ELEMENS DE MATHEMATIQUE DE MONSIEUR VARIGNON,

DES ACADEMIES ROYALES DES SIENCES de France, d'Angleterre, & de Prusse, Professeur de Mathématique au Collége de Mazarin, & Lecteur du Roy en Philosophie au Collége Royal.

Ex libris.

A PARIS,

Chez PIERRE-MICHEL BRUNET, Fils, Quay des Augustins, près la descente du Pont-Neuf, à l'image S. Augustin.

MDCC. XXXI.

Avec Approbation & Privilege du Roy.

A

SON ALTESSE SERENISSIME,

MONSEIGNEUR

LE COMTE DE CLERMONT.

MONSEIGNEUR,

Je prens la liberté d'offrir à VOTRE ALTESSE SERENISSIME, *ces Elémens de Mathématique*, *persuadé qu'Elle voudra bien agréer que je les mette au jour sous ses auspices. Le principal but de l'illustre Géométre qui en est l'Auteur, a toujours été de perfectionner les Arts; je ne puis donc mieux répondre à ses vuës, qu'en mettant son ouvrage sous la protection d'un Prince, qui vient de donner des marques éclatantes de son goût pour les Siences, & de son zéle pour l'avancement des Arts, en établissant une Académie dont les projets & les travaux donnent de si hautes espérances au Public.*

J'ai l'honneur d'être avec un très-profond respect,

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SERENISSIME,

Le très-humble & très-obéïssant serviteur, COCHET.

PREFACE.

JE ne puis donner au Public une idée plus juste, & plus avantageuse de ces Elémens de Géométrie, qu'en disant qu'ils sont l'ouvrage du célébre Monsieur VARIGNON, & qu'il y a donné, sur tout pendant les derniéres années de sa vie, tous les soins, & toute l'attention dont il étoit capable, pour faciliter à ses Eléves l'étude de la Géométrie. Bien différent en cela de la plûpart des grands Géométres, qui s'occupent principalement à faire de nouvelles découvertes, & se mettent peu en peine de rendre plus aisé le chemin, qui conduit où ils ne sont eux-mêmes parvenus que par des travaux immenses. La méthode qu'il a suivie dans ces Elémens, le met parfaitement à couvert des reproches, qu'on fait peut-être avec assés de fondement à la plûpart des Géométres, en les accusant de manquer d'ordre dans l'arrangement de leur matiére. Monsieur Varignon s'étudioit à mettre tout dans le plus grand jour, il ne s'épargnoit point, comme font quelquefois de grands hommes, le travail de l'arrangement beaucoup moins flatteur, & souvent plus pénible que celui de la production même ; comme le dit l'illustre Auteur, dont la plume savante & délicate consacre à l'immortalité, la mémoire de ces grands Hommes, qui font tous les jours de nouvelles découvertes dans les Siences les plus sublimes. Les principes de Géométrie sont développés dans cet Ouvrage avec tant de clarté & d'exactitude, les propositions y sont enchaînées d'une maniére si simple & si naturelle, les démonstrations sont si courtes & si faciles, qu'on y reconnoîtra aisément la supériorité du génie de celui qui en est Auteur. Il n'a jamais donné ses Elémens de Géométrie qu'en Latin, je les ai traduits en François, avec autant de fidélité & de précision qu'il m'a été possible, afin de les rendre utiles à un plus grand nombre de personnes ; c'est le même motif qui m'a déterminé à y joindre un abrégé d'Algébre & d'Arithmétique, tiré du même Auteur, pour servir d'introduction à toutes les parties des Mathématiques.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, ces *Elémens de Mathématique*; & j'ai cru que sur le nom seul du célébre M. VARIGNON, il n'y auroit pas à douter que l'impression n'en dût être très-utile. Fait à Paris ce 17 Décembre 1730. FONTENELLE.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Conseillers, les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: Salut. Notre bien amé PIERRE-MICHEL BRUNET, fils, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il lui avoit été mis en main un Manuscrit qui a pour Titre : *Les Elémens de Mathématique, par le feu sieur* VARIGNON, qu'il souhaitteroit faire imprimer & donner au Public, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modelle, sous le contrescel des presentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Exposant. Nous lui avons permis & permettons par ces presentes de faire imprimer ledit livre cy dessus specifié, en un ou plusieurs volumes, conjointement ou separement & autant de fois que bon lui semblera, sur papier & caracteres conformes à ladite feüille imprimée & attachée sous notredit contre-scel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de six années consecutives, à compter du jour de la date desdites presentes; faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéïssance; comme aussi à tous Imprimeurs-Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter ni contrefaire ledit Livre ci dessus exposé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, & en quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts, à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des

Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'impression de ce Livre sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, & que l'Impetrant se conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril 1725. Et qu'avant que de l'exposer en vente, le manuscrit ou imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre sera remis dans le même état où l'Aprobation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & feal Chevalier, Garde des Sceaux de France le Sieur Chauvelin, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le sieur Chauvelin, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenuë pour düëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'éxécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le quinziéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cens trente-un, & de notre Regne le seiziéme. Par le Roy en son Conseil,

NOBLET.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris No. 139. Fol. 140. conformément aux anciens Reglemens confirmez par celui du 28. Fevrier 1723. A Paris le 22. Mars 1731.

P. A. LE MERCIER, *Syndic*.

De l'Imprimerie de GISSEY.

ELEMENS
DE
MATHEMATIQUE.

LES Mathématiques considérent les propriétés des grandeurs. On appelle grandeur, tout ce qui peut être augmenté ou diminué ; & comme toute grandeur est étenduë ou nombre, on peut diviser les Mathématiques en deux parties ; savoir, l'Algébre & la Géométrie : Toutes les autres, comme les Mécaniques, l'Optique, les Fortifications, &c. ne sont qu'une application de l'Algébre & de la Géométrie à la Physique.

L'Algébre traite des grandeurs considérées en général, c'est pourquoi les principes de l'Algébre sont les premiers élémens de toutes les Mathématiques ; & comme toutes les regles de l'Arithmetique sont tirées de l'Algébre; nous ne séparerons point l'Arithmétique de l'Algébre; mais nous joindrons par tout les calculs d'Arithmétique à ceux d'Algébre, pour faire mieux sentir l'analogie qui est entre eux.

L'Algébre emploie dans ses calculs les lettres de l'alphabet, & l'Arithmétique se sert des signes qu'on appelle chiffres.

Nous diviserons ce traité d'Algébre en quatre livres. Dans le premier nous parlerons de l'addition, soustraction, multiplication & division; dans le second, des proportions & des fractions; dans le troisiéme, de l'extraction des racines; & dans le quatriéme, des équations.

PRINCIPES GENERAUX.

Il y a trois sortes de principes sur lesquels toutes les Mathématiques sont fondées; savoir, les définitions, les axiomes & les demandes.

DEFINITIONS GENERALES.

I.

Les définitions expliquent la signification des mots dont on se sert, par exemple, ce qu'on doit entendre par les mots de triangle, de point, &c.

II.

Les demandes sont des suppositions si simples, que toute personne, pour peu de réflexion qu'elle y fasse, doit les admettre; par exemple on demande, pour parvenir à une démonstration, qu'il soit permis de mener une ligne d'un point à un autre point, ou d'imaginer qu'elle y soit menée.

III.

Les axiomes sont des vérités évidentes à toute personne qui y fait attention; par exemple, *le tout est plus grand que sa partie.*

IV.

Un théorême eſt une propoſition dans laquelle il s'agit ſeulement de la démonſtration d'une vérité.

V.

Un problême eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe & de démontrer que la maniére qu'on propoſe pour faire cette choſe eſt infaillible, & un veritable chemin pour y parvenir.

VI.

Les corollaires ou conſéquens ſont des vérités qui deviennent néceſſairement connuës par les propoſitions démontrées, ou par les définitions expoſées.

VII.

Cette marque $=$ ſignifie égal, cette autre $+$ ſignifie plus, cette troiſiéme $-$ ſignifie moins ; par exemple, $2+3=5$, c'eſt-à-dire, deux, plus, trois, égal, cinq.

VIII.

Cette note ou marque $>$ ſignifie plus grand, & cette autre $<$ ſignifie plus petit ; par exemple, $7-2>4$, c'eſt-à-dire, ſept moins deux ſont plus grands que quatre.

DEMANDES GENERALES.

I.

Lorſque pluſieurs grandeurs ſont égales, qu'il ſoit permis de prendre l'une au lieu de l'autre.

II.

Qu'il ſoit permis de nommer une grandeur d'une ou de pluſieurs lettres de l'alphabet.

III.

Que les grandeurs égales, ou de même nature; soient exprimées par des lettres semblables, si cela est nécessaire pour une démonstration.

IV.

Les grandeurs inégales, ou de differente nature, ses sont exprimées par des lettres différentes.

AXIOMES GENERAUX.

I.

Le *tout* est plus grand que sa partie.

II.

Le tout est égal à ses parties prises ensemble.

III.

La moitié, le tiers, le quart, &c. d'un tout est égal à la moitié, au tiers & au quart de toutes ses parties prises ensemble.

IV.

Après avoir ôté toute une grandeur d'elle-même; il ne reste rien.

V.

Si à grandeurs égales; on ajoûte grandeurs égales; *les tous qui en résulteront seront égaux.*

VI.

Réciproquement, si à des grandeurs égales, d'autres grandeurs étant ajoûtées, il resulte des tous égaux, ces grandeurs ajoûtées sont égales.

VII.

Si à grandeurs inégales; on ajoûte grandeurs égales;

les tous qui en résulteront seront inégaux.

VIII.

Si des grandeurs inégales ajoûtées à des grandeurs inégales font des tous égaux, la plus grande de ces grandeurs inégales aura été ajoûtée à la plus petite, & la plus petite à la plus grande.

IX.

Les grandeurs qui ajoûtées à des grandeurs égales ; donnent des tous inégaux, sont inégales, & la plus grande est celle qui fait un tout plus grand.

X.

Ces grandeurs sont inégales, qui ajoûtées à des grandeurs inégales donnent des tous égaux, & la plus grande des grandeurs ajoûtées, est celle qui est jointe à la plus petite, & la plus petite celle qui est jointe à la plus grande.

XI.

Si de grandeurs égales on ôte grandeurs égales, les restes seront égaux.

XII.

Et réciproquement après avoir ôté certaines grandeurs d'autres grandeurs égales, si les restes sont égaux, les grandeurs retranchées seront égales entre elles.

XIII.

Si de grandeurs inégales, on ôte grandeurs égales, ou moins de la plus grande que de la plus petite, les restes seront inégaux.

XIV.

Si de grandeurs égales, on ôte grandeurs inégales, les restes seront inégaux.

XV.

Réciproquement les grandeurs ôtées de grandeurs égales, font inégales, lorfque les reftes font inégaux.

XVI.

Des grandeurs font égales, lorfqu'ôtées de grandeurs égales, les reftes font égaux.

XVII.

Des grandeurs font inégales, lorfqu'ôtées de grandeurs inégales, les reftes font égaux.

XVIII.

Les grandeurs qui font égales à une même troifiéme; font égales entre elles; ou bien les grandeurs qui furpaffent une troifiéme grandeur d'un excès égal, ou font moindres qu'une troifiéme d'une grandeur égale, font égales entre elles.

XIX.

Une grandeur égale, plus grande, ou plus petite que l'une de deux grandeurs égales, eft auffi égale, plus grande, ou plus petite que l'autre.

XX.

Si de trois grandeurs, la premiére eft plus grande que la deuxiéme, la deuxiéme que la troifiéme; la premiere fera auffi plus grande que la troifiéme.

AVERTISSEMENT.

Quoique ces définitions, demandes & axiomes, conviennent généralement à toutes les parties des Mathématiques; cependant la Géométrie & les autres parties élémentaires, ont encore leurs définitions, demandes & axiomes.

LIVRE PREMIER.

De l'Addition, Soustraction, Multiplication & Division des grandeurs entiéres.

Nous diviserons ce Livre en quatre Chapitres. Le premier sera de l'addition; le second, de la soustraction; le troisiéme, de la multiplication; le quatriéme, de la division.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition.

DÉFINITION I.

L'addition est un assemblage de deux ou plusieurs grandeurs en une, qu'on appelle *somme* ou *total.*

Comme nous avons à parler dans ce Chapitre de l'addition des grandeurs exprimées par des lettres & par des chiffres, nous le diviserons en deux Articles, dont l'un sera de l'addition des nombres, l'autre de l'addition des lettres ou des grandeurs exprimées par des lettres; & parce que les exemples frappent plus dans les commencemens que les regles générales, nous parlerons d'abord de l'addition des nombres.

ARTICLE PREMIER.

De l'Addition des Nombres.

DÉFINITION II.

Le nombre est une collection d'unitez. L'unité est opposée à la multiplicité, & on la considére sans faire attention aux parties qui la composent, ou à une autre chose dont elle peut être partie; Par exemple, un sol, un écu, une toise, un piéd, &c.

Il y a dix sortes de signes ou caractéres dont on se sert pour exprimer toutes sortes de nombres, & on les appelle chiffres ; Savoir,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, zero.

Il faut remarquer que ce dernier chiffre o, qu'on appelle zero ne signifie rien seul ; mais seulement lorsqu'il est mis après les autres dont il augmente la valeur.

La valeur des chiffres ne dépend pas seulement de leur figure, mais aussi de leur arrangement.

Lorsque plusieurs chiffres sont rangés de suite, ceux qui sont dans la premiere place (commençant à compter de droite à gauche) ne valent jamais plus qu'eux-mêmes ; ceux qui sont dans la seconde place, valent dix fois ce qu'ils vaudroient s'ils étoient dans la premiere. 1, par exemple, dans la premiére place ne vaut qu'une seule unité ; dans la seconde place il vaut dix ; dans la troisiéme il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la seconde ; savoir, dix dixaines, ou une centaine ; dans la quatriéme place, il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la troisiéme, savoir dix centaines ou un mille, &c.

On compte de droite à gauche en disant, nombre, dixaine, centaine, mille, dixaine de mille, centaine de mille, million, dixaine de million, centaine de million, milliars ou billions, &c.

Lorsqu'il y a plusieurs chiffres de suite, on les sépare de trois en trois par tranches, avec de petites virgules pour éviter la confusion ; la premiere tranche est appellée unité ; la seconde mille ; la troisiéme millions, &c. Par exemple, dans le nombre 96, 638, 908, la troisiéme tranche est quatre-vingt-seize millions, la seconde six cens trente-huit mille ; la premiere à droite neuf cens huit.

PREMIERE PROPOSITION.

Ajoûter ensemble des nombres entiers.

Pour faire cette opération, il faut écrire les chiffres qui

qui expriment les nombres qu'on veut assembler : De sorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.

Après avoir mené une ligne sous ces nombres ainsi disposés, il faut assembler ceux qui sont de même espéce, & lorsque leur somme est au-dessous de dix, on l'écrit sous chaque rangée ; mais si elle excede neuf, alors parce qu'il faut plusieurs chiffres pour l'exprimer, on écrit seulement le dernier qui se trouve vers la main droite, & on reserve ce qui se trouveroit vers la main gauche, pour l'ajoûter à la colonne suivante, & ainsi de suite jusqu'à la fin.

EXEMPLE.

5 4 7 3.	A.
4 2 1 4.	B.
1 0 2.	C.
9 7 8 9.	D.

Pour ajoûter ces trois nombres 5473 ; 4214, 102, après les avoir disposés l'un sur l'autre comme on vient d'enseigner, on commence vers la main droite : disant : 3 & 4 font 7 & 2 font neuf ; j'écris 9 sous la premiere rangée, ensuite je passe aux dixaines qui sont dans la seconde rangée, je les ajoûte les unes aux autres, en disant 1 & 7 font 8 ; j'écris 8 sous la seconde rangée, & je passe aux ~~[illegible]~~ centaines qui sont dans la troisiéme rangée, & je dis 1 & 2 font 3 & 4 font 7 ; j'écris 7 sous la troisiéme rangée. Enfin je passe à la quatriéme, & je dis 4 & 5 font 9, j'écris 9 sous cette quatriéme rangée.

AUTRE EXEMPLE.

112. l.	12. f.	4. d.	
2429.	17.	3.	- A.
820.	10.	10.	
3363.	0.	5.	

Pour ajoûter ces nombres 112 l. 12 f. 4 d. 2429 l. 17 f. 3 d. & 820 l. 10 f. 10. d. il faut commencer par les deniers, disant : 10 deniers & 3 font 13 deniers, qui valent 1 sol & 1 denier ; j'écris la petite ligne A, pour marquer 1 sol. & je retiens 1, que j'ajoûte avec quatre, ce qui fait 5 que j'écris sous ces deniers. Ensuite je compte combien il y a de petites lignes marquées à côté des deniers ; j'en trouve une, cela signifie que c'eſt un ſol qu'il faut joindre avec les ſols, diſant 1 retenu & 7 (*negligeant le* 0) ſont 8 & 2 ſont 10 ; j'écris 0 & je retiens 1 que je joins avec les dixaines des ſols, diſant 1 de retenu & 1 ſont deux & 1 ſont trois & 1 ſont 4 dixaines de ſols, & parce qu'il faut deux dixaines de ſols pour faire une livre, je prens ~~la moitié de~~ ces quatre dixaines de ſols, cela fait 2 l. que je joins avec les livres, diſant, 2 l. provenuës des ſols, & 9 *(negligeant le* 0 (ſont 11 & 2 ſont 13; j'écris 3 & je retiens 1 dixaine que je joins à la colonne ſuivante, diſant 1 retenu & 2 ſont 3 & 2 ſont 5 & 1 ſont 6 ; j'écris 6. Enſuite paſſant à la troiſiéme colonne ſuivante, je dis : 8 & 4 ſont 12 & 1 ſont 13, j'écris 3 & je retiens 1. Enfin au quatriéme rang, je dis 1 dixaine de cent que j'ai retenu avec 2 ſont 3, *j'écris 3 & ainſi je trouve* que la ſomme ou le total de trois nombres propoſés eſt 3363 l. 0 ſ. 5 d.

DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

Le tout (*Axiome.* 2) eſt égal à ſes parties priſes enſemble ; mais la ſomme trouvée par l'opération, n'eſt autre choſe que la collection de tous les nombres qu'il falloit ajoûter ; car cette ſomme contient autant d'unités, autant de dixaines, autant de centaines, &c. que ces nombres pris enſemble, comme on le voit par l'opération. Donc la ſomme eſt égale à ces nombres pris enſemble, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Puiſque la ſomme (*Axiome.* 2) eſt égale à ſes parties priſes enſemble, il eſt clair que ſi de cette ſomme on ôte un des nombres dont elle eſt compoſée, le reſte ſera égal aux autres nombres pris enſemble ; lors donc que cela arrive ainſi, c'eſt une marque que l'addition a été bien faite ; ſinon on s'eſt trompé : l'addition par conſéquent ſe prouve par la ſouſtraction dont nous parlerons dans le chapitre ſuivant.

ARTICLE SECOND.

De l'addition des grandeurs générales, entières, exprimées par des lettres.

Lorsqu'on veut ajoûter ensemble des grandeurs dont chacune est exprimée par une ou plusieurs lettres, il suffit de les écrire de suite sans rien changer à leurs signes. Par exemple pour assembler a avec $2a$ & avec $4a$, on écrira $a+2a+4a$.

Les grandeurs exprimées par des lettres semblables, & qui ont les mêmes signes, doivent être ajoûtées ensemble; & leur somme doit être précedée du signe qui précedoit chacune en particulier.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 3a - 2b - d. \\ a - b \\ \hline 4a - 3b - d. \\ \hline \end{array}$$

Si on veut ajoûter ces grandeurs $3a - 2b - d$ avec $a - b$.

1°. Les grandeurs qu'il faut ajoûter les unes aux autres doivent être jointes avec les signes qu'elles ont devant elles sans en changer aucun.

2°. Les grandeurs qui n'ont aucun signe, sont toûjours regardées comme ayant le signe $+$; ainsi dans l'exemple présent, on aura pour la somme $3a + a - 3b - d$. mais les grandeurs qui ont les mêmes signes, doivent être ajoutées ensemble, lorsqu'elles sont aussi exprimées par les mêmes lettres; ainsi $3a + a$ donnent $4a$, & par conséquent la somme est $4a - 3b - d$.

Lorsque les grandeurs exprimées par les mêmes lettres sont précedées de signes contraires, & de chiffres inégaux, on retranche la valeur du plus petit de ces chiffres de la valeur de l'autre: par exemple, si on veut ajoûter $a + b - 3$ avec $2a - 3b + 8$, on aura $a + b - 3 + 2a - 3b + 8$, on effacera $+b$, & dans la grandeur $-3b$ on retranchera & effacera $-b$; il restera encore $a - 3 + 2a - 2b + 8$, on effacera encore -3, & dans le nombre $+8$, on effacera $+3$ & il restera $a + 2a - 2b + 5$. Enfin on aſſemblera a avec $2a$ & on aura $3a - 2b + 5$ pour la ſomme, ou total des grandeurs $a + b - 3$ & $2a - 3b + 8$.

EXEMPLE.

$$a + b - 3$$
$$2a - 3b + 8$$
$$a + b - 3 + 2a - 3b + 8$$
$$a - 3 + 2a - 2b + 8$$
$$a + 2a - 2b + 5$$
$$\text{ſomme } 3a - 2b + 5$$

DEMONSTRATION.

Le ſigne + marque l'addition, par conſéquent il faut joindre les quantités qui doivent être ajoûtées, par le ſigne +, quelqu'autre ſigne qu'elles ayent devant elles. Si elles ont donc devant elles le ſigne +, il faut les ajoûter par + + & ſi elles ont le ſigne —, il faut les ajoûter par le ſigne + —; mais + + n'eſt autre choſe que +, + — n'eſt autre choſe que —. Donc quelques ſignes que ces grandeurs qui doivent être ajoûtées ayent, il faut les joindre avec les ſignes qu'elles ont devant elles. Voilà la regle générale de l'addition des lettres, de laquelle ſuit neceſſairement celle de la ſouſtraction dont nous avons à traiter dans le chapitre ſuivant.

CHAPITRE SECOND.

De la Souſtraction des grandeurs entiéres, d'autres grandeurs entiéres.

DEFINITION TROISIEME.

La ſouſtraction eſt une opération par laquelle on retranche une petite grandeur d'une plus grande.

COROLLAIRE.

La ſouſtraction eſt directement opposée à l'addition; car elle détruit ce que l'addition fait.

Nous diviſerons ce Chapitre comme le précédent en deux articles. Dans le premier, nous parlerons de la ſouſtraction des nombres entiers, & dans le second de celle des grandeurs générales exprimées par des lettres.

ARTICLE PREMIER.

De la soustraction des nombres entiers.

Le nombre qui reste après la soustraction est appellé *différence* de ces deux nombres. Je suppose que l'on sait comment il faut ôter un nombre au-dessous de dix de tout autre nombre au-dessous de dix neuf, par exemple que 3 ôtés de 4 reste 1, que neuf ôtés de dix-huit, reste neuf.

PROPOSITION II.

Trouver la différence de deux nombres, ou ôter le plus petit du plus grand.

Pour faire cette opération, il faut placer le nombre qu'on veut retrancher ou soustraire sous le plus grand nombre duquel on veut retrancher le plus petit; de sorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines &c. Ensuite il faut mettre une ligne au-dessous de ces chiffres, au-dessous de laquelle on écrira le reste, ou résidu, ou différence. Enfin on soustrait les nombres inferieurs des superieurs l'un après l'autre, & on écrit de suite les restes au-dessous de la ligne.

EXEMPLE.

de	458
ôtant	234
reste	224

Pour soustraire 234 de 458, après les avoir disposés comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite à la premiere colonne, disant : de 8 j'ôte 4 reste 4 que j'écris: ensuite à la seconde colonne je dis : de 5 ôtant 3 reste 2 que j'écris; & à la troisiéme colonne, je dis : de 4 ôtant 2, reste 2 que j'écris; & ainsi je trouve qu'après avoir retranché 234 de 458, il reste 224.

AUTRE EXEMPLE.

Pour retrancher 2071 l. 4 ſ. de 42603 l. 15 ſ. après avoir rangé ces deux nombres l'un ſur l'autre, il faut commencer par les ſols vers la main droite, diſant : de 5 ôtant 4 reſte 1 que j'écris ſous le 4 : enſuite aux dixaines de ſols, je dis : de 1 ôtant rien reſte 1 que j'écris. Des ſols il faut paſſer aux livres, diſant : de 3 je retranche 1 reſte 2 que j'écris. Enſuite au deuxiéme rang, je dis : de 0 retranchant 7, cela ne peut être ; ſur le 6 qui précede j'emprunte une unité, laquelle étant tranſportée à la place du zero vaudra 10, & je dirai : de 10 retranchant 7, il reſte 3 que j'écris ſur le 7, enſuite au troiſiéme rang, je dis : de 5 (parce que des 6 j'avois emprunté une unité, & pour m'en ſouvenir, j'avois marqué un point deſſus le 6) ôtant 0 reſte 5 que j'écris. Au quatriéme rang, je dis : de 2 retranchant 2 reſte rien ; j'écris 0, parce qu'il ne faut point laiſſer de place vuide en pareille rencontre ; & au cinquiéme rang, je dis : de 4 retranchant rien reſte 4 que j'écris, & je trouve qu'il reſte 40532 l. 11 ſ. La preuve de la ſouſtraction ſera faite en ajoûtant le reſte ou reſidu, avec le nombre qui a été retranché, & ſi l'opération eſt exacte, la ſomme de ces deux nombres doit être égale (*Axiome* 2.) au nombre dont on a retranché ; ſi cela n'arrive pas, l'opération n'a pas été exacte, & il faut la recommencer.

de	42603 l.	15 ſ.
ôtant	2071	4
reſte	40532	11.

ARTICLE SECOND.

De la ſouſtraction des grandeurs générales entiéres exprimées par des lettres.

Lorſqu'on veut ſouſtraire une grandeur d'une autre, il ſuffit de changer les ſignes de la grandeur qu'on veut ſouſtraire, & d'ajoûter enſuite cette grandeur à celle dont on vouloit faire cette ſouſtraction, de la maniére qu'on le vient d'enſeigner ; la ſomme qui en réſulte eſt le reſte qu'on cherche par cette ſouſtraction.

EXEMPLE.

Pour souſtraire $4a - 3b$ de $7a + 6b$, en changeant les ſignes de $4a - 3b$, je trouve $-4a + 3b$, & l'ajoûtant à $7a + 6b$, je trouve $3a + 9b$ qui eſt le reſte que je cherche par cette opération.

$$\begin{array}{ll} \text{de} & 7a + 6b \\ \text{ôtés} & 4a - 3b \\ \hline \text{reſte} & 3a + 9b \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{ll} \text{de} & 2a - 4b + c - 3d \\ \text{ôtés} & a + 7b - 4c + 2m \\ \hline \text{reſte} & a - 11b + 5c - 3d - 2m \end{array}$$

CHAPITRE III.

De la multiplication des grandeurs entiéres.

DEFINITION IV.

La multiplication eſt une addition abregée, par laquelle on ajoûte un nombre autant de fois à lui-même qu'il y a d'unités dans un autre nombre. Par exemple, multiplier 6 par 3, c'eſt ajoûter le nombre 6 à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités en 3, c'eſt-à-dire 3 fois pour avoir 18, qui eſt le nombre qu'on cherche.

Le nombre cherché par la multiplication, qui exprime le total ou la ſomme de l'addition d'un autre nombre ajoûté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans un troiſiéme, eſt appellé *produit de la multiplication*, & les deux nombres dont le produit eſt formé, ſont appellés *racines du produit*.

Pour multiplier facilement les nombres ſimples, c'eſt-à-dire qui ſont au-deſſous de dix, il faut fermer les deux mains, enſuite lever autant de doigts d'une main qu'il y a d'unités à ajoûter à l'un de ces nombres ſimples pour faire 10; il faut de même lever autant de doigts de l'autre main qu'il y a d'unités à ajoûter à l'autre nombre pour le rendre égal à dix. Après cela il faut multiplier le nombre des doigts levés d'une main, par les doigts levés de l'autre main & ajoûter au produit qui en résulte autant de dixaines qu'il reste de doigts baissés dans les deux mains, & la somme qui en résulte est le produit qu'on cherche. Par exemple pour multiplier 7 par 8, je ferme les deux mains, & je dis : 7 différe de dix par 3 unités, c'est pourquoi je leve trois doigts d'une main; ensuite je dis : 8 differe de dix par deux unités, je leve deux doigts de l'autre main. Après cela je multiplie les doigts levés d'une main par ceux de l'autre main, c'est-à-dire 2 par 3 qui me donnent 6 que j'ajoûte à 5 dixaines, parce qu'il reste cinq doigts baissés, & le produit 56 est ce que l'on cherche. Il faut remarquer qu'en multipliant un nombre par l'autre indifféremment, c'est-à-dire, le premier par le second, ou le second par le premier, il en résulte toûjours le même produit.

Pour trouver le nombre qu'on cherche par la multiplication, il faut placer les deux nombres à multiplier l'un sous l'autre de la même maniére que dans les opérations précédentes, & si les deux nombres ne sont pas composés d'autant de chiffres l'un que l'autre, il faut que celui qui en a moins soit sous celui qui en a plus, afin de pouvoir plus facilement les multiplier.

PROPOSITION III.

Multiplier toutes sortes de nombres.

Pour multiplier toutes sortes de nombres, il faut premiérement les placer & les disposer, comme il a été dit ci-dessus, secondement après avoir tiré une ligne sous ces nombres, il faut multiplier le premier chiffre à droite du nombre de dessous par tous les chiffres du nombre qui est au-dessus, de maniére que si le produit qui en résulte est composé de deux chiffres, on n'écrit que le premier, & l'on ajoûte le second au produit suivant. Les exemples rendront cela plus facile, & feront mieux connoître que tous les préceptes, comment se fait la multiplication.

EXEMPLE.

EXEMPLE.

Pour multiplier 345 par 2, après les avoir disposés comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite, disant : 2 fois 5, sont 10 ; j'écris 0 sous le premier chiffre, & je retiens une dixaine dans ma mémoire pour le rang suivant ; je dis ensuite 2 fois 4 sont 8, & 1 que j'avois retenu, sont 9, j'écris 9 ; enfin je dis 2 fois 3 sont 6, j'écris 6 : ainsi je trouve que le produit de cette multiplication est 690.

$$\begin{array}{r} 345 \\ 2 \\ \hline 690 \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE.

Pour multiplier 275 par 24, il faut dire 4 fois 5 sont 20, & écrire 0 sous le 4, & retenir deux dixaines : ensuite 4 fois 7 ou 7 fois 4 sont 28, & 2 que j'avois retenu sont 30, j'écris 0 & je retiens trois dixaines. 4 fois 2 sont 8 & 3 que j'avois retenu, sont 11 ; j'écris 1 sous le 2 multiplié, & j'avance une dixaine, parce que c'est tout.

$$\begin{array}{rr} & 275 \\ & 24 \\ \hline & 1100 \\ & 550 \\ \hline \text{Prod.} & 6600 \end{array}$$

Ensuite il faut multiplier 275 par les deux dixaines de 24 en cette sorte : 2 fois 5 sont 10, j'écris 0 sous les dixaines de 24, & je retiens 1 ; ensuite 2 fois 7 sont 14, & 1 que j'avois retenu sont 15, j'écris 5 & je retiens 1 : 2 fois 2 sont 4, & 1 que j'avois retenu sont 5, j'écris 5. Ces deux produits ainsi arrangés étant par l'addition réduits à une somme, on trouve que le produit total est 6600 qu'on cherchoit.

OBSERVATION I.

Lorsqu'il faut multiplier un nombre par des livres, sols ou deniers, on commence toujours par les moindres espéces de monnoie. Or pour multiplier par les deniers, & avoir dans la même opération un produit réduit en sols, selon les deniers qui se rencontrent depuis 1 jusqu'à 11, il faut prendre de la somme qu'on veut multiplier ces parties, savoir, lorsqu'il y a un denier, pour avoir en ſols la valeur du produit ; on prendra une douziéme partie du nombre propoſé, parce qu'un denier eſt une douziéme partie du nombre propoſé, c'eſt-à-dire, d'un ſol. à 2 deniers, on prendra une ſixiéme partie &c. Les exemples ſuivans rendront cela facile.

OBSERVATION II.

Lorſqu'on prend quelque moitié, tiers, ou quart, &c. d'un nombre, il faut toujours commencer vers la main gauche, afin que s'il reſte quelques unités à chaque chiffre, elles ſoient jointes aux ſuivans en qualité de dixaines.

OBSERVATION III.

Lorſqu'on veut réduire en livres un nombre de ſols ; par exemple, pour réduire en livres 428 ſols, il faut ſéparer le dernier chiffe 8, & prendre la moitié des autres, diſant la moitié de 4 eſt 2 qu'il faut écrire, la moitié de 2 eſt 1 qu'il faut auſſi écrire, & le chiffre 8 qu'on avoit ſéparé ſignifie 8 ſols, & ainſi on trouve que 428 ſols font 21 liv. 8 ſols.

42|8 ſ.
21 l. 8 ſ.

Pour réduire en livres 12196 ſ. après avoir ſéparé le dernier chiffre 6, on prend la moitié des autres : on ne dira pas la moitié de 1, mais on dira la moitié de 12 eſt 6 qu'il faut écrire. On ne dit point la moitié de 1 ; c'eſt pour cela qu'on écrit 0 au-deſſous, parce qu'il ne faut pas laiſſer de place vuide en pareille rencontre ; mais cet 1 vaut 10 à l'égard du 9 ſuivant, & y joignant ce 9, cela fait 19, on dit la moitié de 19 eſt 9, reſte 1, il faut écrire 9 ſous le 9, & 1 qui reſte eſt une dixaine qu'il faut écrire devant le 6 pour ſignifier 16 ſ. & ainſi on trouve que 12196 ſ. font 609 livres 16 ſols.

1219|6 ſ.
609 l. 16 ſ.

EXEMPLE.

Si on veut connoître quelle ſomme produiſent 48 muids de vin à raiſon de 35 livres 12 ſols chaque muid ; c'eſt chercher quelle somme produisent 48 fois 35 livres 12 sols.

Il faut commencer par les sols, disant : 2 fois 8 sont 16 ; j'écris 6 sous le 5, & je retiens 1 : 2 fois 4 sont 8, & 1 que j'avois retenu sont 9, j'écris 9, ensuite je multiplie par la dixaine des sols, disant : une fois 8 sont 8, j'écris 8 sous le 9 au rang des dixaines ; 1 fois 4 sont 4, j'écris 4. Après avoir additionné ou assemblé ces deux produits de sols ainsi arrangés, je trouve que le produit total des 48 fois 12 sols est 576 s. je réduis ce 576 s. en livres, comme il a été enseigné, je trouve pour leur valeur 28 liv. 16 s. que j'écris au-dessous.

48 muids.
à 35 l. 12 s.
96 s.
48
57|6 s.
28 l. 16 s.

Ensuite je multiplie par les livres, disant 8 fois 5 sont 40, j'écris o sous le 8 des livres provenuës des sols, & je retiens 4 : 4 fois 5 sont 20, & 4 que j'avois retenu sont 24, j'écris 4 & j'avance 2. Je multiplie ensuite par les dixaines de 35, disant : 3 fois 8 sont 24 ; j'écris 4 au rang des dixaines sous le produit précédent, & je retiens 2 : 3 fois 4 sont 12, & 2 que j'avois retenu sont 14, j'écris 4 & j'avance 1. Après avoir additionné ces trois produits, je trouve 1708 liv. 16 s. pour la valeur totale de 48 muids de vin.

AVERTISSEMENT.

Lorsque les nombres qu'il faut multiplier ont un ou plusieurs o à la fin, il faut seulement multiplier les autres chiffres, & ajoûter au produit qui en résulte autant de o qu'il y en a à la fin de chaque nombre : par exemple, pour multiplier 200 par 30 il suffit de multiplier 2 par 3 & ajoûter au produit 6, les deux o du premier nombre, 200, & celui du second, 30, & les 6000 qui en résultent, sont le produit de 200 par 30.

Lorsque l'un des nombres est composé d'une unité & de plusieurs o, on a le produit en ajoûtant tous les o de ce nombre à l'autre ; par exemple, pour multiplier 154 par 100, il ſuffit d'ajoûter à 154 deux o ; & il en réſulte 15400, ce qui eſt le produit de 154 multiplié par 100.

DEMONSTRATION DE LA MULTIPLICATION.

Par les conditions de l'operation préſente, il eſt conſtant 1°. Qu'on répéte autant de fois le nombre à multiplier qu'il y a d'unités dans le premier chiffre du multiplicateur. 2°. Autant de dixaines de fois, qu'il y a de dixaines dans le ſecond chiffre ; autant de centaines de fois qu'il y a de centaines dans le troiſiéme chiffre du multiplicateur, & ainſi des autres. Donc le nombre à multiplier eſt répeté autant de fois qu'il y a d'unités dans tout le multiplicateur. Mais (*Def.* 4) répeter un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre, c'eſt le multiplier par cet autre. Donc en ſuivant les regles de l'opération préſente, on multiplie véritablement un nombre par un autre : ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE SECOND.

De la Multiplication des Grandeurs générales entiéres exprimées par des lettres.

Pour exprimer le produit des grandeurs multipliées l'une par l'autre ; par exemple, de la grandeur a multipliée par la grandeur b, on écrit ces grandeurs l'une après l'autre, c'eſt-à-dire, $a\,b$, ou $b\cdot a$.

Lorſqu'il ſe rencontre un produit de pluſieurs grandeurs égales ou exprimées par les mêmes lettres ; par exemple $a\,a\,a$, on abrége cette expreſſion en cette maniere a^3.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'on multiplie des grandeurs précedées des mêmes ſignes, leur produit doit toujours être précedé du ſigne + ; par exemple + 3 multiplié par + 4 donne + 12 ; parce que les ſignes qui précedent 3 & 4 étant tous deux affirmatifs, dans cette multiplication, on ajoûtera autant de fois 3 à lui-même qu'il y a d'unités dans 4, & par conséquent il ne doit paroître aucun signe de négation dans le produit qui est 12 : de même — 3 par — 4 donne + 12, parce que la négation d'une négation est une affirmation; or multiplier — 3 par — 4, c'est retrancher — 3 autant de fois que — 4 exprime d'unités; & retrancher, c'est nier donc en multipliant — 3 par — 4, on nie quatre fois — 3; nier 4 fois — 3, c'est mettre 4 fois 3 qui sont 12; donc — 3 par — 4 donnent + 12.

Lorsqu'au contraire des deux grandeurs à multiplier, il y en a une précedée du signe + & l'autre du signe —, le produit doit toujours être précedé du signe —. Par exemple, + 3 multiplié par — 4 donne — 12, parce que la grandeur précedée du signe — exprime qu'il faut retrancher plusieurs fois celle qui est précedée du signe +; comme dans l'exemple proposé — 4 exprime qu'il faut retrancher autant de fois + 3 qu'il y a d'unités dans 4, c'est-à-dire, 4 fois; & ainsi le produit qui n'est que l'addition de tous ces retranchemens, doit être precedé du signe negatif ou de soustraction.

COROLLAIRE.

Donc les mêmes signes donnent +, & les signes differens produisent —

EXEMPLES DE LA MULTIPLICATION.

Mul.	$+ 3a$	$- 3a$	$- 3a$	$+ 3a$
Par.	$+ 6b$	$- 6b$	$+ 6b$	$- 6b$
Prod.	$+18ab$	$+18ab$	$-18ab$	$-18ab$

Les grandeurs qui ne sont precedées d'aucun signe, sont regardées comme ayant devant elles le signe +.

CHAPITRE IV.

De la Division des grandeurs entiéres.

DEFINITION V.

LA division est une opération par laquelle on partage une grandeur en autant de parties égales, qu'il y a d'unités dans une autre.

Le nombre qui exprime une de ces parties égales est appellé *Quotient.* Le nombre qu'on veut partager, est appellé nombre à diviser ; & le nombre qui exprime en combien de parties on veut diviser l'autre, est appellé *Diviseur.* Comme on connoît plus facilement ce que c'est que la Division par le moyen des nombres que par les lettres ; nous commencerons par la Division des nombres.

ARTICLE PREMIER.

De la division des Nombres.

Diviser un nombre par un autre, c'est chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre à diviser, comme on le voit par la définition 5.

On écrit le nombre à diviser, ensuite on méne une ligne au-dessous de laquelle on écrit le diviseur, commençant de gauche à droit, & au bout de la ligne qu'on vient de mener, on écrit le quotient comme on verra dans les exemples suivans.

PROPOSITION IV.

Diviser toutes sortes de Nombres les uns par les autres, les plus grands par les plus petits.

Pour diviser un nombre par un autre, il faut premiérement écrire le diviseur au-dessous du nombre à diviser, de maniére que le dernier chiffre de l'un réponde au dernier chiffre de l'autre, le penultiéme au penultiéme, & ainsi des autres; or le diviseur est censé au-dessous de tous les chiffres qui sont à gauche du nombre à diviser. Que si le nombre qui est au-dessus du diviseur est plus petit que le diviseur, il faut l'avancer d'un pas à droit.

Secondement après avoir disposé le nombre à diviser, & le diviseur comme on vient de le dire, & avoir mené une ligne entre ces deux nombres, & comme un petit croissant au bout de cette ligne à droit, on cherche combien de fois le diviseur est renfermé dans le nombre à diviser; mais parce que cela est souvent difficile à connoître, sur-tout lorsque le diviseur est composé de plusieurs chiffres, on cherche combien de fois le dernier chiffre à gauche du diviseur est contenu dans le nombre qui est au-dessus de lui, & le nombre qui l'exprime, c'est-à-dire, le quotient doit être écrit après le petit croissant; que si il n'y est point contenu, on met o dans le quotient, ce qui signifie qu'il n'y est point.

Troisiémement on multiplie tout le diviseur par le quotient, c'est-à-dire, par chaque chiffre du quotient, & on ôte le produit qui en résulte du nombre des chiffres qui sont au-dessus du diviseur. Les exemples rendront cela plus clair.

EXEMPLES DE LA DIVISION.

Pour diviser 804 en 5 parties égales, après avoir écrit le diviseur 5 sous le 8 premier chiffre du nombre à diviser vers la main gauche; je dis en 8 combien y a-t'il de fois 5? il y est une fois, j'écris 1 au quotient, ensuite (multipliant ce que je viens d'écrire au quotient par le diviseur) je dis 1 fois 5 sont 5. Or 5 étant retranché de 8, il reste 3 que j'écris

$$\begin{array}{lll} & \cancel{3}\ \cancel{0}\ (4 & \\ \text{Nombre à diviser.} & \cancel{8}\ \cancel{0}\ \cancel{4} & \\ & \overline{} & (\ 160\ \text{Quotient.} \\ \text{Diviseur} & \cancel{5}\ \cancel{5}\ \cancel{5} & \end{array}$$

ſur 8 après avoir tranché le 8 & le 5 avec une petite ligne, pour marquer que l'opération eſt finie à leur égard. Je récris le *diviſeur 5 ſous le o du nombre à diviſer*, cela fait 30 avec le 3 qui eſt reſté du chiffre 8; je cherche en 30 combien de fois 5? je l'y trouve 6 fois que j'écris au quotient, & je multiplie 6 du quotient par le diviſeur 5, cela fait 30: or ce nombre 30 étant retranché du premier nombre, il ne reſte rien; j'écris o au-deſſus de o. Enfin conſiderant ce dernier o comme placé devant le 4 du nombre à diviſer, cela ne fait que quatre; je cherche en 4 combien de fois 5? ce nombre 5 n'y étant point contenu, j'écris au quotient o, & je dis 5 fois o produiſent o, lequel étant retranché, il reſte 4 que je ſépare avec *une petite ligne* d'avec les autres *chiffres tranchés*. Ainſi je trouve pour quotient de cette diviſion 160 & 4 qui reſtent, c'eſt-à-dire, que 160 eſt une 5e. partie de 804, excepté 4: ou bien que le nombre 5 eſt contenu 160 fois dans 804 moins 4. Ce nombre 4 reſte encore à diviſer.

AUTRE EXEMPLE.

Lorſque le nombre à diviſer eſt compoſé d'un premier chiffre à gauche, ou de pluſieurs qui forment un nombre plus petit que celui d'un pareil nombre de chiffres du *diviſeur*, *il faut placer le premier chiffre* à gauche du diviſeur ſous le penultiéme du nombre à diviſer; ainſi pour diviſer 1539 par 19, il faut placer le diviſeur 19 ſous 53, parce que 19 eſt plus grand que 15: enſuite on dit, en 15 combien de fois 1? mais parce qu'on écrit jamais dans le quotient un nombre plus grand que 9, quoique 1 ſoit contenu 15 fois dans 15, on ne peut cependant pas mettre 15 dans le quotient, ni 12, ni 10; & ſi on met 9, en multipliant 9 par 19, le produit qui en réſulteroit ſeroit 171 plus grand que 153, & par conſéquent *on ne pourroit retrancher ce produit du quotient* par le diviſeur, du nombre qui eſt au-deſſus de lui; il ne faut

$$\begin{array}{l} \ \ \cancel{7}1 \\ \underline{1\cancel{5}\cancel{3}\cancel{9}}\ (81 \\ \ \ 1\cancel{9}\cancel{9} \\ \ \ \ \cancel{1} \end{array}$$

faut donc mettre que 8 au quotient, & dire 8 fois 1 font 8, qui ôté de 15 reste 7. On écrit 7 sur le 5, & on efface le nombre 15; ensuite on dit 8 fois 9 font 72 : qui de 73 ôte 72, reste 1 qu'on écrit au-dessus du 3, & on efface 73 avec tout le diviseur. Après cela on avance le diviseur d'un pas, & on dit : dans un combien de fois 1? il y est une fois; on écrit 1 au quotient, qu'on multiplie ensuite par tout le diviseur, en disant une fois 1 est 1; qui de 1 ôte 1, reste rien; une fois 9 est 9, qui de 9 ôte 9, il ne reste rien, & ainsi la division est faite, & on trouve que 19 est 81 fois dans 1539. Ce qu'il falloit trouver.

71
1539 (81
199
1

Il y a une autre maniére de faire la division, selon laquelle on efface moins de chiffres, comme on peut le voir dans les exemples suivans.

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviser le nombre 71536 par 89, j'écris 89 au-dessous de 715, parce que 89 est plus grand que 71, & je cherche combien de fois 8 est dans 71, je trouve qu'il y est 8 fois; je mets 8 au quotient, & je dis 8 fois 9 font 72, j'emprunte 7 dixaines qui jointes au 5 qui est au-dessus du 9, font 75, de 75 j'ôte 72, & il reste 3 que j'écris au-dessus du 5; ensuite je dis 8 fois 8 font 64, & 7 que j'ai emprunté font 71; qui de 71 ôte 71, reste rien; je tranche les chiffres du diviseur, que j'avance ensuite d'un pas au-dessous de 33; & comme le diviseur 89 n'est point contenu dans 33, j'écris 0 au quotient, & j'avance le diviseur sous 36, ensuite je cherche combien de fois 8 est contenu dans 33, je trouve qu'il y est 4 fois; mais parce que 9 n'est pas 4 fois dans ce qui reste, je n'écris que 3 au quotient, & je dis 3 fois 9 font 27, ôtant 27 de 36, il reste 9 que j'écris au-dessus de 6, ensuite après avoir tranché le 3 & le 6 du nombre à diviser & le 9

3 69
71536 (803 $\frac{69}{89}$
8999
88

du diviseur, je dis 3 fois 8 sont 24; qui de 30, qui sont au-dessus, ôte 24, reste 6, que j'écris sur le 3; j'efface le 8 du diviseur & le 3 qui est au-dessus du 5 du nombre à diviser, & la division est faite parce qu'on ne peut plus avancer le diviseur, il reste donc 69 à diviser par 89; je sépare avec une petite ligne le 6 & le 9 pour marquer que c'est ce qui reste à diviser.

DEMONSTRATION DE LA DIVISION.

Dans l'opération présente, on multiplie le diviseur par tous les chiffres du quotient, & on ôte du nombre à diviser le produit qui en résulte. Donc on ôte autant de fois le diviseur du nombre à diviser, qu'il y a d'unités dans le quotient; mais on ôte aussi autant de fois le diviseur du nombre à diviser qu'il y est contenu; car on l'ôte jusqu'à ce que le reste du nombre à diviser soit moindre que le diviseur. Donc le quotient est composé d'autant d'unités que le diviseur est renfermé de fois dans le nombre à diviser. Donc le quotient marque combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre à diviser: ce qu'il falloit démontrer.

Il est facile de juger par la pratique de la multiplication & celle de la division que ces deux opérations se détruisent, aussi bien que l'addition & la soustraction, & par conséquent se servent mutuellement de preuves l'une à l'autre. Ainsi la division est bonne lorsqu'en multipliant le quotient par le diviseur, le produit qui en résulte est le nombre à diviser: de même la multiplication est bonne lorsqu'en divisant par l'une le produit des deux grandeurs multipliées, le quotient qui en résulte est l'autre des deux grandeurs multipliées.

ARTICLE SECOND.

De la division des grandeurs générales entiéres exprimées par des lettres.

On est convenu que pour diviser une grandeur par une autre, on effaceroit dans la grandeur à diviser les lettres qui s'y pourroient trouver semblables à celles du diviseur, & qu'on prendroit pour quotient les lettres qui resteroient. Par exemple pour diviser ef par e, on a pour quotient f, pour diviser ade par d, on a pour quotient ae.

Lorsque la grandeur à diviser & le diviseur sont précedés des mêmes signes, leur quotient doit toujours être precedé du signe +; car le quotient multiplié par le diviseur doit, comme on l'a démontré, donner un produit égal à la grandeur à diviser. Mais on a aussi démontré dans l'opération de la multiplication, que + par +, ou — par — donnoit +. Donc le quotient + multiplié par le diviseur +, ou le quotient — multiplié par le diviseur — doit donner +. Donc si on divise + par +, ou — par —, le quotient sera +.

On peut démontrer de la même maniére que + divisé par —, ou — divisé par + doit donner pour quotient —.

EXEMPLES.

Pour diviser la grandeur $dg+gf+dh+fh$ par $d+f$, il faut écrire ce diviseur $d+f$ dessous la grandeur à diviser. On peut commencer de gauche à droit, & dire, le signe + qui précede dg divisé

$$\begin{array}{|l}
-dg-gf-dh-fh \\
\;\;dg+gf+dh+fh \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad (g+h \\
\;\;d+f \\
\hline
\end{array}$$

par le signe + qui précede d dans le diviseur, donne au quotient +; ensuite dg divisé par d, donne pour quotient g; on écrit g au quotient. Ensuite multipliant ce quotient $+ g$ par la grandeur $+ f$ du diviſeur, cela produit gf qu'il faut retrancher, & pour cet effet on lui prépoſe ce ſigne —, & on cherche s'il y a dans la grandeur à diviſer quelque grandeur de même genre, & dans cet exemple on trouve $+ gf$; au-deſſus de $+ gf$ on écrit $- gf$ *qui eſt le produit précedent retranché, enſuite ces* deux grandeurs ſemblables étant précedées de chiffres égaux & de ſignes differens, ſelon ce qu'on a enſeigné dans l'addition, elles ſe détruiſent, on les tranche & il ne reſte rien: enſuite le quotient $+ g$ étant multiplié par l'autre partie $+ d$ du diviſeur, produit $+ dg$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrit $- dg$ au-deſſus de $+ dg$. Ces deux grandeurs ſe détruiſent à cauſe de leurs ſignes differens, & on les efface.

Il reſte encore $+ dh + fh$ à diviſer, & on dit + diviſé par + donne + au quotient; dh diviſé par d, donne pour quotient h: on écrit $+ h$ au quotient, & on multiplie $+ h$ par $+ f$ du diviſeur, & le produit $+ fh$ qui en réſulte doit être retranché, & pour cela on écrit $- fh$ au-deſſus de $+ fh$, de ſorte que ces deux grandeurs par l'addition ſe détruiſent, on les efface. Enfin on multiplie $+ h$ qui eſt au quotient par $+ d$ qui eſt au diviſeur, & l'on retranche le produit $+ dh$ qui en réſulte; & pour cela l'on écrit $- dh$ au-deſſus de $+ dh$. Ces deux grandeurs ſe détruiſant on les efface, & ainſi la grandeur $dh + gf + dh + fh$ diviſée par $d + f$ donne pour quotient $g + h$.

Pour diviſer la grandeur $a^3 + b^3$ par $a + b$, *j'écris de* même le diviſeur au-deſſous de la grandeur à diviſer, & je diviſe a^3 par a, & le quotient a^2 qui en réſulte multiplié par le diviſeur $a + b$, donne $a^3 + a^2 b$ qu'il faut ôter de la grandeur à diviſer, & pour cela on efface a^3 & on écrit au-deſſus $- a^2 b$, parce que pour ôter $+ a^2 b$, il faut mettre $- a^2 b$. Enſuite je di-

$$\begin{array}{l} + \cancel{a}\,\cancel{b^2} \\ - \cancel{a^2}\,\cancel{b} \\ \cancel{a^3} + \cancel{b^3} \\ \hline \cancel{a} + \cancel{b} \end{array} \quad (aa - ab + bb.$$

vise $a^2 b$ par a, & le quotient est $- ab$ qui multiplié par le diviseur $a + b$, donne $- a^2 b - a b^2$ qu'il faut ôter de la grandeur qui est au-dessus, ainsi on efface $- a^2 b$ & on met au-dessus $+ a b^2$: Enfin on divise $+ a b^2$ par a, & le quotient b^2 qui en résulte doit être multiplié par le diviseur & retranché de ce qui est au-dessus du diviseur, après quoi il ne reste rien; ainsi $a a - a b + b^2$ est le quotient que l'on cherche.

LIVRE SECOND.

Des Proportions.

DEFINITION VI.

LES Mathématiciens appellent *raison*, l'égalité ou l'inégalité qui se trouve entre deux grandeurs qu'on compare ensemble si on ne considére que la différence dont la plus grande surpasse la plus petite, on la nomme raison *arithmétique*; par exemple si en comparant 2 avec 6 on considére que 6 surpasse 2 ou 2 est surpassé par 6 de 4, cette inégalité est ce qu'on appelle raison Arithmétique; mais si on considére que 2 est contenu 3 fois dans 6, ou que 6 contient trois fois 2, cette inégalité ainsi considérée, se nomme raison géométrique.

COROLLAIRE.

Il suit de cette définition qu'on ne peut comparer ensemble que les grandeurs homogénes, ou bien qu'il n'y a de rapport qu'entre les grandeurs de la même espéce : par exemple entre le mouvement & le mouvement, entre le son & le son; car on ne peut pas dire qu'il y a plus, moins, ou également loin de Pâques à la Pentecôte que de Paris à Lyon, parce que ces deux distances sont de différente espéce, l'une de lieu, l'autre de temps.

Des deux sortes de raisons dont l'on vient de parler, résultent trois espéces de proportions, savoir, les Géométriques, Arithmétiques & harmoniques. Les proportions harmoniques tirent leur origine des géométriques & des arithmétiques. Nous ne traiterons dans ce Livre que des proportions géométriques & des fractions qui expriment les proportions géométriques, comme on le verra par la suite. Nous diviserons donc ce second Livre en deux chapitres; dans le premier nous parlerons des proportions & dans le deuxiéme des fractions.

CHAPITRE PREMIER.

Des Proportions Géométriques.

DEFINITION VII.

La raison géométrique (*Def.* 6.) est la maniére dont une grandeur en contient une autre, ou est contenue dans cette autre.

COROLLAIRE.

Le quotient de deux grandeurs divisées l'une par l'autre, exprime donc le rapport qui est entre elles, car (*Def.* 5.) le quotient exprime comment la plus grande contient la plus petite.

DEFINITION VIII.

De deux grandeurs qu'on compare entre elles, celle qu'on compare se nomme *antécedent*, & celle avec laquelle elle est comparée, conséquent du rapport qui est entre elles.

DEFINITION IX.

Lorſque l'antécedent & le conſéquent ſont égaux, on nomme le rapport qui eſt entre ces grandeurs *raiſon d'égalité*; s'ils ſont inégaux, on l'appelle *raiſon d'inégalité*.

DEFINITION X.

On appelle deux *raiſons* égales, ſemblables, les mêmes; lorſque l'antécedent de l'une contient ſon conſéquent de la même maniére que le conſéquent de l'autre eſt contenu dans ſon antécedent.

COROLLAIRE I.

Deux grandeurs égales entre elles, ou égales à une troiſiéme, ont le même rapport à cette troiſiéme.

COROLLAIRE II.

Ces grandeurs ſont égales qui ont un même rapport avec une troiſiéme.

COROLLAIRE III.

Puiſque (*Def.* 4.) le produit de deux grandeurs multipliées l'une par l'autre contient la grandeur multipliée; de la même maniére que le multiplicateur contient l'unité. Le produit a le même rapport à la grandeur multipliée que le multiplicateur à l'unité.

COROLLAIRE IV.

De même, puiſque dans la diviſion le quotient eſt à l'unité comme la grandeur diviſée au diviſeur, car (*Def.* 5.) le quotient renferme autant de fois l'unité que la grandeur diviſée contient le diviſeur; donc en general $\frac{ab}{a} = \frac{b}{1}$.

DEFINITION XI.

On appelle raiſons inégales celles dont l'antécedent ne contient pas ſon conſéquent comme l'autre, ou bien ces raiſons ſont inégales dont les antécedens diviſez par leurs conſéquens donnent des quotiens inégaux.

COROLLAIRE I.

Donc de deux grandeurs inégales, la plus grande a un plus grand rapport avec une troiſiéme, que la plus petite; car en diviſant ces deux grandeurs inégales par la même troiſiéme, il réſultera un plus grand quotient de la grande que de la petite.

COROLLAIRE II.

Le rapport au contraire d'une même troiſiéme grandeur, à la plus grande des grandeurs inégales, eſt moindre que celui de cette même troiſiéme grandeur à la plus petite; car le quotient qui réſulteroit de cette troiſiéme grandeur diviſée par la plus grande, ſeroit plus petit, que celui qui réſulteroit de cette même troiſiéme diviſée par la plus petite des grandeurs inégales.

COROLLAIRE III.

De deux grandeurs inégales celle-là eſt la plus grande qui a un plus grand rapport à une troiſiéme, ou à laquelle une même troiſiéme a un moindre rapport.

DEFINITION XII.

On appelle *rapport composé* celui du produit des antécedens de deux ou pluſieurs raiſons, au produit de leurs conſéquens; par exemple le rapport de ac, à bd, ou bien $\frac{ac}{bd}$ eſt composé des rapports de A à B & C à D, ou bien de $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$.

DEFINITION XIII.

Rapport doublé, ou *raiſon doublée* eſt un rapport composé de deux rapports égaux; *rapport triplé*, eſt un rapport composé de trois rapports égaux, &c. Par exemple, le rapport de 27 à 9 étant composé du rapport de

27

27 à 9 & de 9 à 3 qui ſont des rapports égaux, eſt un rapport doublé.

AVERTISSEMENT.

Il y a bien de la différence entre un rapport doublé & un rapport double, &c. Le rapport doublé eſt composé de deux rapports égaux; mais le double eſt celui dont l'antecédent eſt le double du conſéquent; ainſi le rapport de a^2 à b^2 eſt doublé, & celui de $2a$ à a eſt double.

DEFINITION XIV.

On appelle proportion ou analogie, la ſimilitude ou l'égalité de deux rapports; on écrit une proportion de cette maniére, 24· 6 :: 16· 4. On appelle proportionnels les termes 24, 6, 16, 4.

COROLLAIRE I.

On peut exprimer les grandeurs proportionnelles par cette formule $\frac{24}{6} = \frac{16}{4}$, parce qu'elle ſignifie (*Cor.* 4. *Déf.* 10.) la même choſe que 24· 6 :: 16· 4.

COROLLAIRE II.

Comme (*Cor.* 3. *déf.* 10.) le rapport du produit à la grandeur multipliée, eſt le même que celui du multiplicateur à l'unité; en général $ab \cdot a :: b \cdot 1$. ce qui ſignifiera la même choſe que $\frac{ab}{a} = \frac{b}{1}$, en prenant b pour multiplicateur.

DEFINITION XV.

On appelle proportion continuë, celle dont les termes ſont réduits à trois, à cauſe de l'égalité des termes moyens, & on l'exprime par ce ſigne ÷, par exemple pour ſignifier que 9· 6 :: 6· 4, on écrit ÷ 9· 6· 4.

DEFINITION XVI.

On appelle diſproportion, l'inégalité des rapports, Avant que de passer aux regles des proportions, il faut démontrer quelques propositions qu'on appelle Lemme ; on entend par *Lemme* la démonstration de quelque proposition qui rend plus courte & plus facile la démonstration de ce que l'on cherche.

LEMME I.

Le produit du diviseur par le quotient est toujours égal à la grandeur divisée.

DEMONSTRATION.

Le produit du diviseur par le quotient est (*Cor.* 3. *déf.* 10.) au diviseur, comme le quotient à l'unité. Mais (*Cor.* 4. *déf.* 10.) le quotient est à l'unité, comme la grandeur divisée, au diviseur : donc (*Cor.* 2. *déf.* 10.) le produit du diviseur par le quotient est égal à la grandeur divisée. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il résulte de là, que si on divise le produit par l'une des deux racines dont il est formé, l'autre racine sera le quotient ; car si on multiplie par le quotient, la racine par laquelle on divise ce produit, ce qui en résultera sera égal à la grandeur divisée.

AVERTISSEMENT.

On voit par ce qui vient d'être démontré, la raison de l'opposition qui se trouve entre la multiplication & la division qui se détruisent, & se servent mutuellement de preuves.

LEMME II.

De quelque maniére qu'on multiplie deux grandeurs l'une par l'autre, il en résultera toujours le même produit.

DEMONSTRATION.

De quelque maniére qu'on multiplie les deux grandeurs *a* & *b*, les produits *ab*, ou *ba*, seront toujours égaux; car (*l'hyp.*) *ab* est le produit de *a* multiplié par *b*; donc (*Cor.* 2. *Déf.* 14.) $ab \cdot a :: b \cdot 1$. De même si *ba* est le produit (*l'hyp.*) de *b* par *a*, & qu'on suppose qu'il est divisé par *a*, le quotient sera *b*, & par conséquent (*Cor.* 3. *Déf.* 14.) $ba \cdot a :: b \cdot 1$. Donc $ab \cdot a :: ba \cdot a$. Donc (*Cor.* 2. *Déf.* 10.) $ab = ba$: ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Donc si de trois grandeurs *a*, *b*, *c*, on fait deux produits *abc*, & *bac*, ils seront égaux; car ils seront composés de *ab* & *ba* multipliés par *c*. On peut de même démontrer que de quelque maniere qu'on multiplie tant de grandeurs qu'on voudra, les produits qui en résulteront seront toujours égaux.

LEMME III.

Les grandeurs qu'on multiplie également demeurent dans le même rapport.

DEMONSTRATION.

Si on multiplie ces deux grandeurs *a* & *b*, par la même *c*, les produits *ac* & *bc*, qui en résultent, sont entre eux, comme ces grandeurs multipliées. Car supposons que le quotient de la grandeur *a* divisée par *b*, est *q*; *bq* (*Lem.* 1.) sera $= a$, & par conséquent $cbq = ca$. Donc le quotient de *ca* divisé par *cb* sera le même que le quotient de

cbq divisé par cb. Mais (*Cor. Lem.* 1.) le quotient de cbq divisé par cb est q. Donc q est aussi le quotient de ca divisé par cb ; & ainsi le quotient de ca divisé par cb est le même que celui de a divisé par b. Donc (*Cor.* 4. *Def.* 10.) non seulement $a \cdot b :: q \cdot 1$; mais aussi $ca \cdot cb :: q \cdot 1$, & par conséquent $ca \cdot cb :: a \cdot b$; ou bien (*Lem.* 2.) $ac \cdot bc \cdot a \cdot b$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de là, que la valeur d'une fraction n'est point changée, lorsqu'on multiplie ses deux termes par la même troisiéme, ou par des grandeurs égales, & que $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

LEMME IV.

Les quotiens de différentes grandeurs divisées par la même, sont entre eux comme les grandeurs divisées.

DEMONSTRATION.

Supposons que p est le quotient de a divisé par c, & q le quotient de b divisé par c, c'est-à-dire, que $\frac{a}{c} = p$ & $\frac{b}{c} = q$: je dis que $p \cdot q :: a \cdot b$; car (*l'hyp.*) p & q sont les quotiens des divisions $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$. Donc (*Lem.* 1.) $pc = a$ & $qc = b$ · par conséquent $pc \cdot qc :: a \cdot b$ · & (*Lem.* 3.) $p \cdot q :: a \cdot b$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

On ne change donc point la valeur d'une fraction en divisant ses deux termes par la même grandeur.

COROLLAIRE II.

On peut donc réduire les termes d'une fraction à de plus petits, en les divisant par un diviseur commun, & ces termes seront d'autant plus petits que le diviseur sera plus grand.

LEMME V.

Les quotiens d'une même grandeur divisée par différentes grandeurs, sont entre eux comme les diviseurs.

DEMONSTRATION.

