existe jamais seul; en outre, je n'ai pas trouvé de relation constante entre ce dernier son et le son longitudinal, ni d'harmonique transversal qui fût sensiblement à la même hauteur. Une très-faible diminution de longueur l'a toujours fait disparaître totalement. Le plus souvent il se produit avec les verges qui donnent déjà le son à l'octave grave du son longitudinal. Ainsi on l'a obtenu avec la verge citée plus haut et pour les longueurs suivantes voici ce que l'on a observé.

( Largeur =  $24^{\text{mm}},90$ , épaisseur =  $3^{\text{mm}},96$  ).

Longueur = 1118.

1°. Un ébranlement léger produit le son longitudinal fondamental.

2°. Un ébranlement plus énergique donne le son à l'octave grave.

3°. Un ébranlement encore plus énergique produit un son plus grave, ayant le caractère du son rauque, et le sable est lancé en même temps à la surface de la verge des extrémités vers le milieu.

Longueur = 1116.

Le deuxième son grave sort plus difficilement.

Longueur = 1115.

Il a disparu complètement, et pour une longueur de 1121, il ne se produisait pas encore. J'ai entendu une seule fois un son analogue, sans que le son à l'octave grave existât; il s'est produit plus souvent, quand ce dernier son existait.

D'après Savart, le son à l'octave grave pourrait encore se produire quand la verge fait entendre son deuxième harmonique longitudinal, et alors il serait à l'unisson du son fondamental longitudinal; je n'ai pu le produire dans cette circonstance, non plus que dans le cas du troisième harmonique.



## IV.

Il est encore un autre mode de vibrations qui peut exister en même temps que les vibrations longitudinales, quand les verges ont des dimensions convenables : ce sont des vibrations tournantes. Dans ce mode de vibrations les molécules décrivent de petits arcs de cercle qu'on peut, à cause de leur faible étendue, confondre avec des lignes droites. Pour produire ce mode de vibrations dans une verge prismatique, il suffit de la placer sur des chevalets de liège comme pour étudier les vibrations transversales, et de l'ébranler en passant l'archet tangentiellement sur les faces latérales ou obliquement sur une des arêtes; on peut aussi l'ébranler par l'extrémité en ne passant l'archet que sur une partie de la section. On observe sur les quatre faces de la verge la même disposition nodale. Sur chaque face, il se produit au milieu une ligne nodale longitudinale, et en outre une série de nœuds transversaux équidistants plus ou moins nombreux, suivant le rang de l'harmonique que l'on fait sortir.

Pour le son fondamental, il n'existe qu'un nœud transversal au milieu; pour le deuxième, il existe deux nœuds aux quarts à partir des extrémités, et en général ces nœuds occupent la même position que les nœuds des tuyaux sonores ouverts aux deux extrémités; la marche des harmoniques est également la même; Chladni avait déjà étudié avec beaucoup de soin ce mode de vibrations.

Pour comprendre la formation de ces lignes nodales, il faut remarquer que près des arêtes de la verge les molécules décrivent des trajectoires fort obliques par rapport aux faces latérales, puisque ces dernières sont perpendiculaires à la plus courte distance de ces molécules à l'axe; près du milieu au contraire les molécules se meuvent tangentiellement. Le sable répandu sur une quelconque des faces sera donc lancé des bords vers le milieu, à cause de l'obliquité des lignes que décrivent les molécules, comme cela a déjà été expliqué; au milieu même, le mouvement tangentiel n'aura aucune action sur lui. Quant aux nœuds transversaux, ils ne sont produits que par le changement de sens dans le mouvement de rotation; ils sont extrêmement fins, et si l'on n'a pas le soin de répandre uniformément le sable à la surface de la verge, ils ne se dessinent pas, car le sable ne fait qu'y rester en place sans s'y transporter.

Dans les verges cylindriques ou carrées, jamais il ne pourra y avoir unisson entre un harmonique longitudinal et un harmonique des vibrations tour-

nantes ; car le rapport qui existe entre le nombre des vibrations longitudinales et des vibrations tournantes pour les sons fondamentaux est constant et indépendant des dimensions transversales, ainsi que de la longueur ; de plus ce rapport est incommensurable.

D'après les nouvelles recherches faites à ce sujet par M. Wertheim (1),  $n$  désignant le nombre des vibrations longitudinales, et  $n'$  celui des vibrations tournantes, on a

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1,6331.$$

Pour les verges rectangulaires, au contraire, on a pour le même rapport :

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

$a$  et  $b$  étant les dimensions transversales de la verge ; si on tient compte du coefficient de correction  $c$ , qu'il faut introduire à cause du désaccord qui existe entre la théorie et l'expérience, pour les vibrations tournantes, on aura

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{2}{3c}} \times \frac{a^2 + b^2}{ab} = m;$$

$a$ ,  $b$ ,  $c$ , pourront avoir des valeurs telles, qu'un harmonique longitudinal soit à l'unisson d'un des harmoniques des vibrations tournantes. Soient en effet  $N$  et  $N'$  les nombres de vibrations correspondant à ces deux sons, on aura

$$N = pn, \quad N' = qn',$$

$p$  et  $q$  étant deux nombres entiers, d'où

$$\frac{N}{N'} = \frac{p}{q} \times \frac{n}{n'} = \frac{p}{q} \sqrt{\frac{2}{3c}} \times \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Les différentes quantités qui entrent dans cette expression pourront avoir des valeurs telles, que le rapport  $\frac{N}{N'}$  soit égal à l'unité ou en diffère très-

---

(1) *Annales de Chimie et Physique*, t. L, p. 201.

peu; cet accord devra de plus persister sensiblement pour toutes les longueurs, le coefficient  $c$  variant peu avec la longueur. Toutefois ce cas devra se présenter très-rarement. Il est en effet à peu près impossible de tirer à la filière des verges dont les dimensions transversales soient exactement dans un rapport donné; de plus la valeur variable du coefficient  $c$ , qui dépend à la fois de la longueur et des dimensions transversales, ajoute encore à l'indécision dans laquelle on se trouve sur le choix des dimensions transversales qu'il faut donner aux verges, pour obtenir cet accord d'une manière satisfaisante.

