

VII. me 1.

Fa cicule 1.

ENCYCLOPÉDIE
ES
ARTICLES MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADEMIES DES SCIENCES
DE GOTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

ET POUR CE QUI CONCERNE L'ASTRONOMIE SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE DE

H. ANDOYER

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE PARIS

TOME VII (PREMIER VOLUME),

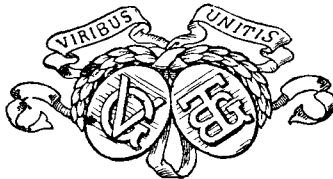
ASTRONOMIE SPHÉRIQUE.

PAR

RÉDIGÉE DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

K. SCHWARZSCHILD

À POTSDAM



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG, ^{rap-}
B. G. TEUBNER

1913
(1^{er} AOÛT)

Tome VII; premier volume; premier fascicule.

Sommaire.

	Page
Systeme de référence et mesure du temps; exposé, d'après l'article allemand de E. Anding-Gotha , par H. Bourget-Marseille	1
Réfraction et extinction; exposé, d'après l'article allemand de A. Bepparad-Catane , P. Puisieux-Paris	14
Réduction des observations astronomiques; exposé, d'après l'article allemand de F. Cohn-Beilin , par E. Doublet-Bordeaux et L. Picart-Bordeaux	61
Détermination de la longitude et de la latitude; exposé, d'après l'article allemand de C. W. Wirtz-Strasbourg , par G. Fayet-Nice	13.

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande, en effet, indiqué les modifications qu'il jugait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple n'échappera à personne.

Fascicules sous presse:

- Tome I, vol. 1: **Groupes finis discontinus**, fin **H. Burkhardt** — **H. Vogt**. — **Additions et modifications**. — **Renseignements bibliographiques**. — **Index**.
- Tome I, vol. 2: **Invariants**, fin **F. Meyer** — **J. Drach**.
- Tome I, vol. 3: **Applications de l'Analyse à la Théorie des nombres**, fin **(P. Bachmann, J. Hadamard — E. Maillet)**. — **Corps algébriques** (**D. Hilbert — H. Vogt**).
- Tome I, vol. 4: **Économie politique mathématique**, fin **(V. Pareto)**. — **Jeux** (**W. Ahrens — C. A. Laisant**).
- Tome II, vol. 1: **Calcul intégral** (**A. Voss — J. Molk**).
- Tome II, vol. 2: **Fonctions analytiques** (**W. F. Osgood — P. Boutroux — J. Chazy**).
- Tome II, vol. 3: **Fonctions sphériques**, fin **(A. Wangerin — A. Lambert — P. Appell)**. — **Fonctions sphériques à plusieurs variables** (**P. Appell — A. Lambert**).
- Tome II, vol. 5: **Groupes continus de transformations** (**H. Burkhardt — L. Maurer — E. Vesicchio**).
- Tome II, vol. 6: **Calcul des variations** (**A. Kneser — E. Zermelo — H. Hahn — M. Léca**).
- Tome III, vol. 1: **Notions de courbe et surface**, fin **(H. von Mangoldt — L. Zerkow)**. — **Méthodes analytiques et synthétiques** (**G. Fano — G. Darboux**). — **Géométrie énumérative** (**H. G. Zeuthen — M. Pieri**).
- Tome III, vol. 2: **Géométrie projective** (**A. Schoenflies — A. Clebsch**). — **Configurations** (**E. Steinitz — E. Merlin**).
- Tome III, vol. 3: **Coniques**, fin. — **Faisceaux de coniques** (**F. Dingeldey — E. Fabry**). — **Courbes planes algébriques** (**L. Berzolari**).
- Tome III, vol. 4: **Quadriques** (**O. Staudé — A. Grévy**).
- Tome IV, vol. 1: **Principes de la mécanique rationnelle** (**A. Voss — E. Cosserat — F. Cosserat**). — **Mécanique statistique** (**P. et T. Ehrenfest — E. Borel**).
- Tome IV, vol. 2: **Cinématique**, fin **(A. Schoenflies — G. Koenigs)**. — **Statique graphique** (**L. Henneberg — H. Vergne**).
- Tome IV, vol. 3: **Appareils physiques les plus simples** (**Ph. Furtwängler — A. Guillet**).
- Tome IV, vol. 6: **Balistique extérieure** (**C. Cranz — E. Vallier**). — **Balistique intérieure** (**C. Cranz — C. Benoit**). — **Développements concernant des recherches françaises de Balistique** (**F. Gossot — E. Liouville**).
- Tome IV, vol. 7: **Equations fondamentales de l'élasticité** (**C. H. Müller — A. Timpe — L. Lecornu**). — **Intégration des équations différentielles de l'élasticité** (**O. Tedone — R. Garnier**).
- Tome V, vol. 1: **Mesure** (**C. Runge — Ch. Ed. Guillaume**). — **Atomistique** (**F. W. Hinrichsen — M. Joly — J. Roux**). — **Stereochimie** (**W. M. Lock — J. Roux**). — **Épures des cristaux** (**Th. Liebisch — F. Wallerant**). — **Principes physiques de l'électricité; action à distance** (**R. Reiff — P. Sommerfeld — E. Rothé**).
- Tome V, vol. 4: **Principes physiques de l'optique; anciennes théories** (**A. Wangerin — C. Raveau**).
- Tome V, vol. 1: **Triangulation géodésique**. — **Mesure des bases et nivellement** (**P. Pizzetti — L. Noirel**).
- Tome V, vol. 1: **Horloges et chronomètres** (**E. Caspari**). — **Mesure des angles** (**F. Cohn — J. Mascart**).

VII 1. SYSTÈME DE RÉFÉRENCE ET MESURE DU TEMPS.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE E. ANDING (GOTHA),
PAR H. BOURGET (MARSEILLE).

I. Principe d'une détermination mécanique du système de référence. En énonçant la loi d'inertie, on ne mentionnait jamais, avant la seconde moitié du dix-neuvième siècle, le système de référence auquel elle se rapportait. Le côté historique de cette question est examiné en détail dans l'article IV 1 de l'Encyclopédie. Nous plaçant au point de vue astronomique, nous allons chercher ici à résoudre la question d'une manière formelle.

Si l'on définit le but de la Mécanique céleste en disant qu'elle se propose de représenter les mouvements des corps célestes à l'aide de la seule loi de Newton, il manque à cette formule l'indication précise du repère auquel on rapporte les mouvements et celle du mode de mesure du temps. On adopte tacitement une solution que nous appellerons la *solution empirique*, en prenant comme système de référence l'ensemble des étoiles fixes et en mesurant le temps par la rotation de la terre. Comme il n'y a cependant pas de raison de faire un choix dans l'arbitraire, il serait plus logique de compléter la définition ci-dessus en ajoutant: *en considérant comme inconnues non seulement les constantes de la représentation, mais aussi le système de référence et l'échelle du temps compatibles avec les observations.*

Telle est l'idée que nous allons développer.

Admettons la notion de *simultanéité*, mais non celle de *temps*, et soit donné un ensemble de ω configurations composées chacune de n points matériels. Proposons-nous de représenter ces configurations, à l'aide de la loi de Newton, par ω valeurs d'un paramètre t . Cela n'implique nullement une donnée quelconque sur le système de référence pour lequel cette représentation sera possible. Donnons-nous donc les $3n\omega$ coordonnées des points des ω configurations par rapport à un système de référence arbitraire, le *système empirique*.

Observons que ce mode de référence est légitime, si nous ne perdons pas de vue qu'en réalité ce système empirique n'est défini que par les coordonnées mêmes des points, puisque jusqu'à nouvel ordre nous ne connaissons pas d'autre figure géométrique que les configurations données.

Faisons ensuite correspondre à chaque configuration une position particulière d'un nouveau système de référence défini relativement au système empirique et une valeur du paramètre t , de telle manière que les coordonnées relatives à ce nouveau système de référence, étant exprimées en fonction du paramètre t , soient compatibles avec la loi de Newton. Cette représentation effectuée, nous nommerons *système d'inertie* le système auquel se rapportent ces coordonnées, *mouvement* $\kappa\alpha\tau'$ $\xi\xi\omicron\chi\eta\nu$ le déplacement par rapport à ce système, et *temps* le paramètre t .

En évaluant le nombre des variétés possibles, on montre facilement que dans ce problème on a d'une part $3n\omega$ données et d'autre part $6n + 7\omega - 10$ inconnues. Si les configurations sont arbitrairement choisies, on peut donc toujours considérer quatre groupes de trois points comme les positions à quatre instants de trois points matériels s'attirant suivant la loi de Newton

$$[n = 3, \omega = 4, 3n\omega = 6n + 7\omega - 10 = 36].$$

Si cette représentation subsiste pour toutes les valeurs de ω supérieures à 4, nous dirons que les trois points obéissent à la *loi de Newton*. Si $n > 3$, l'indétermination ne subsiste que pour $\omega \leq 2$. Le cas de $n = 2$ est exclu de ces considérations, mais on peut démontrer directement, dans ce cas, qu'un nombre quelconque de configurations est représentable de ∞^2 manières par un mouvement conforme aux deux premières lois de Kepler.

On obtient des résultats analogues si l'on choisit l'un des points mobiles pour origine des coordonnées, en observant qu'en astronomie on ne mesure que des angles et en comprenant les masses parmi les inconnues. On peut alors faire voir que tout mouvement de trois points peut être considéré de ∞^9 manières comme un mouvement newtonien. Pour plus de trois points, cette proposition ne subsiste qu'en supposant que les points ne sont pas disposés arbitrairement. Au contraire cette représentation est toujours possible de ∞^{6+n} manières pour n points, si le nombre des observations est égal à trois¹⁾.

1) Ces résultats énoncés ici sans démonstration seront démontrés dans un mémoire de *E. Anding* non encore publié.

2. **Système empirique.** En pratique, on a adopté un procédé arbitraire mais cependant nettement déterminé.

On a choisi comme plan fondamental l'équateur de 1850,0 et comme direction origine dans ce plan, son intersection avec l'écliptique de 1850,0. Les observations astronomiques ne donnant que des directions, l'origine des coordonnées n'intervient pas.

Mais l'équateur tourne de 50'' par an environ, autour du pôle de l'écliptique et l'écliptique se meut également, par suite des perturbations séculaires, autour d'un axe situé dans son propre plan. D'autre part, placés à la surface de la terre, nous observons les astres en les rapportant nécessairement à l'équateur instantané. Pour rendre comparables des observations faites à des époques différentes, il faut les ramener à un même système de référence, par exemple à l'équateur de 1850,0.

On a pris l'habitude de mesurer le déplacement de l'équateur sur l'écliptique fixe et non sur l'écliptique instantanée. On appelle précession lunisolaire l'arc ψ parcouru sur l'écliptique, dans le sens rétrograde, depuis 1850,0 par l'intersection de l'équateur avec cette écliptique; on désigne par ω l'angle de l'écliptique de 1850,0 et de l'équateur de 1850,0 + t , par ε l'angle de l'écliptique de 1850,0 + t et de l'équateur de 1850,0 + t et par $a(t)$ la précession planétaire, c'est-à-dire l'arc déterminé sur l'équateur de 1850,0 + t par les écliptiques de 1850,0 et de 1850,0 + t . Avec ces notations:

$\alpha)$ $\frac{ds}{dt}$ est la valeur exacte de la composante de la rotation de l'écliptique autour de la direction de l'équinoxe instantané;

$\beta)$ $\sin \omega \cdot \frac{da(t)}{dt}$ est une valeur très approchée de la composante de la rotation de l'écliptique autour d'une direction, située dans son plan, à 90° de la direction de l'équinoxe.

La précession et le déplacement de l'écliptique produisent dans l'ascension droite α et la déclinaison δ des étoiles, des changements qui pratiquement sont donnés d'une manière suffisamment exacte par les formules²⁾

$$(1) \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \left(\cos \omega \frac{d\psi}{dt} - \frac{da(t)}{dt} \right) + \sin \omega \frac{d\psi}{dt} \sin \alpha \operatorname{tg} \delta = m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \\ \frac{d\delta}{dt} = \sin \omega \frac{d\psi}{dt} \cos \alpha = n \cos \alpha, \end{cases}$$

dans lesquelles m et n varient lentement avec le temps.

2) Cf. VII 3, 5b et 7b. Les notations de cet article diffèrent un peu de celles de l'article actuel. On passe des unes aux autres en posant

$$\varepsilon = \vartheta_t = \vartheta, \quad \omega = \vartheta'_{0,t} = \vartheta', \quad a(t) = a.$$

Telles sont les équations dont l'intégration est pratiquement très simple et qui permettent de ramener les positions des astres à une même date quelconque, par exemple à 1850,0.

La théorie des perturbations séculaires donne l'expression de la dérivée

$$\frac{da(t)}{dt}.$$

Elle est fonction des masses des planètes, tirées elles-mêmes de la théorie des perturbations. On tire donc la valeur de $\frac{da(t)}{dt}$ des équations du mouvement des corps célestes; nous dirons que cette quantité est déterminée *mécaniquement*.

Il n'en est pas de même de $\frac{d\psi}{dt}$. Son expression résulte de la théorie du mouvement de la terre autour de son centre de gravité et a pour terme principal une constante, fonction des moments d'inertie principaux de notre globe. Ces derniers étant inconnus, on a toujours, pour déterminer cette constante, suivi une marche inverse et conclu sa valeur des variations observées dans les coordonnées des étoiles. Nous dirons que cette grandeur est déterminée *empiriquement* par la *statistique stellaire*. Il est nécessaire d'opérer sur un très grand nombre d'étoiles et de diriger les calculs de manière à éliminer du résultat final l'influence des mouvements propres.

Il importe de remarquer que cette manière de faire implique l'hypothèse toute gratuite que l'ensemble des étoiles fixes n'a pas de mouvement de rotation autour de l'axe de l'écliptique, en d'autres termes, que cet ensemble est fixe par rapport au système d'inertie.

La constante de la précession obtenue, l'expression de $\frac{d\psi}{dt}$ donne, pour toute époque 1850,0 + t , les valeurs numériques de m et de n .

Les observations sont, avons-nous dit, rapportées à l'équateur instantané. Voici comment on y parvient pratiquement. On choisit un *petit nombre d'étoiles*, régulièrement réparties, et l'on détermine avec le plus grand soin leurs coordonnées par rapport à l'équateur et à l'équinoxe instantanés, *en comprenant parmi les inconnues la position de ce dernier point*³⁾. On répète ces déterminations le plus souvent possible. Considérons par exemple deux déterminations, faites aux époques 1850,0 + t_1 et 1850,0 + t_2 . Réduisons-les à l'époque 1850,0 à l'aide des équations (1). Les différences des α et δ ainsi obtenues donnent les mouvements propres pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$.

3) Au sujet des observations absolues cf. VII 3, 4.

En appliquant ces mouvements propres, on obtient la position pour 1850,0.

L'ensemble comprenant:

1°) les α et les δ de ces étoiles pour 1850,0 ou toute autre date initiale,

2°) la constante de la précession adoptée ou une table des valeurs numériques de m et de n pour $1850,0 + t$, déduites de cette constante,

3°) les mouvements propres annuels des étoiles choisies, constitue ce qu'on nomme un *système d'étoiles fondamentales*.

L'observation d'une étoile quelconque, non fondamentale, consiste alors, et c'est là le mérite économique du procédé, à déterminer les différences des coordonnées de l'étoile et des fondamentales voisines. L'étoile est dès lors, ipso facto, rapportée à l'équateur instantané et à l'équinoxe correspondant, sans qu'on ait à déterminer ces derniers éléments à chaque observation.

Le système des étoiles fondamentales est utilisable même en admettant qu'il ait été commis une erreur dans la détermination de l'équinoxe de $1850,0 + t$ ou de 1850,0; il est pareillement utilisable si les constantes de $\frac{d\psi}{dt}$ ou de $\frac{da(t)}{dt}$ et par suite les valeurs de m et de n sont erronées.

Il en est de même également si, dans les équations (1), le plan fondamental n'est pas exactement l'équateur. Dans ce cas, les différences des coordonnées homologues offrent des écarts systématiques, d'autant plus faibles d'ailleurs que le réseau des fondamentales est plus serré.

Toutes ces erreurs se reportent sur les mouvements propres, si bien qu'on peut dire que dans l'*Astronomie stellaire*, le vrai caractère de la précession est de distraire des mouvements propres une partie commune de même définition. On détermine en effet la constante de la précession par la condition fondamentale que les *mouvements propres résiduels soient aussi petits que possible*, considération qui n'a rien à faire avec la définition *mécanique* de cette grandeur.

Au contraire, par suite de sa définition même, le système fondamental est essentiellement subordonné à la condition que sa configuration soit représentée, à tout instant, sans contradiction interne, par l'ensemble de ses constantes, à savoir:

α, δ pour $1850,0 + t = \alpha, \delta$ pour 1850,0 + précession + mouvement propre, tout en étant peut-être mal orienté. L'observation des étoiles fixes ne donne d'ailleurs aucun moyen de constater de tels écarts d'orientation.

3. Système mécanique. Les calculs de la mécanique céleste ont été faits, en supposant l'existence d'un système de référence absolument fixe, en appliquant les principes de la mécanique rationnelle et l'hypothèse de la gravitation universelle. Tant qu'on n'a pas confronté la théorie développée aux observations, toutes les conclusions qu'on a pu tirer de cette théorie sont purement spéculatives, et rien ne dit qu'il y ait dans le monde un système mécanique réalisant les hypothèses faites, et auquel puissent s'appliquer ces théories. Le but de la recherche du système d'inertie est précisément de montrer que le système du monde satisfait à ces conditions.*

Si nous pouvions faire abstraction des perturbations, les mouvements des planètes seraient régis par les seules lois de Kepler et le système d'inertie cherché aurait pour origine le centre du soleil, pour plan fondamental le plan d'une des orbites, celle de la terre par exemple, et pour direction origine dans ce plan le rayon vecteur du périhélie. Pour tout autre système, les lois de Kepler cesseraient d'être satisfaites. Le temps serait mesuré par les aires balayées par les rayons vecteurs joignant le centre du soleil à celui de la terre.

Mais en réalité les orbites elliptiques ne sont pas fixes, et leurs variations, produites par les masses du système solaire, sont régies par les équations différentielles du mouvement troublé. Si l'on imagine intégrées ces équations, les expressions obtenues représentent les variations des éléments des orbites précisément par rapport au système d'inertie. Les masses attirantes interviennent aussi dans les coordonnées angulaires relatives des planètes n'ayant point de référence au système d'inertie, et inversement, des valeurs observées de ces coordonnées, on peut conclure les masses. Si l'on substitue ces valeurs des masses dans les intégrales des équations du mouvement des orbites, les expressions obtenues prennent, pour chaque valeur du paramètre t , des valeurs numériques déterminées, se rapportant toujours au système d'inertie. Inversement, comme les trajectoires sont les quantités observées et que le système d'inertie est inconnu, on peut dire que le système d'inertie est déterminé par les trajectoires. Il est donc construit. On obtient le temps en résolvant par rapport au paramètre t l'une des équations où l'on a introduit les grandeurs observées.

Il est plus commode de passer par l'intermédiaire d'un système de coordonnées empirique. A l'aide des équations (1), on réduirait à 1850,0 les positions du soleil, etc., qui seraient rapportées au système des fondamentales choisies. On ajouterait aux coordonnées ainsi calculées des corrections $\Delta\alpha, \Delta\delta$, provenant de ce que les quantités intervenant dans les formules (1) ne sont pas toutes définies mécaniquement.

Cela peut se faire de la manière suivante: supposons que le système des fondamentales ait subi depuis 1850,0 par rapport au système d'inertie les trois déplacements angulaires $-p$, $-q$, $-s$ autour de l'axe vernal, de l'axe du plan de l'équateur qui fait avec l'axe vernal un angle de $+90^\circ$ et de l'axe perpendiculaire au plan de l'équateur; ou encore, ce qui revient au même, supposons que le système d'inertie ait subi par rapport au système empirique les trois déplacements angulaires p , q , s . Pour réduire les coordonnées du soleil, etc. au système d'inertie on ajoutera alors à ces coordonnées calculées d'après les formules (1) les corrections suivantes⁴⁾:

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos \delta \Delta \alpha &= + p \sin \delta \cos \alpha + q \sin \delta \sin \alpha - s \cos \delta, \\ \Delta \delta &= - p \sin \alpha \quad + q \cos \alpha. \end{aligned}$$

On introduirait ces positions corrigées dans les équations du mouvement newtonien et on en tirerait, avec les valeurs initiales des éléments, les masses et les trois déplacements angulaires p , q , s , qu'on pourrait considérer comme constants pendant des intervalles de temps assez courts mais qui changent de valeur d'un intervalle à l'autre. On ajoutera aussi une correction du temps pour chaque intervalle.

On pourrait aussi commencer par poser

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 t, \\ q &= q_0 + q_1 t, \\ s &= s_0 + s_1 t, \\ t &= T + fT^2 \end{aligned}$$

et le calcul s'achèverait en donnant aux corrections des coordonnées provenant des diverses causes de variation une forme semblable, et en combinant les observations de telle sorte qu'elles déterminent les inconnues de la meilleure manière possible.

Comme on doit s'y attendre, on constatera que les valeurs initiales p_0 , q_0 , s_0 se confondent avec les éléments des orbites pour 1850,0.

Voilà la marche théorique que l'on pourrait suivre. Envisageons maintenant la solution effective du problème.

4. Système mixte de la théorie des planètes. Il existe trois grandes études approfondies du système solaire. Elles se suivent à un demi siècle environ, et ont pour auteurs *P. S. Laplace*, *U. J. J. Le Verrier* et *S. Newcomb*. Elles consistent en développements explicites des lieux du soleil et des planètes dont la comparaison avec les

4) Cf. *E. Anding*, *Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum*, Munich 1901, p. 62.

lieux observés permet la détermination des constantes et la construction d'éphémérides.

Dans ces recherches le plan fondamental adopté a toujours été l'écliptique. C'est à ce plan que se rapportent les éléments des planètes: longitude du nœud ascendant Ω , inclinaison i et longitude du périhélie ϖ . La théorie donne les expressions des variations de ces éléments par rapport au système d'inertie, en fonction des masses attirantes. Comme on a pour l'orbite de la terre (écliptique) des expressions analogues, on peut représenter les variations des éléments de position des orbites des planètes par rapport à l'écliptique instantanée en fonction des masses, ce qui revient à dire qu'on obtient la longitude λ et la latitude β d'une planète rapportées à l'écliptique instantanée en fonction des masses et du temps.

Si d'autre part, les coordonnées observées étaient elles aussi rapportées à l'écliptique instantanée, on pourrait confronter directement la théorie avec les observations sans avoir à appliquer des corrections comme au n° 3, car les plans de coordonnées seraient définis mécaniquement, et leurs positions initiales qui constituent le système d'inertie sont à chaque instant déterminables par le calcul. Mais les observations sont rapportées à l'équateur défini par le système adopté d'étoiles fondamentales, et doivent avant tout être transformées en longitude et latitude. Il faut supposer à cet effet:

1°) Que l'on ait la valeur exacte ε de l'inclinaison de l'écliptique instantanée sur l'équateur du système des fondamentales;

2°) Que le point d'intersection de cette écliptique et de l'équateur coïncide avec l'origine des ascensions droites des étoiles du système des fondamentales.

Si ces hypothèses sont réalisées, l'équateur empirique se trouve éliminé des observations. Les auteurs des études du système ont traité différemment ces conditions.

U. J. J. Le Verrier part de la formule qui donne la variation séculaire de l'inclinaison ε en fonction des masses attirantes. En substituant à ε la valeur que donnent les observations faites au voisinage du solstice, il obtient une équation de condition entre les masses. Cette équation, jointe à d'autres analogues provenant d'autres perturbations, lui permet de déterminer le système le plus probable des valeurs des masses, et par suite, une expression numérique de l'inclinaison ε , à toute époque.

Il faut observer que cette façon d'opérer suppose l'équateur défini, lui aussi, mécaniquement; en d'autres termes, on suppose tacitement que l'équateur défini par les fondamentales adoptées coïncide avec l'équa-

teur terrestre. De même, en ce qui concerne l'origine des ascensions droites des fondamentales, *U. J. J. Le Verrier* admet que les nombreuses observations de l'équinoxe ont eu pour résultat de placer cette origine à l'intersection vraie de l'équateur et de l'écliptique.

S. Newcomb au contraire suppose que les conditions que l'on vient d'énoncer ne sont pas en fait rigoureusement réalisées. Comme on doit les appliquer pour passer des positions équatoriales aux positions écliptiques (en fait, il suit la marche inverse), il est nécessaire d'introduire dans ces formules deux termes correctifs, l'un pour tenir compte du petit angle que forment entre eux l'équateur vrai et l'équateur défini par les fondamentales; l'autre provenant de ce que l'origine des ascensions droites n'est pas exactement à l'intersection de l'écliptique vraie et de l'équateur. En comparant la théorie aux observations, on déterminera avec les éléments des orbites et les masses, ces deux termes correctifs et leurs variations séculaires.

On arrive ainsi à définir mécaniquement la position de l'écliptique. Il resterait à faire de même pour la direction initiale contenue dans le plan même de l'écliptique.

Il est clair que la droite (d) à partir de laquelle on compte les angles dans l'écliptique initiale (équinoxe de 1850,0) ne reste pas, quand le temps varie, contenue dans le plan de l'écliptique instantanée. Mais à un instant quelconque t on peut définir dans le nouveau plan de l'écliptique à cet instant t une direction origine liée mécaniquement au système d'inertie; ce sera par exemple la direction (d_1) suivant laquelle se projette sur le nouveau plan de l'écliptique la direction (d). Ou mieux encore on supposera que la direction origine qui reste dans le plan mobile de l'écliptique se déplace conformément aux expressions (α) et (β) du n° 2 en se mouvant à chaque instant normalement au plan avec lequel coïncide l'écliptique à cet instant. On peut donc toujours admettre que les longitudes des planètes comptées à partir de cette direction initiale (d_1) soient exprimées en fonction du temps.

Comme les observations donnent ces longitudes comptées à partir de la droite e intersection de l'écliptique et de l'équateur défini par le système adopté de fondamentales, il est nécessaire pour passer de l'une à l'autre de connaître l'arc $d_1 e$.

En fait on ne détermine pas cet arc mécaniquement: on le déduit plutôt de la constante de la précession obtenue elle-même par des considérations de statistique stellaire, avec l'hypothèse que la variation commune des longitudes de toutes les étoiles considérées résulte simplement d'un mouvement égal et de sens contraire de cette direction origine par rapport au système d'inertie. Cette grandeur ψ_1 a pour

terme principal

$$\psi - a(t) \cos \omega,$$

nommé *précession générale*⁵⁾.

On peut conclure de ce qui précède, que *deux* des axes du système de coordonnées adopté dans l'astronomie planétaire sont définis *mécaniquement* et que le troisième axe, par contre, est déterminé *empiriquement*. Il eût été plus logique de définir mécaniquement cette troisième direction en introduisant d'emblée, avec les termes correctifs (1°) et (2°) mentionnés p. 8, un troisième terme analogue constituant avec les deux autres un système d'angles d'Euler.

Nous allons examiner cependant comment peut s'effectuer cette détermination.

5. Détermination de la troisième direction. Détermination mécanique de la constante de la précession. Nous prendrons comme exemple le plus simple le mouvement du soleil. Nous ne considérerons que le terme principal de l'équation du centre et nous engloberons en une seule correction *S* les autres termes ainsi que les effets de l'aberration, de la nutation, des perturbations périodiques et de l'action de la lune.

La longitude du périégée, comptée à partir de la droite d_1 , est de la forme

$$\bar{\omega}' = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1' t,$$

dans laquelle $\bar{\omega}_1'$ est une fonction connue des masses. La longitude du soleil, comptée à partir de la même origine, se compose donc d'un terme linéaire nt , de l'équation du centre

$$2e \sin (nt - \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1' t),$$

et du terme correctif *S*.

Si l'on veut rapporter cette longitude à la droite *e*, il faut lui ajouter l'arc $d_1 e$ qui est la somme de la précession générale que nous écrirons

$$\frac{d\psi_1}{dt} \cdot t$$

et de la correction que nous cherchons. Nous désignerons cette correction par

$$s' = s_1' t.$$

On a ainsi, en appelant λ la longitude du soleil rapportée à la droite *e*,

5) Voir a ce sujet VII 3, 5b.

l'expression

$$\lambda = nt + \frac{d\psi_1}{dt} \cdot t + s_1' t + 2e \sin(nt - \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1' t) + S.$$

On a l'habitude de compter les longitudes moyennes et la longitude du périhélie à partir de la droite e ; cela n'a d'ailleurs qu'une importance tout à fait secondaire. L'équation du centre peut alors s'écrire

$$2e \sin \left[\left(n + \frac{d\psi_1}{dt} \right) t - \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1' t \right]$$

en posant

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1' + \frac{d\psi_1}{dt}$$

et l'on a

$$(3) \quad \lambda = \left(n + \frac{d\psi_1}{dt} + s_1' \right) t + 2e \sin \left(nt + \frac{d\psi_1}{dt} \cdot t - \bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1' t \right) + S.$$

La forme de cette équation montre qu'on peut tirer des observations les valeurs numériques des deux quantités

$$N = n + \frac{d\psi_1}{dt} + s_1', \quad N' = n + \frac{d\psi_1}{dt} - \bar{\omega}_1.$$

Comme $\bar{\omega}_1$ et $\frac{d\psi_1}{dt}$ sont connus, on en tire n et s_1' .