Si p est le quotient de a divisé par b, & q le quotient de a divisé par c, $p \cdot q :: c \cdot b$; car puisque (*l'hyp.*) p & q sont les quotiens de a divisé par b & par c, $pb = a$ (*Lem.* 1.) & $qc = a$. Donc (*Ax.* 18.) $pb = qc$, & par conséquent (*Cor.* 1. *Déf.* 10.) $pb \cdot qb :: qc \cdot qb$. Mais (*Lem.* 3.) $pb \cdot qb :: p \cdot q$. & $qc \cdot qb :: c \cdot b$. Donc $p \cdot q :: c \cdot b$. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME VI.

Premiérement le produit des extrémes de quatre grandeurs proportionnelles, est toujours égal au produit des moyennes.

Secondement si le produit des extrémes de quatre grandeurs, est égal au produit des moyennes, ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si $a \cdot b :: c \cdot d$, $ad = bc$; car (*Lem.* 3.) $ac \cdot bc :: a \cdot b$, & $ac \cdot ad :: c \cdot d$; mais (*l'hyp.*) $a \cdot b :: c \cdot d$. Donc $ac \cdot bc :: ac \cdot ad$. Donc (*Cor.* 2. *Def.* 10.) $ad = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si quatre grandeurs, a, b, c, d sont telles que ad soit $= bc$, ces quatre grandeurs sont proportionnelles, & $a \cdot b :: c \cdot d$; car pour lors (*Cor.* 1. *Def.* 10.) $ac \cdot bc :: ac \cdot ad$. Mais (*par le Lem.* 3.) $ac \cdot bc :: a \cdot b$, & $ac \cdot ad :: c \cdot d$. Donc $a \cdot b :: c \cdot d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Puisque le produit des extrémes de quatre grandeurs proportionnelles, est égal au produit des moyennes, si on divise ces deux produits par la même grandeur, les quotiens qui en résulteront seront égaux. Donc si on divise le produit des moyennes proportionnelles par le premier terme, le quotient sera le quatriéme.

COROLLAIRE II.

De là naît la méthode de trouver une quatriéme grandeur proportionnelle inconnuë, lorsque trois ont été données. On appelle cette méthode, la régle de proportion, ou régle de trois, & quelquefois régle d'or, à cause de sa grande utilité.

Il y a deux sortes de régles de proportion, la simple & la composée, ou complexe. La simple est celle qui ne contient que 3 termes connus, & la composée est celle qui en contient plus de trois.

La régle de proportion simple est encore de deux sortes, savoir, la directe & l'indirecte.

La régle de proportion directe est celle dans laquelle le premier terme est au second, comme le troisiéme est au quatriéme qu'on cherche; ou, ce qui est la même chose, lorsque le rapport du premier terme au troisiéme, est égal au rapport du second au quatriéme; c'est-à-dire, si le troisiéme terme est plus grand que le premier, le quatriéme qu'on cherche, doit être dans la même proportion, plus grand que le second; & si le troisiéme terme est plus petit que le premier, le quatriéme doit pareillement être plus petit, à proportion, q u e le second.

La régle de proportion indirecte est celle dans laquelle le rapport du premier terme au troisiéme est égal au rapport du quatriéme qu'on cherche au second. Enfin on connoît la régle de proportion indirecte, & on la distingue d'avec la directe, lorsque le sens de la question va du plus au moins, ou du moins au plus, c'est la régle indirecte; mais lorsque le sens de la question va du plus au plus, ou du moins au moins, c'est la régle directe.

Lorsqu'on rencontre une question qui appartient à la régle de proportion simple, soit qu'elle soit directe ou indirecte, afin de savoir quel doit être le premier, le second & le troisiéme terme, il les faut disposer de telle maniére que le premier & le troisiéme soit de même nom, de même que le second & le quatriéme.

Exemple de la régle de proportion directe.

Si 14 personnes dépensent 98 liv. en un certain tems; combien dépensent 20 personnes en autant de tems? Pour résoudre cette question, il faut examiner si elle appartient à la régle de proportion directe ou à l'indirecte. Le but de la question fait connoître qu'il s'agit d'une régle de proportion directe; on arrange les termes de cette maniére.

Si 14 personnes dépensent 98 liv. combien 20 pers.?

Il faut trouver un quatriéme terme ou nombre proportionnel aux trois autres, qui sont connus. J'appelle x ce quatriéme terme, ainsi l'analogie est $14 . 98 :: 20 . x$; & pour trouver ce quatriéme terme, il faut multiplier le troisiéme qui est 20 par le deuxiéme qui est 98, & diviser le produit 1960 qui en résulte par 14, & le quotient 140 est le quatriéme terme qu'on cherchoit.

Exemple de la régle de proportion indirecte.

Supposons qu'il y ait dans une place assiégée 4000 soldats pour sa défense, & qu'il n'y ait de vivres que pour 8 mois; que le Gouverneur ait été averti qu'on ne peut lui donner du secours pour faire lever le siége que dans 10 mois, on demande quel nombre de soldats il doit mettre hors de la place, afin de soutenir le siége pendant ces 10 mois, sans rien diminuer de ce qu'il donnoit chaque jour ; à chaque ſoldat. Le but de la queſtion fait connoître que plus il y aura de tems, moins il faudra de ſoldats pour pouvoir continuer de la même maniére l'uſage des proviſions, c'eſt pour cela qu'on arrangera les termes de cette ſorte, en nommant x le nombre de Soldats que l'on cherche.

10 mois ſont à 4000 ſoldats comme 8 mois à x.

On trouvera en opérant comme dans l'exemple précédent, que le Gouverneur doit ſeulement conſerver 3200 ſoldats & renvoyer les autres 800.

Exemple de la régle de proportion compoſée.

Si 12 ouvriers font un foſſé de 20 toiſes en 5 jours, on demande en combien de jours 8 ouvriers en feront un de 8 toiſes ? pour réduire cette queſtion à une queſtion ſimple, on mettra les termes dans cet ordre :

12 ouvriers 5 jours. 20 toiſes : : 8 ouvriers, x jours. 8 toiſes,

& ainſi cette queſtion ſe réduira à une régle de proportion ſimple qui ſera :

60 ouvriers. 20 toiſes : : 8 ouvriers x. 8 toiſes.

On voit clairement que c'eſt un des termes moyens, ſavoir, la valeur du ſecond antécédent qu'on cherche. On le trouve en multipliant le premier par le dernier, & diviſant le produit par le terme moyen connu, on a pour quotient de cette diviſion le troiſiéme terme de la proportion ; mais par la maniére de réduire cette queſtion compoſée à une régle ſimple, on connoît que ce troiſiéme terme eſt un produit dont le nombre 8 eſt une des racines ; en diviſant ce troiſiéme terme par 8, le quotient de cette diviſion fait connoître l'autre racine, ſavoir 3, qui exprime le nombre des jours qu'il faut à 8 ouvriers pour faire 8 toiſes.

On peut de même réſoudre par les principes qu'on vient d'établir, pluſieurs autres queſtions qu'on trouve dans les traités particuliers d'Arithmétique ; nous nous contenterons de donner un exemple de la régle de Compagnie ; car les régles qu'ils appellent d'alliage & de fauſſes poſitions

tions ſont réſoluës beaucoup plus facilement par les équations dont nous parlerons dans le quatriéme Livre de cet abrégé.

De la Régle de Compagnie.

La Régle de Compagnie ou de Societé, eſt une opération par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés.

Il y a deux ſortes de Régles de Compagnie, ſavoir; la ſimple & la composée. La Régle de Compagnie ſimple eſt celle où l'on n'a point égard au tems, & la composée eſt celle où on a égard à divers tems.

Exemple de la Régle de Compagnie ſimple.

Trois perſonnes ont fait une bourſe commune pour acheter ou faire faire des marchandiſes, le premier a mis 420 liv., le ſecond 230 liv., & le troiſiéme 70 liv., & après leur négociation ils ont gagné tous enſemble 300 livres. Ils demandent à partager ce profit entre eux à proportion de l'argent que chacun a mis.

Gain 300 liv. $\left\{\begin{array}{l}\text{420 liv. miſe du premier.}\\ \text{230 liv. miſe du ſecond.}\\ \text{70 liv. miſe du troiſiéme.}\end{array}\right.$

Total des miſes 720 liv.

Pour réſoudre cette queſtion & toutes les autres ſemblables, il faut faire autant de régles de proportion comme il y a de miſes, & mettre pour premier terme la ſomme de toutes les miſes; pour deuxiéme, le gain ou profit, & pour chaque troiſiéme terme, la ſomme que chacun a payé.

Exemple de la Régle de Compagnie composée.

Trois perſonnes ſe ſont aſſocié & ont pris réſolution de négocier: le premier a employé 1200 liv., & après que quatre mois ont été finis, il a retiré ſon argent ; le ſecond a employé 950 liv. pour ſix mois, & le troiſiéme a employé 600 liv. pour dix mois ; ils ont gagné 1400 liv. on demande combien il en doit appartenir à chacun à proportion de l'argent qu'il a employé, & du tems qu'il l'a laiſſé en commerce.

Pour réſoudre cette queſtion, il faut multiplier la miſe du premier par le tems qu'a ſervi ſon argent, il faut faire de même du ſecond & troiſiéme, & pour premier terme de chaque opération, il faut mettre la ſomme totale des miſes multipliées par les tems, pour ſecond terme, le gain commun, & pour troiſiéme terme la ſomme que chacun a miſe multipliée par le tems, ce qui ſe réduit à une Régle de Compagnie ſimple, dans laquelle on opére comme on a enſeigné dans le premier exemple.

AVERTISSEMENT.

Le ſixiéme Lemme eſt non ſeulement la baſe & le fondement de la Régle de Trois, & de toutes celles qui en dépendent ; mais encore des régles des proportions dont nous devrions parler ici ; mais comme nous en ferons un plus grand uſage dans le Traité ſuivant de Géométrie, que dans celui-ci, nous nous contenterons d'ajoûter à ce que nous avons dit, quelque choſe des fractions, de l'extraction des racines, & des équations ; nous avons jugé plus à propos de donner les régles des proportions ~~de~~ dans la Géométrie.

CHAPITRE SECOND.

Des Fractions.

DEFINITION XVII.

Une fraction est une division indiquée seulement, c'est-à-dire, dont on exprime le quotient en écrivant la grandeur à diviser au-dessus du diviseur, avec une petite ligne interposée; par exemple, pour exprimer le quotient de 5 divisé par 8, on écrit $\frac{5}{8}$, ce qui signifie cinq huitiémes.

DEFINITION XVIII.

On appelle dénominateur d'une fraction, la grandeur inferieure à la ligne interposée, parce qu'elle dénomme les parties de la fraction; la grandeur supérieure est appellée Numérateur, parce qu'elle exprime combien il y a de ces parties dans la fraction.

On fait à l'égard des fractions les mêmes opérations qu'on vient de faire pour les nombres entiers; Mais avant d'en venir à la pratique, il faut remarquer. 1°. Que pour réduire une fraction à de moindres termes, c'est-à-dire, pour exprimer une fraction par des termes plus simples; par exemple, pour trouver une fraction équivalente à $\frac{6}{18}$ & qui soit exprimée par des chiffres moindres que 6 & 18, il faut chercher un nombre par lequel on puisse diviser également le Numérateur & le Dénominateur sans aucun reste comme 6; car on trouve que 6 peut diviser 6 & 18 sans reste, on mettra le quotient de 6 divisé par 6 pour numérateur de la nouvelle fraction, & le quotient de 18 divisé par 6 pour dénominateur, & on aura $\frac{1}{3}$ pour la nouvelle fraction qui vaut autant que $\frac{6}{18}$.

Pour trouver facilement le diviseur commun, il faut diviser le plus grand des deux nombres qui expriment la fraction, par le plus petit, & s'il reste quelque chose, le nombre qui a servi de diviseur à la division précedente, sera divisé par ce reste ; & si après cette division il reste encore quelque nombre, ce sera un nouveau diviseur pour le nombre qui a servi de diviseur à la division précedente. On continuera de même jusqu'à ce qu'on soit parvenu à quelque division où il ne reste rien ; le dernier de ces diviseurs sera le diviseur commun au numérateur & au dénomiateur de la fraction proposée.

Soit, par exemple, cette fraction $\frac{45}{72}$, il faut diviser 72 par 45, il restera 27, ensuite on divisera 45 par le reste 27, il restera 18, on divisera encore 27 par 18, il restera 9 ; & enfin on divisera 18 par 9, & il ne restera rien, *ce qui fera connoître que 9 sera le plus grand diviseur* commun du numérateur & du dénominateur de la fraction $\frac{45}{72}$, qui sera réduite par ce moyen à son équivalente $\frac{5}{8}$. Mais s'il arrivoit qu'après avoir fait toutes ces divisions, il y eut pour reste 1, ce seroit une marque que la fraction ne pourroit être réduite à de moindres termes.

S'il se rencontroit un ou plusieurs 0 à la fin du numérateur & du dénominateur d'une fraction ; on réduira facilement cette fraction à moindres termes, en ôtant autant de zeros de la fin du numérateur, que de la fin du dénominateur ; par exemple, cette fraction $\frac{400}{500}$ sera réduite à son équivalente ou égale $\frac{4}{5}$, en retranchant de part & d'autre 00 : puisque c'est la même chose que si on divisoit le numérateur 400 & le dénominateur 500 par le nombre 100. *Si on ôtoit seulement un zero, ce seroit diviser par* 10, &c.

2°. Il faut observer que pour réduire deux fractions à même dénomination, il faut multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, ensuite le numérateur de l'une par le dénominateur de l'autre ; par exemple, pour réduire $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ à une même dénomination, il faut multiplier 3 par 4, & le produit 12 sera le dénominateur commun. Ensuite on multipliera le numérateur 2 d'une fraction par le dénominateur 4 de l'autre, & on aura 8 qu'on écrira au-dessus du 2; enfin on multipliera le dénominateur 3 par le numérateur 3, on aura 9 qu'on écrira sur le 3, & on aura au lieu de $\frac{2}{3}$ son égale $\frac{8}{12}$, & au lieu de $\frac{3}{4}$ on aura son égale $\frac{9}{12}$. Or $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ sont en même dénomination: ce qu'il falloit chercher.

$$\begin{array}{|llll} 8 & 9 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & (\frac{8}{12} & \frac{9}{12}. \\ \hline \end{array}$$

$$12$$

Lorsqu'il y a plus de deux fractions; par exemple, $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, il faut multiplier tous les dénominateurs de suite l'un par l'autre, comme dans cet exemple; 3 fois 4 sont 12, & 5 fois 12 sont 60 qui sera le dénominateur commun; & pour avoir les numérateurs, on prendra pour numérateur de la premiere fraction les deux tiers de 60, savoir 40; pour le numérateur de la seconde, on prendra les trois quarts de 60, savoir 45; & pour le numérateur de la troisiéme, on prendra les quatre cinquiémes de 60: on fera de même lorsqu'il y aura un plus grand nombre de fractions. On trouvera $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, au lieu de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ & $\frac{4}{5}$; la raison de cela est facile à comprendre, parce qu'en cet exemple on considere le tout ou l'entier divisé par 60 parties égales. Ainsi lorsqu'on prendra les deux tiers de 60, on aura les deux tiers d'un entier; ce qui est la même chose que la premiére fraction: on dira la même chose des autres.

3°. Il faut remarquer que pour connoître la valeur d'une fraction par rapport à l'entier, dont elle exprime une ou plusieurs parties; par exemple, pour connoître la valeur de $\frac{3}{4}$ d'une livre, il faut multiplier 20 sols, valeur de la livre, par le numérateur 3 de la fraction, & diviser le produit 60 par le dénominateur 4 de la fraction, le quotient de cette division sera 15 sols, qui est la valeur cherchée; parce que les trois quarts d'une livre sont la même chose que le quart de trois livres.

4°. Il faut remarquer que pour réduire des entiers ou unités en fractions, il faut multiplier le nombre de ces unités par le dénominateur de la fraction, dans laquelle on les veut réduire; par exemple, pour réduire 4 en cinquiémes, il faut multiplier 4 par 5, on aura 20, auquel on mettra 5 pour dénominateur, & on aura $\frac{20}{5}$. Cela eſt évident, puiſque chaque unité vaut 5 cinquiémes, quatre quarts, dix dixiémes, &c.

Réciproquement enfin pour réduire des fractions en entiers, lorſque cela eſt poſſible, il faut diviſer le numérateur par le dénominateur, & le quotient de cette diviſion exprimera combien la fraction vaut d'entiers; par exemple, pour ſavoir combien cette fraction $\frac{15}{5}$ vaut d'entiers, en diviſant 15 par 5, on trouvera que cette fraction vaut 3 entiers, puiſqu'il faut 5 cinquiémes pour faire un entier, ou 6 ſixiémes, ou 14 quatorziémes, &c.

De l'addition des fractions.

Si les fractions qu'on veut aſſembler ſont en même dénomination; par exemple, $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{5}$, il faut aſſembler les numérateurs, & ſouſcrire à leur ſomme leur dénominateur commun, & on aura $\frac{7}{5}$.

Si les fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y réduire, & enſuite aſſembler les numérateurs, comme on vient d'enſeigner; par exemple, pour aſſembler $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, on trouvera leurs équivalentes $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ en même dénomination: on fera l'addirion de 8 & de 9 & on aura $\frac{17}{12}$ pour la ſomme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$; ce qui eſt la même choſe qu'un entier & $\frac{5}{12}$.

De la ſouſtraction des fractions.

On peut ſouſtraire ou retrancher une fraction d'une autre fraction, ou d'un ou de pluſieurs entiers.

Pour ſouſtraire une fraction, par exemple, $\frac{3}{7}$ d'une autre faction $\frac{5}{7}$ de même dénomination; il faut ſouſtraire le numérateur 3 de l'autre numérateur 5, & on aura pour reſte $\frac{2}{7}$.

Si les fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y réduire, & ſouſtraire enſuite le numérateur de l'une du numérateur de l'autre.

Pour retrancher une fraction d'un, ou de plusieurs entiers, il faut réduire ces entiers en fraction de même dénomination que la fraction qu'on veut retrancher. Ensuite on soustrait le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre, comme on vient d'enseigner: par exemple, pour soustraire $\frac{4}{5}$ de 3, après avoir réduit les 3 en cinquiémes, on aura $\frac{15}{5}$ dont $\frac{4}{5}$ étant ôtés, reste $\frac{11}{5}$ & ainsi des autres.

On peut voir facilement par ce moyen laquelle de deux fractions inégales est la plus grande, & de combien l'une excede l'autre. On trouvera, par exemple, que $\frac{3}{4}$ excede $\frac{2}{3}$ de la valeur de $\frac{1}{12}$.

Pour faire la preuve de l'addition des fractions, il faut retrancher du total chaque fraction qui a été assemblée, & s'il ne reste rien, l'addition est bonne.

Pour faire la preuve de la soustraction des fractions, il faut ajoûter ce qu'on trouve qui reste avec ce qu'on a retranché, & le total doit être égal à la fraction dont on a retranché. Ces peuves ont le même fondement que dans les nombres entiers.

De la Multiplication des Fractions.

On peut multiplier des fractions par des fractions, ou des entiers par des fractions; ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour multiplier des fractions l'une par l'autre, il faut multiplier leurs numérateurs l'un par l'autre; le produit qui en résultera sera le numérateur de la fraction qu'on cherche pour produit; il faut ensuite multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, & le produit sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche. Par exemple, pour multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{8}$, on aura pour produit $\frac{12}{40}$, & après l'avoir réduit à moindres termes, on aura $\frac{3}{10}$.

Pour multiplier un nombre entier par une fraction, on réduira ce nombre en fraction, ce qu'on peut faire en deux maniéres, ou en mettant à ce nombre pour dénominateur 1, ou en le multipliant par le dénominateur de la fraction, comme on a enseigné. Ensuite on fera la multiplication de ces deux fractions. Par exemple, pour multiplier 4 par $\frac{2}{3}$, il faudra multiplier $\frac{4}{1}$ par $\frac{2}{3}$, & on aura pour produit $\frac{8}{3}$.

Pour multiplier des entiers & fractions par des entiers & fractions; par exemple pour multiplier 5 $\frac{1}{2}$ par 3 $\frac{2}{5}$, il faut réduire 5 $\frac{1}{2}$ dans une seule fraction, savoir $\frac{11}{2}$. Il faut pareillement réduire 3 $\frac{2}{5}$ en une seule fraction $\frac{17}{5}$. Ensuite on multipliera $\frac{11}{2}$ par $\frac{17}{5}$, ce qui est la même chose que de multiplier 5 & $\frac{1}{2}$ par 3 & $\frac{2}{5}$, on aura pour produit $\frac{187}{10}$.

De la division des fractions.

On peut diviser une fraction par une fraction, ou des entiers par une fraction, ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour diviser une fraction par une fraction, il faut multiplier *le numérateur de la fraction à diviser par le dénominateur* de la fraction qui tient lieu de diviseur, & ce produit sera le numérateur de la fraction qui est le quotient cherché; par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, il faut multiplier le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 4 de la fraction $\frac{3}{4}$, on aura 8 pour le numérateur du quotient, & on multipliera le dénominateur 3 de la fraction à diviser $\frac{2}{3}$ par le numérateur 3 du diviseur $\frac{3}{4}$, & on aura 9 pour dénominateur du quotient cherché, qui est $\frac{8}{9}$.

Pour diviser un entier par une fraction, on réduira cet entier en fraction, en mettant 1 pour dénominareur; par exemple, pour diviser 3 par $\frac{4}{5}$, c'est la même chose que si on divise $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$, ce qu'on fera, comme on vient d'enseigner, & on aura pour quotient $\frac{15}{4}$.

Pour diviser des entiers & des fractions par des entiers & des fractions, on réduira l'entier & la fraction à diviser en une seule fraction. On réduira pareillement l'entier & la fraction qui tient lieu de diviseur, en une seule fraction, & on fera *ensuite la division, comme on vient* d'enseigner. Par exemple pour diviser 6 $\frac{1}{2}$ par 5 $\frac{2}{3}$, c'est diviser $\frac{13}{2}$ par $\frac{17}{3}$, & on aura $\frac{39}{34}$ pour quotient.

La

La preuve de la multiplication des fractions se fait comme dans les nombres entiers, en divisant le produit par une des fractions qui a été multipliée ; & on doit trouver pour quotient l'autre fraction qui a été multipliée, si on a bien réussi.

On fait aussi la preuve de la division des fractions comme dans les nombres entiers, en multipliant la fraction qui est le quotient cherché, par la fraction qui est le diviseur ; si on a bien réussi, le produit de cette multiplication est égal à la fraction à diviser.

Le produit d'une multiplication de fractions, est plus petit que chacune des deux fractions qui ont été multipliées l'une par l'autre ; & le quotient d'une division de fractions, est plus grand que la fraction à diviser ; mais cela doit être ainsi ; car (*Cor.* 3. *Déf.* 10.) le produit doit être à l'une des deux racines dont il est formé, comme l'autre racine est à l'unité ; mais cette racine étant une fraction, elle est plus petite que l'unité. Donc ce produit doit aussi être plus petit que l'autre racine.

Le quotient d'une fraction divisée par une autre, doit aussi être plus grand que la fraction divisée ; car (*Cor.* 4. *Déf.* 10.) le quotient est à la grandeur divisée, comme l'unité au diviseur ; mais le diviseur étant une fraction, est plus petit que l'unité. Donc la grandeur divisée doit aussi être plus petite que le quotient.

S'il se rencontre des fractions de fractions : par exemple $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, pour les réduire à une fraction simple, c'est-à-dire, pour connoître quelle est la fraction, qui vaut les deux tiers de quatre cinquiémes ; il faut multiplier séparément le numérateur & le dénominateur de $\frac{4}{5}$, par le dénominateur 3 de $\frac{2}{3}$, alors on aura $\frac{12}{15}$ qui est la même chose que $\frac{4}{5}$, puisqu'en réduisant $\frac{12}{15}$ à moindres termes, on trouve $\frac{4}{5}$. Or prenant 2 fois le tiers de $\frac{12}{15}$, on trouve $\frac{8}{15}$ qui est la valeur cherchée des deux tiers de $\frac{4}{5}$.

Après avoir multiplié le dénominateur 5 de la fraction $\frac{4}{5}$ par 3 dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$, on pouvoit se contenter de multiplier le numérateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$

par le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$, on auroit auſſi eu $\frac{8}{15}$, parce que ce numérateur 2 marque deux parties de ſon dénominateur 3, au lieu que lorſqu'on multiplie 3 par 4, on a $\frac{12}{15}$ dont on ne demande que 2 de ſes trois parties égales, qu'on trouve en multipliant ſeulement 2 par 4.

Pour réduire donc des fractions de fractions à des fractions ſimples, il faut multiplier les numérateurs de ſuite l'un par l'autre; ce produit ſera le numérateur de la fraction ſimple cherchée. On multipliera auſſi de ſuite les dénominateurs l'un par l'autre, & ce produit ſera le dénominateur commun de la fraction ſimple qu'on cherche. Par exemple, pour connoître la valeur ou la fraction ſimple de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, je dirai : 2 fois 3 ſont 6, & 5 fois 6 ſont 30. Enſuite 3 fois 4 ſont 12, & 6 fois 12 ſont 72; & la fraction ſimple cherchée eſt $\frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

LIVRE TROISIEME.

De l'Extraction des Racines.

DEFINITION XIX.

Racine eſt une grandeur, qui étant multipliée par elle-même ou par une autre, produit une autre grandeur; par exemple, a eſt racine du produit ab, ou du produit aa, ou a^3. La grandeur b eſt auſſi racine.

DEFINITION XX.

Puiſſance ou dégré d'une grandeur, eſt le produit de cette même *grandeur multipliée une ou pluſieurs fois par* elle-même; par exemple bb, c^3, f^4 &c. ſont les puiſſances de b, c, f &c.

DEFINITION XXI.

Le produit d'une grandeur multipliée par 1, par exemple, 1 *a* ou *a*, est appellé premiere puissance; multipliée par elle-même une fois, seconde puissance; multipliée par son quarré, troisiéme puissance ou cube, &c.

DEFINITION XXII.

On appelle grandeur quarrée celle qu'on peut partager en deux parties égales : par exemple, *ffgghh* est une grandeur quarrée. On dit aussi qu'une grandeur est cube, lorsqu'on peut partager les lettres qui l'expriment, en trois parties égales, & ainsi des autres.

Lorsque la puissance dont on cherche la racine, est un quarré, on appelle sa racine *quarrée*. Si cette puissance est un cube, sa racine est appellée *racine cubique*.

Il est très-facile d'extraire les racines des grandeurs simples, ou qui s'expriment avec peu de lettres, comme *dd*, ou *ggg*; mais pour extraire celles des grands nombres, il faut savoir les quarrés, les cubes, &c de chaque chiffre depuis 1 jusqu'à 9, principalement les quarrés, parce qu'ils sont plus d'usage.

Racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
Quarrés	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100
Cubes	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000

Nous diviserons ce Livre en deux Chapitres; dans le premier nous parlerons de l'extraction des racines quarrées, & dans le second de l'extraction des racines cubiques.

CHAPITRE PREMIER.

De l'extraction des racines quarrées.

POur trouver la racine quarrée de quelque nombre; par exemple de 1369, il faut séparer ces chiffres de deux en deux, & commencer de droit à gauche, ensuite tirer une ligne au-dessous, & à son extrémité on écrit les racines cherchées, de la même maniére qu'on écrit le quotient dans la division.

Pour concevoir pourquoi il faut ainsi séparer ces chiffres, on n'a qu'à considerer que si un nombre est exprimé par plus de deux chiffres, sa racine est exprimée par plus d'un chiffre; parce que 100 est le plus petit nombre de ceux qui sont exprimés par trois chiffres, & sa racine qui est 10, est le plus petit nombre de ceux qui sont exprimés par deux chiffres. Donc tous les nombres qui sont au-dessus de 100, ont une racine exprimée par plus d'un chiffre, & tous les nombres qui sont au-dessous de 100; c'est-à-dire, qui sont exprimés par moins que trois chiffres, ont une racine quarrée moindre que 10, & par conséquent ont une racine exprimée par un seul chiffre. Or quand il faut extraire la racine d'un nombre, il faut partager ce nombre en certaines parties telles qu'on y puisse trouver les plus grands quarrés, dont les racines soient exprimées chacune par un seul chiffre; c'est pourquoi on commence de droit à gauche, & on sépare ces chiffres de deux en deux; parce que la racine d'un nombre quarré exprimé par deux chiffres, est toujours exprimée par un seul chiffre.

On cherche l'un après l'autre les chiffres qui expriment cette racine. On commence par le premier chiffre de cette même racine, qui est vers la main gauche, & qui est de plus grande valeur que les autres; on continue de gauche à droit. Ce premier chiffre étant trouvé, on s'en sert pour trouver le second ; les deux premiers étant considerés comme un seul nombre, servent à trouver le troisiéme chiffre de la racine qu'on cherche ; les trois premiers considerés comme un seul nombre, servent à trouver le quatriéme chiffre, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus de chiffre à trouver.

C'est pour cela qu'on ne considére jamais la racine qu'on cherche, que comme une grandeur composée de deux parties $a + b$. a represente le chiffre, ou les chiffres trouvés, & b représente le chiffre qu'on cherche. Le quarré de cetre grandeur $a + b$ qui est $aa + 2ab + bb$ sert de regle dans les extractions des racines quarrées.

EXEMPLE.

Pour extraire la racine quarrée du nombre 1369, c'est-à-dire, pour trouver le nombre qui étant multiplié une fois par lui-même produise 1369.

Il faut séparer les chiffres de deux en deux ; ensuite il faut considerer qu'il y aura autant de chiffres pour exprimer la racine qu'on cherche, qu'il y a de tranches dans le nombre 1369 ; & comme il s'y trouve deux tranches de chiffres, savoir 13 & 69, cela marque qu'il n'y aura que deux chiffres pour exprimer cette racine cherchée, dont le premier chiffre est appellé a, & le second b.

$$\begin{array}{l} \quad\ \ \cancel{0} \\ \ \cancel{4}\,\cancel{4}\,\cancel{0} \\ \cancel{1}\,\cancel{3}|\cancel{6}\,\cancel{9} \quad (37 \\ \hline \quad\ \cancel{6}\,7 \\ a = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

Mais parce que le quarré de $a + b$, qui représente le nombre 1369, contient le quarré de a & 2 fois le produit de a multiplié par b, & le quarré b ; c'est pour cela que l'on doit faire l'extraction des racines de ces produits l'une après l'autre.

On trouve toujours dans la premiére tranche vers la main gauche, le quarré du premier chiffre de la racine cherchée ; c'est pourquoi je cherche la racine du quarré qui approche le plus près de 13, & je trouve que c'est 3 racine de 9 ; j'écris 3 au rang des racines. Ce chiffre est représenté par a : je retranche ensuite de 13 le quarré aa, c'est-à-dire, 9 quarré de la racine 3 qu'on vient de trouver, il reste 4 que j'écris sur 3, j'efface 13, & je double le quotient 3, & j'ai 6 pour diviseur, que j'écris sous 46 ; après cela je dis, comme dans la division : dans 46 combien de fois 6 ? il y est 7 fois, j'écris 7 au quotient, & au diviseur après le chiffre 6, ensuite je multiplie 7 par 6, & j'ôte le produit 42 qui en résulte, de 46 ; il reste 4 que j'écris au-dessus du 6 que j'efface, aussi-bien que le 4 qui est au-dessus du 3, il reste 49 ; après cela je retranche le quarré de 7 qui est 49, & il ne reste rien. Ainsi la racine quarrée de 1369 est 37.

DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

En supposant que le premier chiffre de la racine est $= a$, le second $= b$; $a + b$ doit être $= 37$ & le quarré de $a + b$ doit représenter le nombre 1369 ; or le quarré de $a + b$, est $a^2 + 2\,ab + b^2$. Donc $a^2 + 2\,ab + b^2$ represente 1369. Mais pour extraire la racine du quarré $a^2 + 2\,ab + b^2$, il faut premiérement extraire la racine a du premier quarré a^2, & mettre cette racine

$$\cancel{a^2} + \cancel{2ab} + \cancel{b^2} \quad (a + b$$
$$\cancel{a} \quad \cancel{2a} \quad \cancel{b}$$

au quotient, & au-dessous du quarré a^2 ; ensuite il faut dire, comme dans la division : a multiplié par a donne a^2 ; qui de a^2 ôte a^2, reste rien ; c'est pourquoi il faut effacer le quarré a^2 avec le diviseur a. Après cela il faut prendre le double de la racine a, & diviser $2\,ab$ par le double de cette racine a, savoir $2\,a$, & le quotient b qui en résulte, doit être mis au-dessous de b^2 & au quotient qui exprime la racine ; ensuite il faut dire, $2\,a$ multipliés par b, donnent $2\,ab$, qui ôtés de $2\,ab$, reste rien. On efface $2\,ab$ avec le diviseur $2\,a$, & on passe au diviseur b, & on dit ; b multiplié par b, donne b^2, qui ôté de b^2, reste rien. Donc la racine du quarré $a^2 + 2\,ab + b^2$ est

$a + b$; mais le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ représente le nombre 1369, & $a = 3$ & $b = 7$. Donc la racine de 1369 est $= 37$. Ce qu'il falloit démontrer.

Afin de mieux s'exercer dans les commencemens qu'on étudie ces choses, on peut prendre des racines à volonté & les quarrer; & ensuite du quarré en extraire la racine, comme on vient d'enseigner.

On fait la preuve de cette opération, en multipliant la racine trouvée par elle-même, & si le produit est égal à la grandeur dont on a extrait cette racine, l'opération est bonne.

Si on veut extraire la racine quarrée d'une fraction, il faut extraire les racines du numérateur & du dénominateur séparément, & la fraction qui résultera de ces racines, sera ce que l'on cherche: par exemple, $\frac{4}{7}$ est la racine quarrée de $\frac{16}{49}$; car en multipliant la fraction $\frac{4}{7}$ par elle-même, le produit est $\frac{16}{49}$. De même en general $\frac{a}{b}$ est la racine quarrée de la fraction $\frac{a^2}{b^2}$, parce que $\frac{a}{b}$ multiplié par $\frac{a}{b}$ donne $\frac{a^2}{b^2}$.

Lorsqu'un nombre n'est point quarré, on ne sauroit trouver sa racine quarrée; mais on peut trouver la racine qui en approche le plus de la maniére suivante.

Pour trouver le nombre qui approche le plus de la racine du nombre qui n'est point quarré, il faut ajoûter à ce nombre autant de deux o que l'on voudra, plus l'on en ajoûtera, plus on approchera de sa racine. Ensuite il faut diviser la racine trouvée, de la maniére qu'on l'a enseigné, par l'unité suivie d'autant de o qu'on a ajoûté de deux o au nombre proposé, & le quotient sera le nombre qui approche le plus de la racine qu'on cherche.

EXEMPLE.

Si on veut extraire la racine quarrée du nombre 12; il faut ajoûter plusieurs couples de zeros, parce que ce nombre n'est pas quarré; par exemple, deux couples, qui seront 120000. Ensuite il faut extraire la racine quarrée de ce nombre, comme on l'a enseigné, on trouvera pour quotient 346, & on négligera 284 qui restent, ou bien on y ajoûtera autant de couples de zeros que l'on voudra, pour trouver le nombre qui approche le plus de sa racine; ensuite on divisera le quotient 346 par 100, *& le quotient,* $\frac{346}{100}$, *ou* $3 + \frac{46}{100}$, *ou* $3 + \frac{23}{50}$ *sera le nombre* qui approche le plus de la racine quarrée du nombre 12 qui n'est point quarré, & ainsi des autres.

DEMONSTRATION DE L'OPERATION.

Puisqu'on ajoûte au nombre proposé plusieurs couples de zeros, par exemple au nombre 12, 0000, c'est comme si on multiplioit ce nombre 12 par 10000 quarré de 100. Donc en considérant le nombre 12 comme quarré de la racine qu'on cherche, le produit 120000 sera composé de deux quarrés multipliés l'un par l'autre, & par conséquent cela sera aussi quarré, dont la racine quarrée sera composée des racines quarrées des nombres 10000 & 12. Donc la racine quarrée de ce produit 120000 divisée par 100 racine du quarré 10000, le quotient est la racine quarrée du nombre 12, & par conséquent plus celle-là approchera de la vraie racine, plus aussi celle-ci approchera de celle qu'on cherche.

CHAPITRE SECOND.

De l'extraction des racines cubiques.

POur connoître la racine cubique de quelque nombre, il faut premiérement ſéparer de trois en trois les chiffres qui expriment ce nombre, en commençant, comme dans l'extraction des racines quarrées, de droit à gauche, parce que 1000 eſt le plus petit des nombres cubes exprimés par plus de 3 chiffres, dont la racine cubique qui eſt 10, eſt auſſi la plus petite de celles qui ſont exprimées par pluſieurs chiffres. Donc tout nombre au-deſſous de 1000, c'eſt-à-dire exprimé par moins que 4 chiffres, a ſa racine cubique exprimée par un ſeul chiffre. Si on vouloit extraire la racine de la quatriéme puiſſance, on ſépareroit les chiffres de 4 en 4; pour la cinquiéme, de 5 en 5 &c., & on feroit le même raiſonnement.

Secondement il faut chercher dans la premiére tranche à gauche, le plus grand cube, & mettre ſa racine cubique au quotient, & après avoir ôté le cube de cette racine, du nombre contenu dans cette premiére tranche, il faut écrire au-deſſus ce qui reſte, comme dans la diviſion.

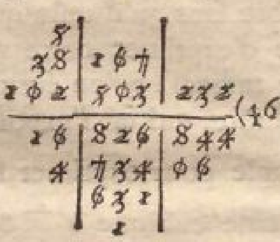
Troiſiémement il faut prendre pour diviſeur, le triple du quarré du quotient trouvé, & l'écrire au-deſſous du nombre dont on cherche la racine cubique, de maniére qu'il ne ſoit avancé que d'un chiffre du côté de la tranche ſuivante. Enſuite on cherche, comme dans la diviſion, combien de fois ce diviſeur eſt renfermé dans le nombre qui eſt au-deſſus, & on met au quotient le chiffre qui l'exprime. Après cela il faut ajoûter au diviſeur le triple du produit de ce chiffre par le premier en avançant d'un pas à droite, il faut encore ajoûter au diviſeur le quarré du ſecond chiffre en avançant auſſi d'un pas, de maniére que le dernier chiffre de ce quarré, soit au-dessous du dernier chiffre de la seconde tranche. Cela étant fait, il faut multiplier tout le diviseur par le second chiffre du quotient, & ôter le produit qui en résulte, du nombre qui est au-dessus, comme dans la division.

Quatriémement il faut considerer les deux chiffres trouvés du quotient, comme un seul, & en avançant du côté de la troisiéme tranche, il faut en faire le même usage qu'on a fait du premier, & ainsi des autres; il y aura par conséquent autant de chiffres au quotient, qu'il y a de tranches dans le nombre proposé. Un exemple rendra cela plus clair.

EXEMPLE.

5			
38	167		
102	503	232	(468
16	826	844	
4	734	06	
	632		
	2		

Pour extraire la racine cubique du nombre 102503232, il faut commencer vers la main gauche à la premiére tranche, disant : la racine du nombre cube qui approche le plus près de 102, c'est 4 qu'il faut écrire au rang des chiffres de la *racine qu'on cherche, c'est-à-dire au quotient; ensuite il faut* prendre pour diviseur le quarré de 4, qui est 16 qu'il faut écrire au-dessous de 102, & dire comme dans la division : quatre fois 16 font 64; qui de 102 ôte 64, reste 38 qu'il faut écrire sur 02, & effacer 102 avec le diviseur 16. Après cela il faut prendre le triple du quarré de 4, qui est 16, & l'on aura 48 pour diviseur qu'on écrira au-dessous de 385 : cela étant fait, il faut dire, comme dans la division : 4 en 48 pourroit y être 9 fois; mais parce qu'on écrit jamais au quotient qu'un chiffre, dont le produit par le diviseur, puisse être ôté du nombre qui est au-dessus du diviseur, c'est pour cela qu'on écrira que 6 au quotient, ensuite il faut multiplier 6 par le triple de 4, c'est-à-dire par 12, & ajoûter le produit 72 au diviseur, de maniére qu'il ſoit au-deſſous de 50 ; après cela il faut encore écrire le quarré de 6, ſavoir 36 au-deſſous de 03, & multiplier tout le diviſeur 826 + 4730 = 5556 par 6 : le produit 33336 étant ôté du nombre 38503 qui eſt au-deſſus, il reſte 5167 qu'il faut écrire au-deſſus 8503 que j'efface auſſi-bien que le diviſeur.



Conſidérant enſuite les deux chiffres du quotient, ſavoir 46, comme un ſeul, il faut en faire le même uſage qu'on a fait du premier, qui eſt 4. C'eſt pourquoi prenant pour diviſeur le triple du quarré de 46 qui eſt 6348, il faut l'écrire au-deſſous de 51672, enſuite chercher, comme dans la diviſion, combien de fois 6 eſt dans le nombre 51 qui eſt au-deſſus ; l'on trouve qu'il y eſt huit fois, & le reſte ſuffit pour achever l'opération ; il faut donc écrire 8 au quotient, & multiplier 8 par le triple de 46, ſavoir 138 ; le produit 1104 qui en réſulte, doit être ajoûté au diviſeur au-deſſous de 6723, avec le quarré de ce même chiffre 8, qui eſt 64 au-deſſous de 32. Cela étant fait, il faut multiplier par le dernier chiffre du quotient le diviſeur total 645904 composé de tous ces nombres ; le produit 5167232 qui en réſulte étant ôté du nombre qui eſt au-deſſus, il ne reſte rien ; on efface tous les chiffres, & le quotient 468 trouvé par cette opération, eſt la racine cubique cherchée.

La preuve de l'extraction des racines cubiques ſe fait en multipliant par elle-même la racine trouvée, ce qui produit le quarré de cette racine, enſuite multipliant ce quarré par cette même racine trouvée, le produit de cette derniére multiplication, ſera le cube de cette racine, qui ſera égale au nombre propoſé ſi on a bien réuſſi dans l'opération. Si après l'extraction il reſte quelque choſe, il faut l'ajoûter au cube trouvé, de la maniére qu'on vient de l'enſeigner, & la ſomme doit être égale au nombre dont on a voulu faire l'extraction, si on a bien *opéré.*

La démonstration de l'opération présente, se peut faire de la même maniére que celle de l'extraction des racines quarrées.

Lorsqu'on ne peut faire l'extraction de la racine d'un nombre sans qu'il reste quelque chose, souvent on se contente d'exprimer cette racine par ce signe $\sqrt{\;}$, appellé signe radical, qu'on écrit devant ce nombre proposé avec un chiffre, qui est l'exposant de la racine dont il s'agit. Par exemple pour exprimer la racine quarrée, on écrit $\sqrt[2]{\;}$; la racine cubique $\sqrt[3]{\;}$ &c.

Il y a des racines qu'on ne peut exprimer que par le moyen de ce signe radical $\sqrt{\;}$, auquel on joint 2, ou 4, &c. pour exposans de ces racines, on les nomme *racines sourdes.*

Les racines imaginaires ou impossibles sont celles des grandeurs entiérement négatives, & celles dont les exposans peuvent être partagés en deux parties égales sans fraction. Par exemple, $\sqrt{-38}$, ou $\sqrt{-12}$, &c. sont des racines imaginaires; parce qu'on ne peut trouver aucune grandeur telle qu'elle puisse être, soit négative, soit positive, dont le quarré, ou la quatriéme puissance, ou la sixiéme, &c. soient négatives; puisque + par + donne + & — par — produit aussi toujours +.

L'addition, la soustraction, la multiplication & la division des racines sourdes, sont d'un grand usage dans la pratique de l'Algébre.

Pour assembler deux racines sourdes, on les joint l'une avec l'autre par le signe +. Par exemple pour ajoûter la racine quarrée de 19 avec la racine quarrée de 23, on écrit $\sqrt{19+23}$; mais si ces racines sont racines de différentes puissances, pour les assembler on les écrit en mettant à chacune le signe radical, & l'exposant de la racine exprimée, & en interposant le signe + de cette maniére $\sqrt{7}+\sqrt{14}$.

Pour retrancher une racine ſourde d'une autre, on écrit celle dont on veut retrancher, & enſuite on écrit l'autre précedée du ſigne —. Par exemple pour retrancher $\sqrt{29}$ de $\sqrt{52}$, on écrit $\sqrt{52} - \sqrt{29}$.

Pour multiplier des racines ſourdes l'une par l'autre, ſi elles ſont de même nom; c'eſt-à-dire, ou l'une & l'autre quarrée, ou l'une & l'autre cubique &c. il faut multiplier l'une par l'autre les grandeurs dont on exprime les racines, & on prépoſe au produit le ſigne radical avec ſon expoſant, comme il l'étoit aux grandeurs multipliées. Par exemple pour multiplier $\sqrt{cd}$ par $\sqrt{fg}$, on écrit $\sqrt{cdfg}$; pour multiplier $\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, on écrit $\sqrt{54}$, parce que la racine de ce nombre 54 eſt le produit qu'on cherche.

COROLLAIRE.

Cette maniére de multiplier les racines ſourdes de même nom, découvre le fondement de la pratique dont on ſe ſert pour réduire une racine ſourde à l'expreſſion la plus ſimple. Pour y réuſſir, on diviſe la grandeur propoſée par un diviſeur qui la puiſſe diviſer exactement, c'eſt-à-dire, ſans reſte. On cherche ce diviſeur dans les nombres premiers 2, 3, 4, 5, 6 &c. de ſorte qu'il ſoit tel que le quotient de la diviſion ſoit un nombre quarré ou cubique; enſuite on prend la racine de ce nombre quarré, s'il s'agit d'une racine quarrée, on l'écrit devant le ſigne radical, & on écrit ce diviſeur enſuite du ſigne radical.

Par exemple pour réduire la racine ſourde $\sqrt{80}$ à une expreſſion plus ſimple & équivalente $4.\sqrt{5}$, on diviſe 80 par 5, on trouve pour quotient le nombre quarré 16. Si on multiplie 16 par 5, on aura 80; or en multipliant 16 par 5, on multiplie auſſi la racine de 16 par la racine de 5, & le produit de ces deux racines eſt égal à la racine de 80; la racine de 16 eſt 4, c'eſt pour cela qu'on écrit $4\sqrt{5}$, au lieu de $\sqrt{80}$: cela eſt facile à comprendre, puiſque $4 = \sqrt{16}$, & que multiplier $\sqrt{16}$ par $\sqrt{5}$, ou 4 par $\sqrt{5}$, c'eſt la même choſe.

Pour diviser une racine sourde par une autre, si elles sont de même nom, on écrit la grandeur dont on exprime la racine à diviser, & au-dessous on écrit la grandeur dont la racine exprimée est le diviseur. Enfin on interpose le signe de division —, & par-dessus le tout on prépose le signe radical. Par exemple pour diviser $\sqrt{18}$ par $\sqrt{7}$, on écrit $\sqrt{\frac{18}{7}}$; pour diviser $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}$.

Si les racines sourdes ne sont pas de même nom, on exprime leur quotient en les écrivant l'une au-dessus de l'autre avec leurs signes radicaux & leurs exposans, & on interpose le signe de division —. Par exemple, pour diviser $\sqrt{ab+cf}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\frac{\sqrt{ab+cf}}{\sqrt[3]{cd}}$, & ainsi des autres exemples.

LIVRE QUATRIEME.

Des Equations.

DEFINITION XXIII.

On appelle Equation, deux quantités différentes, entre lesquelles se trouvent le signe d'égalité; ainsi $a = b$; $ax = yy$; $bz - xx = ad$; $x = \frac{bc}{a}$, sont des équations.

Les deux quantités qui se trouvent de part & d'autre du *signe d'égalité, sont nommées membres de l'équation*; celle qui le précede est nommée le premier membre, & celle qui le suit, le second. D'où l'on voit que les deux membres d'une équation, sont les expressions différentes d'une même quantité, ou de deux quantités égales.

On a coûtume de se servir des premiéres lettres de l'alphabet a, b, c, &c. pour exprimer les quantités connues,

& des derniéres m, n, p, q, r, $ſ$, t, v, x, y, z pour exprimer les inconnues. Si l'on ajoûte, ou ſi l'on ſouſtrait, ou ſi l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe des quantités egales par des quantités égales, les ſommes, ou les différences, ou les produits, ou les quotiens ſeront égaux.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit qu'on peut ajoûter, ſouſtraire, multiplier, ou diviſer les deux membres d'une équation par les deux membres d'une autre, chacun par chacun, & réduire par ce moyen des équations à d'autres équations équivalentes plus faciles à réſoudre ; les propoſitions ſuivantes rendront cela plus clair.

PROPOSITION PREMIERE.

Réduire par l'addition une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Si l'on a une équation entre $z - 3 + 12$, c'eſt-à-dire, ſi $z - 3 = 12$, en ajoûtant de part & d'autre du ſigne d'égalité $+ 3$, l'équation $z - 3 = 12$, ſera changée en celle-ci $z = 15$; car $- 3$ & $+ 3$ font zero, & choſes égales ajoûtées à choſes égales donnent des tous égaux.

Par la même raiſon ſi $z - b = o$; en ajoûtant de part & d autre $+ b$, l'on aura l'équation $z = b$. Ou bien ſi $b - z = o$; en ajoûtant de part & d'autre z, l'on aura $b = z$. Si $zz - aq = o$, en ajoûtant de part & d'autre du ſigne d'égalité $+ aq$, pour lors l'équation $zz - aq = o$, ſera changée en celle-ci, $zz = aq$. Donc les quantités qui ſont précedées du ſigne $-$, ſont ajoûtés aux deux membres d'une équation, quand on les ôte de l'un de ces membres, & qu'on les met dans l'autre avec le ſigne $+$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION SECONDE.

Réduire par la soustraction une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Si l'on a cette équation $z + 3 = 12$, en ôtant de part & d'autre $+ 3$, l'on aura $z = 9$; & si l'on avoit $zz + az = bb$, en retranchant de part & d'autre $+ az$, l'on aura $zz = \cancel{az} \cancel{+} bb$ $- az$, parce que si de choses égales l'on retranche (*Ax.* 11.) choses égales, les restes seront égaux.

Par la même raison, l'équation $z^3 + 2c^3 = az^2 + b^2z + c^3$, peut être réduite à celle-ci, $z^3 = az^2 + b^2z - c^3$, en retranchant de part & d'autre $+ 2c^3$.

D'où il suit que les quantités precedées du signe $+$, sont retranchées des deux membres d'une équation, quand on les ôte de l'un de ces membres, & qu'on les transpose dans l'autre avec le signe $-$; & par conséquent toutes les grandeurs transposées par addition ou soustraction ont devant elles un signe contraire à celui qu'elles avoient avant leur transposition. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION TROISIEME.

Réduire par la multiplication une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Soit l'équation $\frac{z}{3} = 5$, qu'il faut réduire par le moyen de la multiplication, à une autre équation équivalente; puisqu'en multipliant des quantités égales par la même, les produits sont égaux (*Lem.* 3.); si l'on multiplie les deux membres de l'équation par 3, l'on aura $z = 15$.

L'on peut par la même maniére changer l'équation $\frac{zz}{z-b} = a$, en une autre équivalente; puisqu'en ôtant le dénominateur

minateur $z - b$, du premier membre, on multiplie ce même membre, par $z - b$, si l'on multiplie l'autre membre a, par $z - b$, l'on aura $zz = az - ab$.

L'on peut aussi par la même méthode réduire une équation dont les deux membres sont des fractions, à une équation dans laquelle il n'y aura point de fractions, en multipliant le numérateur du premier membre, par le dénominateur du second, & réciproquement le numérateur du second, par le dénominateur du premier, ce qui est la même chose que de réduire les deux membres de l'équation à même dénomination. Mais il faut remarquer que pour abréger & rendre l'opération plus facile, on réduit quelquefois les numérateurs & les dénominateurs, avant cette multiplication, à de plus simples termes.

PROPOSITION QUATRIEME.

Réduire par la division une équation à une autre équivalente.

SOLUTION.

Soit l'équation $zz = 4z$: puisqu'en divisant des grandeurs égales par la même, les quotiens sont égaux (*Lem.* 4.) Si l'on divise les deux membres de l'équation proposée, par z, l'on aura $z = 4$. De même si l'on a cette équation $z^4 = az^3 + bbzz$, en divisant les deux membres, par zz, l'on aura $zz = az + bb$. Si l'équation proposée étoit $3z = 12$, en divisant de la même maniére les membres, par 3, l'on auroit $z = 4$; ou bien l'équation $az = ab$ peut être changée en celle-ci, $z = b$, en divisant par a les deux membres de l'équation $az = ab$, & ainsi de toutes les autres.

Enfin l'on peut aussi réduire par l'extraction de racines, une équation à une autre équation équivalente, puisque les quarrés & les cubes égaux ont des racines égales.

Les équations servent à démontrer par Algébre toutes sortes de Théorêmes, dans toutes les parties des Mathématiques; c'est aussi par leur moyen qu'on peut résoudre des Problêmes & faire des découvertes qui paroissent fort au-dessus de la foible portée de l'esprit humain.

Fin de la premiere Partie.

TABLE
DES ELEMENS D'ALGEBRE & d'Arithmétique.

PRINCIPES GENERAUX. Page 2
Définitions générales. 2
Demandes générales. 3
Axiomes généraux. 4
LIVRE PREMIER. De l'addition, soustraction, multiplication & division des grandeurs entiéres. 7
CHAPITRE I. De l'addition. 7
Définition I. Ce qu'on entend par addition. 7
Définition II. Ce que c'est que nombre. 7
ARTICLE I. De l'addition des nombres. 7
Premiére proposition. Ajoûter ensemble des nombres entiers. 8
Démonstration de l'addition. 10
ARTICLE II. De l'addition des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 11
CHAPITRE II. De la soustraction des grandeurs entiéres, d'autres grandeurs entiéres. 12
Définition III. Ce qu'on entend par soustraction. 12
ARTICLE I. De la soustraction des nombres entiers. 13
Proposition II. Trouver la différence de deux nombres, ou ôter le plus petit du plus grand. 13
ARTICLE II. De la soustraction des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 14
CHAPITRE III. De la multiplication des grandeurs entiéres. 15
Définition IV. Ce que c'est que la multiplication. 15
Proposition III. Multiplier toutes sortes de nombres. 16
Démonstration de la multiplication. 20
ARTICLE II. De la multiplication des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 20
CHAPITRE IV. De la division des grandeurs entiéres. 22
Definition V. Ce qu'on entend par division. 22
ARTICLE I. De la division des nombres. 22
Proposition IV. Diviser toutes sortes de nombres les uns par les autres, les plus grands par les plus petits. 22
ARTICLE II. De la division des grandeurs générales, entiéres, exprimées par des lettres. 27
LIVRE SECOND. Des proportions. 29

Définition VI. Ce que c'est que raison, & de combien de sortes il y en a. 29
CHAPITRE I. Des proportions géométriques. 30
Définition VII. Ce qu'on entend par raison Géometrique. 30
Définition VIII. Ce que c'est qu'antécédent. 30
Définition IX. Ce qu'on entend par raison d'égalité, & d'inégalité. 31
Définition X. Ce que c'est que raisons égales, semblables, les mêmes. 31
Définition XI. Ce qu'on entend par raisons inégales. 31
Définition XII. Ce que c'est que rapport composé. 32
Définition XIII. Ce que c'est que rapport doublé, ou raison doublée. 32
Définition XIV. Ce qu'on entend par proportion ou analogie. 33
Définition XV. Ce qu'on entend par proportion continuë. 33
Définition XVI. Ce que c'est que disproportion. 33
Lemme I. Le produit du diviseur par le quotient, est toûjours égal à la grandeur divisée. 34
Lemme II. De quelque maniére qu'on multiplie deux grandeurs l'une par l'autre, il en résultera toûjours le même produit. 35
Lemme III. Les grandeurs qu'on multiplie également, demeurent dans le même rapport. 35
Lemme IV. Les quotiens de différentes grandeurs divisées par la même, sont entr'eux comme les grandeurs divisées. 36
Lemme V. Les quotiens d'une même grandeur divisée par différentes grandeurs, sont entr'eux comme les diviseurs. 37
Lemme VI. Prémiérement le produit des extrêmes de quatre grandeurs proportionnelles, est toûjours égal au produit des moyennes.
Secondement, si le produit des extrêmes de quatre grandeurs est égal au produit des moyennes, ces quatre grandeurs sont proportionnelles. 37
Exemple de la regle de proportion directe. 39
Exemple de la régle de proportion indirecte. 39
Exemple de la Régle de proportion composée. 40
De la Régle de compagnie. 41
Exemple de la Régle de compagnie simple. 41
Exemple de la Régle de compagnie composée. 41
CHAPITRE II. Des fractions. 43
Définition XVII. Ce qu'on entend par fractions. 43
Définition XVIII. Ce qu'on entend par dénominateur. 43
De l'Addition des fractions. 46
De la soustraction des fractions. 46
De la multiplication des fractions. 47

De la division des fractions, 48
LIVRE TROISIEME. De l'extraction des racines 50
Définition XIX. Ce qu'on entend par racine. 50
Définition XX. Ce que c'est que puissance. 50
Définition XXI. Ce qu'on entend par prémiére puissance. 51
Définition XXII. Ce que c'est qu'une grandeur quarrée. 51
CHAPITRE I. De l'extraction des racines quarrées. 52
Démonstration de l'extraction des racines quarrées. 54
CHAPITRE II. De l'extraction des racines cubiques. 57
Des racines sourdes & imaginaires, ou impossibles. 60
LIVRE QUATRIEME. Des équations. 62
Définition XXIII. Ce qu'on entend par équation. 62
Reduire par l'addition une équation à une autre équivalente. 63
Réduire par la soustraction une équation à une autre équivalente. 64
Réduire par la multiplication une équation à une autre équivalente. 64
Réduire par la division une équation à une autre équivalente. 65

Fin de la Table des Elémens d'Algébre & d'Arithmetique.

ELEMENS DE GEOMETRIE.

LA Géométrie est une partie fondamentale des Mathématiques, qui considere l'étenduë en particulier. L'étenduë en longueur considerée sans largeur & profondeur, se nomme ligne. L'étenduë en longueur & largeur considerée sans profondeur, se nomme surface. L'étenduë en longueur, largeur & profondeur, se nomme corps ou solide.

Ces trois sortes d'étenduë sont l'objet de la Géométrie.

Nous la divisons en deux parties, dont la premiere est la Géométrie spéculative; & la seconde, la Géométrie pratique.

PREMIERE PARTIE.

De la Géométrie ſpéculative.

LA Géometrie ſpéculative contient cinq Livres. Dans le prémier nous traiterons des lignes ; Dans le ſecond, des ſurfaces ; Dans le troiſiéme, des propo[illegible]rtions, ou des regles de comparer des grandeurs entr'elles ; Dans le quatriéme, des proportions des lignes droites & des figures qu'elles renferment ; Et dans le cinquiéme, des ſolides & des corps.

Axiomes ou véritez connuës d'elles-mêmes.

AXIOME I.

Il eſt impoſſible qu'une même choſe ſoit, & ne ſoit pas en même-tems.

AXIOME II.

Le tout eſt plus grand que ſa partie.

AXIOME III.

Le tout eſt égal à ſes parties priſes enſemble.

AXIOME IV.

Si à choſes égales l'on ajoûte choſes égales, les ſommes ſeront égales.

COROLLAIRE I.

Donc, lés doubles, triples, &c. des choſes égales, ſont égaux.

COROLLAIRE II.

Donc, ſi à choſes égales on ajoute choſes inégales ;

les sommes seront inégales, & la plus grande somme sera celle où se trouvera la plus grande des choses ajoûtées.

COROLLAIRE III.

Par la même raison la plus grande des choses ajoûtées sera celle qui se trouvera dans la plus grande somme.

AXIOME V.

Si de choses égales l'on rétranche choses égales, les restes seront égaux; & si les restes sont égaux, les choses rétranchées seront égales.

COROLLAIRE I.

Donc, les moitiez des choses égales sont aussi égales; de même que leurs tiers, &c.

COROLLAIRE II.

Il suit du même Axiome, que si de choses égales l'on rétranche choses inégales, les restes seront inégaux; & le plus grand reste, celui duquel l'on aura moins retranché.

COROLLAIRE III.

Donc, la plus grande des choses rétranchées dont les restes sont inégaux, est celle qui laisse un plus petit reste.

AXIOME VI.

Les choses qui sont égales à une troisiéme, sont égales entr'elles, & réciproquement celles-là sont égales entre elles qui sont égales à une troisiéme.

AXIOME VII.

Les grandeurs qui étant appliquées l'une sur l'autre conviennent, sont égales & semblables en tout. Réciproquement ces grandeurs sont égales & semblables en tout, qui étant appliquées l'une sur l'autre conviennent: or, des grandeurs conviennent quand les parties de l'une appliquées aux parties de l'autre, occupent une égale place.

AXIOME VIII.

Entre les extrêmitez de deux grandeurs, il n'y a qu'une mesure qui soit la plus courte, & il y en a une infinité de plus longues les unes que les autres.

Ces Axiomes sont communs à la Géométrie spéculative & pratique. L'on trouvera dans la suite de ces élémens, les demandes & les définitions chacunes dans leur place.

PREMIER LIVRE.

Des lignes.

NOus avons à parler dans ce premier Livre de deux sortes de lignes; savoir des lignes droites, & des lignes circulaires; nous le diviserons en trois Chapitres. Dans le premier, nous parlerons des lignes droites & des angles qu'elles renferment: dans le second, des lignes circulaires & de leur rencontre avec les lignes droites; & dans le troisiéme, de la mesure des angles.

CHAPITRE PREMIER.

Des lignes droites, & des angles qu'elles renferment.

DEFINITION PREMIERE.

La ligne droite est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener d'un point à un autre point; toute autre ligne est courbe.

COROLLAIRE PREMIER.

De-là il suit qu'on ne peut mener qu'une seule ligne droite d'un point à un autre point ; car (*par l'Axiome* 8.) d'un point à un autre point on ne peut mener qu'une ligne qui soit plus courte que toutes les autres.

COROLLAIRE II.

Aucun espace ne peut être renfermé de tout côté par deux lignes droites ; car, si par exemple, les lignes *ACB* & *ADB*, qui renferment de tout côté l'espace *ACBD*, étoient toutes les deux droites, il y auroit deux lignes droites menées d'un point à un autre point ; savoir, du point *A* au point *B*, ce qui est impossible (*par le premier Corollaire.*) Donc, il est aussi impossible que deux lignes droites renferment de tout côté un espace. Fig. 1. Tab. 1.

COROLLAIRE III.

Deux lignes, comme *AC* & *BC* menées des extrêmités *A* & *B* de la ligne droite *AB*, qui se rencontrent dans un même point au-dessus ou au-dessous de la ligne droite *AB* sont toûjours plus longues prises ensemble que la seule ligne droite au-dessus, ou au-dessous de laquelle elles se joignent ; car (*par la Définition présente*) la ligne droite *AB* est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *A* au point *B* ; toutes les autres sont plus longues : donc, les lignes *AC* & *BC* qui sont comprises entre les points *A* & *B*. sont plus longues prises ensemble que la seule ligne *AB*. Tab. 1. Fig. 2. & 3.

Voilà ce qui regarde la nature des lignes droites ; il faut maintenant passer à la disposition de ces lignes entr'elles, à leur rencontre, & à leur parallélisme : mais comme nous les devons considerer dans un même plan, il faut d'abord expliquer ce qu'on entend par le mot de *plan*.

DEFINITION II.

On appelle *plan* ou *surface plane* une surface que tous les points d'une ligne droite peuvent toucher ; toute autre est courbe.

Definition III.

L'ouverture qui se fait dans la rencontre de deux lignes inclinées l'une sur l'autre dans le même plan, est appellée *angle plan.* S'il est compris entre deux lignes droites
Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. on l'appelle, *angle rectiligne.* S'il est compris entre deux lignes courbes, on l'appelle, *curviligne.* S'il est compris entre une ligne droite & une ligne courbe, on l'appelle *mixte.*

COROLLAIRE.

Il suit de cette Définition que la grandeur d'un angle ne se prend pas de la longueur de ses côtés ; mais seulement de l'ouverture & de l'éloignement des côtés dans
Fig. 7. Tab. 1. le point où ils se touchent ; ainsi quoique les côtés *AB* & *BC* soient plus courts que les côtés *BD* & *BE*, il ne s'ensuit pas que l'angle *ABC* est plus petit que l'angle *DBE* ; aucontraire l'angle *ABC* est plus grand que l'angle *DBE*, parce que l'ouverture *ABC* est plus grande que l'ouverture *DBE*.

Definition IV.

Lorsqu'une ligne droite tombe sur une autre ligne
Tab. 1. Fig. 8. droite sans pancher d'aucun côté, & par conséquent (*par le Corollaire de la définition troisiéme*) forme deux angles égaux *CAB* & *CAF*, ces deux angles sont appellés *angles droits*, & la ligne *CA* qui forme ces deux angles en tombant sur la ligne *BF*, est appellée ligne *perpendiculaire* : mais si cette même ligne tomboit obliquement comme la ligne *DA*, elle formeroit deux angles inégaux *BAD* & *DAF*, dont le plus grand *BAD* est appellé *obtus*, & le petit *DAF* se nomme angle *aigu.*

COROLLAIRE.