Parmi les verges que j'ai eu occasion d'examiner, j'en ai trouvé une dans laquelle le deuxième harmonique longitudinal était sensiblement à l'unisson d'un harmonique appartenant aux vibrations tournantes; c'est la verge employée pour faire les expériences citées dans les deux derniers paragraphes. (Largeur =  $24^{\text{mm}},8$ , épaisseur =  $3^{\text{mm}},96$ , longueur =  $1012$  millimètres.) La longueur de la corde du sonomètre,  $L$ , à l'unisson du son longitudinal =  $106$  millimètres; la longueur de la corde,  $L'$ , à l'unisson du son fondamental des vibrations tournantes =  $594$  millimètres. Donc

$$\frac{n}{n'} = \frac{L'}{L} = \frac{594}{106} = 5,604.$$

Si on prend les nombres de vibrations correspondant au deuxième harmonique longitudinal,  $N$ , et au onzième harmonique des vibrations tournantes,  $N'$ , on trouve

$$\frac{N}{N'} = \frac{54}{53},$$

nombre peu différent de l'unité, quoique le son longitudinal soit encore un peu plus élevé. En appliquant ici la formule donnée par M. Wertheim, on a

$$a = 3^{\text{mm}},96, \quad b = 24^{\text{mm}},90,$$

et par suite

$$5,604 = \sqrt{\frac{2}{3c}} \times \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{5,360}{\sqrt{c}},$$

d'où

$$c = 0,9171.$$

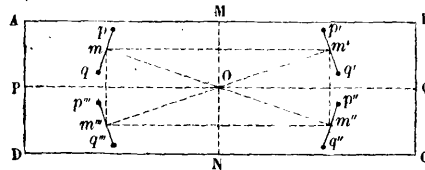
Pour une verge qui avait à peu près les mêmes dimensions transversales que celle-ci, M. Wertheim avait trouvé  $c = 0,926$ .

De la coexistence des vibrations tournantes et des vibrations longitudi-

nales résultera une disposition alterne des nœuds analogue à celle que nous avons indiquée précédemment.

Commençons par préciser les mouvements élémentaires des molécules situées dans le voisinage des faces latérales de la verge. Soient ABCD (fig. 7) une section de la verge perpendiculaire aux arêtes; M, N, P, Q, les

Fig. 7.

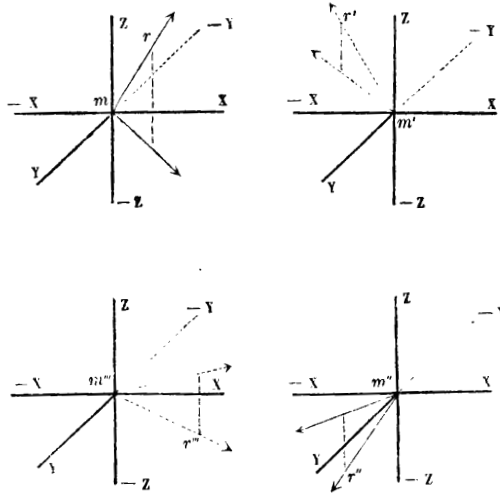


intersections des nœuds longitudinaux par le plan de la figure. Soient  $m, m', m'', m'''$ , quatre molécules situées symétriquement par rapport aux lignes PQ, MN; chacune d'elles décrit, dans son mouvement vibratoire, une ligne perpendiculaire à l'une des diagonales du rectangle  $m m' m'' m'''$ . Pendant la première période d'une vibration tournante les molécules décrivent les lignes  $mp, m'q', m''q'', m'''p'''$ , et pendant la deuxième les lignes  $mq, m'p', m''p'', m'''q'''$ ; nous aurons à composer ces déplacements avec ceux que donne au même instant le mouvement longitudinal. Il est évident que pour chaque molécule, pour  $m$  par exemple, la résultante sera située dans le plan perpendiculaire à la ligne  $mo$ , qui est la plus courte distance à l'axe, mais inclinée par rapport au plan de la figure dans un sens différent suivant la position de la molécule considérée. Pour déterminer la direction de cette résultante, supposons qu'on ait mené par chacune des molécules trois axes parallèles aux arêtes de la verge, et que chaque déplacement,  $pq, p'q', \dots$ , soit décomposé suivant les deux axes situés dans son plan (fig. 8); nous admettons que pour  $m$  le déplacement longitudinal est dirigé suivant  $mY$ , quand cette molécule décrit  $mp$ . Les trois plans coordonnés divisent l'espace en huit angles trièdres qu'on pourra désigner à l'aide des axes qui leur servent d'arêtes; il sera alors facile d'indiquer la direction des résultantes pour les diverses molécules  $m, m', m'', m'''$ , par les angles trièdres dans lesquels elles sont situées. On a ainsi :

	1 <sup>re</sup> Période.			2 <sup>e</sup> Période.		
$m$	X,	Y,	Z	— X,	— Y,	— Z
$m'$	X,	Y,	— Z	— X,	— Y,	Z
$m''$	— X,	Y,	— Z	X,	— Y,	Z
$m'''$	— X,	Y,	Z	X,	— Y,	— Z

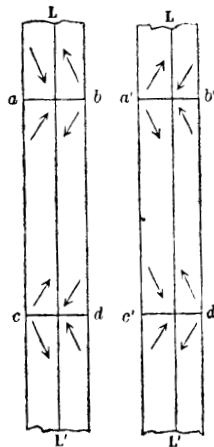
Les molécules superficielles ne transmettront leur mouvement au sable, que pendant qu'elles se meuvent vers l'extérieur. Nous avons représenté, *fig. 8*, la partie efficace de la trajectoire par rapport aux faces AB et CD.