Si l'on écrit l'équation (3) ainsi:

$$\lambda = Nt + 2e \sin [Nt - \bar{\omega}_0 - (\bar{\omega}_1 + s_1')t] + S,$$

elle exprime manifestement que la définition empirique de l'origine des longitudes introduit un écart s_1' entre les valeurs observées et les valeurs calculées du mouvement du périhélie.

La faible excentricité de l'orbite solaire est mal appropriée au calcul de s_1' . C'est en appliquant les mêmes considérations aux planètes qu'on peut obtenir la meilleure détermination.

Rappelons que *S. Newcomb*⁶⁾ a déduit des observations les variations séculaires des éléments des orbites des planètes principales, et qu'il a obtenu d'autre part les masses de ces planètes à l'aide des perturbations périodiques. En calculant d'un autre côté les perturbations séculaires à l'aide des valeurs trouvées des masses, il a constaté que les excentricités ne présentaient aucun écart inadmissible, mais que les éléments de position des planètes offraient les différences inscrites dans le tableau suivant, où l'on a laissé de côté le périhélie de Mercure:

6) The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy, Washington 1895. Ce mémoire de *S. Newcomb* a aussi paru dans *Supplement to the American Ephemerid for 1897* (éd. Washington 1895), p. 89; voir aussi *S. Newcomb*, *Catalogue of fundamental stars for 1875 and 1900*, Washington 1898, p. 188.

Différences pour cent ans.

	Observ. <i>O</i>	Calcul <i>C</i>	<i>O</i> — <i>C</i>	Erreur moyenne	Nouvelle différence	Sans Mercure
Mercure	Δi	+ 7'',14	+ 6'',76	+ 0'',38	± 0'',80	+ 0'',36 (+ 0'',35)
	$\text{Sin } i \Delta \varphi$	— 91'',89	— 92'',50	+ 0'',61	± 0'',52	— 0'',31 (— 0'',40)
Vénus	$e \Delta \bar{\omega}$	+ 0'',29	+ 0'',34	— 0'',05	± 0'',25	— 0'',10 — 0'',11
	Δi	+ 3'',87	+ 3'',49	+ 0'',38	± 0'',33	+ 0'',34 + 0'',35
Terre	$\text{Sin } i \Delta \varphi$	— 105'',40	— 106'',00	+ 0'',60	± 0'',17	+ 0'',15 + 0'',12
	$e \Delta \bar{\omega}$	+ 19'',48	+ 19'',38	+ 0'',10	± 0'',13	— 0'',02 — 0'',04
Mars	$e \Delta \bar{\omega}$	+ 149'',55	+ 148'',80	+ 0'',75	± 0'',35	+ 0'',07 — 0'',01
	Δi	— 2'',26	— 2'',25	— 0'',01	± 0'',20	— 0'',03 — 0'',04
	$\text{Sin } i \Delta \varphi$	— 72'',60	— 72'',63	+ 0'',03	± 0'',22	— 0'',24 — 0'',25

On doit remarquer que pour Vénus le mouvement du nœud présente une différence qui vaut cinq fois l'erreur *probable* et que pour le périhélie de Mars l'écart vaut trois fois cette erreur.

Cherchons à expliquer ces écarts en supposant qu'en 100 ans, le système d'inertie ait subi par rapport au système de référence des rotations p' , q' , s' autour de la ligne des équinoxes X' , de la ligne Y' à 90° de celle-là et autour de l'axe Z' perpendiculaire au plan de l'écliptique. Les différences en question sont alors exprimées par les formules

$$\begin{aligned}
 e \Delta \bar{\omega} &= + p' e \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \operatorname{Sin} \Omega - q' e \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \cos \Omega + s' e, \\
 \Delta i &= + p' \cos \Omega + q' \sin \Omega, \\
 \sin i \Delta \Omega &= - p' \cos i \sin \Omega + q' \cos i \cos \Omega + s' \sin i.
 \end{aligned}$$

Formant à l'aide de ces formules les équations de condition, leur attribuant le même poids et les résolvant par la méthode des moindres carrés, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 p' &= 0'',0 \\
 q' &= 0'',0 \\
 s' &= + 7'',3 \pm 2'',3.
 \end{aligned}$$

Les valeurs de p' et de q' nous montrent ce que nous savions déjà, savoir que les axes des X' et Y' ont une signification mécanique nettement définie. La valeur de s' indique que la constante de la précession déterminée par les considérations de statistique stellaire doit être augmentée de 7'' par siècle environ, si l'on veut mettre d'accord l'observation et le calcul. En tenant compte de cette correction, les nouvelles différences montrent que les écarts ont disparu pour le nœud de Vénus et le périhélie de Mars et que sur neuf différences, six sont au-dessous, trois au-dessus de l'erreur probable.

En excluant complètement Mercure, on trouve, par un calcul semblable,

$$\begin{aligned} p' &= 0'',0 \\ q' &= 0'',0 \\ s' &= + 8'',2 \end{aligned}$$

mais les nouvelles différences du tableau ne présentent pas d'amélioration sensible.

Au point de vue d'une théorie purement mécanique du système solaire, on ne peut que s'en tenir à ce résultat.

Mais comment expliquer que l'ensemble des étoiles fixes ait un mouvement rétrograde par rapport au système d'inertie?

Les diverses déterminations que la statistique stellaire donne pour la constante de la précession, divergent pour un siècle de 1'', au plus de 2''. Si nous voulions admettre ce qu'on pourrait nommer „une précession propre“ négative de 7'' par siècle, il faudrait que les valeurs de cette constante conclues d'abord des étoiles brillantes, puis des étoiles faibles, diffèrent plus qu'on ne l'a trouvé.

La question demande de nouvelles recherches et jusqu'à nouvel ordre, on doit rechercher la cause de cette anomalie dans le système solaire.

Dans les divers articles de cette Encyclopédie, on admettra tacitement, comme on le fait d'ordinaire, que la constante de la précession résultant des recherches de statistique stellaire coïncide avec sa valeur mécanique et que son emploi ramène toutes les observations au système d'inertie.

En ce qui concerne la mesure du temps, elle est établie, sur une base mécanique, par la rotation de la terre, avec une précision qui suffit jusqu'ici à toutes les exigences⁷⁾.

7) Cf. VII 3, 5 b.

VII 2. RÉFRACTION ET EXTINCTION.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE A. BEMPORAD (CATANE)

PAR P. PUISEUX (PARIS).

Introduction.

1. Généralités concernant les actions de l'air atmosphérique sur les rayons lumineux et leur représentation mathématique. Les rayons des astres sont modifiés à bien des égards dans leur trajet à travers l'atmosphère terrestre. Ils sont d'abord déviés de leur direction primitive (réfraction); leur intensité initiale est affaiblie (extinction); leur couleur est changée (absorption sélective); de plus ils sont différemment réfractés suivant leur couleur (dispersion atmosphérique¹) et réfléchis dans toutes les directions (diffusion); les changements de ces divers effets, se succédant rapidement, nous donnent enfin le phénomène de la scintillation²).

Le tableau suivant a pour but de mettre en évidence la marche de la réfraction, de la dispersion et de l'extinction pour des distances zénithales croissantes. Il donne en même temps les changements dR de la réfraction avec la pression atmosphérique et la température de

1) Sur les mesures de la dispersion atmosphérique, consulter *Prosper Henry*, C. R. Acad. sc. Paris 112 (1891), p. 377; *H. von Seeliger*, Sitzgsb. Akad. München 21 (1891), p. 245/46; *H. Kayser* et *C. Runge*, Die Dispersion der atmosphärischen Luft³); *Ann. Physik und Chemie*, Dritte Folge 50 (1893), p. 293/315; *H. Kayser*, Handbuch der Spektroskopie 1, Leipzig 1900, p. 360. Pour les mesures de la réfraction photographique et l'influence de la dispersion atmosphérique sur les lieux des étoiles voir *J. Wilsing*, Astron. Nachr. (Kiel) 145 (1898), p. 273. Cf. VII 3, 5 B.

2) Sur la scintillation, consulter *K. Exner* dans *Ph. Carl* et *F. Exner*, Repertorium für Experimental-Physik 23, Munich (Leipzig) 1887, p. 371, 426; tirage à part, Vienne 1891; *E. von Oppolzer*, Sitzgsb. Akad. Wien 110 II^a (1901), p. 1239; *K. Exner* et *W. Williger*, Sitzgsb. Akad. Wien 111 II^a (1902), p. 1265; Sitzgsb. Akad. Wien 113 II^a (1904), p. 1019, ainsi que *K. Exner* dans *A. Winkelmann*, Handbuch der Physik, (2^e éd.) 6 (Optik), Leipzig 1906, p. 567 (article Scintillation).

l'air. La colonne „Extinction“ donne le déchet, exprimé en classes de grandeur, par rapport à l'éclat zénithal.

Réfraction, dispersion et extinction.

Distance zénithale apparente	Réfraction moyenne	Dispersion de 0,56 μ à 0,40 μ	d R		Extinction visuelle moyenne à Potsdam
			pour 1° C	pour 10 ^{mm} de pression	
0°	0''	0''	- 0'',0	+ 0'',0	0,00 ^{sr}
3°	3''	0''	- 0'',0	+ 0'',0	0,00 ^{sr}
15°	16''	0''	- 0'',1	+ 0'',2	0,00 ^{sr}
50°	1' 9''	1''	- 0'',2	+ 0'',9	0,12 ^{sr}
75°	3'32''	4''	- 0'',8	+ 2'',8	0,66 ^{sr}
85°	9'47''	11''	- 2'',3	+ 7'',9	1,77 ^{sr}
89°	24'25''	26''			
90°	34'54''	38''			

La détermination expérimentale de la réfraction s'obtient par des observations de hauteurs méridiennes d'étoiles circumpolaires dans les deux culminations.

La dispersion, c'est-à-dire la différence des réfractions pour les longueurs d'onde 0,56 μ et 0,40 μ , est évaluée, d'après *H. Kayser* et *C. Runge* à $\frac{1}{56}$ de la réfraction. L'extinction photographique a été trouvée, par expérience, à peu près égale au double de l'extinction visuelle³⁾.

L'évaluation théorique de tous ces effets dépend en première ligne des propriétés de l'air [n° 2] et de la constitution de l'atmosphère [n°s 3, 4]. C'est la manière dont on représente mathématiquement les résultats de l'expérience qui établit la différence d'une théorie à l'autre. Par exemple, pour traiter la théorie de la réfraction, les uns admettent une expression simple pour la densité de l'air considérée comme fonction de la hauteur; d'autres préfèrent considérer la température comme liée soit à l'altitude, soit à la densité, soit à la pression. A côté de ces différences, établies entre les diverses théories par les hypothèses qui leur servent de base, il s'en trouve d'autres qui résident plutôt dans la forme, comme le mode et l'extension du développement analytique. A nos yeux il est beaucoup moins important d'insister sur les artifices de développement que de bien caractériser

3) Au sujet des mesures de l'extinction photographique consulter *J. M. Schæberle*, Contributions from the Lick Observatory n° 3, Sacramento 1893; *C. W. Wirtz*, Astron. Nachr. (Kiel) 154 (1900/1), p. 349.

les différentes hypothèses. Il y a en effet une méthode (la quadrature mécanique⁴), qui, dans toutes les hypothèses, conduit également vite au but, c'est-à-dire à la connaissance de la réfraction théorique. Il est cependant important de se rendre compte jusqu'à quel point les développements analytiques sont effectués d'une manière complète et conséquente, car c'est seulement à la suite d'un traitement rigoureux que l'on peut contrôler les diverses hypothèses par les réfractions directement observées.

Résultats d'expériences physiques.

2. Relation entre l'indice de réfraction ou la constante d'absorption et la densité de l'air. Les grandeurs qui déterminent l'influence de l'atmosphère sur la lumière qui s'y propage sont l'indice de réfraction μ et le coefficient d'absorption k de l'air. Ces deux grandeurs dépendent de la densité de l'air. D'autre part cette densité δ est une fonction de l'altitude, aussi l'action réfringente et absorbante de l'atmosphère change-t-elle le long de la trajectoire des rayons lumineux. Pour suivre ce changement, toute théorie de la réfraction ou de l'extinction doit d'abord s'occuper de la relation entre μ et δ , ou entre k et δ .

a) Relation entre μ et δ . On a proposé, pour exprimer la relation entre l'indice de réfraction μ et la densité δ , les trois formules suivantes

$$(1) \quad \mu^2 - 1 = 2c\delta, \quad \mu - 1 = c'\delta, \quad \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 2} = c''\delta$$

dans lesquelles c , c' , c'' désignent des constantes particulières à chaque corps; on donne à c , ou c' , ou c'' , d'après *J. W. Brühl*, le nom de *réfraction spécifique*. La première formule, déjà proposée par *I. Newton* et déduite par *P. S. Laplace* de la théorie de l'émission de la lumière, a été presque exclusivement employée dans la théorie de la réfraction⁵. La seconde formule n'a pas de solide fondement théorique, mais elle a été éprouvée et trouvée très exacte pour un grand nombre de liquides par *T. P. Dale* et *J. H. Gladstone*, *H. Landolt*, *A. Willner*, etc., et aussi pour les gaz par *A. Beer*, *V. von Lang*, *E. Mascart*, etc. La troisième formule, établie par *L. Lorenz* et *H. A. Lorentz*⁶) est la mieux justifiée

4) Voir I 22, 8.

5) *H. Bruns* [Ber. Ges. Lpz. 43 (1891), math. p. 164/227] et *F. Hausdorff* [Ber. Ges. Lpz. 43 (1891), math. p. 481/566] dans leurs recherches sur les réfractions astronomiques, *J. Maurer* [Diss. Zurich 1882], *G. Müller* [Die Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897, p. 128] et *F. Hausdorff* [Ber. Ges. Lpz. 47 (1895), math. p. 401/82] dans leurs théories de l'extinction, font usage de la seconde des formules (1).

6) *H. A. Lorentz*, Ann. Phys. und Chemie, Dritte Folge 9 (1880), p. 641;

par la théorie et par l'expérience, mais elle conduirait dans les théories de la réfraction et de l'extinction astronomique à des développements extrêmement compliqués. D'ailleurs, pour l'air et en général pour les gaz, $\mu - 1$ est si petit que les trois formules indiquées ci-dessus peuvent être remplacées en pratique par la seule formule

$$(2) \quad \mu - 1 = c' \delta.$$

On devra donc, dans les théories de la réfraction et de l'extinction, choisir la formule la plus avantageuse au point de vue analytique et, avec les procédés ordinaires de calcul, c'est la première qui devra être préférée. La valeur numérique de c peut être déterminée physiquement ou astronomiquement. Voici quelques-unes des déterminations les plus dignes de confiance (l'unité choisie pour δ est la densité de l'air à 0° et 760^{mm}):

- J. B. Biot et F. Arago* (physiquement) $2c = 0,0005888.$
- F. W. Bessel* (d'après ses propres observations et celles de *F. W. Argelander*) $2c = 0,0005864.$
- J. Bauschinger* (d'après ses propres observations, Munich 1891 à 1893) $2c = 0,0005830.$
- L. Courvoisier* (d'après ses propres observations, Heidelberg 1900 à 1903) $2c = 0,0005836.$

b) *Relation entre k et δ .* Le coefficient d'absorption k est défini par la relation

$$(3) \quad J = e^{-k\sigma} J_0,$$

où J désigne la quantité de lumière transmise, J_0 la quantité de lumière incidente, σ le trajet accompli dans un milieu homogène.

Pour établir une relation entre la constante d'absorption k et la densité δ , des expériences ont été faites par *A. Beer* sur des solutions diversement concentrées, plus tard par d'autres sur des gaz à diverses pressions. La relation la plus usitée, dite *loi de Beer*, est celle d'après laquelle la constante d'absorption est simplement proportionnelle à la densité ou à la concentration. Elle s'exprime par la formule

$$(4) \quad k = C\delta,$$

où C est l'absorption spécifique. D'après *H. Kayser*⁷⁾, cette formule, „fréquemment mise à l'épreuve, a été aussi souvent trouvée exacte que fautive“. Cela tient à ce que la loi de Beer suppose l'invariabilité

L. Lorenz, Ann. Phys. und Chemie, Dritte Folge 11 (1880), p. 70. Voir aussi l'article V 16.

7) Voir *A. Winkelmann*, Handbuch der Physik³⁾, (2^e éd.) 6, p. 741.

des molécules absorbantes, condition qui souvent n'est pas remplie quand il y a changement de concentration ou de densité. Cette objection ne paraît pas devoir être prise en considération pour l'atmosphère à cause de sa faible densité. Il est à noter, toutefois, que la loi de Beer ne peut s'appliquer rigoureusement que pour une lumière monochromatique, attendu que l'absorption spécifique a , en général, des valeurs très diverses pour des longueurs d'onde inégales⁸⁾. Il suit de là que la théorie de l'extinction doit toujours être développée pour une lumière monochromatique déterminée.

De même que l'absorption spécifique C , la réfraction spécifique c de l'air atmosphérique dépend de la longueur d'onde, quoique dans une mesure beaucoup moindre. D'après *H. Kayser* et *C. Runge*⁹⁾ les valeurs de μ , pour la partie visible du spectre, vont de 1,000290 à 1,000300. Il en résulte que les images des astres, dans le voisinage de l'horizon, ne sont pas des points ni des cercles bien terminés, mais des spectres impurs d'une certaine longueur. C'est le phénomène de la dispersion atmosphérique (voir la note 1 et le tableau de la p. 15). En toute rigueur on doit donc aussi, dans la théorie de la réfraction, supposer une lumière monochromatique déterminée. On choisit pour cela, avec avantage, la région la plus brillante du spectre ($\lambda = 570 \mu\mu$ pour les observations visuelles, $\lambda = 430 \mu\mu$ pour les observations photographiques).

On pourrait aussi supposer que la température, à elle seule, agit sur la réfraction et l'absorption spécifiques de l'air, ainsi que cela se produit sûrement pour nombre de corps¹⁰⁾.

8) Pendant que les rayons rouges perdent seulement quelques centièmes de leur intensité dans leur passage à travers l'atmosphère entière [voir *G. Müller*, Die Photometrie der Gestirne, Leipzig 1897, p. 140], quelques centimètres d'air suffisent pour absorber complètement les rayons dont les longueurs d'onde sont inférieures à $157 \mu\mu$ [voir *H. Kayser* dans *A. Winkelmann*, Handbuch der Physik 7), (2^e éd.) 6, p. 737 (article Spectralanalyse)]. Inversement *G. Müller* et *P. Kempf* trouvent l'extinction visuelle à 80° de distance plus grande pour l'étoile rouge α Taureau que pour l'étoile blanche α Cygne, la différence s'élevant à 0,22 en classes de grandeur. Dans ce dernier cas, l'écart tient à une propriété physiologique de l'œil (phénomène de *J. E. Purkinje*). Voir *G. Müller*, Photometrische Untersuchungen II [Publikationen des Astrophysischen Observatoriums zu Potsdam 3 (1883), mém. n^o 12, p. 274].

9) *H. Kayser* et *C. Runge*, Sitzgsb. Akad. Berlin 1893, p. 153; exposition plus développée Abh. Akad. Berlin 1893, Phys. math. Klasse, Phys. Abh., mém. n^o 1, p. 1/32 (Anhang).

10) *C. Pulfrich* [Ann. Phys. und Chemie, Dritte Folge 34 (1888), p. 332] a, le premier, établi d'une manière certaine que le coefficient de réfraction du quartz amorphe se modifie très notablement par une élévation de température.

Toutefois une telle influence de la température sur la réfraction spécifique des gaz est très invraisemblable¹¹⁾. Mais les expériences sur ce sujet font défaut.

Les propriétés optiques de l'air atmosphérique dépendent aussi de sa composition actuelle. La présence de la vapeur d'eau et de la poussière en abondance variable modifie d'une façon très marquée, en qualité et en quantité, l'absorption spécifique mais relativement peu la réfraction. D'après *H. L. Fizeau*¹²⁾ et *J. C. Jamin*¹³⁾ l'indice de réfraction de l'air humide est seulement un peu plus faible que celui de l'air sec. *E. von Oppolzer*¹⁴⁾ a fait remarquer que, en toute rigueur, on devrait tenir compte de ce que les proportions d'oxygène et d'azote contenues dans l'air changent avec l'altitude.

3. Relation entre la densité, la température, la pression de l'air et la hauteur au-dessus du niveau de la mer.

a) Une première relation est donnée par la loi de Mariotte et de Gay-Lussac

$$(5) \quad p = \delta(1 + mt),$$

où p désigne la pression de l'air (l'unité étant la pression de 760^{mm} de mercure à 0° centigrades, sous la latitude 45°, au niveau de la mer), δ la densité de l'air (l'unité étant la densité normale de l'air sec à 760 mm et à 0°), t la température en degrés centigrades, et $m = \frac{1}{273}$ le coefficient de dilatation de l'air.

Pour l'air humide, si u est la tension de la vapeur d'eau, la relation (5) doit, d'après *R. Radau*, être remplacée par la suivante:

$$(5a) \quad p - \frac{3}{8} u = \delta(1 + mt).$$

Cette correction est d'ailleurs presque insignifiante pour le calcul de la réfraction. C'est seulement dans les tables les plus récentes de *R. Radau* et de *L. de Ball*¹⁵⁾ qu'il en a été tenu compte.

b) Condition de l'équilibre aérostatique. Si l'on suppose de plus que l'atmosphère se trouve en équilibre mécanique, de telle sorte que

11) Voir *A. Winkelmann*, Handbuch der Physik²⁾, (2^e éd.) 6, p. 642.

12) Voir *H. L. Fizeau*, lettre à *F. Arago* datée de 1852, publiée, d'après les papiers laissés par *F. Arago*, dans *F. Arago*, Œuvres 11, Paris-Leipzig 1859, p. 724/32; voir en particulier la table, p. 731.

13) Ann. chimie et phys. (3) 52 (1858), p. 188. Voir aussi *L. de Ball*, Bull. astron. 24 (1907), p. 209.

14) *E. von Oppolzer*, Astron. Nachr. (Kiel) 135 (1894), p. 159.

15) *R. Radau*, Ann. Observatoire Paris, Mémoires 19 (1889), p. 63 et *L. de Ball*, Refraktionstabelfn, Leipzig 1906.

les surfaces sphériques d'égalé densité soient aussi des surfaces d'égalé pression, cette condition entraîne l'existence, entre p , δ et h (hauteur en centimètres au-dessus du niveau de la mer), d'une équation différentielle que nous allons former. L'accroissement dp de la pression dans le passage de l'altitude h à l'altitude $h + dh$ est, au signe près, égal au poids de la colonne d'air correspondante de hauteur dh et de section 1. Ce poids est donné en grammes par l'expression

$$dG = g \left(\frac{a}{a+h} \right)^2 \rho \cdot dh,$$

où g désigne la pesanteur au lieu d'observation, a le rayon de la terre en centimètres (plus exactement, dans les observations méridiennes, le rayon de courbure principal méridien de l'ellipsoïde terrestre pour le lieu d'observation, en ayant égard à l'altitude χ de ce lieu), ρ le rapport de la densité de l'air à celle de l'eau. Nous négligeons ici, comme on peut toujours le faire en pratique, l'attraction de la couche d'air de hauteur h sur le lieu d'observation. On doit égaler l'expression précédente de dG au poids d'une colonne de mercure de hauteur $-dp \times 76$, puisque nous avons pris comme unité pour p la pression normale de 76 centimètres et pour h le centimètre. On obtient ainsi l'équation différentielle demandée

$$dp \times 76 \times g_0 \eta_0 = -g \left(\frac{a}{a+h} \right)^2 \rho \cdot dh,$$

où g_0 désigne l'intensité de la pesanteur à la latitude 45° au niveau de la mer et η_0 la densité du mercure. L'unité doit être pour g_0 la même que pour g , et pour η_0 la même que pour ρ . Si maintenant on appelle ρ_0 la densité normale de l'air à 0° et à 76^{cm}, on a, d'après la définition donnée plus haut pour δ ,

$$\rho = \rho_0 \delta$$

et par suite, pour la condition de l'équilibre aérostatique,

$$(6) \quad l dp = - \left(\frac{a}{a+h} \right)^2 \delta \cdot dh,$$

où l'on a posé, pour abrégé,

$$(6a) \quad l = 76 \times \frac{g_0 \eta_0}{g \rho_0}.$$

Les grandeurs constantes $a = a_0 + \chi$ et l , qui entrent dans l'équation d'équilibre (6), dépendent toutes deux des coordonnées géographiques, (latitude φ et altitude χ) du lieu d'observation. D'après *F. R. Helmert*¹⁶⁾ on a, en négligeant l'attraction de la couche d'air

16) Die math. und phys. Theorien der höheren Geodäsie (1^{re} éd.) 2, Leipzig 1884. p. 579.

comprise entre le niveau de la mer et l'altitude χ ,

$$(7) \quad g = 978,00 (1 + 0,005310 \sin^2 \varphi) \frac{a_0^2}{(a_0 + \chi)^2}.$$

D'autre part a_0 (ou $a - \chi$), rayon de courbure principal méridien de l'ellipsoïde terrestre à la latitude φ , a pour valeur, d'après *F. W. Bessel*,

$$(8) \quad a_0 = \frac{6\,356,06 \times 10^6}{1 - 0,006\,674\,4 \sin^2 \varphi}.$$

Enfin des expériences de physique bien connues ont donné

$$\eta_0 = 13,596 \quad \text{et} \quad \rho_0 = 0,001\,292\,607.$$

On en déduit, pour le niveau de la mer et pour la latitude de 45° ,

$$l = 7^{\text{km}},9939 \quad \text{et} \quad a_0 = 6377^{\text{km}},36;$$

l est ce qu'on appelle la hauteur réduite de l'atmosphère, c'est-à-dire la hauteur d'une atmosphère fictive qui posséderait partout la densité normale ρ_0 de l'air au niveau de la mer et qui exercerait la pression de 76^{cm} de mercure.

c) *Mesures de température.* Les deux équations (5) et (6) ne suffisent pas pour calculer les trois grandeurs inconnues p , δ , t à des altitudes diverses d'après leurs valeurs observées à la surface de la Terre. Une troisième relation est indispensable et la manière la plus simple de l'obtenir est de recourir aux recherches expérimentales sur la variation de la température avec l'altitude.

4. Changement de la température suivant l'altitude. Résultats d'observation. On possède actuellement trois remarquables séries d'observation concernant l'abaissement de la température aux grandes altitudes. Ce sont:

a) jusqu'à la hauteur de 8 kilomètres les données des ascensions de la Société berlinoise pour l'aérostation scientifique, discutées par *R. Assmann* et *A. Berson*¹⁷⁾;

b) jusqu'à la hauteur de 10 kilomètres celles des voyages aériens internationaux, discutées par *J. Hann*¹⁸⁾;

c) jusqu'à la hauteur de 14 kilomètres les données, discutées par *L. Teisserenc de Bort*¹⁹⁾, des ascensions de ballons-sondes.

17) *Wissenschaftliche Luftfahrten*, bearbeitet von *R. Assmann* und *A. Berson* 3, Brunswick 1900, p. 99.

18) *Sitzgsb. Akad. Wien* 113 II* (1904), p. 571.

19) *C. R. Acad. sc. Paris* 138 (1904), p. 42; *Travaux scientifiques de l'Observatoire de météorologie dynamique de Trappes* 3, Paris 1908.

Comme les trois séries d'observations s'accordent presque complètement entre elles pour les huit ou dix premiers kilomètres, il suffira de donner ici un extrait de la dernière série, qui seule sort de cet intervalle.

Abaissement de la température à la hauteur h au-dessus du sol.

D'après les données empruntées par *L. Teisserenc de Bort* à 141 ascensions de ballons dans lesquelles l'altitude de 14 kilomètres a été atteinte. La première ligne donne la température du sol t_0 ; les autres donnent l'abaissement en degrés centigrades:

Altitude en kilomètres	Hiver	Printemps	Été	Automne	Année entière
0	+ 1°,9	+ 5°,1	+ 13°,0	+ 7°,5	+ 6°,9
1	— 2,1	— 2,7	— 1,2	— 1,4	— 1,8
2	— 3,3	— 7,2	— 5,7	— 5,3	— 5,4
3	— 7,9	— 11,5	— 10,9	— 9,2	— 9,9
4	— 12,8	— 17,3	— 15,7	— 14,0	— 15,0
5	— 18,9	— 23,6	— 21,3	— 19,9	— 20,9
6	— 25,6	— 30,3	— 27,8	— 26,2	— 27,5
7	— 33,4	— 37,1	— 35,7	— 33,3	— 34,6
8	— 40,9	— 44,1	— 42,3	— 41,0	— 42,1
9	— 48,8	— 51,8	— 51,0	— 48,9	— 50,1
10	— 55,9	— 57,8	— 58,3	— 55,8	— 57,0
11	— 59,8	— 58,7	— 63,3	— 61,9	— 60,9
12	— 59,8	— 58,2	— 66,0	— 64,6	— 62,1
13	— 58,8	— 57,3	— 64,5	— 64,6	— 61,4
14	— 57,4	— 57,6	— 64,3	— 64,6	— 61,0

D'après cela, la décroissance kilométrique de température, partant de la valeur modérée $-1^{\circ},8$ à la surface de la Terre, atteint la valeur très forte -8° à l'altitude de 8 kilomètres, mais retombe ensuite presque brusquement au de là de 10 kilomètres, en sorte que, vers 14 kilomètres, on se trouve dans une zone de réchauffement ou tout au moins de température uniforme. Les plus récentes ascensions de ballons-sondes indiquent que cette inversion s'étend encore à des altitudes plus grandes (jusqu'à 20 kilomètres). On devait d'ailleurs s'attendre à voir au moins s'affaiblir la décroissance kilométrique, car si elle se maintenait seulement à la valeur de 5° , le zéro absolu et par suite la limite de l'atmosphère seraient atteints déjà à 55 ou 60 kilomètres d'altitude. Or nous savons, à n'en pas douter, que l'atmosphère s'étend beaucoup plus haut. Un expédient acceptable, pour le calcul

de la réfraction, serait d'appliquer la loi de décroissance déterminée d'une manière déjà assez sûre jusqu'à 10 kilomètres de hauteur, et, à partir de là, d'admettre une décroissance kilométrique de -2° ou -1° , qui répondrait à une hauteur de 120 ou 230 kilomètres, respectivement, pour l'ensemble de l'atmosphère.