Donc, les *angles droits* sont égaux, & l'angle *obtus* est plus grand qu'un *angle droit* ; l'angle *aigu* plus petit qu'un *angle droit.*

THEOREME PREMIER.

La ligne droite *DA* tombant sur la ligne *BE* forme deux angles *BAD* & *DAE*, qui sont tous deux des angles droits ou égaux, pris ensemble, à deux droits.

DEMONSTRATION.

Si les angles *DAE* & *DAB* sont égaux, ils sont tous deux droits (*par la définition quatriéme*;) s'ils sont inégaux, menés du point *A* la ligne *AC* & *AK* perpendiculaire à la ligne *BE*, les trois angles *DAE*, *DAC* & *CAB* seront égaux aux deux angles proposés, *DAB* & *DAE*, parce que les parties prises ensemble sont égales au tout; par la même raison les deux angles droits *BAC* & *CAE* sont aussi égaux aux trois angles *DAE*, *DAC* & *CAB*. Donc, (*Ax. 6.*) les deux angles proposés *DAE* & *DAB* sont égaux aux deux angles droits *BAC* & *CAE*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 1. Fig. 1.

COROLLAIRE I.

Si un angle comme dans la figure présente, l'angle *DAE* est droit, l'autre *DAB* sera aussi droit.

COROLLAIRE II.

Si plusieurs lignes droites *AD*, *AC* tombent sur la même ligne droite *BE* dans le même point *A* & dans le même plan, elles formeront les angles *EAD*, *DAC*, & *CAB* égaux à deux droits, puisqu'ils équivalent aux deux angles *CAE* & *CAB* qui sont deux angles droits.

COROLLAIRE III.

Comme tous les angles *BAK* & *KAE*, qui sont dans le même plan de l'autre côté de la même ligne *BAE* sont aussi égaux à deux droits, il s'ensuit que tous les angles qui peuvent être autour du même point, sont égaux, pris ensemble, à quatre angles droits.

COROLLAIRE IV.

L'on ne peut mener du même point *A* de la ligne droite *EB* deux lignes perpendiculaires du même côté ; car, si les lignes *AC* & *AD* étoient toutes deux perpendiculaires à la ligne *BE*, les angles *BAC* & *BAD* seroient deux angles droits (*Déf.* 4.) & par conséquent égaux entr'eux, (*Déf.* 4.) & pour lors la partie seroit égale au tout : ce qui est impossible. (*Ax.* 2.)

THEOREME II.

Si les angles *BAD* & *DAF* sont égaux à deux droits, Tab. 2. Fig. 2. la ligne *AD* tombera sur une même ligne droite *BF* & *BA* & *AF* ne feront qu'une même ligne droite.

DEMONSTRATION.

Si les deux lignes *BA* & *AH* n'étoient qu'une même ligne droite, les deux angles *BAD* & *DAH* (*Th.* 1.) seroient égaux à deux droits : mais les angles *BAD* & *DAF*, sont aussi supposés égaux à deux droits. Donc, (*Ax.* 6.) les deux angles *BAD* & *DAH* seroient aussi égaux aux deux autres *BAD* & *DAF* pris ensemble : & par conséquent en ôtant l'angle commun *BAD*, les angles *DAH* & *DAF* qui resteroient, seroient aussi égaux, & le tout seroit égal à sa partie ; ce qui est impossible (*Ax* 2.) Donc, il est aussi impossible que *BA* & *AF* ne fassent pas une même ligne. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Par la même raison deux lignes droites ne peuvent point avoir un segment commun ; c'est-à-dire, que les deux lignes *ABF* & *BAH* ne peuvent pas être toutes les deux droites, parce que pour lors l'angle *DAF* seroit égal à l'angle *DAH* : ce qui est impossible. (*Ax*.2.)

COROLLAIRE II.

Deux lignes droites qui se touchent en plus d'un point doivent

doivent être regardées comme une même ligne droite; car si les lignes *BAF* & *BAH* étoient deux lignes droites qui se touchassent en plusieurs points, par exemple en *AB*, il y auroit deux lignes droites entre ces deux points *A* & *B*, ou bien deux lignes droites auroient un segment commun, ce qui est impossible (*Cor.* 1. *Déf.* 2. *&* *Cor.* 1. *du Theor. present.*) Donc, il est aussi impossible que deux lignes droites se touchent en plus d'un point sans être confonduës en une.

COROLLAIRE III.

Deux lignes droites qui se coupent, ne se touchent que dans un point mathématique lorsqu'elles ne sont point confonduës en une.

THEOREME III.

Si deux lignes droites *BF* & *DE* se coupent en *A*, elles forment des angles *DAF* & *BAE* opposés au sommet égaux entr'eux. Tab. 2. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Les deux angles *DAF* & *DAB* sont égaux (*Theor.* 1.) à deux droits pris ensemble : par la même raison les deux angles *DAB* & *BAE* sont aussi égaux à deux droits. Donc, les deux premiers *DAF* & *DAB* sont (*Ax.* 6.) égaux aux deux derniers *BAE* & *BAD* pris ensemble; & par conséquent en ôtant l'angle commun *DAB*, les angles *BAE* & *DAF* qui resteront, seront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, que si la ligne *DE* est perpendiculaire à la ligne *BF*, la ligne *BF* sera aussi perpendiculaire à la ligne *DE* : si la ligne *DE* est perpendiculaire à la ligne *BF*, les deux angles *BAD* & *DAF* sont deux angles droits. (*Déf.* 4.) Donc, puisque l'angle *BAD* est égal à l'angle *EAF*, les deux angles *DAF* & *EAF* sont tous deux droits, & par conséquent (*Déf.* 4.) *BF* est perpendiculaire à *DE*.

THEORESME IV.

Tab. 2. Fig. 3. Si les angles opposés au sommet *DAF* & *BAE*; *DAB* & *EAF* sont égaux, savoir, l'angle *DAF* égal à l'angle *BAE*, & l'angle *DAB* égal à l'angle *EAF*, pour lors ces deux lignes *DAE* & *BAF* sont deux lignes droites.

DEMONSTRATION.

Les deux angles *DAF* & *DAB* (*Ax.* 4.) sont égaux aux deux autres *BAE* & *EAF* pris ensemble: De plus ces quatre angles (*Cor.* 3. *Theor.* 1.) sont égaux pris ensemble à quatre angles droits. Donc, ces deux premiers *DAF* & *DAB* sont égaux à deux droits, & par conséquent (*Theor.* 2.) la ligne *BAF* est droite; par la même raison les deux angles *BAE* & *BAD* pris ensemble sont égaux aux deux angles *DAF* & *EAF*, & par conséquent les mêmes angles *BAE* & *BAD* pris ensemble (*Ax.* 6.) sont aussi égaux à deux droits, & la ligne *DAE* (*Theor.*2.) est une ligne droite. Donc, ces deux lignes *BAF* & *DAE* sont toutes deux droites. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà ce qui regarde les lignes droites en général, voyons maintenant ce qui regarde la rencontre des lignes perpendiculaires.

THEOREME V.

Tab. 2. Fig. 4. *La ligne indéfinie perpendiculaire KC dans le milieu B de la ligne MN a tous ses points également éloignés des extrêmitez M & N de la ligne MN.*

DEMONSTRATION.

Supposons que le plan *MKNC* est plié de façon que le plis soit dans la ligne droite *KBC*. Premierement, il eſt clair que BM tombera ſur BN; car, ſi elle tomboit deſſus ou deſſous en BE, l'angle KBM qui ſeroit pour lors égal à l'angle KBE, ſeroit plus grand ou plus petit que l'angle KBN, ce qui eſt contre l'hipothéſe. Secondement, le point M tomberoit ſur le point N, parce que l'on a ſuppoſé que les lignes BM & BN étoient égales. Donc, pour lors le point H & tous les autres points de la ligne perpendiculaire indéfinie KC ſont également éloignés des extrêmités M & N de la ligne MN : Ce qu'il falloit démontrer.

On peut auſſi démontrer la même choſe en diſant, que ſi quelque point de la ligne perpendiculaire KC, comme le point H étoit plus près de l'un des deux points M & N, la ligne KC ne ſeroit point perpendiculaire au milieu de la ligne droite MN, ou elle ſeroit plus inclinée du côté de l'un de ces deux points M & N que de l'autre, ce qui eſt contraire à l'hypothéſe. Donc, tous les points de la ligne perpendiculaire KC ſont également diſtans des extrêmités M & N de la ligne droite MN dans le milieu de laquelle elle tombe perpendiculairement.

THEOREME VI.

La ligne perpendiculaire indéfinie KC dans le milieu B de la ligne droite MN, paſſe par tous les points qui ſont dans le plan de ces lignes droites également diſtans des extrêmités M & N de la ligne droite MN. Tab. 2. Fig. 5.

DEMONSTRATION.

Qu'on prenne dans le plan des lignes droites KC & MN tel point qu'on voudra, comme le point G hors de la ligne KC, qu'on méne de ce point les deux lignes GM & GN, dont l'une, ſavoir, GN paſſe par quelque point, par exemple par le point H de la ligne droite CBK; enſuite qu'on joigne MH & NH.

Puiſque par l'hypothéſe la ligne droite indéfinie KC eſt perpendiculaire à la ligne MN, & qu'elle tombe ſur le point *B* également éloigné de *M* & de *N* qui sont les deux extrêmités de la ligne droite *MN*, les lignes *MH* & *NH* (*Th.* 5.) sont aussi égales. Donc, en ajoûtant des deux côtés *GH*, *HM* & *HG* seront (*Ax* 4.) égales prises ensemble à la ligne *GN*; mais (*Cor.* 3. *Déf.* 1.) *HM* & *HG* sont plus grandes que *GM*. Donc, *GN* sera aussi plus grande que *GM*, & par conséquent le point *G* sera inégalement distant des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN*.

Ce qui vient d'être démontré du point *G* peut pareillement se démontrer de tout autre point hors de la ligne indéfinie *KC*, pourvu que ce point soit dans le plan de la ligne *KC* & de la ligne *MN*. Donc, il n'y a aucun point dans ce plan hors de la ligne indéfinie *KBC* qui soit également distant des points *M* & *N*: Donc, (*Theor.* 5.) cette ligne perpendiculaire indéfinie *KC* passe par tous les points également éloignez des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN*: Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Deux points *K* & *H* étant donnés également distans des deux extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN* & dans le même plan, si de tel point qu'on voudra; par exemple, du point *G* on méne une ligne qui coupe la ligne *MN* par la moitié, & que l'on méne par les points donnés *K* & *H* une ligne perpendiculaire à la ligne *MN*, il n'y aura que la ligne *KHB* qui soit perpendiculaire à la ligne *MN* de toutes celles qui la diviseront en deux parties égales; car il n'y en aura aucune comme la ligne *GB* qui puisse avoir le point *G* ou un autre, excepté le point *B*, également distant des extrêmités *M* & *N* de la ligne droite *MN*; car cela ne convient qu'à la seule ligne droite *CBK*; d'où il suit (*Theor.* 5.) qu'il n'y a que cette ligne droite dans le même plan, & menée du même point *B* de la ligne droite *MN*, qui soit perpendiculaire à cette ligne

MN, ce qui avoit déja été conclu par le Corollaire quatriéme du Théorême premier.

THEOREME VII.

Premierement, la plus courte des lignes *CD*, *CF*, *CG*, *CA*, *CB*, qu'on peut mener du point *C* sur la ligne droite *AB*, est la perpendiculaire *CD*. Tab. 2. Fig. 6.

Secondement, la plus courte de toutes les autres; *CF*, *CA*, &c. est celle qui est la plus proche de la perpendiculaire *CD*.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Prolongez la ligne *CD* vers *E* jusqu'à ce que *DE* soit égale à *CD*. Joignez ensuite *EF* & *EA*, &c. puisque par l'hypothése *CE* est perpendiculaire à *AB*; *AB* sera aussi (*Cor. Theor.* 3.) perpendiculaire à *CE*. Donc par l'hypothése *CD* étant égale à *DE*, *CF* sera aussi (*Theor.* 5.) égale à *EF*; & (*Ax.* 3.) *CF* & *EF* prises ensemble seront égales au double de *CF*, comme *CE* est égale au double de *CD*. Mais (*Cor.* 3. *Def.* 1.) *CF* & *EF*. prises ensemble sont plus grandes que *CD* & *ED* tout ensemble, donc le double de *CF* est plus grand que le double de *CD*, & par conséquent (*Cor.* 1, *Ax.* 5,) *CF* est pus grande que *CD*.

Par la même raison on peut prouver que *CA* & les autres lignes obliques menées du point *C* sur la ligne *AB* sont toutes plus grandes que la seule perpendiculaire *CD*. Donc la ligne perpendiculaire *CD* est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *C* sur la ligne droite *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Prolongez la ligne *CF* jusques au point *O* de ligne droite *AE*. Les lignes *FO* & *OE* prises ensemble (*Cor.* 3. *Def.* 1.)

ſont plus grandes que la ligne *FE*. Donc en ajoûtant des deux côtés *FC.CO* & *OE* (*Cor.* 2. *Ax.* 4.) priſes enſemble ſeront plus grandes que *FC* & *FE*; mais *AC* & *AO* ſont enſemble (*Cor.* 3. *Def.* 1.) plus grandes que *CO*. Donc ſi vous ajoûtés des deux côtés *OE*, vous aurés (*Cor.*2. *Ax.*4.) *AC* & *AE* plus grandes enſemble que *CO* & *OE*. Donc à plus forte raiſon *AC*&*AE* ſeront enſemble plus grandes que *FC* & *FE*, mais par l'hypothéſe *CD* eſt égale à *DE*, & (*Cor.Theor.* 3.) *AB* eſt perpendiculaire à *CE*. Donc *AC* (*Theor.* 5.) eſt égale à *AE*,& *FC* à *FE* & le double de *AC* égal aux deux lignes *AC* & *AE* priſes enſemble, & le double de *FC* eſt auſſi égal aux deux lignes *FC* & *FE* priſes enſemble. Donc enfin le double de la ligne *AC* eſt plus grand que le double de la ligne *FC*, & par conſéquent *AC* eſt auſſi plus grand que *FC*.

On peut de même démontrer que toute autre ligne oblique menée du point *C* ſur la ligne droite *AB* & plus éloignée de la perpendiculaire que la ligne *AC*, eſt plus grande que cette même ligne *AC*. Donc les plus proches de la perpendiculaire *CD* ſont plus courtes que celles qui en ſont plus éloignées. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

De ce qui vient d'être démontré, il ſuit qu'on ne peut mener du point *C* qu'une ligne perpendiculaire ſur la ligne droite *AB*, car ſi on pouvoit mener une autre ligne perpendiculaire, par exemple *CF*; en ſuppoſant que la ligne *AD* eſt égale à *DB* & *FG* égale à *AF*; les lignes *CB*, *CA*, *CG*, (*Theor.* 5.) ſeroient égales entre elles, ce qui eſt impoſſible par la ſeconde partie du Théorême preſent.

COROLLAIRE II.

On ne peut mener d'un même point qu'une ſeule ligne perpendiculaire à la même ligne droite, dans un plan qui paſſe par cette ligne droite, cela ſuit neceſſairement de ce qui vient d'être démontré, auſſi bien que du Corollaire quatriéme du Théorême premier.

COROLLAIRE III.

Deux lignes perpendiculaires à la même troiſiéme ligne droite ne peuvent ſe rencontrer, fuſſent-elles prolongées à l'infini; car ſi elles ſe rencontroient il y auroit deux lignes perpendiculaires menées du point où elles ſe rencontreroient ſur lamême ligne droite; ce qui eſt impoſſible par le Corollaire ſecond.

COROLLAIRE IV.

La perpendiculaire qui paſſe ~~pour~~ par un point également diſtant des extrémités de la ligne droite à laquelle elle eſt perpendiculaire, paſſe auſſi par le point qui eſt au milieu de cette même ligne droite. Car puiſque la ligne qui paſſe par ces deux points eſt perpendiculaire (*Cor.* 1. *Theor.* 6.) à cette même ligne droite, ſi celle qui paſſe par un point également diſtant des extrémités de la ligne droite à laquelle elle eſt perpendiculaire, ne paſſoit pas auſſi par le point qui eſt au milieu de cette même ligne droite, on pourroit mener du même point deux lignes perpendiculaires ſur cette ligne droite; ce qui eſt impoſſible par le Corollaire ſecond.

COROLLAIRE V.

De la ſeconde démonſtration il ſuit qu'on ne peut mener du même point ſur une ligne droite que deux lignes égales; ſavoir, celles qui ſont des deux côtés également éloignées de la perpendiculaire menée du même point ſur cette même ligne droite. Car ſi on en pouvoit mener trois, il y en auroit deux égales du même côté de la perpendiculaire, quoiqu'inégalement éloignées d'elle; ce qui eſt impoſſible par la ſeconde démonſtration du preſent Théorême.

COROLLAIRE VI.

Non ſeulement la ligne perpendiculaire CD eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point C à la ligne droite AB; mais encore la plus courte eſt la perpendiculaire *CD*, sans quoi la perpendiculaire ne seroit pas *la plus courte de toutes; ce qui est impossible par la premiere* partie de ce Théorême.

COROLLAIRE VII.

Non seulement les lignes obliques les plus éloignées de la perpendiculaire sont les plus longues, mais encore les plus *longues sont les plus éloignées. Car si la ligne AC*, par exemple, étoit plus proche de la perpendiculaire *CD* que la ligne *CF*, elle seroit aussi plus courte, par la *démonstration de la seconde partie du present Théorême*; ou bien si les lignes *AC* & *CF* étoient également éloignées de la ligne perpendiculaire *CD*, elles seroient (*Theor.* 5.) égales. *Ce qui est contre l'hypothése faite.*

COROLLAIRE VIII.

Par la même raison que les lignes *AC* & *AE* (*Démonstr.* 2.) sont plus grandes que les lignes *FC* & *FE* prises ensemble, on peut démontrer en général que si des extrémités de la même ligne droite *CE* on méne plusieurs lignes, *CF*, *FE*; *CA*, *AE* qui concourent les unes *CFE* entre les autres *CAE*, la somme des lignes enfermées *CF* & *FE* est plus petite que la somme de celles qui les enferme *AC* & *AE*.

SCOLIE.

De tout ce qui a été démontré jusques ici des lignes perpendiculaires, des lignes obliques, & de leur distance de la ligne perpendiculaire, il suit en général.

Que si les lignes perpendiculaires sont égales, les lignes obliques seront égales ou inégales selon l'égalité, ou l'inégalité de leur distance des lignes perpendiculaires; & réciproquement dans la même hypothése, les lignes obliques seront également ou inégalement éloignées des lignes perpendiculaires selon qu'elles seront égales ou inégales.

Après avoir démontré ce qui regarde la rencontre des lignes

lignes droites, il faut examiner ce qui concerne leur parallélisme.

DEFINITION V.

Deux lignes droites *AC* & *BD* dans le même plan, également inclinées sur la ligne *EH*, & qui forment deux angles, l'externe *EFC*, & l'interne *EGD* du même côté, égaux entr'eux; sont appellées *paralléles*. Tab. 3. Fig. 13.

COROLLAIRE.

Les lignes *AC* & *MN* paralléles à la même troisiéme *BD* & dans le même plan, sont aussi paralléles entr'elles. Car en menant une ligne, par exemple *EH*, qui les coupe toutes; les angles *EFC*, *EKN* seront égaux (*par la Déf. prés.*) à l'angle *FGD*, & par conséquent égaux entr'eux. Donc (*par la Définition présente*) les lignes *AC* & *MN* sont paralléles entr'elles. Tab. 3. Fig. 1.

AVERTISSEMENT.

Pour rendre les démonstrations suivantes plus courtes & plus claires, nous nous servirons des cinq signes dont nous avons parlé dans le Traité précedent, & du signe ×, qui marque la multiplication, par exemple, 2 × 4 signifie deux multipliés par quatre.

THEOREME VIII.

Si les lignes *AC* & *BD* sont paralléles; premiérement, les angles alternes internes *AFG* & *FGD* sont égaux. Tab. 3. Fig. 11.

Secondement, les angles alternes externes *EFC* & *BGH* sont aussi égaux.

Troisiémement, les angles internes du même côté *CFG*, *FGD* sont ensemble égaux à deux droits.

Quatriémement, les angles externes du même côté *EFC* & *DGH* sont aussi égaux à deux droits.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle *EFC* (*Déf. 5.*) est = à l'angle *FGD*, & le même angle *EFC* eſt égal (*Theor. 3.*) à l'angle *AFG* qui lui eſt oppoſé au ſommet. Donc (*Ax. 6.*) l'angle *AFG* eſt = à l'angle *FGD.* Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

De même, puiſque (*Déf. 5.*) l'angle *EFC* eſt = à l'angle *FGD*, & l'angle *FGD* (*Theor. 3.*) = à *BGH*; l'angle *EFC* (*Ax. 6.*) eſt = à l'angle *BGH*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA TROISIEME PARTIE.

Puiſque (*Déf. 5.*) l'angle *EFC* eſt = à l'Angle *FGD*, & (*Theor. 1.*) les angles *FGD*, + *DGH* ſont = à deux droits. Donc *EFG* + *FGD* ſont = à deux droits. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Si la ſécante *EFGH* eſt perpendiculaire à l'une des paralléles, elle ſera auſſi perpendiculaire à l'autre ; ſi elle eſt perpendiculaire à la ligne *AC*, elle ſera auſſi perpendiculaire à la ligne *BD*; car pour lors (*Cor. Th. 3.*) la ligne *AC* ſera auſſi perpendiculaire à la ligne *EH*, & (*Déf. 4.*) l'angle *AFG* ſera un angle droit. Donc puiſque (*partie 1.*) l'angle *AFG* eſt = à l'angle *FGD*, & que (*Theor. 1.*) les angles *FGB* & *FGD* ſont égaux à deux droits, les angles *FGB* & *FGD* ſeront deux angles droits, & par conſéquent *EH* ſera auſſi perpendiculaire à *BD*. (*Déf. 4.*)

DEMONSTRATION DE LA QUATRIEME PARTIE.

Puiſque (*Déf. 5.*) l'angle *EFC* eſt = à l'angle *FGD*, & que (*Theor. 1.*) les angles *FGD* + *DGH* ſont = à deux droits, les angles *EFC* + *DGH* (*Ax. 4.*) ſeront auſſi égaux à deux droits. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

Les lignes paralléles, par exemple *AC*, *BD*, prolongées à l'infini, ne peuvent jamais ſe rencontrer. Car ſi l'on ſuppoſe que la ligne *EH* eſt perpendiculaire à la ligne *AC*, elle sera aussi (*Cor.* 1.) perpendiculaire à la ligne *BD*, & par conséquent si ces deux lignes paralléles pouvoient se rencontrer, il y auroit deux lignes perpendiculaires menées du même point sur une même ligne droite; ce qui est (*cor.* 2. *theor.* 7.) impossible. Donc il est aussi impossible que des lignes paralléles se rencontrent.

THEOREME IX.

Les lignes AC & BD sont paralleles.

Premierement, si les angles alternes internes, *AFG*, *FGD* sont égaux. Tab. 3. Fig. 1. 2.

Secondement, si les angles alternes externes, *EFC*, *BGH* sont aussi égaux.

Troisiémement, si les angles internes du même côté, *CFG* *FGD* sont égaux ensemble à deux droits.

Quatriémement si les angles externes du même côté *EFC*, *HGD* sont aussi ensemble égaux à deux droits.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle *F G D* (*l'Hyp.*) est = à l'angle *AFG*, & l'angle *AFG* (*Théorême* 3.) est = à l'angle *EFC*; & ainsi (*Ax.* 6.) l'angle *FGD* est égal à l'angle *EFC*, & par conséquent les lignes *A C* & *BD* (*Def.* 5.) sont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle *EFC* (*Hypp.*) est = à l'angle *BGH*, & (*Th.* 3.) *BGH* = *FGD*. Donc *EFC* (*Ax.* 6.) est = à *FGD*. & par conséquent (*Déf.* 5.) ces lignes *AC* & *BD* sont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA TROISIEME PARTIE.

Les angles *FGD* + *CFG* sont égaux à deux droits (*Hyp.*) & les angles *EFC* & *CFG* sont aussi (*Theor.* 5.) = à deux droits. Donc l'angle *EFC* (*Ax.* 5.) est = à l'angle *FGD*, & par conséquent (*Déf.* 5.) les lignes droites *AC* & *BD* sont paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA QUATRIEME PARTIE.

Les angles $EFC + HGD$ (*Hyp.*) font = à deux droits. $FGD + HGD$ (*Theor.* 1.) font auffi égaux à deux droits. Donc l'angle EFC (*Ax.* 5.) eft = à l'angle FGD ; & par conféquent (*Déf.* 5.) les lignes droites AC & BD font paralléles. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Si la même ligne EH eft perpendiculaire aux deux lignes droites AC & BD, tous les angles de cette figure (*Def.* 4. & *Th.* 3.) font des angles droits, & par conféquent, par toutes les parties du préfent théorême, les lignes AC & BD font des lignes paralléles.

CHAPITRE SECOND.

Des lignes circulaires, & de leur rencontre avec les lignes droites.

DEFINITION VI.

Tab. 3. Fig. 3. La regle AB tournant autour du point fixe A, qui eft une des extrêmitez de la regle, l'autre extrêmité B décrira une ligne courbe $CBDE$. La ligne qu'elle aura décrite lorfqu'elle fera parvenuë dans l'endroit d'où elle étoit partie s'appelle *circonférence du cercle*, & l'efpace compris entre cette ligne courbe, fe nomme, *cercle*.

Une partie de la circonférence, comme par exemple CB eft appellée *arc de cercle* : le point A autour duquel la régle a tourné, eft appellé *le centre* du cercle. Toutes les lignes droites menées du centre à la circonférence fe nomment *rayons*.

Les lignes droites menées d'un point de la circonférence à un autre point font appellées *cordes des arcs* par les extremités defquels elles paffent : mais lorfque ces lignes paffent par le centre, on les nomme diamétres.

La partie du cercle comprife entre la corde & l'arc eſt appellée *ſegment* du cercle.

Le ſecteur du cercle eſt la partie du cercle contenuë entre deux rayons & l'arc compris entre ces rayons.

La ligne droite dans le plan du cercle qui touche ſa circonférence, de maniére qu'étant prolongée elle n'entre point dans le cercle, eſt appellée *tangente* du cercle.

COROLLAIRE I.

Il paroît par la formation du cercle, que la meſure du mouvement de la regle *AB* & de ſon éloignement de la ligne droite *AC*, eſt l'arc *BC* qu'elle a décrit par ce même mouvement.

COROLLAIRE II.

Il paroît auſſi par la maniére dont ce cercle eſt décrit par la regle *AB* que tous les rayons ſont égaux à la regle *AB*, & par conſéquent (*Ax. 6.*) égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Les diamétres ſont auſſi (*Cor. 1. Ax. 4.*) égaux entr'eux; car chaque diametre (*Définition préſente*) eſt composé de deux rayons.

COROLLAIRE IV.

Les lignes menées du centre, qui ſont plus courtes que ces rayons ne vont pas juſques à la circonférence; celles qui ſont plus longues s'étendent au-delà de la circonférence.

COROLLAIRE V.

L'on peut dire que les cercles, ou les circonférences des cercles, qui ont le même rayon, ſont égales; celles qui ont un plus grand rayon ſont plus grandes, celles qui ont un plus petit rayon ſont plus petites.

COROLLAIRE VI.

Deux cercles qui ont le même centre ne peuvent jamais ſe rencontrer; car s'ils ſe pouvoient rencontrer, la ligne droite menée du point où ils se rencontreroient, au centre commun, seroit un rayon commun aux deux cercles, & par conséquent tous les rayons des deux cercles (*Cor.* 2.) seroient égaux entr'eux; ainsi il n'y auroit qu'un cercle.

COROLLAIRE VII.

Donc, les cercles qui se rencontrent ne peuvent pas avoir le même centre.

COROLLAIRE VIII.

Tab. 3. Fig. 4. De l'égalité des rayons, il suit qu'on peut décrire un cercle par trois points donnés qui ne seront point disposés en ligne droite, comme *CBD*; que le centre de ce cercle sera le point *A* où se rencontrent les lignes *AE* & *AF* qui coupent perpendiculairement par la moitié les cordes *BD* & *BC*; car le point *A* (*Theor.* 5.) est également distant des points donnés *DBC*, & par conséquent (*Cor.* 4.) le cercle décrit du centre *A* par l'un de ces points passera aussi par les deux autres.

J'ai dit que les trois points donnés *DBC* ne devoient point être disposés en ligne droite, ou bien que les lignes *DB* & *BC* ne devoient pas faire une même ligne droite, parce que (*Cor.* 3. *Theor.* 7.) aucun point ne peut être également distant de trois points d'une ligne droite: par conséquent il n'y en a aucun duquel on puisse décrire un cercle qui passe par trois autres points d'une même ligne droite.

THEOREME X.

Tab. 3. Fig. 5. 6. 7. Premiérement, la plus longue des lignes droites *AB*, *AD*, *AE*, &c. qu'on peut mener du même point *A* hors du centre du cercle *C*, à la circonférence *BEF*, est celle qui passe par le centre.

Secondement, la plus longue des autres *AD*, *AE*, &c. est celle qui se termine à un point de la circonférence *D* plus proche du point *B*, où se termine la plus longue *AB*.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Menés du centre C les rayons CD, CE, pour lors (*Cor. 2. Défin. 6.*) $CB = CD$, ainsi (*Ax. 4.*) $AC + CD = AB$: mais (*Corollaire 3. Définition premiere*) $AC + CD > AD$. Donc, AB est aussi $> AD$. Par la même raison $AB > AE$, & ainsi des autres lignes qu'on peut mener du point A à la circonférence sans qu'elles passent par le centre C. Donc, la plus longue de toutes est AB qui passe par le centre C. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

$DO + OC$ (*Cor. 3. Déf. 1.*) $> DC$; mais DC (*Cor. 2. Déf. 6.*) $= EC$. Donc, (*Cor. 4. Ax. 5.*) DO est $> EO$. Ainsi (*Cor. 2. Ax. 4.*) AD est plus grand $EO + OA$ (*Cor. 3. Déf. 1.*) $> EA$. Il en est de même de toutes les autres lignes droites qu'on peut mener du point A à plusieurs points plus proches les uns que les autres du point B. Donc, la plus longue est celle qui est plus proche du point B. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il suit de cette seconde démonstration, que la partie AF de la ligne AB continuée jusques au point F de la circonférence, opposé au point B est la plus courte de celles qu'on peut mener du point A à la circonférence $BDEF$. puisqu'elle se termine au point F qui est le plus éloigné de tous du point B.

COROLLAIRE II.

On ne peut mener du même point A à la circonférence $BDEF$ que deux lignes droites égales terminées aux deux points également éloignés du point B de la plus longue de toutes AB. Car si de toutes les lignes qu'on peut mener du point A à la circonférence $BDEF$, il pouvoit y en avoir trois d'égales, il y en auroit au moins deux égales du même côté quoique terminées à des points inégalement distans du point B de la plus longue de toutes AB. Ce qui eſt impoſſible par la partie ſeconde du préſent Théorême. Donc, il eſt auſſi impoſſible que du même point pris hors du centre du cercle on méne plus de deux lignes droites à la circonférence, qui ſoient égales.

COROLLAIRE III.

Les lignes égales menées du même point hors du centre, à la circonférence, ſe terminent à des points également diſtans du point B de la plus longue de toutes AB; car ſi ces points étoient inégalement diſtans, ces lignes ſeroient auſſi (*Part.* 2.) inégales : ce qui eſt contre l'hypothéſe. Donc, les points de la circonférence auſquels ces lignes ſe terminent ſont également diſtans du point B auquel ſe termine la plus longue de toutes AB.

COROLLAIRE IV.

Tab. 3. Fig. 6. Le plus grand des arcs inégaux AE, AD du demi-cercle $AEDB$, a auſſi la plus grande corde; car l'arc AD eſt plus grand que l'arc AE & le point D eſt plus proche du point B que le point E, & par conſéquent, (*Part.* 2.) la corde AD eſt plus grande que la corde AE. D'où l'on peut conclure en général, que les plus grands arcs dans le même demi-cercle ont toûjours de plus grandes cordes que les plus petits.

COROLLAIRE V.

Si la corde AD eſt plus grande que la corde AE, le point D ſera plus proche (*Partie* 2.) du point B que le point E, & par conſéquent l'arc AED ſera plus grand que l'arc AE. D'où on peut conclure en général que les grandes cordes ont toûjours les plus grands arcs.

COROLLAIRE VI.

Des deux derniers Corollaires, il ſuit que les cordes égales ont toûjours des arcs égaux, & réciproquement que

que les arcs égaux ont toujours des cordes égales.

COROLLAIRE VII.

Ce qui vient d'être démontré du même demi-cercle peut s'entendre du cercle entier ; ainsi on peut dire en général que dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, les plus grands arcs ont les plus grandes cordes, & réciproquement les plus grandes cordes ont les plus grands arcs.

THEOREME XI.

La corde, ou la ligne droite *EF* qui joint les points *EF* de la circonférence *EGF* est toute dans le cercle. Tab. 3. Fig. 8.

DEMONSTRATION.

Supposons que du centre *A* sont menés les rayons *AE*, *AF* & la ligne *AB* perpendiculaire à la ligne droite *EF*. *AE* (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) est = à *AF*. La perpendiculaire *AB* sera donc (*Theor.* 7.) plus courte que ces rayons; & par conséquent le point *B* de la ligne droite *EF* (*Cor.* 4. *Déf.* 6.) sera dans le cercle ; & les autres points de là ligne *EF* étans plus proches du point *B* que les points *E* & *F*, ils sont aussi (*Theor.*. 7.) moins éloignés du centre *A* que les points *E* & *F*. Donc, (*Cor.* 4. *Déf.* 6.) tous les points de la ligne *EF* sont dans le cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Une ligne droite ne peut donc rencontrer la circonférence d'un cercle que dans deux points.

COROLLAIRE II.

Si une ligne droite touche un cercle, elle ne le touche que dans un point, car si elle le touchoit dans deux points, elle le couperoit, *comme il paroît par le Théorême present.*

COROLLAIRE III.

Donc, la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener du centre à la tangente d'un cercle, eſt celle qui eſt menée au point où la tangente touche le cercle.

COROLLAIRE IV.

Le rayon qui eſt mené du centre au point où la tangente touche le cercle (*Cor. 6. Th. 7.*) eſt perpendiculaire à la tangente.

COROLLAIRE V.

La tangente eſt auſſi (*Cor. Th. 3.*) perpendiculaire à l'extrêmité du diametre ou du rayon qui paſſe par le point où elle touche le cercle.

COROLLAIRE VI.

La ligne droite qui dans le plan d'un cercle eſt perpendiculaire à l'extremité d'un diametre ou d'un rayon, touche le cercle dans ce même point; autrement, puiſque la ligne qui touche le cercle dans ce point eſt auſſi (*Cor. 5.*) perpendiculaire au même diametre ou rayon, & (*Déf. 6.*) dans le même plan, il y auroit deux lignes perpendiculaires à cette même ligne, menées du même point. Ce qui eſt (*Cor. 2. Th. 7.*) impoſſible.

COROLLAIRE VII.

La ligne perpendiculaire à la tangente dans le point où elle touche le cercle, & dans le plan du cercle, paſſe par le centre, autrement il pourroit ſe faire qu'il y eût deux lignes perpendiculaires menées du même point & dans le même plan à la tangente du cercle, puiſque la ligne menée du centre au point où elle touche le cercle lui eſt auſſi (*Cor. 4.*) perpendiculaire: mais il eſt impoſſible (*Cor. 2. Th. 7.*) qu'il y ait deux lignes perpendiculaires à la même ligne, menées du même point. Donc, il eſt auſſi impoſſible que la ligne perpendiculaire à la tangente dans le point où elle touche le cercle ne paſſe pas par le centre.

COROLLAIRE. VIII.

Deux des trois choſes ſuivantes étant données. Premiérement, que la tangente du cercle eſt une ligne droite. Secondement, qu'une autre ligne droite eſt perpendiculaire à la tangente dans le point où elle touche le cercle, & dans le plan du cercle. Troiſiémement, que cette même ligne droite paſſe par le centre du cercle.: La troiſiéme ſuit neceſſairement par quelqu'un des Corollaires précédens, 4, 5, 6, 7.

COROLLAIRE IX.

Il ſuit du Corollaire cinquiéme, qu'on ne peut mener qu'une ſeule tangente par le même point de la circonférence d'un cercle; car le diamétre ou le rayon qui paſſe par ce point ne peut avoir (*Cor.* 2. *Th.* 7.) qu'une ſeule perpendiculaire dans ce même point & dans le même plan.

COROLLAIRE X.

Donc, la ligne droite différente de la tangente & qui paſſera par le point où elle touche le cercle, le coupera; autrement il y auroit deux tangentes dans le même point, ce qui eſt impoſſible par le Corollaire neuviéme.

THEOREME XII.

De ces trois choſes 1°. Que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite dans le même plan du cercle; 2°. Qu'elle eſt coupée perpendiculairement; 3°. Que la ſécante paſſe par le centre du cercle: deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement. Tab. 3. Fig. 8.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Suppoſons que la ligne droite *GB* coupe par la moitié

& perpendiculairement la corde *EF*; je dis que la ligne *GB* passe par le centre; car (*Th. 6.*) la ligne *GB* passe par tous les points également distans des points *E* & *F*. Donc, (*Cor. 2. Déf. 6.*) elle passe aussi par le centre du cercle: ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si la ligne *GB* passe par le centre du cercle, & coupe par la moitié la corde *EF*, je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à la ligne *EF*; car puisque le point *A* (*Cor. 2, Déf. 6.*) est également distant des points *E* & *F*, la ligne droite *GB* aura dans ce cas deux points *A* & *B* également distans des extrêmités *E* & *F* de la même ligne *EF*. Donc, (*Cor. 1. Th. 6.*) la ligne *GB* sera perpendiculaire à la ligne *EF*: ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU TROISIE'ME CAS.

Si la ligne *GB* passe par le centre du cercle *A*, & si elle est en même tems perpendiculaire à la corde *EF*; je dis, que la ligne *GB* coupe la corde *EF* par la moitié en *B*; car puisque (*Cor 2. Déf. 6.*) le point *A* est également distant des extremités *E* & *F* de la corde *EF*; la corde *EF* (*Cor. 4. Th. 7.*) est coupée par la moitié par la ligne *GB* qui est supposée perpendiculaire: ce qu'il falloit démontrer

COROLLAIRE I.

Tab. 4. Fig. 1. Il suit de la premiere démonstration, que si d'un point de la circonférence du cercle *DBC*: Par exemple, du point *B*, on méne deux lignes droites, ou deux cordes à deux autres points comme *D* & *C*, qui soient coupées perpendiculairement par la moitié par deux autres lignes droites *E A* & *F A*, ces deux lignes se rencontreront dans le centre du cercle *A*; car puisque par la Démonstration premiere, le centre du cercle est dans l'une & l'autre de ces deux lignes; il faut nécessairement que le centre soit le point qui est commun à toutes les deux.

COROLLAIRE II.

Si deux circonférences de cercle ont trois points communs, elles auront aussi le meme centre, & par conséquent (*Cor. 5. Déf. 6.*) elles seront confonduës en une.

COROLLAIRE III.

Deux circonférences de cercle ne peuvent donc se rencontrer en plus de deux points ; car si elles se rencontroient en plus de deux points, elles auroient au moins trois points communs, & par conséquent (*Cor. 2.*) elles seroient confonduës en une.

COROLLAIRE IV.

Il suit de la seconde Démonstration, que les deux cordes *EF* & *HG* qui se rencontrent dans le point *B* hors du centre *A* du cercle *EGFH* ne se coupent point par la moitié ; car si le point *B* étoit le milieu des deux lignes *EF* & *GH*, en menant la ligne *AB* du centre *A*, cette ligne *AB* (*Démonstr. 2.*) seroit perpendiculaire aux deux lignes *EF* & *GH*, & ainsi il y auroit (*Cor. Th. 3*) deux lignes *EB* & *GB* menées du meme point *B* perpendiculaires dans le meme plan à la ligne *AB* ; ce qui est impossible. (*Cor. 2. Th. 7.*) Donc, il est aussi impossible que les deux cordes *EF* & *GH* se coupent par la moitié dans le point commun *B*. Tab. 4. Fig. 2.

THEOREME XIII.

De ces trois choses, premiérement, que la corde d'un cercle est coupée par la moitié par une autre ligne droite menée dans le même plan du cercle. Secondement, que l'arc tendu par cette corde est aussi coupé par le milieu par la ligne droite qui coupe la corde. Troisiémement, que cette ligne droite passe par le centre : deux étant données, la troisiéme suit nécessairement. Tab. 4. Fig. 3.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS.

Si la ligne droite *ABC* coupe par le milieu la corde *EF* en *B*, & l'arc *ECF* en *C*, je dis que la ligne *ABC* paſſera par le centre. Car (*Cor. 6. Théorême* 10.) les lignes droites *EC* & *FC* ſont égales entre elles, & par l'hypothéſe *EB* & *BF* ſont auſſi égales. Donc (*Cor. Théor. 6.*) *BC* eſt perpendiculaire à *EF*, & coupant par l'hypothéſe la corde *EF* par le milieu, elle paſſera (*Th. 6. & Cor. 2. Déf. 6.*) par le centre *A* du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS.

Si la ligne *ABC* paſſe par le centre, & coupe la corde *EF* par le milieu; je dis que les arcs *CE* & *CF* ſont égaux & que la ligne *ABC* coupe l'arc *ECF* par le milieu; car (*Cor.* 1. *Th. 6.*) *AB* eſt perpendiculaire dans le milieu de la ligne *EF*; & par conſéquent les lignes droites *EC* & *FC* (*Th.* 5) ſont égales. Donc les arcs, *CE* & *CF* ſont auſſi (*Cor. 6. Th.* 10.) égaux entre eux, & la ligne *ABC* coupe par le milieu l'arc *ECF*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DU TROISIE'ME CAS.

Si la ligne *ABC* paſſe par le centre du cercle, & coupe par le milieu l'arc *ECF*; je dis que la ligne *AC* eſt perpendiculaire dans le milieu de la corde *EF*. Car dans ce cas (*Cor.* 2. *Déf. 6.*) *AF* & *AE* ſont égales, & (*Cor. 6. Th.* 10.) *EC* & *CF* ſont auſſi égales. Donc (*Cor. Th. 6*) *AC* eſt perpendiculaire à la corde *EF* & dans le milieu qui eſt le point *B*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

De ce Théorême & du précedent, il ſuit que de ces quatre choſes. Premierement, que la corde du cercle eſt coupée perpendiculairement par une autre ligne dans le plan du cercle. Secondement, qu'elle eſt coupée par le milieu. Troiſiémement, que l'arc tendu par cette corde eſt auſſi coupé par le milieu par la ligne droite qui coupe la corde.

Quatriémement, que la secante passe par le contre du cercle, deux étant données, les autres deux suivent nécessairement.

COROLLAIRE II.

Si les cordes *AB* & *ED* sont paralléles, les arc *AE* & *BD* compris entre ces paralléles sont égaux. Car si le rayon *CF* est perpendiculaire à l'une, il est aussi perpendiculaire à l'autre (*Cor.* 1. *Th.* 8.) & par conséquent, (*Cor.* 1.) les arcs *EAF* & *DBF* sont égaux entre eux, aussi bien que les arcs *AF* & *BF*. Donc (*Ax.*) *EA* & *BD* sont aussi égaux. Tab. 4. Fig. 4.

COROLLAIRE III.

Si on suppose une tangente en *F*, savoir *FG*, comme (*Cor.* 5. *Th.* 11.) elle est perpendiculaire au rayon *CF*, elle sera aussi (*Cor.* *Th.* 9.) paralléle aux cordes *AB* & *FD*. Donc puisque (*Cor.* 1.) l'arc *AF* est égal à l'arc *FB*, & *EF* est égal à l'arc *FD*, il faut aussi conclure que la tangente & la corde étant paralléles, les arcs qui sont compris entre elles sont égaux.

Voilà ce qui regarde la rencontre des lignes droites avec les cerles; voyons maintenant ce qui appartient aux cercles qui se rencontrent.

THEOREME XIV.

Lorsque deux cercles se rencontrent dans deux points, l'un est tellement coupé en deux parties par l'autre, que l'une de ces deux parties est toute dedans, l'autre toute hors du cercle qui le coupe. Tab. 4. Fig. 5. & 6

DEMONSTRATION.

Supposons deux cercles *AFBM* & *AEBG* qui se rencontrent dans deux points *A* & *B*. Que le centre du cercle *AFBM* soit *D* & le centre du second soit *C*. Je dis que chacun de ces cercles, par exemple, *AFBM* est divisé en deux parties *AFB* & *AMB*, dont l'une *AFB* est toute entiere dedans, l'autre *AMB* toute dehors du cercle *AEBG*.

Après avoir mené les rayons *AC* & *BC* du cercle *AEBG*, joignez les centres *C* & *D* par la ligne droite *CD* qui rencontre l'autre cercle *AFBM* en *M*. Toutes les lignes droites qu'on peut mener du point *C* à l'arc *AMB* sont (*Th.* 10.) toutes plus longues que les rayons *AC* & *BC*; & au contraire toutes les lignes qu'on peut mener du même point *C* à l'arc *AFB* sont plus courtes que les mêmes rayons *AC* & *BC*. Donc (*Cor.* 4. *Déf.* 6.) l'arc *AFB* est tout entier dedans; & l'autre *AMB* tout entier dehors du cercle *AEBG*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Deux cercles ne peuvent se rencontrer que dans deux points. Ce qui a déja été conclu par le Corollaire III. du Théorême XII.

COROLLAIRE II.

Deux cercles ne peuvent se toucher que dans un point; car s'ils se touchoient dans deux points, ils se couperoient. Ce qui est contre l'hypothése.

THEOREME XV.

Tab. 4. Fig. 7. & 8. La ligne droite qui joint les centres des cercles qui se touchent, passe par le point où ils se touchent.

DEMONSTRATION.

Si les deux cercles *HEG* & *AEB* se touchent en *E*; je dis que la ligne droite qui joint leurs centres *C* & *D* passe par le point *E* où ils se touchent; car si on méne du centre de l'un de ces cercles la ligne droite *CE* au point où ils se touchent, cette ligne continuée passera par le centre de l'autre cercle *D*. Puisque ces deux cercles ne se touchent que dans un point, (*Cor.* 2. *Th.* 14.) & que tous les autres points de la circonference *AEB* sont hors du cercle *HGE*; la ligne droite *CE* (*Cor.* 4. *Def.* 6.) étant un rayon du cercle *HGE* est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *C* à la circonférence *ABE*. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 10.)

la

la ligne *CE* continuée paſſera par le centre *D* de cette circonférence, & ainſi les centres des cercles qui ſe touchent, & le point où ils ſe touchent ſont dans la même ligne droite. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà ce qui regarde la nature & la ſituation des lignes tant droites que circulaires ; & comme ces lignes circulaires ſont la meſure des angles formés par la différente ſituation des lignes droites, il faut maintenant paſſer à la meſure des angles, très-néceſſaire pour l'intelligence de ce qui appartient aux ſurfaces.

CHAPITRE TROISIEME.

De la meſure des angles rectilignes.

THEOREME XVI.

LA meſure de l'angle qui eſt au centre du cercle eſt l'arc compris entre ſes côtés. Tab. 4. Fig. 9

DEMONSTRATION.

Le Théorême préſent eſt démontré par la troiſiéme définition, & par le corollaire premier de la définition 6.

COROLLAIRE I.

Ce que l'on dit de l'égalité ou de l'inégalité des angles rectilignes, doit donc s'entendre par l'égalité ou l'inégalité des arcs compris entre les côtés de ces angles & décris de la pointe de ces angles comme du centre avec la même ouverture de compas. Par exemple, ſi du centre *B* on décrit le demi cercle *CEAD*, & qu'on méne deux rayons dont l'un *EB* ſoit perpendiculaire au diamétre *CD*, & l'autre *AB* oblique par rapport au diamétre. Les meſures des angles (*Hypp.*) droits *CBE* & *EBD* ſeront les arcs *CE* & *ED* qui ſont les deux moitiés de la demi-circonférence *CEAD*, ou bien deux quarts de la circonférence entiére; mais la mesure de l'angle obtus *CBA* sera l'arc *CEA* plus grand que le quart de cercle, & la mesure de l'angle aigu *ABD* sera l'arc *AD* plus petit que le quart de cercle; c'est pourquoi il y en a qui définissent ainsi les angles: L'angle droit est celui qui est égal au quart de cercle; l'angle obtus, qui est plus grand, & l'angle aigu, qui est plus petit que le quart de cercle. Et ainsi comme on divise le cercle en 360 degrés, ou parties égales; l'angle droit est de 90 degrés, l'aigu est de moins, & l'obtus de plus de 90 degrés.

COROLLAIRE II.

Un angle est donc égal à un autre angle lorsqu'après avoir décrit des cercles égaux de la pointe de ces angles comme du centre, les arcs compris entre leurs côtés sont égaux, & ces angles sont inégaux lorsque ces arcs sont inégaux, & cet angle est le plus grand, entre les côtés duquel est compris un plus grand arc.

THEOREME XVII.

Tab. 4. Fig. 10, & Tab. 5. Fig. 1.

L'angle qui est entre le centre, & la circonférence du cercle, est égal à la moitié de la somme des arcs compris entre ses côtés, & ceux de l'angle qui lui est opposé au sommet.

DEMONSTRATION.

Si l'angle *ABO* est entre le centre & la circonférence; je dis qu'il est égal à la moitié de la somme des arcs *AO* & *MN* compris entre ses côtés & ceux de l'angle qui lui est opposé au sommet; car si on méne par le centre *C* les lignes droites *GE* & *FH* paralléles aux lignes *MO* & *AM*; l'arc $GM = EO$, & $NH = AF$ (*Cor. 2. Theor. 13.*) & par conséquent (*Ax. 4.*) $GM + NH = AF + EO$; ainsi en ajoûtant des deux côtés $MN + FE$, $GM + MN + NH + FE$ sera $=$ (*Ax. 4.*) $MN + AF + FE + EO$; ou bien $GH + FE = MN + AO$; mais parce que (*Th. 3.*) les angles *GCH* & *FCE* sont égaux entre eux, les arcs *GH* & *FE* (*Cor. 2. Th. 16.*) sont aussi égaux, & par conséquent l'arc FE est la moitié de la somme $GH + FE$. Donc le même arc FE, ou bien (*Th.* 16.) l'angle FCE est la moitié de la somme $MN + AO$; mais (*Déf.* 5.) l'angle $ABO = AKE$, & $AKE = FCE$. Donc (*Ax.* 6.) l'angle ABO est égal à la moitié de la somme des arcs MN & AO. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Le troisiéme cas dans lequel le centre est hors de l'angle proposé, suit nécessairement des précedens. Par exemple, si dans la figure seconde, qui est la premiere de la cinquiéme table, on proposoit l'angle ABM hors duquel est le centre C, il est évident par ce qui vient d'être démontré, qu'il est égal à la moitié de la somme des arcs AM & NO, puisque (*Theor.* 1.) ABO & ABM sont pris ensemble, égaux à deux droits & par conséquent (*Th.* 16.) à la moitié de la circonférence du cercle $AMNO$; puisque aussi l'angle ABO est égal à la moitié (*Th. présent*) de la somme des arcs AO & MN, il faut que l'angle ABM soit égal à la moitié de la somme des arcs qui restent; savoir AM & NO. Donc le présent Théorême est vrai dans tous les cas.

THEOREME XVIII.

L'angle qui est à la circonférence est égal à la moitié de l'arc compris entre ses côtés, soit qu'ils coupent tous deux le cercle, soit que l'un coupe le cercle & l'autre le touche. Tab. 5. Fig. 2, & 3.

DEMONSTRATION.

Si l'angle ABO est à la circonférence du cercle, & que ses deux côtés coupent le cercle, comme dans la figure 2. de la cinquiéme table, ou bien que l'un des côtés coupe le cercle, & l'autre le touche, comme dans la figure troisiéme de la même table; je dis que cet angle ABO est toûjours égal à la moitié de l'arc AO compris entre ses côtés; car si on méne la ligne GE paralléle au côté *BA*, & qui coupe l'autre côté *BO* de l'angle *ABO*, les angles *ABO* & *GKO* (*Déf.* 5.) sont égaux ; mais (*Th.* 17.) l'angle *GKO* est égal à la moitié de la somme des arcs *GO* & *BE*, & par conséquent (*Ax.* 4. & 6.) égal à la moitié de la somme des arcs *GO* & *XG*, puisque (*Cor.* 2. & 3. *Th.* 13.) les arcs *BE* & *XG* sont égaux entre eux. Donc l'angle *ABO* est égal à la moitié de la somme des arcs *GO XG*, ou bien à la moitié de l'arc *XGO* compris entre les côtés du même angle *ABO* qui est à la circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Tab. 5. Fig. 4. Il suit de ce qui vient d'être démontré, que si l'un des côtés de l'angle *ABO* qui est à la circonférence coupe le cercle, comme le côté *BO* ; l'autre *AB* au contraire ne coupe & ne touche point le cercle, en continuant le côté *AB* jusques en *X*, l'angle *XBO* sera égal à la moitié de l'arc *XO*, & par conséquent, comme (*Th.* 1.) les angles *XBO* & *ABO* équivalent à deux droits, qui sont égaux (*Cor.* 1. *Th.* 16.) à la moitié de la circonférence *BXO*, ou bien à la moitié de la somme des arcs *XO*, *XB*, *BO*, il faut que l'angle *ABO* soit aussi égal à la moitié de la somme des arcs *BO* & *XB* tendus par les côtés *BO* & *AB* continués jusques en *X*.

COROLLAIRE II.

Tab. 5. Fig. 5. Il suit aussi que les angles *BFC*, & tous ceux qui étant à la circonférence du cercle sont appuiés sur le même arc, sont (*Ax.* 6.) égaux ; car (*Th. pr.*) ils sont tous égaux à la moitié de l'arc *BC*.

COROLLAIRE III.

Fig. 6. L'angle *BFC* dans le demi cercle *BHFC* est un angle droit ; car étant appuié sur l'autre demi cercle *BGC*, il est égal à la moitié de cet arc ; c'est-à-dire au quart du cercle, & par conséquent (*Cor.* 1. *Th.* 16.) c'est un angle droit.

COROLLAIRE IV.

L'angle *HFC* eſt donc obtus, & l'angle *GFC* aigu.

COROLLAIRE V.

Enfin l'angle qui eſt au centre eſt le double de celui qui eſt à la circonférence & appuié ſur le même arc de cercle ; car l'angle qui eſt au centre eſt égal (*Th.* 16.) à l'arc entier, & celui qui eſt à la circonférence n'eſt égal (*Th. préſent*) qu'à la moitié du même arc.

Outre les cas démontrés par le préſent Théorême & ſes Corollaires, il y en a deux autres dans leſquels la pointe de l'angle étant à la circonférence, les deux côtés ſont hors du cercle, de telle maniere que l'un des côtés touche ou coupe le cercle, ou bien aucun des côtés de l'angle ne touche & ne coupe le cercle ; mais ces deux cas ſuivent néceſſairement de ceux qui ont été démontrés.

THEOREME XIX.

L'angle qui eſt hors du cercle de quelque maniere que ſes côtés prolongés à l'infini rencontrent le même cercle, eſt égal à la moitié de la différence des arcs, ſavoir de l'arc concave, & du convexe compris entre ſes côtés. Tab. 5. Fig. 7. & Fig. 1. Tab. 6.

DEMONSTRATION.

Si l'angle *ABO* eſt hors de la circonférence du cercle, ſoit que les côtés *AB* & *BO* coupent tous deux le cercle, comme dans la figure 7, ſoit que l'un touche & l'autre coupe le cercle, comme dans la figure 8 ; ſoit enfin que les deux côtés de l'angle touchent le cercle, comme dans la premiere figure de la table 6. Je dis que l'angle *ABO* eſt égal à la moitié de la difference dont l'arc concave *AGO* ſurpaſſe l'arc convexe *HE*. Car ſi on méne la ligne *EG* paralléle au côté *AB*, l'angle *GEX* (*Th.* 18.) ſera égal à la moitié de l'arc *GO*, mais *GO* eſt la difference dont l'arc *AGO* ſurpaſſe l'arc *AG*, ou bien (*Cor.* 2. *Th.* 13.) l'arc *HE* dont l'angle *GEX* eſt égal à la moitié de la difference dont l'arc *AGO* ſurpaſſe l'arc *HE*, & l'angle *GEX* eſt égal (*Déf.* 5.) à l'angle *ABO*, parce que (*Hyp.*) *EG* eſt paralléle à *BA*. Donc (*Ax.* 6.) l'angle *ABO* eſt égal à la moitié de la difference dont l'arc *AGO* ſurpaſſe l'arc *HE*. Ce qu'il falloit démontrer.

Voilà tout ce qui regarde la meſure des angles ; paſſons maintenant aux ſurfaces.

LIVRE SECOND.

Des ſurfaces.

DEFINITION VII.

Tab. 6. Fig. 2. LA ſurface eſt une étenduë en long & large ſeulement; telles ſont les extrémités des corps que nous voions, & touchons, puiſqu'un corps ne peut pénétrer un autre corps. On appelle *plan* ou *ſurface plane* celle que tous les points d'une ligne droite touchent néceſſairement.

COROLLAIRE I.

Si donc la ligne droite *AC* eſt dans le plan *DE*, cette même ligne continuée ſera toute entiere dans le même plan ; c'eſt pourquoi l'on dit qu'il ne peut pas ſe faire qu'une partie de la ligne droite *AC* ſoit dans le plan *DE*, l'autre *CB* hors du même plan.

COROLLAIRE II.

Comme la ligne droite (*Déf.* 1.) eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point à un autre, de même la ſurface plane eſt la plus petite de toutes celles qui ont les mêmes bornes.

COROLLAIRE III.

Il ne peut donc y avoir qu'une ſurface plane entre les mêmes bornes.

COROLLAIRE IV.

Comme (*Cor.* 2. *Déf.* 1.) deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace, de même deux plans; autrement il y auroit plusieurs plans entre les mêmes bornes; ce qui est impossible par le Corollaire troisiéme.

COROLLAIRE. V.

Donc deux lignes droites qui se coupent sont dans le même plan.

THEOREME XX.

Si deux plans *AB* & *CD* se coupent, leur intersection commune est premiérement une ligne; secondement une ligne droite. Tab. 6. Fig. 3.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si l'intersection de ces deux plans étoit de quelque largeur, comme par exemple, *MNPQ*, supposons que la ligne droite *RS* est continuée dans les parties *Y* & *T* des plans *AB* & *CD* : comme par l'hypothése *MNPQ* est la partie commune des plans *AB* & *CD*, la ligne droite *RS* continuée dans ces deux plans iroit de *S* en *Y* dans le plan *AB* & de *S* en *T* dans le plan *CD*, & ainsi les lignes *RSY* & *RST* seroient toutes deux droites, & auroient le segment *RS* commun; ce qui est impossible (*Cor.* 1. *Th.* 2.) donc il est aussi impossible que la section de ces deux plans ne soit pas une ligne: Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si la ligne *EF* qui est la section des plans *AB*, *CD*, n'étoit pas une ligne droite, on pourroit mener des extrémités *E* & *F* deux lignes droites; l'une *EGF* dans le plan *AB*, & l'autre *EHF* dans le plan *CD*, & pour lors entre ces deux points *E* & *F* il y auroit deux lignes droites; ce qui est impossible, (*Cor.* 1. *Déf.* 1.) & par Tab. 6. Fig. 4.

conſéquent il eſt auſſi impoſſible que l'interſection des plans *AB* & *CD* ne ſoit pas une ligne droite : ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Comme les lignes droites (*Cor.* 1. *Th.* 2.) de même les plans qui ſe touchent dans quelques points ſe touchent dans tous leurs points.

COROLLAIRE II.

Les plans ne peuvent avoir un ſegment commun non plus que les lignes.

DEFINITION VIII.

Tab. 6. Fig. 4. L'angle formé par un plan incliné ſur un autre plan eſt le même que celui des lignes menées ſur ces mêmes plans à leur ſection commune. Par exemple, ſi les lignes droites *AL* & *DK* dans les plans *AB* & *DC* ſont perpendiculaires à la ſection commune *EF*, leurs angles *AEK*, *KEL*, *LED*, *DEA* ſont les angles de ces plans, formés par les perpendiculaires menées ſur ces plans à leur ſection commune *EF*.

COROLLAIRE I.

Comme une lignedroite (*Th.* 1.)qui coupe une autre ligne droite, forme des angles droits ou égaux à deux droits; de même le plan *AB* coupant le plan *CD* en *EF* forme deux angles *AEK* & *KEL*, ou tous deux droits ou égaux pris enſemble, à deux droits.

COROLLAIRE II.

Si un plan forme deux angles droits ou égaux à deux droits avec un autre plan ; il faut que cet autre plan ſoit un ſeul & même plan.

COR-

COROLLAIRE III.

Tous les angles qui peuvent être formés par des plans autour de leur ſection commune, ſont égaux pris enſemble à quatre angles droits.

COROLLAIRE IV.

Les angles formés par des plans qui ſe coupent, comme les angles *AEK*, *DEL*; ou bien *AED* & *KEL* oppoſés au ſommet ſont égaux.

COROLLAIRE V.

Lorſque les angles oppoſés au ſommet formés par quatre plans, qui ſe rencontrent dans la même ſection, ſont égaux, les deux plans oppoſés ſont diſpoſés en ligne droite.

DEFINITION IX.

La ligne droite *AB* eſt perpendiculaire au plan *CCC*, lorſqu'elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes *BC*, & forme avec elles des angles droits dans le plan propoſé. Tab. 6. Fig. 5.

COROLLAIRE.

On ne peut donc mener du même point *A* qu'une ſeule ligne perpendiculaire ſur le même plan *MN*; car ſi on pouvoit mener du point *A* deux perpendiculaires *AD* & *AC* ſur le plan *MN*, les angles *ADC* & *ACD*, par la Définition preſente, ſeroient deux angles droits, ce qui eſt impoſſible. (*Cor.* 2. *Th.* 7.) Donc, il eſt auſſi impoſſible que l'on méne plus d'une ligne perpendiculaire du même point ſur le même plan. Tab. 6. Fig. 6. & Tab. 7. Fig. 1.

DEFINITION X.

Les plans également diſtans dans toutes leurs parties ſont appellés Paralléles.

COROLLAIRE.

Si les plans paralléles ſont coupés par un troiſiéme, leurs sections seront également distantes.

Voilà ce qui regarde la nature des surfaces planes ; *il faut maintenant examiner leurs différentes figures : il y* en a de trois sortes ; savoir, les rectilignes, curvilignes & mixtes : les rectilignes sont celles qui sont terminées par des lignes droites ; les curvilignes par des lignes courbes ; les mixtes par des lignes droites & par des courbes : mais nous ne parlerons, à l'exemple d'Euclide, que des rectilignes & des circulaires qui sont une espéce de figures curvilignes.

Comme la figure rectiligne a autant d'angles que de côtés, on peut la diviser, & par rapport à ses angles, & par rapport à ses côtés : mais comme toutes les figures peuvent se réduire au triangle en joignant leurs angles par des lignes droites, ou bien en menant d'un point de la figure des lignes droites à tous les angles ; nous examinerons principalement ce qui regarde le triangle, & pour le bien connoître nous parlerons du parallélograme ; c'est pourquoi le premier Chapitre sera des triangles *rectilignes, le second des parallélogrames.*

CHAPITRE PREMIER.

Des triangles rectilignes.

DEFINITION XI.

Tab. 7. Fig. 2. LA figure qui a trois côtés, comme la figure *ABC* est appellée *triangle* : si ses trois côtés sont égaux, on l'appelle *équilateral* ; s'il n'y a que deux côtés égaux, *isoscéle* ; si ses trois côtés sont inégaux, *scaléne* ; si un de ses angles est droit & les deux autres aigus, on le nomme *rectangle* ; si un angle est obtus, & les deux autres aigus, *ambligone* ; & si ses trois angles sont aigus, *oxigone.*

THEOREME XXI.

Tab. 7. Fig. 3. Les trois angles d'un triangle sont toûjours, pris enſemble, égaux à deux droits.

DEMONSTRATION.

Si on décrit un cercle qui paſſe (*Cor.* 8. *Défin.* 6.) par les trois angles du triangle *ABC*, chaque angle ſera égal à la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, (*Th.* 18.) & par conſéquent ces trois angles ſeront égaux à la moitié de la circonférence du cercle *ABC*, & par conſéquent (*Cor.* 1. *Th.* 16.) ils ſont égaux à deux droits : Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Les trois angles d'un triangle peuvent être trois angles aigus : mais il ne peut y en avoir qu'un droit ; ou un obtus, & jamais un droit avec un obtus.

COROLLAIRE II.

Si l'un des angles d'un triangle, eſt droit, les deux autres pris enſemble ſont égaux à un droit.

COROLLAIRE III.