Fig. 8.



Pour connaître la direction que prendra par suite le sable, il suffit de tracer la projection de cette ligne sur la face correspondante de la verge. On reconnaît ainsi, comme on le voit (*fig. 9*), que la moitié seulement de chaque

Fig. 9.

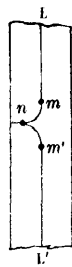


nœud transversal sera marquée alternativement d'un côté et de l'autre du nœud médian, la disposition sera inverse sur la face opposée. En résumé,

les nœuds sont disposés de la même manière que si les deux moitiés de la verge séparées par la ligne nodale médiane vibraient transversalement et en sens contraire.

On voit le sable glisser le long de la ligne médiane en sens contraire de chaque côté, formant ainsi deux courants séparés l'un de l'autre par un petit espace au milieu où le sable ne peut recevoir aucun mouvement. Par la même raison, les nœuds transversaux ne se continuent pas complètement jusqu'au nœud longitudinal LL' (*fig. 10*); elles se raccordent

Fig. 10.



par de petites lignes courbes  $nm$ ,  $nm'$ , comme on le voit à l'intersection des diverses lignes nodales sur les plaques. Cela tient à ce que dans le voisinage du nœud longitudinal, le déplacement des molécules dû aux vibrations tournantes est plus faible que près des bords, et devient tangentiel au lieu d'être oblique; le sable ne reçoit plus alors une impulsion assez forte pour se déplacer; et dans l'angle formé par les deux nœuds rectangulaires il s'accumule de manière à former une petite courbe normale à la direction de son mouvement.

Avec la verge employée les nœuds ne sont pas excessivement nets; cela tient à ce que les deux sons qui devraient être à l'unisson, diffèrent notablement, et encore, pour observer cette disposition de nœuds, faut-il que le son longitudinal soit assez écarté de tout autre son que la verge pourrait rendre transversalement, car alors il s'établirait un autre mode de vibrations, et celui-ci disparaîtrait complètement; c'est ce qui a eu lieu quand le deuxième harmonique longitudinal était à l'unisson du son transversal correspondant à 26 nœuds, et le son fondamental à l'octave aigu du son transversal correspondant à 13 nœuds.

Enfin ce qui montre la liaison de ces faits avec les précédents, c'est qu'en ébranlant la même verge avec l'archet de manière à lui faire rendre le onzième harmonique des vibrations tournantes, qui est, comme on l'a vu,

sensiblement à l'unisson du deuxième harmonique longitudinal, on obtient également des nœuds alternes, comme par l'ébranlement longitudinal, mais inversement disposés; les nœuds sont même plus nets dans ce cas. La *fig. 5, a, Pl. I*, donne la disposition des nœuds sur une des faces, due aux vibrations tournantes seules; la *fig. 5, b*, donne celle qui est due à l'ébranlement longitudinal, et la *fig. 5, c*, celle que produit l'ébranlement latéral de la verge à l'aide de l'archet.

Sur les faces étroites devraient se reproduire les mêmes lignes nodales que sur les deux autres; l'étude du mouvement du sable y est presque impossible à cause de leur peu de largeur, le moindre ébranlement irrégulier transmis à la verge le faisant tomber.

J'ai eu souvent occasion d'observer la coïncidence des vibrations tournantes et des vibrations transversales ordinaires; les nœuds du mouvement transversal deviennent alors obliques et finissent par se changer en courbes continues qui parcourent la verge dans toute sa longueur. Je me propose d'étudier ce phénomène avec plus de détails dans un nouveau travail.



## V.

Les faits exposés précédemment ont tous été observés en employant des verges dont les dimensions étaient telles, qu'il y avait presque identité entre le son longitudinal et les divers sons que peuvent rendre les verges par d'autres modes de vibrations. Nous avons ainsi reconnu qu'en faisant rendre à une verge le son longitudinal fondamental, trois cas principaux peuvent se présenter, suivant que ce son se trouve rapproché :

- 1°. D'un harmonique transversal;
- 2°. De l'octave aigu d'un harmonique transversal;
- 3°. D'un harmonique des vibrations tournantes.

Qu'arrive-t-il quand le son longitudinal est assez éloigné de ces différents sons? Ce cas devra se présenter le plus fréquemment, quand on prendra une verge avec des dimensions quelconques. Les phénomènes sont alors moins nets et plus complexes.

Une des causes qui contribue le plus à rendre les nœuds irréguliers,

c'est l'existence de vibrations dans le sens de la largeur. Dans les verges prismatiques employées pour étudier les phénomènes signalés plus haut, la largeur était en général assez considérable relativement à l'épaisseur pour que les vibrations dans cette dimension n'eussent pas d'effet sensible. On peut sur les faces étroites observer exactement les mêmes faits que sur les faces larges; seulement les vibrations transversales dans ce sens étant nécessairement très-faibles, les lignes nodales sont moins nettes, et en outre, à cause de l'intervalle assez grand qui existe entre les différents harmoniques, il y aura rarement unisson du son longitudinal et d'un harmonique transversal correspondant à cette dimension. Au contraire, avec les verges dont les deux dimensions transversales sont peu différentes, les lignes nodales qui se forment sur les faces les plus larges sont moins nettes, à cause de l'existence simultanée de vibrations relativement assez intenses dans le sens perpendiculaire.