Il résulte aussi du tableau précédent que la loi du refroidissement est variable avec la saison. Jusqu'à 10 kilomètres de hauteur la décroissance est notablement plus rapide dans le semestre printemps-été que dans le semestre automne-hiver.

D'après *J. Hann*, la situation atmosphérique entraînerait des différences non moins grandes. A 5 kilomètres les aires de haute pression auraient un abaissement de -20° , les aires de basse pression un abaissement de $-26^{\circ},5$. Les conditions de température des premiers kilomètres ayant une importance particulière pour le calcul de la réfraction, on ne doit considérer comme parfaites que les théories qui permettent d'avoir facilement égard aux faits météorologiques à mesure qu'ils sont constatés. Sous ce rapport la manière adoptée par *Radau* pour disposer les tables de réfraction semble jusqu'à présent devoir être préférée à toute autre.

Hypothèses physiques.

5. Examen critique des hypothèses sur la constitution de l'atmosphère. Si aux équations (5) et (6) on joint les conditions aux limites d'après lesquelles, lorsque $t = t_0$, on a

$$(9) \quad \begin{aligned} p &= p_0 \text{ pour } h = 0 \\ p &= 0 \text{ pour } h = H \text{ (hauteur totale de l'atmosphère),} \end{aligned}$$

toute hypothèse déterminée sur la relation entre deux des quatre grandeurs variables t, p, δ, h conduit à la connaissance complète de la valeur *théorique* de la température à diverses hauteurs. On peut donc apprécier la valeur relative des diverses hypothèses d'après leur conformité avec les résultats d'observation indiqués au n° 4, avant d'en faire usage pour représenter les réfractions.

a. Hypothèse de Cassini. Admettons d'abord, avec *G. D. Cassini*²⁰⁾, que la densité de l'air est indépendante de l'altitude, et conserve la valeur δ_0 , toujours voisine de 1, qu'elle possède à la surface; négligeons

20) *G. D. Cassini*, *Ephemerides novissimae motuum coelestium ab anno 1661 ad annum 1666, additis ephemeridibus solis et tabulis refractionum*, Modène 1662. Voir aussi les renseignements bibliographiques placés à la fin du présent volume VII₁, la note 43, et *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur* 2, Zurich 1893, p. 263.

de plus la variation de la pesanteur, ce qui revient à remplacer par l'unité le facteur $\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$ dans la condition d'équilibre (6). Si l'on intègre en ayant égard aux conditions aux limites (9), on trouve

$$(10) \quad p = \frac{\delta_0}{l} (H - h) = \delta_0 (1 + mt),$$

$$(11) \quad H - l = 7^{\text{km}}, 994 \quad (\text{approximativement}),$$

$$(12) \quad t - t_0 = -\frac{h}{lm} = -273^{\circ} \frac{h}{l} = -34^{\circ} h,$$

h étant évalué en kilomètres.

Ainsi, par suite de l'hypothèse faite, la pression et la température de l'air varient l'une et l'autre linéairement avec l'altitude, et la décroissance kilométrique atteint la valeur énorme -34° , alors que la valeur adiabatique, la plus grande compatible avec l'équilibre, est seulement $-9^{\circ},9$. En conservant dans l'équation (6) le facteur $\left(\frac{a}{a+h}\right)^2$ on retrouverait pratiquement les mêmes marches pour la pression et la température, et l'on ne cesserait pas d'être en contradiction flagrante avec les faits observés.

b. *Hypothèse de Tobie Mayer.* La formule de réfraction de *T. Mayer* [n° 8]²¹⁾, à laquelle on peut réduire les formules de *P. Bouguer*, de *T. Simpson* et de *J. Bradley*, se fonde sur l'hypothèse d'une décroissance linéaire de la densité. Elle suppose par conséquent une relation de la forme

$$(13) \quad \delta = \delta_0 \left(1 - \frac{h}{K}\right).$$

La hauteur K , pour laquelle la densité s'annule, est une limite supérieure pour la hauteur totale H de l'atmosphère, car on peut supposer qu'à la limite de celle-ci la densité n'est pas effectivement nulle. Si l'on introduit cette valeur de δ dans l'équation (6), et si l'on néglige la variation de la pesanteur, on trouve par intégration, en ayant égard aux conditions (9)

$$(14) \quad p = \frac{H-h}{l} \delta_0 \left(1 - \frac{H+h}{2K}\right), \quad p_0 = \frac{H}{l} \delta_0 \left(1 - \frac{H}{2K}\right),$$

$$(15) \quad 1 + mt = \frac{K}{l} \frac{H-h}{K-h} \left(1 - \frac{H+h}{2K}\right),$$

$$(16) \quad t = 273 \left\{ \frac{K}{l} \frac{H-h}{K-h} \left(1 - \frac{H+h}{2K}\right) - 1 \right\}.$$

Si l'on admet que la densité s'annule à la limite de l'atmosphère on doit supposer $K = H$. La seconde équation (14) donne alors

$$p_0 = \frac{H}{2l} \delta_0, \quad H = 2l \frac{p_0}{\delta_0}$$

21) Voir note 49.

et comme p_0 et δ_0 sont toujours très voisins de l'unité, la valeur commune de H et de K est sensiblement $2l$ ou 16 kilomètres. La formule (16) donne alors

$$t = 273 \left[\frac{H}{l} \left(1 - \frac{H+h}{2H} \right) - 1 \right] = - 273^\circ \frac{h}{2l} = - 17^\circ,08h.$$

Cette fois encore nous trouvons une décroissance de température uniforme mais elle est au moins trois fois plus forte que la valeur observée.

Si maintenant on fait

$$K = nH,$$

n étant un coefficient nécessairement plus grand que l'unité, l'équation (15) donnera

$$p_0 = \frac{H}{l} \delta_0 \left(1 - \frac{1}{2n} \right), \quad H = 2l \frac{p_0}{\delta_0} \frac{n}{2n-1}.$$

Le dernier facteur est moindre que l'unité. La hauteur trouvée pour l'atmosphère est donc encore plus petite que si l'on avait pris $K = H$, et il est aisé de voir, par l'équation (16), que la décroissance de la température avec l'altitude serait encore plus rapide. Ces résultats subsistent, sans changement notable, si l'on tient compte, dans l'équation (6), du facteur qui exprime la variation de la pesanteur.

c. *Hypothèse de Newton.* A l'encontre des hypothèses qui viennent d'être examinées, et qui donnent une décroissance kilométrique trop forte, *I. Newton*²²⁾ suppose une température constante. Si l'on remplace t dans les équations (5) et (6) par la valeur fixe t_0 et si l'on introduit la *hauteur relative*

$$(17) \quad s = \frac{h}{a+h},$$

il vient

$$l(1 + mt_0) \frac{dp}{p} = - \left(\frac{a}{a+h} \right)^2 dh.$$

Si l'on intègre et si l'on détermine la constante pour le lieu d'observation, on trouve

$$l(1 + mt_0) L \frac{p}{p_0} = a^2 \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) = - as.$$

D'où

$$p = p_0 e^{-ks},$$

où l'on a posé

$$k = \frac{a}{l(1 + mt_0)}.$$

22) Au sujet de la table de réfraction de *I. Newton* consulter: *J. B. Biot*, Analyse des tables de réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer [Journal des savants 1836, p. 735]. Voir aussi *R. Wolf* [Handbuch der Astronomie²⁰⁾ 2, p. 267] et consulter les renseignements bibliographiques placés à la fin du présent volume.

La pression p ne s'annule pour aucune valeur de h . Ainsi, contrairement aux hypothèses précédentes qui assignaient à l'atmosphère terrestre une hauteur trop petite, l'hypothèse de *I. Newton* donne une atmosphère illimitée.

d. *Hypothèse de Laplace*. L'expérience montre que les valeurs réelles des réfractions astronomiques tombent entre celles que fournissent respectivement les formules de *T. Mayer* et de *I. Newton*.

*P. S. Laplace*²³⁾ en a conclu que l'on représenterait mieux la réfraction par une combinaison de la loi arithmétique et de la loi géométrique pour la décroissance de la densité de l'air. Il a été ainsi conduit à l'expression

$$(19) \quad \frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + f \frac{u}{k}\right) e^{-\frac{u}{k}},$$

où δ_0 représente la valeur de la densité de l'air à la surface de la terre, f et k des grandeurs constantes, u la nouvelle variable

$$(20) \quad u = s - \alpha \left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right).$$

Ici α est ce qu'on appelle la *constante de la réfraction* [n° 7]. C'est, à fort peu près, l'excès de l'indice de réfraction μ de l'air sur l'unité. D'après *F. W. Bessel* (*Fundamenta astronomiae*²⁶⁾) on a

$$(21) \quad \alpha = 0,00029243 \quad (\text{pour } 0^\circ \text{ et } 760^{\text{mm}}).$$

La relation entre la densité δ et l'altitude $h = \frac{as}{1-s}$ est donc, chez *P. S. Laplace*, assez compliquée, et la relation (19) est plutôt choisie en vue de faciliter le traitement analytique de l'intégrale de la réfraction [n° 7] que pour représenter la condition réelle de l'atmosphère. Malgré cela l'hypothèse de *P. S. Laplace*, comparée aux précédentes, possède une plus grande valeur physique.

Divisons membre à membre l'équation (6) et l'équation

$$p_0 = \delta_0(1 + mt_0)$$

qui exprime la loi de Mariotte et de Gay-Lussac pour la surface de la Terre. Posons de plus, pour abrégé

$$(22) \quad l(1 + mt_0) = l_0,$$

$$(22a) \quad x = \frac{\delta}{\delta_0} \quad (\text{densité relative}).$$

On obtient ainsi

$$(23) \quad l_0 \frac{dp}{p_0} = -ax \cdot ds.$$

23) *Mécanique céleste* 4, Paris 1805, seconde partie, livre 10, chap. 1: Des réfractions astronomiques; *Œuvres* 4, Paris 1880, p. 233 et suiv., en particulier p. 263 (§ 7).

Mais, d'après l'équation (20), on a

$$ds = du - \alpha \cdot dx.$$

Par suite

$$\frac{dp}{p_0} = \frac{a\alpha}{l_0} x dx - \frac{a}{l_0} x \cdot du.$$

Si donc on intègre entre les limites $p = 0$ (limite de l'atmosphère) et $p = p$ (altitude quelconque), on trouve

$$(24) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{a\alpha}{2l_0} x^2 + \frac{ak}{l_0} x + \frac{fak}{l_0} e^{-\frac{u}{k}} + c,$$

où c est la constante d'intégration. Entre les constantes k, f, c on peut écrire deux relations qui traduisent les conditions aux limites (9). Ce sont

$$(25) \quad \begin{cases} 1 = \frac{a\alpha}{2l_0} + \frac{ak}{l_0} + \frac{fak}{l_0} + c, \\ 0 = \frac{a\alpha}{2l_0} \xi^2 + \frac{ak}{l_0} \xi + \frac{fak}{l_0} e^{-\frac{U}{k}} + c. \end{cases}$$

Ici U et ξ sont les valeurs limites respectivement des variables u et x à la limite supérieure de l'atmosphère. Il est à présumer que la limite ξ est nulle. En effet la valeur adoptée par *P. S. Laplace* pour la constante k , savoir

$$(26) \quad k = \frac{1}{1342}$$

donne déjà, à l'altitude de 64 kilomètres, où s et u sont voisins de 0,01

$$e^{-\frac{u}{k}} = e^{-13,42} = 0,0000015.$$

La densité de l'air est donc déjà très petite à cette altitude et peut être, en pratique, considérée comme nulle à la limite de l'atmosphère. La seconde des équations (25) donne alors

$$c = 0$$

et les équations (24) et (25) se réduisent à

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{p}{p_0} = \frac{a\alpha}{2l_0} x^2 + \frac{ak}{l_0} x + \frac{fak}{l_0} e^{-\frac{u}{k}}, \\ 1 = \frac{a\alpha}{2l_0} + \frac{ak}{l_0} + \frac{fak}{l_0}. \end{cases}$$

Si l'on adopte pour a, l_0, α et k leurs valeurs normales [voir n° 3 et formules (21) et (26)], on tire de la dernière équation

$$f = 0,495.$$

On est alors en mesure de calculer pour une altitude quelconque $h = \frac{as}{1-s}$ les valeurs de x, s, p . Prenant, par exemple, comme argu-

ment une série de valeurs de u arbitrairement choisies, on aura x par l'équation (19), s (ou h) par l'équation (20), $\frac{p}{p_0}$ par l'équation (27). On aura aussi la température par l'équation (5) qui donne

$$t = -273^{\circ} \left(1 - \frac{p}{\delta}\right).$$

On trouve ainsi

u	$x = \frac{\delta}{\delta_0}$	s	$\frac{p}{p_0}$	h	t
0,0000	1,0000	0,000000	1,0000	0,00 km	0,0°
0,0002	0,8662	0,000239	0,8233	1,5	- 13,5
0,0004	0,7400	0,000476	0,6728	3,0	- 24,8
0,0006	0,6252	0,000710	0,5467	4,5	- 34,2
0,0008	0,5234	0,000939	0,4422	6,0	- 42,3
0,0010	0,4349	0,001165	0,3565	7,4	- 49,2
0,0012	0,3591	0,001388	0,2866	8,9	- 55,1
0,0014	0,2949	0,001606	0,2299	10,3	- 60,1

On voit que dans l'hypothèse de *P. S. Laplace* la décroissance de température est d'abord très rapide, presque adiabatique²⁴⁾, mais qu'elle se ralentit ensuite quand on s'élève, en sorte que, à 8 kilomètres, la décroissance kilométrique est réduite à -4° . En somme la valeur moyenne de la décroissance est acceptable, mieux que celle qui résulte des hypothèses précédentes et de bien d'autres plus récentes. Malheureusement la marche de la décroissance kilométrique est opposée à celle que l'on observe, puisque les récentes ascensions aérostatiques accusent un refroidissement modéré près de la surface du sol et un maximum vers 8 kilomètres d'altitude. Comme température extrême à la limite supérieure de l'atmosphère, l'hypothèse de *P. S. Laplace* ne donne pas le zéro absolu (-273°): on a en effet, d'après les équations (27) et (19),

$$\frac{p}{\delta} = \frac{p}{p_0} : \frac{\delta}{\delta_0} \times \frac{p_0}{\delta_0} = \frac{p}{p_0 x} \times \frac{p_0}{\delta_0} = \frac{akp_0}{l_0 \delta_0} + \frac{\alpha \alpha p_0 x}{2l_0 \delta_0} + \frac{fakp_0}{\delta_0 l_0 \left(1 + \frac{fu}{k}\right)},$$

$$t = -273^{\circ} \left(1 - \frac{p}{\delta}\right) = -273^{\circ} \left[1 - \frac{akp_0}{l_0 \delta_0} - \frac{\alpha \alpha p_0 x}{2l_0 \delta_0} - \frac{fakp_0}{\delta_0 l_0 \left(1 + \frac{fu}{k}\right)}\right].$$

A une altitude très grande, s tend vers l'unité, δ tend vers zéro, u , d'après l'équation (20), tend vers $1 - \alpha$, x tend vers une valeur

24) Si l'on calcule plus exactement la dérivée de la température par rapport à la hauteur, on trouve que, à la surface même du sol, la décroissance kilométrique, dans l'hypothèse de *P. S. Laplace* et avec les valeurs adoptées des constantes, atteindrait $-11^{\circ},4$ c'est-à-dire surpasserait la valeur adiabatique.

sensiblement nulle. On a donc comme valeur limite de t , en tenant compte de ce que p_0 et δ_0 sont toujours très voisins de l'unité

$$t = -273^{\circ} \left[1 - \frac{akp_0}{t_0\delta_0} - \frac{fakp_0}{t_0\delta_0} \times \frac{1}{1 + \frac{f}{k}(1-a)} \right] = -111^{\circ}.$$

e. *Théories de Kramp et de Bessel.* La théorie de la réfraction de *Chr. Kramp*²⁵⁾, dont celle de *F. W. Bessel* s'est inspirée, prend pour point de départ une décroissance de température exponentielle. On pose en conséquence

$$(28) \quad (\text{Élasticité spécifique}) = \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = e^{-\frac{as}{g}},$$

formule où m , a , s ont les significations déjà indiquées, p. 19, 20, 25, et où g est une constante empirique.

Les observations méridiennes de *J. Bradley* ont amené *F. W. Bessel* à prendre pour g la valeur 228, de sorte que, a étant exprimé en kilomètres, $\frac{a}{g}$ est voisin de 30. Si maintenant, au moyen de la formule (28), on calcule les valeurs de $t - t_0$ dans les trois suppositions

$$\frac{a}{g} = 20, \quad \frac{a}{g} = 30, \quad \frac{a}{g} = 40,$$

on trouve respectivement

Valeurs de h	1 km	10 km	1 km	10 km	1 km	10 km
Valeurs de $t - t_0$	-4,5°	-41,8°	-6,7°	-60,1°	-8,9°	-77,1°

On voit donc que dans l'hypothèse de *Chr. Kramp* la décroissance de la température avec la hauteur est à peu près uniforme pour les premiers kilomètres et que l'on peut, par un choix convenable de la valeur de g , la mettre en accord suffisant avec les faits observés. Cette hypothèse conduit, à fort peu près, au zéro absolu pour la limite supérieure de l'atmosphère.

Si l'on introduit l'hypothèse (28) dans l'équation (5) et si l'on élimine δ entre (5) et (6), on obtient par intégration

$$\log_e \frac{p}{p_0} = \frac{g}{t_0} \left(1 - e^{-\frac{as}{g}} \right);$$

s tendant vers l'unité, la pression atmosphérique ne devient pas rigoureusement nulle même à une distance infinie de la terre. La formule (22a) donne pour la densité x

$$\log_e x = \log_e \frac{\delta}{\delta_0} = \log_e \frac{p}{p_0} - \log_e \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = \frac{g}{t_0} \left(1 - e^{-\frac{as}{g}} \right) + \frac{as}{g},$$

25) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Strasbourg an VII.

$\frac{as}{g}$ étant une petite fraction dans l'étendue qu'il est utile de considérer; on peut remplacer l'exponentielle par un développement en série, ce qui donne

$$\log_e x = -a \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{g} \right) s - \frac{a^2}{2gl_0} s^2 \pm \dots$$

Pour le calcul définitif de la réfraction, *Chr. Kramp*, et après lui *F. W. Bessel*²⁶), conservent seulement le terme du premier ordre et prennent, par conséquent,

$$(29) \quad \log_e x = -a \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{g} \right) s = -\beta s.$$

La densité varie donc suivant une loi purement exponentielle comme celle que nous avons rencontrée dans l'hypothèse de *I. Newton*. Mais ici la constante β dépend de la température au lieu d'observation, d'après la formule (22) qui définit l_0 . De plus la formule (29) conduit à une loi des températures très différente de celle que donne la relation (28).

Si en effet on introduit la valeur (29) dans les équations (5) et (6), ou plus simplement dans l'équation (23) qui en été déduite, on trouve

$$l_0 \frac{dp}{p_0} = -ae^{-\beta s} ds,$$

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{a}{l_0 \beta} e^{-\beta s} d(\beta s).$$

Intégrant on a

$$(30) \quad \frac{p}{p_0} = 1 - \frac{a}{l_0 \beta} (1 - e^{-\beta s}),$$

$$(30a) \quad \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = \frac{1}{x} \frac{p}{p_0} = e^{\beta s} \frac{p}{p_0} = \frac{a}{\beta l_0} + \left(1 - \frac{a}{\beta l_0}\right) e^{\beta s}.$$

Si maintenant on adopte les valeurs de *F. W. Bessel*

$$\left. \begin{aligned} a &= 6372^{\text{km}},969 & \text{et} & \beta_0 = 745,747 \\ l_0 &= 8^{\text{km}},23673 \end{aligned} \right\} \text{pour } t_0 = 9^{\circ},31$$

on trouve, pour valeurs de $t - t_0$ répondant à diverses valeurs de h ,

$h =$	1 km	2 km	3 km	4 km	6 km	8 km
$t - t_0 =$	$-1^{\circ},3$	$-2^{\circ},8$	$-4^{\circ},5$	$-6^{\circ},4$	$-10^{\circ},8$	$-16^{\circ},5$

26) *F. W. Bessel*, *Fundamenta astronomiae pro anno 1755, Königsberg 1818*, sectio IV, p. 26/44; corrigé dans *F. W. Bessel*, *Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab a. 1750 usque ad a. 1850 computatae, Königsberg 1830*, p. LIX. Voir aussi VII 3, 5.

résultats beaucoup trop faibles, puisque l'abaissement de température à 8 km d'altitude n'est pas inférieur à -40° . La pression atmosphérique s'annulerait, d'après l'équation (30), pour la valeur $s = S$ définie par l'équation

$$S = -\frac{1}{\beta} L \left(1 - \frac{l_0 \beta}{a}\right),$$

ce qui donne seulement $H = 28,5$ km pour la hauteur totale de l'atmosphère. La densité demeure supérieure à une limite finie pour $s = S$, et la température, d'après l'équation (30a), tomberait au zéro absolu. Ces résultats sont en désaccord avec les données physiques.

f. *Hypothèse d'Ivory*. Pour loi fondamentale de la constitution de l'atmosphère, *J. Ivory*²⁷⁾ adopte une relation linéaire entre la température t et la densité de l'air x , telle qu'elle est définie par la formule (22a).

On posera donc

$$(31) \quad \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = 1 - f(1 - x).$$

Cette équation, rapprochée de l'équation (5), entraîne

$$\frac{dp}{p_0} = (1 - f + 2fx) dx.$$

Et si l'on élimine p entre cette équation et l'équation d'équilibre (23), on obtient, pour déterminer x , l'équation différentielle:

$$(1 - f + 2fx) \frac{dx}{x} = -\frac{a}{l_0} ds.$$

D'où l'on tire par intégration

$$(32) \quad 2f(1 - x) - (1 - f) \log_e x = \frac{as}{l_0}.$$

Les équations (31) et (32) permettent de calculer, en partant d'une valeur donnée de x , les valeurs correspondantes de t et de s , par suite de h . A chaque valeur de la constante f répondra donc, dans l'hypothèse de *J. Ivory*, une loi déterminée de température. *J. Ivory* a adopté d'abord la valeur $f = \frac{1}{4}$, plus tard la valeur $f = \frac{3}{8}$ en s'appuyant sur des expériences de *J. Dalton* et de *L. F. Ramond*. Le tableau qui suit donne, pour quelques valeurs de x , les valeurs correspondantes de h et de t dans les suppositions extrêmes $f = 0,2$ et $f = 0,3$. Nous indiquons en même temps les décroissances de température observées pour la moyenne de l'année [voir le Tableau du n° 4]:

27) Philos. Trans. London 113 (1823), p. 409 [tables de réfraction, p. 491 et suiv.]; id. 128 (1838), p. 169 [tables de réfraction, p. 227 et suiv.].

x	$f = 0,2$			$f = 0,3$		
	h	t calculé	t observé	h	t calculé	t observé
0,95	0,5 km	— 2°,7	— 0°,8	0,5 km	— 4°,1	— 0°,8
0,90	1,0	— 5°,5	— 1°,8	1,1	— 8°,0	— 1°,8
0,85	1,5	— 8°,2	— 3°,5	1,6	— 12°,3	— 3°,5
0,80	2,1	— 10°,9	— 5°,8	2,2	— 16°,4	— 6°,3
0,70	3,2	— 16°,4	— 10°,8	3,4	— 24°,6	— 11°,8
0,50	6,0	— 27°,3	— 27°,5	6,3	— 41°,0	— 29°,5
0,30	10,0	— 38°,2	— 57°,0	10,1	— 57°,3	— 57°,4

Dans les deux cas l'abaissement de température calculé est trop rapide pour les premiers kilomètres. La marche de la décroissance kilométrique est d'ailleurs, comme dans l'hypothèse de *P. S. Laplace*, l'opposé de celle que l'on observe. C'est la première supposition $f = 0,2$ qui donne les plus petits écarts entre l'observation et le calcul jusqu'à l'altitude de 5^{km}, et cette valeur de f est prise comme valeur normale dans les nouvelles tables de réfraction de *R. Radau*.

Si l'on suppose la hauteur de l'atmosphère infinie, l'équation (32), où l'on fait $s = 1$, donne pour la densité x une valeur limite très voisine de zéro et l'équation (31) donne alors une limite correspondante pour la température. On trouve cette limite égale à -55° pour $f = 0,2$ et $t_0 = 0$. Cette température est manifestement trop haute, car déjà à 10 kilomètres l'observation indique un refroidissement plus fort [Voir le tableau du n° 4, p. 22].

g. Hypothèse de Schmidt. D'après les observations faites en montagne et qui fournissent en général un abaissement de température à peu près exactement proportionnel à l'altitude, *J. K. Ed. Schmidt*²⁸⁾ pose la relation

$$(33) \quad \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = 1 - \frac{h}{H}.$$

Ici la décroissance kilométrique dépend non seulement de la hauteur H à laquelle on suppose réalisé le zéro absolu de température, mais aussi de la température t_0 à la surface du sol. Cette circonstance est conforme aux données météorologiques d'après lesquelles le refroidissement est d'autant plus rapide que t_0 est plus grand.

J. K. Ed. Schmidt adopte $H = 49^{\text{km}}, 1$. On trouve alors les abaissements de température suivants à 10 kilomètres de hauteur, suivant que l'on prend pour température du sol $+1^{\circ}, 9$ et $+13^{\circ}, 0$, moyenne hivernale et estivale dans les ascensions de *L. Teisserenc de Bort*:

28) Theorie der astronomischen Strahlenbrechung, Göttingue 1828.

$t_{10} - t_0$	Hiver	Été
D'après l'hypothèse de <i>J. K. Ed. Schmidt</i>	— 56°,0	— 58°,2
D'après les ascensions de <i>L. Teisserenc de Bort</i>	— 55°,9	— 58°,3

L'accord ne laisse rien à désirer: peut-être même est-il en partie fortuit. D'ailleurs, comme la décroissance kilométrique observée dans l'atmosphère libre n'est pas uniforme [voir le tableau du n° 4], on ne doit pas espérer une concordance aussi complète pour les altitudes moindres.

L'hypothèse de *J. K. Ed. Schmidt*, comparée à celles de *P. S. Laplace*, de *Chr. Kramp*, de *J. Ivory*, et à celles de *H. Gylgén*, de *M. Kowalski*, de *Th. von Oppolzer*, que nous indiquerons un peu plus loin (p. 33/6), présente cependant cet avantage de ne pas donner pour la décroissance kilométrique une marche opposée à celle que l'on observe dans les dix premiers kilomètres, les plus importants pour l'étude de la réfraction.

h. Hypothèse de Bauernfeind. L'hypothèse de *C. M. von Bauernfeind*²⁹⁾ se distingue de celle de *J. K. Ed. Schmidt* seulement en ce qu'elle ne traite pas comme constante la hauteur de l'atmosphère, mais la met en relation avec la température à la surface de la terre. *C. M. von Bauernfeind* pose en effet

$$H = 48^{\text{km}} (1 + mt_0).$$

Mais on fait ainsi disparaître la variation annuelle de la décroissance kilométrique, variation que l'hypothèse de *J. K. Ed. Schmidt* arrivait si bien à représenter. À ce point de vue le changement ne peut être considéré comme heureux.

De plus *C. M. von Bauernfeind* adopte, dans le développement ultérieur de l'intégrale de la réfraction, pour la densité x définie par l'équation (22a), l'expression

$$x = \left(\frac{1 + mt}{1 + mt_0} \right)^5.$$

Mais on introduit par là une autre hypothèse qui, jointe aux équations (5) et (6), achève de définir p , δ et h comme fonctions de t et, par suite, n'est pas en harmonie avec l'hypothèse fondamentale (33). La température à la limite de l'atmosphère est, pour *C. M. von Bauernfeind* comme pour *J. K. Ed. Schmidt*, le zéro absolu.

i. Hypothèse de Gylgén. On peut considérer comme dérivant de l'hypothèse de *J. K. Ed. Schmidt*, celle de *H. Gylgén*³⁰⁾, qui relie la

29) *C. M. von Bauernfeind*, Astron. Nachr. (Altona) 62 (1864), p. 209; id. 67 (1866), p. 33.

30) *H. Gylgén*, Mém. Acad. Pétersb. (7) 10 (1867), mém. n° 1, p. 1; (7) 12 (1869), mém. n° 4, p. 2; voir aussi Bull. Acad. Pétersb. (3) 12 (1868), col. 474/80.

température t à la hauteur relative s [formule (17)] par l'équation

$$(34) \quad \frac{1 + mt}{1 + mt_0} = \left(1 - \frac{1}{2} \beta s\right)^2 = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^2.$$

Si l'on néglige le terme en s^2 , qui est presque sans influence sur le calcul de la réfraction, la formule (34) se réduit à la formule (33).