Les trois angles d'un triangle ſont égaux pris enſemble, aux trois angles d'un autre triangle.

COROLLAIRE IV.

Si dans un triangle il y a deux angles égaux enſemble, ou ſéparément, à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme qui reſtera, ſera auſſi égal au troiſiéme de cet autre triangle.

COROLLAIRE V.

Si on prolonge le côté *AC* juſques en *O*, l'angle externe *BCO* ſera égal aux deux internes oppoſés *A* & *B* pris enſemble ; car, puiſque (*Th.* 1.) les angles *BCA* & *BCO* ſont égaux à deux droits, & que (*Theor. preſent*) les trois angles d'un triangle équivalent auſſi à deux angles droits, les angles *BCA* & *BCO* ſont (*Ax.* 6.) Tab. 7. Fig. 5.

égaux aux trois angles du triangle *ABC*. Donc, en ôtant l'angle commun *BCA*, *BCO* sera (*Ax. 5.*) égal aux deux internes opposés *A* & *B* pris ensemble.

COROLLAIRE VI.

Donc, l'angle externe est toûjours plus grand qu'un des angles internes opposés.

SCOLIE.

Par le moyen du Théorême present, on peut connoître combien les angles internes & externes, d'une figure quelconque; font d'angles droits, en la réduisant à des triangles. Premiérement, on connoîtra que les angles internes d'une figure rectiligne font deux fois autant d'angles droits, *exceptés quatre, qu'il y a de côtés* dans la figure, & par conséquent que toutes les figures rectilignes qui ont le même nombre de côtés, ont aussi la même somme d'angles droits. Secondement, que tous les angles externes, d'une figure rectiligne, font quatre angles droits, ou bien égaux à quatre droits, & par conséquent que toutes les figures rectilignes ont des angles externes qui font la même somme d'angles droits.

THEOREME XXII.

Premiérement, dans un triangle les côtés égaux sont opposés à des angles égaux.

Secondement, les angles égaux ont des côtés opposés, qui sont aussi égaux.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Tab. 7. Fig. 4. Supposons qu'un cercle est décrit autour du triangle *ABC*, si les côtés *AB* & *BC* sont égaux, les arcs *AB* & *BC* sont aussi égaux, (*Cor. 6. Th. 10.*) donc les angles *C* & *A* opposés à ces côtés (*Th. 18.*) sont égaux entr'eux : ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si les angles *C* & *A* sont égaux, les arcs *AB* & *BC* (*Th.* 18.) sont aussi égaux. Donc, (*Cor. 6. Th.* 10.) leurs cordes, ou bien les côtés *AB* & *BC* sont aussi égaux : ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il suit de la premiére partie, qu'un triangle isoscéle ; c'est-à-dire, qui a deux côtés égaux, a aussi les deux angles opposés à ses côtés, égaux.

COROLLAIRE II.

Le triangle équilateral, c'est-à-dire, dont tous les côtés sont égaux, a aussi tous ses angles égaux.

COROLLAIRE III.

Il suit de la seconde partie, que le triangle qui a deux angles égaux, est isoscéle ; c'est-à-dire, a deux côtés égaux.

COROLLAIRE IV.

Le triangle, qui a tous ses angles égaux, est aussi équilateral ; c'est-à-dire, a tous ses côtez égaux.

THEOREME XXIII.

Premiérement, dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. Tab. 7. Fig. 4.

Secondement, le plus grand angle est aussi opposé au plus grand côté.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si autour du triangle *ABC* est décrit un cercle de la maniére marquée dans le Corollaire 8. de la définition 6, & que le côté *AB* soit plus grand que *BC*; l'arc *AB* (*Cor.* 5. *Theor.* 10.) sera plus grand que l'arc *BC*. Donc (*Th.* 18.) l'angle opposé au plus grand côté *AB*, sera aussi plus grand, que l'angle opposé au côté *BC*, qui est plus petit. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si l'angle *C* est plus grand que l'angle *A*, l'arc *AB* sera (*Th.* 18.) plus grand que l'arc *BC*. Donc le côté *AB* (*Cor.* 4. *Th.* 10.) sera plus grand que le côté *BC*. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXIV.

Premiérement, si de deux triangles dont l'un a deux côtés égaux à deux côtés de l'autre, l'angle compris entre les deux côtés égaux de l'un est plus grand que l'angle compris entre les deux côtés de l'autre; la base de l'un sera aussi plus grande que la base de l'autre.

Secondement, si l'un de ces triangles a une base plus grande que l'autre, l'angle compris entre ses côtés égaux aux côtés de l'autre triangle, sera aussi plus grand que l'angle de cet autre triangle, compris entre ces mêmes côtés.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Tab. 7. Fig. 5. & 6. Si les côtés *CE* & *CF* du triangle *EFC* sont égaux aux deux côtés *EC* & *CA* du triangle *ECA*, & que l'angle *ECA* soit plus grand que l'angle *ECF*, je dis que la base *EA* sera aussi plus grande que la base *EF*; car si on décrit du point *C* un arc de cercle dont *CA* soit un rayon, & qui rencontre le côté *EC* dans le point *H*. Puisque, par l'hypothése, *CA* & *CF* sont égaux, le même arc (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) passera par le point *F*; & comme, par l'hypothése, l'angle *ECA* est plus grand que l'angle *ECF*, l'arc *AH* (*Th.* 16.) sera aussi plus grand que l'arc *FH*. Donc (*Part.* 2. *Th.* 10.) la base *EA* sera plus grande que la base *EF*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si la base *EA* est plus grande que la base *EF*, je dis que l'angle *ECA* est aussi plus grand que l'angle *ECF*: car

(*Partie* 2. *Th.* 7.) Si *EA* eſt plus grand que *EF*, l'arc *HA* eſt plus grand que l'arc *HF*. Donc (*Th.* 16.) l'angle *ECA* eſt plus grand que l'angle *ECF*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si donc deux triangles ont chacun un angle égal à l'angle de l'autre, & que ces angles égaux ſoient auſſi compris entre des côtés égaux; la baſe de l'un ſera auſſi égale à la baſe de l'autre, & un de ces triangles ſera en tout égal à l'autre.

COROLLAIRE II.

Si la baſe de l'un eſt égale à la baſe de l'autre, les angles oppoſés à ces baſes & compris entre des côtés égaux, ſeront auſſi de la même grandeur.

COROLLAIRE III.

Les triangles qui ont des côtés égaux, ont auſſi des angles égaux; mais les triangles qui ont des angles égaux, n'ont pas toûjours des côtés égaux; car les triangles *ECA* & *BCF* ont des angles égaux, (*Déf.* 5.) puiſque les lignes *EA* & *BF* ſont paralléles, cependant leurs côtés ne ſont pas égaux. Tab. 7. Fig. 7.

Pour mieux connoître ce qui regarde les triangles, il faut examiner ce qui appartient aux Parallélogrames.

CHAPITRE SECOND.

Des Parallélogrames.

DEFINITION XII.

ON appelle *Parallélograme* toute figure de quatre côtés, dont les côtés oppoſés ſont paralléles, comme ceux de la figure *A*. Les autres figures de quatre côtés, dont les côtés oppoſés ne ſont point paralléles, ſont appellées *trapézes*. Tab. 7. Fig. 8.

Si tous les angles du parallélograme sont droits, on le nomme *rectangle* : Si tous ses angles ne sont pas des angles droits, on l'appelle *rhomboïde*.

Si tous les côtés du Parallélograme rectangle sont égaux, on le nomme *quarré* ; si tous ses côtés ne sont pas égaux on l'appelle *rectangle*.

La ligne droite tirée d'un angle du parallélograme, à l'angle opposé, est appellée *diagonale*.

DEFINITION XIII.

Les figures, qui ont plus de quatre côtés, sont appellées indéfiniment *Poligones*, & on les distingue par le nombre des côtés : la figure de 5 côtés se nomme Pentagone.

De 6,	Héxagone.
De 7,	Heptagone.
De 8,	Octogone.
De 9,	Ennéagone.
De 10,	Décagone.
De 11,	Endécagone.
De 12,	Dodécagone.
De 1000 ;	Kiliogone.
De 10000,	Myriogone.

THEOREME XXV.

Les lignes comprises entre des lignes paralléles & égales, sont aussi paralléles & égales.

DEMONSTRATION.

Tab. 7. Fig. 9. Si les lignes *AB* & *CD* sont paralléles & égales, je dis que les lignes *AC* & *BD* sont aussi paralléles & égales ; car en menant la ligne *BC*, les angles *ABC* & *BCD* (*Th.* 8.) sont égaux, parce que *AB* & *CD*, par l'hypothése, sont paralléles. Donc puisque *AB* & *CD* sont aussi égales, & que le côté *BC* est commun aux deux triangles *ABC* & *BCD*, ces deux triangles auront chacun deux côtés égaux à deux côtés ; savoir *AB* & *BC* égaux à *DC* & *BC*, & les angles compris

compris entre ces côtés sont aussi égaux, puisque *ABC* est égal à *DCB*, & ainsi (*Cor.* 1. *Th.* 24.) leurs bases *AC* & *BD* sont aussi égales. Donc *AC* & *BD* sont parallèles & égales. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXVI.

Premiérement, la figure de quatre côtés, dont les côtés opposés sont égaux, est un Parallélograme. Tab. 7. Fig. 9.

Secondement, les côtés opposés du Parallélograme, sont égaux.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si les côtés opposés de la figure *ABCD* sont égaux; savoir, *AB* égal *CD* & *AC* égal *BD*, je dis que cette figure est un parallélograme; car en menant la ligne *CB*, les triangles *CAB* & *CBD* sont équilateraux; donc ils sont aussi (*Cor.* 3. *Th.* 24.) équiangles; c'est-à-dire, que l'angle *ABC* est égal à l'angle *BCD*, & l'angle *ACB* égal à l'angle *DBC*. Donc (*Th.* 9.) *AC* & *BD*, comme *AB* & *CD* sont paralléles, & par conséquent (*Déf.* 12.) la figure *ABCD* est un parallélograme. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si la figure *ABDC* est un parallélograme, les côtés opposés *AB* & *CD* sont égaux; car si l'un des deux, par exemple, *CD* étoit plus grand que l'autre *AB*, & que *DO* fut égal à *AB*, pour lors *AB* & *DO* seroient, par l'hypothése, deux lignes paralléles & égales. Donc (*Th.* 25.) *AO* & *BD* seroient aussi paralléles. Mais par l'hypothése, *AC* & *BD* sont aussi paralléles. Donc (*Cor. Def.* 5.) *AC* & *AO* seroient aussi paralléles. Ce qui est (*Cor.* 2. *Th.* 8.) impossible. Donc il est aussi impossible que l'une des deux paralléles soit plus grande que l'autre, & par conséquent elles sont nécessairement égales. On peut de même prouver que *AC* & *BD* sont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Tab. 8. Fig. 1. Deux lignes paralléles quelques courtes qu'elles ſoient, ſont par tout également diſtantes. Car ſi on méne des points *A* & *B* de la ligne *AB*, deux perpendiculaires à l'autre ligne paralléle *AB*, ces deux lignes (*Cor. Th.* 9.) ſeront auſſi paralléles. Donc *ABDC* ſera un parallélograme, & par conſéquent (*Th. préſent*) *AC* & *BD* ſeront égales. On peut démontrer la même choſe de toutes les autres lignes perpendiculaires qui peuvent être menées de l'une de ces paralléles *AB* à l'autre *CD*. Donc ces paralléles ſont par tout également diſtantes.

CD

COROLLAIRE II.

Il ſuit de là ce qui a déja été conclu par le Corollaire 2. du Théorême 8. ſavoir, que deux paralléles prolongées à l'infini ne ſe rencontrent jamais.

COROLAIRE III.

Tab. 8. Fig. 2. Il ſuit auſſi que le parallélograme *ABCD* eſt coupé par la moitié par la diagonale *CB*. Car (*Th. préſent*) *AC* étant égal à *BD* & *AB* égal à *CD*, & *CB* étant un côté commun aux deux triangles *ABC* & *BCD*, ces deux triangles ſont équilatéraux, & par conſéquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux entre eux.

THEOREME XXVII.

Tab. 8. Fig. 3. Premiérement, les parallélogrames qui ſont ſur la même baſe & entre les mêmes paralléles ſont égaux.

Secondement, ceux qui ayant la même baſe ſont égaux, ſont entre les mêmes paralléles.

Troiſiémement, ceux qui ſont égaux & entre les mêmes paralléles, ont auſſi la même baſe.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si entre les mêmes paralléles *AH* & *EO* & ſur la même baſe *EF* il y a deux parallélogrames *AEFK* &

ECHF que je nommerai dans la ſuite pour abréger, *AF* & *EH*; je dis que ces deux parallélogrames ſont égaux. Car (*Partie* 2. *Th.* 26.) *AK* eſt égal à *EF* & *EF* = *HC*. Donc (*Ax.* 4.) en ajoûtant la partie commune *CK*, *AC* ſera = *KH*; mais par la partie ſeconde du Théorême 26. *AE* = *KF* & *EC* = *FH*. Donc les triangles *AEC* & *KFH* ſont équilateraux & (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux. Donc en ôtant le triangle commun *KGC*, les trapézes qui reſteront *AEGK* & *CGFH* (*Ax* 5.) ſeront égaux. Donc en ajoûtant des deux côtés le triangle commun *EGF*, les parallélogrames *AF* & *EH* (*Ax.*4.) ſeront égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si ſur la même baſe *EF* il y a deux parallélogrames égaux *AEFK* & *CEFH*, je dis que ces deux parallélogrames ſont entre les mêmes paralléles; car ſi la ligne *AK* prolongée rencontroit les côtés *EP* & *FQ* en *PQ* au-deſſus ou au-deſſous de *CH*, les parallélogrames (*Part.* 1.) *AEFK* & *EFPQ* ſeroient auſſi égaux, & ainſi (*Ax.* 6.) les parallélogrames *PEFQ* & *CEFH* ſeroient égaux, & le tout égal à ſa partie, ce qui eſt impoſſible par l'axiome ſecond. Donc il eſt auſſi impoſſible que *AK* prolongé rencontre les côtés *EP* & *FQ* au-deſſus ou au-deſſous de *CH*. Donc elle rencontrera ces deux côtés en *CH*, & par conſéquent les deux parallélogrames égaux ſur la même baſe, ſont auſſi entre les mêmes paralléles. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 8. Fig. 3.

DEONSTRATION DE LA TROISIEME PARTIE.

Si entre les lignes paralléles *AL* & *EO* il y a deux parallélogrames égaux *AF* & *CO*, je dis que s'ils n'ont pas la même baſe, leurs baſes *EF* & *GO* ſont du moins égales. Car ſi l'une, par exemple *GO* étoit plus grande que l'autre *EF*, & que *GP* fût = *EF*, le parallélograme *CGPH*, par la partie premiére, ſeroit égal au parallélograme *AKEF* qui eſt égal, par l'hypothéſe, au parallélogra- Tab. 8. Fig. 4.

me *CGOL*, & pour lors le tout feroit égal à fa partie, ce qui eft (*Ax.* 2.) impoffible. Donc il eft auffi impoffible que les bafes *EF* & *GO* ne foient pas égales. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Puifque (*Cor.* 3. *Th.* 26.) les triangles font les moitiés des parallélogrames qui ont les mêmes bafes & qui font entre les mêmes paralléles; il fuit de la premiére partie, que les triangles qui ont la même bafe, ou des bafes égales, & & qui font entre les mêmes paralléles font égaux. Comme on le peut démontrer en ajoûtant aux parallélogrames, dont on vient de parler, des lignes diagonales.

COROLLAIRE II.

Il fuit auffi de la feconde partie que les triangles qui ont la même bafe, ou des bafes égales, & qui font égaux, font entre les mêmes paralléles.

COROLLAIRE III.

Il fuit de la troifiéme partie que les triangles qui font égaux & entre les mêmes paralléles, ont la même bafe, ou des bafes égales.

SCOLIE.

Tab. 8. Fig. 5. Si le côté *AE* du parallélograme rectangle *AEFK* eft tranfporté perpendiculairement par toute la ligne *EF*, ou bien la ligne *EF* par le côté *AE*, le rectangle *AEFK* fera produit par ce mouvement. C'eft pourquoi on dit que le rectangle eft formé en multipliant un de fes côtés par un de ceux qui lui font contigus; par exemple, fi *EF* eft de trois piéds & *AE* de quatre en multipliant trois par quatre, le produit fera douze piéds quarrés qui font l'aire du rectangle *AEFK*.

Tab. 8. Fig. 8. Il fuit de là & du théorême préfent, que l'aire d'un parallélograme quelconque, par exemple, du parallélograme *AEFK* eft égal au produit de fa bafe *EF* par fa hauteur *AE* qui est perpendiculaire entre les paralléles *AH* & *EO*; car l'aire du rectangle *AEFK* est égale au parallélograme *EFHC* par le théorême présent; mais le parallélograme rectangle *AEFK* est produit par sa base *EF* multipliée par sa hauteur. Donc l'aire d'un parallélograme quelconque est égale à sa base multipliée par sa hauteur perpendiculaire entre ses paralléles.

Puisque (*Cor.* 3. *Th.* 26.) le triangle est la moitié du parallélograme qui a la même base & la même hauteur, l'aire du triangle est égale à sa base multipliée par la moitié de sa hauteur; c'est-à-dire, par la moitié de la perpendiculaire menée de la pointe de l'angle à sa base, ou bien l'aire du triangle est égale à sa hauteur multipliée par la moitié de sa base.

Comme les proportions sont absolument nécessaires pour l'intelligence de ce qui suit, il faut passer au troisiéme Livre.

LIVRE TROISIEME.

Des proportions en général.

DEFINITION XIV.

On appelle *raison* l'égalité ou l'inégalité qui se trouve entre les grandeurs que l'on compare. Si on la considére par rapport à la différence dont la plus grande surpasse la plus petite, on l'appelle *raison arithmétique* : Par exemple, si on considére que 6 surpasse 2, ou que 2 est surpassé par 6 de quatre unités, l'inégalité de ces nombres ainsi considerée est appellée raison arithmétique. Si l'on considére l'inégalité de ces quantités du côté de la maniére dont la plus grande contient la plus petite, ou bien la plus petite est contenuë dans la plus grande; on la nomme *raison géométrique* : Par exemple, si on considére que six contient deux, trois fois; ou bien que deux ſont contenus trois fois dans ſix; cette inégalité ainſi conſiderée eſt appellée *raiſon géométrique*, de laquelle nous allons parler.

COROLLAIRE.

Il ſuit de là qu'il n'y a aucun rapport qu'entre les grandeurs homogénes; c'eſt-à-dire de même eſpéce, comme entre une ligne & une ligne, une ſurface & une autre ſurface, entre un corps & un autre corps; car il n'y a que les quantités homogénes qui ſoient contenuës les unes dans les autres.

DEFINITION XV.

La grandeur que l'on compare eſt appellée *antécédent*; celle avec laquelle on la compare ſe nomme *conſequent*: Par exemple, ſi on compare *A* avec *B*, *A* eſt l'antécédent & *B* le conſéquent; & *A* & *B* ſont les termes de cette *raiſon*.

COROLLAIRE.

Comme l'on peut comparer *B* avec *A* auſſi bien que *A* avec *B*, la même quantité peut être tantôt l'antécédent, tantôt le conſéquent.

DEFINITION XVI.

Lorſque l'antécédent & le conſéquent d'une raiſon ſont égaux, on appelle ce rapport, *raiſon d'égalité*; s'ils ſont inégaux, on la nomme *raiſon d'inégalité*.

DEFINITION XVII.

Deux raiſons ſont appellées ſemblables, égales, les mêmes, lorſque l'antécédent de l'une contient ſon conſéquent, comme l'antécédent de l'autre contient le ſien.

COROLLAIRE I.

Deux grandeurs égales ont le même rapport à une même troiſiéme.

COROLLAIRE II.

Les grandeurs qui ont le même rapport à une troisiéme sont égales.

DEFINITION XVIII.

Lorsque l'antecédent d'une raison ne contient pas ou n'est pas contenu dans son conséquent, comme l'antecédent de l'autre contient ou est contenu dans le sien ; on appelle ces raisons *inégales*, *dissemblables*, *differentes*.....

DEFINITION XIX.

On appelle *proportion* l'égalité de deux raisons ; c'est pourquoi, si les rapports de A à B, & de C à D sont égaux, on nomme leurs termes, ou les grandeurs A, B, C, D, proportionnelles, & on l'exprime ainsi ; A est à B comme C est à D, ce que l'on écrit de la maniere suivante $A \cdot B :: C \cdot D$.

AXIOME IX.

Les choses que l'on multiplie également restent dans le même rapport ; ainsi si les rapports de A à B & de C à D sont semblables, en les multipliant également ils resteront les mêmes, & par conséquent $A \cdot B :: 2A \cdot 2B$ & $C \cdot D :: 2C \cdot 2D$ &c. & $2A \cdot 2B :: 2C \cdot 2D$.

COROLLAIRE I.

Si on multiplie donc deux ou plusieurs grandeurs par la même, les produits seront entr'eux comme les grandeurs multipliées.

COROLLAIRE II.

Les parallélogrames BA & AD de la même hauteur AC, sont entr'eux comme les bases BC & DC. Tab. 8. Fig. 6.

LEMME PREMIER.

Des Proportions.

Tab. 8. Fig. 7 Premiérement, si *AD· DB :: CD· DE*, les parallélogrames *AE* & *CB* seront égaux.

Secondement, si les parallélogrames *AE* & *CB* sont égaux *AD· DB :: CD· DE·*

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

AE· (*Cor. 2. Ax. 9.*) *DH :: AD· DB·* (*l'Hypothése*) :: *CD· DE* (*Cor. 2. Ax. 9.*) :: *CB· DH·* Donc (*Cor. 2. Déf. 17.*) *AE* = *CB*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Puisque par l'hypothése, *AE* = *CB* (*Cor. 1. Déf. 17.*) *AE· DH :: CB· DH·* Mais (*Cor. 2. Ax. 9.*) *AE· DH :: AD· DB* & *CB· DH :: CD· DE*. Donc, *AD· DB :: CD· DE·* Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit de là, que le parallélograme formé par les extrêmes de quatre termes proportionnels, est égal au parallélograme formé par les moyens.

De ce Lemme suivent sept régles sur lesquelles toute la dialectique des Mathématiciens est presque entiérement fondée.

PREMIERE REGLE.

Si *AD· DB :: CD· DE·* cette conclusion est bonne; Tab. 8. Fig. 7. *invertendo* : *DB· AD :: DE· CD·*

DEMONSTRATION.

Puisque par l'hypothése, *AD· DB :: CD· DE· AE* (*part. 1. Lem. 1.*) sera = *CB·* Donc (*Cor. 1. Déf. 17.*) *DH· AE :: DH. CB*. Mais (*Cor. 2. Ax. 9.*) *DH· AE :: DB· AD* & *DH· CB :: DE· CD·* Donc, *DB· AD :: DE· CD·* Ce qu'il falloit démontrer.

SEC-

SECONDE REGLE.

Si *AD· CD :: DB· DE*, cette conclusion est juste : *alternando*, *AD· DB :: CD· DE.*

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hypothése*) *AD· CD :: DB· DE*, *AE* sera (*Lem.* 1.) = *CB·* Donc, (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE DH :: CB· DH*; Mais, (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AE· DH :: AD· DB·* & *CB· DH :: CD· DE·* Donc. *AD· DB :: CD· DE·* Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIEME REGLE.

Si *AD· DB :: CD· DE*, cette conclusion est bonne. Donc, *componendo*, *AD + DB· DB :: CD + DE· DE·*

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hypothése.*) *AD· DB :: CD· DE*; *AE* sera (*Lem.* 1.) = *CB*. Donc, en ajoûtant de chaque côté *DH*, *AH* (*Ax.* 4.) sera = *CH*, & par conséquent (*Cor.* 1. *Déf* 17.) *AH· DH :: CH· DH·* mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AH· DH :: AB· DB*, & *CH· DH :: CE· DE·* Donc, *AB· DB :: CE· DE*, c'est-à-dire, *AD + DB· DB :: CD + DE· DE.* Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 8. Fig. 7.

REGLE QUATRIEME.

Si *AB· DB :: CE· DE·* Donc, *dividendo*, *AB — DB· DB :: CE — DE· DE.*

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hypothése.*) *AB· DB :: CE· DE.* Donc *AB· EH :: CE· BH*, & par conséquent (*Lem.* 1.) *AH = CH*. Donc, en ôtant de chaque côté *DH*, il restera (*Ax.* 5.) *AE = CB*, & ainsi *AE· DH :: AD· DB*, & *CB· DH :: CD· DE·* Donc, *AD· DB :: CD· DE*, ou bien *AB — DB· DB :: CE — DE· DE.* Ce qu'il falloit démontrer.

REGLE CINQUIEME.

Si *AB·DB* :: *CE· DE*. Donc, *convertendo*, *AB· AD* :: *CE· CD*.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hypothése*) *AB· DB* :: *CE·DE*. Donc (*Lem.* 1.) comme dans la Démonstration précedente, *AH* est $=$ *CH*, & en ôtant de chaque côté *DH*, *AE* sera (*Ax.* 5.) $=$ *CB*, & par conséquent (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AH· AE* :: *CH· CB*: mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AH· AE* :: *AB· AD*, & *CH· CB* :: *CE· CD*. Donc *AB· AD* :: *CE· CD*. Ce qu'il falloit démontrer.

REGLE SIXIEME.

Si plusieurs grandeurs comme *AD*, *DB*, *BQ*; & *CD*, *DE*, *EM* sont telles que *AD· DB* :: *CD· DE* & *DB· BQ* : : *DE· EM*, cette conclusion est bonne : Donc, *ex proportione ordinata*, *AD· BQ* :: *CD· EM*.

Tab. 8. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hypothése*) *AD· DB* : : *CD· DE*; *AE* (*Lem.* 1.) sera $=$ *CB*. & comme (*l'hypothése*) *DB· BQ* :: *DE· EM*, c'est-à-dire, *EH· HP* :: *BH· HN*, *BP* sera aussi (*Lem.* 1.) $=$ *EN*. Donc, (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE· BP* :: *CB· EN*. Mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *AE· BP* :: *AD· BQ*, & *CB· EN* :: *CD· EM*. Donc, *AD· BQ* :: *CD EM*. Ce qu'il falloit démontrer.

REGLE SEPTIEME.

Si plusieurs grandeurs *AD*, *DB*, *BQ*; & *CD*, *DE*, *EM* sont telles que *AD· DB* :: *DE· EM*, & *DB· BQ* : : *CD· DE*, cette conclusion est bonne; donc, *ex proportione turbatâ*, *AD· BQ* : : *CD· EM*.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hypothése*) *AD· DB* : *DE· EM*, c'est-à-dire, *FE*· *EH* : : *DE*· *EM*, *FM* (*Lem.* 1.) sera = *DH*· de même puisque (*l'hypothése*) *DB*· *BQ* : : *CD*· *DE* : : *GB*· *BH*, *DH* sera aussi (*Lem.* 1.) = *GQ*. Donc, (*Ax.* 6.) *FM* = *GQ* & ainsi (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *FM*· *HO* : : *GQ*· *HO*; mais (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) *FM*· *HO* : : *FE*· *HP*, & *GQ*· *HO* : : *GB*· *HN*. Donc *FE*· *HP* : : *GB*· *HN*, c'est-à-dire, *AD*· *BQ* : : *CD*· *EM*. Ce qu'il falloit démontrer.

Tout ce que Euclide a dit des proportions, est renfermé dans ces sept regles, qui sont la base & le fondement de la Dialectique des Mathématiciens, comme on le verra par l'application de ces regles qui suffisent pour l'intelligence de tout ce qui appartient aux proportions en general.

LIVRE QUATRIEME.

Des proportions des lignes droites, & des figures qu'elles contiennent.

Nous diviserons ce Livre en deux Chapitres; dans le premier nous démontrerons les élémens de ces grandeurs comparées entr'elles, & dans le second, la maniére de les mesurer, ce qu'on appelle ordinairement la *Trigonometrie*.

CHAPITRE PREMIER.

THEOREME XXVIII.

Les aires des parallélogrames & des triangles en général, sont entr'elles, comme les produits de leur hauteur par leur base.

DEMONSTRATION.

L'aire des parallélogrames n'est autre chose (*scolie*

Th. 27.) que le produit de leur hauteur par leur base, & les triangles sont la moitié du produit de leur hauteur par leur base. Donc en général les aires des parallélogrames & des triangles, sont entr'elles comme les produits de leur hauteur par leur base. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc, les hauteurs & les bases étant égales ou en raison réciproque, les parallélogrames & les triangles sont égaux (*Lem.* 1.) Par la même raison, les parallélogrames & les triangles étant égaux, les hauteurs & les bases sont égales

COROLLAIRE II.

Les hauteurs étant égales (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) ils sont comme les bases.

COROLLAIRE. III.

Les bases étant égales, ils sont (*Cor.* 2. *Ax.* 9.) comme les hauteurs.

DEFINITION XX.

On appelle *figures égales* celles qui ont tous leurs angles égaux & les côtés proportionnels. On nomme *homologues* les côtés qui répondent à des angles égaux.

THEOREME XXIX.

Premiérement, la ligne paralléle à la base d'un triangle coupe ses côtés proportionnellement.

Secondement, la ligne qui coupe les côtés d'un triangle proportionnellement, est paralléle à sa base.

Tab. 8. Fig. 8.

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE.

Si la ligne *DE* est paralléle à la base *BC* du triangle *ABC*, je dis qu'elle coupe les côtés de ce triangle proportionnellement; c'est-à-dire, que *AD*· *DB* :: *AE*· *EC*.

Car puisque (*l'hypothése*) *DE* & *BC* sont paralléles, en tirant les deux lignes *DC* & *BE*, les deux triangles *DEB* & *DCE* (*Cor.* 1. *Th.* 27.) seront égaux entr'eux. Donc, (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) le triangle *ADE* sera en même raison avec ces deux triangles; mais (*Cor.* 2. *Th.* 28.) le triangle *ADE*· *DEB* :: *AD*· *DB*, & le même triangle *ADE*· *EDC* :: *AE*· *BC*· Donc *AD*· *DB* :: *AE*· *EC*. Ce qu'il falloit démontrer.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

Si *AD*· *DB* :: *AE EC*, je dis que les lignes droites *DE* & *BC* sont paralléles; car si elles n'étoient pas paralléles, en tirant la ligne *BO* paralléle à *DE*, pour lors (*Partie* 1.) *AD*· *DB* :: *AE*· *EO*; mais (*l'hypothése*) *AD*· *DB* :: *AE*· *EC* Donc *AE* seroit à *EO* :: *AE*· *EC*, & ainsi (*Cor.* 2. *Déf.* 17.) *EO* seroit $=$ *EC*, & *EC* la même chose que *EO*, ou bien la partie égale au tout; donc, *DE* & *BC* sont paralléles entr'elles : Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

De la premiére Partie il suit, que les triangles *DAE* & *BAC* qui ont des angles égaux, sont semblables, & que leurs côtés homologues sont proportionnels.

Premiérement *BA*· *AD* :: *CA*· *AE*; car puisque, par l'hypothése, l'angle *ADE* est $=$ *ABC*, les lignes *DE* & *BC* sont (*Déf.* 5.) paralléles, & par conséquent, par la partie premiere, *AD*· *DB* :: *AE*· *EC*· Donc (*Reg.* 1. *propor. Invertendo*) *DB*· *AD* :: *EC*· *AE*, & (*Reg.* 3. *componendo*) *DB* + *AD*· *AD*· :: *CE* + *AE*· *AE*, c'est-à-dire, *BA*· *AD* :: *CA*· *AE*·

Secondement, si *DF* est supposé paralléle à la ligne *AC*, par la même raison *BC*· *FC*·, ou bien (*Th.* 26.) *DE* :: *BA*· *AD*. Donc ces triangles équiangles ont tous leurs côtés proportionnels, & sont (*Déf.* 20.) semblables entre eux.

Ce Corollaire est le principe dont on se sert pour mesurer toutes sortes de longueurs, largeurs, hauteurs & profondeurs.

COROLLAIRE II.

Tab. 8. Fig. 8. Si deux triangles *BAC* & *DAE* ont un angle égal de part & d'autre, compris entre les côtés *BA*, *AC* & *DA*, *AE* proportionnels, de sorte que *BA*· *DA* :: *AC*· *AE*, ces deux triangles seront encore semblables ; car pour lors les lignes *DE* & *BC* sont paralléles, & par conséquent les angles qui sont en *D* & *E* du triangle *DAE* sont égaux aux angles *B* & *C* du triangle *BAC*. Donc (*Cor.* 1.) Ces triangles sont semblables.

COROLLAIRE III.

Tab. 8. Fig. 9. & 10. Tous les angles & tous les côtés, & même les aires de deux triangles, comme *ABC* & *DEF* sont égales, lorsque le côté *BC* du triangle *ABC*, est égal au côté *DE* du triangle *DEF*, & que les angles adjacens à ces côtés, sont égaux ; savoir l'angle *C* = à l'angle *E* & *B* = *D*. Car (*Cor.* 4. *Th.* 21.) les angles de l'un de ces triangles, sont égaux aux angles de l'autre, & par conséquent (*Cor.* 1.) leurs côtés sont proportionnels, & *BC*· *DE* : : *AB*· *DF* : : *AC*· *FE*. Donc, puisque par l'hypothése, *BC* = *DE*, *AB* sera aussi = *FD*, & *AC* = *FE*, & ainsi ces triangles seront équilatéraux, & (*Cor.* 3. *Th.* 24) égaux en tout.

COROLLAIRE IV.

Si les côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DA* d'une figure rectiligne
Tab. 8. Fig. 11. de quatre côtés, sont divisés chacun en deux parties égales en *F*, *G*, *H*, *E*, & que les points des divisions soient joints par les lignes droites *FE*, *EH*, *HG*, *GF*, la figure quadrilaterale *FEHG* est un parallélograme ; car en menant les lignes *DB*, & *AC*, comme par l'hypothése, *AF* = *FB* & *AE* = *ED*, *AF*· *FB* : : *AE*· *ED*, & ainsi (*Part.* 2.) *EF* est paralléle à *DB*. De même puisque, par l'hypothése, *BG* = *GC*, & *DH* = *HC* ; *BG*· *GC* : : *DH*· *HC*, & par conséquent (*Part.* 2.) *GH* sera encore paralléle à la ligne *BD*. Donc *EF* & *GH* sont paralléles à la même troisiéme

ligne, elles sont donc aussi paralléles entre elles.

On peut par la même raison prouver que les lignes *FG* & *EH* sont paralléles à la ligne droite *AC*, & par conséquent paralléles entre elles. Donc le quadrilatére *EFGH* est un parallélograme.

COROLLAIRE V.

Les parallélogrames *AEQF*, *ACPD* équiangles, sont comme les produits de *AE* multiplié par *AF*, & de *AD* multiplié par *AC*; car en menant la ligne *GB* perpendiculaire aux côtés prolongés *QF* & *PC*; *AG*· *AF* :: *AB*· *AC*. Donc (*Regl. 2. prop. alternando*) *AG*· *AB* :: *AF*· *AC*. Donc en multipliant les antécédens par *AE* & les conséquens par *AD*; $AG \times AE \cdot AB \times AD :: AF \times AE \cdot AC \times AD$; mais par le scolie du Théorême 27, $AG \times AE =$ au parallélograme *AEQF*, & $AB \times AD =$ au parallélograme *ACPD*. Donc ces deux parallélogrames sont comme les produits de $AF \times AE$ & de $AC \times AD$. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 9 Fig. 1.

THEOREME XXX.

Les parallélogrames semblables, sont comme les quarrés des côtés homologues. Tab. 9. Fig. 2. & 3.

DEMONSTRATION.

Si les deux parallélogrames *ABCD* & *EFGH* sont semblables, & que leurs côtés *BC* & *FG* soient homologues; je dis que ces parallélogrames sont entre eux, comme les quarrés de ces côtés homologues. Qu'on méne des extrémités de ces côtés homologues des lignes perpendiculaires *BO*, *CP*, *FK*, *GL* aux côtés opposés, & qu'on prolonge ces lignes perpendiculaires jusques en *QR* & *MN*, de maniére que les deux quarrés *BR* & *FN* soient formés.

Cela étant fait, il est clair (*Cor. 2. Ax. 9.*) que *OC*· *BR* :: *OB*· *BQ*, & *KG*· *FN* :: *KF*· *FM*; mais par l'hypothése, *BR* & *FN* sont deux quarrés. Donc (*Déf. 12.*) $BQ = BC$ & $FM = FG$. Donc *OC*· *BR* :: *OB*· *BC*, & *KG*·

FN : : *KF*· *FG*. De plus les angles *A* & *E* des parallélogrames *BD* & *FH* étant égaux, par l'hypothése, entre eux, leurs complémens à deux droits *OAB* & *KEF* sont aussi (*Th.* 1. *& l'Ax.* 5.) égaux & les angles *O* & *K* étant des angles droits (*Def.* 4.) les triangles *AOB* & *KFE* seront aussi (*Cor.* 4. *Th.* 21.) équiangles, & par conséquent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *OB*· *BA* : : *KF*· *EF*; mais parce que les parallélogrames *BD* & *FH* sont semblables, (*Déf.* 20.) *BA*· *BC* : : *EF*· *FG*; & nous venons de démontrer que *OC*· *BR* : : *OB*· *BC*, & *KG*· *FN* : : *KF*· *FG*. Donc *OC*· *BR* : : *KG*. *FN*, & (*Regl.* 2. *des proportions, alternando*) *OC*· *KG* : : *BR*· *FN*; mais (*Th.* 27.) *OC* = *BD* & *KG* = *FH*. Donc *BD*· *FH* : : *BR*· *FN*· Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Puisque les triangles semblables *BAC* & *FEG* sont (*Cor.* 3. *Th.* 26.) les moitiés des parallélogrames semblables *ABCD* & *EFGH*, qui ont les mêmes bases & hauteurs que ces triangles, ils sont entre eux comme les parallélogrames, & par conséquent comme les quarrés des côtés homologues. Ce qu'il est inutile de démontrer.

THEOREME XXXI.

Tab. 9. Fig. 4. 5. & 6. & Fig. 1. Tab. 10.

Si on méne d'un angle quelconque, par exemple, de l'angle *A* du triangle rectiligne *BAC*, deux lignes sur le côté *BC* prolongé autant qu'il est nécessaire, comme les lignes *AD*, *AE*, qui fassent avec la base *BC*, des angles *ADC* & *AEB*, chacun semblable au même angle *BAC*, je dis:

Premiérement, que le quarré du côté *BC* est plus petit que les quarrés des deux autres côtés *AB* & *AC* de tout le rectangle formé de *DE* muliplié par *BC*, si l'angle *BAC* est un angle aigu, comme dans la figure 4. & 5. de la table 9.

Secondement, ce même quarré du côté *BC* est plus grand que les quarrés des autres côtés de tout le rectangle de de DE sous BC si l'angle BAC est un angle obtus, comme dans la figure 6. de la table 9.

Troisiémement, enfin le quarré du côté BC est égal aux deux quarrés des deux autres côtés pris ensemble, si l'angle BAC est un angle droit, comme dans la premiére figure de la table 10.

DEMONSTRATION.

Tab. 9. Fig. 4. 5. 6. & Tab. 10. Fig. 1.

Puisque par l'hypothése, l'angle $ADC = BAC$, & que l'angle ACD est commun aux deux triangles DAC & ACB, ces triangles (*Cor.* 4. *Th.* 21. & *Cor.* 1. *Th.* 24.) sont semblables & $DC \cdot AC :: AC \cdot CB$. Donc (*Cor. Lem.* 1.) $AC \times AC = DC \times BC$. De même, puisquepar l'hypothése, l'angle $AEB = BAC$, & que l'angle ABC est commun aux deux triangles EBA & ABC, ces deux triangles (*Cor.* 4. *Th.* 21. & *Cor.* 1. *Th.* 29.) sont aussi semblables, & par conséquent $EB \cdot AB :: AB \cdot BC$, & $AB \times AB =$ (*Cor.* 1. *Lem.* 1.) $EB \times BC$.

Si on décrit deux parallélogrames rectangles CO & BK, sur les côtés DC & BE, & que leur hauteur commune EK soit égale à BC. Il est constant (*Déf.* 12.) que BG est le quarré du côté BC, & ainsi les deux parallélogrames CO & BK faits de DC & EB multipliés par BC,

Premiérement, surpassent le quarré du côté BC, de tout le rectangle DK, dans la figure 4. & 5. de la table 9. dans lesquelles l'angle BAC est aigu.

Secondement, les deux mêmes parallélogrames CO & BK, sont surpassés par le quarré du côté BC, de tout le rectangle DK, dans la figure 6. de la table 9. où l'angle BAC est obtus.

Troisiémement, ces deux mêmes parallélogrames pris ensemble, sont égaux au quarré du côté BC, dans la premiére figure de la table 10. où l'angle BCA est un angle droit.

Donc premiérement, $AC \times AC$, &, $AB \times AB$; ou bien les deux quarrés de AC & AB, surpassent le quarré du côté BC, de tout le rectangle DK dans les figures 4. &

5. de la table 9. dans lesquelles l'angle *BAC* est aigu. Secondement, les deux quarrés de *BA* & *AC* sont surpassés par le quarré de *BC* de tout le rectangle *DK* dans la figure 6. de la table 9. où l'angle *BAC* est obtus. Troisiémement, les deux quarrés de *BA* & *AC* pris ensemble, sont égaux au quarré de *BC*, dans la premiere figure de la table 10. où l'angle *BAC* est un angle droit. Donc (ce qui est la même chose.) 1°. Le quarré du côté *BC*, est plus petit dans les figures 4. & 5. de la table 9. que les quarrés des deux autres côtés *AC* & *AB* pris ensemble, de tout le rectangle *DK* fait de *DE* multiplié par *BC*. 2°. Le même quarré du côté *BC* du triangle *ABC*, est plus grand & surpasse les quarrés des deux autres côtés *AC* & *BA*, de tout le rectangle *DK* dans la figure 6 de la table 9. 3°. Enfin le quarré du côté *BC* est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés *BA* & *AC* du triangle *BAC*, dans la premiere figure de la table 10. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Si l'angle *BAC* est égal à chacun des angles *ABC* & *ACB*, & qu'ainsi le triangle *BAC* soit équilateral, il est évident que le quarré du côté *BC*, sera égal à chacun des quarrés des deux autres côtés *AB* & *AC*, & par conséquent, que la somme de ces quarrés, surpassera le quarré du côté *BC*, de toute sa valeur; c'est-à-dire, que la somme de ces quarrés, sera le double du quarré du côté de *BC*. Ce qui suit nécessairement de ce qui vient d'être démontré,

LEMME II.

Si plusieurs grandeurs sont en même rapport; par exemple, A, B, C, D, E, F; c'est-à-dire, si $A \cdot B :: C \cdot D :: E \cdot F$, &c. la somme des antécédens $A + C + E$ est à la somme des conséquens $B + D + F$, comme le premier antécédent A est au premier conséquent B.

DEMONSTRATION.

Puisque par l'hypothése, *A· B* :: *C. D*: (*Régle* 2. *prop. alternando*) *A· C* :: *B. D*, & (*Régle* 3. *componendo*) *A* + *C· C* :: *B* + *D· D*, (*Régle* 2. *alternando*) *A* + *C· B* + *D* :: *C· D*; mais, par l'hypothése, *C· D* :. *E· F*. Donc, *A* + *C· B* + *D* :: *E· F*, & (*Régle* 2. *alternando*) *A* + *C· E* :: *B* + *D· F*, & (*Régle* 3. *componendo*) *A* + *C* + *E·E* :: *B* + *D* + *F· F*, & (*Régl.* 2. *alternando.*) *A* + *C* + *E· B* + *D* + *F* :: *E·F* (*L'hypothése*) :: *A· B*. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXXII.

Tab. 10. Fig. 2. & 3.

Les contours des figures semblables, sont comme les côtés homologues.

DEMONSTRATION.

Si les deux figures *ABCDE* & *FGHKL* sont semblables, je dis que les contours de ces figures, sont comme les côtés homologues *AB*, & *FG*; car puisque (*L'hyp.*) ces figures sont semblables (*Déf.* 20.) *AB· BC*::*FG·GH*,&(*Rég.* 2. *alternando*) *AB· FG* :: *BC· GH*. On peut de même démontrer que *BC· GH* :: *CD· HK*, & *CD· HK* :: *DE· KL* (& *DE· KL* :: *EA· LF*. Donc, (*Lem.* 2.) la somme des antécédens *AB* + *BC* + *CD* + *DE* + *EA* est à la somme des conséquens *FG* + *GH* + *HK* + *KL* + *LF* :: *AB· FG*; c'est-à-dire, que le contour de la figure *ABCDE*, est au contour de la figure *FGHKL*, comme le côté *AB* est au côté *FG*. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME III.

Tab. 10. Fig. 4. & 5.

Si des angles égaux *A* & *F* des figures semblables *ABCDE* & *FGHKL*, on méne des lignes droites, *AC*, *AD*, *FH* & *FK*, aux angles *C*, *D*, *H*, *K* par lesquelles ces figures soient divisées en autant de triangles qu'il y a de côtés, exceptés deux; je dis que les triangles d'une de ces figures sont chacuns semblables aux triangles de l'autre figure, ausquels ils répondent.

DEMONSTRATION.

Puisque ces deux figures sont semblables (*Déf.* 20.) *AB* · *BC* : : *FG* · *GH*, & l'angle *ABC* = à l'angle *FGH*. Donc (*Cor.* 2. *Th.* 29.) ces deux triangles, *ABC* & *FGH* sont semblables, & *AB* · *BC* : : *FG* · *GH*, & l'angle *ACB* = à l'angle *FHG*; mais parce que ces deux poligones sont semblables, *BC* (*Déf.* 20.) · + *CD* : : *GH* · *HK*, & (*Ax.* 5.) l'angle *ACD* = *FHK*, & ainsi (*Cor.* 2. *Th.* 29.) les triangles *ACD* & *FHK* sont aussi semblables.

On peut démontrer de la même maniére, que les triangles *ADE* & *FKL* sont semblables. Donc ces deux poligones sont divisés en autant de triangles, l'un que l'autre, & chacuns de ces triangles, sont semblables aux triangles de l'autre figure, ausquels ils répondent.

Tab. 10. Fig. 4. & 5.

THEOREME XXXIII.

Les aires des figures ou poligones semblables, sont comme les quarrés des côtés homologues.

DEMONSTRATION.

Les poligones semblables, *ABCDE* & *FGHKL* (*Lem.* 3.) divisés en triangle, de maniére que les triangles *ABC* & *FGH*; *ACD* & *FHK*; *ADE* & *FKL* soient semblables, (*Cor. Th.* 30.) sont entre eux comme les quarrés des côtés homologues, & par conséquent les triangles *ABC* & *FGH*, *ACD* & *FHK*, sont entre eux, comme les quarrés des côtés *AC* & *FH*; c'est-à-dire, en même raison. De même les triangles *ACD* & *FHK*, *ADE* & *FKL*, sont entre eux, comme les quarrés des côtés *AD* & *FK*, & en même raison. Donc le triangle *ABC* est au triangle *FGH*, comme *ACD* est à *FHK*, comme *ADE* est à *FKL*. Donc (*Lem.* 2.) la somme des antécédens; c'est-àdire, des triangles dont l'aire de la figure *ABCDE* est composée, est à la somme des conséquens dont la figure *FGHKL* est composée, comme le triangle *ABC* est au triangle *FGH*, & (*Cor Th.* 30.) le triangle *ABC* est au triangle *FGH* auquel il est semblable, comme le quarré du côté *AB* au quarré du côté homologue *FG*. Donc les aires des poligones semblables *ABCDE* & *FGHKL*, sont aussi entre elles, comme les quarrés des côtés homologues *AB* & *FG*. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME. IV.

Tab. 10. Fig. 6.

L'angle *BAC* formé par les deux lignes *AB* & *AC* tangentes du cercle, est divisé en deux parties égales, par la ligne droite tirée du point *A* dans lequel concourent ces deux lignes, au point *E* qui est le centre du cercle.

DEMONSTRATION.

Si on tire du centre *E* aux points *C* & *B* dans lesquels les lignes *AB* & *AC* touchent le cercle, deux rayons *EB* & *EC*, les angles en *C* & *B* (*Cor.* 4. *Th.* 11.) sont des angles droits, & ainsi (*Part.* 3. *Th.* 31.) les quarrés des deux côtés *AB* & *BE* seront ensemble, égaux au quarré de *AE*, de même que les quarrés des côtés *AC* & *CE* pris ensemble, sont égaux au même quarré du côté *AE*. Donc les quarrés des côtés *AB* & *BE* sont ensemble, égaux aux quarrés des côtés *AC* & *CE* pris ensemble, & en ôtant de part & d'autre les quarrés égaux des rayons *EB* & *EC*, il restera les quarrés égaux des côtés *AB* & *AC*; & ainsi les tangentes *AB* & *AC* seront égales entre elles, & les triangles *ABE* & *ACE* seront équilatéraux, & par conséquent aussi, (*Cor.* 3. *Th.* 24.) équiangles, & les angles *EAB*, & *EAC* seront égaux entre eux. Ce qu'il falloit démontrer.

DEFINITION XXI.

On appelle une figure *circonscrite* à un cercle, lorsque tous ses côtés touchent le cercle; on l'appelle *inscrite*, lorsque la circonférence du cercle passe par tous ses angles.

THEOREME XXXIV.

Les contours des figures semblables *ABCDE* & *FG*

HKL circonſcrites à des cercles, ſont comme les diamétres de ces cercles.

Tab. 11. Fig. 1. & 2.

DEMONSTRATION.

Si on joint les centres *M*, *N*, avec les extrémités des côtés homologues *AB*, *FG*, & avec les points *P* & *Q* où les côtés homologues touchent les cercles; les angles *ABM* & *FGN* seront (*Lem.* 4.) la moitié des angles *ABC* & *FGH* qui ſont (*Déf.* 20.) égaux, & par conſéquent les angles *ABM* & *FGN* ſont auſſi égaux entre eux. On peut de même démontrer que les angles *BAM* & *GFN* ſont égaux entre eux. Donc (*Cor.* 4. *Th.* 21.) les triangles *AB M* & *FGN* ſont équiangles, & ainſi (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *AB*· *BM* :: *FG*· *GN*. Puiſque *AB* & *FG* ſont des tangentes, les angles en *P*, *Q* (*Cor.* 4. *Th.* 7. ſont des angles droits, & par conſéquent égaux entre eux; mais on a déja démontré que les angles *PBM* & *QGN* ſont égaux entre eux. Donc *Cor.* 4. *Th.* 21.) ces triangles *BPM* & *GQN* ſont équiangles, & (*Cor. Th.* 29.) *BM*· *PM* :: *GN*. *QN*. Donc (*Rég.* 6. *ex propor. ordinata*) *AB*· *PM* :: *FG*· *QN*, & (*Rég.* 2. *alternando*) *AB*· *FG* :: *PM*· *QN*. Mais nous avons démontré par le Théorême 32. que les contours des figures ſemblables *ABCDE*, *FGHKL*, ſont comme les côtés homologues *AB* & *FG*. Donc les contours des mêmes figures ſont comme les rayons *PN* & *QN*, & par conſéquent comme les diamétres des cercles auſquels elles ſont circonſcrites. Ce qu'il falloit démontrer.

Tab. 11. Fig. 3, & 4.

THEOREME XXXV.

Les figures ſemblables *ABCDE* & *FGHKL* inſcrites dans des cercles, ſont comme les diamétres de ces cercles.

DEMONSTRATION.

Si on joint les centres *M*, *N*, avec les extrémités des côtés homologues *AB*, *FG*, & qu'on tire les lignes *AC* & *FH*, les triangles *ABC*, *FGH* ſeront (*Lem.* 3.) ſemblables, & les angles *ACB* & *FHG* qui ſont à la circonférence des cercles, ſeront égaux entre eux. Donc les angles *AMB* *FNG* qui ſont aux centres des cercles, ſont (*Cor.* 5. *Th.* 18.) égaux entre eux. Mais tous les rayons d'un cercle étant égaux, *AM*· *BM* :: *FN*· *NG*. Donc (*Cor.* 2. *Th.* 29.) les triangles *AMB*, *FNG* ſont auſſi ſemblables, & ainſi (*Déf.* 20.) *AB*· *AM* :: *FG*· *FN*, & (*Rég.* 2. *alternando.*) *AB*· *FG* :: *AM*· *FN*. Mais il a été démontré que les contours des poligones ſemblables *ABCDE*, *FGHKL*, ſont comme les côtés homologues *AB*, *FG*. Donc les contours des mêmes figures, ſont comme les rayons *AM*, *FN*, & par conſéquent comme les diamétres des cercles dans leſquels elles ſont inſcrites. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXXVI. Tab. 11. Fig. 4.

Les aires des figures ſemblables inſcrites, ou circonſrites à des cercles, ſont comme les quarrés des diamétres de ces cercles.

DEMONSTRATION.

Les côtés homologues des figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à des cercles, ſont (*Th.* 33, 34, 35.) comme les diamétres de ces cercles. Donc dans ces figures ſemblables, les quarrés des côtés homologues, ſont comme les quarrés des diamétres. Mais (*Th.* 33.) les aires de tous les poligones ſemblables, ſont comme les quarrés des côtés homologues. Donc les aires de ces mêmes figures inſcrites ou circonſcrites à des cercles, ſont comme les quarrés des diamétres de ces cercles. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXXVII. Tab. 10. Fig. 4.

Les contours des cercles, ſont comme les diamétres, & les aires comme les quarrés des diamétres.

DEMONSTRATION.

Si on circonſcrit un poligone à un cercle, & qu'on inſcrive un autre ſemblable poligone dans ce même cercle, & que ces poligones deviennent d'une infinité de côtés, ils feront enfin réduits à un ſeul, & ainſi le cercle compris entre ces poligones, ſera plus grand que le poligone inſcrit & plus petit que le circonſcrit, juſqu'à ce qu'il ſoit confondu avec ces poligones, & que les contours & les aires de ces poligones deviennent les mêmes, que le contour & l'aire du cercle. Donc les contours & les aires des cercles, ſont comme les contours & les aires des poligones d'une infinité de côtés, circonſcrits ou inſcrits à ces cercles. Mais il a été démontré que les contours des poligones étoient comme les diamétres des cercles auſquels ils ſont circonſcrits ou inſcrits, & que leurs aires ſont comme les quarrés de ces diamétres. Donc les contours des cercles ſont comme les diamétres, & leurs aires ſont comme les quarrés des diamétres. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette démonſtration, que le cercle peut être, auſſi bien que toutes les autres lignes courbes, regardé comme un poligone d'une infinité de côtés.

THEOREME XXXVIII.

L'aire du cercle eſt égale au produit de la circonférence, par la moitié du rayon.

Tab. 11, Fig. 5.

DEMONSTRATION.

On peut (*Cor. Th.* 37.) conſiderer le cercle *ADF*, comme un poligone d'une infinité de côtés. Suppoſons qu'un des côtés de ce poligone eſt *DE*; ſi on méne du centre *C*, les rayons *CE* & *CD*, ils formeront avec le côté *DE*, un triangle infiniment petit, dont la hauteur ſera le rayon du cercle, & ainſi (*Scolie Th.* 27.) ce triangle ſera égal au produit de la moitié du rayon par le côté nfiniment petit *DE*. On peut dire la même choſe des autres triangles dont l'aire du cercle *ADF* eſt compoſée. Donc l'aire du cercle eſt égale à la ſomme des produits du même demi-rayon

par

par tous les côtés infiniment petits dont eſt compoſée la circonférence du cercle *ADF*, ou bien, au produit de la circonférence, par le demi rayon. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si on ſuppoſe que la tangente du cercle dans le point *D*, eſt continuée juſques en *B*, de ſorte que *BD* ſoit égale à la circonférence du cercle, & qu'on joigne les points *C* & *B* par la ligne droite *CB*; le triangle *CDB* dont la hauteur (*Cor.* 4. & 5. *Th.* 11.) eſt *CD*, ſera (*Scolie Th.* 27.) égal au produit de la baſe *BD*, par la moitié de la ligne *DC*; c'eſt-à-dire, au produit de la circonférence du cercle par le demi rayon. Donc, puiſque l'aire du cercle, eſt égale à ce même produit, elle eſt auſſi égale au triangle dont la hauteur eſt le rayon du cercle, & la baſe égale à la circonférence du cercle.

COROLLAIRE II.

On peut démontrer par la même raiſon, qu'un ſegment de cercle, par exemple *DCF*, eſt égal au produit de l'arc *DF*, par le demi rayon, ou bien au triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe égale à l'arc *DF*.

SCOLIE.

Il ſuit de là, qu'on trouveroit facilement une figure rectiligne égale au cercle, ſi on pouvoit avoir une ligne droite, qui fut égale à la circonférence du cercle; c'eſt ce que les Géométres n'ont point encore trouvé, ils en approchent infiniment, mais ils ne ſont point encore parvenus à découvrir une ligne moyenne proportionnelle, entre le demi rayon & la circonférence du cercle; le quarré de cette moyenne proportionnelle, feroit la quadrature du cercle tant ſouhaittée; car la quadrature du cercle, n'eſt autre choſe que l'aire du cercle réduite en quarré.

THEOREME XXXIX.

Si on méne deux lignes droites *AC* & *AD*, du même point quelconque, par exemple, du point *A*, & qu'elles rencontrent la circonférence du cercle dans les points *B*,*C*, *D*, *E*; je dis que *AC*· *AD* :: *AE*· *AB*.

DEMONSTRATION.

Tab. 11. Fig. 6. 7. & 8. Si on méne les lignes *DB* & *CE*, les triangles *CAE* & *DAB* sont (*Cor.* 1. *Th.* 29.) semblables, parce que l'angle *ACE* (*Cor* 2. *Th.* 18.) = *ABD*, & l'angle *CAE* (*Th.* 19.) = *DAB*, & par conséquent (*Cor* 4. *Th.* 21.) *CEA* = *ABD*. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 29.) ces triangles seront semblables, & *AC*· *AD* : : *AE*· *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc (*Lem.* 1.) le rectangle des parties *AC* & *AB* de la même sécante *AC*, est égal au rectangle des parties *AD* & *AE* de l'autre *AD*.

COROLLAIRE II.

Puisque dans la figure 8. de la table onziéme, les points *C* & *B* de la tangente *AC*, sont confondus en un point, qui est celui où la tangente touche le cercle; les lignes *AC* & *AB* ne sont qu'une même ligne. Donc la tangente *AC* est moyenne proportionnelle entre toute la ligne *AD* & la partie *AE*, & le rectangle de *AC* & *AB*, dans ce cas, est égal au quarré de la tangente *AC*; & ainsi il est clair, que si du même point *A*, on méne la tangente *AC*, & la sécante *AD*, le rectangle de toute la sécante *AD* & de sa partie *AE*, est égal au quarré de la tangente *AC*.

COROLLAIRE. III.

Si du même point *A*, on méne une autre tangente *AF*, les quarrés des tangentes *AC* & *AF* seront égaux, & ces tangentes seront égales.

AVERTISSEMENT.

De ce que nous avons dit dans ce chapitre des lignes droites, aussi bien que des figures comprises entre ces lignes;

il est aisé de voir comment on peut mesurer ces mêmes figures par le moyen de la Trigonométrie, dont nous allons parler dans le chapitre suivant, qui ne comprend que trois Théorêmes, dans lesquels est renfermé l'art de mesurer toutes sortes de longueurs, largeurs, &c.

CHAPITRE SECOND.

De la Trigonométrie rectiligne.

LA Trigonométrie enseigne à mesurer toutes sortes de triangles; le triangle est composé de trois côtés, & de trois angles. Si de ces six choses on en connoît trois; pourvû qu'il y ait un côté entre ces trois choses connuës, on trouve les trois autres par *la régle de trois*, qu'on nomme ordinairement *la régle d'or*. Il faut donc que ces parties soient proportionnelles, & qu'on en connoisse les proportions; mais parce qu'on ne sauroit les connoître sans réduire en lignes droites ce qu'il y a de circulaire dans les triangles, (comme la mesure des angles) c'est pour cela que les Mathématiciens déterminent la grandeur que les lignes droites appliquées au cercle, ont par rapport au diamétre, qui sert à connoître la valeur des lignes droites, dont on se sert pour mesurer les triangles. Il y en a de trois sortes; savoir, les sinus, les sécantes & les tangentes.

DEFINITION XXII.

Tab. 11. Fig. 9.

La ligne perpendiculaire *AE*, qui tombe de l'extrémité de l'arc *AB*, sur le rayon *CB*, est appellée, *le sinus* de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*, dont cet arc (*Th. 16.*) est la mesure. La ligne *CD*, qui n'est que la ligne *AC* prolongée jusques à la tangente, se nomme la sécante du même angle, ou du même arc, & *BD* continuée jusques à la sécante, est appellée *tangente*.

COROLLAIRE.

La ligne *AE* (*Th.* 12.) eſt égale à la moitié de la corde *AG*, & ainſi les arcs *AB* & *BG*, ſont égaux. Donc le *ſinus* *AE* de l'arc *AB*, eſt la moitié de la corde du double de ce même arc.

DEFINITION XXIII.

Par la même raiſon que *AE* eſt le *ſinus* de l'arc *AB*, ou de l'angle *ACB*; *FC* eſt le *ſinus* du quart de la circonférence du cercle *FB*, ou de l'angle droit *FCB*. Mais parce que le plus grand de tous les ſinus, eſt ſuppoſé diviſé en pluſieurs parties égales, dont les autres ſinus contiennent un nombre déterminé, le ſinus *FC* eſt appellé *ſinus total*, dont les autres ſont des parties, & on les nomme ſimplement, *ſinus*.

COROLLAIRE I.

Lors donc qu'on cherche le ſinus d'un angle, ou d'un arc égal à cet angle, on cherche ſeulement combien la moitié de la corde du double de cet arc, contient de parties du *ſinus total* ou du rayon qui convient à cet arc.

COROLLAIRE II.

Le *ſinus total* eſt comme l'échelle par le moyen de laquelle on connoît les autres ſinus. L'on doit donc chercher le rapport des différens ſinus, par celui qu'ils ont avec le ſinus total; car de différentes meſures on ne peut rien conclure.

DEFINITION XXIV.

Le reſte *EB* du rayon *CB*, compris entre l'arc *AB* & ſon ſinus *AE*, eſt appellé *ſinus renverſé* du même arc *AB* ou de l'angle *ACB*, & dans ce cas *AE* eſt appellé le ſinus droit, de peur qu'on le confonde avec l'autre.

SCOLIE.

Pour trouver facilement la valeur des ſinus, tangentes

& ſécantes, les Mathématiciens après avoir diviſé le ſinus total en plusieurs parties égales, ont cherché par de grands calculs & très-ſubtils, combien chaque ſinus contient de ces parties; ils ont de même cherché combien de ces parties du rayon ou ſinus total, ſont contenuës dans les tangentes & ſécantes de tous les degrés & minutes du quart de cercle: car les tangentes & ſécantes, de même que les ſinus, ont un certain rapport déterminé avec le ſinus total.

Le nombre des parties du ſinus total, qui convient aux ſinus, tangentes & ſécantes, eſt diſtribué en trois tables; l'une eſt celle des ſinus, la ſuivante celle des tangentes, & la troiſiéme celle des ſécantes dont on ſe ſert de la maniére ſuivante.

Un angle étant donné, ou bien l'arc qui en eſt la meſure, par exemple de 40 degrés cinquante minutes. Cherchez les degrés donnés, au haut de la table, comme l'on cherche les mots dans un Dictionnaire; enſuite les minutes que vous trouverez dans la premiere colonne à gauche, & par le moyen des tables, vous connoîtrez le ſinus, la tangente & ſécante de quarante degrés cinquante minutes.

Si vous ne connoiſſez que le ſinus de l'angle ou de l'arc, & que vous vouliez ſavoir de combien de degrés & minutes, eſt l'angle dont vous connoiſſés le ſinus: Cherchez dans la colonne des ſinus, le nombre qui marque le ſinus que vous connoiſſez, ou bien, ſi vous ne le trouvez pas, prenez celui qui en aproche le plus, & vous trouverez dans la premiére colonne à gauche, les minutes, & au haut les degrés de l'angle, ou de l'arc donné.

Si vous voulez vous ſervir des logarithmes, qui ſont des nombres arithmétiquement proportionnels, qui répondent aux nombres géométriquement proportionnels, qui expriment les valeurs des ſinus, tangentes & ſécantes. Il faut ajoûter au logarithme du ſecond terme connu, le logarithme du troiſiéme, & de la ſomme de ces deux nombres ôter le logarithme du premier terme; ce qui reſtera ſera le logarithme du quatriéme terme que l'on cherche, qui par le moyen de la table, fera connoître l'angle ou l'arc qui lui répond. Ce qui eſt beaucoup plus facile que de ſe ſervir des propres nombres des ſinus, tangentes & ſécantes, parce qu'en ſe ſervant des nombres des ſinus, tangentes & ſécantes, il faut multiplier le ſecond terme par le troiſiéme, & diviſer le produit par le premier, & au lieu de l'addition & de la ſouſtraction, ſe ſervir de la multiplication & de la diviſion; ainſi l'opération eſt bien plus facile par le moyen des logarethmes.