La première question qui se présente dans ce cas est la suivante : Pourrait-on, en diminuant successivement et d'une manière continue la longueur d'une verge, observer le passage de la disposition des nœuds qui accompagne l'unisson du son longitudinal et d'un harmonique transversal de rang impair, à celle que donne l'unisson du même son avec l'harmonique précédent de rang pair? Les nombreuses observations que j'ai faites à ce sujet m'ont fait voir qu'il n'y avait dans ce passage d'une disposition à l'autre aucune loi générale.

Supposons que l'on parte de l'unisson du son longitudinal et d'un harmonique transversal correspondant à un nombre impair de nœuds; la disposition des nœuds par l'ébranlement longitudinal est celle de la *fig. 2, b, Pl. I*. Si on raccourcit la verge, quand les deux sons présentent à l'oreille une différence appréciable, que l'alternance des nœuds a cessé par l'ébranlement transversal, on voit les nœuds s'élargir et devenir moins nets; les longueurs qui séparent deux nœuds consécutifs s'écartent notablement des distances des nœuds du son transversal précédemment à l'unisson du son longitudinal. On reconnaît que le mouvement transversal concomitant devient moins énergique; en effet, tandis que précédemment le sable se portait rapidement vers les nœuds, malgré l'inclinaison de la verge, dans ce cas les nœuds se déplacent quand la verge s'incline, ce qui prouve que l'action de la pesanteur sur les grains de sable devient une force comparable aux impulsions qu'il reçoit des molécules de la verge, ce qui n'avait pas lieu précédemment. Quel que soit le déplacement des nœuds, il reste toujours sur une des faces un nœud au milieu; le nœud qui y était sur l'autre



face, se déplace d'un côté ou de l'autre. Mais les nœuds qui présentent en général le plus d'irrégularité, ce sont les nœuds extrêmes; souvent le dernier nœud s'allonge de manière à devenir parallèle à l'axe de la verge, et le sable s'écoule d'une manière continue par l'extrémité la plus voisine. Souvent encore dans une des moitiés et sur les deux faces opposées les nœuds sont assez irréguliers, et il en manque un certain nombre; sur l'autre moitié ils sont distribués plus régulièrement. Quelquefois deux nœuds consécutifs disparaissent vers une extrémité, puis, en raccourcissant davantage, on voit un nœud se diviser en deux très-rapprochés sur une des faces; sur l'autre il en naît un entre les deux premiers, qui ensuite se séparent de plus en plus.

Si l'on part au contraire de l'accord du son longitudinal et d'un harmonique transversal correspondant à un nombre pair de nœuds, il reste toujours sur une des faces un nœud au milieu; mais, au lieu d'être équidistant des deux nœuds voisins, il se trouve plus rapproché de l'un que de l'autre. Sur l'autre face, les deux nœuds consécutifs équidistants du milieu se déplacent et l'un d'eux se trouve aussi plus rapproché de ce point que l'autre.

En résumé, quand l'unisson n'existe pas entre le son longitudinal et un son transversal, il y a sur une face un nœud au milieu et sur l'autre deux nœuds qui en sont assez rapprochés, quoique inégalement. Les nœuds sont toujours alternes et par suite peuvent toujours être considérés comme provenant de la coïncidence d'un mouvement longitudinal et d'un certain mouvement transversal; mais si on compare la position des nœuds formés par l'ébranlement longitudinal à celle des nœuds du son transversal le plus rapproché du son longitudinal, on reconnaît que souvent les premiers tombent au milieu des espaces qui séparent les seconds. Toutefois deux dispositions générales peuvent exister: les deux nœuds extrêmes peuvent être sur une même face ou sur les deux faces opposées; la première disposition se produit en général quand le son transversal le plus rapproché est accompagné d'un nombre pair de nœuds, la seconde quand le nombre de nœuds est impair. Il y a quelquefois passage brusque d'une disposition à l'autre pour une faible diminution de longueur.

Avec les verges de verre et même les verges métalliques, dont l'épaisseur est assez considérable, quelquefois il ne se produit aucun nœud quand on les ébranle longitudinalement, mais en même temps le son rendu est très-faible; si on donne à la verge une longueur telle, qu'un son transversal soit assez rapproché du son longitudinal, le son sort plus facilement, et les nœuds se dessinent. Du reste, comme nous l'avons

déjà fait remarquer, en ébranlant très-légerement une verge longitudinalement, le son sort faiblement il est vrai, mais le sable reste immobile; il ne se met en mouvement que si on ébranle la verge avec plus d'énergie.