Pour la constante β , *H. Gylgén* pose

$$\beta = 120(1 + i),$$

où i doit recevoir des valeurs variables avec la saison ou même d'un mois à l'autre. Ainsi, pour retrouver les réfractions observées par *V. Fuss*³¹⁾, on prendra

	janvier	avril	juillet	octobre
$i =$	- 0,40	+ 0,05	+ 0,66	- 0,10
$\beta =$	72	126	199	108

Par suite la décroissance kilométrique change au cours de l'année, et l'on trouve même, conformément aux données météorologiques, des valeurs plus grandes dans le semestre printemps-été que dans le semestre automne-hiver. Toutefois la décroissance théorique est beaucoup plus variable que la décroissance observée, comme on le verra par le petit tableau comparatif suivant:

Abaissement de température à 5 et 10 kilomètres d'altitude d'après la théorie (*H. Gylgén* et *V. Fuss*) et d'après les observations (*L. Teisserenc de Bort*)

Altitude	Hiver		Printemps		Été		Automne	
	$t_0 = + 1^{\circ},9$		$t_0 = + 5^{\circ},1$		$t_0 = + 13^{\circ},0$		$t_0 = + 7^{\circ},5$	
	Théorie	Observ.	Théorie	Observ.	Théorie	Observ.	Théorie	Observ.
5 km	- 15 ^o ,2	- 18 ^o ,9	- 25 ^o ,1	- 23 ^o ,6	- 39 ^o ,6	- 21 ^o ,3	- 22 ^o ,3	- 19 ^o ,9
10 km	- 29 ^o ,7	- 55 ^o ,9	- 47 ^o ,9	- 57 ^o ,8	- 72 ^o ,4	- 58 ^o ,3	- 39 ^o ,0	- 55 ^o ,8

Si on laisse de côté la variation annuelle de la décroissance kilométrique, qui au besoin serait mieux représentée avec d'autres valeurs de i , il reste toujours cette circonstance défavorable à l'hypothèse de *H. Gylgén* qu'elle donne pour la décroissance kilométrique avec la hauteur une marche opposée à celle que l'on observe.

Pour la hauteur à laquelle se rencontre le zéro absolu de température, l'hypothèse de *H. Gylgén* donne

$$H = \frac{aS}{1 - S} = \frac{2a}{\beta - 2} = \frac{a}{\frac{\beta}{2} - 1}$$

31) *V. Fuss*, *Mém. Acad. Pétersb.* (7) 18 (1872), mém. n° 3.

ou, si l'on prend pour β la moyenne des quatre valeurs indiquées ci-dessus,

$$H = \frac{6377}{62,1} = 103 \text{ km.}$$

k. Hypothèse de Kowalski. A côté du groupe d'hypothèses, dues à *J. K. Ed. Schmidt*, à *C. M. von Bauernfeind* et à *H. Gylđen* qui rattache la théorie de la réfraction aux données recueillies sur la température en montagne, température que l'on suppose en décroissance uniforme, on peut citer un autre groupe d'hypothèses où l'on utilise les températures observées dans l'air libre. Les premières expériences un peu étendues, dans cette direction, datent des voyages aériens de *J. Glaisher* effectués de 1860 à 1870. Elles n'ont malheureusement pas été confirmées par des expériences plus récentes, et paraissent avoir été altérées par des effets de rayonnement ou par des erreurs instrumentales. Elles indiquent une décroissance de température très forte au début, et se ralentissant avec la hauteur.

*M. Kowalski*³²⁾ a obtenu une bonne représentation des résultats de *J. Glaisher* avec la formule

$$(35) \quad \frac{1 + m t_0}{1 + m t} = 1 + k(1 - x)^{\frac{5}{2}},$$

où x désigne, comme précédemment, la densité relative $\frac{\rho}{\rho_0}$. La température t_0 est prise égale à 62° fahrenheit ou 16°7 centigrades. La valeur correspondante de k est 0,1871.

L'équation (35) rapprochée des équations (5) et (23) permet d'obtenir facilement s sous forme de série développée suivant les puissances de $(1 - x)$. On a successivement

$$(36) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{x}{1 + k(1 - x)^{\frac{5}{2}}} = x - kx(1 - x)^{\frac{5}{2}} + \dots$$

$$\frac{a}{l_0} ds = -\frac{1}{x} \frac{dp}{p_0}$$

ou en intégrant, de façon que le premier membre s'annule pour $s = 0$, le second membre pour $x = 1$,

$$(37) \quad \frac{a}{l_0} s = -\log_e x + k(1 - x)^{\frac{5}{2}} - k(1 - x)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{7}{12}(1 - x) - \frac{7}{19}(1 - x)^2 + \dots \right] + \dots$$

On peut donc, pour une série de valeurs arbitraires de x , calculer les valeurs correspondantes de t , de p , de s , par suite de h [équation (17)] et obtenir la loi de décroissance de la température avec la

32) *M. Kowalski*, Recherches sur la réfraction astronomique, Kazan 1878.

hauteur, telle qu'elle résulte des hypothèses de *M. Kovalski*. On trouve ainsi

$x =$	0,9	0,5	0,2
$h =$	1 ^{km} ,1	6 ^{km} ,3	13 ^{km} ,3
$t - t_0 =$	- 10 ^o ,1	- 29 ^o ,8	- 39 ^o ,9

au lieu que, d'après les expériences de *L. Teisserenc de Bort*, on trouve pour les mêmes altitudes et pour la saison d'été ($t_0 = 13^{\circ},3$) respectivement:

$$t - t_0 = \quad - 1^{\circ},6 \quad - 29^{\circ},8 \quad - 64^{\circ},5.$$

Il est clair que l'accord accidentel rencontré à 6^{km} ne peut faire passer sur les discordances qui se présentent à 1^{km} aussi bien qu'à 13^{km}. La température pour laquelle la densité de l'atmosphère se réduirait à 0 serait donnée par l'équation (35) où l'on ferait $x = 0$, ce qui donne

$$t = \frac{16^{\circ},7 - k \times 273^{\circ}}{1 + k} = - 29^{\circ}.$$

Cette température limite est certainement beaucoup trop élevée.

1. *Hypothèses de Th. von Oppolzer, Mendelyeev, Pizzetti*. On peut élever des objections analogues contre les hypothèses de *Th. von Oppolzer*³³⁾ et de *P. Pizzetti* qui s'expriment respectivement par les équations

$$t = - 50^{\circ} + (t_0 + 50^{\circ})x$$

et

$$t = - 36^{\circ} + (t_0 + 36^{\circ}) \frac{p}{p_0}.$$

La première se distingue de l'hypothèse déjà examinée de *J. Ivory* seulement par la valeur du paramètre f . La seconde, suggérée à *D. Mendelyeev*³⁴⁾ par les expériences de *J. Glaisher* et plus tard utilisée par *P. Pizzetti*³⁵⁾ dans un essai sur la théorie de la réfraction, donne visiblement une température trop élevée ($- 36^{\circ}$) pour la limite de l'atmosphère.

6. **Conclusions au sujet des conséquences des hypothèses précédemment exposées. Méthode de Bruns.** D'autres hypothèses plus ou moins compliquées ont été mises en avant par *Th. Young*³⁶⁾, par *J. W. Lubbock*³⁷⁾, par *J. J. Baeyer*³⁸⁾ et par *R. Radau*³⁹⁾. Aucune ne se

33) Denkschr. Akad. Wien 53 I (1887), p. 1/52 [1886].

34) Archives sc. phys. naturelles Genève (3) 55 (1876), p. 233.

35) Atti Accad. Torino 33 (1897/8), p. 213.

36) Philos. Trans. London 114 (1824), p. 159.

37) Memoirs astron. Soc. London 24 (1856), p. 103.

38) Mém. Acad. Pétersb. (7) 3 (1860), mém. n° 5.

39) Ann. Observ. Paris, Mémoires 16 (1882), mém. n° 2; id. 19 (1889), mém. n° 8.

prête à représenter convenablement les nouvelles recherches concernant la distribution de la température dans l'air libre. On est même conduit à se demander s'il est possible de trouver une formule assez souple pour fournir des lois de température adaptées aux diverses saisons et aux diverses situations météorologiques.

Quand on réfléchit à la peine qu'ont demandée les développements analytiques des théories de la réfraction, et notamment les plus complets de ces développements élaborés par *H. Gyldeń* et *R. Radau*, on a le droit de penser que la réfraction astronomique s'obtiendra plus aisément par un simple calcul numérique (quadrature mécanique), qui tiendra compte directement des données de la physique de l'atmosphère⁴⁰). Les lois hypothétiques constituent un détour dont on peut déjà très bien se passer au-dessous de 10 km d'altitude et que bientôt, peut-être, de nouveaux progrès de la technique des ballons sondes rendront tout à fait inutile.

En 1891 *H. Bruns*⁴¹) a proposé une autre simplification fondamentale du calcul de la réfraction. Elle consiste à introduire l'hypothèse sous la forme d'une relation entre l'indice de réfraction μ et la hauteur H , avec autant de constantes empiriques qu'il est nécessaire pour bien représenter les valeurs observées de la réfraction. Ce procédé est sans doute le plus simple si l'on n'a en vue que la représentation *empirique* de la réfraction. Mais ce que l'on cherche en plus, c'est une représentation *physique* du phénomène, qui le rattache aux autres propriétés, plus directement observées, de l'atmosphère. Et peut-être bien est-ce par la voie de la quadrature mécanique que l'on établira le plus facilement cette liaison.

Théorie de la réfraction.

7. Établissement de l'intégrale de la réfraction.

a. *La courbe de réfraction.* Représentons-nous l'atmosphère comme composée d'un nombre illimité de couches d'égal indice de réfraction, toutes sphériques et concentriques. La première loi de la réfraction

40) Voir à ce sujet *H. G. van de Sande Bakhuyzen*, Bestimmung der Refraktion auf Grundlage der aus den Beobachtungen während Luftschiffahrten abgeleiteten Temperaturgradienten, La Haye 1908 (tirage à part, publié à l'avance, d'un mémoire qui sera inséré: *Annalen der Sternwarte in Leyden* 9³ (non encore paru) p. 241/56]; *A. Bemporad*, *Memorie Soc. spettroscopisti italiani* 39 (1910), p. 79.

41) *Ber. Ges. Lpz.* 43 (1891), math. p. 164; *F. Hausdorff*, id. 43 (1891), math. p. 481.

montre immédiatement que le trajet entier du rayon lumineux sera contenu dans un même plan, déterminé par le premier rayon incident et par le centre de la Terre.

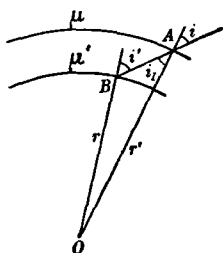


Fig. 1.

Pour appliquer la seconde loi de la réfraction, considérons (fig. 1) deux couches successives dans lesquels les indices de réfraction par rapport au vide soient respectivement μ et μ' . Soient A et B les points d'entrée et de sortie du rayon lumineux pour la couche d'indice μ' et soient r et r' les distances des points A et B au centre O de la Terre, i et i' les angles d'incidence en A et en B , i_1 l'angle de réfraction en A .

La seconde loi de la réfraction (dite loi de Snell ou de Descartes) s'exprime par l'équation

$$\mu \sin i = \mu' \sin i_1.$$

D'ailleurs la proportion des sinus dans le triangle OAB donne la relation

$$r \sin i_1 = r' \sin i'.$$

Multipliant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$\mu r \sin i = \mu' r' \sin i'.$$

D'où il suit que le produit $\mu r \sin i$ garde la même valeur tout le long du rayon lumineux. Si l'on nomme respectivement μ_0 , α , z les valeurs de μ , r et i au point d'arrivée à la surface de la Terre, on pourra poser

$$(38) \quad \mu r \sin i = \mu_0 a \sin z.$$

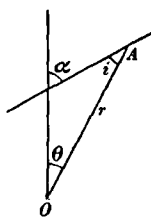


Fig. 2.

Considérons maintenant les couches successives comme infiniment minces et la déviation du trajet lumineux comme continue. Soient θ et α les angles (fig. 2) que le rayon terrestre aboutissant au point d'arrivée fait respectivement avec le rayon OA et avec la direction du rayon lumineux en A . On aura évidemment

$$(39) \quad \alpha = \theta + i$$

et, pour un déplacement infiniment petit sur le trajet lumineux,

$$\operatorname{tg} i = \frac{r d\theta}{dr}.$$

Les équations (38) et (39), différenciées dans la même hypothèse,

donnent

$$\sin i \cdot d(\mu r) + \mu r \cos i \cdot di = 0$$

$$d\alpha = d\theta + di = \operatorname{tg} i \frac{dr}{r} - \operatorname{tg} i \frac{d(\mu r)}{\mu r} = -\operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu}.$$

La somme, prise en signe contraire, des valeurs de $d\alpha$ sur le trajet du rayon est la réfraction totale. Si l'on suppose le rayon parti de la limite supérieure de l'atmosphère, à l'altitude H , pour arriver à la surface du sol, on a ce qu'on appelle la *réfraction astronomique*. Si l'on considère le rayon comme allant seulement d'un point à l'autre de la surface, la somme des valeurs de $d\alpha$ est une *réfraction terrestre*. Cette dernière peut toujours être considérée comme la différence de deux réfractions astronomiques, aussi nous ne nous en occuperons pas spécialement⁴²⁾.

La réfraction astronomique R est donc donnée par l'intégrale

$$(40) \quad R = \int_{\mu_H}^{\mu_0} \operatorname{tang} i \cdot \frac{d\mu}{\mu},$$

où μ_H et μ_0 désignent les valeurs de μ respectivement à la limite supérieure de l'atmosphère et à la surface de la Terre. Pour obtenir la réfraction totale on doit en général ajouter encore les déviations aux limites. La déviation à la limite supérieure n'est pas à négliger dans les théories qui, comme celle de *F. W. Bessel*, ne supposent pas une densité limite très petite. Pour la limite inférieure, il n'y a point de déviation finale à introduire tant que l'on suppose l'observateur dans l'air libre. Mais tel n'est pas le cas dans la pratique: les recherches les plus exactes et les plus récentes, en particulier celles de *J. Bauschinger*⁴³⁾, de *E. Grossmann*⁴⁴⁾, de *L. Courvoisier*⁴⁵⁾, ont mis hors de doute l'existence d'une déviation finale qui dépend des conditions atmosphériques au voisinage immédiat de l'instrument.

Si dans l'équation (40) on introduit la valeur de $\operatorname{tg} i$ tirée de l'équation (38) on trouve

$$(41) \quad R = \int_{\mu_H}^{\mu_0} \frac{\frac{\mu_0 a}{\mu r} \sin z}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_0 a}{\mu r} \sin z\right)^2}} \frac{d\mu}{\mu} = \int_{\mu_H}^{\mu_0} \frac{\mu_0 a \sin z \frac{d\mu}{\mu}}{\sqrt{\mu^2 r^2 - \mu_0^2 a^2 \sin^2 z}}.$$

42) Pour plus de détails, voir le premier volume du tome VI consacré à la Géodésie.

43) *Neue Annalen der Sternwarte in München* 3 (1898), p. 41.

44) *Abh. Ges. Lpz. (math.)* 27 (1901), p. 1.

45) *Mitteilungen der Sternwarte Heidelberg (astronomisches Institut)* cah. 3, éd. Carlsruhe 1904.

Il reste à remplacer μ par sa valeur en fonction de r soit directement (méthode de *H. Bruns*) soit par l'intermédiaire de la densité δ ou de la température t , en se conformant à l'une des hypothèses indiquées plus haut au sujet de la constitution de l'atmosphère. On n'aura plus alors qu'une quadrature à effectuer.

b. *Emploi de la relation de Laplace (élimination de μ).*

Si, avec *P. S. Laplace* et la plupart des auteurs qui ont traité de la réfraction, nous adoptons la première des relations (1)

$$\mu^2 - 1 = 2c\delta$$

il conviendra d'introduire en même temps la densité relative

$$x = \frac{\delta}{\delta_0},$$

et la hauteur relative

$$s = \frac{h}{a+h} = \frac{r-a}{r},$$

d'où

$$\frac{a}{r} = (1-s).$$

Enfin on définira une grandeur α , appelée *constante de la réfraction*⁴⁶⁾, par l'équation

$$(42) \quad \alpha = \frac{c\delta_0}{1+2c\delta_0} = \frac{\mu_0^2 - 1}{2\mu_0^2}.$$

Si l'on introduit x au lieu de μ , on aura

$$\mu^2 - 1 = 2c\delta_0 x, \quad \mu_0^2 - 1 = 2c\delta_0, \quad \mu^2 - 1 = (\mu_0^2 - 1)x,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(\mu_0^2 - 1)dx}{2[1 + (\mu_0^2 - 1)x]}.$$

Par suite l'équation (41) devient

$$R = \int_{x_H}^1 \frac{\mu_0 a \sin z \frac{\mu_0^2 - 1}{2} dx}{[1 + (\mu_0^2 - 1)x] \sqrt{[1 + (\mu_0^2 - 1)x]r^2 - \mu_0^2 a^2 \sin^2 z}}.$$

L'égalité (42) écrite sous l'une des deux formes

$$\mu_0^2 - 1 = 2\alpha\mu_0^2 \quad \text{ou} \quad 1 = \mu_0^2(1 - 2\alpha)$$

46) Cette grandeur n'est une constante que pour des conditions données de température et de pression au lieu d'observation. Si l'on nomme α_0 la valeur de α à 0° et 760^{mm}, t la température en degrés centigrades, B la hauteur de la colonne barométrique en millimètres, on pourra prendre, comme valeur très approchée de α ,

$$\alpha_{tB} = \alpha_0 \frac{B}{760} \times \frac{1}{1 + mt}.$$

permet de rendre la dernière expression de R homogène par rapport à μ_0 , et par suite d'y supprimer μ_0^3 comme facteur commun au numérateur et au dénominateur. Il vient ainsi

$$(43) \quad R = \alpha \int_{x_H}^1 \frac{(1-s) \cdot \sin z \cdot dx}{[1 - 2\alpha(1-x)] \sqrt{\cos^2 z - 2\alpha(1-x) + (2s - s^2) \sin^2 z}}.$$

Cette équation, où x_H est la densité relative à la limite supérieure de l'atmosphère, sera pour nous la forme définitive de l'intégrale de la réfraction.

La constante de la réfraction α a pour valeur, d'après *F. W. Bessel*,
0,000 293 2 (à 0° et 760 mm).

Le facteur $1 - 2\alpha(1-x)$ varie par suite entre 0,9994 et 1,0000. Ce changement est si faible que l'on peut sans inconvénient remplacer ce facteur variable par sa valeur moyenne $1 - \alpha$. L'écart qui en résulte ne dépasse pas 0,0003 de la valeur de R , c'est-à-dire 0'',05 à 70° de distance zénithale et 0'',6 à l'horizon. De même on peut dans l'expression (43) négliger le terme en s^2 sous le radical, mais il n'est pas légitime de remplacer au numérateur le facteur $1 - s$ par l'unité, car il en résulte pour $z = 70^\circ$ une erreur de 0'',2, ce qui n'est pas toujours négligeable⁴⁷). Cette simplification peu satisfaisante a été admise dans les théories de la réfraction de *F. W. Bessel* et de *H. Gylden*.

8. Formules de réfraction d'après les hypothèses de Cassini et de Mayer. Formule de Bradley et de Simpson. Si l'on suppose, avec *G. D. Cassini*, la densité x la même à toutes les hauteurs, l'intégrale (43) s'évanouit totalement. Le trajet du rayon à travers l'atmosphère terrestre devient rectiligne, et il suffit d'évaluer la déviation qui se produit à la limite de l'atmosphère.

Soient, en ce point, i et i_1 les angles d'incidence et de réfraction, μ l'indice de réfraction. La loi de Snell et de Descartes donne

$$(44) \quad \sin i = \mu \sin i_1.$$

La proportion des sinus, dans le triangle qui a pour sommet le centre de la Terre et pour base le trajet rectiligne du rayon dans l'atmosphère, s'écrit

$$r \sin i_1 = a \sin z$$

ou, si l'on prend a comme unité de longueur et si l'on appelle H la hauteur de l'atmosphère supposée homogène,

$$(45) \quad (1 + H) \sin i_1 = \sin z.$$

47) Voir à ce sujet *A. Bemporad*, *Memorie Soc. spettroscopisti italiani* (Catane) 34 (1905), p. 239 et suiv.; *R. Radau*, *Ann. Observ. Paris, Mémoires* 16 (1882), mém. n° 8, p. 5.

De plus, comme la réfraction totale R satisfait à la relation

$$i_1 = i - R,$$

l'équation (44) peut s'écrire

$$(45a) \quad \sin(i_1 + R) = \mu \sin i_1.$$

Si l'on égale les valeurs de $\operatorname{tg} i_1$ données par les équations (45) et (45a) on trouve

$$\frac{\sin z}{\sqrt{(1+H)^2 - \sin^2 z}} = \frac{\sin R}{\mu - \cos R}$$

ce que l'on peut considérer comme une équation du second degré en $\operatorname{tg} \frac{R}{2}$. Laisant de côté la plus grande racine, qui évidemment ne peut convenir, on trouvera pour la formule de réfraction dans l'hypothèse de *G. D. Cassini*⁴⁸⁾

$$(46) \quad \operatorname{tg} \frac{R}{2} = \frac{1}{(1+\mu) \sin z} \{ \sqrt{(1+H)^2 - \sin^2 z} - \sqrt{(1+H)^2 - \mu^2 \sin^2 z} \}.$$

On peut considérer ici la hauteur H comme connue par l'observation du baromètre et égale à la hauteur réduite [n° 3, b]. Il reste seulement à déterminer μ par une réfraction observée. Si, pour cet objet, on prend avec *F. W. Bessel*

$$\text{réfraction à } 70^\circ = 164'',50$$

on en déduira

$$\mu = 1,000\,293\,01$$

valeur qui s'écarte très peu de celle de *F. W. Bessel* $\mu = 1,000\,293\,15$. Les réfractions calculées d'après la formule (46) s'accordent très bien jusqu'à 70° avec celles de *F. W. Bessel*, comme on peut s'en assurer par le tableau du n° 12. C'est seulement vers $z = 85^\circ$ et au delà que les écarts entre les valeurs calculées et les valeurs observées deviennent très forts.

Supposons maintenant avec *T. Mayer* [formule (13)] que la densité dépende linéairement de la hauteur. Si l'on introduit cette hypothèse dans la formule (43), si l'on y remplace le facteur $1 - 2\alpha(1-x)$ par sa valeur moyenne $1 - \alpha$, si l'on divise le numérateur et le dénominateur par $1 - s$, et si l'on remplace $(1-s)^{-2}$ par $1 + \frac{2h}{a}$, l'intégration faite entre les limites 0 et H donne la formule de réfraction de Mayer⁴⁹⁾:

$$(47) \quad R = \frac{\alpha}{b} \sin z (\sqrt{\cos^2 z + 2b} - \cos z),$$

48) Voir à ce sujet *G. D. Cassini*²⁰⁾. Le procédé de calcul de *G. D. Cassini* est un peu plus long. La formule (46) a été établie par *A. Bemporad* [Memorie Soc. spettroscopisti italiani (Catane) 34 (1905), p. 191].

49) *T. Mayer*, Tabulae motuum solis et lunae novae et correctae, quibus accedit methodus longitudinum promotae (mém. posth.), Londres 1770, p. XXXII (table de réfraction); id. p. 62, 115 (explications correspondantes); id. p. 64, 120

où⁵⁰⁾

$$b = \left(\frac{H}{a} - \alpha\right)(1 - \alpha).$$

D'après les explications données plus haut [n° 5, b, *Tobie Mayer*, p. 24], c'est la valeur

$$H = 2l = 16^{\text{km}}$$

qui répond le mieux aux conditions physiques. On ne dispose donc plus que de la constante α . Si l'on emploie, pour la déterminer, la valeur de la réfraction pour $z = 70^\circ$, d'après *F. W. Bessel*, on obtient

$$\mu_0 = (1 - 2\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1,000\ 293\ 12$$

la valeur admise par *F. W. Bessel* étant 1,000 293 15. Les réfractions calculées par la formule (47) s'accordent alors presque complètement jusqu'à 85° [voir le tableau du n° 12, p. 50] avec les réfractions observées par *F. W. Bessel*.

En partant de la formule (47) de Mayer on retrouve, par des transformations et des approximations faciles, deux formules souvent employées au 18^{ième} siècle et jusque dans les premières années du 19^{ième} siècle: l'une, due à *J. Bradley*⁵¹⁾, peut s'écrire

$$(48) \quad R = \alpha \operatorname{tg}(z - mR).$$

La seconde, due à *T. Simpson*⁵²⁾, est de la forme

$$(49) \quad R = \frac{1}{n} [z - \operatorname{arc} \sin(k \sin z)];$$

m , n , k sont des constantes empiriques. Ces formules, de même que celle de *T. Mayer*, représentent la réfraction d'une manière tout à fait acceptable en astronomie pratique.

9. Théorème d'Oriani (ou de Laplace). *Jusqu'à 75° environ de distance zénithale l'hypothèse faite sur la constitution de l'atmosphère est*

(formule de réfraction). Voir aussi *C. Bruhns*, *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Leipzig 1861, p. 58/60; *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie*²⁰⁾ 2, p. 270.

50) Comme $\frac{H}{a} = \frac{16}{6400} = 0,0025$ tandis que $\alpha = 0,0003$ on a pour b la valeur approchée

$$b = \frac{H}{a} - \alpha.$$

51) *Astronomical observations made at the astronomical observatory at Greenwich 1*, Londres 1776, introduction p. [15], explications correspondantes p. V; *Astronomical observations made at the observatory of Greenwich from 1750—1762*, vol. 1, Oxford 1798, p. 35; réimp. dans *C. Bruhns*, *Astron. Strahlenbrechung*⁴⁴⁾, p. 56. Consulter aussi *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie*²⁰⁾ 2, p. 269.

52) *Mathematical dissertations on physical and analytical subjects*, Londres 1743. Voir aussi *C. Bruhns*, *Astron. Strahlenbrechung*⁴⁴⁾, p. 90; *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie*²⁰⁾ 2, p. 268.

pratiquement sans influence sur la réfraction. On peut, en effet, déduire de la formule (43) un développement procédant suivant les puissances de $\operatorname{tg} z$ et ce développement, dans toute hypothèse, reste si convergent jusqu'à $z = 75^\circ$ que les deux premiers termes suffisent déjà pour représenter les réfractions théoriques.

Le développement en question s'obtient en remplaçant dans le second membre de la formule (43) le facteur $1 - 2\alpha(1-x)$ par sa valeur moyenne $1 - \alpha$, et introduisant sous le radical la petite quantité

$$\eta = \frac{-2\alpha(1-x) + 2s \sin^2 z}{\cos^2 z}.$$

Si de plus on suppose la densité nulle à la limite supérieure de l'atmosphère, la formule (43) devient

$$R = \frac{\alpha \operatorname{tg} z}{1 - \alpha} \int_0^1 (1-s)(1+\eta)^{-\frac{1}{2}} dx;$$

d'où, en conservant seulement les termes du premier ordre en s et α ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\alpha \operatorname{tg} z}{1 - \alpha} \int_0^1 [1 + \alpha(1-x) \operatorname{sec}^2 z - s \operatorname{sec}^2 z] dx \\ &= \frac{\alpha \operatorname{tg} z}{1 - \alpha} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2} \operatorname{sec}^2 z - \operatorname{sec}^2 z \int_0^1 s \cdot dx \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on a égard aux définitions de s et de x , il est clair que l'intégration par parties, faite entre les deux limites de l'atmosphère, donne

$$\int_0^1 s dx = \int_0^{\frac{H}{a+H}} x ds.$$

D'autre part l'équation d'équilibre (23) donne

$$x ds = -\frac{l_0}{a} \frac{dp}{p_0}$$

et par suite

$$\int_0^{\frac{H}{a+H}} x ds = \frac{l_0}{a} \int_0^{p_0} \frac{dp}{p_0} = \frac{l_0}{a}.$$

D'où, en remplaçant, dans R , $\operatorname{sec}^2 z$ par $1 + \operatorname{tg}^2 z$,

$$(50) \quad R = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{l_0}{a} \right) \operatorname{tg} z - \left(\frac{l_0}{a} - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg}^3 z \right\}.$$

D'après les formules (6a), (7), (8), (22) et (42), les coefficients de $\operatorname{tg} z$ et de $\operatorname{tg}^3 z$ dépendent seulement de la situation géographique du lieu d'observation, de la pression et de la température qui s'y

10. Développement de l'intégrale de la réfraction dans la théorie de Bessel. 45

rencontrent. Si l'on adopte avec *F. W. Bessel*⁵³⁾ les valeurs normales

$$l = 7,9939 \text{ km}, \quad a = 6377,36 \text{ km}, \quad \log \alpha = 6,46483 - 10,$$

la formule (50) donne⁵⁴⁾

$$R = [1,78097] \operatorname{tang} z - [8,82512 - 10] \operatorname{tang}^3 z.$$

Si dans cette formule on remplace z successivement par 45° , 60° , 70° , 75° , on obtient le tableau suivant:

z	45°	60°	70°	75° ,
1 ^{er} terme	60'',39	104'',60	165'',92	225'',38,
2 ^e terme	- 0'',07	- 0'',35	- 1'',39	- 3'',48,
R	60'',32	104'',25	164'',53	221'',90,
Réfraction (<i>Bessel</i>)	60'',32	104'',23	164'',50	221'',90.

On voit que la réfraction est parfaitement représentée jusqu'à 75° .