THEOREME XL.

Les côtés d'un triangle rectiligne, ſont entre eux, comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés.

DEMONSTRATION.

Fig. 10. Tab. 11. & Fig 1. & 2. Tab. 12.

Le côté *AB* du triangle *ABC*, eſt au côté *BC*, comme le ſinus de l'angle *C* oppoſé au côté *AB*, eſt au ſinus de l'angle *A* oppoſé au côté *BC*; car ſi (*Cor.* 8. *Def.* 6.) on *décrit un cercle qui paſſe par les angles de ce triangle*, & qu'on diviſe les côtés *AB* & *BC*, par la moitié en *F* & en *H*; qu'on tire du centre *E* les lignes *EF EH*: les angles seront (*Th.* 12.) droits en *F* & *H*. Donc (*Déf.* 22.) *BF* eſt le ſinus de l'angle *BEF*, & *AF* le ſinus de l'angle *AEF*, & le ſinus total eſt *BE*. Puiſque les angles *AEF* & *BEF*, ſont (*Th.* 13 & 16.) égaux entre eux, ils ſont auſſi (*Cor.* 5. *Th.* 18.) égaux à l'angle *C*. Donc le rayon *BE* étant le ſinus total, *FB* eſt le ſinus de l'angle *C*. On peut de même démontrer que *HB* eſt le ſinus de l'angle *BAC*, & par conſéquent *FB*, étant par l'hypothéſe, la moitié du côté *AB*, & *HB* la moitié de *BC*, & (*Ax.* 9.) un tout eſt à un autre tout, comme la moitié de l'un, eſt à la moitié de l'autre, *AB*· *BC*:: *FB* ſinus de l'angle *C*· *HB* ſinus de l'angle *BAC*, & ainſi des autres côtés & ſinus des angles oppoſés. Donc ces côtés ſont entre eux comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce théorême eſt le fondement de la ſolution de tous les triangles rectilignes, lorſque deux angles & un côté, ou bien deux côtés & un angle étant donnés, on cherche le reste.

THEOREME XLI.

Tab. 12. Fig. 3.

Dans un triangle rectiligne, le plus grand côté est à la somme des deux autres, comme leur différence est à la différence des parties du plus grand côté divisé par la perpendiculaire menée de l'angle opposé.

DEMONSTRATION.

Dans le triangle *ABC* dont le plus grand côté est *AC*, sur lequel tombe la perpendiculaire *BD*, qui le divise en deux parties, dont la plus grande est *AD*, & la plus petite *DC*; *AC* est à la somme des deux autres côtés *AB* & *BC*, comme leur différence est à la différence des parties *AD* & *DC*: Car si du centre *B* on décrit un cercle dont *BC* soit le rayon, & qu'on prolonge la ligne *AB* jusques au point *H* de la circonférence du cercle; *AH* sera la somme des côtés *AB* & *BC*, puisque (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) $BC = BH$, & par conséquent *AF* sera la différence des côtés *AB* & *BC* *BD*, par l'hypothése, est perpendiculaire à la ligne *EC*. *ED* (*Th.* 12.) est donc $= DC$, & *AE* est la différence des parties *AD* & *DC* du plus grand côté *AC*. Mais $AC \cdot AH$ (*Th.* 39.) $:: AF \cdot AE$. Donc le plus grand côté *AC* est à la somme des deux autres *AB* & *BC*, comme leur différence *AF*, est à la différence *AE* des parties *AD* & *DC* du plus grand côté divisé par la perpendiculaire *BD* menée de l'angle opposé. Ce qu'il falloit démontrer.

Par ce théorême on trouve les angles d'un triangle dont on connoît les côtés; on peut aussi trouver la perpendiculaire tirée d'un angle quelconque au côté auquel il est opposé.

LEMME V.

Tab. 12. Fig. 4.

La plus grande de deux grandeurs inégales, est égale à la moitié de leur somme avec la moitié de leur différence;

& la plus petite eſt égale à la moitié de leur four ſomme, moins la moitié de leur différence.

DEMONSTRATION.

Si de deux grandeurs inégales, AB & BC, la plus grande eſt BC, & la plus petite AB, & qu'on diviſe AC par la moitié en O; CO ſera $= AO = AB + BO$, & par conſéquent $AC = 2\ AB + 2\ BO$. Donc $BC = AB + 2\ BO$. Mais BC, qui eſt la plus grande partie, eſt égale à la plus petite partie AB avec la différence dont BC ſurpaſſe AB. Donc la différence de cès deux grandeurs inégales AB & BC, eſt deux BO; & ainſi BO eſt la moitié de leur différence. Mais CO ou bien AO eſt la moitié de la ſomme de ces grandeurs inégales. Donc la plus grande $BC = CO$ qui eſt la moitié de la ſomme, $+ BO$ qui eſt la moitié de la différence de ces deux grandeurs. La plus petite des deux, AB eſt auſſi $= AO$ qui eſt la moitié de la ſomme, $- BO$ qui eſt la moitié de la différence. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XLII.

Dans tous les triangles rectilignes, la ſomme de deux côtés, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles adjacens au troiſiéme côté, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

DEMONSTRATION.

La ſomme de deux côtés de tel triangle qu'on voudra, par exemple du triangle ABC, ſavoir AB & AC, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des angles ACB & ABC qui leur ſont oppoſés, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Car ſi on prolonge le côté CA juſques en D, de maniére que AD ſoit $= AB$, & qu'on joigne les points B & D par la ligne BD, ſur laquelle tombe la perpendiculaire AF avec la ligne AE paralléle à BC; AD étant par l'hypothéſe $= AB$; l'angle ADB (*Th. 22.*) ſera égal à l'angle.

A

ABD. Donc, puiſque par l'hypothéſe les angles *AFD*, & *AFB* ſont deux angles droits, *DAF* ſera (*Cor.* 4. *Th.* 21.) $=$ *BAF*; & par conſéquent *DAB* étant (*Cor.* 5 *Th.* 21.) égal a la ſomme des angles *C* & *B*; *DAF* ſera $=$ à la demi-ſomme de ces mêmes angles *C* & *B*. Mais *AE*, par l'hypothéſe, eſt paralléle à *BC*. Donc l'angle *DAE* (*Def.* 5.) eſt égal à l'angle *C*, qui eſt le plus petit des deux angles adjacens à la baſe *BC* du triangle *ABC*. Donc le plus petit angle eſt égal à la moitié de la ſomme de ces mêmes angles, moins *EAF*. Donc (*Lem.* 5.) *EAF* eſt leur demi-différence.

Mais puiſque, par l'hypothéſe, *DF* perpendiculaire à la ligne *AF*, touche le cercle *FG* décrit du centre *A*, & qui a pour rayon *AF*, (*Def.* 22.) *DF* ſera la tangente de la demi-ſomme des angles *C* & *B*; *EF* ſera auſſi la tangente de la demi-différence des mêmes angles. Si on méne la ligne *FH* paralléle à la ligne *EA* ou (*par l'hypotheſe*) à la ligne *CB*; (*Th.* 29. *& regle* 3. *des prop.*) *DH*· *AH*:: *DF*· *EF*. Donc *DH*· *AH*:: la tangente de la demi-ſomme des angles C & *B*, eſt à la tangente de la demi-différence des mêmes angles.

L'on vient de démontrer que les triangles *DAF*, & *BAF* ſont équiangles, de même que *DHF*, & *DCB*; ainſi (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *AD*· *AB*:: *DF*· *FB*:: *DH*· *HC*. Donc *DH* $=$ *HC*, puiſque (*par l'hypothéſe*) *AD* $=$ *AB*. Par conſéquent *DC* eſt la ſomme des côtés *AB* & *AC*, & (*par le Lem.* 5.) *AH* eſt la demi-différence des mêmes côtés. Mais (*Ax.* 9.) *DH* $+$ *HC*, ou bien *DC*· *AH* $+$ *AH*:: *DH*· *AH*. Donc la ſomme des côtés *AB* & *AC*, eſt à leur différence, comme *DH*· *AH*. Donc la ſomme des mêmes côtés *AB* & *AC*, eſt à leur différence, comme la tangente de la demi ſomme des angles *C* & *ABC*, eſt à la tangente de la demi-différence des mêmes angles. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE GENERAL.

Toute la trigonométrie rectiligne eſt renfermée dans ces trois derniers théorêmes, par le moyen deſquels on me-

fure toutes fortes de triangles & de figures rectilgnes, & par conféquent toutes fortes de grandeurs ; car où l'on connoît deux côtés & un angle oppofé à l'un de ces côtés, ou bien deux angles & un côté, & pour lors on trouve le refte par le théorême 40.

Si l'on connoît deux côtés & l'angle compris entre ces deux côtés, le refte fe trouve par le théorême 42.

Si enfin on connoît tous les côtés, l'on trouvera tous les angles par le théorême 41.

Tab. 12. Fig. 6. Remarquez que deux côtés *AC* & *AB* du triangle *ABC*, étant donnés avec l'angle *C* oppofé au côté *AB* ; on ne peut fûrement trouver l'angle oblique *ABC*, fans favoir quelle eft l'efpéce de cet angle, s'il eft aigu ou obtus, parce qu'en prenant *AB* pour le rayon du demi cercle *FAG*, le finus *AE* (*Th.* 40.) trouvé, fera commun (*Def.* 22.) à à l'angle obtus *ABC*, ou bien à l'arc *AF* & à l'angle aigu *ABE*, & à l'arc *AG*, & par conféquent en prolongeant *CB* jufques en *D*, & en fuppofant que $DA = BA$, comme (*Th.* 22.) l'angle $ADB = ABD$, le finus de l'angle obtus *ABC*, fera le même que celui de l'angle aigu *D*. Donc les deux côtés *AB* ou *AD* & *AC* étant donnés avec l'angle *C*, l'on trouvera le même *finus* pour l'angle obtus *ABC*, que pour l'angle aigu *D*, & par conféquent on ne fauroit par le moyen de ce finus, diftinguer l'angle obtus *ABC* de l'angle aigu *D*, ni le triangle *CAB* du triangle *CAD* ; mais *l'on peut feulement connoître que l'angle cherché eft l'obtus* *ABC*, ou l'aigu *D*. Donc les deux côtés *AC* & *AB* étant donnés, pour trouver le refte, il faut connoître l'efpéce de l'angle que l'on cherche *ABC*, & favoir s'il eft aigu ou obtus.

Lorfqu'on connoît tous les côtés des triangles, on peut facilement trouver leurs bafes & leurs hauteurs, & par conféquent leurs aires en multipliant (*Scolie Th.* 27.) la hauteur d'un triangle par la moitié de fa bafe, ou fa bafe par la moitié de fa hauteur.

Voilà ce qui regarde la théorie élémentaire des lignes, & des furfaces ; il faut maintenant paffer à la folidité des corps; ensuite nous ferons voir dans la seconde partie de cette Géométrie, l'usage de tout ce que nous aurons démontré dans la premiére.

LIVRE CINQUIEME.

Des corps ou des solides.

COMME toutes les figures rectilignes se réduisent en triangles, de même tous les solides se réduisent en pyramides; & comme l'on ne peut connoître les pyramides que par le moyen des parallélépipédes & des prismes, nous ne parlerons dans ce chapitre que de ces trois choses qui suffisent pour trouver la solidité des corps.

DEFINITION XXV.

Si une figure pleine rectiligne, par exemple *ABF*, est muë de *A* en *C*, de maniére qu'elle soit toûjours paralléle à elle-même, elle décrira un solide *CB* contenu entre les deux figures *ECD* & *ABF* qui sont semblables & égales, & entre autant de parallélogrames qu'il y a de côtés dans la figure *ABF*. Ce corps en général est appellé *prisme*. Il y a plusieurs espéces de prismes; car on lui donne différens noms selon ses différentes bases. On l'appelle parallélépipéde, si la figure par le mouvement de laquelle il est formé, est un parallélograme, & on le nomme cylindre lorsque cette figure est un cercle. Tab. 12. Fig. 8. Tab. 7. p.

Le prisme est appellé *rectangle* lorsque la ligne *AC*, comme dans la figure présente, est perpendiculaire à la base, & *obliqu'angle* ou *scaléne*, lorsqu'elle est oblique. Fig. 9.

COROLLAIRE.

De la formation des *rectangles* soit prismes, soit parallélépipédes, il suit que ces corps sont produits par leur base répétée autant de fois qu'il y a de points dans leur hauteur,

& par conſéquent que ces ſolides ſont égaux au produit de leur baſe multipliée par leur hauteur.

DEFINITION XXVI.

Fig. 10. La pyramide eſt une figure ſolide, qui eſt terminée par une baſe rectiligne, & par autant de triangles qu'il y a de côtés dans la baſe, comme *RTSV*. La pointe de la pyramide eſt *V*, la baſe *RTS*; ſi cette baſe eſt compoſée de de tant de côtés qu'elle devienne enfin un cercle, l'on appelle cette pyramide un *cone*.

Tab. 12. Fig. 11.

THEOREME XLIII.

Tab. 13. Fig. 1. 2. Deux priſmes ou parallélépipédes, ou enfin deux pyramides qui ont la même baſe & ſont entre les mêmes plans paralléles, ſont égales.

DEMONSTRATION.

Si deux priſmes *ABCDE* & *GCDEH*, ou deux pyramides *CDEA* & *CDEH*, ſont ſur la même baſe *CDE* & entre les mêmes plans paralléles *CDE* & *AH*, & qu'on les ſuppoſe coupées par des plans paralléles à la baſe, en des lames très-menuës; il eſt conſtant que dans les deux corps, les lames *PON* & *LMK* ſont égales. Car dans la premiére figure, les lignes *GH* & *CE* ſont paralléles & égales (*Def.* 25.) & *BC*· *QE* :: *GC*· *HE*, & (*Th.* 25.) elles ſont auſſi paralléles. Mais puiſque (*l'hyp.*) *POMK* & *CE* ſont les ſections des plans *BE* & *GE* faites par les plans *PN* *LK* & *CDE* qui ſont paralléles entre eux, les lignes *PO* & *MK* ſont auſſi (*Déf.* 10.) paralléles à la ligne *CE*. Donc (*Déf.* 12.) *PE* & *ME* ſont des parallélogrames, & ainſi (*Th.* 26.) $PO = CE = MK$.

De même dans la ſeconde figure, parce que les plans *PN* *LK* & *CDE* ſont (*l'hyp.*) paralléles, les ſections *PO* & *MK* ſont auſſi (*Cor. Déf.* 10.) paralléles à la ligne *CE*. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *CE*· *PO* :: *CA*· *PA* :: *CH*· *HM* :: *CE*· *MK*. Et ainſi *CE* a le même rapport à *PO* & *MK*, & (*Cor. Déf.* 17.) $PO = MK$.

Par la même raison que *PO* & *MK* sont dans les deux figures, égales entre elles, *NP* & *LM* sont aussi égales. Donc dans les deux figures, les triangles *PNO* & *MLK* sont équilateraux, & par conséquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) égaux entre eux.

Ce que l'on dit des lames triangulaires *PNO* & *MLK*, doit aussi s'entendre des autres. Donc puisque le corps *CDEA* est composé d'autant de lames *PNO*, que le corps *CDEH* est composé de lames *MLK*, ces deux corps (*Ax.* 4.) sont égaux entre eux.

Mais comme toutes les figures rectilignes se réduisent en triangles; de même les prismes & parallélépipédes se réduisent en prismes triangulaires & en pyramides triangulaires. Donc les pyramides qui ont la même base & la même hauteur sont égales, de même que les prismes & les parallélépipédes. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Il suit de ce qui vient d'être démontré, que les cylindres ou les cones qui ont la même base & la même hautur, sont égaux; Car comme l'on peut regarder leurs bases, qui sont des cercles, comme des poligones d'une infinité de côtés, de même les cylindres, & les cones ne différent point des prismes & pyramides d'une infinité de côtés.

COROLLAIRE II.

Comme le prisme *rectangle*, soit parallélépipéde, soit cylindre, ou autre, est égal, (*Cor. Déf.* 25.) au produit de la base par la hauteur; de même le prisme obliq'uangue qui a la même base, & qui est de la même hauteur que le rectangle, est aussi égal à ce produit; & en général tout prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THEOREME XLIV.

Un prisme triangulaire est le triple d'une pyramide qui a la même base & la même hauteur. Tab. 13. Fig. 3.

DEMONSTRATION.

Si on divise un prisme triangulaire, par exemple le prisme *ACBDEF* en trois pyramides *EFDC*, *EACD*, & *ABCD*, par le moyen de deux plans *ECD* & *ACD*, je dis que ces trois pyramides sont égales entre elles. Car (*Th.* 43.) la pyramide *ABCD* est égale à la pyramide *EFDC*, parce que (*Déf.* 25.) elles ont leurs bases opposées égales, savoir *EDF* & *ABC*, & la même hauteur. La pyramide *ECFD* est par la même raison égale à la pyramide *EACD*, parce que (*Cor.* 3. *Th.* 25. leurs bases *ECF* & *ECA* sont égales, & elles ont la même hauteur. Donc ces trois pyramides sont egales entre elles, & par conséquent chacune de ces pyramides est le tiers du prisme proposé. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Une pyramide est donc le tiers d'un prisme qui a la même base & la même hauteur, ou bien un prisme est le triple d'une pyramide qui a la même base & la même hauteur que ce prisme. Car si on réduit le prisme poligone *ABCDEGHIKF* en prismes triangulaires *ABC*, *IGH*; *CAD*, *IGK*; *DAE* & *FGK*; & la pyramide *ABCDEH* en pyramides triangulaires *ABCH*, *ACDH*, *ADEH*, chaque prisme (*Th. présent*) sera le triple de la pyramide qui a la même base & la même hauteur, & par conséquent le prisme total *ABCDEGHIKF* sera le triple de la pyramide totale *ABCDEH* qui a la même base & qui est de la même hauteur que le prisme total.

Tab. 13. Fig. 4.

COROLLAIRE II.

Puisque (*Cor.* 1. *Th* 43.) l'on peut regarder les cones comme des pyramides d'une infinité de côtés, & les cylindres comme des prismes d'une infinité de côtés; les cylindres sont triples des cones de la même base & hauteur.

COROLLAIRE III.

Comme tout prisme est égal (*Cor.* 2. *Th.* 43.) au produit de sa base par sa hauteur, il suit de-là que toute pyramide, & tout cone est égal au produit de sa base par la troisiéme partie de sa hauteur, ou de sa hauteur par la troisiéme partie de sa base.

THEOREME XLV.

En général les prismes, parallélépipédes, cylindres, pyramides, cones, sont entre eux comme les produits des hauteurs par les bases.

DEMONSTRATION.

Tous les prismes, parallélépipédes, cylindres, sont (*Cor.* 2. *Th.* 43.) égaux au produit de la base par la hauteur ; les pyramides & les cones (*Cor.* 3. 44.) au tiers de ce produit. Donc (*Ax.* 9.) tous ces corps sont entre eux comme les produits des bases par les hauteurs. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XLVI.

La sphére est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit. Tab. 13. Fig. 6.

DEMONSTRATION.

Si l'on fait tourner le quarré *ACDE*, avec la diagonale *EC* & le quart du cercle *ABD* dont le centre est *C*, autour du côté *DC* : Premiérement ce quarré décrira par son mouvement un cylindre ; secondement le quart de cercle décrira un hémisphére. Troisiémement le triangle *ECD* décrira un cone.

Cela posé, je dis premiérement que l'excès du cylindre sur l'hémisphére est égal au cone. Car si on suppose que ces solides sont coupés par un nombre indéfini de plans paralléles à la base *AC*, tels que *FG* : puisque (*Th.* 37.) les aires des cercles sont comme les quarrés des diamétres, ou des rayons; le cercle qui a pour rayon *BC*, sera aux cercles dont *BG* & *GC* sont rayons, comme le quarré de *BC* aux quarrés de *BG* & *GC*. Mais parce que l'angle *G* (*l'hyp.*) est droit, le quarré de *BC* est égal (*Part.* 3. *Th.* 31.) aux quarrés de *BG* & *GC* pris ensemble. Donc le cercle qui a *BC* pour rayon, est égal aux deux cercles, dont *BG* & *CG* sont les rayons; mais comme (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $GC \cdot GH :: CD \cdot DE$, & que (*l'hyp.*) $CD = DE$; GC sera aussi $= GH$, & le cercle qui a pour rayon *GC* = au cercle dont *GH* est le rayon. Donc le cercle dont *BC* est le rayon ou *FG*, sera égal aux deux cercles pris ensemble, qui ont *BG* & *GH* pour rayons. Mais le même cercle qui a *FG* pour rayon, est égal au cercle dont *BG* est rayon, & à la couronne formée par la révolution de la ligne droite *FB* autour de *CD*. Donc (*Ax.* 5.) en ôtant de chaque côté le cercle qui a *BG* pour rayon, cette couronne qui restera sera égale au cercle dont *HG* est le rayon, & de même par tout à cause de la hauteur indéterminée de la section *FG*. Donc la somme des couronnes décrites autour de *CD* par tou es les lignes *FB*, dont le triangle mixte *DBAE* est formé par la révolution de la figure *ACDE*, autour de *CD*, sera égale à la somme des cercles décrits par cette révolution, & qui ont *HG* pour rayons. Mais la somme de ces couronnes est l'excès du cylindre produit par la révolution du quarré *AEDC*, sur l'hémisphére aussi produit par la révolution du quart de cercle *ADC*, autour de *DC*, & la somme des cercles dont *HG* sont les rayons, n'est autre chose que le cone produit par la révolution du triangle *ECD* autour de *CD*; cet excès du cylindre sur l'hémisphére est donc égal au cone qui (*Cor.* 2. *Th* 44.) est le tiers du cylindre, parce qu'il a la même base & la même hauteur. Donc l'excès du cylindre sur l'hémisphére est aussi le tiers du même cylindre, & par conséquent l'hémisphére est égal aux deux autres tiers du même Cylindre. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

L'hémisphére est donc le double du cone qui a la même base

base & la même hauteur, & ainsi comme (*Cor. 3. Th. 44.*) le cone est égal au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, l'hémisphére sera égal au produit de sa base par les deux tiers de sa hauteur, ou bien au produit d'un de ses grands cercles par les deux tiers du rayon, & par conséquent la sphére, qui est le double de l'hémisphére, sera égale au produit d'un grand cercle par quatre tiers du rayon, ou bien par deux tiers du diamétre, & ce qui est la même chose; la sphére est égale au produit de quatre de ses grands cercles par le tiers du rayon.

SCOLIE.

L'on peut prouver par le moyen du cylindre circonscrit, que la sphére est égale au produit d'un de ses grands cercles par les deux tiers de son diamétre; car le cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur. Donc l'hémisphére qui est égal aux deux tiers du cylindre qui a la même base & la même hauteur, sera égal à un de ses grands cercles par les deux tiers de sa hauteur qui est le rayon. Et par conséquent la sphére, qui est le double de l'hémisphére, est égale au produit d'un de ses grands cercles par quatre tiers du rayon. Voilà qui suffit pour la solidité de la sphére; passons maintenant à sa surface.

THEOREME XLVII.

La surface de la sphére est égale à la somme de quatre grands cercles de cette même sphére, c'est-à-dire, qui passent par son centre & s'étendent jusqu'à sa surface. Tab. 14. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Comme le cercle (*Cor. Th. 37.*) n'est qu'un poligone d'une infinité de côtez, de même la surface de la sphére peut être regardée comme composée d'une infinité de plans: soit la sphére *ADBH* dont le centre est *C*, & *DEFG* une partie de sa surface; si cette partie est si petite qu'on puisse la regarder comme un des plans dont la ſurface de cette ſphére eſt compoſée ; la pyramide *DEFGC* ſera égale au *tiers du rayon, qui eſt ſa hauteur,* multiplié par ſa baſe, & ainſi des autres pyramides infiniment petites dont la ſphére eſt compoſée. Donc, la ſomme de ces pyramides, qui n'eſt que la ſphére, eſt égale au produit du tiers du rayon par toutes les baſes infiniment petites *DEFG* dont la ſurface de la ſphére eſt compoſée. Mais (*Cor. Th.* 46.) la ſphére eſt égale au produit du tiers du rayon par quatre de ſes grands cercles. Donc, la ſurface de la ſphére eſt égale à la ſomme de quatre grands cercles de cette même ſphére. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XLVIII.

Tab. 15. Fig. 2. La ſurface du cylindre droit, ſans ſes baſes, eſt égale au produit du contour de ſa baſe par ſa hauteur.

DEMONSTRATION.

*Si l'on ſuppoſe que les deux cotés MP, NQ, du cy*lindre droit *BDEF*, & ſont infiniment près l'un de l'autre, les baſes *BF* & *DE* (*Cor. Th.*37) peuvent être regardées comme des poligones d'une infinité de côtés, de même la ſurface convéxe du cylindre, peut être regardée comme compoſée d'une infinité de parallélogrames d'une largeur infiniment petite, ou (*Scol. Th.* 27.) des produits de la hauteur *MP* du cylindre, par toutes les petites lignes droites dont le contour de ſa baſe eſt compoſé. Donc cette ſurface du cylindre droit, eſt égale au produit de ſa hauteur par le contour entier de ſa baſe. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Comme la hauteur du cylindre circonſcrit à la ſphére, eſt le diamétre de la ſphére, & ſa baſe un grand cercle de cette même ſphére, la ſurface de ce cylindre ſans les baſes, eſt égale au produit du diamétre de la ſphére inſcrite, par la circonférence d'un grand cercle de cette ſphére; ou bien (*Th.* 38.) à quatre de ſes grands cercles.

COROLLAIRE II.

La ſurface de la ſphére étant (*Th.* 47.) égale à quatre de ſes grands cercles, elle eſt donc égale à la ſurface, moins les baſes, du cylindre circonſcrit à cette ſphére.

COROLLAIRE III.

Puiſque la ſurface du cylindre ſans ſes baſes, eſt égale (*Cor.* 1.) à quatre grands cercles de la ſphére inſcrite, ſi l'on ajoûte à cette ſurface convéxe du cylindre, ſes baſes qui ſont deux grands cercles de la ſphére, toute la ſurface du cylindre, les baſes compriſes, eſt égale à ſix grands cercles, & ainſi, la ſurface de la ſphére étant quadruple d'un grand cercle (*Th.* 47.) la ſurface du cylindre, les baſes compriſes, eſt à la ſurface de la ſphére inſcrite, comme 6 eſt à quatre, ou bien (*Ax* 9.) comme trois eſt à deux. Mais la ſolidité du cylindre (*Th* 46.) eſt à la ſolidité de la ſphére inſcrite, comme trois eſt à deux; car la ſphére eſt égale aux deux tiers du cylindre circonſcrit. Donc, la ſurface du cylindre ſphérique circonſcrit, les baſes compriſes, eſt à toute la ſurface de la ſphére, comme ſa ſolidité eſt à la ſolidité de la même ſphére.

Ce Corollaire plut ſi fort à Archiméde, qu'il voulut qu'on mît ſur ſon tombeau une ſphére inſcrite dans un cylindre.

THEOREME XLIX.

La ſurface du cone droit *ABC*, ſans ſa baſe, eſt égale au produit de la moitié du côté *AB*, ou *BC*, par la circonférence *AECF* de ſa baſe. Tab. 14. Fig. 32

On entend par cone droit, celui dont la ligne droite *BO* tirée de la pointe *B*, au centre de la baſe *AECF*, eſt perpendiculaire à cette baſe.

DEMONSTRATION.

Si de la pointe *B* du cone *AECFB*, on tire des lignes à tous les points de la base, comme *BD*, *BE*, &c. Premiérement, toutes ces lignes sont égales; car en tirant les rayons *OA*, *OD*, *OE*, &c. les triangles *BOA*, *BOD*, *BOE*, &c. seront rectangles (*Déf.* 9.) dans le point *O*, & les côtés *OA*, *OD*, *OE* seront égaux, & *BO* étant un côté commun à tous ces triangles, leurs hypothenuses *BA*, *BD*, *BE* (*Cor.* 1. *Th.* 24.) sont egales, & ainsi le triangle *DBE* est isoscéle : mais les deux lignes droites *BD*, *BE* sont (*Hyp.*) aussi près l'une de l'autre qu'elles peuvent l'être ; ainsi chacune, par exemple, *BD* sera la hauteur du triangle *DBE*, & par conséquent (*Scolie Th.* 27.) l'aire de ce triangle, est égale au produit de la moitié du côté *B D* ou *B A*, multipliée par la partie infiniment petite *DE* de la circonférence *AECF*; il en est de même de tous les autres petits triangles dont toute la surface du cone *ABC*, est composée. Donc, toute cette surface, sans la base, est égale au produit de la moitié du côté *AB*, par toutes les parties infiniment petites *DE* de la circonférence *AECF*, ou bien par toute cette circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME L.

La sphére est égale au cone dont la hauteur est le rayon de la sphére, & dont la base est égale à quatre grands cercles de la sphére.

DEMONSTRATION.

Le cone dont la hauteur est le rayon de la sphére, & la base égale à quatre grands cercles, est (*Cor.* 3. *Th.* 44.) le produit du tiers du rayon de la sphére par quatre de ses grands cercles : mais la sphére (*Cor. Th.* 46.) est égale à ce même produit. Donc, la sphére est égale au *cone dont la hauteur seroit le rayon de la sphére*, & la base égale à quatre grands cercles de la même sphére.

Voilà les Elémens de Géométrie dont nous allons faire voir l'utilité en passant à la seconde Partie.

SECONDE PARTIE.

De la Géométrie Pratique.

LA Géométrie Pratrique enseigne à mesurer toutes sortes d'étenduës, & comme toute étenduë est, ou ligne, ou surface, ou solide, nous la diviserons en trois Chapitres. Dans le premier, nous traiterons des lignes; dans le second, des surfaces; & dans le troisiéme, des solides.

CHAPITRE PREMIER.

De la position & de la mesure des lignes droites.

PROBLEME I.

Mener d'un point donné, une ligne perpendiculaire à une autre ligne donnée. Tab. 15. Fig. 1.

SOLUTION.

Ou le point donné est dans la ligne droite ou hors de la ligne droite donnée.

PREMIER CAS.

Si le point donné est *D* hors de la ligne droite *FC*, & que par ce point *D* il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *FC*. Du centre *D* il faut décrire un arc de cercle qui coupe la ligne droite *F C* dans deux points *M* & *N*, & de ces mêmes points, comme d'autant de centres, d'écrire deux arcs de cercle de même diamétre, qui se coupent dans le point *E*, ensuite mener la ligne droite *DE* : je dis, que cette ligne *DE* est perpendiculaire dans le point *A* à la ligne droite *FC*, comme on le demandoit.

DEMONSTRATION.

Les rayons *DM* & *DN* sont (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) égaux; & par conséquent le point *D* est également distant des extrêmitez *M* & *N* de la ligne *MN*. De même, puisque (*l'Hyp.*) les rayons *ME* & *NE* sont égaux, le point *E* est aussi également distant des extrémités *M* & *N* de la même ligne droite *MN*. Donc (*Cor. Th.* 6.) la ligne *DE* est perpendiculaire à la ligne *MN*, ou *FC*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Tab. 2. Fig. 15. Qu'on prenne dans la ligne *FC* deux points, *B*, *C*, desquels comme d'autant de centres on décrivé par le point donné *D* deux arcs de cercle, *DME*, *DNE*; si on méne une ligne par les points où ces arcs se rencontrent, je dis, que cette ligne est la perpendiculaire à la ligne *FC* menée du point donné *D*.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'Hyp.*) *BD* & *BE* sont des rayons du même cercle *DME*, comme *CD* & *CE*, du cercle *DNE*, (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) $BD = BE$ & $CD = CE$, & par conséquent la ligne droite *FC* a ses deux points *B* & *C* également distans des extremités *D* & *E* de la ligne droite *DE*. Donc cette ligne *FC* (*Cor. Th.* 6.) est perpendiculaire à la ligne *DE*, & par conséquent la ligne *DE* est (*Cor. Th.* 3.) perpendiculaire à la ligne *FC*. Ce qu'il falloit démontrer.

SECOND CAS.

Tab. 15. Fig. 3. Si le point donné *D* est dans la ligne droite *FC*, il faut prendre dans cette même ligne, deux points également distans du point *D*, savoir *M* & *N* desquels comme d'autant de centres, on décrit des arcs de cercle de même rayon, qui se coupent dans le point *E*; si on méne du point *E* au point *D*, une ligne droite, cette ligne est la perpendiculaire que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) les rayons *ME* & *NE* des cercles qui se coupent en *E*, sont égaux; ce point *E* est également distant des extrémités *M* & *N* de la ligne droite *MN*, de même que le point *D* (*l'hyp.*), & par conséquent les deux points *E* & *D* de la ligne *ED*, sont également distans des extrémités *M* & *N* de la ligne droite *MN*. Donc (*Cor. Th. 6.*) la ligne *ED* est perpendiculaire à la ligne *MN*, dans le point donné *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Du point *E* hors de la ligne droite donnée *FC*, comme du centre d'un cercle dont le rayon soit *CE*, il faut décrire l'arc de cercle *ADC* qui rencontre la ligne droite *FC* dans les points *D* & *C*, ensuite il faut prolonger la ligne *CE*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'arc de cercle dans le point *A*; si du point *A* on méne la ligne *AD*, je dis qu'elle est perpendiculaire à la ligne *FC* dans le point donné *D* de cette même ligne *FC*. Tab. 5. Fig. 4.

DEMONSTRATION.

L'angle *ADC* est à la circonférence & appuyé sur la moitié du cercle. Donc (*Cor.* 3. *Th.* 18.) cet angle est droit & la ligne *AD* qui fait avec *CD* un angle droit, est perpendiculaire à cette ligne *CD*, & par conséquent à la ligne *FC*, dans le point donné *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Si le point d'où il faut mener une perpendiculaire à une *ligne droite donnée, n'étoit point marqué*, *on pourroit encore* opérer d'une autre façon.

Tab. 15. Fig. 5. Par exemple, pour mener une ligne perpendiculaire à une ligne donnée AE, il faut prendre dans cette ligne, $AB = BC$, & du point B mener la ligne $BD = AB$ & BC, qui fasse avec AC tels angles qu'on voudra. Ensuite il faut prolonger DC vers F jusqu'à ce que CF soit $= AC$. Enfin il faut prendre $CE = CD$ & joindre les points F & E par la ligne droite FE. Je dis que cette ligne FE est perpendiculaire à la ligne droite donnée AE.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) les lignes droites BA, BD, BC sont égales, le point D (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) se trouvera dans la circonférence du cercle dont le diamétre sera AC & le centre B, & par conséquent si on méne la ligne AD, l'angle ADC (*Cor.* 3. *Th.* 18.) sera un angle droit; mais (*l'hyp.*) $CF = AC$ & $CE = CD$. Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) $CF \cdot CE :: AC \cdot CD$, & par conséquent les triangles FCE & ACD ont des côtés proportionnels, & les angles compris entre ces côtés (*Th.* 3.) égaux. Donc ces triangles sont (*Cor.* 2. *Th.* 29.) semblables & équiangles. Donc, puisqu'on vient de voir que l'angle ADC est un angle droit, l'angle FEC est aussi un angle droit, ou bien FE est perpendiculaire à la ligne droite donnée AE. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME II.

Tab. 16. Fig. 1. Mener par un point donné, une ligne paralléle à une autre ligne donnée.

SOLUTION.

Soit D le point donné par lequel doit passer la ligne paralléle à FC; qu'on méne la ligne DE, & du point H de la ligne FC comme du centre, qu'on décrive un arc de cercle GN dont le rayon soit $HG = DE$, & du point D comme du centre, qu'on décrive un autre arc de cercle MN dont le rayon soit $DG = HE$, qui coupe le premier dans

dans le point G ; je dis que la ligne droite DG est la ligne paralléle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Il est évident par la construction du quadrilatére DH, qu'il a ses côtés opposés égaux ; savoir $HG = ED$ & $HE = GD$. Donc (*Th.* 26.) ce quadrilatére est un parallélograme, ou bien (*Déf.* 12.) ses côtés opposés sont paralléles. Donc DG est paralléle à EH, & par conséquent à la ligne donnée FC. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 16. Fig. 2.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on méne du point donné D, une ligne droite, comme ED, dans laquelle prolongée vers A, on prenne $EA = DE$. Qu'on méne ensuite du point A, une ligne comme l'on voudra, par exemple AH, qu'on prolonge cette ligne vers G jusqu'à ce que HG soit $= AH$; si après cela on méne la ligne GD ; je dis que cette ligne est la paralléle qu'on cherche.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) $AH = GH$ & $AE = DE$. Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) $AH \cdot GH :: AE \cdot DE$. & par conséquent (*Part.* 2. *Th.* 29.) GD est paralléle à la ligne HE, ou FC. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME III.

D'un point donné mener une ligne, qui avec une autre ligne aussi donnée, fasse un angle égal à un angle donné. Tab. 16. Fig. 3. & 4.

SOLUTION.

Ou le point donné est dans la ligne donnée, ou hors de cette ligne.

PREMIER CAS.

Soit le point donné B dans la ligne donnée FG, qu'il faille dans ce point B faire un angle égal à l'angle A de la fig. 3. tab. 16. Qu'on décrive, des points A & B pris pour centres, avec la même ouverture de compas, les arcs EK, GK, dont le premier rencontre les côtés de l'angle A dans les points E & L, & l'autre, la ligne droite donnée, dans le point G : ensuite après avoir ouvert & placé le compas dans les points E & L, qu'on prenne dans l'arc GK, $GH = EL$, & qu'on méne la ligne BH : Je dis que l'angle HBG est égal à l'angle donné A.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) les lignes EL & GH sont égales, & que les côtés AE, AL, BG, BH sont des rayons de deux cercles égaux ; les triangles LAE, & HBG sont (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) équilatéraux, & par conséquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) leurs angles A & B sont égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 5. Tab. 16. & Fig. 6.

Qu'on méne de tel point qu'on voudra, par exemple du point L du côté AL de l'angle donné, une ligne perpendiculaire (*Prob.* 1.) au côté AE, ensuite qu'on prenne $BG = AD$. Qu'on méne du point G la ligne perpendiculaire GM à la ligne droite BC, qu'on prenne $GH = DL$, & qu'on méne la ligne BH : Je dis que l'angle CBH est égal à l'angle donné EAL.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) les angles D & G sont deux angles droits, & par conséquent égaux, & qu'ils ont des côtés semblables les uns aux autres, savoir $BG = AD$ & $GH = DL$, les triangles BGH & ADL sont (*Cor.* 2. *Th.* 29.) égaux, donc l'angle HBG est égal à l'angle donné A. Ce qu'il falloit démontrer.

SECOND CAS.

Tab. 16. Fig. 7. & 8.

Si le point donné est hors de la ligne droite donnée, comme le point B hors de la ligne donnée FC, & qu'il faille de ce point mener une ligne qui fasse avec la ligne

FC l'angle *BHC* égal à l'angle donné *A*. D'un point de la ligne donnée *FC*, pris à volonté, comme *G*, qu'on méne une ligne qui fasse (*Sol.* 1. *Cas*) un angle avec *FC* égal à l'angle donné *A*. Ensuite qu'on méne du point *B* (*Prob.* 2.) la ligne *BH* paralléle à la ligne *LG*: Je dis que l'angle *B HC* est égal à l'angle donné.

DEMONSTRATION.

Puisque *BH* & *LG* sont (*l'hyp.*) paralléles, l'angle *BHC* (*Déf.* 5.) est égal à l'angle *LGC*, qui (*l'hyp.*) est égal à l'angle donné.

PROBLEME IV.

Couper en deux parties égales un angle donné.

SOLUTION.

Soit l'angle *FAE* qu'il faut couper en deux parties égales. Du point *H* pris à volonté dans le côté *AF*, qu'on méne (*Prob.* 2.) la ligne *HG* paralléle à l'autre côté *AE*; ensuite qu'on prenne dans *HG*, *HB* = à la ligne *HA*, & qu'on méne la ligne *AB*: Je dis que cette ligne *AB* coupe l'angle donné *FAE* en deux parties égales. Tab. 17. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) *HB* = *HA*, les angles *HAB*, & *HBA* sont (*Th* 22.) égaux entre eux; & (*l'hyp.*) la ligne *HB* étant paralléle à la ligne *AE*, les angles alternes *H BA*, & *BAE* sont aussi (*Th.* 8.) égaux entre eux. Donc (*Ax.* 6.) les angles *HAB*, & *BAE* sont aussi égaux, & par conséquent la ligne droite *AB* coupe l'angle donné *F AE* en deux parties égales. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on prenne les parties *AC*, *CD*, dans le côté *EA* de l'angle donné *FAE* qu'il faut couper par la moitié, égales chacunes à *AH* prise à volonté dans l'autre côté *AF* de l'angle donné *FAE*. Ensuite qu'on méne du point *D* Tab. 17. Fig. 2.

par le point H, la ligne DH dans laquelle prolongée vers B on aura $HB = DH$: Je dis que la ligne droite AB coupe l'angle donné EAF en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Si on méne la ligne CH ; il est constant que puisque (*l'hyp.*) $DC = CA$, & $DH = HB$ (*Cor.* 1. *Def.* 17.) $DC \cdot CA :: DH \cdot HB$, & par conséquent (*Part.* 2. *Th.* 29.) CH est paralléle à AB. Donc les angles EAB & ECH (*Déf.* 5.) sont égaux, de même que les alternes (*Th.* 8.) BAH & AHC. Mais (*l'hyp.*) CA est aussi $= AH$. Donc dans le triangle CAH, les angles ACH & AHC sont égaux entre eux. Donc les angles EAB & BAH sont aussi égaux, & par conséquent la ligne droite AB coupe par la moitié l'angle donné EAF. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Tab. 17. Fig 5. Qu'on décrive du centre A un arc de cercle HK de tel rayon qu'on voudra, qui rencontre les côtés de l'angle donné EAF dans les points H & K, desquels comme d'autant de centres on décrive des arcs de tel autre rayon qu'on voudra, qui se coupent dans le point B : Je dis que la ligne droite AB coupe l'angle donné EAF en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Puisque AH & AK sont des rayons du même cercle, AH est (*Cor.* 2. *Def.* 6.) $= AK$. De même, puisque les lignes droites HB & BK sont (*l'hyp.*) des rayons de deux cercles égaux. Donc le côté AB étant commun aux deux triangles AHB, & AKB, ces deux triangles sont équilatéraux, & par conséquent (*Cor.* 3. *Th.* 24.) leurs angles HAB, & BAK sont égaux entre eux, ou bien la ligne droite AB coupe par la moitié l'angle donné EAF. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut aisément diviser par la même méthode un angle en quatre, huit, seize &c. parties égales, en divisant chaque partie en deux.

PROBLEME V.

Diviser un angle droit en trois parties égales. Tab. 17. Fig. 4.

SOLUTION.

Du centre *A*, qu'on décrive un arc de cercle de tel rayon qu'on voudra, par exemple l'arc *HGK*, qui rencontre dans les points *H* & *K* les côtés *AF* & *AE* de l'angle donné *FAE*. Ensuite du centre *K*, qu'on décrive un autre arc de cercle de même rayon, qui coupe le premier dans le point *G*, & qu'on méne la ligne *AG*. Je dis que l'angle *FAG* est la troisiéme partie de l'angle donné *EAF*.

DEMONSTRATION.

Puisque les lignes droites *AK*, *KG* & *AG* sont (*l'hyp.*) des rayons égaux des arcs *KG* & *AG*, le triangle *AKG* sera équilatéral, & par conséquent (*Cor. 2. Th. 22.*) équiangle. Donc, puisque (*Th. 21.*) ses trois angles sont égaux à deux angles droits, ou bien à 180 degrés, chacun de ces angles sera égal au tiers de 180; c'est-à-dire à 60, mais l'angle droit *EAF* est égal à 90 degrés. Donc l'angle *GAF* est égal à 30 degrés, & par conséquent est la moitié de l'angle *EAG*, ou bien le tiers de tout l'angle *EAF*. Donc si (*Probl. 4.*) on divise l'angle *EAG* en deux parties égales, chacune de ces parties sera encore le tiers de l'angle donné *EAF*. Donc par la méthode présente on peut diviser un angle donné en trois parties égales.

PROBLEME VI.

Couper un angle rectiligne en trois parties égales.

SOLUTION.

Il faut attacher au compas *GEH* un autre compas, de maniére qu'ils fassent ensemble un rhombe comme le compas *FZB* qui fait avec le compas *GEH* le rhombe *EF* Tab. 17. Fig. 5.

ZB, qu'on peut ouvrir ou fermer, & que *EH* soit au moins triple de *EB*. soit l'angle donné *AZD* qu'il faut couper en trois parties égales : De ses côtés *ZA* & *ZD*, il faut couper les parties *ZR* & *ZX* qui soient égales à *EB*. Ensuite qu'on place le centre *Z* de l'instrument dans le sommet *Z* de l'angle donné *AZD*, & qu'on ferme le compas jusqu'à ce que *EG* & *EH* passent par les points *R* & *X*, & que l'espace *RX* soit compris entre les jambes du compas; je dis que l'angle *REX*, ou *GEH* est le tiers de l'angle donné *AZD*.

DEMONSTRATION.

Si on méne la ligne diagonale *EZ* vers *S* si loin qu'on voudra ; puisque les deux triangles *EBZ*, *BZX* sont (*construc.*) Isocéles, l'angle externe *XBZ* ou *ZXB* sera (*Th. 22. & Cor, 5. Th. 21.*) le double de l'angle *BEZ*. Donc puisque l'angle externe *XZS* par rapport au triangle *EZX* est égal (*Cor. 5. Th. 21.*) aux deux internes opposés *XEZ* & *ZXE*, ce même angle *XZS* sera le triple de l'angle *XEZ*. De même l'angle externe *RZS* est par rapport au triangle *REZ*, le triple de l'angle *REZ*. Donc tout l'angle *RZX*, ou bien l'angle donné *AZD* est le triple de l'angle *REX* : & par conséquent l'angle *REX*, ou bien *GEH* est le tiers de l'angle donné *AZD*. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

De ce problême suit la méthode générale de diviser un angle rectiligne en autant de parties égales qu'on voudra, comme on le peut voir par le Problême suivant.

PROBLEME VII.

Diviser un angle rectiligne en autant de parties égales qu'on voudra.

SOLUTION.

Tab. 17. Fig. 6. Soit premiérement l'angle donné *AKD*, qu'il faut diviser en plusieurs parties égales. Qu'on ajoûte à l'instrument dont on s'est servi dans le problême précedent, un autre rhombe équilateral au premier, de maniére que lorsqu'on ferme les rhombes en fermant l'instrument, les sommets *X* & *R* puissent couler vers *G*, *H*, sur les côtés *EG*, *EH*, ou dans un canal creusé dans ces côtés ; & que *EG* & *EH* soient au moins cinq fois plus longs que *EF* ou *EB*. Les choses étant ainsi, qu'on coupe les parties *KM* & *KN* égales à *EB*, qu'on place après cela le centre *K* de l'instrument, comme on l'a dit ci-dessus, dans le sommet *K* de l'angle donné *AKD*, & qu'on ferme le compas jusqu'à ce que l'espace *MN* soit compris entre les côtés *EG*, *EH* : je dis, que l'angle *MEN* est la cinquiéme partie de l'angle donné *AKD*.

DEMONSTRATION.

Si on méne la diagonale *EZ* vers *S* si loin qu'on voudra, elle passera par le point *K*. Car puisqu'on a démontré (*Probl. 6.*) que les angles *XZS*, *RZS* sont chacuns le triple des angles égaux *BEZ*, *FEZ*; les angles *XZK*, *RZK*, sont donc égaux entr'eux, & (*Cor. 3. Th. 26.*) ZK est diagonale du rhombe *ZRKX*. Cela étant ainsi, puisque l'angle *XZK*, ou bien (*Th. 22.*) *XKE* est (*Probl. 6.*) le triple de l'angle *XEK*, & que l'angle externe *NXK*, ou bien (*Th. 22.*) *KNE* (*Cor. 5. Th. 21. & Probl. 6.*) est égal à l'angle interne *XEK*, & à l'angle *XKE* qui en est le triple; le même angle *KNE*, sera le quadruple de l'angle *NEK*. Donc l'angle externe *NKS* par rapport au triangle *EKN*, sera cinq fois plus grand que l'angle *NEK*. On peut de même démontrer que l'angle *MKS* est cinq fois plus grand que l'angle *MEK*; Et par conséquent tout l'angle *MKN*, ou l'angle donné *AKD* est cinq fois plus grand que l'ange *MEN*. Donc cet angle *MEN*, ou bien *GEH* est la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné *AKD*.

S'il falloit diviser l'angle donné en sept parties égales, il faudroit ajoûter un troisiéme rhombe construit de la même façon, & ainsi des autres; ce qui n'a pas besoin d'une nouvelle démonstration. L'on peut donc par cette méthode diviser un angle en autant de parties égales qu'on voudra.

COROLLAIRE.

Si on a un instrument composé de plusieurs rhombes; le premier *FEBZ* servira à diviser l'angle donné en trois parties, en plaçant le centre *Z* au sommet de l'angle donné, & fermant l'instrument de maniére que les côtés *ZX*, *ZR* du rhombe suivant conviennent avec les côtés de l'angle donné; le second rhombe servira à diviser cet angle en cinq parties égales, en plaçant le centre *K* au sommet de l'angle donné, & rapprochant les côtés du compas jusqu'à ce que les côtés du rhombe suivant, conviennent avec ceux de l'angle donné. Le troisiéme, servira à diviser l'angle donné en sept parties égales, & ainsi des autres.

PROBLEME VIII.

Diviser la circonférence d'un cercle en 360 parties égales, qu'on appelle degrés.

SOLUTION.

Il faut premiérement diviser le cercle donné en quatre parties égales, par le moyen de deux diamétres (*Probl.* 1.) perpendiculaires, ensuite chaque quart de cercle en trois parties égales (*Probl.* 5.), après cela, si on applique aux trois autres quarts de cercle, l'ouverture du compas égale à une de ces parties, il est constant que chacune de ces parties sera la douziéme de tout le cercle, & par conséquent de 30. dégrés. Si on divise encore chacune de ces parties en deux (*Probl.* 4.) chacune de ces parties sera de 15. degrés, ensuite si (*Probl.* 5.) on divise chacune de ces parties de 15. degrés en trois, celles qui resulteront de cette division seront de 5. degrés, qui étant (*Probl.* 7.) divisées en cinq parties donneront les 360. degrés que l'on cherche.

SCOLIE.

SCOLIE.

La méthode de divifer ainfi le cercle, eft exprimée par le vers fuivant qui doit s'entendre du quart de cercle.

In tres, in binas, in tres, in quinquefecato.

L'on peut par la même méthode pouffer plus loin la divifion du cercle, s'il eft néceffaire, & le divifer en minutes premiéres, fecondes, &c. en divifant chaque degré en 60 parties, & chacune de ces parties en 60 autres. On fera beaucoup plus fûrement cette divifion dans les petits arcs, par le moyen du compas ordinaire, que par le moyen de l'inftrument du Problême 7.

Le cercle ainfi divifé peut fervir à divifer de même tout autre cercle concentrique, auffi-bien qu'à connoître les rayons vifuels de toutes les chofes que l'on peut regarder : Ce qui eft très-utile pour mefurer toutes forfortes de diftances & d'étenduës, comme on le verra dans la fuite.

PROBLEME IX.

Divifer une ligne droite en plufieurs parties qui foient entr'elles en tel rapport qu'on voudra. Tab. 18. Fig. 1.

SOLUTION.

Soit la ligne droite AB qu'il faut divifer en plufieurs parties, qui foient entr'elles en raifons données. Qu'on méne à l'extrêmité de cette ligne donnée la ligne AX; qu'on prenne dans cette ligne des parties en mémes raifons & en même nombre que les parties de la ligne donnée AB, & que la derniére de ces parties foit VN; qu'on méne enfuite la ligne droite BN, & des points R, S, V, des lignes (*Probl.* 2.) paralléles à BN, favoir RC, SD, VE, &c. qui rencontrent la ligne donnée AB en autant de points : Je dis, que cette ligne AB eft divifée en autant de parties & telles qu'on le fouhaittoit.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'Hyp.*) les lignes *BN*, *EV*, *DS*, *CR*, &c. sont paralléles, *AC*· *CD* :: *AR*· *RS* (*Th.* 29.) Donc si on méne (*Probl.* 2.) la ligne *CF* paralléle à la ligne *AX*, & qu'elle rencontre en *H* & *F* les lignes *DS* & *EV* paralléles (*l'Hyp.*) à la ligne *CR*, on aura aussi (*Th.* 29.). *CD*· *DE* :: *CH*· *HF* :: *RS*· *SV* (*Part.* 2. *Th.* 26.). si on méne (*Probl.* 2.) la ligne *DG* paralléle à la ligne *AX*, & qu'elle rencontre en *K* & *G* les lignes droites *EV*, *BN* qui sont (*l'Hyp.*) paralléles à la ligne *SD*, on aura de même (*Th.* 29) *DE*· *EB* :: *DK*· *KG* (*Th.* 26. *Part.* 2.) :: *SV*· *VN*; & ainsi des autres, si on demandoit plus de parties qu'il n'y en a dans la ligne *AB*. Nous avons donc *AC*· *CD* :: *AR*· *RS*, de plus *CD*· *DE* :: *RS*· *SV*, & *DE*· *EB* :: *SV*· *VN*, & par conséquent la ligne droite donnée *AB* est divisée en parties *AC*, *CD*, *DE*, *EB*, proportionnelles aux parties *AR*, *RS*, *SV*, *VN*, prises dans *AX*. Donc puisque le nombre des unes & des autres est le même & qu'elles sont en mêmes raisons, la ligne donnée *AB* est enfin divisée en autant de parties & telles qu'on le souhaittoit.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 2. & 3. Tab. 28.

Qu'on prenne dans la ligne prolongée si loin qu'on voudra, autant de parties *FG*, *GH*, *HK*, *KL* en raisons données avec les parties qu'on cherche dans la ligne droite donnée *AB*, & en même nombre. Des points *F*, *L* pris pour centres, qu'on décrive des arcs de cercle dont le rayon soit *FL*, que ces arcs se coupent dans le point *N*, & que par ce moyen on fasse le triangle équilateral *FNL*; qu'on prenne dans les deux côtés *NF*, *NL* de ce triangle, les parties *NB* & *NA* égales chacunes à la ligne donnée *AB* qui fasse avec elles un autre triangle équilateral *BNA*. Ensuite qu'on méne du sommet *N* par tous les points *G*, *H*, *K* des divisions de la ligne *FL*, autant de lignes droites *NG*, *NH*, *NK*, qui étant prolongées rencontrent la ligne donnée *AB* en autant de points *E*, *D*, *C*: Je dis, que cette ligne *AB* est divisée par cette méthode en parties *BE*, *ED*, *DC*, *CA*, telles qu'on le souhaittoit.

DEMONSTRATION.

Il est constant par la construction des triangles *FNL*, & *BNA* qu'ils sont équilateraux, & par conséquent (*Cor. 3. Th. 24.*) équiangles. Donc les angles *F* & *B* sont égaux entr'eux, & ainsi (*Déf. 5.*) les lignes droites *FL* & *BA* sont paralléles, & les triangles *BNE* & *FNG* équiangles, aussi-bien que *END* & *GNH*. Donc (*Cor. 1 Th. 29.*) *BE*· *FG* :: *NE*· *NG* :: *ED*· *GH* :: *ND*· *NH* :: *DC*· *HK* :: *NC*· *NK* :: *CA*· *KL*. Donc (*Reg. 2. Prop.*) *BE*· *ED* :: *FG*· *GH*; de même *ED*· *DC* :: *GH*· *HK*. De plus *DC*· *CA* :: *HK*· *KL*. Donc les parties *BE*, *ED*, *DC*, *CA* de la ligne droite donnée *BA*, sont en même rapport entr'elles, que les parties *FG*, *GH*, *HK*, *KL* de la ligne *FL*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME X.

Décrire un cercle par trois points donnés qui ne soient pas disposés en ligne droite.

SOLUTION.

Que les points donnés soient *F*, *A*, *B*. Qu'on joigne ces points par les lignes droites *AF*, & *AB*. Ensuite (*Prob. 9. & 1.*) du milieu de ces lignes qu'on éléve les perpendiculaires *EC*, *DC* qui se rencontrent dans le point *C*: Je dis, que ce point *C* est le centre du cercle qui passe par les trois points donnés *F*, *A*, *B*. Tab. 18. Fig. 4.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'Hyp.*) *EC* & *DC* sont perpendiculaires au milieu des lignes *AF*, *AB*, il s'ensuit (*Th. 5.*) que tous les points de la ligne *EC*, ſont également diſtans des extrêmités *A* & *F* de la ligne droite *AF*, & que tous ceux de la ligne *DC*, ſont auſſi également éloignés des extrêmités *A* & *B* de la ligne *AB*. Donc le point *C* commun aux lignes droites *EC* & *CD* eſt également diſtant des points *F*, *A*, *B*; ou bien les lignes droites *CF*, *CA*, *CB*, ſont égales. Donc (*Cor.* 2. *Déf.* 6.) le cercle décrit du centre *C*, qui a pour rayon *CF*, paſſe auſſi par les deux autres points donnés *A* & *B*. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Tab. 18. Fig. 4. On peut, par cette même méthode, trouver le centre d'un cercle ou d'un arc de cercle, comme *FAB*, en menant deux lignes ou cordes *AF* & *AB*, & les coupant par la moitié par le moyen des perpendiculaires *EC*, & *DC*; car le point *C* ſeroit le centre cherché.

PROBLEME II.

Mener une ligne qui touche un cercle dans un point donné.

SOLUTION.

Tab. 18. Fig. 5. Si *D* eſt le point donné: après avoir trouvé (*Problême* 10.) le centre *C* du cercle donné *DEF*, qu'on méne le rayon *DC*, & dans le plan du cercle, la perpendiculaire (*Probl.* 1.) *DL* à ce rayon. Il eſt conſtant (*Cor* 6. *Th.* 11.) que cette perpendiculaire eſt la tangente que l'on cherche.

Si le point donné eſt hors du cercle donné *DEF*, comme le point *A*. Après avoir trouvé comme auparavant le centre *C*, qu'on méne la ligne *AC* & qu'elle ſoit le diamétre du cercle *ADC* qui coupe en *D* le cercle donné *EDF*, qu'on méne enſuite la ligne *AD*: Je dis qu'elle eſt la tangente que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Qu'on méne la ligne *DC*; puiſque l'angle rectiligne *A*

DC est (*l'Hyp.*) dans le demi cercle, il est (*Cor.* 3. *Th.* 18.) droit, & par conséquent (*Cor.* 6. *Th.* 11.) *AD* touche le cercle donné *EFD* dans le point *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XII.

Trois lignes droites *AB*, *AC*, *AF* étant données, trouver une quatriéme proportionnelle. Tab. 18. Fig. 6.

SOLUTION.

Qu'on dispose en ligne droite la seconde *AC* & la troisiéme *AF* des lignes données, & que la premiére les rencontre dans tel point que l'on voudra, par exemple dans le point *A*. Qu'on décrive ensuite (*Probl.* 10.) un cercle par les trois points *CBF*; enfin qu'on prolonge la ligne *BA* jusques au point *L* de la circonférence du cercle : Je dis que la ligne *AL* est la quatriéme proportionnelle cherchée, ou bien que *AB*· *AC* : : *AF*· *AL*.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) les cordes *CF* & *BL* se coupent dans le point *A* (*Th.* 39.) *AB*· *AC* : : *AF*· *AL*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 18. Fig. 6.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on dispose en ligne droite *AB* & *AC*, qu'on fasse ensuite tel angle qu'on voudra dans le point *B*, par exemple *CBD*, & que dans le côté *BD* prolongé si loin qu'on voudra, on prenne *BE* = *AF*; qu'on méne ensuite la ligne droite *AE*, & la ligne *CL* du point *C*, qui soit paralléle à la ligne *AE*, & qui rencontre *BD* dans le point *L* : Je dis que la ligne *EL* est la quatriéme proportionnelle cherchée, & que *AB*· *AC* : : *AF*· *EL*. Tab. 18. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

La ligne *CL* (*construc.*) est paralléle à la ligne *AE*. Donc (*Th.* 29.) *AB*· *AC* : : *BE*· *EL*. Mais (*construc.*) *BE* est = *AF*. Donc *AB*· *AC* : : *AF*· *EL*. Donc *EL* est la quatriéme proportionnelle. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XIII.

Deux lignes droites *AC*, & *AF* étant données, trouver entre elles une moyenne proportionnelle. Tab. 18. Fig. 8.

SOLUTION.

Il faut disposer en ligne droite *AC* & *AF*, & décrire un cercle dont *CF* soit le diamétre, ensuite il faut élever sur ce diamétre une perpendiculaire *AB*, qui rencontre la circonférence du cercle dans le point *B* : Je dis que la ligne *AB* est la moyenne proportionnelle que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Si on prolonge *AB* de maniére qu'elle rencontre un autre point *L* de la circonférence ; puisque (*l'Hyp.*) *CF* passe par le centre du cercle, & qu'elle est perpendiculaire à la corde *BL*, (*Cas* 3. *Th.* 12.) elle coupe cette corde par la moitié en *A*. Donc (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AB*· *AF* : : *AL*· *AF*; mais (*Th.* 39.) *AC*· *AB* : : *AL*· *AF*. Donc *AC*· *AB* : : *AB*· *AF*. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE SOLUTION.

Qu'on décrive sur le diamétre composé des lignes droites données *AC* & *AF*, le demi cercle *CBF*, qui rencontre dans le point *B* la ligne droite *AB* perpendiculaire à *CF* dans le point *A*, qui est celui de la jonction des parties *AC* & *AF* dont ce diamétre est formé : Je dis que la ligne *AB* est la proportionnelle cherchée.

DEMONSTRATION.

Si on méne les lignes droites *CB*, *BF*, il est constant (*Cor.* 3. *Th.* 18.) que l'angle *CBF* est droit, comme (*Hyp.*) les angles qui sont dans le point *A*, & ainsi comme l'angle *BCA* est commun aux deux triangles *CBF* & *CBA*, le troisiéme angle *BFC* du premier triangle, est égal au troisiéme angle du second triangle. Donc le triangle *CBA* est équiangle au triangle *CBF*. On peut par la même raison démontrer que le triangle *BAF* est équiangle au triangle *CBF*, & par conséquent les deux triangles *CBA* & *BAF* sont équiangles. Donc (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *AC*· *AB* : : *AB*· *AF*, & par conséquent *AB* est la moyenne proportionnelle entre les lignes données *AC* & *AF*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XIV.

La moyenne de trois proportionnelles étant donnée avec la somme des extrêmes, trouver ces extrêmes. Tab. 18. Fig. 9.

Ou couper une ligne droite *BC* dans le point *H*, de maniére que le rectangle sous les segmens *BH* & *HC* soit égal au quarré de la ligne droite donnée *A* qui n'est pas plus longue que la moitié de la ligne *BC* qu'il faut couper.

SOLUTION.

Après avoir décrit sur *BC* le demi cercle *BEC*, qu'on éléve (*Probl.* 1. & 9.) du point du milieu *D*, la perpendiculaire *DE*, dans laquelle on prenne *DF* = *A*, & qu'on méne (*Probl.* 2.) *FG* paralléle à la ligne *BC*, de maniére qu'elle coupe la circonférence dans le point *G*. Qu'on méne ensuite du point *G* la perpendiculaire (*Probl.* 1.) *GH* à la ligne *BC*: Je dis que *BH* & *HC* sont les extrêmes proportionnelles cherchées, ou bien que le rectangle sous *BH* & *HC* est égal au quarré de *GH* ou de la ligne donnée *A*.

DEMONSTRATION.

Premiérement, il est constant par le Probléme précedent 13. que *BH*· *HG* : : *HG*· *HC*, c'est-à-dire (*construc.*) *BH*· *A* : : *A*· *HC*, & par conséquent (*Lem.* 1.) le produit de *BH* & *HB* = au quarré de *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

On voit, par la Démonstration, que la ligne donnée *A* moyenne proportionnelle n'eſt pas plus grande que la moitié de la ſomme donnée *BC* des deux extrêmes que l'on cherche.

PROBLEME XV.

La moyenne de trois proportionnelles, étant donnée avec la différence des extrêmes, trouver ces extrêmes.

SOLUTION.

Tab. 18. Fig. 10. Soit la moyenne proportionnelle donnée *A*, & *BC* la différence des extrêmes, qu'on méne (*Probl.* 1.) la perpendiculaire $CD = A$; du point *E* pris pour centre, qui eſt le milieu de la ligne *BC*, qu'on décrive par le point *D* le cercle *FDG*, qui rencontre la ligne *BC* prolongée des deux côtés, dans les points *F* & *G*. Il eſt conſtant (*Probl.* 13.) que les lignes droites *CF* & *CG* ſont les extrêmes proportionnelles cherchées.

PROBLEME XVI.

Couper la ligne droite *AB* en deux parties *AG* & *GB*, telles que *AB* ſoit à *AG* :: *AG*· *GB*. C'eſt-à-dire, en moyenne & extrême raiſon.

SOLUTION.