Nous n'avons pas encore indiqué l'influence des vibrations transversales qui existent dans le sens de la largeur. Ces vibrations, le plus souvent sans effet quand les vibrations transversales sont très-intenses dans le sens de l'épaisseur, cessent d'être négligeables quand celles-ci s'affaiblissent par suite de la distance qui existe entre le son longitudinal et l'harmonique transversal. Le mouvement de chaque molécule résulte alors de la composition de trois mouvements élémentaires perpendiculaires; la résultante, comme dans le cas des vibrations tournantes, est située dans un plan oblique par rapport aux faces latérales. Le sable se meut obliquement à la surface de la verge, les nœuds deviennent fort obliques et parallèles aux mouvements des grains de sable. Si le son longitudinal est très-rapproché d'un son transversal dans le sens de la largeur, sur les faces les plus larges les nœuds deviennent excessivement irréguliers et mal limités; le sable forme des amas confus, se meut suivant des lignes courbes à la surface de la verge pour s'échapper par les arêtes latérales. Même dans ce cas, en remarquant quelle est la position relative des nœuds sur les quatre faces, on peut déterminer le sens de l'inclinaison des nœuds par rapport aux arêtes latérales, sans que cependant ces prévisions théoriques soient toujours satisfaites.

Enfin à ces derniers modes de vibrations peuvent encore venir s'ajouter des vibrations tournantes qui changent les nœuds transversaux, soit en lignes obliques, soit en courbes plus ou moins régulières et alternes analogues à celles qu'a indiquées Savart dans son Mémoire sur les vibrations longitudinales des verges.

Du reste, même sans être obligé de tenir compte de l'existence simultanée de ces divers modes de vibrations, on conçoit facilement que certains plans nodaux puissent devenir obliques par rapport à l'axe, à cause de l'hétérogénéité constante des corps solides.

*Conclusions.*

Nous voyons d'abord, comme Savart l'avait déjà fait remarquer, qu'une verge peut vibrer longitudinalement sans qu'il se produise d'autre mouvement simultanément, quand elle présente une assez grande rigidité et que l'ébranlement est peu énergique. Mais c'est là pour ainsi dire le cas exceptionnel. Presque jamais les vibrations longitudinales n'existent seules. Suivant la théorie, elles doivent être accompagnées de vibrations transversales isochrones, provenant de la dilatation et de la contraction des sections de la verge, par suite des variations de longueur. Mais ces vibrations restent toujours infiniment petites par rapport au déplacement longitudinal, et sont par suite complètement négligeables.

Si l'ébranlement longitudinal est assez énergique, les molécules, au lieu de se mouvoir parallèlement à l'axe, ont un mouvement plus complexe ; il se produit en général des inflexions de part et d'autre de l'axe, analogues à celles que donnerait un ébranlement transversal. Peut-être, comme l'avait pensé Savart, ces inflexions sont-elles dues à la compression qui se produit, quand la verge se raccourcit. Peut-être aussi, pour un ébranlement aussi énergique, les vibrations transversales qui accompagnent nécessairement le mouvement longitudinal deviennent-elles assez intenses pour produire des inflexions dans diverses portions de la verge, à cause de son hétérogénéité. En admettant que le mouvement longitudinal n'est accompagné de flexions et de mouvements transversaux que dans une seule direction, le sable devra s'accumuler en tous les points où s'opèrent des changements dans le sens de la flexion et former ainsi des nœuds distribués alternativement sur les deux faces opposées avec plus ou moins de régularité, ces nœuds pouvant même être obliques par rapport aux arêtes latérales. Comme les vibrations longitudinales peuvent être accompagnées de vibrations transversales dans les deux sens perpendiculaires et de vibrations tournantes, on voit qu'en général les mouvements des molécules seront très-complexes, et les nœuds présenteront une grande irrégularité dans leur forme et leur position.

Si le son longitudinal est dans certains cas assez voisin d'un autre son que la verge peut rendre par un autre mode de vibration, l'ébranlement longitudinal le produira en même temps ; les autres mouvements moléculaires auront alors un effet moins considérable et les nœuds deviendront plus nets.

J'ai vu quelquefois cette communication de mouvement vibratoire se produire dans des circonstances assez singulières. Dans les verges dont les deux dimensions transversales ne diffèrent pas notablement, il arrive souvent qu'un harmonique transversal dans le sens de l'épaisseur est assez rapproché d'un autre harmonique dû à des vibrations transversales dans le sens perpendiculaire. Alors si on ébranle la verge transversalement avec l'archet dans un sens ou dans l'autre, on voit le sable prendre à la surface de la verge un mouvement latéral, et par suite perpendiculaire au sens de l'ébranlement. On pourra déterminer le mouvement du sable en chaque point de la verge en composant les déplacements perpendiculaires comme on l'a fait pour les vibrations longitudinales et transversales. On reconnaît ainsi que sur chaque face, de part et d'autre d'un nœud, le mouvement de glissement change de sens; par suite le sable semble prendre un mouvement de rotation autour des nœuds, quoique en réalité il s'échappe par les faces latérales. De plus, quand l'ébranlement est faible, que le sable n'est pas encore bien réuni aux nœuds, on voit les nœuds des faces perpendiculaires représentés par des bandes obliques qui disparaissent ensuite. La *fig. 6, Pl. I*, représente cette disposition, qui a été obtenue avec une verge d'acier ayant les dimensions suivantes : largeur, 10 millimètres; épaisseur, 4<sup>mm</sup>,6; longueur, 1 mètre. Cette dernière dimension est du reste indifférente. Le douzième harmonique transversal dans le sens de l'épaisseur est presque identique au huitième dans le sens de la largeur. En effet, N et N' étant les nombres de vibrations correspondant à ces deux sons, on aura

$$\frac{N}{N'} = \frac{(2 \times 9 - 1)^2}{(2 \times 13 - 1)^2} \times \frac{100}{46} = 1,005.$$

Le treizième harmonique dans un sens, et le onzième dans l'autre, sont aussi sensiblement à l'unisson.