10. Développement de l'intégrale de la réfraction dans la théorie de Bessel. Écrivant, conformément à l'hypothèse de *F. W. Bessel* [formule (29)],

$$x = e^{-\beta z},$$

adoptant les simplifications indiquées au n° 7, p. 37, et posant pour abrégé,

$$Z^2 = \frac{1}{2} \cotg^2 z, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{\sin^2 z}, \quad S = \frac{H}{a + H},$$

on tire de l'équation (43)

$$R = \frac{\alpha \beta}{(1 - \alpha) \sqrt{2}} \int_0^S \frac{e^{-\beta z} dz}{\sqrt{Z^2 + s - \varepsilon(1 - e^{-\beta z})}};$$

S , hauteur relative de l'atmosphère, a pour valeur, d'après *F. W. Bessel* [voir n° 5c, p. 31] 0,00445. La valeur de H serait $28^{\text{km}},5$.

Si l'on introduit la nouvelle variable

$$u = s - \varepsilon(1 - e^{-\beta z})$$

et si l'on applique une formule de *J. L. Lagrange* sur le développement de certaines fonctions implicites⁵⁵⁾ on obtient

$$(51) \quad R = \frac{\alpha \beta}{(1 - \alpha) \sqrt{2}} \int_0^U \frac{du}{\sqrt{Z^2 + u}} \left\{ e^{-\beta u} + \varepsilon \beta (2e^{-2\beta u} - e^{-\beta u}) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2 \beta^2}{1 \cdot 2} (3^2 e^{-3\beta u} - 2^2 \cdot 2e^{-2\beta u} + e^{-\beta u}) \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^3 \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (4^3 e^{-4\beta u} - 3^3 \cdot 3e^{-3\beta u} + 2^3 \cdot 3e^{-2\beta u} + e^{-\beta u}) + \dots \right\}.$$

53) *Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab a. 1750 usque ad a. 1850 computatae*, Königsberg 1830, p. LIX et p. 538/42.

54) Les nombres inscrits ici entre crochets sont les logarithmes décimaux et l'on doit les supposer remplacés par les nombres correspondants; ainsi $[N] = 10^N$.

55) Cf. *H. Resal*, *Traité élémentaire de mécanique céleste*, Paris 1865, p. 441; (2^e éd.) Paris 1884.

La limite supérieure U de l'intégrale est définie par l'équation

$$U = S - \varepsilon(1 - e^{-\beta S}).$$

F. W. Bessel prend comme limite supérieure l'infini, ce qui revient à admettre que l'intégrale prise entre $u = U$ et $u = +\infty$ est négligeable. Mais ce cas n'est pas réalisé, comme il est facile de s'en rendre compte par un calcul approché. On trouve en effet⁵⁶⁾

pour $z =$	45°	70°	80°	85°	90°	
	$\int_U^{+\infty} dR =$	2'',1	5'',5	10'',2	15'',3	20'',2.

On pourrait considérer ces compléments comme représentant une déviation initiale R_H à la limite supérieure de l'atmosphère. Mais la loi suivie n'est pratiquement la même que jusqu'à $z = 75^\circ$. Au-dessus de 80° les différences

$$\Delta R = R_H - \int_U^{+\infty} dR$$

ne sont plus tout à fait négligeables, et l'on trouve

pour $z =$	80°	85°	90°	
	$\Delta R =$	+ 0'',3	+ 1'',1	+ 2'',5

Quand, avec *F. W. Bessel*, on adopte, dans l'équation (51), $+\infty$ comme limite supérieure, toutes les intégrales du second membre prennent la forme

$$J_p = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p\beta u}}{\sqrt{Z^2 + u}} du,$$

où p désigne un nombre entier et positif.

Par la substitution

$$(51a) \quad \begin{aligned} p\beta(Z^2 + u) &= t^2, \\ \sqrt{p\beta}Z &= T, \end{aligned}$$

chacune de ces intégrales devient ce que l'on appelle une *fonction de Kramp*:

$$\psi(T) = e^{T^2} \int_T^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Ces fonctions, dont la considération s'impose dans le calcul des pro-

⁵⁶⁾ Voir à ce sujet: *A. Bemporad*, *Memorie Soc. spettroscopisti italiani* (Catane) 31 (1902), p. 278/81.

babilités, ont été réduites en tables par *Chr. Kramp*⁵⁷⁾ lui-même, par *F. W. Bessel*⁵⁸⁾ et, sous une forme plus étendue, par *R. Radau*⁵⁹⁾.

Si l'on pose avec *R. Radau*

$$\sqrt{p} e^{Tz} \int_T^{+\infty} e^{-t^2} dt = \psi_p,$$

formule où T dépend aussi de p d'après l'équation (51a), on obtient, comme expression définitive de la réfraction dans la théorie de *F. W. Bessel*

$$R = \frac{\alpha \sqrt{2\beta}}{1-\alpha} \{ e^{-\beta z} \psi_1 + \beta \varepsilon e^{-2\beta z} \psi_2 + \frac{3}{2} \beta^2 \varepsilon^2 e^{-3\beta z} \psi_3 + \dots \}.$$

Pour la réfraction horizontale ($z = 90^\circ$, $T = 0$) on en déduit d'après la relation connue

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

qui entraîne

$$\psi_p = \frac{1}{2} \sqrt{p\pi}$$

$$R_{90^\circ} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} e^{-\alpha\beta} \left\{ 1 + 2^{\frac{1}{2}} \alpha\beta e^{-\alpha\beta} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{1 \cdot 2} \alpha^2 \beta^2 e^{-2\alpha\beta} + \dots \right\}.$$

La première table de réfraction de *F. W. Bessel*⁶⁰⁾ a été calculée d'après la formule précédente, avec des valeurs des constantes déduites des observations de *J. Bradley*, savoir:

$$\alpha_0 = 57''{,}538, \quad \beta = 745{,}747 \quad (\text{à } 9^\circ{,}13 \text{ centigrades et } 751^{\text{mm}}{,}8).$$

Plus tard *F. W. Bessel* a trouvé, d'après ses propres observations et celles de *F. W. Argelander*, que les réfractions ainsi obtenues étaient trop petites jusqu'à 85° , trop grandes de 85° à 90° . Il a multiplié en conséquence les premières par le facteur 1,000328 et a simplement remplacé les dernières par les valeurs observées, c'est-à-dire empiriques. Les tables ainsi construites, sous le titre *Tabulae Regiomontanae*⁶¹⁾, sont demeurées généralement en usage jusqu'à ces derniers temps. Pour plus de brièveté, elles ne donnent pas les réfractions elles-mêmes, mais le quotient $k = \frac{R}{\text{tg } z}$, avec z pour argument.

Pour obtenir la réfraction relative à des valeurs quelconques de la température et de la pression au lieu d'observation, *F. W. Bessel*

57) Réfractions astronomiques et terrestres²⁵⁾, p. 207/10.

58) *Fundamenta astron.*²⁶⁾, p. 36. Voir aussi *C. Bruhns*, *Astron. Strahlenbrechung*⁶¹⁾, p. 112.

59) *Ann. Observ. Paris, Mémoires* 18 (1885), mém. n° 2, p. 11.

60) *Fundamenta astron.*²⁶⁾, p. 45/52.

a développé des formules différentielles assez compliquées; mais il a réussi à les adapter au calcul logarithmique et à les réduire en tables supplémentaires.

De même que la théorie de la réfraction de *F. W. Bessel*, celles de *P. S. Laplace*, de *J. Ivory*, de *E. von Oppolzer* se réduisent en tables de la manière la plus avantageuse par l'introduction des fonctions ψ . Dans d'autres théories, comme celles de *J. K. Ed. Schmidt*, de *C. M. von Bauernfeind*, de *H. Gylgén*, on est amené à des intégrales plus simples, susceptibles d'être remplacées par des fonctions rationnelles ou exponentielles, mais on évite difficilement des développements en série incommodes, où il faut considérer un grand nombre de termes. Comme type de ce genre de développement, nous allons indiquer dans le paragraphe suivant les principaux traits de la théorie de *J. K. Ed. Schmidt*.

11. Développement de l'intégrale de la réfraction d'après la théorie de Schmidt⁶¹. Si l'on introduit dans les équations (5) et (6) l'hypothèse de *J. K. Ed. Schmidt* [voir n° 5g], on obtient pour la densité relative x définie par la formule (22a), l'équation différentielle

$$dx \left(1 - \frac{h}{H}\right) - x \frac{dh}{H} = - \frac{a^2}{l_0} \frac{x \cdot dh}{(a+h)^2}.$$

Il suffit de diviser les deux membres par $x \left(1 - \frac{h}{H}\right)$ pour séparer les variables. Si dans le dénominateur du second membre on néglige $\frac{h^2}{a^2}$ en comparaison de l'unité et si l'on décompose en fractions simples on obtient

$$(52) \quad \frac{dx}{x} = -k \frac{d\frac{h}{H}}{1 - \frac{h}{H}} - (k+1) \frac{d\frac{2h}{a}}{1 + \frac{2h}{a}},$$

où l'on a posé, pour abrégé,

$$(53) \quad k = \frac{\alpha H}{l_0(a+2H)} - 1.$$

L'intégration de l'équation (52) donne, si l'on remarque que x se réduit à 1 pour $h=0$,

$$(54) \quad x = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^k \left(1 + \frac{2h}{a}\right)^{-k-1};$$

J. K. Ed. Schmidt prend l'intégrale de la réfraction (43) sous la forme

$$(55) \quad R = \frac{\alpha \sin z}{1 - \alpha} \int_0^1 \frac{(1-s) dx}{\sqrt{1 - 2\alpha(1-x) - (1-s)^2 \sin^2 z}}$$

61) Voir note 28.

en sorte que le terme $s^2 \sin^2 z$ n'est pas négligé sous le radical, non plus que le facteur $1 - s$ au numérateur [voir n° 7, p. 41]. Comme on adopte pour la hauteur de l'atmosphère $49^{km},1$ on a pour valeur extrême de s

$$S = \frac{H}{a + H} = 0,00763.$$

A la place de s , *J. K. Ed. Schmidt* introduit la nouvelle variable u définie par la relation

$$(56) \quad (1 - s)^2 = 1 - \beta(1 - u),$$

où β est une constante choisie de telle sorte que u se réduise à zéro à la limite de l'atmosphère, c'est-à-dire pour $s = S$. Par suite

$$(56a) \quad \beta = 2S - S^2 = \frac{2H}{a} - \frac{3H^2}{a^2} \pm \dots = 0,01525.$$

De l'équation (56) on tire

$$(57) \quad s = 1 - \sqrt{1 - \beta(1 - u)}.$$

D'où, en ayant égard à l'équation (17),

$$(58) \quad h = \frac{as}{1-s} = a \left\{ [1 - \beta(1 - u)]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\} \\ = a \left\{ \frac{1}{2}\beta(1 - u) + \frac{3}{8}\beta^2(1 - u)^2 + \dots \right\}.$$

Si dans l'équation (55) on remplace s par la valeur (57) et si l'on pose, pour abréger,

$$K = \frac{\beta \sin^2 z}{\cos^2 z + \beta \sin^2 z}, \quad L = \frac{2\alpha}{\cos^2 z + \beta \sin^2 z},$$

on trouvera

$$(59) \quad R = \frac{\alpha}{1-a} \sqrt{\frac{K}{\beta}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \beta(1 - u)}}{\sqrt{1 - Ku - L(1 - x)}} dx.$$

Avec les valeurs admises pour l et H , la formule (53) donne pour k une valeur voisine de 5. Mais d'après la formule (22) du n° 5, p. 24, l_0 et par suite k dépendent de la température t_0 au lieu d'observation. *J. K. Ed. Schmidt* adopte pour température normale, dans sa théorie, le chiffre $t_0 = -2^0,2$ pour lequel k se réduit sensiblement à 5. Les équations (54) et (58) donnent alors

$$x = \left[1 - \frac{\alpha\beta}{2H}(1-u) - \frac{3\alpha\beta^2}{8H}(1-u)^2 \right]^5 \left[1 + \beta(1-u) + \frac{3}{4}\beta^2(1-u)^2 + \dots \right]^{-6}.$$

Si l'on s'arrête aux termes du premier ordre par rapport à β , on tire de l'équation (56a)

$$\frac{\alpha\beta}{2H} = 1 - \frac{3}{4}\beta + \dots$$

et par suite

$$x = \left[u + \frac{3}{4}\beta u(1-u) \right]^5 \left[1 + \beta(1-u) \right]^{-6} = u^5 \left[1 - \frac{3}{4}\beta(1-u) + \dots \right].$$

On peut porter cette valeur de x dans l'équation (59), développer le dénominateur suivant les puissances de L , le numérateur suivant les puissances de u et de $1-u$. On obtient ainsi une longue série de termes de la forme

$$C_{pqrs} \int_0^1 \frac{(1-u)^p (1-u^5)^q u^s du}{(1-Ku)^{r+\frac{1}{2}}},$$

où p, q, r, s désignent des nombres entiers. Ces intégrales s'obtiennent aisément par des procédés connus, mais le développement complet est très laborieux à effectuer, en raison du nombre des intégrations.

Ce défaut mis à part, la théorie de *J. K. Ed. Schmidt* peut être citée comme bien fondée au point de vue physique, et rigoureusement développée au point de vue analytique. Le procédé adopté par *J. K. Ed. Schmidt* pour corriger la réfraction en ayant égard à la température t et à la pression barométrique B est aussi digne d'attention en ce qu'il permet d'avoir égard aux termes du second ordre en dt et dB . Le procédé de *F. W. Bessel* suppose que la réfraction varie linéairement soit avec t , soit avec B .

12. Tableau comparatif des valeurs de la réfraction calculées d'après les théories les plus importantes. On trouvera dans le tableau suivant une série de valeurs de la réfraction calculées pour diverses valeurs de la distance zénithale d'après les formules qui ont obtenu, à diverses époques, le plus de crédit. Ces nombres, à l'exception de ceux des deux premières colonnes, sont empruntés au travail déjà souvent cité de *R. Radau*:

z	Valeurs de la réfraction pour 0° et 760 mm d'après:							
	Cassini	Mayer	Laplace	Bessel (<i>T. R.</i> ⁴⁷)	Ivory	Schmidt	Gyldén	Kovalski
45°	60'',3	60,3	60,5	60,3	60,0	60,5	60,3	60,3
70°	164,5	164,5	165,1	164,5	165,2	165,0	164,6	164,5
80°	330,8	331,0	332,3	331,1	332,9	332,3	331,4	331,3
85°	607,9	611,8	617,7	{ 615,8 (théorique) 613,9 (observée)	619,3	617,9	616,4	616,4
90°	1287,0	1816,4	2106,0	(2241,3)	2200,6	2207,8	2210,2	(2095,6)

Beaucoup d'auteurs ont donné des tables auxiliaires pour le calcul de la réfraction. Les plus usitées sont peut-être celles de *F. W. Bessel* (p. 47); les plus complètes et les plus exactes sont les nouvelles tables de *R. Radau*. Une disposition très commode est celle des tables récentes dues à *L. de Ball*⁶²).

62) Voir à ce sujet les renseignements bibliographiques placés à la fin du présent volume sous le titre: Tables de réfraction.

13. Réfraction différentielle en distance et en angle de position.

Dans beaucoup de travaux astronomiques, on ne détermine pas directement les coordonnées absolues des astres, mais on les rapporte à des étoiles connues, dont les positions sont empruntées à des catalogues fondés eux-mêmes sur des observations méridiennes.

La comparaison se fait en pratique de trois manières différentes:

1°) Ou bien on mesure, dans le ciel, la distance angulaire de l'astre inconnu Σ à l'astre connu Γ , ainsi que l'angle de position de la ligne $\Gamma\Sigma$.

2°) Ou bien on détermine, avec le micromètre et la pendule les intervalles qui séparent les deux astres, dans le sens des ascensions droites et dans le sens des déclinaisons.

3°) Ou bien on a recours à la photographie et l'on évalue les coordonnées rectangulaires de l'image de l'astre Σ par rapport à deux axes ayant pour origine l'image de l'astre Γ et dont l'un (l'axe des y) coïncide approximativement avec la tangente au cercle horaire de Γ , dans la direction du pôle Nord.

Dans la pratique, l'origine des axes n'est pas l'astre Γ , mais un point conventionnel, appelé *centre de plaque*, et que nous désignerons aussi par la lettre Γ . Si les images d'un certain nombre d'étoiles connues figurent sur la plaque, la mesure des coordonnées rectangulaires de ces images permettra de déterminer les coordonnées célestes du centre de plaque et de rectifier l'orientation des axes avec l'exactitude nécessaire.

Quel que soit le procédé, les mesures de distance angulaire, d'angle de position, d'intervalles de passage, de coordonnées rectangulaires sont affectées de diverses causes d'inexactitude: erreurs d'échelle, d'orientation, précession, nutation, aberration, réfraction différentielle. En prenant des précautions assez simples, on maintient ces erreurs dans des limites assez étroites pour que l'on puisse considérer isolément l'effet de chacune d'elles. Quand elles ont été corrigées, on obtient pour l'astre Σ ce qu'on appelle des *coordonnées relatives normales*, et les formules de la trigonométrie sphérique, auxquelles on peut substituer parfois avec avantage des développements en série, permettent de déduire de ces coordonnées relatives les différences d'ascension droite et de déclinaison des points Γ et Σ .

Nous rechercherons d'abord en suivant la marche indiquée par *J. C. Kapteyn*⁶³⁾ l'effet de la réfraction sur la distance et sur l'angle de

63) * Corrections de réfraction et d'aberration pour les coordonnées rectangulaires mesurées sur les clichés photographiques [Bulletin du comité inter-

position. Soient, sur la sphère céleste (fig. 3) P le pôle boréal, Z le zénith, Γ l'étoile de comparaison (ou le centre de plaque), Σ l'astre rapporté à Γ . Sous l'influence de la réfraction Γ vient occuper un point G du cercle $Z\Gamma$, Σ vient occuper un point S du cercle $Z\Sigma$. L'angle de position passe de la valeur $P\Gamma\Sigma = \pi$ à la valeur $PGS = p$. La distance passe de la valeur $\Gamma\Sigma = \sigma$ à la valeur $GS = s$.

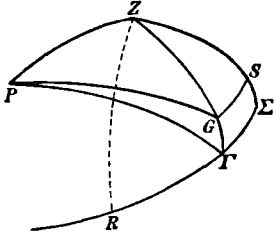


Fig. 3.

Nous poserons

$$Z\Gamma = \xi, \quad Z\Sigma = \zeta;$$

nous admettrons que la réfraction, à la distance ξ du zénith, a pour valeur $k \operatorname{tg} \xi$; k est le produit de trois facteurs dont le premier varie, mais dans une faible mesure, avec la distance zénithale, le second dépend de la température et le troisième de la pression atmosphérique. Si l'on exprime les arcs en partie du rayon, k est à peu près $\frac{1}{3000}$.

Dans une première approximation, qui suffira le plus souvent, on pourra traiter k comme une constante et en négliger le carré. Nous aurons alors

$$(60) \quad \Gamma G = k \operatorname{tg} \xi, \quad \Sigma S = k \operatorname{tg} \zeta.$$

Lorsque, dans un triangle sphérique, on fait varier b et c en laissant A invariable, on a, comme on sait

$$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc.$$

Appliquons cette formule au triangle $Z\Gamma\Sigma$, en posant

$$Z\Gamma\Sigma = \Gamma, \quad Z\Sigma\Gamma = \Sigma.$$

Il vient

$$(61) \quad d\sigma = s - \sigma = -k(\cos \Sigma \cdot \operatorname{tg} \zeta' + \cos \Gamma \cdot \operatorname{tg} \xi).$$

Une autre formule différentielle de la trigonométrie sphérique donne, dans les mêmes conditions,

$$dB = \frac{\sin C db - \sin B \cos a \cdot dc}{\sin a}$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel,

$$(62) \quad d\Gamma = k \frac{\sin \Gamma \cos \sigma \operatorname{tg} \xi - \sin \Sigma \operatorname{tg} \zeta'}{\sin \sigma}.$$

Posons maintenant

$$P\Gamma Z = \omega, \quad P G Z = \theta;$$

national permanent pour l'exécution photographique de la carte du ciel 3 (1902), p. 54].*

si, dans un triangle sphérique, on fait varier c en laissant invariables a et B , on a

$$dA = -\cotg b \cdot \sin A \cdot dc.$$

Cette formule, appliquée au triangle $P\Gamma Z$, donne

$$(63) \quad d\omega = o - \omega = k \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \omega \cdot \operatorname{tg} \xi.$$

On peut écrire enfin

$$(64) \quad d\pi = p - \pi = d\Gamma + d\omega.$$

Les termes négligés, dans toutes ces formules, sont de l'ordre de k^2 .

Nous allons maintenant introduire, à la place des lettres ξ' et Σ , des quantités qui se rapportent au point Γ . Soit ZR un arc de grand cercle mené par Z perpendiculairement au grand cercle $\Sigma\Gamma$. Posons

$$\Gamma R = g.$$

La considération des triangles rectangles $Z\Gamma R$, $Z\Sigma R$ donne

$$(65) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} g = -\operatorname{tang} \xi \cos \Gamma, \\ \operatorname{tang} (g + \sigma) = \operatorname{tg} \xi' \cos \Sigma. \end{cases}$$

D'où, par soustraction,

$$(66) \quad \cos \Sigma \operatorname{tg} \xi' + \cos \Gamma \operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} (g + \sigma) - \operatorname{tg} g = \operatorname{tg} \sigma \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \cos^2 \Gamma}{1 + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \xi \cos \Gamma}.$$

Les mêmes triangles rectangles donnent

$$\sin \Sigma \cdot \operatorname{tg} \xi' = \frac{\operatorname{tg} \widehat{ZR}}{\cos (g + \sigma)},$$

$$\sin \Gamma \operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \widehat{ZR}}{\cos g}.$$

D'où, en éliminant $\operatorname{tg} \cdot \widehat{ZR}$,

$$\sin \Sigma \operatorname{tg} \xi' = \frac{\cos g \sin \Gamma \operatorname{tg} \xi}{\cos (g + \sigma)}.$$

La valeur (62) de $d\Gamma$ devient par suite

$$d\Gamma = \frac{k \sin \Gamma \operatorname{tg} \xi}{\sin \sigma} \left[\cos \sigma - \frac{\cos g}{\cos (g + \sigma)} \right] = -k \sin \Gamma \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} (g + \sigma).$$

Dans cette formule nous pouvons éliminer g en faisant usage de la première des formules (65). Il vient

$$(67) \quad d\Gamma = k \sin \Gamma \operatorname{tg} \xi \frac{\cos \Gamma \operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \xi \cos \Gamma}.$$

Portons l'expression (66) dans l'équation (61), les expressions (63) et (67) dans l'équation (64), il viendra

$$(68) \quad \begin{cases} d\sigma = -k \operatorname{tg} \sigma \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \cos^2 \Gamma}{1 + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \xi \cos \Gamma}, \\ d\pi = k \left[\sin \Gamma \operatorname{tg} \xi \frac{\cos \Gamma \operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \xi \cos \Gamma} + \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \omega \cdot \operatorname{tg} \xi \right]. \end{cases}$$

Ces formules répondent à la première question que nous nous étions posée. Si l'on veut s'en servir pour la réduction des observations équatoriales, on déduira δ , ω , ξ des lectures faites sur les cercles de l'instrument, en s'aidant de diagrammes faciles à construire pour chaque observatoire.

Comme valeurs provisoires de Γ et σ on adoptera celles qui sont fournies par le micromètre et le cercle de position. L'erreur qui en résulte est, de même que celle qui est due à l'emploi des formules différentielles, de l'ordre de k^2 .

Il pourra être à propos de recourir à une seconde approximation pour les grandes distances zénithales, mais on évitera ordinairement cette nécessité en prenant pour point de départ les valeurs de δ , ω , ξ qui répondent au point milieu de l'arc $\Gamma\Sigma$.

*F. W. Bessel*⁶⁴⁾ a donné des formules à peu près équivalentes, dont l'application est rendue facile, pour la latitude de Paris, par des tables dues à *G. Bigourdan*⁶⁵⁾.*

14. *Réfraction différentielle en coordonnées rectangulaires.

Nous allons maintenant supposer que l'on a mesuré sur une plaque photographique les coordonnées x , y de l'étoile Σ par rapport à deux axes rectangulaires ayant pour origine le point Γ . Nous appellerons ξ , η les mêmes coordonnées corrigées de la réfraction. On supposera que la direction $\Gamma\eta$ est celle du pôle Nord, la direction $\Gamma\xi$ celle des ascensions droites croissantes.

On a dû, avant d'effectuer la pose, amener le point Γ à se trouver approximativement sur l'axe de symétrie de l'objectif et rendre la plaque à peu près perpendiculaire à cet axe. Dans ces conditions, la distance focale de la lunette étant prise pour unité de longueur, la distance $\Gamma\Sigma$ a pour valeur sur la plaque $\text{tg } \sigma$ et les angles de position relatifs au point Γ ne sont pas altérés. On aura par suite, en conservant les notations du paragraphe précédent,

$$(69) \quad \begin{cases} \xi = \text{tg } \sigma \sin \pi = \text{tg } \sigma \sin (\Gamma + \omega), \\ \eta = \text{tg } \sigma \cos \pi = \text{tg } \sigma \cos (\Gamma + \omega). \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(70) \quad \begin{cases} \text{tg}^2 \sigma = \frac{\xi^2}{\eta^2} + 1, \\ \text{tg } \pi = \frac{\xi}{\eta}; \end{cases}$$

64) *Astronomische Untersuchungen 2, Königsberg 1842, p. 165.*

65) *Ann. Observ. Paris, Observations 1885, éd. 1893; Instructions sur l'usage de l'équatorial et la réduction des observations, Paris 1893.*

$$(71) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \sigma \sin \Gamma = \xi \cos \omega - \eta \sin \omega, \\ \operatorname{tg} \sigma \cos \Gamma = \xi \sin \omega + \eta \cos \omega. \end{cases}$$

Posons encore

$$(72) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} p = \cos \omega \operatorname{tg} \xi, \\ \operatorname{tg} q = \sin \omega \operatorname{tg} \xi. \end{cases}$$

Les formules (68) deviennent

$$(73) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \sigma \cdot d\sigma = -k \frac{\xi^2 + \eta^2 + (\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)^2}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p}, \\ \operatorname{tg}^2 \sigma \cdot d\pi = k \left[\frac{(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q) - (\xi^2 + \eta^2)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q)}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p} \right. \\ \left. + (\xi^2 + \eta^2) \cdot \operatorname{tg} q \cdot \operatorname{tg} \delta \right]. \end{cases}$$

D'autre part la différentiation des formules (69) donne

$$(74) \quad \begin{cases} d\xi = \eta d\pi + \xi \cotg \sigma (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma) d\sigma, \\ d\eta = -\xi d\pi + \eta \cotg \sigma (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma) d\sigma. \end{cases}$$

Dans les seconds membres des équations (74) introduisons pour $d\pi$ et $d\sigma$ les valeurs (73) et pour $\operatorname{tg} \sigma$ la valeur (70). Il vient

$$(75) \quad \begin{cases} d\xi = -k \frac{\xi(1 + \xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \times \frac{\xi^2 + \eta^2 + (\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)^2}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p} \\ \quad + \frac{k\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left[\frac{(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q) - (\xi^2 + \eta^2)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q)}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p} \right. \\ \quad \left. + (\xi^2 + \eta^2) \operatorname{tg} q \cdot \operatorname{tg} \delta \right], \\ d\eta = -k \frac{\eta(1 + \xi^2 + \eta^2)}{\xi^2 + \eta^2} \times \frac{\xi^2 + \eta^2 + (\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)^2}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p} \\ \quad - \frac{k\xi}{\xi^2 + \eta^2} \left[\frac{(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q) - (\xi^2 + \eta^2)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q)}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p} \right. \\ \quad \left. + (\xi^2 + \eta^2) \operatorname{tg} q \cdot \operatorname{tg} \delta \right]. \end{cases}$$

Il convient que les seconds membres de ces formules, qui s'annulent pour $\xi = 0$, $\eta = 0$, soient développés suivant les puissances entières et croissantes de ξ et de η . On peut douter, à première vue, qu'un tel développement soit possible, puisque le quotient

$$\frac{(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)^2}{\xi^2 + \eta^2},$$

par exemple, n'a pas de valeur déterminée pour $\xi = 0$, $\eta = 0$. Mais si l'on considère l'ensemble des termes dans le second membre de l'une des équations (75), on voit sans peine que le diviseur $\xi^2 + \eta^2$ n'y figure qu'en apparence. On a en effet identiquement

$$\begin{aligned} \xi(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)^2 - \eta(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q) \\ = (\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi^2 + \eta^2) \operatorname{tg} q \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \eta(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)^2 + \xi(\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi \operatorname{tg} p - \eta \operatorname{tg} q) \\ = (\xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p)(\xi^2 + \eta^2) \operatorname{tg} p. \end{aligned}$$

Il suffit dès lors de développer

$$\frac{1}{1 + \xi \operatorname{tg} q + \eta \operatorname{tg} p}$$

par la formule du binôme pour obtenir $d\xi$ et $d\eta$ sous la forme demandée. Si l'on pose, en s'arrêtant aux termes du second ordre en ξ , η ,

$$(76) \quad \begin{cases} d\xi = x - \xi = h\xi + l\eta + m\xi^2 + n\xi\eta + o\eta^2 + \dots, \\ d\eta = y - \eta = H\xi + L\eta + M\xi^2 + N\xi\eta + O\eta^2 + \dots, \end{cases}$$

on trouvera sans peine

$$(77) \quad \begin{cases} h = -k \operatorname{séc}^2 q & H = -k \operatorname{tg} q (\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} \delta) \\ l = -k \operatorname{tg} q (\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} \delta) & L = -k \operatorname{séc}^2 p \\ m = k \operatorname{tg} q \operatorname{séc}^2 q & M = k \operatorname{tg} p \operatorname{séc}^2 q \\ n = 2k \operatorname{tg} p \operatorname{tg}^2 q & N = 2k \operatorname{tg} q \operatorname{tg}^2 p \\ o = k \operatorname{tg} q \operatorname{séc}^2 p & O = k \operatorname{tg} p \operatorname{séc}^2 p. \end{cases}$$

Pour l'application on remplacera dans les seconds membres des formules (76) les coordonnées corrigées ξ , η par les coordonnées mesurées x , y . L'importance des corrections trouvées indiquera s'il est utile de faire une seconde approximation, en introduisant pour ξ , η dans les formules (76) leurs valeurs approchées fournies par le premier calcul.