Tab. 18. Fig. 11. Qu'on éléve ſur l'extrêmité *B* de la ligne droite donnée *AB*, une ligne *BE* perpendiculaire (*Probl.* 1.) & égale à la ligne *AB*; qu'on décrive enſuite le cercle *DEFB* dont *BE* ſoit le diamétre, & que par le centre *C*, on méne du point *A*, la ligne droite *AD* qui rencontre ce cercle dans les deux points *F* & *D*. Du point *A* pris pour centre, qu'on décrive un cercle dont *AF* ſoit le rayon, & qui coupe *AB* dans le point *G*: je dis, que cette ligne *AB* eſt telle que *AB*· *AG* :: *AG*· *GB*.

DEMONSTRATION.

Puiſque, par la conſtruction, l'angle *ABC* eſt droit, la ligne *AB* doit (*Cor.* 6. *Th.* 11.) toucher le cercle dans le le point B, & par conséquent (*Cor.* 2. *Th.* 39.) $AD \cdot AB :: AB \cdot AF$. Donc (*Rég.* 4. *prop.*) $AD - AB \cdot AB :: AB - AF \cdot AF$. C'est-à-dire que AF ou $AG \cdot AB :: BG \cdot AG$, ou (*Régl.* 2. *prop.*) $AB \cdot AG :: AG \cdot BG$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XVII.

Tab. 18. Fig. 12.

Une ligne droite indéfinie NZ étant donnée, & coupée dans les points A & K, la couper une troisiéme fois de telle maniére que NK soit à $AE :: AE \cdot NA$.

SOLUTION.

Qu'on éléve sur le point A (*Probl.* 1.) une ligne perpendiculaire AH à la ligne NZ, qu'on décrive un demi cercle dont le diamétre soit NK, & que ce demi cercle coupe la ligne AH dans le point H. Que dans la figure 1. de la table 19. on méne (*Probl.* 1.) KH perpendiculaire à la ligne donnée NZ, qui soit aussi coupée en H par le demi cercle NHA. Qu'on méne ensuite dans les deux figures, la ligne NH sur laquelle dans le point H il faut (*Probl.* 1.) élever la perpendiculaire HL, égale à la ligne NC, qui est la moitié de NK. Qu'on décrive ensuite du point L pris pour centre, un cercle qui passe par le point H; il touchera (*Cor.* 6. *Th.* 11.) la ligne droite NH dans le point H, & après avoir mené la ligne droite NL jusqu'à ce qu'elle rencontre ce cercle dans le point P, qu'on prenne $AE = MP$: je dis, que pour lors on aura $NK \cdot AE :: AE \cdot NA$.

Tab. 19. Fig. 1.

DEMONSTRATION.

Puisque les angles KHN & HAN dans la premiere figure, c'est-à-dire, la figure 12. table. 18. & les angles AHN & HKN de la seconde figure, c'est-à-dire, la premiére de la table 19. sont (*par le Cor.* 3. *Th.* 18. & *l'Hyp.*) des angles droits, & que l'angle HNA dans les deux figures, est commun aux deux triangles KHN, &

AHN, ces triangles sont (*Cor.* 4. *Th.* 21.) équiangles; & par conséquent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $KN \cdot HN :: HN \cdot AN$. Donc (*Lem.* 1. *prop.*) le produit de KN par AN des extrêmes, est égal au produit des moyennes, c'est-à-dire, au quarré de HN, ou bien (*Cor.* 2. *Th.* 39.) au produit de PM par NM.

De plus, puisque (*par l'hyp.*) $EA = MP$, & $MP = 2 HL = KN$, on aura aussi $EA \times KN = MP \times MP$. Donc les produits ou rectangles $KN \times AN$, & $EA \times KN$ seront égaux à ces deux autres $PM \times NM$, & $PM \times PM$; mais (*par la construction*) $PM = AE$. Donc $KN \times AN = AE \times AE$, & par conséquent (*Lem.* 1.) $KN \cdot AE :: AE \cdot AN$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XVIII.

Deux côtés d'un triangle rectiligne & l'angle opposé à l'un de ces côtés, étant donnés, trouver l'angle dont on connoît l'espéce, c'est-à-dire, s'il est obtus ou aigu, opposé à l'autre côté donné.

Tab. 19. Fig. 2.

SOLUTION.

Soit un triangle rectiligne ABC, dont on connoisse les deux côtés AB & AC, avec l'angle C opposé au côté AB; on demande quelle est la valeur de l'angle B opposé à l'autre côté donné AC, Qu'on fasse cette analogie : le côté donné AB est au sinus de l'angle aussi donné C, comme l'autre côté donné AC est à l'angle B que l'on cherche; & le quatriéme terme de cette analogie (*Th.* 40.) sera le sinus de l'angle B que l'on cherche, lequel sinus trouvé dans les tables, fera connoître les degrés & les minutes de cet angle. On trouvera ce quatriéme terme par la régle de trois.

Mais parce que (*Scol. Th.* 42.) le sinus de deux angles dont l'un est aigu & l'autre obtus, est le même lorsque la mesure de ces angles pris ensemble, est un demi cercle, l'on doit connoître si l'angle que l'on cherche est aigu ou obtus.

Après avoir trouvé l'angle B, il eſt facile de trouver le troiſiéme A, puiſque les trois angles d'un triangle ſont toûjours égaux à deux droits ou à 180 degrés. Donc deux côtés d'un triangle rectiligne, avec un des angles oppoſés à ces côtés, étant donnés, & l'eſpéce de l'autre, l'on trouve cet autre angle & le troiſiéme.

AVERTISSEMENT.

Si l'angle donné eſt droit ou obtus, on connoît par cela ſeul l'eſpéce des deux autres, puiſqu'ils doivent pour lors (*Th.* 21.) être tous deux aigus.

Il faut auſſi remarquer que les petites lignes qui ſont dans la figure, marquent les angles & les côtés que l'on connoît.

PROBLEME XIX.

Deux angles d'un triangle rectiligne, avec un de ſes côtés, étant donnés, trouver le troiſiéme angle avec les deux autres côtés.

SOLUTION.

Premiérement, puiſque (*Th.* 21.) les trois angles d'un triangle ſont toûjours égaux à deux droits, ou à 180 degrés, ſi l'on ôte de 180 les angles donnés, ce qui reſtera exprimera la valeur du troiſiéme angle que l'on cherche. Tab. 19. Fig. 3.

Secondement, puiſque (*Th.* 40.) le ſinus de l'angle C eſt au côté oppoſé AB donné, comme le ſinus de l'angle B donné, eſt au côté oppoſé AC; de même auſſi le ſinus de l'angle A trouvé, doit être au côté BC qui lui eſt oppoſé. Et par conſéquent, ſi l'on diviſe par le ſinus de l'angle C, le produit du côté AB par le ſinus de l'angle B, qui ſont les moyens termes de la premiére analogie, l'on aura pour quotient le côté AC. Après cela, ſi par le moyen de la même régle de trois on diviſe le produit du côté AB & du ſinus de l'angle A, moyens termes de la ſeconde analogie, par le ſinus de l'angle *C* premier terme de cette analogie ; l'on aura aussi pour quotient le troisiéme côté *BC*, & ainsi l'on trouvera tous les angles & tous les côtés du triangle proposé.

PROBLEME XX.

Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés ; trouver tous ces angles.

SOLUTION.

Tab. 19. Fig. 4. Que le plus grand des côtés donnés *AB*, *BC*, & *AC* du triangle proposé *ABC*, soit *BC*; mais (*Th.* 41.) le plus grand côté *BC* est à la somme donnée des deux autres *AB* & *AC*, comme la différence donnée, à la différence des segmens *BD* & *DC* faits par la perpendiculaire *AD*. Donc (*Lem.* 1. *prop.*) Si on multiplie la somme des côtés *AB* & *AC* par leur différence, & qu'on divise par le côté *BC* le produit de ces termes moyens de l'analogie présente; l'on aura pour quotient, le quatriéme terme que l'on cherche ; c'est-à-dire, la différence des segmens *BD* & *DC*. Donc si après avoir trouvé cette différence on l'ôte du côté *BC*, & qu'on coupe par la moitié ce qui reste, la moitié qui en résultera sera le petit segment *DB*.

Par ce moyen on connoîtra dans le triangle *ADC*, les deux côtés *AC* & *DC* avec l'angle droit *D* opposé à l'un de ces côtés. Donc (*Probl.* 18.) on connoîtra aussi l'angle *DAC*; & par conséquent si l'on ôte cet angle & l'angle droit, de 180 degrés, ce qui restera exprimera la valeur (*Th.* 22.) de l'angle *C*. L'on aura donc les deux angles *C* & *DAC*. L'on trouvera par le même moyen, les deux angles, *A* & *DBA* du triangle *ADB*, dont les deux côtés *AB* & *AD* sont déja connus, avec l'angle droit *D* opposé à l'un de ces côtés *AB*. Donc par cette méthode, tous les côtés du triangle *ABC* étant donnés, on trouve tous les angles de ce même triangle.

PROBLEME XXI.

Deux côtés d'un triangle rectiligne, & l'angle compris entre ces côtés étant donnés, trouver les autres angles, & le troisiéme côté. Tab, 19. Fig. 5.

SOLUTION.

Soit le triangle rectiligne *CBD*, dont on connoisse les deux côtés *CB* & *DB* avec l'angle *B* compris entre ces côtés, l'on demande les deux angles *C* & *D* avec le troisiéme côté *CD*.

Puisque les trois angles d'un triangle rectiligne sont toûjours égaux à deux droits (*Th.* 21.) ou bien à 180 degrés, si l'on ôte de ces 180 degrés, l'angle donné *B*, le reste sera la somme des angles *C* & *D*, & par conséquent l'on aura leur demi-somme, dont on trouvera dans les tables la tangente, parce que (*l'hyp.*) les deux côtés *BC* & *BD* étant donnés, l'on connoîtra leur somme & leur différence. Mais (*Th.* 42.) comme la somme des côtés *BC* & *BD*, est à leur différence, de même la tangente de la demi-somme des angles *D* & *C*, qui sont opposés à ces côtés, est à la tangente de leur demi-différence. Donc si l'on divise le produit des moyens termes de cette analogie, c'est-à-dire, le produit de la différence des côtés *CB* & *BD*, & de la tangente de la demi-somme des angles *C* & *D*, qui sont opposés à ces côtés, par la somme de ces mêmes côtés, qui est le premier terme de l'analogie; l'on aura pour quotient le quatriéme terme, qui est la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles *C* & *D*; laquelle tangente cherchée dans les tables, donnera cette demi-différence : qu'on ajoûte ensuite cette demi-différence à la demi-somme des angles *C* & *D*, & (*Lem.* 5.) l'on aura le plus grand de ces deux angles.

Comme (*l'hyp.*) les côtés *BC* & *BD* sont donnés, l'on connoît quel est le plus grand, & par conséquent (*Th.* 23.) l'on connoît aussi quel est le plus grand angle qui est déja connu, Donc dans le triangle *BCD* l'on connoît deux angles avec deux côtés. Donc (*Probl.* 19.) l'on connoîtra le troisiéme angle & le troisiéme côté. Ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME XXII.

Tab. 19. Fig. 6. & 7.

Dans un triangle rectiligne, deux angles avec un côté; ou deux côtés avec un angle étant donnés, ou bien tous les côtés, trouver sa hauteur.

SOLUTION.

Soit le triangle *ABC* dont on cherche la hauteur; deux de ces angles & un côté, ou deux de ces côtés & un angle, ou bien tous ses côtés étant donnés, qu'on se serve de quelqu'un des Problêmes 18, 19, 20, dans lesquels les mêmes choses sont données, & par le moyen de ce Problême qu'on cherche le côté *AB* avec l'angle adjacent *A*, s'il n'est pas donné. L'on aura par ce moyen dans le triangle *ABD* deux angles, savoir l'angle *A* donné ou trouvé, & l'angle droit *D* avec le côté *AB*. Donc (*Probl.* 19. on connoîtra le côté *BD* qui est la hauteur que l'on cherchoit.

PROBLEME XXIII.

Tab. 19. Fig. 8.

Approcher à l'infini de la valeur rectiligne d'un arc de cercle.

SOLUTION.

Soit l'arc *HKL* plus petit que le demi-cercle, dont la corde soit *HL*; qu'on méne la ligne *HA* qui touche l'arc dans le point *H*, & que l'angle *HLA* soit droit; que la ligne droite *HG* divise l'arc *HL* par la moitié dans le point *K*, & qu'elle rencontre la ligne droite *LA* dans le point *G*; que l'angle *HGB* soit droit, & que *HF* divise l'arc *HK* par la moitié en *S*, & qu'elle rencontre la ligne *GB* en *F*; que l'angle *HFC* soit droit, & ainsi des autres à l'infini: Je dis que l'arc proposé *HKL* est plus grand que *HL* & plus petit que *HA*; plus grand que *HG*, plus petit que *HB*; encore plus grand que *HF* & plus petit que *HC*, &c.

DEMONSTRATION.

Qu'on méne la ligne droite *LR* qui touche le cercle dans le point L, & qui rencontre la ligne *HA* dans le point *R*; qu'on méne par le point *K* la ligne *KY* paralléle à la ligne *GB*, & la ligne *KT* perpendiculaire à la ligne *HL*, qui passera par le centre & divisera la ligne *HL* par la moitié dans le point *T*.

Premiérement, il est évident (*Cor.* 3. *Déf.* 1.) que l'arc *LKH* est plus grand que sa corde ou soûtendante *LH*; il est aussi plus petit que *HA*, car les angles *AHX* & *HLX* (*par le Cor.* 5. *Th.* 11. *& par le Cor.* 3. *Th.* 18.) sont des angles droits, & l'angle *X* est commun aux deux triangles *AXH*, & *HXL*. Donc les angles *A* & *LHX* (*par le Cor.* 4. *Th.* 21.) sont égaux entr'eux. De plus, à cause des tangentes *LR* & *RH* (*Cor.* 3. *Th.* 39.) égales entr'elles, les angles *RLH* & *RHL* (*Th.* 22.) sont aussi égaux entr'eux, & par conséquent si on ôte ces angles, des angles droits *ALH* & *AHX*, les restes seront égaux, savoir $ALR = LHX = A$. Donc (*Th.* 22.) $RA = RL = RH$, & par conséquent toute la ligne $AH = RL + RH >$ que *HKL*. Donc l'arc *HKL* est plus petit que la ligne droite *HA*.

Puisque la ligne *TK* est paralléle à la ligne *LG*, & (*Th.* 13.) $HT = TL$, *HK* sera (*Th.* 29.) $= KG$; mais par le raisonnement précedent, on peut démontrer que *HK* est plus petit que l'arc *HSK*. Donc le double de *HK*, savoir, *HG* est plus petit que le double de l'arc *HSK*, savoir, *HKL*.

Mais puisque les lignes *GB* & *KY* sont paralléles, & que $HK = KG$, *BY* sera (*Th.* 29.) $= HY$. Or *HY* est plus grand que l'arc *HSK*; car en menant la ligne *KO* qui touche le cercle dans le point *K*, les angles *OHK* & *OKH* (*Cor.* 3. *Th.* 39. *& Th.* 22.) sont égaux entr'eux. Mais parce que, par la construction, *HKY* eſt un angle droit, *OHK* + *OYK* feront auſſi égaux aux angles *OKH* + *OKY*. Donc en ôtant les angles égaux *OHK*, *OKH*, les angles *OYK*, & *OKY* qui reſteront, feront auſſi égaux; & par conſéquent (*Part. 2. Th. 22.*) $OK = OY$, & ainſi $HY = HO + OK >$ que *HSK*; ce que l'on peut démontrer de la même maniére que l'on a démontré que la ligne *HA* étoit plus grande que l'arc *HKL*. On peut en continuant cette même démonſtration, faire voir que l'arc *HKL* tient toûjours le milieu entre *HF* & *HC*; & enfin (*aprés avoir coupé par la moitié une infinité de fois les arcs HKL & HSK,*) l'arc *HKL* ſera égal à chacune de ces deux lignes qui feront confonduës & réduites à la même. Donc, par cette méthode, plus on multiplie ces opérations, plus auſſi l'on approche de la valeur rectiligne de l'arc propoſé.

PROBLEME XXIV.

Meſurer toutes ſortes de diſtances en long, large, ou profond, acceſſibles par une extrêmité ſeulement, comme la diſtance du point *B* au point *A*. Tab. 19. Fig. 9.

SOLUTION.

Après avoir placé le centre du demi cercle dont on ſe ſert pour meſurer toutes ſortes de diſtances, dans le point *B*, il faut diriger ſon diamétre vers *A*, enſuite il faut diriger la régle mobile autour du centre *B* vers tel endroit qu'on voudra, par exemple vers *C*, & après avoir pris à volonté & meſuré *B C*, qu'on tranſporte le centre de l'inſtrument en *C*, qu'on dirige ſon diamétre vers *B* & la régle mobile vers *A*.

Pour lors l'inſtrument (*Th. 16.*), dans les deux ſtations, fera connoître les angles *C* & *B* du triangle *ABC*; l'on connoît de plus le côté *BC* que l'on a pris à volonté. Donc dans ce triangle deux angles avec un côté ſont donnés: donc, (*Probl. 19.*) l'on connoîtra le côté *AB* cherché.

PRO-

PROBLEME XXV.

Mesurer toutes sortes de distances en long, large, ou profond, inaccessibles, ou bien la distance qui est entre deux points, par exemple *A* & *B*, dont on ne sauroit approcher. Tab. 19. Fig. 10.

SOLUTION.

Qu'on observe de deux endroits pris à volonté, les angles *ACB*, *BCD*, *ADC*, *ADB*. Cela étant fait, comme l'on connoît *CD* pris à volonté, l'on aura deux angles avec le côté *CD* auquel ils sont adjacens, dans les triangles *ACD*, *ACB*. Donc (*Probl.* 19.) l'on aura aussi les deux côtés *AD* & *BD*, avec l'angle *ADB* compris entre ces côtés, & (*Probl.* 21.) l'on trouvera le côté *AB*, qui est la distance que l'on cherche.

PROBLEME XXVI.

Déterminer par où passe une ligne droite, dont on ne voit que deux points, qui en sont les extrémités.

SOLUTION.

Soit la ligne droite *AB* dont on ne voit que les extrêmités *A* & *B*, l'on demande par où passe cette ligne. Tab. 19. Fig. 11.

Il faut placer le demi cercle, qui est l'instrument dont on se sert pour mesurer toutes sortes de distances, où l'on voudra, pourvû que ce soit dans un endroit d'où l'on voye les deux extrêmités *A* & *B* de la ligne *AB*, par exemple en *C*, ensuite il faut observer l'angle *ACB*, avec les distances *CA* & *CB*, que l'on connoîtra (*Probl.* 24.) : les deux côtés *AC* & *BC* avec l'angle *ACB* compris entre ces côtés étant connus, l'on connoîtra (*Probl.* 25.) les angles *A* & *B*, avec le côté *AB* du triangle *ACB*. Après cela qu'on marque avec des bâtons ou des piquets, les endroits *G*, *H* entre les obstacles au travers desquels, passe la ligne *AB*, & qu'on observe les angles *ACG*, *GCH*, *HCB* ; par ce moyen l'on connoîtra premiérement ; dans le triangle *CAG*, le côté *AC* avec les deux angles adjacens *CAG*, & *ACG*. Donc (*Probl.* 19. & 24.) l'on connoîtra aussi les côtés *AG*, & *GC*, avec l'angle *AGC* compris entre ces côtés, & par conséquent (*Th.* 1.) son complement *CGH* a deux droits; & ainsi l'on connoîtra encore dans le triangle *HGC*, le côté *GC* avec les deux angles adjacens, & par conséquent (*Probl.* 19 & 24.) les côtés *GH* & *HC*, avec l'angle *GHC* compris entre ces côtés, & ainsi des autres points, comme *G*, *H*, qu'il faut trouver dans la ligne droite *AB*. On pourra donc par cette méthode, trouver tous les points par lesquels passe, au travers de plusieurs obstacles, la ligne droite *AB*, dont on ne voit que les extrêmités *A* & *B*.

AVERTISSEMENT.

Voilà ce qui regarde les dimentions des lignes droites, c'est-à-dire, la longimétrie ; nous allons maintenant passer à la planimetrie, qui enseigne à mesurer les surfaces.

CHAPITRE SECOND.

De la mésure des surfaces rectilignes.

DEFINITION XXVII.

Tab. 10. Fig. 1. UN polygone régulier est celui dont tous les côtés & tous les angles sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE I.

Si l'on coupe donc par la moitié tous les angles du polygone régulier *ABCDE*, par les lignes droites *AF*, *BF*, *CF*, *DF*, *EF*, elles se réuniront toutes dans le point *F* qui est également distant de tous ces angles ; car comme par ce moyen, on fait autant de triangles isoscéles, que le polygone a de cotés ; les lignes droites *AF*, *BF*, (*Th.* 22.) seront égales entr'elles, & par conséquent se réuniront dans le point *F*. Donc le point *F* est également distant de tous les angles du polygone régulier *ABCDE*. L'on appelle ce point *F*, le centre du polygone, & les lignes *AF*, *BF*, rayons.

COROLLAIRE II.

Donc tous les angles qui sont au centre d'un polygone régulier, sont égaux ; car puisque (*Cor.* 1.) les triangles *AFB*, *BFC*, *CFD*, &c. ont des angles égaux à leur base, les angles au sommet *F* doivent aussi (*Cor.* 4. *Th.* 21.) être égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Donc puisqu'il y a autant d'angles au centre, qu'il y a de côtés dans le polygone, la somme de tous ces angles, ou (*Cor.* 3. *Th.* 1.) la somme de quatre angles droits, divisée par le nombre des côtés du polygone, donnera pour quotient la valeur d'un chacun, si le polygone est régulier.

COROLLAIRE IV.

Toutes les lignes droites menées du centre d'un polygone régulier, à tous ses angles, les divisent en deux parties égales, & par conséquent les angles qui sont à la base *AB*, du triangle isoscéle *AFB*, sont ensemble égaux à l'angle *ABC* du polygone.

COROLLAIRE V.

Donc (*Th.* 21.) l'angle qui est à la circonférence, & l'angle qui est au centre du polygone régulier, sont égaux à deux droits, & par conséquent l'un des deux étant donné, l'on trouve facilement l'autre.

COROLLAIRE VI.

De plus (*Th.* 40.) comme le sinus de l'angle du centre, par exemple, *AFE* est au côté *AE*; de même le sinus de l'angle *AEF*, qui est la moitié de celui qui est à la circonférence, est au côté *AF*; & ainsi (*Lem* 1.) dans un polygone régulier, ſi l'on diviſe le produit d'un côté & du ſinus de la moitié de l'angle qui eſt à la circonférence, par le ſinus du centre, le quotient ſera le rayon ; ou bienſi on diviſe le produit du rayon & du ſinus de l'angle du centre, *par le ſinus de la moitié de l'angle qui eſt à la circonférence*, le quotient ſera le côté du polygone.

PROBLEME XXVII.

Le nombre des côtés d'un polygone régulier étant donné, trouver l'angle du centre.

SOLUTION.

Qu'on diviſe quatre angles droits ou 360 degrés par le nombre des côtés du polygone donné, & le quotient ſera l'angle du centre ; cela eſt évident (*Cor. 3. Définition precédente.*)

COROLLAIRE I.

Donc dans un triangle régulier ou équilatéral, l'angle du centre ſera le tiers de quatre droits ; dans un quarré, le quart ; dans un pentagone, un cinquiéme, dans un héxagone un ſixiéme, &c.

COROLLAIRE II.

Donc (*Cor. 5. Déf. 27.*) dans un triangle régulier, l'angle qui eſt à la circonférence, eſt $\frac{1}{2}$ de l'angle qui eſt au centre ; dans un quarré, l'angle de la circonférence eſt égal à l'angle du centre ; dans un pentagone $1\frac{1}{2}$; dans un héxagone 2, ou le double ; dans un heptagone $2\frac{1}{2}$; dans un octogone 3 ou le triple, & ainſi à l'infini en progreſſion arithmétique ; c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend les angles qui ſont au centre d'un polygone régulier, pour des unités, les angles qui ſont à la circonférence de ces mêmes polygones, en commençant par le triangle régulier, ſont aux angles du centre dans le rapport ſuivant : $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3.

PROBLEME XXVIII.

Conſtruire un triangle iſoſcéle, dont chaque angle à la base, soit le double de celui qui est au sommet.

SOLUTION.

Qu'on divise, en G la ligne *AB* prise à volonté, de maniére que *AB*· *AG* :: *AG*·*GB* (*par le Probl.* 16.) que des points *A* & *B* pris pour centres, on décrive des arcs de cercles qui ayent pour rayons *AB* & *AG* & qui se coupent en *C*, qu'on méne ensuite les lignes *AC* & *BC*: Je dis que le triangle *BAC* est le triangle que l'on cherche, dont les angles à la base *BC* sont chacun le double de l'angle au sommet *A*. Tab. 20. Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Qu'on joigne les points G & C par la ligne *GC*; puisque (*par la construction*) *AB*· *AG* ou *BC*:: *AG* ou *BC*. *GB*, les triangles *ABC*, *CBG* ont des côtés proportionnels autour du même angle *B*. Donc (*Cor.* 2. *Th.* 29.) ils sont semblables, ou l'angle *BCG* est égal à l'angle *A*, & l'angle *CGB* égal à l'angle *ACB*; mais parce que (*par la construction*) *AC*=*AB*, l'angle *ACB* est (*par le Th.* 22.)= à l'angle *B*. Donc l'angle *CGB* est aussi égal au même angle *B*, & ainsi (*Th.* 22.) GC = *BC* (*l'hyp.*) = *AG*. Donc (*Th.* 22.) l'angle *A* est aussi égal à l'angle *ACG*; & par conséquent (*Cor.* 5. *Th.* 21.) l'angle *CGB* comme externe par rapport au triangle *AGC*, est le double de l'angle *A*. Donc puisque les angles *ACB* & *B* sont, comme on l'a déja démontré, égaux chacun à l'angle *CGB*, ils seront aussi chacun le double du même angle *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXIX.

Dans le cercle donné *ABC*, décrire un triangle rectiligne *ABC* équiangle au triangle donné *DEF*. Tab. 20. Fig 3.

SOLUTION.

Qu'on méne la ligne *GH* (*Probl.* 11.) qui touche le cercle donné dans le point *A*; qu'on fasse ensuite (*Probl.* 3.) l'angle *HAC* = à l'angle *E*, & l'angle *GAB* = à l'angle *F*; qu'on joigne après cela les points *B* & *C* par la ligne

BC : Je dis que le triangle *ABC* eſt ce que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

L'angle *B* eſt (*Th.* 18.) = *HAC* (*l'hyp.*) = *E*. De même l'angle *C* = *GAB* (*l'hyp.*) = *F*. Donc l'angle *BAC* eſt auſſi (*Cor.* 4. *Th.* 21.) = *D*; & ainſi le triangle *BAC* inſcrit dans le cercle, eſt équiangle au triangle donné *DEF*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXX.

Décrire dans un cercle donné, un pentagone régulier.

SOLUTION.

Tab. 10. Fig. 4. Qu'on faſſe (*Probl.* 28.) un triangle iſoſcéle *GFH* qui ait chacun de ſes angles à la baſe *GH*, double de l'angle au ſommet *F*; qu'on inſcrive enſuite (*par le Probl.* 29.) dans le cercle donné *ABCDE*, le triangle *CAD* équiangle au triangle *GFH*; qu'on coupe après cela les angles *qui ſont à la baſe CD du triangle CAD* (*par le Probl.* 4.) en deux parties égales, par les lignes droites *DB*, *CE*, qui rencontrent la circonférence du cercle dans les points *B* & *E*; qu'on joigne enfin par des lignes droites, *CB*, *DE*, *EA*, *AB* : Je dis que le pentagone régulier *ABCDE* ainſi conſtruit & inſcrit dans le cercle donné, eſt ce que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Il eſt évident, par la conſtruction du pentagone, que les angles *CAD*, *CDB*, *BDA*, *DCE*, *ECA* ſont égaux entre eux, & ainſi (*Th.* 18. & *Cor.* 6. *Th.* 10.) les arcs *DC*, *CB*, *BA*, *AE*, *ED* ſont auſſi égaux, de même que leurs cordes. Donc le pentagone *ABCDE* eſt équilatéral, & (*Th.* 18.) équiangle. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit auſſi bien que de la démonſtration de la ſolution du Problême 28. que ſi l'on diviſe la ligne droite

AC en deux parties, comme on l'a enſeigné dans le problême 16. telles que toute la ligne ſoit à l'une de ces parties, comme cette même partie eſt à l'autre, la plus grande partie ſera un côté du pentagone *ABCDE* qu'il faut inſcrire dans le cercle. L'on peut dire la même choſe des autres côtés *BD*, *CE*, *AD*, que du côté *AC*; parce que ces grandes cordes (*Cor. 6. Th.* 10.) ſont égales entre elles.

COROLLAIRE II.

Puiſque les arcs qui ont pour ſoûtendantes, les côtés du pentagone régulier inſcrit dans le cercle, ſont égaux; ſi on les diviſe chacun par la moitié (*Probl.* 4.); il eſt conſtant que leurs moitiés au nombre de dix, auront autant de ſoûtendantes ou cordes (*Cor. 6. Th.* 10.) égales, qui compoſeront un décagone équiangle & équilatéral inſcrit dans le même cercle.

PROBLEME XXXI.

Décrire ſur une ligne droite donnée, un pentagone régulier. Tab. 20. Fig. 5.

SOLUTION.

Soit la ligne droite *AB*, coupée en *G* (*Probl.* 16.) en deux parties, telles que toute la ligne *AB* ſoit à la grande partie, comme cette grande partie eſt à la petite; c'eſt-à-dire, *AB*· *AG* :: *AG*· *GB*; qu'on prolonge cette même ligne des deux côtés en *C* & *D*, de ſorte que *AC*, & *BD* ſoient chacune égale à *AG*; enſuite des points *C* & *A*, *B* & *D* pris pour centres qu'on décrive des arcs de cercle dont *AB* ſoit rayon, qui ſe coupent dans les points *E* & *F*; que de ces mêmes points pris pour centre, on décrive d'autres arcs de cercle dont *AB* ſoit auſſi rayon, & qui ſe coupent dans le point *H*; qu'on méne après cela les lignes droites *AE*, *EH*, *HF*, *FB*: Je dis que la figure *ABFHE* eſt le pentagone cherché.

DEMONSTRATION.

Il eſt conſtant, 1°. Par la conſtruction de ce pentagone, que tous ſes côtés ſont égaux ; & voici comment l'on peut démontrer que tous ſes angles ſont auſſi égaux entre eux.

Puiſque (*par la conſtruction*) *AB*· *AG* :: *AG*· *GB*, que *AC* = *AG*, & que *EA* & *EC* ſont chacune égale à la ligne *AB* ; le triangle *CEA* ſera (*Probl.* 28.) iſoſcéle & aura ſes angles à la baſe *CA*, chacun le double de l'angle au ſommet *E* : donc puiſque (*Th.* 21.) les trois angles du triangle, ſont égaux à deux droits, l'angle *CEA* ſera $\frac{1}{5}$ de deux angles droits ; c'eſt-à-dire = 36 degrés, & par conſéquent comme l'angle *EAC* eſt le double de cet angle *CEA*, il ſera de 72 degrés, qui ôtés de 180 valeur (*Th.* 1.) des deux angles qui ſont en *A*, l'angle *EAB* qui reſtera, ſera de 108 ; & ainſi les deux angles *EAB*, & *FBA* ſont égaux entre eux.

Il ſuit de là que le pentagone eſt équilatéral ; car ſi on conçoit ce pentagone achevé par le moyen des lignes égales aux côtés *AB*, *EA*, *BF*, qui tombent des points *E* & *F* vers *H* ; ces lignes doivent néceſſairement ſe réunir en *H* ; car ſi elles tomboient deſſus ou deſſous le point *H* du pentagone équiangle, elles ſeroient (*Cor.* 8. *Th.* 7.) plus grandes, ou plus petites que les lignes *EH* & *FH*, & par conſéquent elles ne ſeroient pas égales aux autres côtés du pentagone, ce qui eſt contre l'hypothéſe. Donc le pentagone *ABFHE* eſt équilatéral & équiangle. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXII.

Inſcrire un héxagone dans un cercle donné.

SOLUTION.

Tab. 20. Fig. 6. Soit le cercle *AEC* dans lequel il faut inſcrire un hexagone. Qu'on coupe les arcs *AB*, *BC*, *CD* dont les ſoûtendantes ſoient égales au demi diamétre ; enſuite des points *A*, *B*, *C*, qu'on méne les diamétres *AD*, *BE*, *CG*, qui rencontrent

contrent la circonférence du cercle dans les points *D*, *E*, *G*; qu'on méne après cela les cordes *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EG*, *GA*; je dis que la figure rectiligne *ABCDEG* est l'héxagone cherché.

DEMONSTRATION.

Il est évident, par la construction des triangles *AFB*, *BFC*, &c. que chacun d'eux est équilatéral, & par conséquent aussi équiangle (*Cor.* 2. *Th.* 22. ou *Th.* 21.) les angles *AFB*, *BFC*, &c. au centre, sont chacun de 60 degrés. Donc les trois *AFB*, *BFC*, *CFD* font 180 degrés, ou remplissent le demi-cercle *ABCD*. De même dans l'autre demi-cercle *DEGA*, il y a trois triangles équilatéraux, semblables aux trois dont on vient de parler. Donc l'héxagone *ABCDEG* a tous ses côtés & tous ses angles égaux; car ils sont chacun le double de 60 degrés, c'est-à-dire, égaux à 120 degrés. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 20. Fig. 6.

COROLLAIRE.

Donc les côtés d'un héxagone, sont égaux aux rayons du cercle dans lequel il est inscrit.

PROBLEME XXXIII.

Décrire un héxagone sur une ligne droite donnée.

SOLUTION.

Que des points *A* & *B* de la ligne donnée *AB*, pris pour centre, on décrive des cercles dont *AB* soit rayon, qui se coupent en *F*. Il est évident (*par la construction*) que le triangle *ABF* est équilatéral. Qu'on fasse de la même maniére sur les lignes *AF* & *FB*, des triangles équilatéraux *AGF*, *BFC*, & après avoir prolongé *AF* & *FB* jusques à *D* & *E*, de sorte que *EF* & *FD* soient chacune égale à *AB*, qu'on joigne *GE*, *ED*, *DC*: Je dis que la figure *ABCDEG* est l'héxagone cherché. Tab. 20. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

Les triangles *AFB*, *AFG*, *BFC* sont (*par la construc-*

tion) équilatéraux; ils ont donc (*Cor.* 2. *Th.* 22. & *Th.* 21.) chacun de leurs angles, égal au tiers de deux droits, ou à 60 degrés, & ainsi leurs angles en *F*, sont ensemble égaux à deux droits, & la ligne *GFC* (*Th.* 2.) est droite. Donc puisque (*l'hyp.*) les lignes *AFD*, & *BFE* sont droites, les angles *GFE*, *EFD*, *DFC* qui sont opposés au sommet aux angles en *F* des trois triangles *AFB*, *AFG*, *BFC*, leur sont aussi égaux (*Th.* 3.), & pris ensemble valent deux droits. Ils sont donc chacun le tiers de deux droits: & par conséquent, puisque (*par la construction*) les triangles *GFE*, *EFD*, *DFC* sont isoscéles, & ainsi (*Th.* 22.) ont des angles à leurs bases *GE*, *ED*, *DC*, égaux, ils sont aussi (*Th.* 21.) chacun le tiers de deux droits, ou bien ces triangles sont équangles. Donc (*Cor.* 4. *Th.* 22.) ils sont aussi équilatéraux. D'où il suit que les six triangles autour du point *F*, sont équiangles & équilatéraux. Donc les côtés de la figure *ABCDEG*, & ses angles sont égaux, & par conséquent cet héxagone est régulier. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXIV.

Tab. 10. Fig. 8. Décrire dans le cercle donné *ADLK* au quindécagone régulier.

SOLUTION.

Inscrivez (*Probl.* 29.) le côté *AD* d'un triangle équilatéral, & (*Probl.* 30.) le côté *AC* d'un pentagone; coupez ensuite (*Probl.* 4.) l'arc *CD* en *E*: la soûtendante de sa moitié, savoir *ED* ou *CE* est le côté du quindécagone cherché.

DEMONSTRATION.

Si l'on suppose que toute la circonférence du cercle, est divisée en quinze parties égales, il est constant que l'arc *ACD* qui a (*l'hyp.*) pour soûtendante le côté *AD* du triangle équilatéral, est égal à cinq de ces parties, & l'arc *AC* qui a (*l'hyp.*) pour soûtendante, le côté *AC* du pentagone régulier, est égal à trois; & par conséquent que la différence *CD* de ces deux arcs, eſt de deux de ces parties dont il y en a quinze dans toute la circonférence. Donc la moitié *EC* ou *ED* de cette différence *CD*, eſt la quinziéme partie de toute la circonférence *ADLK*. Ainſi la corde eſt le côté du quindécagone que l'on cherche. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XXXV.

Premiérement, décrire dans un cercle donné, un polygone régulier d'autant de côtés qu'on voudra.

Secondement, décrire un polygone régulier d'autant de côtés qu'on voudra ſur une ligne droite donnée.

SOLUTION DE LA PREMIERE PARTIE.

Qu'on diviſe (*Probl.* 8.) le cercle donné en autant de parties égales qu'il y a de côtés dans le polygone que l'on cherche, & qu'on méne les lignes droites ſoûtendantes de ces arcs; il eſt conſtant (*Cor.* 2. *Th.* 18. & *Cor.* 7. *Th.* 10.) que ces lignes compoſeront le polygone régulier que l'on cherche.

SOLUTION DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne donnée *AB* ſur laquelle il faut décrire un polygone régulier. Aprés avoir trouvé (*Cor.* 2. *Probl.* 27.) l'angle à la circonférence de ce polygone, qu'on décrive du point *A* pris pour centre, l'arc *BDK* dont *AB* ſoit rayon, qu'on coupe de cet arc la partie *BD*, d'autant de degrés & minutes que l'angle de la circonférence en renferme, par exemple 120 dans un héxagone, depuis *B* juſques à *D*; & ainſi l'on aura *AD* = à la ligne donnée *AB*, avec laquelle elle fera l'angle *BAD* de la circonférence du polygone cherché. Qu'on faſſe enſuite la même choſe dans le point *B*; mais cela ſera plus facile ſi du point *B* pris pour centre, l'on décrit l'arc *E*, dont *AB* ſoit rayon, & du point *A*, un autre arc, dont *BD* ſoit rayon, & qui coupe le premier en *E*; qu'on méne enſuite la ligne droite *BE*. Qu'on décrive de même du point *D*, l'arc *H* dont *AD* ſoit rayon, Tab. 10. Fig. 9.

& du point *A*, un arc dont *AE* ſoit rayon, qui coupe l'autre dans le point *H*, l'on aura par ce moyen le point *H*, & de la même maniére le point *G*, &c. juſques au polygone entier que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

L'angle *BAD* eſt (*par la conſtruction.*) de 120 degrés, tel que (*Cor.* 2. *Probl.* 27.) ſont les angles à la baſe de l'héxagone, & les côtés *AD* & *AB* ſont égaux. Donc le point *B* appartient à cette figure. Le point *E* par la même raiſon, eſt auſſi un des points de cette figure; car puiſque dans les triangles *ABE* & *BAD*, les côtés ſont égaux les uns aux autres, les angles *DAB*, & *ABE* ſont auſſi (*Cor.* 3. *Th.* 24) égaux, par conſéquent l'angle *ABE* convient à ce polygone; & ainſi des autres. Donc ce polygone a ſes côtés & ſes angles égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XXXVI.

Tab. 19. Fig. 6. Dans un triangle rectiligne, deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin tous les côtés étant donnés, trouver l'aire du triangle.

SOLUTION.

Après avoir trouvé la baſe *AC* du triangle propoſé *ABC*, par quelqu'un des problêmes 18, 19, 20, 21; qu'on cherche (*Probl.* 22.) la hauteur *BD* de ce même triangle, enſuite qu'on multiplie la baſe *AC* par la moitié de la hauteur *BD*, ou la hauteur par la moitié de la baſe, le produit ſera l'aire cherchée du triangle propoſé.

PROBLEME XXXVII.

Trouver l'aire de toutes ſortes de figures rectilignes.

Tab. 10. Fig. 10.

SOLUTION.

Soit l'aire propoſée *ABCDE*. Il faut premiérement obſerver les côtés avec les angles de cette figure; enſuite diviſer l'aire en triangles. Cela étant fait; puiſqu'on connoît dans le triangle *ABC*, les deux côtés *AB* & *BC* avec l'angle *B*, l'on trouvera (*Probl.* 21.) la base *AC* avec les angles adjacens, & après avoir ôté l'angle *BAC* de l'angle connu *BAE*, il restera l'angle aussi connu *CAE* avec les côtés *AC* & *AE*, entre lesquels cet angle est compris; l'on connoîtra aussi (*Probl.* 21.) les angles & les côtés du triangle *CAE*, & ainsi des autres. Les angles & les côtés des triangles étant connus, l'on trouvera (*Probl.* 36.) l'aire de chaque triangle, & par conséquent l'aire cherchée de la figure rectiligne *ABCDE* composée de ces triangles.

Si la figure dont on veut connoître l'aire, est inaccessible, il faut chercher (*Probl.* 25.) tous les côtés de ces triangles, comme des distances inaccessibles, lesquels étant connus, l'on trouvera (*Probl.* 36) l'aire de ces mêmes triangles, & la somme de ces aires, sera l'aire cherchée.

PROBLEME XXXVIII.

Faire des Cartes Topographiques. Tab. 20. Fig. 11.

SOLUTION.

S'il faut representer sur le papier plusieurs endroits, par exemple, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*; qu'on choisisse deux stations telles qu'on voudra, comme *I* & *H*, & qu'on place l'instrument en *I*, de maniére que par le diamétre du demi cercle l'on puisse voir quelque marque au point *H*. L'instrument étant ainsi disposé, il faut diriger la régle mobile vers chacun de ces endroits, observer tous les angles en *I*, & écrire le nombre des dégrés, qui sont la mesure de chacun de ces angles, pour s'en souvenir. Cela étant fait, on transportera l'instrument à l'autre station *H*, ayant pris une distance connuë du point *H* au point *I*, par exemple, de cent pas, d'une demi-lieue, &c.

L'instrument étant placé en *H*, de maniére que par le diamétre l'on voye la marque qu'on aura laissée dans la premiére station *I*, la régle mobile fera connoître tous les angles en H ; lesquels étant connus pourront facilement être transportés sur le papier par le moyen du cercle, ou du quart de cercle divisé en 90 degrés (*Probl.* 8.) en menant sur le papier la ligne IH, sur laquelle l'on fera les triangles IAH, IBH, ICH, &c. équiangles aux triangles qui sont sur le terrein & qui leur seront semblables. Ces endroits A, B, C, D, &c. seront representés dans les mêmes points sur le papier. L'on divisera la ligne IH pour servir d'échelle, en un nombre de parties, égal à celui qui est connu entre les deux stations prises à volonté I & H, & par ce moyen l'on aura une Carte qui representera la situation de ces endroits les uns par rapport aux autres, & leur distance.

DEMONSTRATION.

Puisque les triangles qui sont sur le papier sont (*l'hyp.*) équiangles à ceux qui sont sur le terrein, leurs côtés sont aussi (*Cor.* 1. *Th.* 29.) dans le même rapport & la même situation sur le papier & sur le terrein. Donc la situation & la distance de ces endroits sur le terrein, sont representées sur le papier. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XXXIX.

Faire sur la terre & dans un point marqué d'une ligne donnée, un angle d'une grandeur déterminée.

SOLUTION.

Tab. 20. Fig. 12. Soit l'angle qu'il faut faire à l'extrémité A de la ligne AK, par exemple de 34 degrés. On place le centre du demi-cercle divisé en degrés, qui est l'instrument dont on se sert, dans le point A, de maniére que le diamétre soit dirigé selon la ligne donnée AK, & que l'on voye par les pinnules de ce diamétre, le bâton fiché en D ; ensuite il faut diriger la regle mobile AE, sur le point de l'instrument qui est éloigné de 34 degrés du point B, après cela il faut encore ficher un bâton en F, que l'on puisse voir par les pinnules de la regle AE ; il est constant (*Th.* 16.) que la ligne droite menée par les points *A* & *F*, fait un angle de 34 degrés avec la ligne donnée *AK*, & ainsi des autres.

Autre Méthode sans instrument.

SOLUTION.

Soit tel angle qu'on voudra, par exemple l'angle *B* proposé sur le papier, qu'il faut tracer sur la terre dans le point *A* de la ligne donnée *AK*. Qu'on méne la ligne droite *ED* qui joigne les deux côtés *BE*, *BD*, de l'angle donné sur le papier. Ensuite qu'on fiche des piquets dans le point *A* donné, & dans tel autre qu'on voudra, par exemple *K*, de la ligne *AK*, qu'on attache à ces deux piquets une corde par ses deux extrémités, & qu'elle soit divisée par le nœud *H* en deux parties *AH*, *HK*, qui soient à la ligne donnée *AK*, comme *BE* & *ED* sont à *BD*. Après cela qu'on tende, autant qu'on le pourra, la corde en tirant le nœud *H*, on fera par ce moyen le triangle *AHK* qui sera (*Cor.* 1. *Th.* 29.) semblable au triangle donné *BFD*; par conséquent l'angle *A* sera égal à l'angle *B*. Ce qu'il falloit démontrer. Tab. 20. Fig. 12.

PROBLEME XL.

Mesurer un angle sur la terre.

PREMIERE SOLUTION.

Il faut placer le centre du demi-cercle dans le sommet de l'angle, & diriger le diamétre vers l'un de ses côtés, de maniére qu'on découvre par les pinnules, la marque qu'on y aura mise, ensuite il faut diriger la regle mobile vers l'autre côté dans lequel on voye aussi par les pinnules, la marque qu'ou y aura attachée; l'arc de l'instrument, compris entre la regle mobile & le côté du diamétre dirigé vers un des côtés de l'angle donné, sera (*par le Th.* 16.) la valeur de l'angle cherché. Tab. 21. Fig. 1.

Autre Solution sans Instrument.

Après avoir mesuré les deux côtés *AB* & *AC*, de l'angle *BAC* qu'il faut mesurer sur la terre, qu'on mesure aussi la corde qui s'étend depuis *B* jusques à *C*, & ainsi on connoîtra les trois côtés du triangle *ABC*, & (*Probl.* 20.) tous les angles ; par conséquent l'angle *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLI.

Tab. 21. Fig. 2. Décrire sur la terre un polygone régulier, un côté ou un rayon étant donné.

SOLUTION.

Il faut premiérement trouver (*Probl.* 37.) l'angle au centre du polygone cherché, & décrire (*Probl.* 39) un angle semblable *IAK*, & couper de ses côtés les parties *AB* & *AH*, de telle grandeur qu'on voudra, ensuite mener la ligne droite *BH* : cette ligne sera (*Def.* 27. & *ses Cor.*) un des côtés du polygone cherché. Il faut après cela faire (*Probl.* 39.) un autre angle *BAC* semblable au premier *IAK*, & prendre la ligne *AC* = *AB*, & joindre les points *BC* : cette ligne sera (*Déf.* 27. & *ses Cor.*) le second côté du polygone cherché, & ainsi des autres. Lorsque le pénultiéme côté *FG* sera designé, l'intervalle *GH* qui restera, sera nécessairement égal à chacun des côtés, comme on peut le voir par ce que nous avons dit dans les problêmes 34 & 35, touchant la maniére de décrire des polygones. Si l'on demande une figure dont les côtés soient d'une longueur donnée, par exemple, un héxagone, dont chaque côté soit de 1000 pieds, il faut chercher par le moyen du côté donné (*Déf.* 27.) le rayon, & après l'avoir trouvé, décrire, comme on vient de l'enseigner, la figure que l'on cherche, savoir un héxagone ; tous ses côtés seront égaux & de 1000 pieds.

Autre

Autre Méthode pour décrire un polygone ſans ſtation au centre de la figure.

SOLUTION.

Après avoir trouvé (*Cor. 6. Def. 27.*) l'angle à la circonférence du polygone que l'on veut décrire ; qu'on trace ſur la terre un angle *LEN* (*Probl. 39.*) qui lui ſoit égal ; enſuite, qu'on coupe de ſes côtés, les parties égales *EF* & *ED*, de telle grandeur qu'on voudra. Il faut après cela faire dans le point *D*, un angle (*Probl. 3.*) *EDC*, qui ſera le ſecond angle à la circonférence du polygone que l'on cherche, qui ſoit par conſéquent égal à l'angle *FED* ; & qu'on méne la ligne $DC = ED$. Qu'on faſſe la même choſe & qu'on opére de la même façon dans tout le circuit, lorſque le dernier côté *HG* aura été déſigné, l'intervalle qui reſtera, *GF*, ſi l'on a bien operé, ſera égal aux autres côtés, & les angles *G* & *H* à la circonférence, ſeront égaux aux autres angles de la circonférence. Ce qui eſt encore évident par les problêmes 34. & 35. Tab. 21. Fig. 2.

PROBLEME XLII.

Décrire ſur la terre telle figure rectiligne qu'on voudra, réguliére ou irréguliére, comme une ville, une citadelle, un château tel qu'il eſt repreſenté ſur le papier.

SOLUTION.

Tab. 21. Fig. 3.

Soit la figure *IKLMNO* que l'on veut tranſporter ſur la terre : il faut premiérement, par le moyen du quart de cercle, chercher tous les angles, & meſurer toutes les lignes, & après avoir écrit leur valeur, il faut opérer de la maniére ſuivante.

Si l'on veut que quelqu'angle de la figure, tombe ſur un certain point du terrein ſur lequel on veut tranſporter cette figure, il faut commencer par cet angle ; que ce point, par exemple, ſoit le point *O* : il faut ficher un piquet dans le point *O* & compter autant de parties depuis *O* vers *I*, qu'on en a trouvé dans la ligne *OI*, & cela ſelon l'endroit par où on veut que paſſe la ligne *OI*. Enſuite qu'à l'extrémité *I*, on faſſe (*Probl.* 39.) l'angle marqué ſur le papier, & qu'on place l'inſtrument de telle ſorte que l'on puiſſe voir, par les pinnules de la regle immobile, le bâton fiché en *O*, & par celles de la regle mobile, un autre bâton fiché dans un des points que l'on découvre par les pinnules de cette regle, qui marque la valeur de l'angle. Il faut de même prendre autant de parties depuis *I* vers *K*, qu'il y en a de marquées ſur le papier, & faire dans le point *K* (*Probl.* 39.) un angle de la grandeur requiſe, & laiſſer un bâton fiché en *K*, & opérer de même dans toute la circonférence. Lorſqu'on ſera parvenu en *N*, qu'on place dans ce point *N*, l'inſtrument de façon que par une de ſes regles, on voye le bâton laiſſé en *M*, & par l'autre celui qui eſt en *O*, ſi pour lors l'angle de l'inſtrument, convient avec l'angle marqué ſur le papier, & la diſtance qui eſt entre *N* & *O* ſur la terre, meſurée par le moyen d'une corde, avec les parties marquées ſur le papier; la figure propoſée ſur le papier, a bien été tranſportée ſur la terre, autrement l'on s'eſt trompé, & il faut recommencer l'opération.

PROBLEME XLIII.

Tab. 21. Fig. 4. Tracer ſur le papier une figure rectiligne, par exemple, une ville, un château, une citadelle, &c.

SOLUTION.

Soit la ville dont le circuit eſt *ABCDEFGH*, qu'il faut placer & tranſporter ſur le papier. Après avoir fiché des bâtons dans tous les angles, ou quelqu'autres marques, il faut commencer par tel angle qu'on voudra, par exemple par l'angle *A*, où l'on place l'inſtrument, & l'on obſerve l'angle *HAB*. Enſuite on tranſporte l'inſtrument en *B*, & l'on meſure avec une corde la ligne *AB*, & après avoir obſervé l'angle *ABC*, on tranſporte l'inſtrument en *C*, & l'on meſure la ligne *BC*. On fait la même choſe dans tout le circuit, jusques en *A* où l'on a commencé. L'on connoît par ce moyen tous les côtés & tous les angles de la figure, qu'il est facile après cela de tracer sur le papier, en faisant des angles égaux à ceux qu'on a observé dans la figure, & des côtés proportionnels aux côtés que l'on a mesurés.

On se sert de la même méthode pour tracer des forteresses. Si elles sont réguliéres, il suffit de mesurer trois lignes, la courtine *OP*, l'aîle *PQ*, & la face *QR* du bastion, & trois angles, savoir l'angle *OPQ* de la courtine & de l'aîle, l'angle *PQR* de la face & de l'aîle, & l'angle *QRS* du bastion; parce que la place étant supposée réguliére, tout le reste est égal. Tab. 21. Fig. 5.

Si la place est irréguliére, il faut mesurer tous les angles & tous les côtés du circuit. Que si la place est inaccessible, il faut se servir du problême 36.

AVERTISSEMENT.

Après avoir parlé de la maniére de mesurer & de tracer les surfaces rectilignes, il faut passer à ce qui regarde leur division.

PROBLEME XLIV.

Diviser un triangle rectiligne en deux, trois, & autant de parties égales qu'on voudra. Tab. 21. Fig. 6.

SOLUTION.

Soit le triangle *ABC*, qu'il faut diviser en deux parties égales, par une ligne menée de l'angle *A* à la base *BC*. Qu'on divise (*Probl. 9.*) *BC* en deux parties égales en *D*, & qu'on méne la ligne droite *AD*; cette ligne divisera le triangle proposé en deux parties égales.

S'il falloit diviser le triangle en quatre parties égales, il faudroit diviser la ligne *BC* (*Probl. 9.*) en quatre parties égales, & du sommet *A*, mener des lignes droites à tous les points de division, comme on le voit dans la figure, & le triangle seroit ainsi divisé en quatre parties égales.

Mais comme il arrive quelquefois, lorsqu'on divise en plusieurs parties un triangle, par des lignes menées du sommet à tous les points de division, que les segmens sont très-petits, ce qui cause de l'embarras dans la division des terres : voici une autre méthode qui n'est point sujette à cet inconvénient.

Soit le triangle *ABC*, qu'il faut diviser en cinq parties égales. Qu'on prenne dans les deux plus grands côtés, savoir dans le côté *BC*, la cinquiéme partie *BD*, & dans le côté *AC*, la quatriéme partie *AG* ; ensuite le tiers de *DC*, savoir *DF*, enfin la moitié de *GC*, savoir *EG* : qu'on méne après cela, les lignes droites *AD*, *DG*, *GF*, *FE*. Il est constant (*Scol. Th.* 27.) que le triangle proposé *ABC* est par ce moyen divisé en cinq parties égales, *BAD*, *ADG*, *DGF*, *GFE*, *FEC*.

PROBLEME LXV.

Tab. 21. Fig. 7. Diviser un triangle en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans un des côtés, à un autre côté.

SOLUTION.

Soit le triangle *ABC* & le point donné *D* dans le côté *BC*. On demande une ligne menée du point *D*, qui divise en deux parties égales le triangle *ABC*. Si *D* divisoit *BC* en deux parties égales, la ligne *AD* diviseroit aussi le triangle *ABC* par la moitié.

Mais si *D* ne divise point *BC* par la moitié, qu'on coupe le côté *BC* (*Probl.* 9.) en deux parties égales dans le point *E*, & qu'on méne (*Probl.* 2.) la ligne droite *EF* paralléle à la ligne *DA* : je dis que la ligne droite *DF* divise le triangle proposé en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'Hyp.*) *BE* & *EC* sont égales entre elles, la ligne droite *AE* (*Scol. Th.* 27.) coupe par la moitié le triangle *BAC* ; & *AD* & *EF* étant paralléles (*l'Hyp.*) le triangle *DFA* (*par le Cor.* 1. *Th.* 27.) est égal au triangle *DEA*. Donc en ajoûtant des deux côtés le triangle commun *DAB*, on aura (*Ax.* 4.) *FDBA* = *EAB* = *EA*. Mais les triangles *EAF*, & *FDE* étant auſſi égaux, en ôtant de chaque côté *EOF*, les reſtes *DEO* & *AFO* ſeront auſſi égaux, & par conſéquent (*Ax.* 4.) *EAC* = *DFC*. Donc enfin (*Ax.* 6.) *FDBA* = *DFC*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLVI.

Tab. 21. Fig 8.

Diviſer un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un point donné dans un des côtés.

SOLUTION.

Soit le triangle *BAC* qu'il faut diviſer en trois parties égales, par des lignes droites menées du point *D* donné dans le côté *BC*. Il faut diviſer (*Probl.* 9.) le côté *BC* en trois parties égales, *BE*, *EF*, *FC*, & mener les lignes droites *AE*, *AD*, *AF*; enſuite (*Probl.* 2.) mener les deux lignes *EG* & *FH* paralléles à la ligne *AD*; après cela ſi on méne les lignes *DG* & *DH* : je dis que *DGB*, *GDHA*, & *HDC* ſont trois parties égales du triangle propoſé *BAC*.

DEMONSTRATION.

Puiſque *BE*, *EF*, *FC* ſont (*l'hyp.*) égales entr'elles, les triangles *BAE*, *EAF*, *FAC* ſont auſſi (*Cor.* 1. *Th.* 27.) égaux. Puiſque *AD* & *GE* ſont paralléles (*l'hyp.*) les triangles *GEA* & *GED* ſont de même égaux, & par conſéquent en ôtant de chaque côté la partie *GOE*, les reſtes (*Ax.* 5.) *DOE* & *GOA* ſeront auſſi égaux. Donc ſi on ajoûte de part & d'autre le trapéze *EOGB*, on aura (*Ax.* 4.) les triangles *DGB* & *EAB* égaux entre eux. L'on peut de même démontrer que les triangles *DHC*, & *FAC* ſont égaux. Donc puiſqu'on a déja fait voir que chacun des triangles *EAB* & *FAC*, eſt le tiers du triangle *ABC*; chacun des triangles *DGB* & *DHC* doit auſſi être le tiers du triangle propoſé; & par conſéquent le reſte *GDHA* ſera de même la troiſiéme partie du même triangle *BAC*. Donc par cette méthode, le triangle *BAC* sera divisé en trois parties égales *DGB*, *DHC*, & *GDHA*, par les lignes droites menées du point donné *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLVII.

Diviser un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un côté à un autre, & de différens points.

SOLUTION.

Pour diviser le triangle *ABC* comme on vient de le dire, *il faut dans un côté*, par exemple dans *AC*, choisir les points *D* & *E*, & mener les lignes *BD* & *BE*, ensuite diviser *AC* (*Probl. 9.*) en trois parties égales *AH*, *HI*, *IC*, & mener les lignes paralléles *HF* à *BD* & *IG* à *BE*; si après cela on méne les lignes *DF* & *EG*: je dis que ces lignes *DF* & *EG* divisent le triangle proposé *BAC* en trois parties égales *ABFD*, *DFGE*, *EGC*.

DEMONSTRATION.

En ménant les lignes *BH* & *BI*, il est constant, comme on l'a déja montré, que l'espace $BOF = DOH$, parce que *BD* & *HF* sont paralléles (*l'hyp.*), & ainsi en ajoûtant de chaque côté *ADOB*; *ADFB* sera $= ABH$. De même puisque *BE* & *GI* sont (*l'hyp.*) paralléles, $BPG = EPI$, & en ajoûtant de part & d'autre *HBPE*; *HBGE* sera $= HBI$. Mais puisque $BOF = DOH$, $HBGE =$ (*Ax.4.*) *DFGE*. Donc *DFGE* est aussi $= HBI$; & par conséquent chaque espace *ADFB*, & *DFGE* est égal à chacun des triangles *ABH* & *HBI*, qui, parce que les lignes *AH*, *HI*, *IC* sont égales entr'elles (*l'hyp.*) sont chacun (*Cor. 1. Th. 27.*) le tiers de l'espace *BAC*. Donc les parties *ADFB*, & *DFGE* sont aussi chacune le tiers de ce même espace *BAC*, & par conséquent le triangle *BAC* est divisé en trois parties égales par les lignes *DF* & *EG*, ſavoir, *ADFB*, *DFGE*, & *EGC*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLVIII.

D'un angle donné *EAF*, par le point *D* donné dans un côté, couper un triangle égal au triangle donné *GHK*. Tab. 21. Fig. 10.

SOLUTION.

Qu'on méne la ligne *KL* (*Probl.* 1.) perpendiculaire à la baſe *GH* du triangle *GHK*, & *AM* perpendiculaire en *A* à la ligne *FA*; enſuite qu'on prenne *AC*· *KL* :: *GH*· *DA*, & que par le point *C* on méne (*Probl.* 2.) *CN* paralléle à la ligne *AF*, & qui coupe *AE* en *B*: je dis, que ſi enſuite on méne la ligne *BD*, le triangle *DBA* eſt égal au triangle donné *GHK*.

DEMONSTRATION.

Si on méne la ligne *BO* (*Probl.* 1.) perpendiculaire à *AD*, cette ligne *BO* ſera la hauteur du triangle *ABD*, dont la baſe eſt *AD*. De plus, puiſque *CO* eſt un parallélograme rectangle, *BO* ſera auſſi (*Th.* 26.) $=$ *AC*; mais (*l'hyp.*) *AC*· *KL* :: *GH*· *DA*. Donc *BO*· *KL* :: *GH*· *DA*, & par conſéquent (*Lem.* 1. *proport. part.* 1.) $BO \times DA = KL \times GH$. donc leurs moitiés ſont auſſi égales entr'elles, ou bien (*Scolie Th.* 27.) le triangle *ABD* eſt égal au triangle donné *GHK*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME XLIX.

De l'angle donné *ZAF* couper un triangle égal au triangle donné *X*, par une ligne menée du point *B* donné hors de l'angle. Tab. 21. Fig. 11. 12. & 13.

SOLUTION.

Il faut méner la ligne *BN* paralléle au côté *FA*, qui rencontre l'autre côté *ZA* prolongé en *N*; enſuite couper par le point donné *B* de l'angle *BNZ* (*Probl.*

48.) le triangle *BKN* égal au triangle donné *X*. Il faut après cela (*Probl.* 17.) tellement couper en *E* la ligne indéfinie *NZ*, que *NK*· *AE* :: *AE*· *NE*; si on méne après cela la ligne *BE* qui coupe *AF* en *G* : je dis, que le triangle *EAG* est égal au triangle donné *X*.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Constr.*) *NK*· *AE* :: *AE*· *NE*; *NK* × *NE* est (*Lem.* 1. *prop. part.* 1.) = *AE* × *AE*, & par conséquent (*Cor.* 1. *Déf.* 17.) *AE* × *AE*· *NE* × *NE* :: *NK* × *NE*· *NE* × *NE* (*Ax.* 9.) :: *NK*· *NE*; mais puisque (*Constr.*) *AF* & *NB* sont paralléles, les triangles *GAE*, & *BNE* sont (*Déf.* 5.) équiangles, ou (*Cor.* 1. *Th.* 29.) semblables entr'eux, & par conséquent (*Cor. Th.* 30.) comme les quarrés *AE* × *AE*, *NE* × *NE*; des côtés homologues *AE*, *NE*. Puisque les triangles *BNK* & *BNE* ont la même hauteur, ils sont entr'eux (*Cor.* 2. *Th.* 28.) comme les bases *NK* & *NE*. Donc les triangles *GAE* & *BNE* sont entr'eux comme les triangles *BNK* & *BNE*, où les triangles *GAE* & *BNK* sont en même raison avec le triangle *BNE*, & par conséquent (*Cor.* 2. *Déf.* 17.) égaux entr'eux. Mais (*Constr.*) le triangle *BNK* est égal au triangle donné *X*. Donc le triangle *GAE* est aussi égal à ce même triangle donné *X*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si le point *K* tombe en *A*, comme dans la figure 12. pour lors *NE* est tellement divisé que *NK* ou *NA*· *AE* :: *AE*· *NE*, & par conséquent les triangles seront (*Constr.*) semblables, & (*Cor.* 1. *Th.* 29.) *BG*· *GE* :: *GE*· *BE*, ou bien *BE* est divisé en *G* en moyenne & extrême raison.

COROLLAIRE II.

De-là suit la méthode de résoudre un Probléme dans lequel un point *B* étant donné hors de l'angle donné *ZAF*,

ZAF, on demanderoit une ligne droite *BE*, qui fut coupée par les côtés de cet angle, en moyenne & extrême raison en *G*, car en menant la ligne *BN* paralléle au côté *AF*, qui rencontre le côté *ZA* prolongé en *N*; ensuite *BA* comme dans la figure 12. en faisant le triangle $GAE = BNE$, comme on l'a montré ci-dessus dans le present problême 49. la ligne *BE* est coupée par les côtés de l'angle donné *ZAF*, en moyenne & extrême raison.

PROBLEME L.

Couper un parallélograme en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans le parallélograme, ou hors du parallélograme, ou enfin dans un de ses côtés. Tab. 21. Fig. 14.

SOLUTION.

Soït le parallélograme *ABCD*, qu'il faut couper en deux parties égales, par une ligne menée du point *E*. Après avoir mené les diagonales *AC* & *BD* qui se coupent dans le point *F*, il faut par ce même point *F*, du point donné *E*, mener la ligne droite *EFH*; cette ligne coupera le parallélograme proposé en deux parties égales.