Tous ces faits démontrent donc d'une manière évidente le principe suivant : *Si, dans un corps solide, deux modes différents de vibrations peuvent produire le même son, ils devront exister simultanément, quel que soit du reste le mode d'ébranlement employé.*

En résumé, les dispositions de nœuds que produit l'ébranlement longitudinal rentrent dans les divers cas suivants :

1°. Si le son longitudinal est éloigné de tout son que peut rendre la verge par un autre mode de vibrations, les lignes nodales, toujours disposées alternativement sur les deux faces opposées, sont irrégulières, quelque-

fois sinueuses ou obliques, par rapport aux arêtes latérales de la verge. Dans ce cas le mouvement de chaque molécule est donné par la composition du mouvement longitudinal avec des mouvements transversaux dans les deux sens perpendiculaires et même quelquefois avec des vibrations tournantes.

2°. Si le son longitudinal est assez voisin d'un son transversal, les nœuds se rapprochent de ceux que le mouvement transversal produirait seul. L'ébranlement transversal donne lui-même naissance à un mouvement longitudinal, et par suite les nœuds deviennent également alternes, comme par l'ébranlement longitudinal; seulement les deux modes d'ébranlement donnent des dispositions inverses. Quand les deux sons diffèrent à peine, l'ébranlement de la verge devient beaucoup plus difficile; l'ébranlement transversal donne tantôt la même disposition que l'ébranlement longitudinal, tantôt l'inverse. Quand l'unisson est atteint et ensuite dépassé, la disposition des nœuds se renverse par l'ébranlement longitudinal, reste encore indéfinie par l'ébranlement transversal, et enfin change à son tour pour devenir inverse de ce qu'elle était d'abord. Nous n'avons pu observer ces faits qu'en prenant des verges dans lesquelles le son transversal était d'abord au-dessous du son longitudinal, s'en rapprochait et le dépassait, à mesure qu'on diminuait la longueur de la verge; la marche inverse est impossible à réaliser; mais il est évident que tout se passerait dans ce cas comme dans le précédent. Relativement aux mouvements moléculaires, en admettant que le mouvement transversal reste le même, le sens du mouvement longitudinal change suivant le mode d'ébranlement et suivant le signe de la différence du son longitudinal et du son transversal. Il semble probable cependant que dans le voisinage de l'unisson, le sens du mouvement longitudinal restant le même, le mouvement transversal peut changer quand on ébranle la verge transversalement.

3°. Si le son longitudinal est à l'octave aigu d'un son transversal, les molécules ont un mouvement plus complexe; leur mouvement résulte de la composition de deux mouvements vibratoires perpendiculaires dont les périodes sont dans le rapport de 1 à 2; elles décrivent par suite dans l'espace des trajectoires curvilignes qui ont la forme d'un 8; mais ce mouvement est intermittent, la verge ne faisant entendre le son à l'octave grave que par intervalles et sous forme de battements dont le nombre dépend du rapprochement des deux sons et de l'intensité de l'ébranlement. L'ébranlement transversal produit également un mouvement longitudinal; on voit

d'après le mouvement du sable que le mouvement longitudinal change de sens avec le mode d'ébranlement; la même modification se produit quand la différence entre les deux sons change de signe.

4°. Si le son longitudinal est voisin d'un son dû à des vibrations tournantes, la coexistence des mouvements vibratoires se produit encore par les deux modes d'ébranlement et on obtient des nœuds alternes, disposés inversement suivant le mode d'ébranlement.

5°. Les mêmes phénomènes peuvent être observés quand la verge rend un harmonique longitudinal plus élevé, sauf la production du son à l'octave grave que je n'ai pu obtenir dans ce cas.



*Note relative aux harmoniques transversaux des Verges.*

Dans cette Note, nous nous occuperons de la comparaison des longueurs pour lesquelles il y a unisson entre le son longitudinal et les divers sons transversaux dont il a été parlé, avec celles qu'on déduit de la théorie mathématique des vibrations des verges.

Le nombre des vibrations longitudinales rendues par une verge est donné par la formule

$$(1) \quad N = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{k}{\delta}},$$

$k$  étant le coefficient d'élasticité du corps,  $\delta$  sa densité et  $L$  la longueur de la verge.

Le nombre des vibrations correspondant à un harmonique transversal quelconque est

$$(2) \quad N_1 = \frac{\epsilon^2 \pi e}{4\sqrt{3}L^2} \sqrt{\frac{k}{\delta}},$$

$e$  étant l'épaisseur, et  $\epsilon$  un coefficient dont la valeur dépend du rang de l'har-

monique considéré. On a suivant le nombre de nœuds :

$$\begin{aligned} 2 \text{ nœuds,} & \quad \varepsilon = 1,50562, \text{ (1)} \\ 3 \text{ nœuds,} & \quad \varepsilon = 2,49975, \\ 4 \text{ nœuds.} & \quad \varepsilon = 3,50001, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ n \text{ nœuds,} & \quad \varepsilon = \frac{2n-1}{2}. \end{aligned}$$

Si on veut calculer la longueur que doit avoir une verge d'une épaisseur déterminée pour qu'il y ait unisson entre le son longitudinal et un son transversal correspondant à un nombre déterminé de nœuds, on aura, en égalant les valeurs de  $N$  et  $N_1$ , tirées des équations 1 et 2,

$$\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{h}{\delta}} = \frac{(2n-1)^2 \pi e}{16 \sqrt{3} L^2} \sqrt{\frac{h}{\delta}},$$

d'où

$$(3) \quad \frac{e}{L} = \frac{8\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{4,41065}{(2n-1)^2}.$$

Pour l'unisson d'un harmonique transversal et du deuxième harmonique longitudinal, on aura

$$(4) \quad \frac{e}{l} = \frac{2 \times 4,41065}{(2n-1)^2},$$

et pour l'unisson du son longitudinal et de l'octave aigu d'un son transversal, on aura

$$(5) \quad \frac{e}{l} = \frac{4,41065}{2(2n-1)^2}.$$

Des formules (3), (4), (5), on pourra déduire les longueurs qui conviennent à l'observation des phénomènes que nous avons indiqués précédemment, et

---

(1) Seebeck, *Vibrations transversales des verges*, *Mémoires de la Société royale de Saxe*; 1848.

les comparer aux longueurs observées, en prenant des verges de diverses épaisseurs. J'ai réuni dans le tableau suivant diverses observations que j'ai faites à ce sujet (1).