La plupart des travaux photographiques de précision se font avec des instruments du type adopté pour la carte internationale du ciel, et des plaques embrassant quatre degrés carrés. Dans ces conditions, si l'on exprime tous les arcs en parties du rayon, ξ et η ne dépassent guère $\frac{1}{50}$; le coefficient k est à peu près $\frac{1}{3000}$.

Les termes du second ordre conservés dans les formules (76) sont de l'ordre de $\frac{1}{50^2 \times 3000}$ ou $\frac{1}{75 \times 10^5}$, ou, en secondes d'arc, $\frac{1''}{30}$. On voit qu'il ne sera utile d'avoir égard à ces termes que pour des distances zénithales un peu grandes ou pour des recherches de haute précision.

L'erreur résultant de l'omission des termes du troisième ordre dans les seconds membres des formules (75) est de l'ordre de $k\xi^3$ ou $\frac{1}{3000 \times 50^3}$ ou $\frac{1}{375 \times 10^6}$ ou en secondes d'arc $\frac{1''}{1800}$. On aura donc bien rarement l'occasion d'en tenir compte.

Il est d'ailleurs très facile, en suivant la marche que nous avons indiquée, de former ces termes du troisième ordre. Nous renverrons, pour ce cas exceptionnel, au Mémoire cité plus haut de *J. C. Kapteyn*.

L'erreur résultant de l'emploi, dans les seconds membres des formules (76), des coordonnées mesurées x, y au lieu des coordonnées corrigées ξ, η est de l'ordre du produit $k d\xi$ ou $k^2 \xi$, c'est-à-dire numériquement de l'ordre de $\frac{1}{3000^2} \times 50$ ou de $\frac{1}{45 \times 10^7}$ ou, en secondes d'arc, de l'ordre de $\frac{1''}{2000}$. Il sera donc très rarement utile de recourir à une seconde approximation.

C'est à une erreur du même ordre que la précédente que l'on s'expose en se contentant, pour arriver aux formules (68) et (74), d'expressions différentielles du premier ordre par rapport aux variations $k \operatorname{tg} \xi, k \operatorname{tg} \zeta$ des distances zénithales. On trouvera aussi l'expression des principaux termes négligés de cette manière dans le mémoire de *J. C. Kapteyn*.

Mais une erreur plus sensible peut naître de ce que l'on a supposé k constant dans l'étendue de la plaque, sans avoir égard à la variation de ce coefficient avec la distance zénithale. On sait que pour les distances zénithales inférieures à 75° on peut poser

$$k = 58'',315 - 0'',065 \operatorname{tg}^2 \xi.$$

D'où

$$\frac{dk}{d\xi} = - 0'',13 \operatorname{tg} \xi \operatorname{sec}^2 \xi.$$

Pour $\xi = 45^\circ$ et pour un écart de 1° entre les distances zénithales des points Γ et Σ , le déplacement $S\Sigma$ dû à la variation de k est déjà de l'ordre de $0'',01$. On pourra toujours prendre avec une approximation suffisante, pour le calcul de ces termes complémentaires,

$$\zeta - \xi = - \sigma \cos \Gamma,$$

$$S\Sigma = + \frac{dk}{d\xi} (\zeta - \xi) \operatorname{tg} \xi$$

ou

$$S\Sigma = - \sigma \frac{dk}{d\xi} \operatorname{tg} \xi \cos \Gamma$$

ou encore, d'après la seconde des formules (71),

$$S\Sigma = - (\xi \sin \omega + \eta \cos \omega) \frac{dk}{d\xi} \operatorname{tg} \xi.$$

Par suite, comme l'angle parallactique ω a des valeurs très peu différentes pour le point Γ et pour le point Σ , on a

$$d\xi = S\Sigma \sin \omega, \quad d\eta = S\Sigma \cos \omega$$

ou

$$(78) \quad \begin{cases} d\xi = - (\xi \sin \omega + \eta \cos \omega) \frac{dk}{d\xi} \operatorname{tg} \xi \sin \omega, \\ d\eta = - (\xi \sin \omega + \eta \cos \omega) \frac{dk}{d\xi} \operatorname{tg} \xi \cos \omega. \end{cases}$$

Pour ξ et η égaux à $60'$, ces termes peuvent atteindre $0'',012$ à 50° de distance zénithale, $0'',043$ à 60° et $0'',225$ à 70° . Il sera donc, dans certains cas, utile d'en tenir compte. Les termes négligés, de l'ordre de $\sigma^2 \frac{dk}{d\xi}$, de $\sigma k \frac{dk}{d\xi}$, de $\sigma \frac{d^2k}{d\xi^2}$, n'atteignent pas encore $0'',01$ à une distance du zénith égale à 70° .

Les termes de correction (78), aussi bien que ceux qui dépendent des coefficients h, l, H, L dans les formules (76), ont la propriété de varier linéairement dans l'étendue de la plaque. Par suite on peut adopter un mode de réduction qui dispense de calculer à part chacun de ces termes. On appliquera seulement aux coordonnées mesurées x, y les corrections instrumentales qui tiennent à l'appareil de mesure et les termes du second ordre de la réfraction, dépendant des coefficients m, n, o, M, N, O . Cela fait, on peut admettre que les coordonnées corrigées x_1, y_1 , d'un astre quelconque figurant sur la plaque sont liées aux coordonnées normales ξ, η par deux relations de la forme

$$(79) \quad \begin{cases} \xi = a + bx_1 + cy_1, \\ \eta = a' + b'x_1 + c'y_1. \end{cases}$$

Les coefficients a, b, c, a', b', c' ont des valeurs constantes dans l'étendue de la plaque et il suffira, pour les déterminer, d'appliquer les équations (79) à trois étoiles connues figurant sur la plaque et pour lesquelles les coordonnées normales pourront être calculées avant toute mesure.

Dans la pratique il sera préférable, bien entendu, de disposer d'un plus grand nombre d'étoiles de repère et de déterminer a, b, c, a', b', c' par la méthode des moindres carrés. L'effet de la réfraction, en ce qui concerne les termes du premier ordre, se trouve englobé dans cette détermination, en même temps que celui des erreurs d'échelle et d'orientation du réseau, d'ajustement du cliché, d'aberration différentielle, de précession et de nutation.

Le calcul de la réfraction, dans le travail astrographique, se trouve donc ramené à celui des coefficients m, n, o, M, N, O du tableau (77) et il est encore possible, comme l'a montré *A. R. Hinks*⁶⁶, de suppléer à ce calcul par la construction d'un diagramme.*

Théorie de l'extinction.

15. Établissement de l'intégrale de l'extinction. Quand on se borne à considérer les rayons d'une longueur d'onde donnée, de telle

66) *Monthly Notices astron. Soc. 63 (1902/3), p. 138.*

sorte que le faisceau transmis à travers une couche d'air particulière ne diffère pas qualitativement du faisceau incident, on peut considérer comme rigoureuse la *loi d'absorption exponentielle*

$$\frac{dJ}{J} = -Kd\sigma,$$

où $d\sigma$ désigne le trajet parcouru, K le coefficient d'absorption par unité de longueur, J la quantité de lumière incidente, $J + dJ$ la quantité de lumière transmise.

Si à cette loi on joint celle de Beer (formule 4),

$$k = C\delta,$$

on obtient, comme formule fondamentale de la théorie de l'extinction,

$$(80) \quad LJ = LJ_i - C\delta_0 \int \frac{\delta}{\delta_0} d\sigma,$$

où δ_0 désigne la densité actuelle de l'air au point d'arrivée du faisceau à la surface de la terre; $d\sigma$ est l'élément linéaire du trajet lumineux (ou de la courbe de réfraction); δ est la densité de l'air en un point quelconque du trajet; J_i est la quantité de lumière reçue à la limite supérieure de l'atmosphère, J est la quantité de lumière reçue à la surface de la terre. L'intégrale doit être étendue à tout le parcours.

Appelons de plus H la hauteur totale de l'atmosphère, J_z l'éclat apparent d'un astre à la distance zénithale z , J_0 l'éclat apparent du même astre dans la direction du zénith (pour $z = 0$), et posons

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \int_0^H \frac{\delta}{\delta_0} dh, \\ p = e^{-C\delta_0\lambda}, \quad (\text{coefficient de transmission de l'atmosphère dans la direction du zénith).} \\ F(z) = \frac{1}{\lambda} \int \frac{\delta}{\delta_0} d\sigma, \end{array} \right.$$

l'intégrale étant, ici encore, étendue à tout le parcours effectué dans l'atmosphère.

L'équation (80) écrite pour une même source lumineuse, dans les deux hypothèses, donne

$$LJ_z = LJ_i - C\delta_0 \int \frac{\delta}{\delta_0} d\sigma,$$

$$LJ_0 = LJ_i - C\delta_0 \int_0^H \frac{\delta}{\delta_0} dh,$$

d'où par soustraction

$$LJ_z = LJ_0 + \log_e p [F(z) - 1].$$

Le problème principal de la théorie de l'extinction consiste dans le calcul de la fonction $F(z)$ c'est-à-dire du rapport de la masse d'air traversée dans une direction inclinée à la masse d'air traversée dans une direction verticale.

Soient maintenant i l'angle que fait la courbe de réfraction, à la hauteur h , avec la normale à la surface de niveau correspondante, r le rayon de cette surface supposée sphérique, $d\sigma$ l'élément linéaire de la courbe de réfraction; on aura évidemment

$$d\sigma = \frac{dr}{\cos i}.$$

Introduisons pour $\cos i$ sa valeur tirée de l'équation (38) du n° 7 et remplaçons, comme précédemment, le rapport $\frac{\delta}{\delta_0}$ par la densité relative x . Il vient

$$(82) \quad F(z) = \frac{1}{\lambda} \int_a^{a+H} \frac{x \cdot dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_0 \alpha}{\mu r}\right)^2 \sin^2 z}}$$

formule qui joue ici le même rôle que la formule (41) dans la théorie de la réfraction.

16. Développement de l'intégrale de l'extinction dans l'hypothèse d'une température constante ou d'une densité constante. Formules de Lambert et de Bouguer. Si l'on imagine l'atmosphère remplacée par une couche homogène on doit faire $x = 1$, $\mu = \mu_0$. Il en résulte

$$(83) \quad \lambda = H, \quad F(z) = \frac{1}{H} [\sqrt{a^2 \cos^2 z + 2aH + H^2} - a \cos z].$$

C'est la *formule d'extinction de Lambert*⁶⁷⁾. Elle donne une représentation suffisante de la masse d'air traversée quand on prend pour H la hauteur l de l'atmosphère homogène réduite, c'est-à-dire environ 8 kilomètres [n° 3b].

Si l'on suppose la température uniforme et si l'on néglige la variation de la pesanteur avec l'altitude, on obtient [voir n° 5c]

$$x = e^{-\frac{h}{l}}, \quad H = +\infty, \\ \lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{h}{l}} dh = l = 7^{\text{km}}, 9994.$$

67) J. H. Lambert, Photometria s. de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae, Augsburg 1760.

Portons ces valeurs dans l'équation (82) et remplaçons-y le rapport $\frac{\mu_0}{\mu}$ par l'unité, dont il s'écarte toujours très peu. Nous trouverons

$$(84) \quad F(z) = \frac{1}{a l \cos z} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{h}{l}} (a+h) \left(1 + \frac{2ah + h^2}{a^2 \cos^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}} dh.$$

On en tire, par un développement en série qui est encore suffisamment convergent jusque vers $z = 82^\circ$, la *formule d'extinction de Bouguer rectifiée*⁶⁸:

$$(85) \quad F(z) = \sec z - \frac{l}{a} \sec z \operatorname{tg}^2 z + \frac{3l^2}{a^2} \sec^3 z \operatorname{tg}^2 z - \dots$$

*A. Bemporad*⁶⁹ et *V. Cerulli*⁷⁰ a obtenu un développement de l'intégrale (84) très convergent pour les grandes distances zénithales par l'introduction de la fonction $\psi(T)$ de Kramp (p. 46). Si, en effet, on définit une nouvelle variable t par l'équation

$$h + a(1 - \sin z) = lt^2,$$

si l'on développe le radical suivant les puissances de $\frac{lt^2}{2a \sin z}$ et si l'on pose pour abrégier

$$\frac{l}{2a \sin z} = l_z, \quad \frac{a(1 - \sin z)}{l} = T^2, \quad \psi(T) = e^{T^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

on obtient

$$(85a) \quad F(z) = l_z^{-\frac{1}{2}} \psi(T) + \frac{3}{4} l_z^{\frac{1}{2}} [T + \psi(T)] - \frac{5}{16} l_z^{\frac{3}{2}} [T^3 + \frac{3}{2} T + \frac{3}{2} \psi(T)] + \dots$$

Ce développement converge si rapidement que, jusqu'à $z = 84^\circ$, deux termes suffisent pour le calcul exact de $F(z)$. Il est encore applicable pour $z > 90^\circ$.

17. Formule d'extinction de Laplace. Si l'on néglige la variation de la température et de la pesanteur, on déduit des équations fondamentales (5) et (6)

$$(86) \quad \begin{cases} p = \delta = \delta_0 x, \\ l dx = -x dh; \end{cases}$$

si de plus on pose avec *P. S. Laplace* [formule (1)]

$$\mu^2 = 1 + 2c\delta$$

68) Voir à ce sujet *A. Bemporad*, *Memorie Soc. spettroscopisti italiani* (Catane) 30 (1901), p. 217. Le développement donné dans divers traités comme résultant de la formule d'extinction de *P. Bouguer* se distingue de celui-ci par les coefficients numériques, mais il est déjà inexact dès le second terme en raison des approximations trop grossières qu'il suppose.

69) *Atti Accad. Gioenia Catania* (4) 19 (1906), mém. n° 4.

70) *Memorie Soc. spettroscopisti italiani* (Catane) 35 (1906), p. 39.

et par suite

$$\mu d\mu = c \cdot d\delta = c\delta_0 \cdot dx,$$

on trouvera

$$(87) \quad l dx = \frac{l\mu}{c\delta_0} \cdot d\mu.$$

Dans l'expression (82) de $F(z)$ remplaçons $x dr$ (ou $x dh$) par sa valeur en fonction de μ et de $d\mu$, tirée des équations (86) et (87). Notons de plus que λ (ou $\int x dh$) devient égal à l , et introduisons les limites relatives à la nouvelle variable. Nous trouverons

$$F(z) = \frac{1}{c\delta_0} \int_1^{\mu_0} \frac{\mu \cdot d\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu_0 \alpha}{\mu r}\right)^2 \sin^2 z}}.$$

Si l'on rapproche cette formule de la formule fondamentale (41) de la théorie de la réfraction, on trouvera

$$dF = \frac{1}{c\delta_0} \mu^2 \cdot \frac{\mu r}{\mu_0 \alpha} \cdot \frac{dR}{\sin z}$$

et, comme μ et $\frac{\mu_0 \alpha}{\mu r}$ s'écartent très peu de l'unité, on aura, avec une grande approximation,

$$(88) \quad F(z) = \frac{\text{Réfr.}}{\sin z} \times \text{constante.}$$

C'est la *formule d'extinction de Laplace*.

18. Développement plus rigoureux, par Bemporad, de la théorie de l'extinction dans l'hypothèse d'une variation de température proportionnelle à l'altitude. Avec les notations précédemment introduites [n^{os} 7 et 10], on tire de la formule (82)

$$F(z) = \frac{a}{\lambda \sqrt{2} \sin z} \int_0^S \frac{x \sqrt{1 - 2\alpha(1-x)(1+2s+\dots)} ds}{\sqrt{\frac{\cotg^2 z}{2} - \frac{\alpha(1-x)}{\sin^2 z} + s - \frac{s^2}{2}}},$$

la limite supérieure S ayant pour valeur $\frac{H}{a+H}$. Si, de plus, on pose

$$K = \frac{a}{\lambda \sqrt{2} \sin z}, \quad Z = \frac{\cotg z}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon = \frac{a}{\sin^2 z}.$$

La formule précédente devient

$$F(z) = K \int_0^S \frac{x \sqrt{1 - 2\alpha(1-x)(1+2s+\dots)} ds}{\sqrt{Z^2 - \varepsilon(1-x) + s - \frac{s^2}{2}}}.$$

Si l'on admet que la température varie linéairement avec la hauteur, on pourra écrire

$$t - t_0 = -\beta a s,$$

β étant une constante à déterminer par l'expérience. Les formules (5) et (6) donnent alors

$$x = (1 - \gamma s)^k,$$

où l'on a posé

$$\gamma = \frac{m\alpha\beta}{1 + mt_0}, \quad k = \left(\frac{1}{lm\beta} - 1 \right) (1 + mt_0).$$

Si l'on admet une décroissance kilométrique de 6^o,22 centigrades, on trouvera, pour la couche atmosphérique où la densité s'annule,

$$S = \frac{1}{\gamma} = 0,006894, \quad H = 43 \text{ km}, \quad k = \frac{9}{2},$$

$$\lambda = \int_0^H x dh = a \int_0^s (1 - \gamma s)^k \frac{ds}{(1 - s)^2}.$$

En profitant de ce que $s, S, \alpha, \varepsilon$ sont de petites quantités, on développera aisément en séries les expressions qui viennent d'être données pour λ et pour $F(z)$. On est amené à introduire la nouvelle variable

$$t = \frac{1 - \gamma s}{1 + Z^2 \gamma}$$

qui, naturellement, n'a rien de commun avec la température t . Si de plus on pose

$$T = \frac{1}{1 + Z^2 \gamma}, \quad C_0 = \frac{a}{\lambda \sqrt{2} \gamma}, \quad C_1 = \frac{1}{2} C_0 \alpha \gamma, \quad \dots,$$

on trouve finalement

$$F(z) = \frac{C_0}{\sin z} T^{-\frac{2k+1}{2}} \int_0^T \frac{t^k dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_1}{\sin^3 z} \left\{ T^{-\frac{2k-1}{2}} \int_0^T \frac{t^k dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} - T^{-\frac{4k-1}{2}} \int_0^T \frac{t^{2k} dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \right\} + \dots$$

Pour la valeur normale $k = \frac{9}{2}$, les intégrales que nous avons introduites se représentent facilement par des fonctions trigonométriques⁷¹), et le développement converge rapidement pour toutes les distances zénithales.

19. Tableau comparatif des diverses théories de l'extinction. Dans le tableau suivant on a réuni les valeurs de la fonction $F(z)$ (masse d'air traversée) pour une série de distances zénithales d'après

71) Voir à ce sujet *A. Bemporad, Mitteilungen der Sternwarte Heidelberg* (Astron. Institut) cah. 4, éd. Karlsruhe 1904, p. 1/78.

les formules (83) de *J. H. Lambert*, (85) et (85a) de *P. Bouguer*, (87) de *P. S. Laplace* et d'après la théorie de *A. Bemporad* [n° 18].

Distance zénithale z	Valeur de la masse d'air traversée $F(z)$ d'après			
	Lambert	Bouguer	Laplace	Bemporad
60°	1,997	1,993	1,993	1,995
70	2,909	2,897	2,899	2,904
80	5,647	5,551	5,563	5,600
85	10,663	10,142	10,196	10,395
88	20,858	18,677	18,835	19,787
90	39,957	35,416	36,664	39,652

20. L'extinction terrestre. Par analogie avec ce qui a été dit de la réfraction terrestre [n° 7], nous parlons d'*extinction terrestre* quand l'espace parcouru par les rayons lumineux ne s'étend pas de la terre jusqu'à la limite de l'atmosphère terrestre, mais seulement jusqu'à une certaine altitude.

Ce cas se présente dans les observations photométriques de sources de lumière qui appartiennent à la surface de la terre (par exemple des montagnes neigeuses éloignées⁷²), ou dans l'observation simultanée d'un seul et même astre, faite de deux stations situées à des altitudes très différentes au-dessus du niveau de la mer.

Les formules sont alors, comme il fallait s'y attendre, plus compliquées que dans le cas de l'extinction astronomique. Cependant *A. Bemporad*, en s'appuyant sur la théorie signalée dans le n° 16, a construit des tables qui permettent le calcul de l'extinction terrestre, c'est-à-dire des masses d'air traversées, jusqu'à une distance zénithale de 89° et jusqu'à l'altitude de 5000^m au-dessus du niveau de la mer⁷³).

21. L'absorption sélective. Comme l'atmosphère absorbe en proportions très différentes les radiations de diverses longueurs d'onde, toute théorie de l'extinction doit, pour aboutir à des conclusions physiques précises, se limiter à une lumière monochromatique. Mais comme les observations spectrophotométriques et bolométriques exigent des appareils d'un prix élevé et d'un maniement difficile, on est obligé, dans la pratique, d'appliquer la théorie de l'extinction à la lumière globale des astres, en introduisant une constante d'absorption moyenne, répondant à peu près à la partie la plus brillante du spectre.

⁷² *E. Oddone*, Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 34 (1901), p. 511; *A. Bemporad*, *Memorie Ist. Lombardo sc. mat.* (3) 11 (1905), p. 137/55.

⁷³ *A. Bemporad*, *Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat.* (5) 5 (1904/5), p. 235 [1904].

Jusqu'à quel point cette simplification est-elle légitime? C'est une question très discutée.

Déjà en 1842, *J. D. Forbes* a fait remarquer qu'une lame mince de verre rouge laisse passer à peu près toutes les sortes de radiations, pendant qu'une lame plus épaisse ne transmet plus que les rayons rouges. Pour une lumière naturelle déterminée, la constante d'absorption spécifique c de ce verre aura nécessairement une valeur différente, suivant que l'on aura fait usage d'une lame plus mince ou plus épaisse. *J. D. Forbes* a noté de plus que, dans le second cas, la constante d'absorption doit avoir une valeur moindre, et que la même différence se manifeste quand on cherche à déterminer la constante d'absorption atmosphérique par la comparaison de trajets courts (directions voisines du zénith) et de trajets prolongés (direction voisine de l'horizon). On serait conduit à regarder l'air comme doué d'une transparence spécifique élevée près de l'horizon (*phénomène de Forbes*).

Cette remarque judicieuse de *J. D. Forbes* a été présentée depuis par *S. P. Langley*⁷⁴⁾ sous une forme mathématique plus précise. Il a démontré en toute rigueur que, d'une part à cause de l'accroissement général et continu de la constante d'absorption de l'extrémité rouge à l'extrémité violette du spectre, d'autre part à cause de l'action discontinue de ce qu'on appelle les *bandes d'absorption atmosphériques*, l'absorption moyenne déterminée à la manière ordinaire, c'est-à-dire sans analyse spectrale, n'est qu'une limite inférieure de celle qui se produit réellement. Au lieu d'évaluer celle-ci, dans la direction verticale, à 18% environ de la lumière incidente, on devrait, d'après *S. P. Langley*, la porter au moins à 40%.

Bien que l'exactitude théorique des objections de *S. P. Langley* ait été généralement reconnue, on a contesté cependant leur valeur pratique. Quelques astronomes, par exemple *H. von Seeliger*⁷⁵⁾, ont fait remarquer que les rayons optiquement les plus efficaces sont concentrés dans une zone relativement étroite dans le jaune et le vert, et qu'on peut ne tenir compte que d'eux seuls, tant leur activité surpasse celle des autres parties du spectre. Par là la première des sources d'erreur considérées (augmentation générale de la constante d'absorption pour des longueurs d'onde décroissantes) se trouve notablement réduite.

D'autres ont fait remarquer⁷⁶⁾ que la théorie de l'extinction, appli-

74) Amer. J. sc. (3) 28 (1884), p. 163.

75) Sitzgsb. Akad. München 21 (1891), p. 247.

76) Voir, par exemple, *G. Müller*, Photometrie⁸⁾, p. 143.

quée aux tables d'extinction empirique les plus dignes de confiance, ne montre aucune trace du phénomène de Forbes. Le même phénomène aurait pour résultat que les mesures d'extinction faites sur les hautes montagnes devraient donner en général des constantes d'absorption plus grandes que les séries analogues faites dans les stations inférieures. Or les expériences tentées jusqu'à ce jour dans cette direction ne témoignent pas dans ce sens, mais plutôt en sens opposé⁷⁷⁾.

Des expériences récentes ont aussi montré que l'on ne peut pas représenter convenablement même les observations visuelles avec un coefficient d'extinction moyen. Les mesures simultanées d'éclat des étoiles, sur l'Etna et à Catane, exécutées en 1894 par *G. Müller* et *P. Kempf*⁷⁸⁾, n'ont pu s'expliquer par l'emploi d'un coefficient d'extinction unique. Les auteurs ont attribué cette complication à l'influence d'un nuage de poussière qui s'étendait sur la ville de Catane.

G. Müller et *P. Kempf* n'avaient fait entrer dans leur discussion que des observations simultanées d'étoiles zénithales. Le même travail a été repris par *A. Bemporad*⁷⁹⁾, qui a fait aussi la comparaison directe des observations simultanées d'une seule et même étoile à de très grandes distances zénithales. Le calcul exact des masses d'air traversées par des rayons d'inclinaison variable entre les altitudes de Catane (69 mètres) et de l'Observatoire de l'Etna (2942 mètres) a demandé la construction des tables d'extinction terrestre auxquelles il a déjà été fait allusion plus haut [n° 20].

Le résultat de cette nouvelle discussion des observations de *G. Müller* et *P. Kempf* a été de confirmer les vues de *J. D. Forbes* et de *S. P. Langley*. On a reconnu que le coefficient d'extinction moyen n'était pas le même pour tous les rayons qui traversent la même couche sous des inclinaisons différentes; de plus le coefficient d'extinction a été trouvé constamment décroissant quand la distance zénithale augmente, en sorte que, à 80° de distance zénithale, il n'est plus guère que la moitié de ce qu'il est au zénith.

Des résultats tout semblables ont été déduits par *A. Bemporad* d'une nouvelle discussion des mesures pyrhéliométriques de *K. Ångström*⁸⁰⁾ à

77) Voir à ce sujet le tableau des plus importantes déterminations du coefficient p dans *G. Müller*, *Photometrie*⁸⁾, p. 138.

78) *G. Müller* et *P. Kempf*, *Untersuchungen über die Absorption des Sternlichts in der Atmosphäre angestellt auf dem Ätna und in Catania* [Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam 11 (1898), p. 278 (mém. n° 38)].

79) *A. Bemporad*, *Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat.* (5) 5 (1904/5), p. 281/2.

80) *A. Bemporad*, *Atti Accad. Gioenia Catania* (5) 1 (1908), mém. n° 2, p. 1/12.

Ténériffe en 1897, ainsi que d'observations actinométriques poursuivies à Catane et sur l'Etna à partir de l'année 1904⁸¹). Les observations de Ténériffe ont montré de plus⁸⁰) que le coefficient d'extinction (pris logarithmiquement) des couches inférieures de l'air varie à peu près comme la quatrième puissance de la densité.

Dans toutes ces recherches on n'a trouvé que des valeurs moyennes assez mal définies pour des régions spectrales un peu étendues, et les erreurs systématiques des observations ont pu aussi jouer un rôle. Aussi une étude méthodique et détaillée de l'extinction par la spectrophotométrie demeure-t-elle extrêmement désirable.

Les données spectrophotométriques réunies jusqu'à ce jour s'accordent mal⁸²) et ne permettent pas encore de se prononcer sur la valeur de la théorie de *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*), d'après laquelle le coefficient d'absorption varie en raison inverse de la quatrième puissance de la longueur d'onde⁸³). Il y aurait encore à décider dans quelle mesure les poussières et les molécules mêmes de l'air contribuent à l'absorption⁸⁴). Enfin il paraît exister des variations diurnes et annuelles de l'extinction, variations qui doivent être étudiées avec soin, si l'on veut décider de la constante de la radiation solaire en dehors de notre atmosphère⁸⁵).

81) *A. Bemporad* et *L. Mendola*, *Memorie Soc. spettroscopisti italiani* (Catane) 36 (1907), p. 165.

82) *G. Müller*, *Photometrie*⁶⁾, p. 140.

83) *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*), *London Edinb. Dublin philos. mag.* (4) 41 (1871), p. 107, 274, 447; *Papers* 1, Cambridge 1899, p. 87, 104.

84) *J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*), *London Edinb. Dublin philos. mag.* (5) 47 (1899), p. 375; *Papers* 4, Cambridge 1903, p. 397.

85) *C. G. Abbot*, *Smithsonian Institution, Smithsonian miscellaneous collections* 45 (1903), p. 74/83; *S. P. Langley*, *Astroph. Journ.* 17 (1903), p. 89; 19 (1904), p. 305.

VII 3. RÉDUCTION DES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE F. COHN (BERLIN),
PAR E. DOUBLET (BORDEAUX) ET L. PICART (BORDEAUX).