DEMONSTRATION.

Puisque (*l'hyp.*) *AB* & *DC* sont paralléles, les triangles *AFB*, *CFD* sont (*Th.* 3. & 8.) équiangles, & par conséquent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $AB \cdot AF :: CD \cdot CF$, ou (*Regl.* 2. *prop.*) $AB . CD :: AF \cdot CF$. Mais (*Th.* 26.) $AB = CD$. Donc $AF = CF$ De plus, puisque *AB* & *CD* sont paralléles, les triangles *AFH* & *CFK* sont aussi (*Th.* 3. & 8.) équiangles, & par consequent (*Cor.* 1. *Th.* 29.) $AF \cdot CF :: AH \cdot CK :: HF \cdot FK$. Donc puisque on a trouvé que $AF = CF$, *AH* sera aussi $= CK$ & $HF = FK$, & ainsi les triangles *AFH*, *CFK*, seront aussi équilatéraux, & (*Cor.* 3. *Th.* 24.) semblables en tout. Mais (*Cor.* 3. *Th.* 26.) les triangles *CAB* & *ACD* sont aussi égaux, Donc les quadrilatéres *DAHK* & *BCKH* sont de même égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Comme chacune des diagonales, divise (*Cor. 3. Th. 26.*) le parallélograme par la moitié, si le point donné *E* se trouvoit dans l'une des diagonales, il est constant que pour lors le parallélograme seroit divisé en deux parties égales, par la ligne qui passeroit le point donné.

PROBLEME LI.

Tab. 21. Fig. 15. Diviser un quadrilatére rectiligne en deux parties, qui soient entre elles en raison donnée, par une ligne menée de tel de ses angles donné qu'on voudra.

SOLUTION.

Soit le quadrilatére *ABCD* qu'il faut diviser par une ligne menée de son angle *A*, en deux parties qui soient entre elles comme *M* est à *N*. Qu'on méne la ligne diagonale *AC*, & qu'on lui fasse une paralléle *DE*, qui rencontre le côté *BC* prolongé en *E*, & qu'on méne la ligne *AE*. Il est constant que pour lors les triangles *ADC* & *AEC* sur la même base *AC* & entre les mêmes paralléles (*constr.*) *AC* & *DE*, sont (*Cor. 1. Th. 27.*) égaux entr'eux, & par conséquent en ajoûtant de part & d'autre *ACB*, le triangle *BAE* sera égal au quadrilatére donné *ABCD*. Cela étant fait, qu'on divise (*Sol. 2. Probl. 9.*) *BE*, de maniére que *BG*. *GE* :: *M*. *N*; ensuite qu'on méne la ligne *GF* paralléle à *AC*, & qui rencontre le côté *DC* en F. Enfin qu'on méne la ligne *AF* : Je dis que le quadrilatére *ABCD* est divisé par cette ligne *AF*, en deux parties, qui sont entre elles en raison donnée, c'est-à-dire, que *AFCB*. *AFD* :: *M* *N*.

DEMONSTRATION.

Puisque *AC*, *GF*, *DE*, sont (*constr.*) paralléles, non seulement les triangles *ADC* & *AEC*, qui ont la même base

& qui sont entre les mêmes paralléles, sont égaux; mais encore leurs parties *AGC* & *AFC* sont égales. Donc leurs restes *GAE* & *FAD* sont de même égaux. Mais on vient de montrer que le quadrilatére *ABCD* est égal à tout le triangle *BAE*. Donc le reste *AFCB* est égal au reste *AGB*. Donc *AFCB*· *AFD* : : *BAG*· *GAE* (*Cor.* 2. *Th.* 28.) : : *BG*· *GE* : : *M*· *N*. Donc la ligne droite *AF* divise le quadrilatére *ABCD* en deux parties, qui sont entre elles en raison donnée de *M* à *N*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si le point *G* tombe en *C*, pour lors *AF* tombera en *AC*, & ainsi la diagonale *AC* divisera pour lors le quadrilatére *ABCD*, en deux parties telles entre elles, que *M* est à *N*. Qui est ce que l'on cherche.

COROLLAIRE II.

Si enfin le point *G* tombe en *H* entre *C* & *B*, la ligne *AH* divisera le quadrilatére *ABCD*, de la maniére qu'on le souhaite; car puisqu'on a déja fait voir que les triangles *ADC* & *AEC* sont égaux entre eux, en leur ajoûtant *CHA*, on aura le quadrilatére *AHCD* égal au triangle *AHE*; & ainsi la partie *BAH*· *AHCD* : : *BAH*· *HAE* (*Cor.* 2. *Th.* 28.) : : *BH* *HE* (*constr.*) : : *M*.*N* Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME LII.

Diviser un quadrilatére par un point donné dans un de ses côtés, en deux parties qui soient entre elles en raison donnée de *M* à *N*. Tab. 22. Fig. 1.

SOLUTION.

Soit *L* le point donné dans le côté *AD* du quadrilatére *ABCD*, qu'il faut diviser en deux parties qui soient entre elles en raison donnée; qu'on méne les lignes droites *LB*, *LC*, & les lignes *AE* & *DF* qui leur soient paralléles, & qui rencontrent en *E* & *F* le côté *BC* prolongé de part &

d'autre ; ensuite (*Probl.* 9.) qu'on prenne *FG*· *GE*:: *M*. *N* , & qu'on méne la ligne *GH* paralléle à la ligne *LB*, & qui rencontre le côté *AB* en *H*. Enfin qu'on méne la ligne *LH* : Je dis que cette ligne *LH* divise la quadrilatére *ABCD*, en deux parties *HLDCBH* & *HAL*, qui sont entre elles comme *M* est à *N*.

DEMONSTRATION.

Il est évident (*Probl. précedent.*) que le triangle *BLF* est égal au quadrilatére *LBCD*, & le triangle *BLE* au triangle *ABL*. Donc puisque les triangles *LGB* , *LHB* ont la même base *BL* & sont entre les mêmes paralléles *GH* & *LB* ; ils sont aussi (*Cor.* 2. *Th.* 27.) égaux entre eux , & par conséquent le triangle *FLG* est égal au polygone *LHBCD*, & le triangle *GLE* égal au triangle *ALH*. Donc enfin *LHBCD*· *ALH* : : *FLG*· *GLE* : : *FG*· *GE* (*Constr.*) : : *M*· *N*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Dans quelqu'autre point de la base *CB* prolongée , que tombe *G* , on fera le même raisonnement que dans les deux Corollaires du Problême précédent.

PROBLEME LIII.

Tab. 22. Fig. 1. Mesurer la surface courbe d'un cylindre droit.

Il faut premiérement mesurer le diamétre *AC* de la base du cylindre droit *ABCD* ; ensuite dire : comme 7. 22 (rapport qui approche le plus de celui qui est entre le diamétre & la circonférence) de même *AC* est au contour de la même base ; ainsi le circuit de la base , sera $3\frac{1}{7}$ du diamétre *AC* , & par conséquent (*Th.* 48.) en multipliant le côté *AB* du cylindre droit , par $3\frac{1}{7}$ du diamétre *AC* , le produit qui en résultera , sera la valeur de la surface convéxe du même cylindre.

SCOLIE.

On peut démontrer de la même maniére que la surface du cylindre oblique, est égale au produit du côté de ce même cylindre, multiplié par le circuit de la section faite par un plan perpendiculaire à l'axe; ce qui suit de la démonstration du Th. 48. & du Th. 43.

PROBLEME LIV.

Mesurer la surface convéxe d'un cone droit. Tab. 22, Fig. 34

SOLUTION.

Il faut multiplier le côté *AF* du cone droit *FAB*, par le demi contour *FPQB* de sa base, & le produit qui en résulte est la surface convéxe du cone.

DEMONSTRATION.

Soient deux côtés très-proche l'un de l'autre, *AP* & *AQ*, du cone *AFB*, de maniére que *PAQ* soit un triangle, dont la base *PQ* soit un côté d'un polygone d'une infinité de côtés, que l'on peut regarder comme un cercle (*Cor. Th.* 37.) Donc puisque ce triangle *PAQ* (comme rectangle à cause des angles *P* & *Q* égaux, qui ne different de l'angle droit, que par la moitié de l'infiniment petit *PAQ*, qui peut être regardée comme rien par rapport à eux) est égal (*Scol. Th.* 27.) au produit de la moitié du côté *AP* par la base *PQ*; toute la surface convéxe du cone droit, composée d'autant de triangles égaux au triangle *APQ*, qu'il y a de côtés dans le contour de sa base, sera aussi égale au produit de la moitié du côté *AP*, par tous les côtés infiniment petits du contour de la base du cone, égaux à *PQ*. Ou, ce qui est la même chose, au produit de tout le côté *AF*, par la moitié du contour de la base *FPQB*. Ce qu'il falloit démontrer.

SCOLIE.

Les Géométres n'ont point encore trouvé la méthode de mesurer la surface convéxe du cone oblique.

PROBLEME LV.

Mesurer la surface de la terre.

SOLUTION.

Les observations faites par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, prouvent qu'un degré d'un grand cercle de la terre, est à peu près égal à 25 lieuës ; si on multiplie donc 360, qui exprime le nombre des degrés d'un cercle, par 25, le produit sera la valeur du circuit de la terre, qui est 9000 lieuës ; mais parce que comme 22 est à 7, de même le contour de 9000 lieuës est au diamétre du grand cercle de la terre, ce diamétre est environ de 2864 lieuës. Donc puisque (*Th.* 38.) l'aire du cercle est égale au demi-rayon multiplié par la circonférence de ce même cercle, & la surface de la sphére (*Th.* 47.) égale à l'aire de quatre de ses grands cercles, la surface de la terre sera de 25, 776, 000 lieuës quarrées. Ce qu'il falloit trouver.

CHAPITRE TROISIEME.

De la mésure des solides ou des corps.

PROBLEME LVI.

LA base & la hauteur d'un prisme, d'un parallélépipéde étant données, trouver leur solidité ou leur masse.

SOLUTION.

Si le prisme ou le paralléllépipéde est rectangle, sa masse ou solidité sera égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur, & cela pour la même raison qui prouve que le *parallélograme rectangle est égal au produit de sa base par* sa hauteur.

Si le prisme ou parallélépipéde est oblique, il sera encore égal au produit de la base par la hauteur; car (*Th.* 43.) les prismes ou parallélépipédes obliques sont égaux aux rectangles de la même base & hauteur. Donc tous les prismes & parallélépipédes sont égaux au produit de leur base multipliée par leur hauteur, & par conséquent si on multiplie la base & la hauteur donnée, l'une par l'autre, le produit sera égal à la masse du prisme ou parallélépipéde proposé.

COROLLAIRE.

Puisque les prismes dont les bases sont circulaires, qu'on nomme ordinairement cylindres, sont (*Cor.* 1. *Th.* 43.) des prismes d'une infinité de côtés, la masse des cylindres, est aussi égale au produit de leur hauteur par leur base.

SCOLIE.

On peut facilement par ce qu'on vient de démontrer, connoître le nombre des carreaux qui composent une muraille. Il faut compter combien il y en a en long & en large, & multiplier l'un par l'autre; le produit exprime le nombre qui compose la base; ensuite il faut compter combien il y en a dans la hauteur & multiplier ce nombre par celui de la base, & le produit sera le nombre des carreaux dont le mur est composé. Il faut procéder de la même maniére quand il s'agit de trouver la capacité de tel autre espace régulier qu'on voudra.

PROBLEME LVII.

La base & la hauteur d'une pyramide étant données, trouver sa masse ou solidité.

SOLUTION.

Puisque (*Cor.* 1. *Th.* 44.) la pyramide est le tiers du prisme ou parallélépipéde qui a la même base & la même hauteur, & que tout prisme ou parallélepipéde est (*Probl.* 56.) égal au produit de sa base par sa hauteur; la pyramide doit par conséquent être égale au produit de sa base par le tiers de ſa hauteur. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

On peut regarder les pyramides dont les baſes ſont circulaires, qu'on nomme ordinairement cones, comme de vraies pyramides d'une infinité de côtés ; & par conſéquent ſi on multiplie la baſe du cone par le tiers de ſa hauteur, ou ſa hauteur par le tiers de ſa baſe, le produit ſera la maſſe ou ſa ſolidité du cone,

SCOLIE.

Pour trouver la maſſe de tous les autres corps, il faut par le moyen de ce problême, chercher la maſſe des pyramides auſquelles on peut les réduire, & la ſomme de la maſſe de toutes ces pyramides, exprimera la maſſe du corps propoſé ; car comme toutes les figures rectilignes peuvent être diviſées en triangles, de même tous les corps ſe peuvent diviſer en pyramides.

PROBLEME LVIII.

Meſurer une partie de cone.

SOLUTION.

Tab. 13. Fig. 4. Soit la partie $ADBC$ du cone EBC, qu'il faut meſurer, dont la hauteur SF eſt donnée avec les côtés AB & DC, & les diamétres AD & BC des baſes paralléles. *Qu'on méne la ligne DO paralléle à la ligne AB ; du point E où les côtés du cone ſe rencontrent, qu'on méne la ligne EF perpendiculaire aux baſes APDQ, BMCN, en S & en F.*

Puiſque les triangles COD, CBE, DAE ſont ſemblables (*Th. 29. & Cor. 1.*) $OC \cdot OD$ ou $AB :: AD \cdot AE$; & par conſéquent les trois premiers termes de cette analogie étant donnés (*l'hyp.*), on trouvera par la régle de trois, le quatriéme AE. De plus, les triangles BEF, & AES étant auſſi ſemblables, AB (*Th. 29. & Cor. 1.*) $\cdot AE :: FS \cdot SE$. Donc puiſqu'on connoît encore les trois premiers termes de cette analogie, on trouvera aussi, par la régle de trois, le quatriéme qui est *ES*.

Mais (*Cor. du Probl. précédent*) la masse du cone *BEC*, est égale au produit de sa base *BMCN*, par le tiers de sa hauteur *EF*; de même le cone *AED* est égal au produit de la base *APDQ*, par le tiers de sa hauteur *ES*. Donc la partie *ABCD* du cone total *BCE*, est égale à l'excès dont le produit de la grande base par le tiers de la hauteur du cone entier, surpasse le produit de la petite base par le tiers de la hauteur du petit cone *AED*.

De ce problême suit la méthode de mesurer les tonneaux, que l'on peut regarder comme composés de deux parties de cone *ABDC*, *ABFE*, jointes par la base commune *AGBO*. Mais il faut remarquer que pour connoître la quantité de la liqueur contenuë dans un tonneau, il est nécessaire de retrancher des diamétres *AB*, *CD*, & du côté *AC*, l'épaisseur des douves, avant que de faire l'opération marquée dans le Problême. Tab. 21. Fig 53

PROBLEME LIX.

Trouver la solidité & la masse de la terre.

On a démontré dans le Cor. du Th. 46, que la masse de la sphére, est égale au produit de quatre de ses grands cercles; c'est-à-dire (*Th.* 47.) à la surface de la sphére, par le tiers du rayon. Mais on a trouvé (*Probl.* 55.) que la surface de la terre étoit de 25, 776, 000 lieuës quarrées, & son diamétre de 2864 lieuës de long, ou le tiers du rayon d'environ 477. Si on multiplie donc 25, 776, 000 par 477, le produit sera la masse ou la solidité de la terre, savoir 12, 295, 152, 000 lieuës cubiques. Ce qu'il falloit trouver.

PROBLEME LX.

Trouver combien il faudroit de grains de ſable pour *faire une maſſe* égale à la terre.

SOLUTION.

Archiméde a fait un Livre ſur cette queſtion ; comme on diſputoit quelquefois ſi le ſable qui eſt ſur les bords de la mer pouvoit ſe compter, il démontra non ſeulement qu'on pouvoit le compter ; mais encore qu'on pouvoit ſavoir combien de grains de ſable pourroient être contenus ſous les Cieux.

Pour réſoudre ce Problême, il faut, comme Archiméde, que nous faſſions quelques ſuppoſitions.

Suppoſons, 1°. Qu'un grain de coriandre contient mille petits grains de ſable, 2°. Que dix grains de coriandre diſpoſés en ligne droite, font un pouce; puiſqu'il y a douze pouces dans un pied, un pied contiendra 120 grains de coriandre, & par un conſéquent dans un pas géométrique, qui eſt de cinq pieds, il y aura 600 grains de coriandre; & dans un mille 600000, dans une lieuë 1800000, qui multipliez par 2864 lieuës, égales (*Probl.* 55.) au diamétre de la terre, on aura dans le diamétre de la terre 5, 155, 200, 000 grains de coriandre.

Après avoir trouvé combien il y a de grains de coriandre dans le diamétre de la terre, ſi l'on dit : 7. 22 :: le nombre des grains de coriandre, égal au diamétre de la terre, eſt à ſa circonférence; on trouvera (*Probl.* 55.) le nombre des grains de coriandre égal à la circonférence de la terre, & (*Probl.* 60.) le nombre des grains de coriandre égal à ſa ſolidité, & ce nombre multiplié par 1000, donnera les grains de ſable qui feroient une maſſe égale à la terre. Cela eſt plus long que difficile.

PROBLEME LXI.

Mesurer toutes sortes de corps irréguliers.

SOLUTION.

Les corps irréguliers ne pouvant facilement être réduits à des corps réguliers, il n'est pas aisé de les mesurer géométriquement ; c'est pourquoi il faut se servir de la méthode suivante.

Ayez un vase d'une figure parallélépipéde qui puisse contenir de l'eau, & assez grand pour que le corps que l'on veut mesurer puisse être entiérement couvert de l'eau qui est dans le vase; après l'avoir placé de maniére qu'il soit paralléle à l'horison, il faut mettre dans ce vase le corps que l'on veut mesurer, ensuite marquer sur les côtés du vase, l'endroit où répond la surface de l'eau. Cela étant fait, retirez le corps, & marquez encore où répond la surface de l'eau lorsqu'elle n'est plus en mouvement, & mesurez (*Probl. 56.*) les deux parallélépipédes d'eau, dont la base commune est le fond du vase, & les hauteurs sont les perpendiculaires menées des marques de la surface de l'eau, sur les côtés du vase, jusques à sa base; ensuite retranchez le petit parallélépipéde du grand, & ce qui restera sera égal à la masse du corps irrégulier.

FIN.

TABLE

DES ELEMENS DE GEOMETRIE.

PREMIERE PARTIE.

DE LA GEOMETRIE SPECULATIVE, page 2
Axiomes ou verités connuës d'elles-mêmes, 2
PREMIER LIVRE. Des lignes, 4
CHAPITRE PREMIER. Des lignes droites & des angles qu'elles renferment, 4
Définition I. Ce qu'on entend par ligne droite, 4
Définition II. Ce que c'est que plan, ou surface plane, 5
Définition III. Ce qu'on entend par angle, 6
Définition IV. Ce que c'est qu'angle droit, obtus, aigu, 6
Théorême I. Une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, forme deux angles droits, ou égaux, pris ensemble, à deux droits, 7
Théorême II. Si ces deux angles sont droits, ou égaux pris ensemble à deux droits, ils sont formés par une ligne droite tombant sur une autre même ligne droite, 8
Théorême III. Si deux lignes droites se coupent, elles forment des angles opposés au sommet, égaux entr'eux, 9
Théorême IV. Si les angles opposés au sommet, sont égaux ; les deux lignes qui forment ces angles, sont des lignes droites, 10
Théorême V. Une ligne indéfinie, perpendiculaire dans le milieu d'une autre, a tous ses points également éloignés des extrêmitez *de cette ligne* 10
Théorême VI. Une ligne perpendiculaire dans le milieu d'une autre, passe par tous les points, qui sont dans le plan de ces lignes droites, également distans des extrêmités de cette autre, 11
Théorême VII. 1°. La plus courte des lignes qu'on peut mener du même point, sur une ligne droite, est la perpendiculaire. 2°. La plus courte de toutes les autres est celle qui est la plus proche de la perpendiculaire, 13
Définition V. Ce qu'on entend par lignes paralléles, 17
Théorême VIII. Si des lignes sont paralléles. 1. Les angles alternes, internes sont égaux. 2. Les angles alternes externes

ſont auſſi égaux. 3. Les angles internes du même côté ſont égaux à deux droits. 4. Les angles externes du même côté, ſont auſſi égaux à deux droits, 17

Théorême IX. Des lignes ſont paralléles. 1. Si les angles alternes internes ſont égaux. 2. Si les angles alternes externes ſont auſſi égaux. 3. Si les angles internes du même côté, ſont enſemble égaux à deux droits. 4. Si les angles externes du même côté, ſont auſſi égaux à deux droits, 19

CHAPITRE SECOND. Des lignes circulaires & de leur rencontre avec les lignes droites, 20

Définition VI. Ce que c'eſt que cercle, circonférence, arc, centre, rayon, diamétre, corde, ſegment, ſecteur, tangente, 21

Théorême X. 1. La plus longue des lignes droites qu'on peut mener du même point hors du centre du cercle, à la circonference, eſt celle qui paſſe par le centre. 2. La plus longue des autres, eſt celle qui ſe termine à un point de la circonference, plus proche que les autres, de celui auquel ſe termine la plus longue, 22

Théorême XI. La corde ou la ligne droite qui joint deux points de la circonférence, eſt toute dans le cercle, 25

Théorême XII. De ces trois choſes 1. Que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite dans le même plan du cercle; 2. Qu'elle eſt coupée perpendiculairement; 3. Que la ſecante paſſe par le centre du cercle : deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement, 27

Théorême XIII. De ces trois choſes 1. Que la corde d'un cercle eſt coupée par la moitié par une autre ligne droite menée dans le même plan du cercle ; 2. Que l'arc tendu par cette corde, eſt auſſi coupé par le milieu par la ligne droite qui coupe la corde ; 3. Que cette ligne droite paſſe par le centre : deux étant données, la troiſiéme ſuit néceſſairement, 29

Théorême XIV. Lorſque deux cercles ſe rencontrent dans deux points, l'un eſt tellement coupé en deux parties par l'autre, que l'une de ces deux parties eſt toute dedans, l'autre toute hors du cercle qui le coupe, 31

Théorême XV. La ligne droite qui joint les centres des cercles qui ſe touchent, paſſe par le point où ils ſe touchent, 32

CHAPITRE III. De la meſure des angles rectilignes, 33

Théorême XVI. La meſure de l'angle qui eſt au centre, eſt l'arc compris entre ſes côtez, 33

Théorême XVII. L'angle qui eſt entre le centre & la circonférence du cercle, eſt égal à la moitié de la ſomme des arcs compris entre ſes côtés & ceux de l'angle qui lui eſt oppoſé au

sommet, page 34
Théorême XVIII. L'angle qui est à la circonférence, est égal à la moitié de l'arc compris entre ses côtez, soit qu'ils coupent tous deux le cercle, soit que l'un coupe le cercle & l'autre le touche 35
Théorême XIX. L'angle qui est hors du cercle, de quelque maniére que ses côtés prolongés à l'infini rencontrent le même cercle, est égal à la moitié de la différence des arcs, savoir de l'arc concave & de l'arc convexe, compris entre ses côtés, 37
LIVRE SECOND. Des surfaces, 38
Définition VII. Ce qu'on entend par surface, 38
Théorême XX. Si deux plans se coupent, leur intersection commune est premiérement une ligne; secondement une ligne droite, 39
Définition VIII. Ce que c'est qu'un angle formé par un plan incliné sur un autre plan, 40
Definition IX. Ce qu'on entend par une ligne perpendiculaire à un plan, 41
Définition X. Ce qu'on entend par des plans paralléles, 41
CHAPITRE I. Des triangles rectilignes, 42
Définition XI. Ce que c'est qu'un triangle, & de combien de sortes il y en a, 42
Théorême XXI. Les trois angles d'un triangle sont toûjours pris ensemble, égaux à deux droits, 43
Théorême XXII. 1. Dans un triangle, les côtés égaux sont opposés à des angles égaux. 2. Les angles égaux ont des côtés opposés, qui sont aussi égaux, 44
Théorême XXIII. 1. Dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle. 2. Le plus grand angle est aussi opposé au plus grand côté, 45
Théorême XXIV. Si de deux triangles dont l'un a deux côtés égaux à deux côtés de l'autre, l'angle compris entre les deux côtés égaux, est plus grand ue l'angle compris entre les deux côtés de l'autre, la baze de l'un sera aussi plus grande que la baze de l'autre; & réciproquement, &c. 46
CHAPITRE II. Des parallélogrames 47
Définition XII. Ce qu'on entend par parallélograme, trapéze, diagonale, & combien il y a de sortes de parallélogrames, 48
Définition XIII. Ce qu'on entend par poligone, 48
Théorême XXV. Les lignes comprises entre des lignes paralléles & égales, sont aussi paralléles & égales, 48
Théorême XXVI. 1. La figure de quatre côtés, dont les côtés opposés sont égaux, est un parallélograme. 2. Les côtés op-

posés du parallélograme, sont égaux, 49
Théorême XXVII. 1. Les parallélogrames qui sont sur la même baze & entre les mêmes paralléles, sont égaux. 2. Ceux qui ayant la même baze, sont égaux, sont entre les mêmes paralléles. 3. Ceux qui sont égaux & entre les mêmes paralléles, ont aussi la même baze, 50
LIVRE TROISIEME. Des proportions, 53
Définition XIV. Ce que c'est que raison, & combien de sortes il y en a, 53
Définition XV. Ce qu'on entend par antécédent & conséquent. 54
Définition XVI. Ce que c'est que raison d'égalité, & d'inégalité, 54
Définition XVII. Ce qu'on entend par raisons égales, semblables, les mêmes, 54
Définition XVIII. Ce qu'on entend par raisons inégales, dissemblables, différentes, 55
Définition XIX. Ce que c'est que proportion, 55
Axiome IX. 55
Lemme premier. Des proportions, 56
Regles des proportions, 56
LIVRE QUATRIEME. Des proportions des lignes droites, & des figures qu'elles contiennent, 59
CHAPITRE I. 59
Theorême XXVIII. Les aires des parallelogrames & des triangles en general, sont entr'elles comme les produits de leur hauteur par leur baze, 59
Définition XX: Ce qu'on entend par figures égales, 60
Theorême XXIX. 1. La ligne paralléle à la baze d'un triangle, coupe ses côtés proportionnellement. 2. La ligne qui coupe les côtés du triangle proportionnellement, est paralléle à sa baze, 60
Théorême XXX. Les parallélogrames semblables sont comme les quarrés des côtés homologues 63
Théoréme XXXI. Du rapport qui est entre les quarrés des côtés de toutes sortes de triangles 64
Lemme II. Si plusieurs grandeurs sont en même rapport, la somme des antecédens, est à la somme des conséquens, comme le premier antecédent est au premier conséquent, 66
Théorême XXXII. Les contours des figures semblables, sont comme les quarrés des côtés homologues, 67
Lemme III. 67
Théorême XXXIII. Les aires des figures ou poligones semblables, sont comme les quarrés des côtés homologues, 68

Lemme IV. L'angle formé par deux tangentes de cercle, est divisé en deux parties égales, par la ligne menée du point où concourent ces deux lignes, au centre du cercle, 69
Définition XXI. Ce que c'est que figure circonscrite, inscrite, 69
Théorême XXXIV. Les contours des figures semblables circonscrites à des cercles, sont comme les diamétres de ces cercles, 70
Théorême XXXV. Les figures semblables inscrites dans des cercles, sont comme les diamétres de ces cercles, 70
Theorême XXXVI. Les aires des figures semblables inscrites, ou circonscrites à des cercles, sont comme les quarrés des diamétres de ces cercles, 71
Théorême XXXVII. Les contours des cercles, sont comme les diamétres, & les aires comme les quarrés des diamétres, 71
Théorême XXXVIII. L'aire du cercle est égale au produit de la circonférence, par la moitié du rayon, 72
Théoreme XXXIX. 73
CHAPITRE II. De la Trigonométrie, 75
Définition XXII. Ce qu'on entend par sinus, tangente & sécante, 75
Définition XXIII. Ce qu'on entend par sinus total, 76
Définition XXIV. Ce qu'on entend par sinus renversé, 76
Théorême XL. Les côtés d'un triangle rectiligne, sont entr'eux, comme les sinus des angles qui leur sont opposés, 78
Théorême XLI. Dans un triangle rectiligne, le plus grand côté est à la somme des deux autres, comme leur différence est à la différence des parties du plus grand côté divisé par la perpendiculaire menée de l'angle opposé, 79
Lemme V. La plus grande de deux grandeurs inégales, est égale à la moitié de leur différence, & la plus petite est égale à la moitié de leur somme, moins la moitié de leur différence, 80
Théorême XLII. Dans tous les triangles rectilignes, la somme de deux côtés, est à leur différence, comme la tangente de la demi somme des angles adjacens au troisiéme côté, est à la tangente de la demi différence de ces mêmes angles, 80
LIVRE CINQUIEME. Des corps ou des solides, 83
Définition XXV. Ce qu'on entend par prisme, & combien de sortes il y en a, 83
Définition XXV. Ce qu'on entend par pyramide, 84
Théorême XLIII. Deux prismes, ou parallélépipédes, ou enfin deux pyramides qui ont la même baze & sont entre les mêmes plans paralléles, sont égales, 84
Théorême XLIV. Un prisme triangulaire est le triple d'une pyramide, qui a la même baze & la même hauteur, 85

Théorême XLV. En general les prismes, parallélépipédes, cylindres, pyramides, cones, sont entr'eux comme les produits des hauteurs par les bases, page 87
Théorême XLVI. La sphére est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit, 87
Théorême XLVII. La surface de la sphére est égale à la somme de quatre grands cercles de cette meme sphére, 89
Théoreme XLVIII. La surface du cylindre droit, sans ses bases, est égal au produit du contour de sa base par sa hauteur, 90
Theorême XLIX. La surface du cone droit, sans sa base, est égale au produit de la moitié d'un côté, par la circonférence de sa base, 91
Théorême L. La sphére est égale au cone dont la hauteur est le rayon de la sphére, & dont la base est égale à quatre grands cercles de la sphére, 92
SECONDE PARTIE. De la Géométrie pratique, 93
CHAPITRE I. De la position & de la mesure des lignes droites, 93
Problême I. Mener d'un point donné, une ligne perpendiculaire à une autre ligne donnée, 93
Problême II. Mener par un point donné, une ligne paralléle à une autre ligne donnée, 96
Problême III. D'un point donné, mener une ligne, qui avec une autre ligne aussi donnée, fasse un angle égal à un angle aussi donné, 97
Problême IV. Couper en deux parties égales un angle donné, 99
Problême V. Diviser un angle droit en trois parties égales, 101
Problême VI. Couper un angle rectiligne en trois parties égales, 101
Problême VII. Diviser un angle rectiligne en autant de parties qu'on voudra, 102
Problême VIII. Diviser la circonférence d'un cercle en 360 parties égales, qu'on appelle degrés, 104
Problême IX. Diviser une ligne droite en plusieurs parties, qui soient entr'elles en tel rapport qu'on voudra, 105
Problême X. Décrire un cercle par trois points donnés, qui ne soient pas disposés en ligne droite, 107
Problême XI. mener une ligne qui touche un cercle dans un point donné, 108
Problême XII. Trois lignes étant données, trouver une quatriéme proportionnelle, 109
Problême XIII. Deux lignes droites étant données, trouver entr'elles une moyenne proportionnelle, 110

Problême XIV. La moyenne de trois proportionnelles étant donnée avec la ſomme des extrêmes, trouver ces extrêmes, 111
Problême XV. La moyenne de trois proportionnelles, étant donnée avec la différence des extrêmes, trouver ces extrêmes, 112
Problême XVI. Couper une ligne droite en moyenne & extrême raiſon, 112
Problême XVII. Une ligne droite indéfinie étant donnée, & coupée dans deux points, la couper une troiſiéme fois de telle maniére qu'on voudra. 113
Problême XVIII. Deux côtez d'un triangle rectiligne & l'angle opposé à l'un de ces côtés, étant donnés, trouver l'angle dont on connoît l'eſpéce, c'eſt-à-dire, s'il eſt obtus ou aigu, opposé à l'autre côté donné. 114
Problême XIX. Deux angles d'un triangle rectiligne, avec un *de ſes côtés, étant donnés, trouver le troiſiéme angle avec* les deux autres côtés. 115
Problême XX. Les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, trouver tous ſes angles. 116
Problême XXI. Deux côtés d'un triangle rectiligne, & l'angle compris entre ces côtés étant donnés, trouver les autres angles & le même côté. 117
Problême XXII. Dans un triangle rectiligne, deux angles avec *un côté, ou deux côtés avec un angle, étant donnés, ou bien* tous les côtés, trouver ſa hauteur. 118
Problême XXIII. Approcher à l'infini de la valeur rectiligne d'un arc de cercle. 118
Problême XXIV. Meſurer toutes ſortes de diſtances en long, large, ou profond, acceſſibles par une extrêmité ſeulement. 120
Problême XXV. Meſurer toutes ſortes de diſtances en long, large, ou profond, inacceſſibles. 121
Problême XXVI. *Déterminer par où paſſe une ligne droite, dont* on ne voit que deux points, qui en ſont les extrêmités. 121
CHAPITRE II. De la meſure des ſurfaces rectilignes. 122
Définition XXVII. Ce que c'eſt qu'un polygone régulier. 122
Problême XXVII. Le nombre des côtés d'un poligone régulier étant donné, trouver l'angle du centre. 124
Problême XXVIII. Conſtruire un triangle iſoſcéle, dont chaque angle à la baſe, ſoit le double de celui qui eſt au ſommet. 125
Problême XXIX. Dans un cercle donné, décrire un triangle rectiligne équiangle à tel triangle qu'on voudra. 125
Problême XXX. Décrire dans un cercle donné, un pentagone régulier. 126
Problême XXXI. Décrire ſur une ligne droite un pentagone

regulier. 127
Problême XXXII. Inscrire un héxagone dans un cercle donné. 128
Problême XXXIII. Décrire un héxagone sur une ligne droite donnée. 129
Problême XXXIV. Décrire dans un cercle donné, un quindécagone régulier. 130
Problême XXXV. Décrire dans un cercle donné, ou sur une ligne droite donnée, un polygone régulier d'autant de côtés qu'on voudra. 131
Problême XXXVI. Dans un triangle rectiligne, deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, ou enfin tous les côtez étant donnés, trouver l'aire du triangle. 132
Problême XXXVII. Trouver l'aire de toutes sortes de figures. 132
Problême XXXVIII. Faire des cartes topographiques. 133
Problême XXXIX. Faire sur la terre & dans un point marqué d'une ligne donnée, un angle d'une grandeur déterminée. 134
Problême XL. Mesurer un angle sur la terre. 135
Problême XLI. Décrire sur la terre un polygone regulier, un côté ou un rayon étant donné. 136
Problême XLII. Décrire sur la terre telle figure rectiligne qu'on voudra, réguliere ou irréguliere, comme une Ville, une Citadelle, un Château tel qu'il est represensé sur le papier. 137
Problême XLIII. Tracer sur le papier une figure rectiligne, par exemple, une Ville, un Château, une Citadelle, &c. 138
Problême XLIV. Diviser un triangle rectiligne en deux, trois, & autant de parties qu'on voudra. 139
Problême XLV. Diviser un triangle en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans un des côtés, à un autre côté. 140
Problême XLVI. Diviser un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un point donné dans un des côtés. 141
Problême XLVII. Diviser un triangle en trois parties égales, par des lignes droites menées d'un côté à un autre, & de différens points. 142
Problême XLVIII. D'un angle donné, par un point donné dans un côté, couper un triangle égal à un triangle donné. 143
Problême XLIX. D'un angle donné couper un triangle égal à un triangle donné, par une ligne menée d'un point donné hors de l'angle. 143
Problême L. Couper un parallélograme en deux parties égales, par une ligne menée d'un point donné dans le parallélograme, ou hors du parallélograme, ou enfin dans un de ses côtés. 145

Problême LI. Diviser un quadrilatére rectiligne en deux parties, *qui soient entr'elles en raison donnée*, par une ligne menée de tel de ses angles qu'on voudra. 146
Problême LII. Diviser un quadrilatére par un point donné dans un de ses côtés, en deux parties qui soient entr'elles en raison donné. 147
Problême LIII. Mesurer la surface courbe d'un cylindre droit. 148
Problême LIX. Mesurer la surface convexe d'un cone droit. 149
Problême LV. Mesurer la surface de la terre. 150
CHAPITRE III. De la mesure des solides ou des corps. 150
Problême LVI. La base & la hauteur d'un prisme, d'un parallélépipéde étant données, trouver leur solidité, ou leur masse. 150
Problême LVII. La base & la hauteur d'une pyramide étant données, trouver sa masse ou solidité. 151
Problême LVIII. Mesurer une partie du cone. 152
Problême LIX. Trouver la solidité & la masse de la terre. 153
Problême LX. Trouver combien il faudroit de grains de sable pour faire une masse egale à la terre. 154
Problême LXI. Mesurer toutes sortes de corps irreguliers. 155

Fin de la Table des Elémens de Géométrie.

Fautes à corriger dans les Elémens d'Algébre & d'Arithmétique.

PAge 22. Définition 1, corrigés 5. Page 44. ligne 17, s'il arrivoit, lisés, s'il arrivoit.

Dans les Elémens de Géométrie.

Page 2. ligne 3. des propositions, lisés, des proportions. Page 11. ligne 13, des l'un, lisés, de l'un. Page 12, ligne 9 du Corollaire, ces qui, lisés, celles qui. Page 51. ligne 9 de la demonstration de la seconde partie, prolongé, lisés, prolongée. Page 66 pénultiéme ligne du Scolie, du côté de *BC*, lisés, du côté *BC*. Page 80. ligne 1. lisés, à la moitié de leur somme. Page 90. ligne 2 de la démonstration, & sont, lisés, sont. Page 116. Problême 20, tous ces angles, lisés, tous ses angles. Page 120. ligne 8, en continuan, corrigés, en continuant. Page 130. Problême 34, au quindécagone, lisés, un quindécagone. Page 146. derniére ligne du scolie, qui passeroit le point, lisés, qui passeroit par le point. Page 147. pénultieme ligne du Corollaire 2. lisés *BH*·*HE*.

Les fautes sont corrigées

TAB. 1.

fig. 1.
Cap. 1.

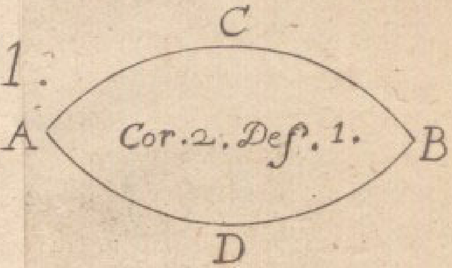


fig. 2.

fig. 3.

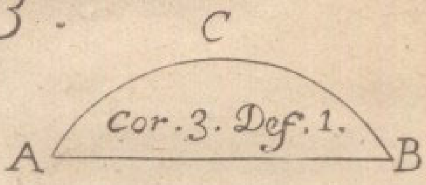


fig. 4.
Def. 3.

fig. 5.
Def. 3.

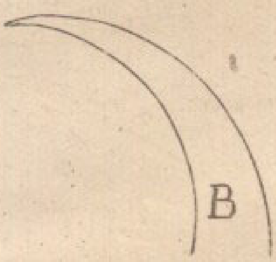


fig. 6.
Def. 3.

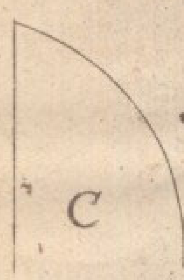


fig. 7.

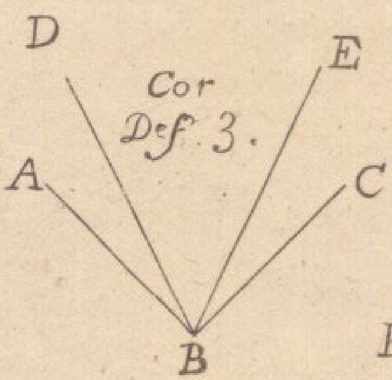
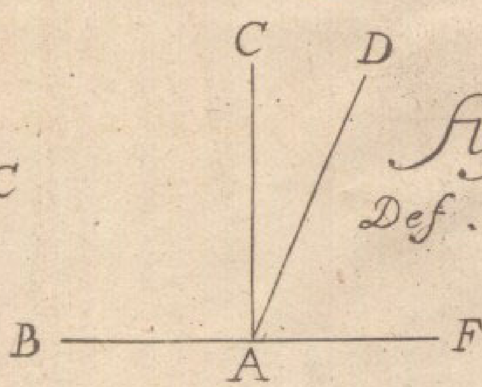


fig. 8.
Def. 4.



Vallet. f. 1731.

TAB. 2.

fig. 1.

Th. 1.

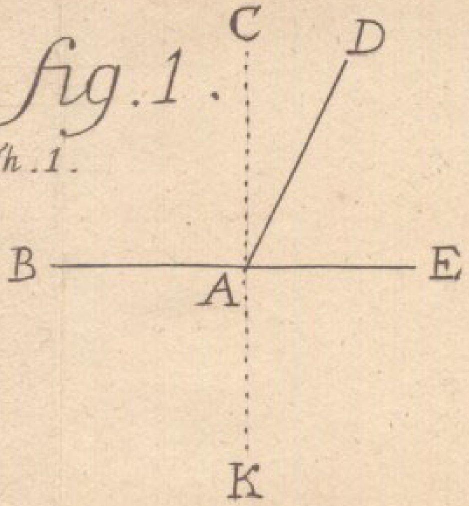


fig. 2.

Th. 2.

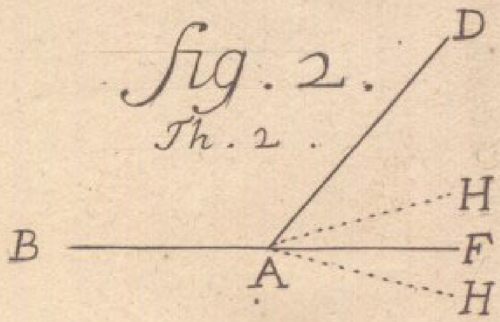


fig. 3.

Th. 3. Et. 4.

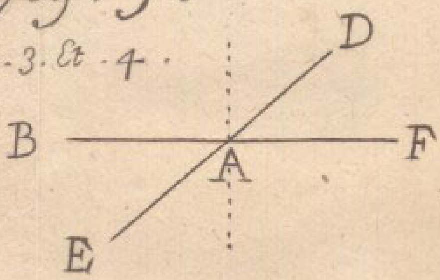


fig. 4.

Th. 5.

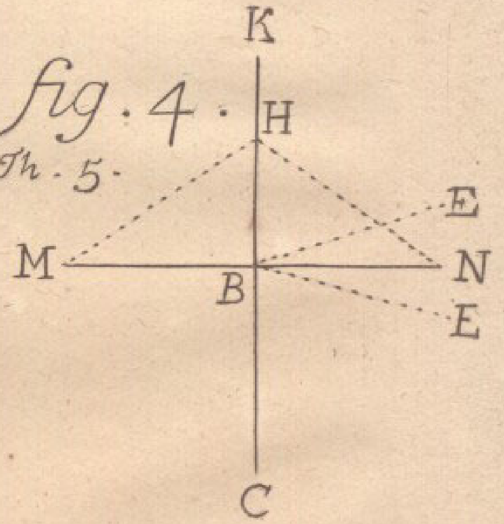


fig. 5.

Th. 6.

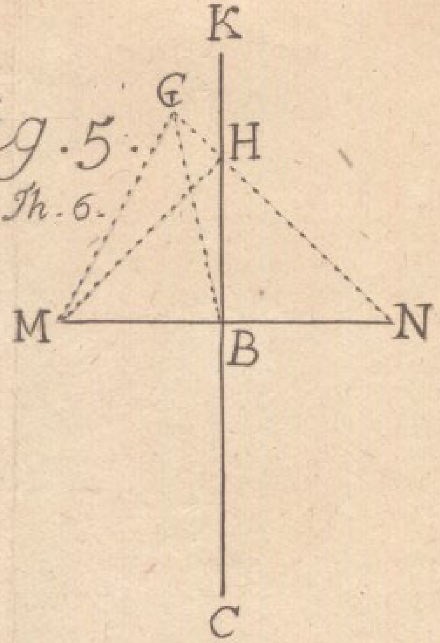
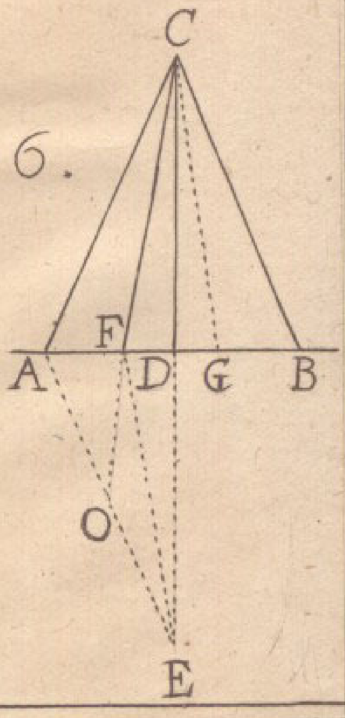


fig. 6.

Th. 7.



TAB. 3.

fig. 1.

Th. 8. Et 9.

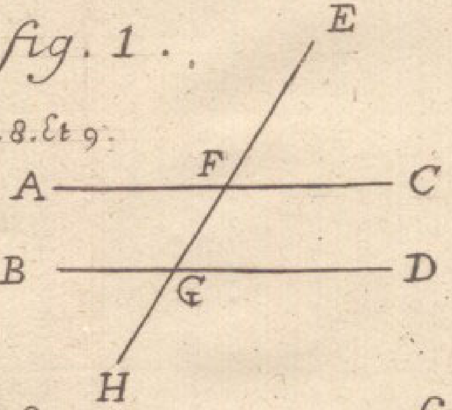


fig. 2.

Th. 8. Et 9.

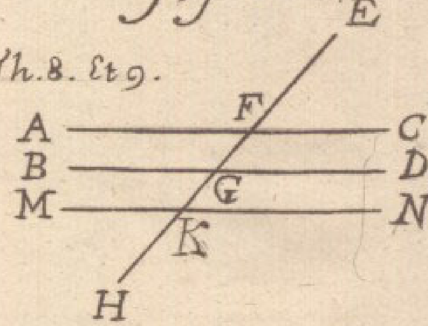


fig. 3.

Cap. 2.
Cor. 8.
def. 6.

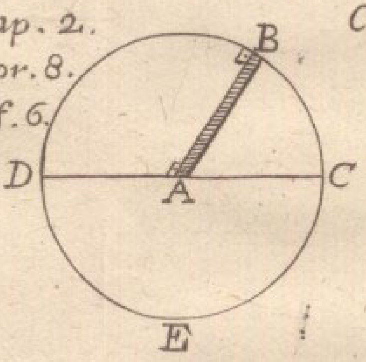


fig. 4.

Cor. 1. Th. 12.

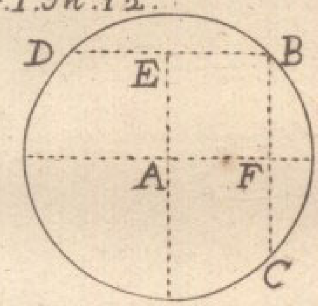


fig. 5.

Th. 10.

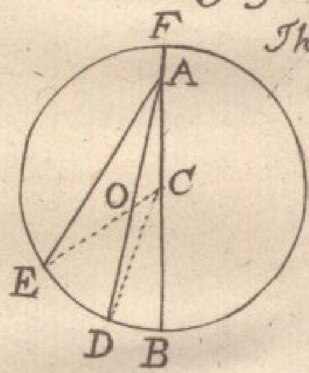


fig. 6.

Th. 10.

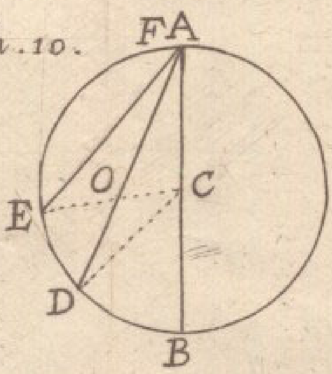


fig. 7.

Th. 10.

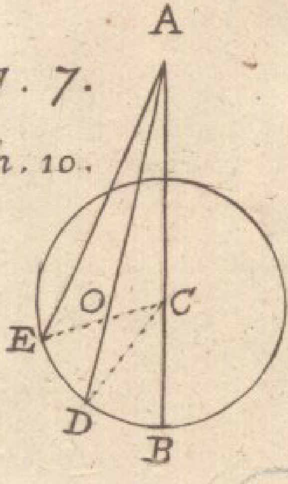
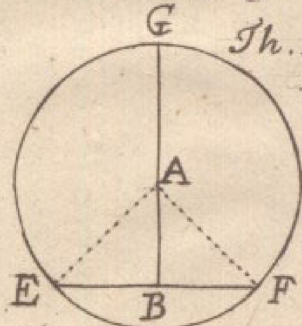


fig. 8.

Th. 11. Et 12.



TAB. 4.

fig. 1.
Cor. 1. Th. 12.

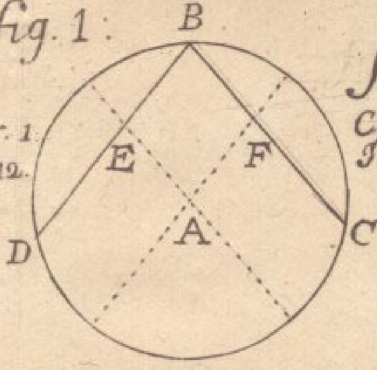


fig. 2.
Cor. 4. Th. 12.

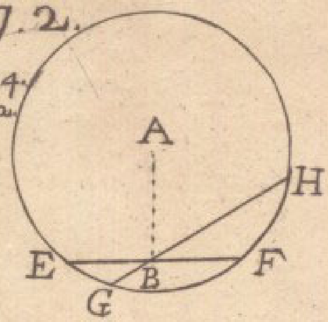


fig. 3.
Th. 13.

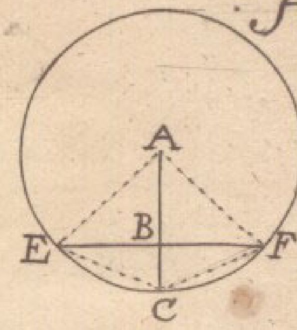


fig. 4.
Cor. 2. Th. 13.

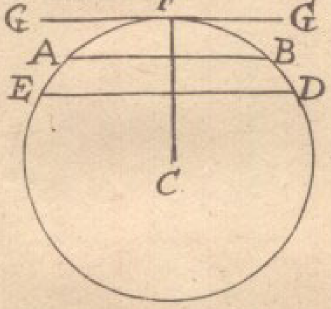


fig. 5.
Th. 14.

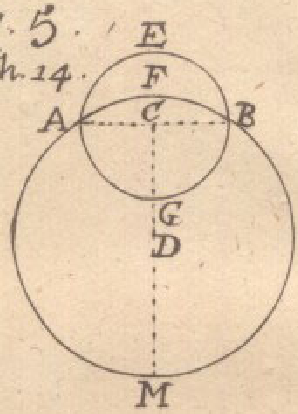


fig. 6.
Th. 14.

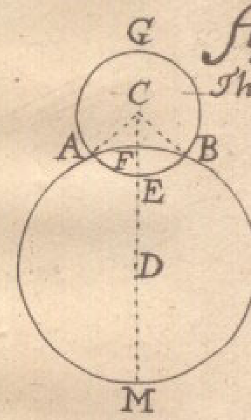


fig. 7.
Th. 15

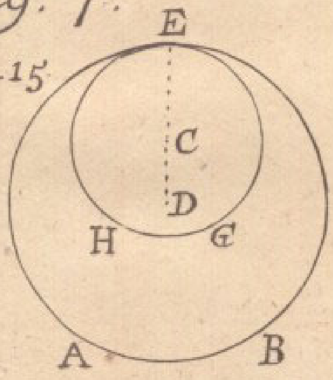


fig 8.
Th. 14.

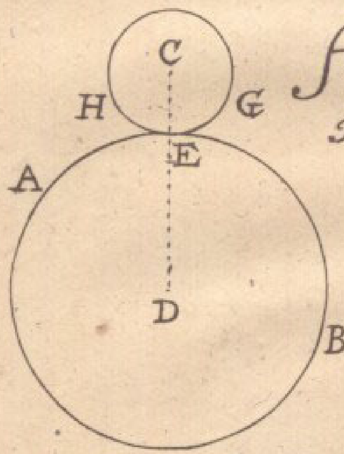


fig. 9.
Cap. 3.
Cor. 1. Th. 16.

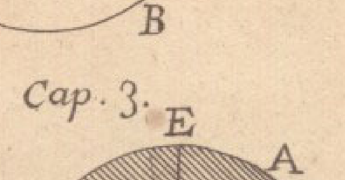


fig 10.
Th. 17.
fig. 1.

fig. 1.

Th. 17. f. 2.

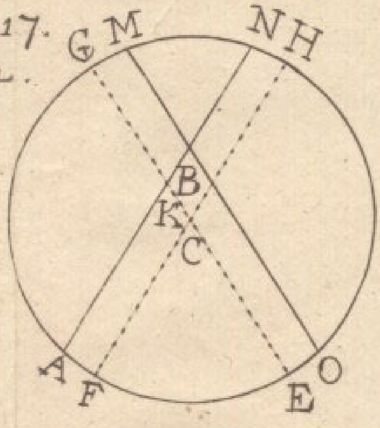


fig. 2.

Th. 18. f. 1.

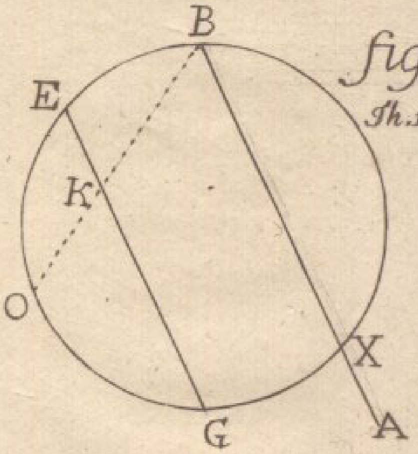


fig. 3.

Th 18 f. 2

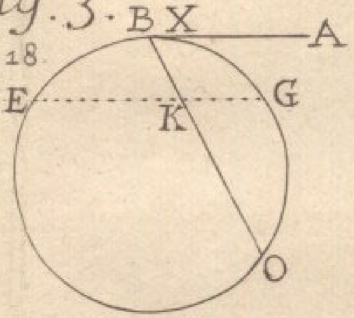


fig. 4.

Cor. 1. Th. 18

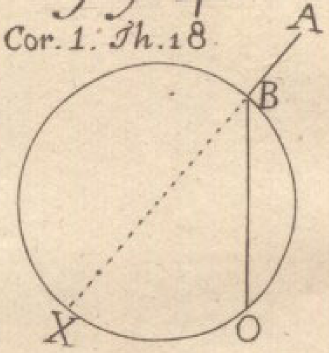


fig. 5

Cor. 2. Th 18

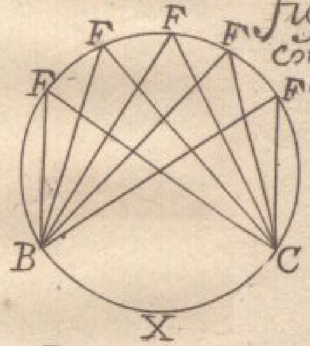


fig 6

Cor. 1 Th 18.

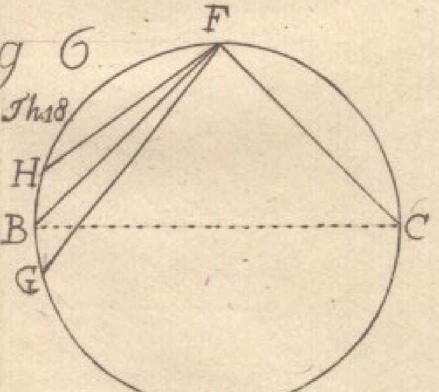


fig. 7.

Th. 19. f. 1.

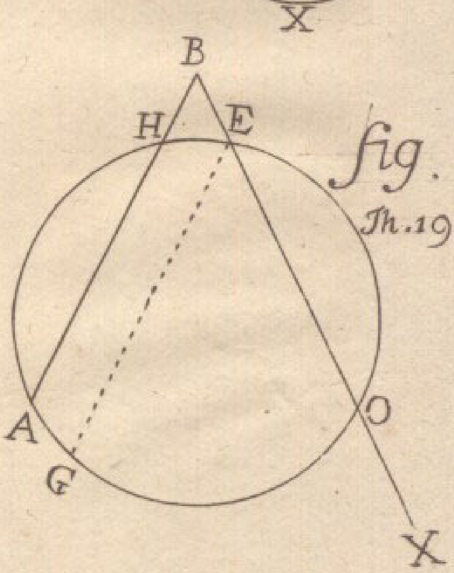
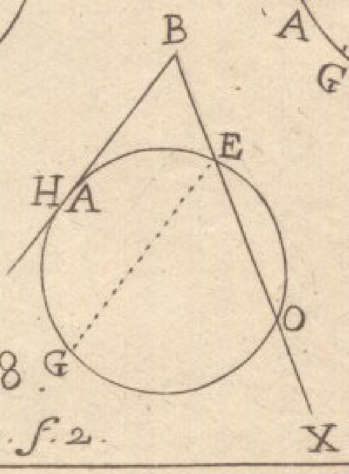


fig. 8.

Th 19. f. 2.



TAB. 6.

fig. 1.
Th. 19. f. 3.

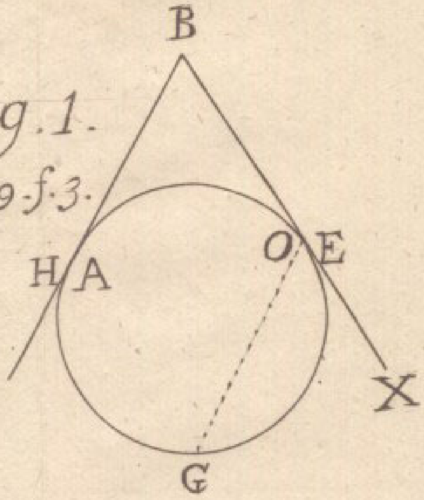


fig. 2.
Cor. 2. Def. 7.
lib. 2.

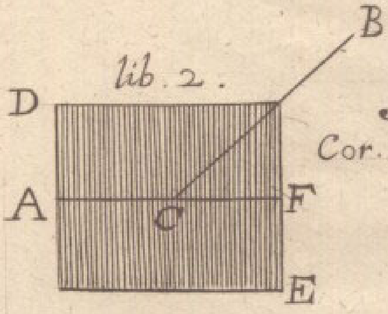


fig. 3.
Th. 20. 1.e pars.

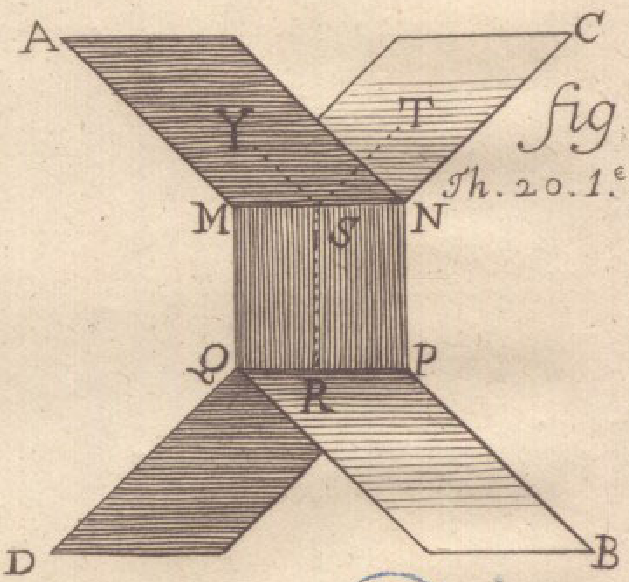


fig. 5.
Def. 9.

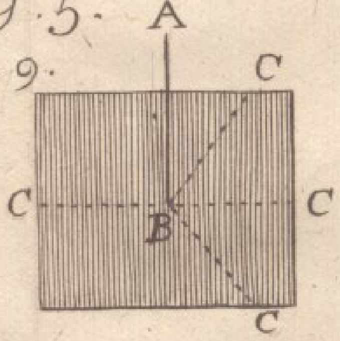


fig. 6.
Cor. Def. 9. f. 1.

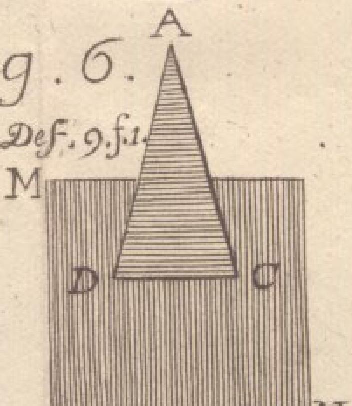


fig. 4.
Th. 20. 2. pars.

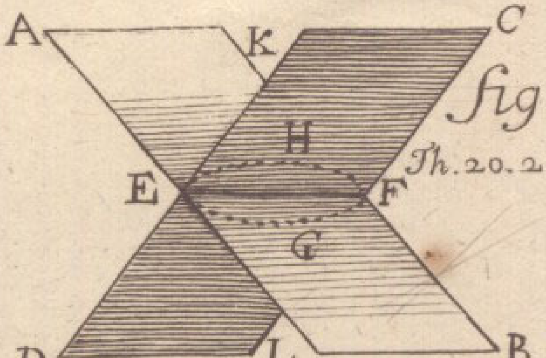


fig. 1.

Cor. Def. 9. f. 2.

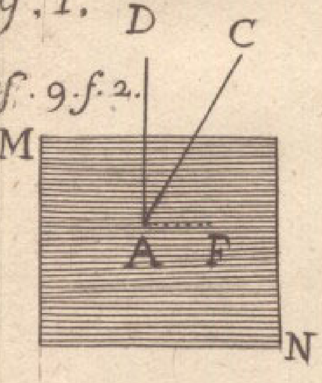


fig. 2. Cap. 1.

Def. 2.

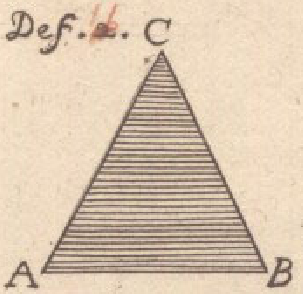


fig. 3.

Th. 21.

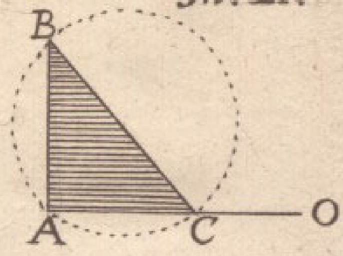


fig. 4

Th. 22. Et 23.

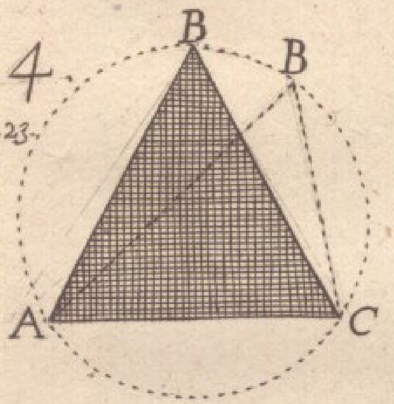


fig. 5.

Th. 24. f. 1.

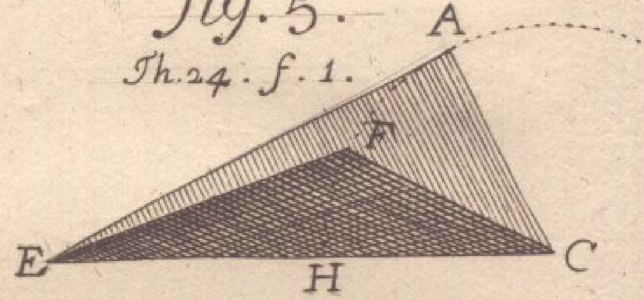


fig. 6.

Th. 24. f. 2.

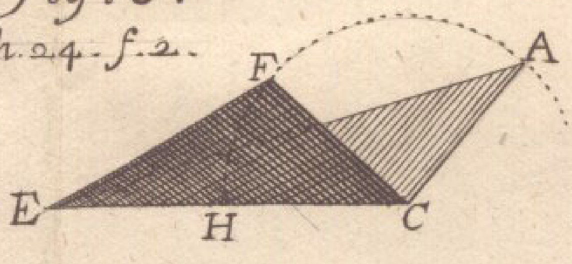


fig. 7.

Cor. 3. Th. 24.

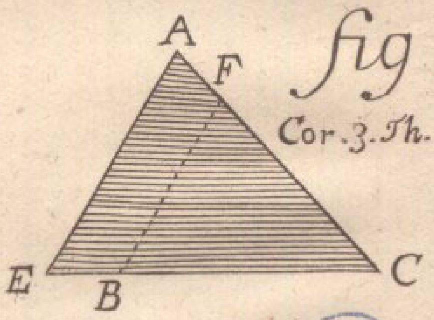


fig. 8.