ÉPAISSEUR	NOMBRE DE nœuds de l'harmonique transversal.	LONGUEURS CALCULÉES.	LONGUEURS OBSERVÉES.	DIFFÉRENCES.
6 <sup>mm</sup> , 14	15 <sup>n</sup>	1171	1153	18
	14	1015	996	19
	13	870	854	16
	12	736	722	14
4 <sup>mm</sup> , 06	18	1128	1118	10
	13 o. g.	1150	1141	9
3 <sup>mm</sup> , 96	26 2 h.	1168	1156	12
	25 2 h.	1078	1067	11
	18	1100	1092	8
	13 o. g.	1122	1116	6
3 <sup>mm</sup> , 26	20	1124	1114	10

On voit, d'après ce tableau, qu'à part quelques irrégularités inévitables dans ces mesures :

1°. Pour une même verge les différences sont d'autant plus petites, que l'harmonique transversal est moins élevé ;

2°. Pour un même harmonique la différence augmente avec l'épaisseur de la verge.

Ces différences ne peuvent être déterminées avec une très-grande exactitude par la méthode qui vient d'être indiquée, à cause des erreurs qui sont inhérentes à la mesure des épaisseurs.

(1) Le signe 2 h. indique que c'est le deuxième harmonique longitudinal qui est à l'unisson de l'harmonique transversal, et le signe o. g. qu'au contraire il y a unisson entre un son transversal et l'octave grave du son longitudinal.



L'épaisseur, en effet, varie légèrement d'un point à un autre de la verge, et les différences s'élèvent environ à 1 ou 2 centièmes de millimètre. Dans la formule qui sert à calculer la longueur théorique, l'épaisseur étant multipliée par un nombre très-élevé, une très-faible variation dans sa valeur donne une différence beaucoup plus grande dans la longueur calculée; il doit en être de même pour les longueurs réelles, et, par suite, il ne faut pas attacher une trop grande importance aux nombres ainsi déterminés, puisque l'épaisseur moyenne peut varier avec la longueur; cependant, comme les différences ont toujours lieu dans le même sens, les conclusions qu'on peut tirer de la comparaison de ces longueurs n'en sont pas moins rigoureuses.

Ces différences doivent provenir évidemment de ce que la formule théorique qui donne ces longueurs est déduite de certaines hypothèses que l'expérience ne vérifie pas complètement. Examinons successivement ces diverses hypothèses. Il n'y a rien de particulier à remarquer sur les vibrations longitudinales qui varient bien en raison inverse des longueurs et sur lesquelles les dimensions transversales ont peu d'influence. La valeur du coefficient constant qui entre dans la formule (3) a été vérifiée indirectement par l'expérience; en effet, les quantités qui servent à calculer ce coefficient entrent également dans la formule à l'aide de laquelle on détermine le rapport du son longitudinal au son fondamental transversal d'une verge. Cette formule a été vérifiée par Savart et Poisson (1); afin de ne laisser aucune incertitude sur cette question, je me suis occupé également de cette détermination, et j'ai reconnu que les différences qui existent entre la théorie et l'expérience sont excessivement faibles. Les différences observées précédemment ne peuvent donc provenir que de la valeur des quantités qui représentent les nombres de vibrations des harmoniques transversaux d'une verge. La théorie démontre, en effet, que ces harmoniques transversaux croissent comme les carrés des nombres impairs, quand ils sont suffisamment élevés. Il n'a été fait jusqu'à présent aucune expérience rigoureuse pour reconnaître si cette loi est parfaitement exacte. Les longueurs observées étant constamment plus courtes que les longueurs calculées, on est obligé d'admettre que ces harmoniques transversaux croissent moins vite que les carrés des nombres impairs, et que leur marche réelle s'écarte d'autant plus de la marche indiquée par la théorie, que l'épaisseur est plus considérable relativement à la longueur. Cela doit tenir à ce que dans la théo-

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 2<sup>e</sup> série, tome XXXVI, page 80.

rie on suppose que l'épaisseur est infiniment petite relativement à la longueur; que les molécules qui sont dans une même section quand la verge est en repos, y restent encore quand elle est infléchie; et enfin que la contraction et l'allongement des diverses fibres de la verge produisent des forces élastiques égales et de signes contraires. La théorie de l'élasticité des corps solides ne nous a pas encore fait voir jusqu'à quel point ces hypothèses sont rigoureuses; mais les expériences faites jusqu'à ce jour sur la flexion semblent plutôt leur être contraires que favorables.

J'ai cherché à déterminer directement la marche de ces harmoniques en prenant des verges d'épaisseurs très-différentes. J'ai reconnu que pour les verges dont l'épaisseur est moindre que 8 ou 10 millimètres, les différences entre les sons théoriques et les sons réels sont trop faibles pour être mesurées directement. Avec des verges qui ont plus de 10 millimètres d'épaisseur, au contraire, les produits des longueurs de la corde du sonomètre par les carrés des nombres impairs correspondant au nombre des nœuds vont en croissant d'une manière continue, ce qui fait voir que les nombres par lesquels on multiplie les longueurs de corde mesurées sont trop grands.