1. **Objet de l'astronomie sphérique.** L'astronomie théorique, qui s'efforce d'expliquer les mouvements des corps célestes par leurs attractions mutuelles suivant la loi newtonienne de la gravitation, a besoin, pour fixer les valeurs des paramètres (masses, etc.) qui entrent dans les équations générales du mouvement, et celles des constantes d'intégration, telles que les éléments des orbites, qui correspondent aux dimensions du système planétaire, des résultats fournis par l'astronomie pratique.

Ces données, aussi précises que possible, sont la succession des positions des corps célestes, rapportées à un système invariable de coordonnées, et l'indication des époques auxquelles correspondent ces lieux.

L'astronomie pratique se partage naturellement en deux branches: l'astronomie d'observation et l'astronomie sphérique. La première fournit les matériaux bruts qui, par suite des conditions mécaniques et physiques dans lesquelles ils sont obtenus à la surface de la terre, ont besoin de corrections diverses avant de pouvoir être comparés entre eux et utilisés pour la théorie (élimination de la réfraction, de l'aberration, de la parallaxe, etc.). C'est l'astronomie sphérique qui fait cette mise en œuvre préparatoire. Comme les observations ne sont susceptibles que d'une précision limitée, l'astronomie sphérique doit pousser l'examen de ces corrections jusqu'à une limite comparable à cette précision; au fur et à mesure qu'augmente cette précision, elle doit reculer cette limite; de temps en temps, elle est ainsi amenée à une révision des principes.

A ce point de vue, au début du 19^{ième} siècle, les «*Fundamenta Astronomiae*» de *F. W. Bessel* ont marqué le début d'une ère nouvelle.

Il semble que le moment soit venu d'avancer plus loin encore dans la même voie, en admettant comme limite extrême de précision dans les observations 0'',01 pour les angles et 0^s,001 pour la mesure du temps.

*Si en réalité ces limites ne sont pas atteintes dans les observations isolées, il semble qu'elles puissent du moins résulter d'observations d'ensemble faites avec les derniers perfectionnements apportés aux instruments, tels que les micromètres enregistreurs de *J. A. Repsold* et de *P. Gautier*; c'est un point qu'a admis le dernier congrès de la Carte du ciel, réuni à Paris en 1909.*

Une observation isolée ne peut jamais fixer la position d'un astre dans l'espace, mais seulement la direction dans laquelle il se trouve. La détermination de son éloignement ne peut résulter que de la combinaison de plusieurs observations, combinaison qui sous le titre détermination des parallaxes, constitue un chapitre particulier de l'astronomie sphérique; il va sans dire que, pour résoudre ce problème, on prend pour base les données qui fixent la direction des astres.

Ces données sont les coordonnées sphériques du point de la sphère céleste où aboutit le rayon visuel partant de l'observateur, cette sphère étant supposée de rayon très grand par rapport à toutes les distances mesurables; les coordonnées sphériques sont rapportées à un grand cercle fondamental de la sphère sur lequel on fixe une origine et un sens pour compter les angles, en même temps qu'on lui adjoint l'un de ses pôles sphériques comme *pôle* du système.*

*A ces données correspond un système de coordonnées rectilignes rectangulaires ayant pour origine le centre *O* de la sphère; l'axe *Ox* est dirigé vers l'origine choisie pour compter les angles; l'axe *Oy* fait avec *Ox* un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens choisi; l'axe *Oz* est dirigé vers le pôle du système. *L'orientation* du système est *directe* ou *rétrograde*, suivant qu'un observateur placé suivant *Oz*, les pieds en *O*, la tête en *z*, voit *Ox* venir s'appliquer sur *Oy* en décrivant $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct, c'est-à-dire de la droite vers la gauche, ou dans le sens opposé, dit rétrograde.

La première coordonnée sphérique λ est l'angle, mesuré de 0 à 2π dans le sens de l'orientation du système, de deux demi-plans limités par *Oz* et contenant respectivement l'origine et le point considéré de la sphère; la deuxième μ , est la distance angulaire du point de la sphère au grand cercle fondamental; elle se compte positivement de 0 à $\frac{\pi}{2}$ dans l'hémisphère qui contient le pôle du système, négativement de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ dans l'hémisphère opposé; en désignant par *r* le

rayon de la sphère, on a

$$x = r \cos \mu \cos \lambda, \quad y = r \cos \mu \sin \lambda, \quad z = r \sin \mu.*$$

Le choix des éléments fondamentaux du système de coordonnées devra résulter de deux considérations différentes: en premier lieu, ces éléments doivent pouvoir se déterminer directement par l'observation, ou, du moins, s'en déduire par des procédés assez simples¹⁾; d'un autre côté, en vue des applications théoriques, il faut qu'ils soient fixes dans l'espace, ou du moins que leur déplacement puisse être prévu par le calcul.

2. Définition des systèmes de coordonnées usuelles, relations entre ces systèmes. Le système dont les éléments fondamentaux sont l'horizon et le zénith satisfait à la première des conditions précédentes; car, en chaque point de la surface terrestre, la direction la plus immédiatement déterminable est celle de la pesanteur, soit par un fil à plomb, soit par le plan horizontal perpendiculaire, indiqué par la surface d'un liquide en équilibre; l'une des coordonnées sphériques, la hauteur (ou son complément la distance zénithale) varie alors de 0° à 90°.

Quant à l'origine de la seconde coordonnée, l'azimut, elle ne peut se choisir d'une manière rationnelle que par la considération de phénomènes extérieurs à notre globe, tels que les mouvements apparents des astres, et en particulier la rotation diurne de la sphère céleste.

Dans ce but, on considère le méridien local, c'est-à-dire le grand cercle passant par le pôle et le zénith, et l'on compte les angles dans le sens rétrograde, à savoir du sud vers l'ouest, le nord et l'est, de 0° à 360°.

Si la hauteur et l'azimut sont les coordonnées que l'observation fournit de la manière la plus immédiate, leur rapide variabilité, due à la rotation du globe terrestre, les rend inutilisables d'une façon immédiate pour la théorie. En se plaçant au point de vue des exigences de la théorie, le choix du plan fondamental se trouve déterminé; il faut que sa position soit fixe dans l'espace, et par suite invariable sous l'effet de la rotation terrestre; d'un autre côté, il doit être lié d'une façon invariable au globe terrestre: seul l'équateur remplit ces conditions²⁾.

La distance angulaire à l'équateur, que l'on appelle la déclinaison, et que l'on compte de 0° à $\pm 90^\circ$, est la seconde des coordonnées

1) Sur les instruments servant à mesurer les coordonnées sphériques, voir l'article VII 6.

2) En toute rigueur, la position du plan de l'équateur dans l'espace est variable, tout comme celle de l'horizon, mais la grande lenteur de son déplacement justifie, au point de vue pratique, son choix comme plan fondamental.

sphériques équatoriales. En ce qui concerne la première, on peut recourir à deux systèmes différents:

1°) l'angle horaire d'un astre est, comme l'azimut, compté à partir du méridien de 0° à 360° , dans le sens *rétrograde*; on peut le lire directement sur un équatorial solidement établi; mais il dépend du temps et de la position sur la terre du lieu d'observation;

2°) l'ascension droite [*ascensio recta*] qu'on représente souvent par la double lettre *R*, se compte à partir d'un point fixe dans le ciel, dans le sens *direct*, c'est-à-dire en sens contraire de l'angle horaire; l'ascension droite est donc constante pour les astres fixes, mais n'est pas directement observable. Comme origine des ascensions droites, on s'est accordé pour choisir l'équinoxe de printemps, ou d'une façon plus précise, le point³⁾ où le centre du soleil traverse l'équateur au moment de l'équinoxe de printemps, parce qu'au point de vue théorique la détermination du plan de l'écliptique, c'est-à-dire du plan de l'orbite terrestre (ou solaire), est fondamentale. Ce système des ascensions droites et des déclinaisons, des cercles horaires et des cercles parallèles, est celui qu'on emploie d'une façon constante pour déterminer les positions des astres. Toutefois, un autre système de coordonnées mérite d'être mentionné, à cause de son usage dès les temps anciens et de son intérêt théorique, surtout pour l'étude du mouvement des planètes: c'est celui dans lequel le plan fondamental est l'écliptique, l'origine étant toujours l'équinoxe de printemps; les coordonnées *écliptiques*, longitude et latitude, ne peuvent s'obtenir avec l'exactitude exigée actuellement que par le calcul et non par l'observation directe⁴⁾.

La considération du triangle sphérique ayant pour sommets l'astre et les pôles des deux systèmes fournit les formules nécessaires pour passer d'un système de coordonnées à un autre. Dans ce triangle, il faut connaître la distance angulaire des deux pôles; c'est, s'il s'agit des systèmes de coordonnées horizontales-équatoriales, le complément de la latitude géographique du lieu d'observation; s'il s'agit de la transformation des coordonnées équatoriales en écliptiques ou inversement, l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

Enfin, le passage de l'ascension droite à l'angle horaire exige la connaissance de l'heure.

3) *De même que la direction du plan de l'équateur, la position de l'équinoxe sur ce plan n'est pas fixe, mais varie d'une façon très lente.*

4) *Voir, pour les observations anciennes, P. Tannery, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (4) 1 (1893), p. 71 et suiv.; Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris 1893, p. 71 et suiv.*

Définition du temps. La durée de la rotation de la terre autour de son axe est, ainsi que nous le verrons dans la suite, sinon une constante absolue, du moins une grandeur dont les variations sont pratiquement tout à fait négligeables. Cette durée serait directement fournie par l'observation, si l'axe de rotation gardait une direction fixe dans l'espace; ce serait l'intervalle de temps qui s'écoulerait entre deux culminations successives d'une étoile quelconque. A cause du déplacement de la ligne des pôles par rapport au système des étoiles fixes, l'intervalle en question n'est pas le même pour toutes les étoiles et change un peu avec le temps. On convient de prendre comme unité de temps l'intervalle qui s'écoule entre deux passages consécutifs de l'équinoxe de printemps au méridien; cet intervalle s'appelle *jour sidéral*.

Le *temps sidéral* à un instant quelconque est l'angle horaire de l'équinoxe de printemps; il s'évalue de 0 à 24 heures, chaque heure correspondant ainsi à 15 degrés.

Si l'on désigne par E l'intersection du cercle horaire d'une étoile avec l'équateur, par γ le point équinoxial, par S l'origine des angles horaires, on sait qu'en comptant positivement les arcs dans le même sens, on a, quelle que soit la disposition des points S, γ, E ,

$$S\gamma = -\gamma E + SE.*$$

Or, l'ascension droite étant comptée positivement en sens inverse des angles horaires, ceci conduit à la relation

$$\text{temps sidéral} = \text{ascension droite} + \text{angle horaire.}$$

Dans la suite [n° 6] nous examinerons de plus près la question de savoir jusqu'à quel point le temps sidéral ainsi défini est une mesure uniforme du temps. Mais il apparaît d'autre part que, si laissant de côté les besoins de la science astronomique où le temps sidéral joue un rôle indispensable, on se place au point de vue de la vie civile, il est nécessaire d'introduire une échelle du temps qui soit en rapport avec les positions du soleil.

On appelle *temps solaire vrai* l'angle horaire du soleil, le temps qui s'écoule entre deux culminations successives du soleil étant le *jour solaire vrai*.

Comme le soleil se meut parmi les étoiles, ce jour solaire est différent du jour sidéral; mais de plus, sa durée n'est pas constante, parce que le mouvement du soleil en ascension droite n'est pas constant, et cela pour deux raisons: d'une part l'orbite solaire est inclinée sur l'écliptique, et d'un autre côté, ce n'est pas la vitesse angulaire, mais la vitesse *aréolaire* du soleil qui est constante. Le temps solaire n'est donc pas une mesure uniforme du temps.

On pourroit aux besoins de la pratique en imaginant un soleil moyen fictif qui se meut d'une façon uniforme en ascension droite et qui ne s'écarte jamais beaucoup du soleil vrai. La différence des ascensions droites des deux astres prise dans le sens

„temps moyen — temps vrai“

s'appelle *l'équation du temps*⁵⁾. Ses valeurs extrêmes atteignent approximativement:

$$\begin{aligned} + 14^m 25^s \text{ vers le 12 février,} & \quad - 3^m 49^s \text{ vers le 14 mai,} \\ + 6^m 19^s \text{ vers le 26 juillet,} & \quad - 16^m 21^s \text{ vers le 3 novembre.} \end{aligned}$$

Pour passer du temps sidéral au temps moyen, ou inversement, il faut tenir compte du changement d'unité et du changement d'origine. Puisque, dans une année tropique (voir ci-dessous) le nombre des jours sidéraux surpasse d'un celui des jours moyens, on a entre deux unités du même ordre, jours, minutes, ou secondes, la relation

$$\frac{\text{unité de temps sidéral}}{\text{unité de temps moyen}} = \frac{365,24220}{366,24220};$$

on déduit de là

$$\begin{aligned} 1 \text{ jour sidéral} &= 0,997\,269\,567 \text{ jour moyen} \\ &= 23^h 56^m 4^s,09058 \text{ temps moyen;} \\ 1 \text{ jour moyen} &= 1,002\,737\,909 \text{ jour sidéral} \\ &= 24^h 3^m 56^s,55536 \text{ temps sidéral.} \end{aligned}$$

Des tables insérées dans les annuaires astronomiques donnent le nombre de secondes à retrancher d'une fraction de jours exprimée en temps sidéral pour l'obtenir en temps moyen, ou à ajouter pour l'opération inverse.

L'ascension droite du soleil moyen, comptée à partir de l'équinoxe moyen, est, d'après *S. Newcomb*^{5a)}, en tenant compte de l'aberration dont il sera question plus loin,

$$\mathcal{R} = 18^h 38^m 45^s,836 + 86\,401\,84^s,542 T + 0^s,0929 T^2;$$

T est évalué en siècles juliens de 36525 jours moyens et est compté à partir du midi moyen de Greenwich 1900, janvier 0.

Les recueils astronomiques donnent l'ascension droite \mathcal{R} de jour en jour, pour midi moyen de Greenwich. Comme à midi moyen l'angle

5) La nécessité d'introduire le temps moyen est un exemple, tiré de la vie courante, de l'obligation, imposée par la précision croissante des mesures, d'une révision rigoureuse des définitions. D'après *R. Wolf* [Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur 1, Zurich 1891, p. 193], le temps moyen fut introduit en premier lieu à Genève, vers 1780, ensuite en Angleterre, puis en Prusse en 1810 et en France en 1816.

5a) A compendium of spherical astronomy, New York 1906, p. 125.

horaire du soleil moyen est nul, le temps sidéral en cet instant est égal à l'ascension droite \mathcal{A} . Pour obtenir le temps sidéral qui correspond au midi moyen d'un autre point de la terre, il suffit d'ajouter au nombre correspondant à Greenwich un nombre de secondes déterminé une fois pour toutes.

Les temps ainsi définis sont, qu'il s'agisse de temps sidéral ou de temps solaire, des temps locaux, la différence des temps locaux de deux lieux terrestres étant égale à la différence de leurs longitudes géographiques comptées vers l'est; il est clair que la connaissance de ces différences est nécessaire pour fixer sans ambiguïté les époques, en particulier pour comparer les observations des planètes ou des comètes.

Pour mesurer des intervalles de temps assez grands, on prend comme unité la durée du mouvement de révolution de la terre autour du soleil, l'*année*; selon qu'il s'agit de développements théoriques ou de recherches pratiques, on choisit soit l'*année julienne*, de 365 jours $\frac{1}{4}$ moyens, soit l'*année tropique*, durée qui s'écoule entre deux équinoxes de printemps consécutifs, ou, d'une façon plus précise, durée nécessaire pour que la longitude moyenne du soleil vrai augmente de 360° . L'année tropique n'est pas rigoureusement constante et sa durée varie très légèrement en raison de l'irrégularité du mouvement de l'équinoxe⁶⁾: sa valeur est en 1900, d'après *S. Newcomb*,

$$365,24219879$$

et diminue de $5^s,3$ en mille ans.*

D'après *F. W. Bessel*⁷⁾ on fixe le commencement de l'année astronomique au moment très voisin du premier janvier où l'ascension droite du soleil moyen *définie ci-dessus* est égale à 280° . *C'est le commencement de l'*annus fictus*, et il est le même pour toute la terre.*

*L'*annus fictus*, comme l'année tropique, en raison du terme en T^2 dans l'expression de l'ascension droite \mathcal{A} n'est pas rigoureusement constante. Sa durée coïncide avec celle de l'année tropique en 1900 et diminue de $6^s,8$ en mille ans.*

3. Principes de la mesure des coordonnées équatoriales et du temps; principes des observations méridiennes. Un seul instrument, le cercle méridien, sert aujourd'hui à déterminer les coordonnées équatoriales.

6) Pour plus de détails sur le calcul de l'«*annus fictus*» et du «*dies reducta*», voir *F. W. Bessel* [Fundamenta astronomiae pro anno 1755, Königsberg 1818; Tabulae Regiomontanae reductionum observationem astronomicarum 1750—1850 computatae, Königsberg 1830, p. XXIV] et tous les traités classiques d'astronomie.

7) *Monatliche Correspondenz* 28 (1813), p. 481; *Abhandlungen*, publ. par *R. Engelmann* 1, Leipzig 1875, p. 261 (n° 36).

toriales des astres; il donne l'instant de leur passage dans le méridien, et leur hauteur à cet instant⁸⁾.

Si l'on compte la hauteur h de 0° à 180° à partir du point sud, qu'on appelle φ la hauteur du pôle, δ la déclinaison de l'astre observé, on a la relation

$$90^\circ + \delta = \varphi + h, \quad \text{ou} \quad 270^\circ - \delta = \varphi + h$$

selon qu'il s'agit d'une culmination supérieure ou d'une culmination inférieure; cette relation permet de déterminer la déclinaison δ , ou les différences de déclinaison quand la latitude φ est inconnue.

La mesure des ascensions droites résulte de l'observation des temps de passage au méridien, et dépend par conséquent de l'estimation du temps, qui est fournie en général par l'intermédiaire d'une pendule⁹⁾.

Une pendule est essentiellement un instrument qui fixe l'instant où un phénomène se produit et qui permet, par conséquent, de mesurer des intervalles de temps. Le contrôle indispensable de la pendule s'obtient par des *déterminations de l'heure* faites à des intervalles convenables. Chaque détermination de l'angle horaire t de l'équinoxe de printemps, ou de l'angle horaire d'une autre étoile dont l'ascension droite α est connue, donne, d'après la relation

$$\theta = \alpha + t,$$

le temps sidéral θ , et par suite une détermination de l'heure. On observe en général dans le méridien; on a alors $t=0$, $\alpha=\theta$, c'est-à-dire que le temps sidéral au moment de la culmination supérieure d'un astre est égal à son ascension droite. On détermine ainsi l'erreur de l'horloge, ou d'une façon plus précise, la *correction de pendule*, c'est-à-dire l'intervalle de temps qu'il faut ajouter à l'heure de la pendule pour obtenir le temps sidéral, d'autant plus exactement que l'on peut observer le passage au

8) En principe, cette mesure s'effectuerait directement, et, de fait, a été autrefois effectuée au moyen d'équatoriaux montés parallactiquement; les cercles fixés à ces instruments donnent en effet par de simples lectures les angles horaires (d'où les différences des ascensions droites) et les déclinaisons; mais les résultats seraient si peu précis qu'on se sert uniquement de ces instruments pour mesurer de très petites différences des coordonnées, par exemple entre des comètes ou des petites planètes et des étoiles de comparaison.

9) Avant que les horloges anciennement employées pour la mesure du temps eussent atteint, par l'adjonction du pendule, la précision nécessaire pour la détermination des ascensions droites, on devait, ainsi que le faisait encore *Tycho Brahe* [*Tycho Brahé*], calculer les différences des ascensions droites de deux astres d'après la mesure de leurs déclinaisons et celle de leur distance angulaire. Pour plus de détails sur la question historique, cf. *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur* 2, Zurich 1893, p. 373 et suiv.

méridien d'un plus grand nombre d'étoiles dont l'ascension droite est connue. Les *étoiles horaires* qui servent à ce but devront être choisies au voisinage de l'équateur, afin que la rapidité de leur déplacement diurne permette de déterminer l'instant de leur passage avec la plus grande exactitude possible. Les corrections de pendule successives, réunies en tableau, fournissent la *marche de la pendule*. On pourrait obtenir la marche diurne sans connaître l'ascension droite des étoiles, par l'observation des culminations successives des mêmes étoiles. Mais, dans la pratique actuelle, on a recours à différentes étoiles dont les ascensions droites sont connues avec une précision suffisante; ceci se justifie d'autre part, parce que l'on ne peut compter avec certitude sur l'uniformité de la marche de la pendule pendant un jour entier¹⁰).

L'horloge, instrument établi tout d'abord pour déterminer les instants ou les intervalles de temps, devient capable, par suite de l'uniformité de la rotation de la terre, de déterminer l'angle dont la terre a tourné sur elle-même d'un instant à l'autre et, par conséquent, de mesurer des différences d'ascensions droites. Naturellement le domaine de cette application est borné aux intervalles de temps pendant lesquels la marche de l'instrument fournit continuellement l'angle de rotation de la terre, c'est-à-dire à ceux pendant lesquels cette marche est uniforme.

En résumé, les observations au cercle méridien qui, avec l'adjonction d'une pendule, constitue aujourd'hui l'instrument fondamental de l'astronomie pratique, donnent, quand on les a purgées des erreurs instrumentales:

1°) les distances zénithales et par suite les différences des déclinaisons;

2°) les temps des passages au méridien, d'où, avec la connaissance de la marche de la pendule, les différences d'ascension droite.

Si l'on connaît la hauteur du pôle et la correction de la pendule, on en déduit les déclinaisons et les ascensions droites absolues.

10) Les irrégularités de période diurne dans la marche de la pendule tiennent à des causes multiples: au montage et à la construction de l'instrument lui-même, aux variations de température, la compensation n'étant jamais parfaite, aux erreurs personnelles des observateurs dans les déterminations de passages [cf. VII 6 ainsi que *Fr. Küstner*, Veröffentlichungen der Sternwarte zu Bonn, cah. 4, Bonn 1900, p. (31)]. *Il faut encore noter, comme influence bien étudiée, celle des variations de la pression barométrique [cf. *F. Tisserand*, Bull. astron. 13 (1896), p. 255; C. R. Acad. sc. Paris 122 (1896), p. 646]. On s'efforce actuellement de placer les pendules méridiennes dans des conditions telles que la pression et la température demeurent constantes.*

Il nous reste maintenant à examiner les méthodes sur lesquelles reposent la détermination pratique du méridien, ainsi que celles des zéros des deux graduations, c'est-à-dire celle de l'équinoxe de printemps, et celle de l'équateur ou de la hauteur du pôle au dessus de l'horizon.

C'est le phénomène de la rotation terrestre qui sert à fixer la position du méridien et la hauteur du pôle.

On détermine le méridien, ou plutôt on s'assure de la détermination exacte du méridien, en observant les temps des passages d'une étoile circumpolaire à deux culminations successives, l'une supérieure, l'autre inférieure; si le plan décrit par l'axe optique de l'instrument coïncide avec le méridien, l'intervalle qui sépare ces passages est exactement de douze heures. On peut se servir d'une seule culmination si l'on connaît l'ascension droite de l'étoile¹¹⁾. La position de l'instrument par rapport au méridien doit être contrôlée continuellement, d'abord parce que les piliers qui le supportent ne peuvent être considérés comme liés au globe terrestre d'une façon invariable, puis parce que le méridien lui-même n'est pas absolument fixe sur la terre [voir n° 5]. Dans ce but, on établit, pour chaque observatoire, des signaux dans le plan méridien; ces signaux, qui portent le nom de mires, permettent de déterminer, à des intervalles de courte durée, les oscillations de l'instrument de part et d'autre du méridien.

Pour passer des distances zénithales observées dans le méridien aux déclinaisons, il faut connaître la position de l'équateur par rapport au zénith, c'est-à-dire la *hauteur du pôle*. On l'obtient en prenant la moyenne des deux hauteurs (corrigées de la réfraction) d'une étoile circumpolaire à sa culmination supérieure et à sa culmination inférieure. En déduisant ainsi la hauteur du pôle, comme aussi d'ailleurs la position du méridien, de deux observations d'une étoile faites à des instants différents, on suppose implicitement que l'axe de rotation reste fixe dans le globe terrestre pendant l'intervalle de ces deux observations¹²⁾.

11) Dans le premier cas, on doit connaître la marche de la pendule pendant douze heures, dans le second la correction de la pendule. On doit donc en même temps, dans l'un et l'autre cas, observer des étoiles horaires. Pour les procédés pratiques de déterminations du méridien, cf. VII 4.

12) On pourrait être tenté de définir le plan méridien comme étant celui où toutes les étoiles atteignent leur plus grande et leur plus petite hauteur; mais si cette définition conduit à une détermination immédiate, celle-ci n'a aucun degré de précision; au voisinage de son maximum ou de son minimum, la hauteur varie en effet très peu. Sur les autres méthodes de détermination de la hauteur du pôle, par exemple par les observations de passages dans le premier vertical (c'est-à-dire le grand cercle qui passe par le zénith et les points *E* et *W*

Les observations méridiennes ne donnent que des différences d'ascension droite; pour obtenir les ascensions droites absolues, il faut connaître la position de l'équinoxe de printemps. Ce point est, par définition, l'intersection de l'équateur et de l'écliptique. Sa position dépend donc de la combinaison du mouvement de rotation de la terre avec son mouvement de translation, ce dernier étant accessible à l'observation par son image directe, le mouvement apparent du soleil; c'est donc par les observations du soleil que se déterminera l'équinoxe.

Entre l'ascension droite A et la déclinaison D du soleil, on a la relation simple¹³⁾

$$\sin A \operatorname{tg} E = \operatorname{tg} D$$

qui permet, lorsqu'on connaît l'obliquité E de l'écliptique, de calculer l'une des coordonnées en fonction de l'autre; on peut, par suite, faire usage d'une observation du soleil à un instant quelconque, et non seulement de celle faite à l'instant où D est nul pour fixer la position de l'équinoxe de printemps. Pour obtenir E et A , éléments qui déterminent l'écliptique par rapport à l'équateur, il suffit donc en théorie de deux observations du soleil faites à des époques quelconques. Il est avantageux de calculer E à l'aide de comparaisons faites au voisinage des solstices, $\sin A$ atteignant alors son maximum ou son minimum (± 1), et de déterminer A au voisinage des équinoxes, $\sin A$ variant alors le plus rapidement possible¹⁴⁾.

On peut aussi utiliser, dans l'un et l'autre cas, des séries d'observations comprenant plusieurs semaines. La marche est alors la suivante: chaque observation méridienne du soleil faite vers le temps des équinoxes donne son ascension droite A , d'où la correction de pendule, et par suite l'ascension droite de chaque étoile fixe observée dans le voisinage; en même temps on contrôle la marche de la pendule par des observations d'étoiles fixes. Pour éliminer autant que possible l'influence de cette marche de la pendule, on prépare une liste des étoiles les plus brillantes, que l'on puisse observer même en plein jour dans le voisinage immédiat du soleil, tantôt avant tantôt après le passage de celui-ci, et l'on obtient ainsi un système d'ascensions

de l'horizon), ou par la méthode Talcott-Horrebrow, consulter les traités classiques, ainsi que l'article VII 4. La première de ces méthodes s'applique aussi à la recherche des différences de déclinaison.

13) Les variations de latitude du soleil produites par les perturbations planétaires sont, en raison de leur petitesse, envisagées comme des quantités différentielles relativement à celles qui figurent dans la formule, et calculées à part.

14) *Pour plus de détails, voir les traités classiques, en particulier *B. Bailaud*, Cours d'astronomie 2, Paris 1896, p. 86/8; *H. Andoyer*, Cours d'astronomie 2, Paris 1909, p. 183/7.*

droites *fondamentales*. Ce système fondamental, dont l'amélioration ultérieure, en particulier en tenant compte des mouvements propres [voir n° 7 b], demeure la tâche perpétuelle du cercle méridien, sert de base aux observations des autres étoiles. Pour éliminer la correction de la pendule et obtenir les ascensions droites absolues, on n'est plus alors limité aux observations du soleil et à celles faites au voisinage des équinoxes; chaque passage au méridien d'une étoile fondamentale donne le temps sidéral, par suite la correction de pendule, et enfin l'ascension droite de tout autre astre dont le passage méridien a été noté d'après la pendule.

4. La pratique actuelle des observations méridiennes. L'idée fondamentale développée dans le n° 3 pour déterminer les coordonnées équatoriales au cercle méridien est réalisée en quelque sorte par degrés, en séparant les observations relatives ou annexes des observations fondamentales.

Ces dernières ont pour but de fournir un tableau des coordonnées sphériques d'une assez grande quantité d'étoiles réparties sur toute la surface du ciel. Un tel tableau s'appelle *système fondamental*. Au contraire les observations relatives ont pour objet de conclure la position d'une étoile quelconque par rapport au système fondamental; on part de la position d'étoiles voisines qui font partie de ce système, et l'on détermine les différences entre les coordonnées de l'astre et celles de ces étoiles.

Détermination des déclinaisons fondamentales. L'établissement d'un système fondamental purgé d'erreurs en déclinaison ne soulève aucune difficulté de principe: il suffit de se livrer à une critique complète des erreurs instrumentales, telles que la flexion, les erreurs de division, surtout la réfraction [voir là-dessus, comme sur les erreurs systématiques des différences de déclinaison, l'article VII 6]. *S. Newcomb*¹⁵⁾ a indiqué un dernier moyen de contrôle et de rectification d'un système fondamental: il considère les positions successives des planètes et vérifie que, abstraction faite des perturbations, chaque planète reste dans un plan passant par le soleil.