Cap. 2. geo. Spe.

Def. 12.

fig. 9.

Th. 25. Et 26.

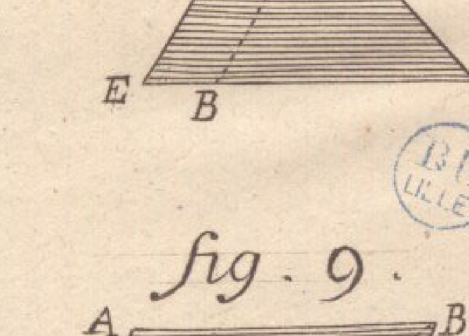


fig 1.

Cor.1. Th.26.

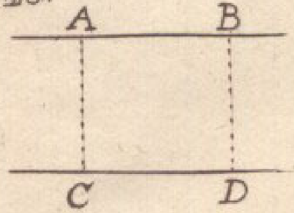


fig. 2.

Cor.3. Th.26.

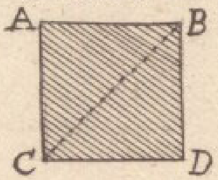


fig. 3.

Th.27. part. 1.

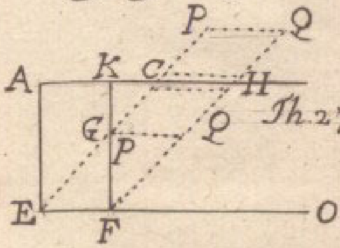


fig. 4.

Th.27. part. 2.

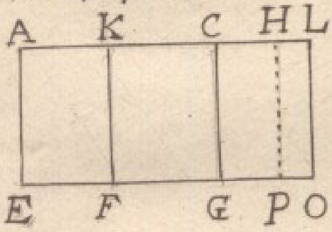


fig. 5.

Schol. Th.27.

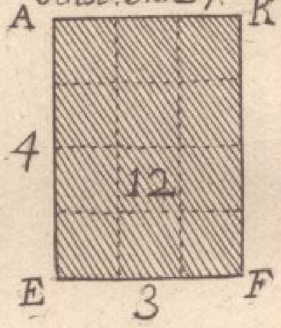


fig. 6.

lib. 3. reg. prop.

Lem. 1. 1. pars.

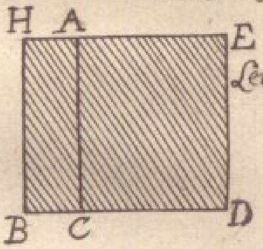


fig. 7.

Lem. 1. 2. pars.

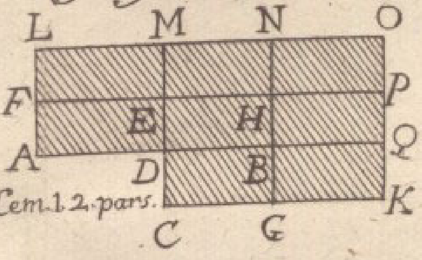


fig. 8. lib. 4.
Th. 29.

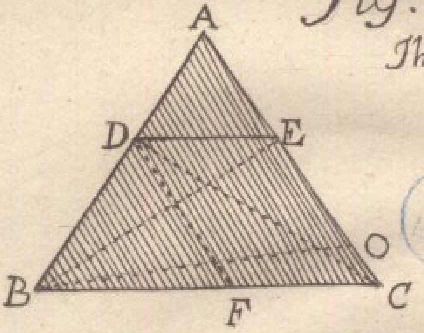


fig. 9.

Cor. 3. Th. 29.

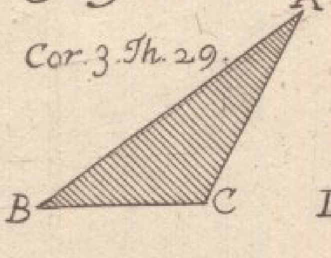


fig. 10.

Cor. 3. Th. 29.

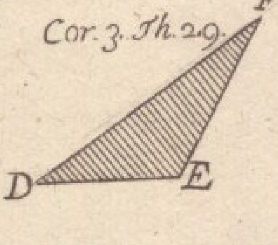
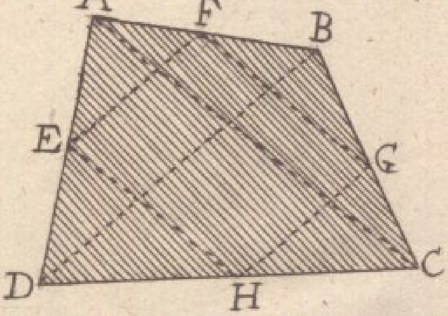


fig. 11.

Cor. 4. Th. 29.



TAB . 9 .

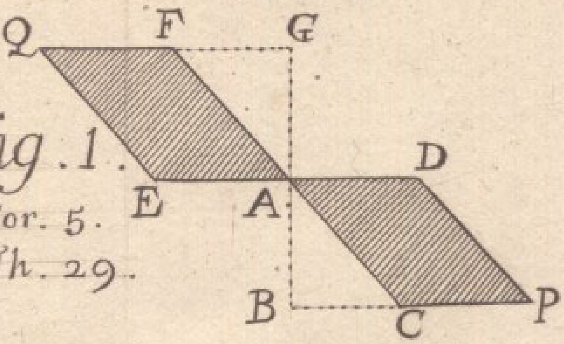


fig . 1 .

Cor. 5.

Th. 29.

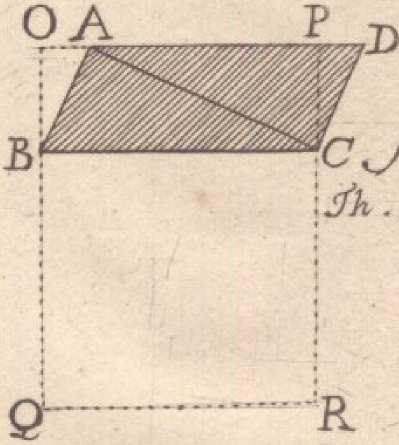


fig . 2 .

Th. 30.

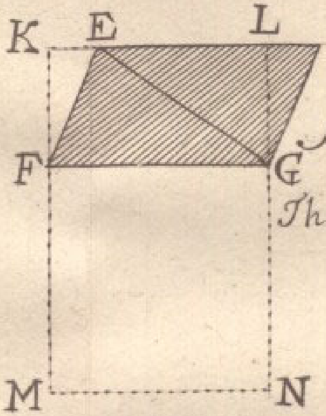


fig . 3 .

Th. 30.

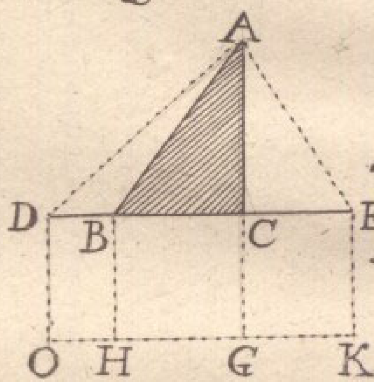


fig . 4 .

Th. 31. Et lem. 2.

f. 1.

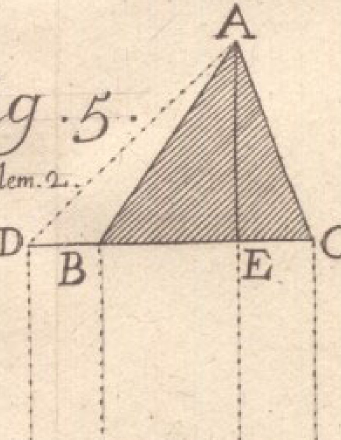


fig . 5 .

Th. 31. Et lem. 2.

f. 2.

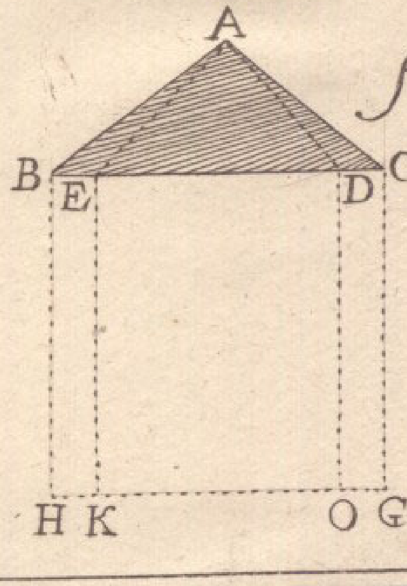


fig . 6 .

Th. 31. Et lem 2

f. 2.

TAB. 10.

fig. 1.

Th. 31. Et lem. 2.

f. 4.

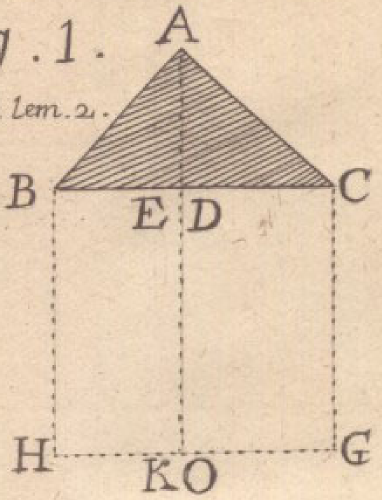


fig. 2.

Th. 32.

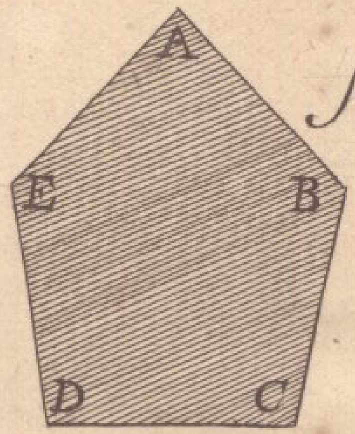


fig. 3.

Th. 32.

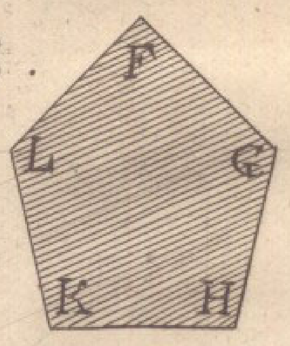


fig. 4.

lem. 3. Et Th. 33.

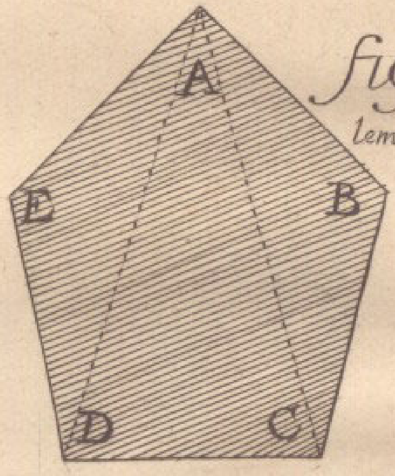


fig. 5.

lem. 3. Et Th. 33.

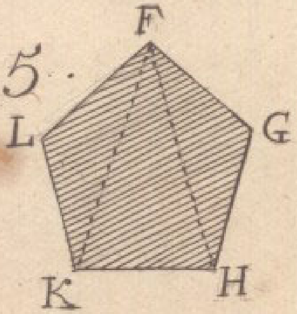


fig. 6.

lem. 4.

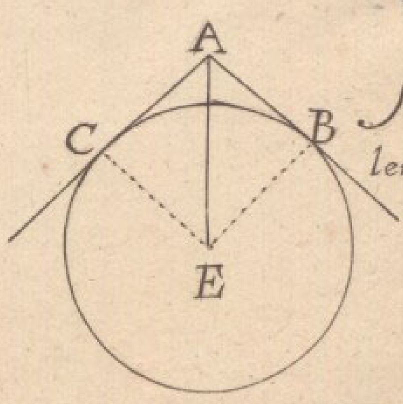


fig. 1.

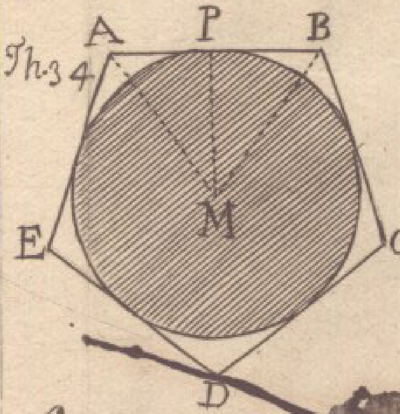


fig. 2.

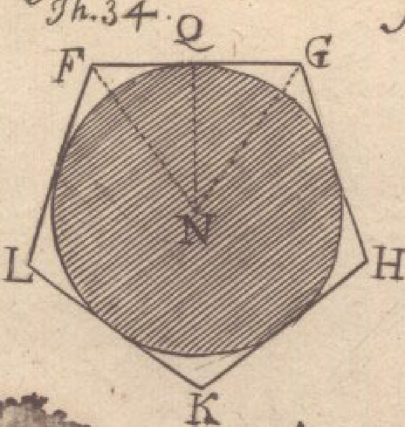


fig. 3.

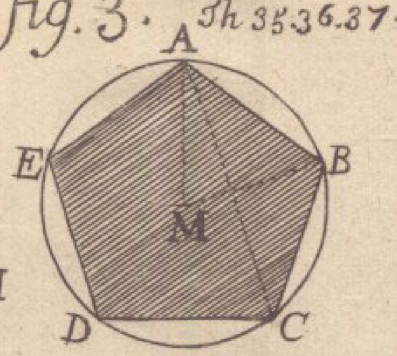


fig. 4.

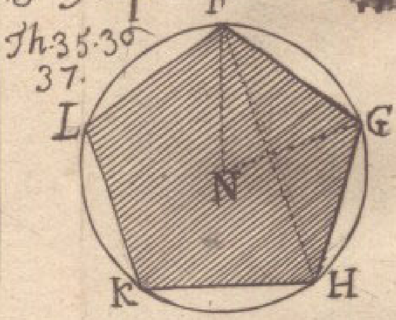


fig. 5.

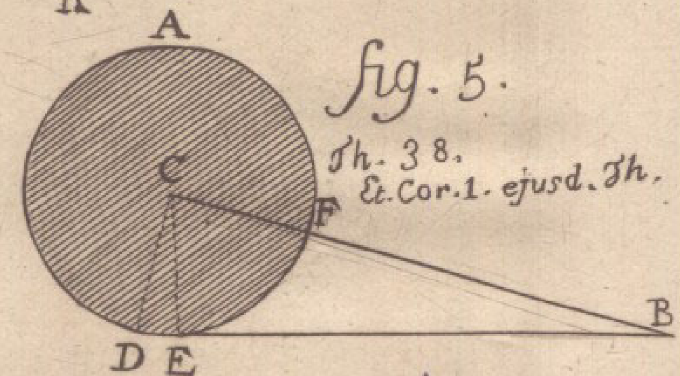


fig. 6.

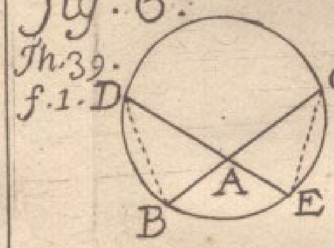


fig. 7.

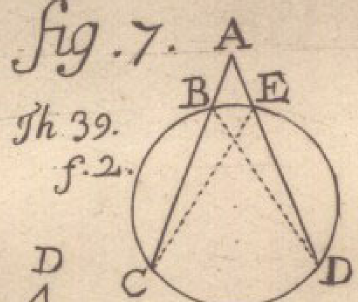


fig. 8.

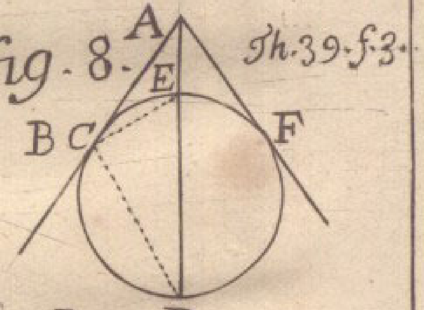


fig. 9.

Trigo Rect.

Def. 22.

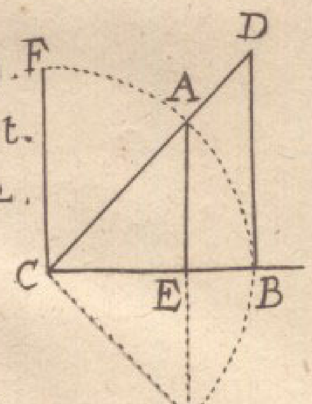
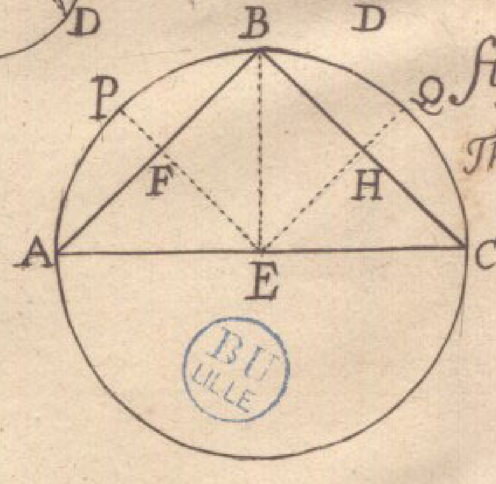
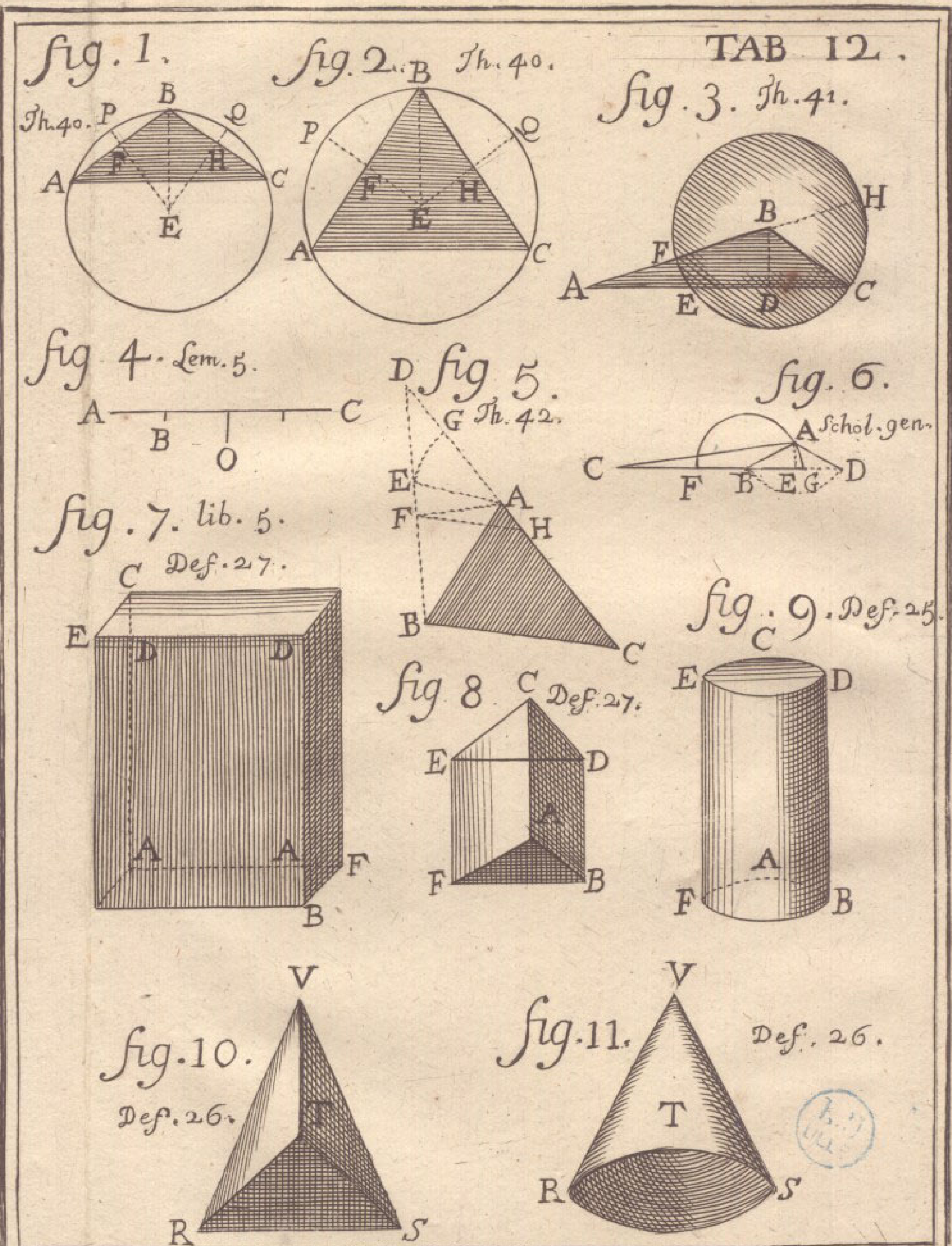


fig. 10.

Th. 40.




TAB 12.
fig. 1.
Th. 40.
P B Q
A F H C
E
fig. 2. Th. 40.
B
P Q
F H
E
A C
fig. 3. Th. 41.
H
B
F
A C
E D
fig 4. Lem. 5.
A C
B
O
D fig 5.
G Th. 42.
E
A
F H
B C
fig. 6.
A Schol. gen.
C D
F B E G
fig. 7. lib. 5.
Def. 27.
C
E
D D
A A
F
B
fig 8 C Def. 27.
E D
A
F B
fig. 9. Def. 25.
C
E D
A
F B
V
fig. 10.
Def. 26.
T
R S
V
fig. 11.
Def. 26.
T
R S

TAB. 13.

fig. 1

Th. 43.

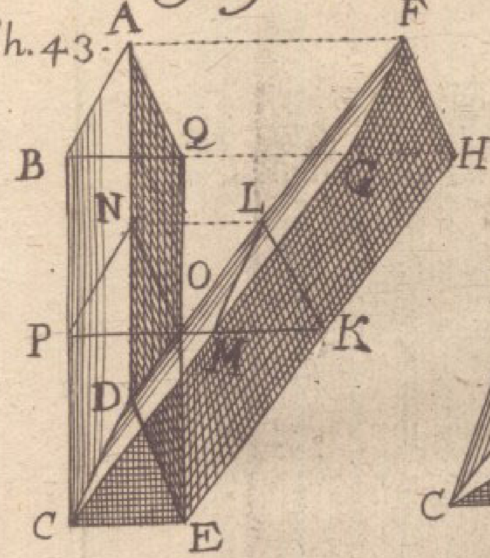


fig. 2.

Th. 43.

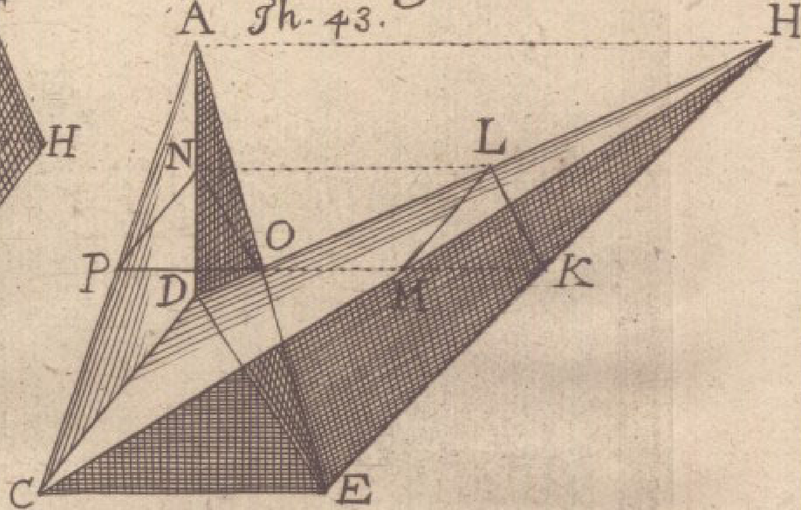


fig. 3.

Th. 44.

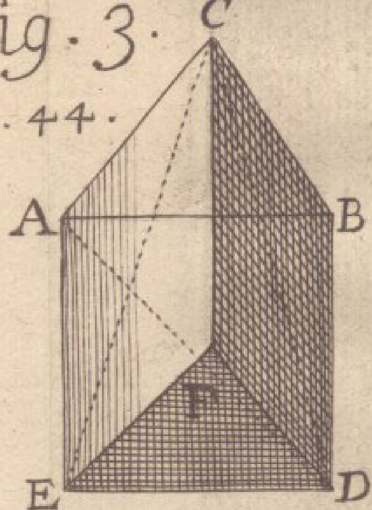


fig. 4.

Cor. 1. Th. 44.

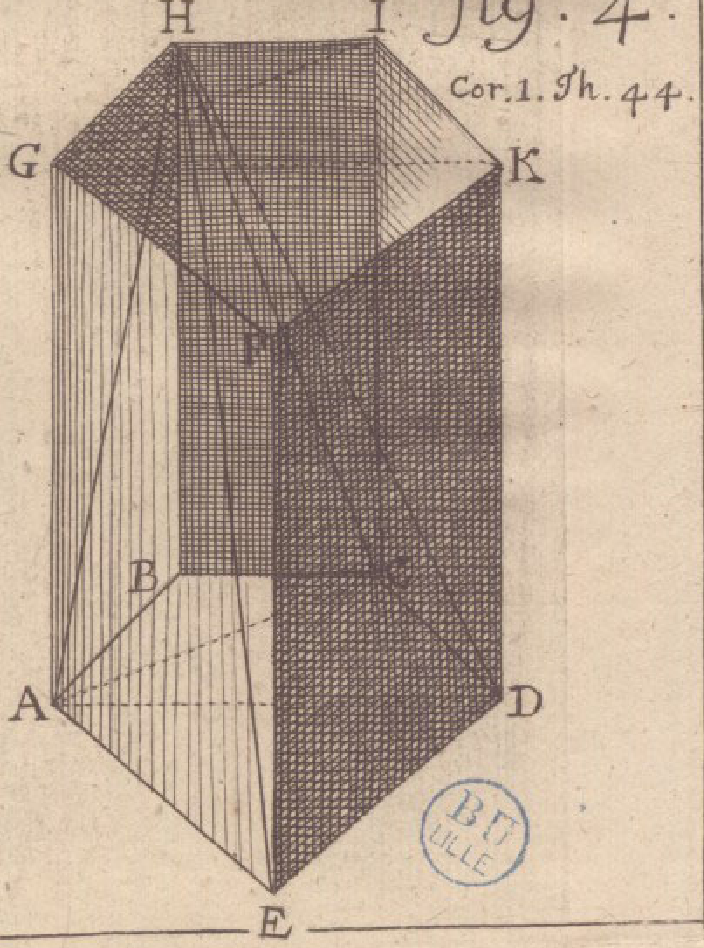


fig. 5.

Th. 46.

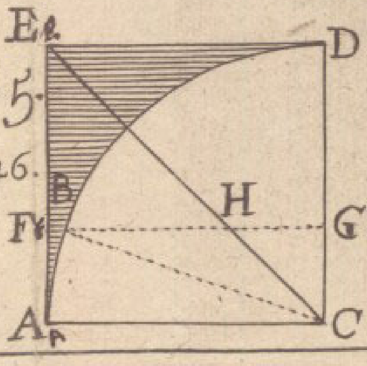


fig. 1.

Th. 47.

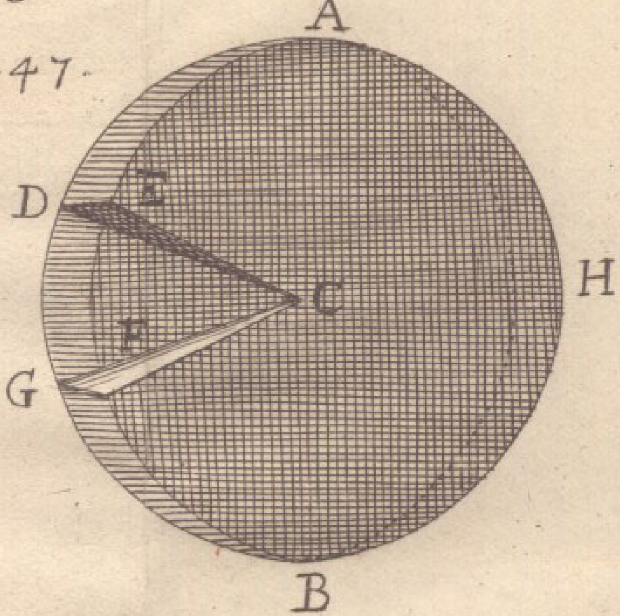


fig. 2.

Th. 48.

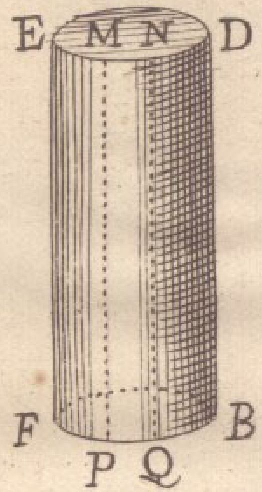
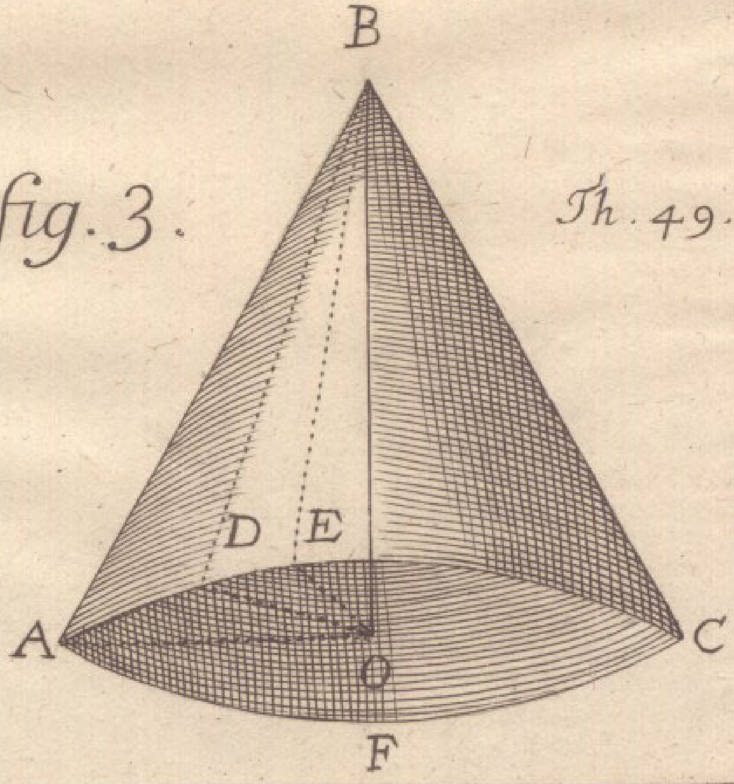


fig. 3.

Th. 49.



TAB. 15.

fig. 1.

Probl. 1.
Sol. Cas. 1.

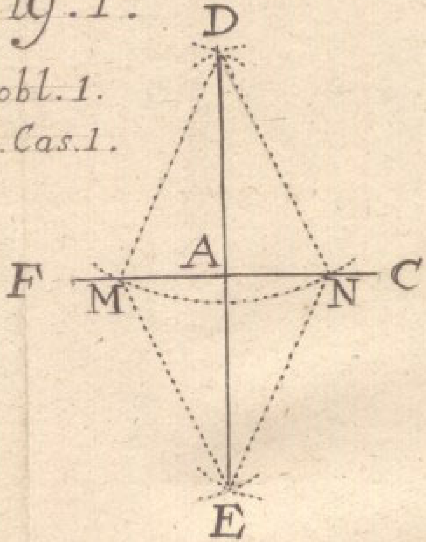


fig. 2.

Probl. 1.
alit.

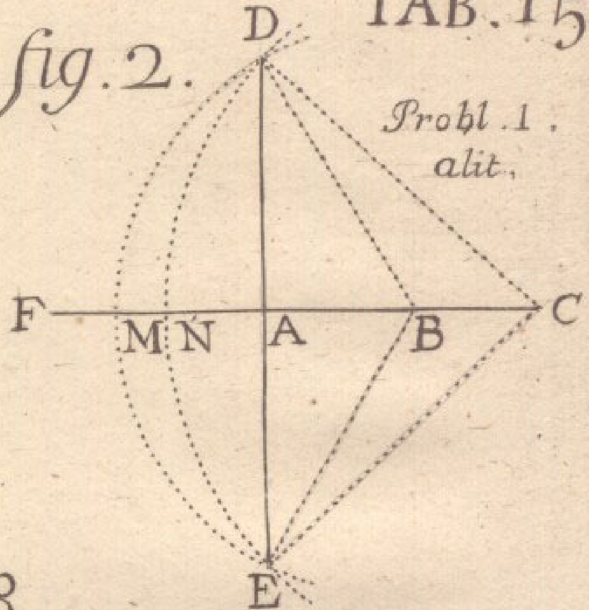


fig. 3.

Probl. 1. Sol. Cas. 2.

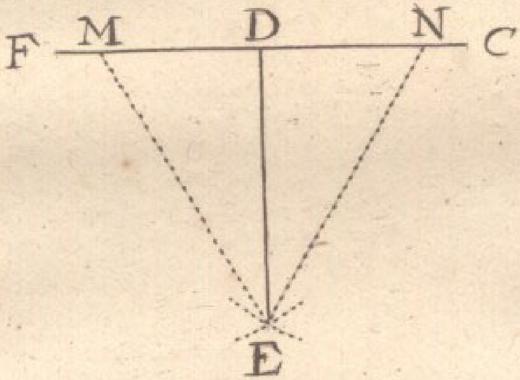


fig. 4.

Probl. 1.
alit.

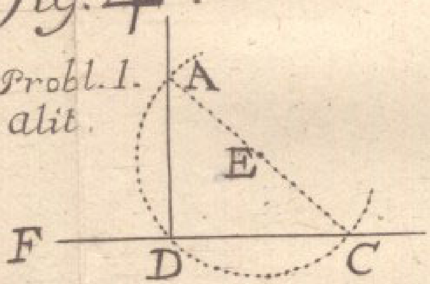


fig. 5.

Schol.
Probl. 1.

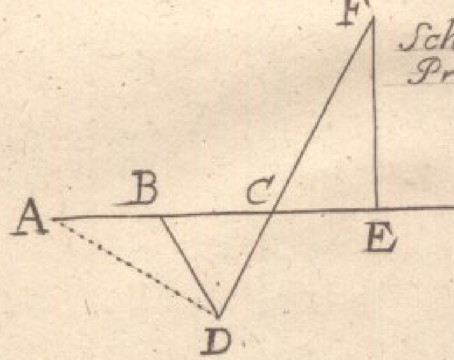


fig. 1.

Probl. 2.

fig. 2.

Probl. 2. alit.

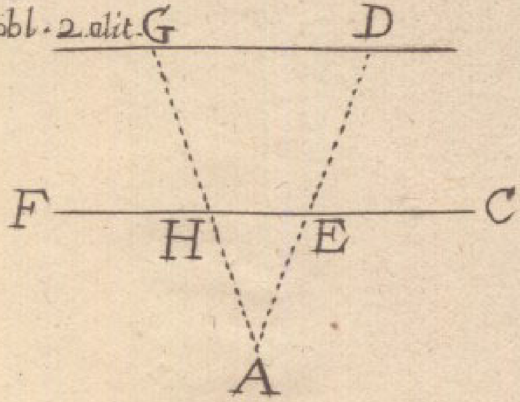


fig. 3.

Probl. 3. sol. Cas. 1.

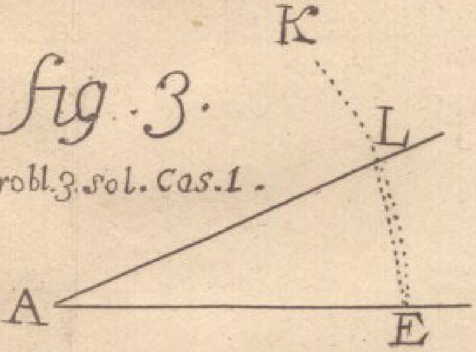


fig. 4.

Probl. 3. sol. Cas. 1.

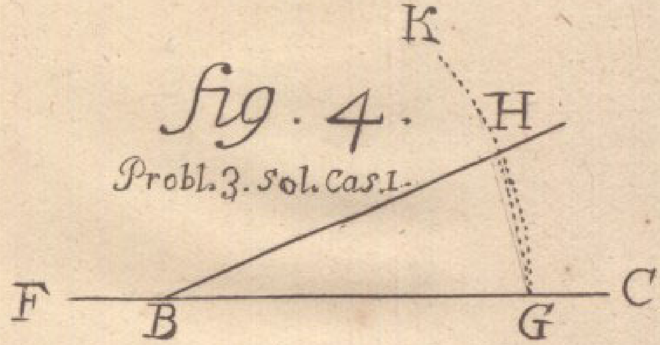


fig. 5.

Probl. 3. alit.

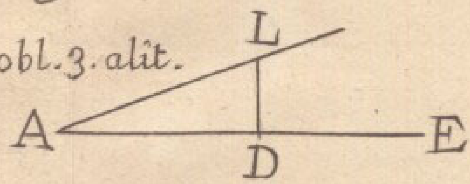


fig. 6.

Probl. 3. alit.

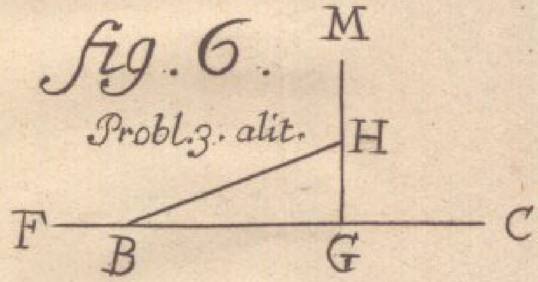


fig. 7.

Probl. 3. Sol. Cas. 2.

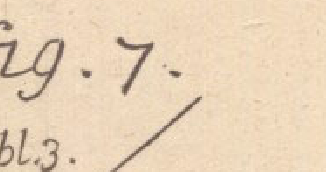
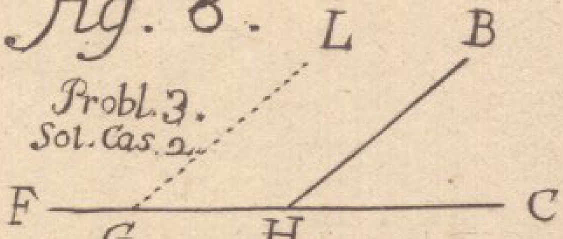


fig. 8.

Probl. 3. Sol. Cas. 2.



TAB. 17.

fig. 1.

Probl. 4.

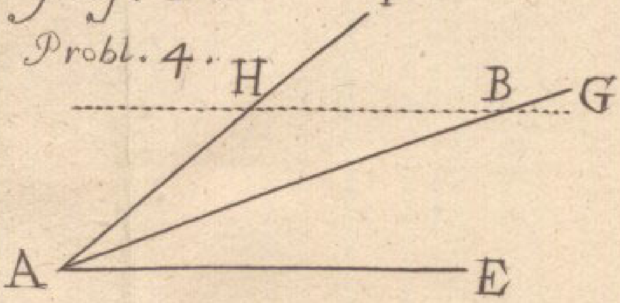


fig. 2. Probl. 4. alit.

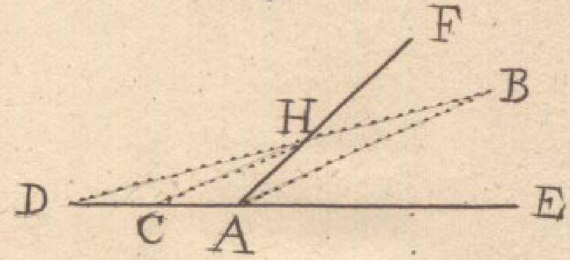


fig. 3.

Probl. 4. alit adhuc.

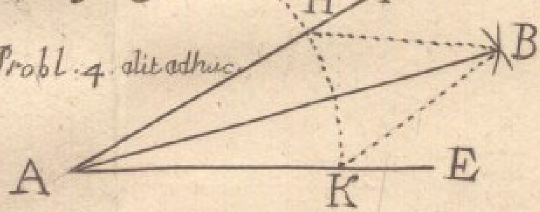


fig. 4.

Probl. 5.

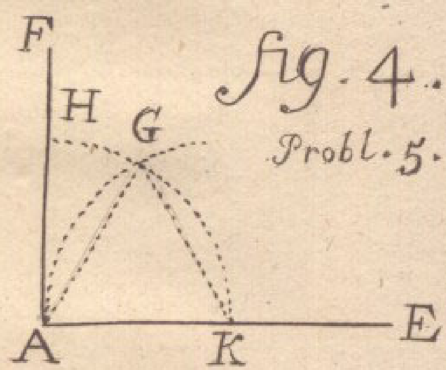


fig. 5.

Probl. 6.

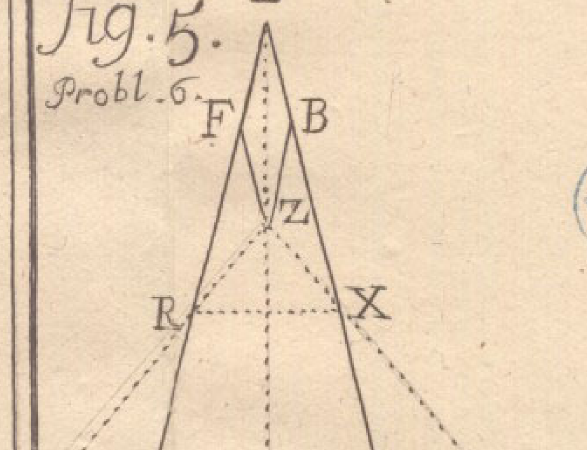


fig. 6.

Prob. 7.

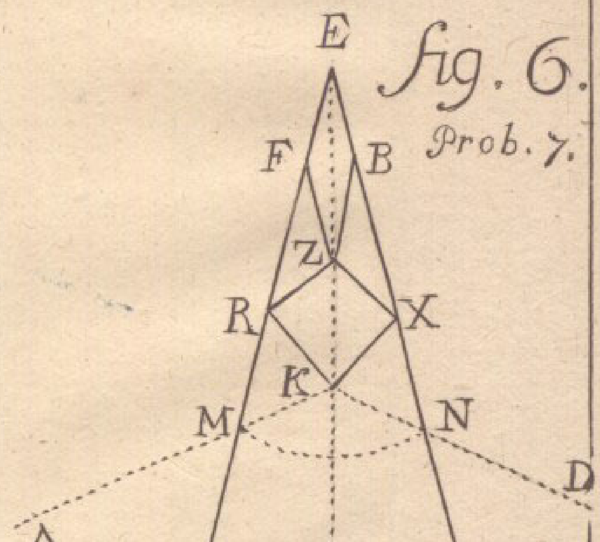


fig. 1.

Probl. 9.

fig. 2.

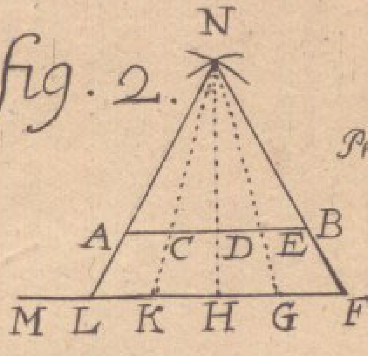


fig. 3.

Probl. 9. alit.

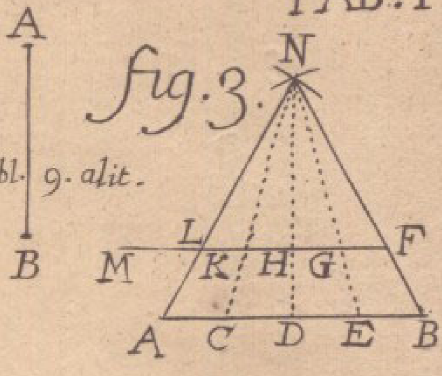


fig. 4.

Probl. 10.

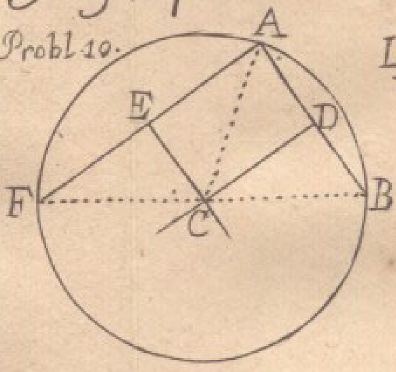


fig. 5.

Probl. 11.

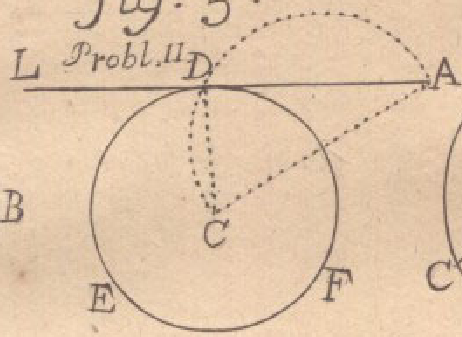


fig. 6.

Probl. 12.

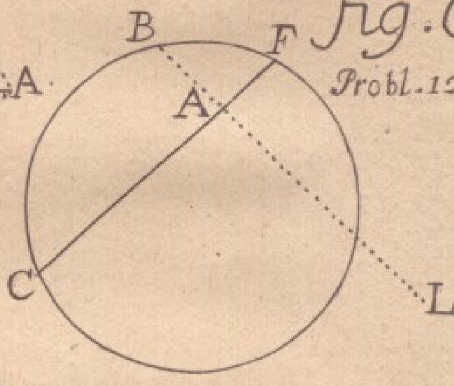


fig. 7.

Probl. 12. alit.

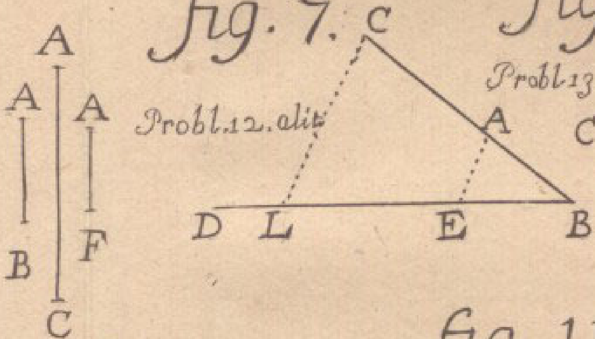


fig. 8.

Probl. 13.

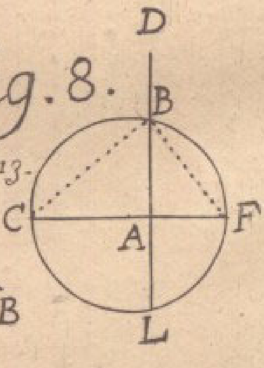


fig. 9.

Probl. 14.

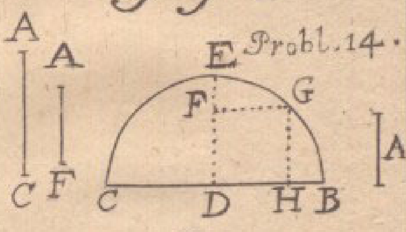


fig. 10.

Probl. 15.

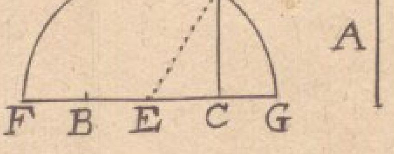


fig. 11.

Probl. 16.

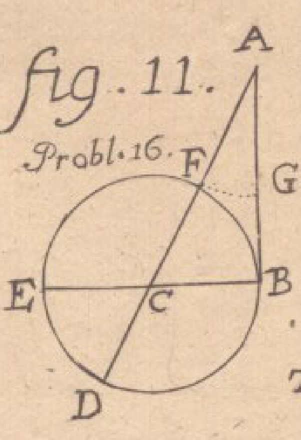
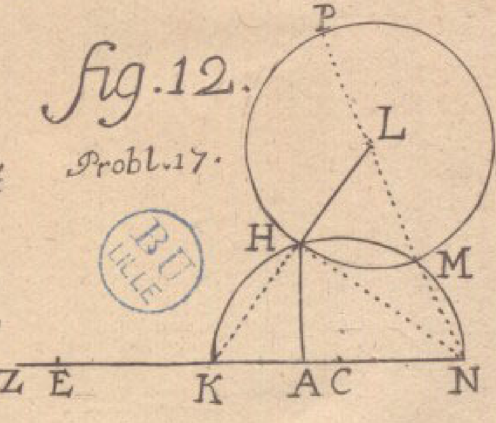
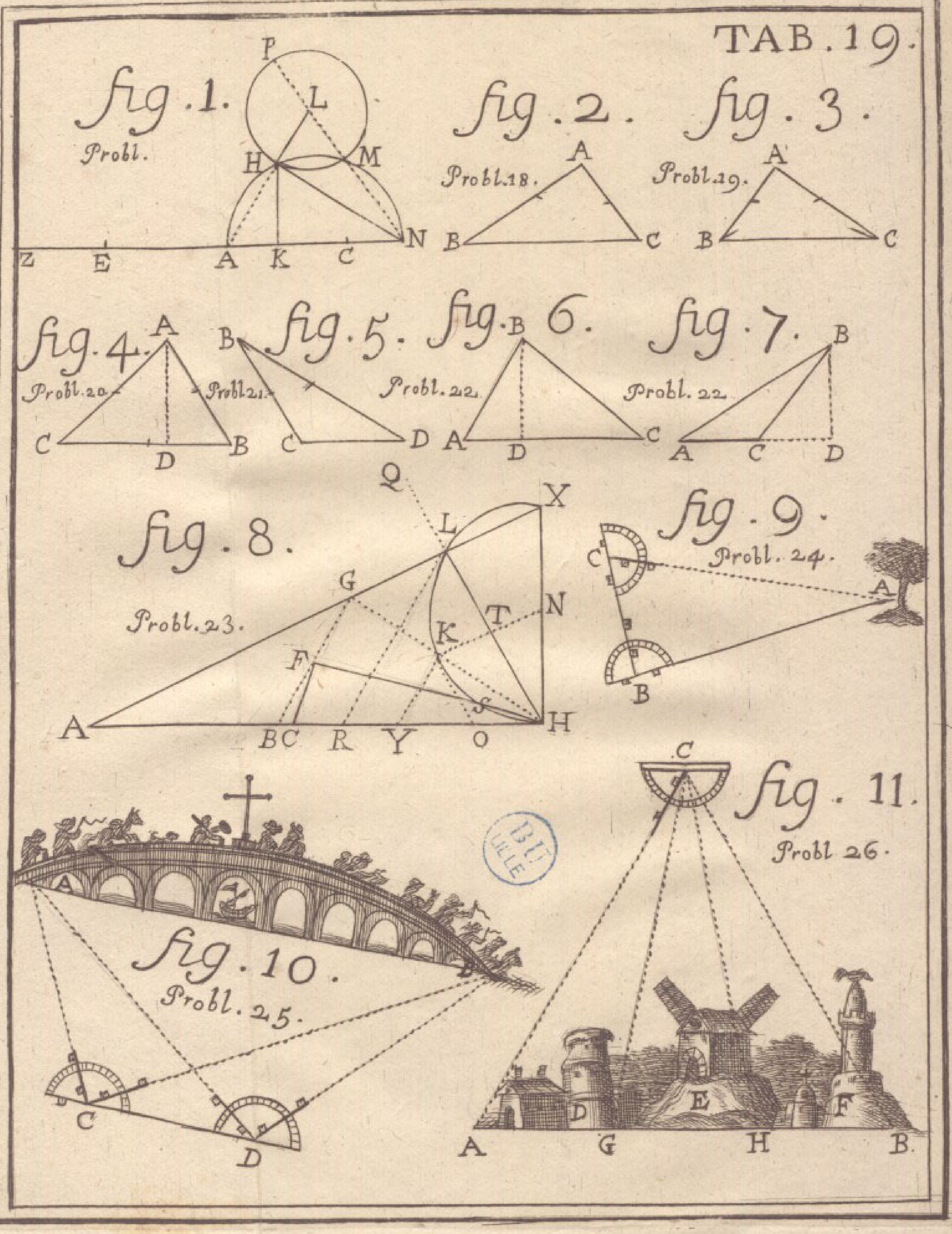


fig. 12.

Probl. 17.




TAB. 19.
fig. 1.
Probl.
fig. 2.
Probl. 18.
fig. 3.
Probl. 19.
fig. 4.
Probl. 20.
fig. 5.
Probl. 21.
fig. 6.
Probl. 22.
fig. 7.
Probl. 22.
fig. 8.
Probl. 23.
fig. 9.
Probl. 24.
fig. 10.
Probl. 25.
fig. 11.
Probl 26.

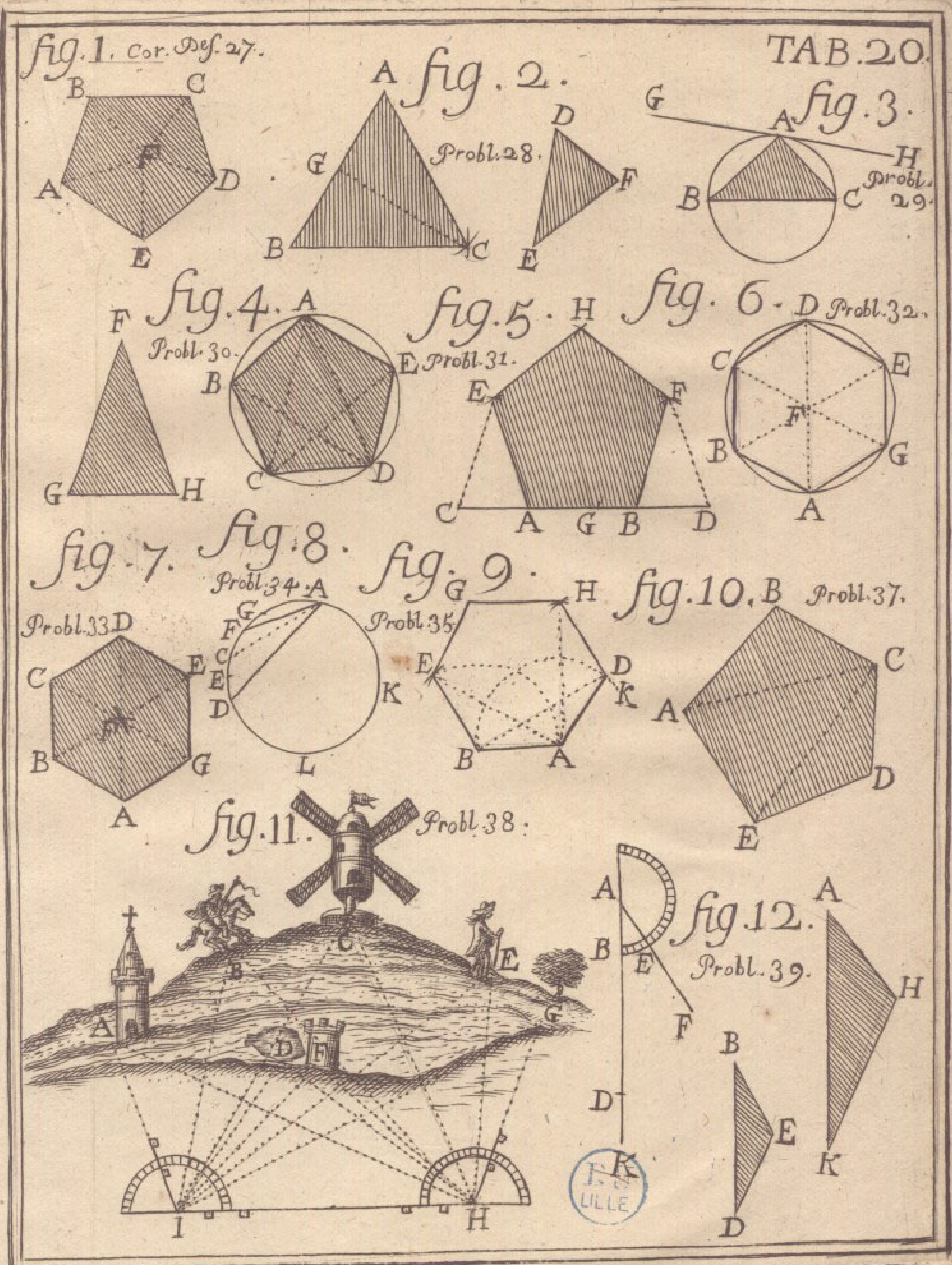
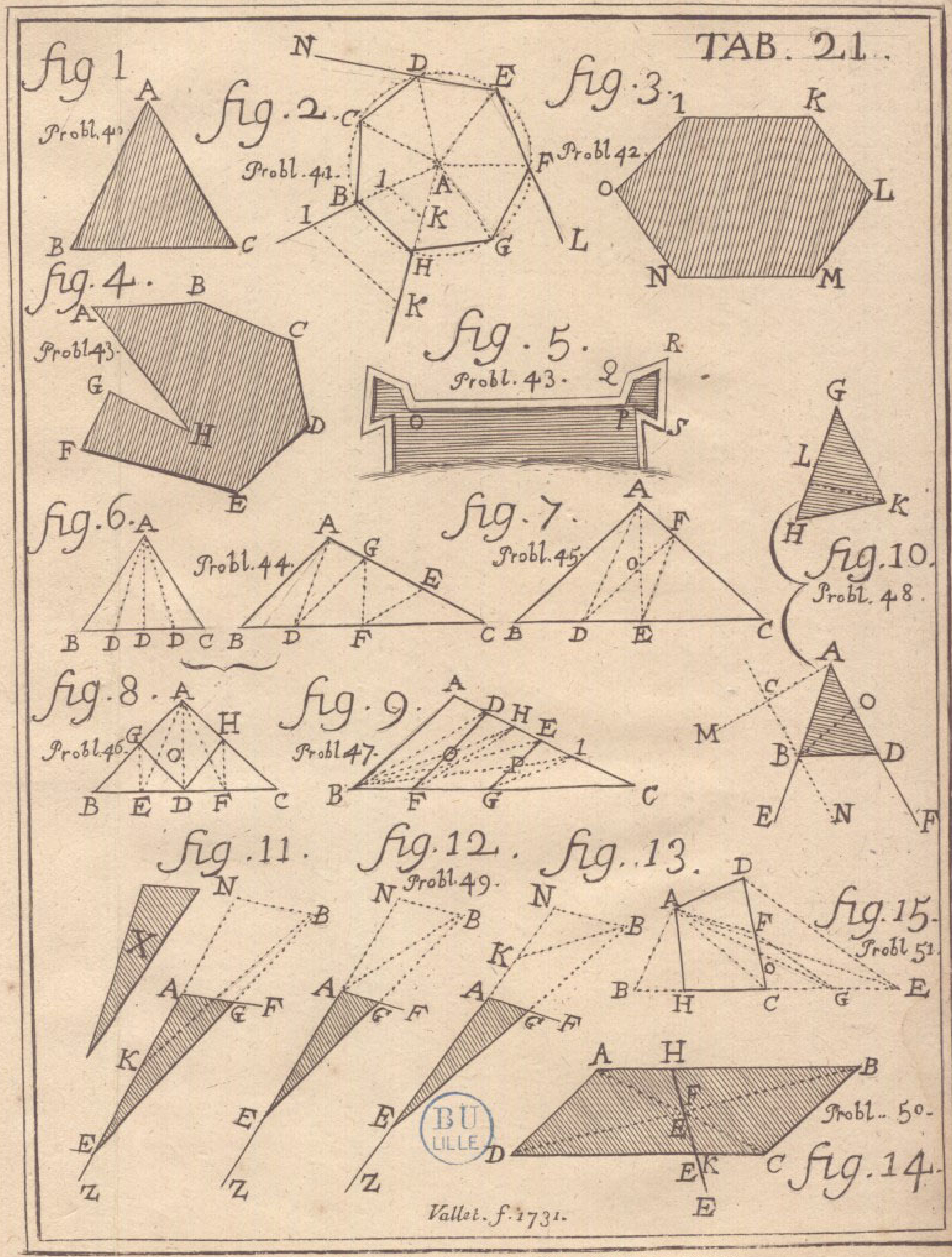
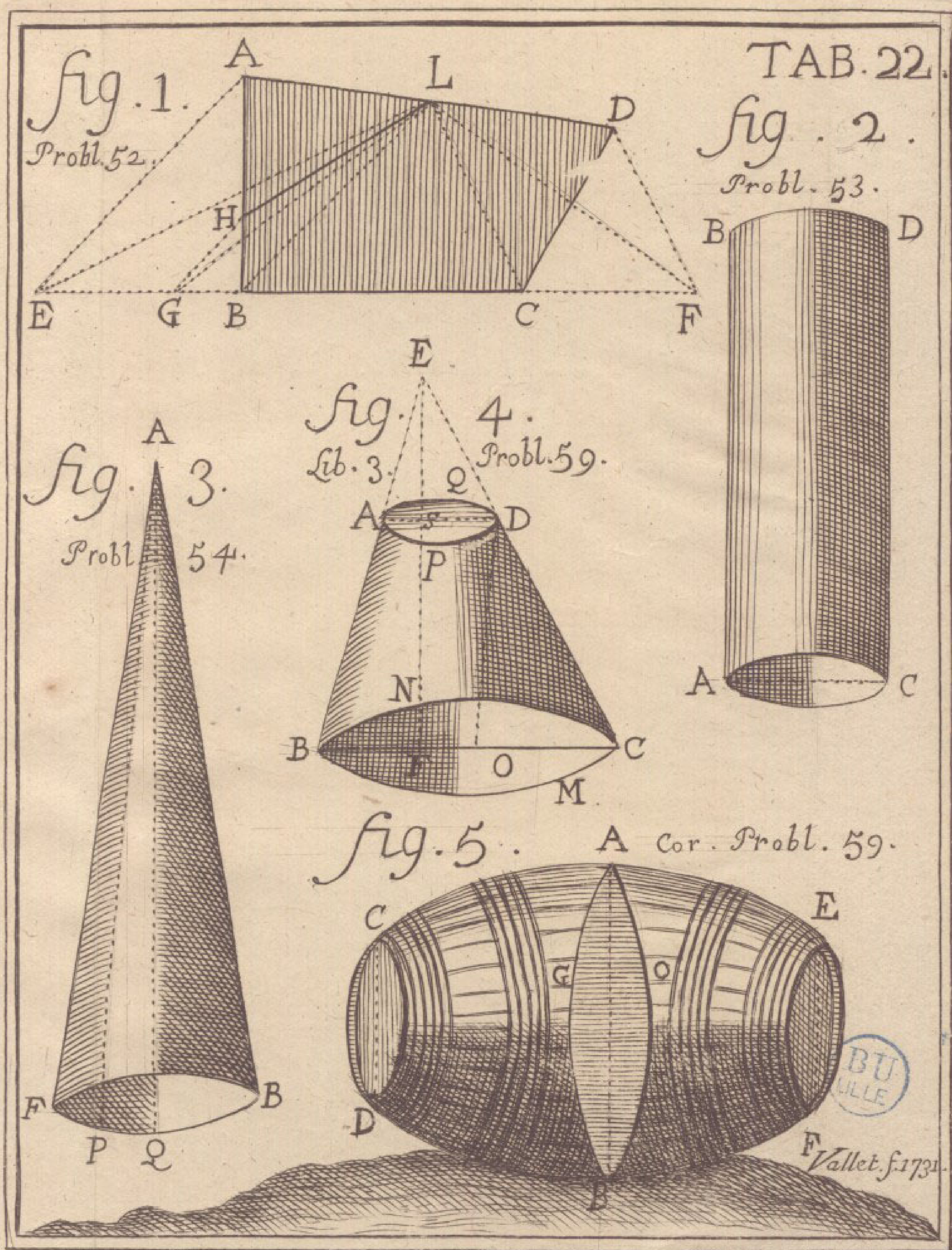


fig. 1. Cor. Def. 27.
TAB. 20.
fig. 2.
Probl. 28.
fig. 3.
Probl. 29.
fig. 4.
Probl. 30.
fig. 5.
Probl. 31.
fig. 6.
Probl. 32.
fig. 7.
Probl. 33
fig. 8.
Probl. 34.
fig. 9.
Probl. 35.
fig. 10.
Probl. 37.
fig. 11.
Probl. 38.
fig. 12.
Probl. 39.


TAB. 21.
fig 1
Probl. 40.
fig. 2.
Probl. 41.
fig. 3.
Probl. 42.
fig. 4.
Probl. 43.
fig. 5.
Probl. 43.
fig. 6.
fig. 7.
Probl. 44.
Probl. 45.
fig. 8.
Probl. 46.
fig. 9.
Probl. 47.
fig. 10.
Probl. 48.
fig. 11.
fig. 12.
Probl. 49.
fig. 13.
fig. 15.
Probl. 51.
Probl. 50.
fig. 14.
Vallet. f. 1731.


TAB. 22.
fig. 1.
Probl. 52.
A
L
D
H
E
G
B
C
F
fig. 2.
Probl. 53.
B
D
A
C
fig. 3.
Probl. 54.
A
F
B
P
Q
fig. 4.
Lib. 3.
Probl. 59.
E
Q
A
S
D
P
N
B
T
O
C
M
fig. 5.
Cor. Probl. 59.
A
C
E
G
O
D
F
B
Vallet. f. 1731.