On peut à la rigueur se servir des longueurs pour lesquelles il y a unisson du son longitudinal avec les divers harmoniques transversaux pour calculer le nombre par lequel il faudrait remplacer le carré du nombre impair qui exprime la hauteur du son transversal. Quoique les nombres ainsi calculés ne soient pas parfaitement exacts, à cause de l'incertitude dans laquelle on est relativement à la valeur de l'épaisseur moyenne de la verge, ils font voir néanmoins que les intervalles des sons réels aux sons théoriques sont généralement trop faibles pour être déterminés directement. Pour calculer ces nombres, nous nous servons de la formule

$$\frac{e}{L} = \frac{4,41065}{x^2}.$$

On trouve pour les longueurs inscrites dans le tableau précédent, les nombres suivants :

ÉPAISSEUR.	LONGUEUR.	NOMBRE DE NOEUDS.	NOMBRES DONT LES CARRÉS INDIQUENT LA HAUTEUR DES HARMONIQUES		INTERVALLES.
			théoriques.	calculés.	
6 <sup>mm</sup> , 14	1153	15	29	28,813	1,0154
•	996	14	27	26,748	1,0189
•	854	13	25	24,768	1,0188
•	722	12	23	22,774	1,0199
4 <sup>mm</sup> , 06	1118	18	35	34,850	1,0084
•	1141	13 o.g.	25	24,896	1,0086
3 <sup>mm</sup> , 96	1156	26 2 h.	51	50,743	1,0101
•	1067	25 2 h.	49	48,752	1,0057
•	1092	18	35	34,874	1,0072
•	1116	13 o.g.	25	24,929	1,0102
3 <sup>mm</sup> , 26	1114	20	39	38,822	1,0092

On voit d'après ces nombres que le rapport des sons réels aux sons théoriques est toujours très-voisin de l'unité, et qu'il en diffère d'autant moins que :

- 1°. L'épaisseur est moins considérable;
- 2°. La longueur est plus grande;
- 3°. Les noeuds sont moins nombreux.

*Vu et approuvé,*

Le 2 juillet 1859,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer,*

Le 2 juillet 1859,

POUR LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

*L'Inspecteur de l'Académie,*

A. NISARD.

---

## PROPOSITIONS DE CHIMIE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

I. Des modifications que la chaleur et l'électricité apportent aux propriétés physiques et chimiques des corps simples.

II. De la chaleur développée dans les combinaisons.

III. Du rôle de l'eau dans les combinaisons chimiques.

IV. Des fermentations.

*Vu et approuvé,*

Le 2 Juillet 1859,

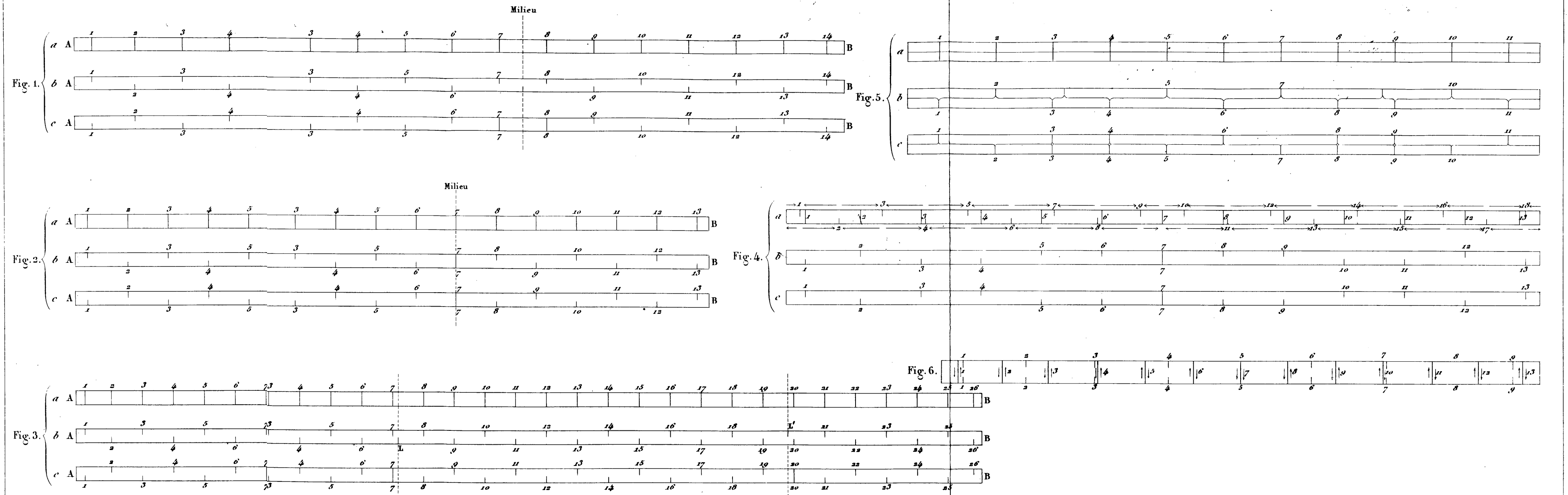
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
MILNE EDWARDS.

*Permis d'imprimer,*

Le 2 Juillet 1859,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
ARTAUD.

Planche 1.



Lequoy imp. r. de la Bucherie, à Paris.