Détermination des ascensions droites fondamentales. La méthode la plus simple est celle qui a été développée dans le paragraphe précédent: on observe différentes étoiles fondamentales voisines du soleil,

15) The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy, Washington 1895; publié aussi comme supplément à The American Ephemeris and Nautical almanac for 1897, p. 89 [Washington]. Voir encore *S. Newcomb*, Catalogue of fundamental stars for 1875 and 1900, Washington 1898, p. 188.

et le soleil lui-même aux environs des équinoxes; c'est la déclinaison du soleil qui donne son ascension droite absolue, et les différences d'ascension droite entre le soleil et les étoiles s'observent sur la pendule méridienne. C'est ainsi que *F. W. Bessel*, dans sa réduction des observations de *J. Bradley*, rattacha directement au soleil 14 des plus brillantes étoiles que *J. Bradley* s'était imposé d'observer même pendant le jour, et c'est sur ce système de 14 étoiles qu'il basa la réduction des autres. Le système fondamental qui porte le nom de *N. Maskelyne*, successeur de *J. Bradley* à l'observatoire de Greenwich, est l'extension du système de *J. Bradley*, fondée sur le même principe. Il comprend 36 étoiles fondamentales choisies parmi les plus brillantes qui sont voisines de l'équateur et qui sont observables à Greenwich; pendant le dernier siècle, ce système a été la base de toutes les déterminations d'ascensions droites.

Toutefois les comparaisons directes et isolées des étoiles au soleil ne vont pas sans offrir, à côté de la simplicité théorique de leur emploi, de graves inconvénients. En premier lieu, les observations du soleil, dont le centre n'est déterminé que par l'observation des bords, sont beaucoup plus pénibles et beaucoup plus entachées d'erreurs personnelles que les observations d'étoiles. D'un autre côté, le calcul des ascensions droites est fondé sur la détermination des déclinaisons, détermination qui ne peut se faire qu'en évaluant des erreurs telles que la réfraction, qu'il est difficile d'éliminer complètement. Enfin l'époque des équinoxes est la seule où l'on puisse espérer l'amélioration du système fondamental ainsi construit. Pour ces diverses raisons, il était donc naturel de séparer l'un de l'autre les deux problèmes de la *détermination d'un système d'étoiles fondamentales*, et de la *détermination de son erreur absolue*, c'est-à-dire au fond, de la *détermination de l'équinoxe*¹⁶).

La *détermination propre du système fondamental* est à vrai dire sujette à une cause d'erreur que l'observation du soleil éliminerait théoriquement: les irrégularités de période diurne de la marche de la pendule dans un sens plus étendu, c'est-à-dire les variations de la marche de la pendule, de l'instrument et de l'erreur personnelle de l'observateur pendant une journée.

16) Déjà *N. Maskelyne* ne déterminait directement, dans ses derniers catalogues, que l'ascension droite de α Aigle par rapport au soleil; pour les 35 autres étoiles fondamentales, il prenait les différences de leurs ascensions droites avec celle de α Aigle. Voir les catalogues pour 1770 [Tables for computing the apparent places of fixed stars, Londres 1774], pour 1790 [*F. Wollaston*, Specimen of a general catalogue, Londres 1789] et pour 1805 [Astronomical observations made at the Observatory at Greenwich in 1807, II, p. 112 et *F. X. von Zach*, Tabulae speciales aberrationis 1, Gotha 1806].

Pour éliminer ces influences, *G. Piazzi*¹⁷⁾ compara directement au soleil deux étoiles, α Petit Chien (Procyon), et α Aigle (Altaïr), dont la différence d'ascension droite est d'environ 12 heures, et rattacha le reste des étoiles à ces deux points. *F. W. Bessel* observa les mêmes étoiles le plus souvent possible à toutes les époques de l'année, dans le but de déterminer à différentes heures du jour les différences d'ascension droite, afin d'éliminer les inégalités de marche de période diurne. Néanmoins ses deux catalogues fondamentaux¹⁸⁾ gardent la trace d'erreurs systématiques¹⁹⁾. *U. J. J. Le Verrier*²⁰⁾ et *A. Auwers*²¹⁾ allèrent plus loin dans l'élimination de ces sources d'erreurs, en considérant toutes les différences mutuelles d'ascension droite des diverses étoiles.

Dès que l'on put disposer des premiers catalogues fondamentaux, on se préoccupa de les améliorer à l'aide des observations ultérieures, en considérant le catalogue primitif comme un point de départ sinon rigoureux, du moins dénué d'erreurs systématiques, et en cherchant les corrections individuelles des étoiles par rapport à l'ensemble. On suppose alors que pendant un petit nombre d'heures la marche de la pendule est linéaire, et l'on compare à l'heure ainsi obtenue les ascensions droites des fondamentales observées dans l'intervalle. Mais si l'on élimine ainsi la difficulté qui résulte des périodes diurnes dans la marche de la pendule, on laisse évidemment subsister l'erreur systématique du catalogue origine qu'on peut tout au plus espérer affaiblir légèrement²²⁾; on supprime en outre l'indépendance fondamentale des observations. C'est ce qui s'est produit pour les catalogues de Greenwich basés sur le catalogue fondamental de *J. Pond*²³⁾, et ce sont ces causes d'erreurs que

17) Del real osservatorio di Palermo, libro sesto, Palermo 1806; Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae ineunte saeculo XIX, Palermo 1814.

18) *F. W. Bessel*, Abh. Akad. Berlin 1818/9, éd. 1820, math. Klasse, p. 19; id. 1825, éd. 1828, math. Klasse, p. 23.

19) Voir entre autres: *F. Cohn*, Viertelj. Astron. Ges. Leipzig 33 (1898), p. 291; Astron. Beobachtungen Univ.-Sternwarte Königsberg 39 (1899).

20) Ann. Observ. Paris, Mémoires 2 (1856), p. 186/301; ce travail contient une nouvelle détermination des 36 étoiles fondamentales de *N. Maskelyne* d'après les observations de *J. Bradley*.

21) Reduktion der Beobachtungen der Fundamentalsterne zu Palermo 1803/5 [Publication der astron. Ges. 5 (1866)]; Neue Reduktion der Bradleyschen Beobachtungen aus den Jahren 1750/62, 1, S^t Pétersbourg 1903.

22) *S. Newcomb*, Astron. Observ. 1867 U. S. naval observatory, appendice 3; Positions of the fundamental stars, Washington 1870.

23) *T. H. Safford*, On the positions of the Radcliffe Catalogue [Monthly Notices astron. Soc. 21 (1860/1), p. 245]; *W. A. Rogers*, On the periodic errors of the right ascensions observed between 1858 and 1871 [Proc. Amer. Acad. arts sc. 9 (1874), p. 127/33].

*S. Newcomb*²³⁾ et *G. B. Airy*²⁴⁾ essayèrent d'éviter dans leurs travaux lorsqu'ils discutèrent ces catalogues.

*A. Wagner*²⁵⁾ proposa une méthode notablement plus rigoureuse; il considère les améliorations obtenues par une telle récapitulation comme se rapportant à un groupe moyen, dont il discute la valeur relative aux différentes époques de l'année²⁶⁾.

On élimine complètement l'influence des anciennes observations et la marche de la pendule sans avoir recours au soleil de la façon suivante: les temps de culmination de deux fondamentales observées successivement servent à obtenir une amélioration de leur différence d'ascension droite, par l'intermédiaire d'une équation dans laquelle on a égard à une irrégularité possible de période diurne dans la marche de la pendule^{26a)}.

Les derniers progrès accomplis dans la pratique des observations méridiennes permettent de considérer comme aplanies les principales difficultés qui se présentaient dans la formation d'un catalogue fondamental: d'une part, on peut négliger la marche diurne de la pendule si elle a une compensation suffisante, et si elle est installée dans un milieu où la température et la pression demeurent invariables; d'un autre côté, l'état de l'instrument peut être contrôlé rapidement par l'emploi du niveau, du nadir, et des mires fixes; enfin l'emploi des micromètres auto-enregistreurs de *J. A. Repsold* et de *P. Gautier* [cf. VII 5] élimine presque entièrement toute équation personnelle des observations et a fortiori la variation de l'équation personnelle.

Fixation de l'équinoxe. Le système fondamental une fois établi, il reste à le compléter par la détermination de l'origine des ascensions

24) *Nine-Year Cat. for 1872* [Astronomical observations Observatory Greenwich 1876, appendice 1.] Dans ce catalogue, comme dans ceux qui suivent pour 1880 et 1890 [Ten-Year, et Second Ten-Year Cat., Astronomical observations Observatory Greenwich 1887, appendice 2; id. 1898, appendice 2] on n'a employé, pour l'élimination des erreurs périodiques, que les séries d'observations qui comprennent au moins une durée de douze heures (twelve hour groups).

25) Observations de Poulkovo 3 (1870) et plus particulièrement encore id. 12 (1887).

26) Il est clair que les différences entre les saisons correspondent à une marche diurne de la pendule.

26a) Cette méthode développée d'abord par *F. Cohn*¹⁹⁾ a été employée ensuite par *M. Nyström*, *Ergebnisse der 1899—1903 in Odessa beobachteten Durchgänge der Fundamentalsterne* [Mitteilungen der Nikolai-Hauptsternwarte zu Pulkowo 1 (1907), p. 109] et *P. Jaschnov*, *Bestimmung der absoluten Rektascensionen der Fundamentalsterne für den Katalog 1905* [Mitteilungen der Nikolai-Hauptsternwarte zu Pulkowo 4 (1912), p. 203].

droites, ou, en d'autres termes, par sa jonction au soleil; on a vu plus haut comment la détermination de l'équinoxe se déduit avec une haute précision des mesures de déclinaison du soleil prises aux environs des équinoxes. On transforme les temps des passages observés du soleil en ascensions droites rapportées au système fondamental en tenant compte de la marche de la pendule, déterminée par les observations simultanées des étoiles fondamentales. La comparaison de ces ascensions droites avec les ascensions droites absolues calculées d'après les observations de déclinaisons sert à améliorer le système fondamental. Ainsi cette jonction au soleil reste toujours affectée des erreurs systématiques des observations de déclinaison, en dehors des difficultés propres aux déterminations d'ascension droite des bords du soleil²⁷⁾.

Historique des catalogues fondamentaux. Les deux Catalogues de *F. W. Bessel* cités précédemment, qui comprennent les 36 étoiles fondamentales de *N. Maskelyne*, ont été longtemps, dans ce domaine, la base de la plupart des recherches; c'étaient sur eux qu'étaient fondées les «*Tabulae Regiomontanae*»²⁸⁾ qui furent bien souvent employées. On se servait concurremment d'autres déterminations de ces mêmes étoiles, les «*Positiones mediae*» de *F. G. W. Struve*, le «*Catalogus Aboënsis*» de *F. W. Argelander*, le catalogue contenu dans les «*Tabulae reductionum*» de *J. Ph. Wolfers*²⁹⁾. Vers 1870, *S. Newcomb*³⁰⁾ mena à bonne fin une nouvelle détermination des 36 fondamentales de *N. Maskelyne*.

Dans la suite, les astronomes s'efforcèrent d'augmenter le nombre de ces étoiles fondamentales, et de les choisir de telle façon qu'elles soient distribuées d'une façon aussi uniforme que possible sur toute la surface du ciel, afin de pouvoir établir une jonction différentielle assez intime entre les autres astres et le système fondamental (voir ci-dessous). Telle fut, par exemple, l'origine des catalogues d'étoiles principales de Poulkovo pour 1845, 1865 et 1885³¹⁾. Les divers annuaires astronomiques perfectionnèrent les catalogues fondamentaux propres à chacun d'eux: le *Nautical Almanac* prit comme bases les observa-

27) Voir par ex. *A. Wagner*, Observations de Poulkovo 12 (1887), p. 89.

28) *F. W. Bessel*, *Tabulae Regiomontanae*⁶⁾, Königsberg 1830.

29) *Tabulae reductionum observationum astronomicarum annis 1860 usque ad 1880 respondentis*, Berlin 1858. Ces tables contiennent une discussion de nombreuses séries anciennes d'observations.

30) On the right ascensions of the equatorial fundamental stars [*Astron. Observ.* 1870, U. S. naval observatory, appendice 3].

31) Observations de Poulkovo 1 (1869); 3 (1870); 4 (1872); 12 (1887); Publications de l'Observatoire central Nicolas (2) 1 (1898); (2) 3 (1905); (2) 9 (1903).

tions de *J. Pond* et *G. B. Airy*³²); la Connaissance des Temps élargit le Catalogue des étoiles de *N. Maskelyne* discuté par *U. J. J. Le Verrier* à l'aide des observations faites à Paris, en ayant surtout pour but de fournir des positions d'étoiles de culmination qui passent dans le voisinage de la Lune au méridien, et à peu près sur le même parallèle³³); les observations de zones de l'Astronomische Gesellschaft, entreprises à la fin du dix-neuvième siècle grâce à la collaboration de nombreux observatoires, furent fondées sur le catalogue fondamental de *A. Auwers*³⁴), qu'adopta immédiatement le «*Berliner Astronomisches Jahrbuch*», et qui servit de repère pour une quantité considérable d'observations méridiennes. Dans ces derniers temps, surtout depuis la Conférence internationale des étoiles fondamentales tenue à Paris en 1896*, on a fait grand usage du catalogue fondamental de *S. Newcomb*³⁵); celui-ci a l'avantage de contenir un très grand nombre d'étoiles fondamentales, plus d'un millier, mais les positions individuelles n'ont pas autant de précision que dans les catalogues plus restreints. Plus récemment ont paru de nouveaux catalogues de fondamentales de *Lewis Boss*³⁶).

Dans l'avenir, le nombre des étoiles fondamentales doit encore s'accroître, de façon à fournir de plus en plus de points de repère aussi

32) Dans les différentes années des «*Astronomical observations made at the Observatory at Greenwich*». Plus tard parurent: *L. Boss*, *Declination of fixed stars*, Washington 1878; *S. Newcomb*, *Catalogue of 1098 standard clock and zodiacal stars*, Washington 1882; extrait de: *Astronomical papers for the use American Ephemeris and Nautical almanac 1* (1880).

33) **Ann. Observ. Paris, Mémoires 2* (1856), p. 186; *Connaissance des Temps pour 1808, 1817, 1820, 1832, 1838, 1840, 1849, 1862, 1863, 1864, 1869, 1876*.*

34) *Fundamentalkatalog für die Zonenbeobachtungen am nördlichen Himmel* [Publication der astron. Ges. 14 (1879); 17 (1883); *Astron. Nachr.* (Kiel) 121 (1889), col. 145; 143 (1897), col. 361 (ciel austral)]; *Vorläufige Verbesserungen* [*Astron. Nachr.* (Kiel) 147 (1898), col. 49, 105]; *Ergebnisse der Beobachtungen 1750/1900 für die Verbesserung des Fundamentalkatalogs des Berliner Jahrbuchs* [*Astron. Nachr.* (Kiel) 164 (1904), col. 225]. *J. Peters*, *Neuer Fundamentalkatalog des Berliner Astron. Jahrbuchs nach den Grundlagen von A. Auwers* [Veröffentlichungen des astronomischen Recheninstitutes Berlin 33 (1907), p. 1/116].

35) *Catalogue of fundamental stars for 1875 and 1900*, Washington 1898; extrait de *Astronomical papers for the use American Ephemeris and Nautical almanac 8* (1898).

36) *Positions and motions of 627 standard stars* [*The astronomical Journal* 25 (1908), p. 17]; **List of 1059 standard stars for 1910*, published by the Dudley observ. Albany, New York 1909. Cette brochure est d'ailleurs un extrait de *L. Boss*, *Preliminary general catalogue of 6188 stars for the ep. 1900*, Washington 1910.*

exacts que possible; la Commission internationale du Catalogue photographique, réunie à Paris en 1909, a décidé de constituer, grâce à la coopération de plusieurs observatoires, un nouveau Catalogue fondamental comprenant des étoiles d'éclat assez faible pour qu'on puisse éliminer l'équation de grandeur en leur rattachant les étoiles de repère du catalogue photographique.* Mais pour le perfectionnement, qu'il est nécessaire de ne pas perdre de vue, de la précision des observations, il faudra toujours revenir à des systèmes plus restreints, celui des étoiles de *N. Maskelyne* par exemple.

Observations relatives ou annexes. Les systèmes fondamentaux dont nous venons de décrire la constitution servent à déterminer les positions de la plus grande partie des étoiles fixes, du soleil, de la lune et des planètes. Ils servent surtout de base aux observations de *zones*, où l'on détermine les coordonnées de toutes les étoiles appartenant à une bande très étroite en déclinaison. Ces observations sont en quelque sorte des mesures différentielles: les points origines des numérations, zéro du cercle de déclinaison, point vernal, corrections de la pendule, sont donnés par les observations de fondamentales. Il est naturel de prendre de préférence les fondamentales qui se trouvent au voisinage de la zone observée.

5. Examen critique des hypothèses. Après avoir examiné les procédés de détermination des coordonnées astronomiques, il convient de rechercher si ces coordonnées peuvent être utilisées directement pour la théorie des mouvements des corps célestes. Les calculs de la mécanique céleste doivent être basés sur la connaissance des directions *vraies* des astres, ces directions étant déterminées par les coordonnées sphériques des points où elles coupent la sphère céleste. Or nous allons voir que l'observation ne peut donner qu'une direction *apparente*, distincte de la vraie, et que de plus, les plans fondamentaux auxquels on rapporte les coordonnées sphériques ne restent pas invariables dans l'espace.

Il y a donc lieu, tout en conservant les principes qui servent de fondement aux observations méridiennes, d'étudier quelles corrections on doit faire subir aux coordonnées directement observées pour obtenir les coordonnées vraies.

5a. Altérations de la ligne de visée.

I. *La parallaxe.* Les directions dans lesquelles on vise simultanément un astre de deux points différents de la surface de la terre ne coïncident pas; de même, à diverses époques, à la suite du déplacement de la terre qui entraîne l'observateur, les coordonnées sphériques apparentes d'un

astre fixe ne sont point les mêmes. Pour comparer diverses observations, on corrige chacune d'elles d'une quantité appelée *parallaxe*, de façon à obtenir la direction dans laquelle on verrait l'astre d'un point qui ne participe pas au mouvement terrestre; en décomposant le mouvement de la terre on a ainsi des parallaxes diurnes, annuelles, ou séculaires. Dans le calcul de ces corrections, on doit faire intervenir, outre le mouvement de la terre, la distance de l'astre; inversement la grandeur des déplacements apparents observés fournit le moyen le plus efficace pour déterminer les distances des astres.

II. *La réfraction astronomique* [cf. VII 2]. L'influence de la réfraction est de même nature que celle des erreurs de division du cercle méridien, et l'on en tient compte en même temps que de ces dernières.

III. *L'aberration*. Sous le nom d'*aberration astronomique*, on comprend les déplacements apparents des astres ayant leur origine dans ce fait que la vitesse de la lumière n'est pas infinie quand on la compare aux vitesses des astres. Ces phénomènes s'expliquent par deux considérations distinctes: en premier lieu, au moment où nous observons un astre, il ne se trouve plus au même point du ciel qu'à l'instant où il émettait le rayon lumineux; la correction à faire s'appelle communément *l'aberration planétaire*, pour cette raison qu'il n'y a lieu de l'appliquer jusqu'ici qu'aux corps faisant partie du système solaire. On appelle au contraire *aberration des fixes* le déplacement apparent dû à la vitesse de l'observateur; on voit l'étoile dans une direction qui est la diagonale du parallélogramme construit avec la vitesse V du rayon lumineux et la vitesse v de l'observateur changée de sens.³⁷⁾ L'effet de l'aberration est donc analogue à celui de la parallaxe; ce serait le déplacement qui se produirait si l'observateur se reculait de la longueur v en sens inverse de son mouvement, l'astre étant éloigné d'une distance V .

La découverte de l'aberration des fixes fut faite fortuitement par *J. Bradley*³⁸⁾: cherchant à déterminer la parallaxe d'étoiles trop éloignées, il observa l'aberration annuelle. En s'appuyant sur la théorie de l'émission de la lumière, il donna du phénomène une explication correcte³⁹⁾. C'est à *A. Fresnel*⁴⁰⁾ qu'est due la première explication basée sur la théorie des ondulations lumineuses.

37) Voir *C. F. Gauss*, *Theoria motus corporum coelestium*, Hambourg 1809 n° 71; *Werke* 7, Göttingue (Leipzig) 1906, p. 85/8.

38) Account of a new discovered motion of the fixed stars [Philos. Trans. London 35 (1727/8), p. 637.

39) Voir par ex. *M. J. J. Le Français de Lalande*, *Astronomie*, (3^e éd.) 3, Paris 1792, p. 92/3.

On démontre⁴¹⁾ que la grandeur de l'aberration ne dépend pas du passage de la lumière à travers la lunette et de l'altération qu'en éprouve la vitesse V de la lumière⁴²⁾; qu'elle n'est pas influencée par le mouvement de la source lumineuse⁴³⁾. Pour l'étude détaillée de cette question difficile, on se reportera à l'article V 16 et aussi à l'article V 17.

Dans ces dernières années la théorie de la relativité a quelque peu modifié les idées au sujet de l'aberration.

5 b. Variation des plans fondamentaux. Précession. Nutation. Mouvements du pôle terrestre. L'axe de rotation de la terre ne reste fixe ni à l'intérieur du globe, ni dans l'espace; de même, le plan de l'écliptique oscille lentement. Si faibles que soient ces déplacements, il est clair qu'il faut en tenir compte quand les observations sont faites à des époques assez éloignées les unes des autres, puisqu'un mouvement doit d'abord s'étudier par rapport à des plans fixes. D'autre part, il faut voir comment l'on doit préciser, en tenant compte de ces mouvements, les éléments qui interviennent dans la définition des coordonnées, tels que la mesure du temps, la hauteur du pôle, etc.

La théorie donne, pour les plans fondamentaux, les déplacements suivants:

L'écliptique subit, sous l'influence des attractions des planètes, des déplacements faibles et lents, dont la détermination dépend des masses et des éléments des orbites de ces planètes, qui sont eux-mêmes calculés d'après les observations des mouvements de ces astres. Ces déplacements peuvent se décomposer en deux parties, un déplacement séculaire et un déplacement périodique. Si l'on néglige les termes périodiques, le plan correspondant est celui de l'*écliptique moyen* (pratiquement on dit *écliptique tout court*). Le soleil ne se meut pas (par rapport à la terre) exactement dans l'écliptique moyen, mais sa latitude par rapport à ce plan atteint rarement 1". La variation de l'écliptique ne porte que sur l'une des deux coordonnées équatoriales,

40) Ann. chimie et phys. (2) 9 (1818), p. 57/86 (lettre à Arago); Œuvres 2, Paris 1868, p. 627.

41) Voir par ex. *M. J. J. Le Français de Lalande* [Astronomie, (3^e éd.) 3, Paris 1792, p. 95] qui rapporte que *R. G. Boscovitch* émit l'idée de décider de la question en remplissant la lunette d'une colonne d'eau.

42) Voir encore *W. Klinkerfues*, Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie, Leipzig 1867.

43) Voir aussi *H. Battermann*, Beiträge zur astronomischen Aberrationslehre, Diss. Berlin 1881; *H. Poincaré*, Leçons sur la théorie mathématique de la lumière, Paris 1889, p. 379/98.

l'ascension droite, dont elle change le point origine; elle entraîne donc, pour les ascensions droites de toutes les étoiles, une même modification dépendante du temps, dont l'expression sera donnée plus loin, et elle ne change pas les déclinaisons.

L'axe de rotation de la terre se déplace, d'après les lois générales de la rotation des corps, suivant un mouvement dont la traduction analytique serait fort compliquée, si on voulait l'étudier en toute rigueur. Mais, si l'on a égard aux relations quantitatives, et si l'on néglige tout ce qui est inférieur à la précision fournie par les observations⁴⁴), le mouvement peut se représenter assez simplement.

A l'intérieur du globe terrestre, par suite de l'inégalité des moments principaux d'inertie A et C , et sous l'influence des actions combinées du soleil et de la lune, l'axe instantané de rotation se balance d'une façon très légère, selon une période presque diurne. Si l'on appelle ξ et η les coordonnées rectilignes du pôle terrestre sur le plan tangent à la position moyenne, de telle sorte que ξ représente l'irrégularité de la hauteur du pôle en un lieu au temps sidéral Θ , et si \odot et \sphericalangle sont les longitudes du soleil et de la lune, on a⁴⁵)

$$\xi = + 0'',009 \sin \Theta - 0'',007 \sin (\Theta - 2\sphericalangle) - 0'',003 \sin (\Theta - 2\odot)$$

$$\eta = - 0'',009 \cos \Theta + 0'',007 \cos (\Theta - 2\sphericalangle) + 0'',003 \cos (\Theta - 2\odot);$$

ce balancement fait varier de très peu la hauteur du pôle et la position du méridien.

Dans l'espace, le mouvement de l'axe terrestre est beaucoup plus considérable; on le décompose en deux autres, qui constituent les phénomènes de précession et de nutation; la *précession* est un mouvement séculaire, ou plutôt à très longue période, autour de l'axe de l'écliptique; on comprend sous le nom de *nutation* une série de balancements à courte période autour de la position moyenne. A la précession correspond un déplacement presque uniforme de la ligne d'inter-

44) Les considérations dont il s'agit reposent d'une part sur la presque solidité du corps terrestre (ou plutôt sa rigidité d'ensemble dans la rotation), d'autre part sur la petitesse de l'angle formé par l'axe de rotation et l'axe principal d'inertie polaire C , et sur la faible différence des deux moments d'inertie équatoriaux principaux A et B . L'étude de la figure de la terre a fixé le premier point; le second résulte des observations du pendule, qui n'ont montré aucun rapport entre l'intensité de la pesanteur et la longitude géographique, et d'où il résulte que l'on a certainement $\frac{B-A}{C-A} < \frac{1}{100}$. Voir par ex. *F. R. Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie 2, Leipzig 1884, p. 404.

45) Voir *F. R. Helmert*, Höhere Geodäsie⁴⁴) 2, p. 434; *F. Tisserand*, Traité de mécanique céleste 2, Paris 1891, p. 496.

section de l'équateur et de l'écliptique dans ce dernier plan, par suite une avance presque régulière de l'équinoxe, d'où le nom de *précession des équinoxes*; en même temps l'inclinaison relative des deux plans reste constante. La nutation altère d'une façon irrégulière non seulement la position des équinoxes, mais aussi l'obliquité de l'écliptique⁴⁶). Si les deux moments principaux d'inertie équatoriaux étaient sensiblement différents, les attractions du soleil et de la lune occasionneraient à la fois une nutation de période semi-diurne et un mouvement conique de l'axe du monde à l'intérieur du globe, de même période, provoquant une variation des latitudes géographiques; à cause de l'inégalité

$$\frac{B - A}{C - A} < \frac{1}{100},$$

ces mouvements restent très au-dessous des limites de la perception⁴⁷). De même, l'imperfection de la rigidité du corps terrestre ne produit aucun effet appréciable.

En outre du déplacement de l'axe de rotation à l'intérieur du globe, dont le sens et la grandeur peuvent se calculer d'après les expressions de ξ et η , la mécanique en indique un autre, tenant simplement, en faisant abstraction des forces extérieures, à ce que l'axe de rotation ne coïncide pas avec l'axe principal d'inertie. Dans l'hypothèse de la rigidité absolue, si la coïncidence des deux axes avait lieu à l'origine du mouvement, elle se conserverait indéfiniment, aucune force extérieure n'intervenant; mais, si elle n'existait pas, l'axe instantané de rotation devrait décrire autour de l'axe de figure un cône de petite ouverture α , dans une période dénommée *eulérienne*⁴⁸), dont la durée est égale à $\frac{A}{C - A}$ soit 304,8 jours solaires moyens⁴⁹). Dans l'espace, au contraire, l'axe

46) C'est à *Hipparque* que remonte la découverte de la précession des équinoxes [cf. *Claude Ptolémée, Μεγάλη σύνταξις* (Almageste) livre 7, chap. 2; éd. *J. L. Heiberg, Syntaxis mathematica* 2, Leipzig 1903, p. 12/6]. La nutation fut trouvée par *J. Bradley*, *Philos. Trans. London* 45 (1747/8), p. 1.

47) Le contraire a été soutenu par *F. Folie*, Existence et grandeur de la précession et de la nutation diurnes [Bull. Acad. Belgique (3) 3 (1882), p. 739 et nombreux écrits postérieurs] dont *R. Lehmann-Filhès* a réfuté les idées [Astron. Nachr. (Kiel) 124 (1890), col. 377]. Voir aussi les travaux de *F. Tisserand* [Bull. astron. 7 (1890), p. 278] et de *R. Radau* [Bull. astron. 7 (1890), p. 194].

48) *L. Euler*, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, Rostock et Greifswald 1765, p. 375; *F. Tisserand*, *Mécanique céleste*⁴⁵) 2, p. 494.

49) Valeur numérique d'après *Th. von Oppolzer*, *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, (2^e éd.) 1, Leipzig 1882, p. 151; trad. française de *E. L. J. Pasquier* 1, Paris 1886, p. 151; *F. R. Helmert*, *Höhere Geodäsie*⁴⁴) 2, p. 394; *F. Tisserand*, *Mécanique céleste*⁴⁵) 2, p. 494/5.

instantané de rotation conserverait une direction à peu près invariable⁵⁰); c'est cette invariabilité presque absolue qui permet, dans la pratique, de réduire les observations faites dans le méridien instantané avec la hauteur instantanée du pôle, en ne tenant compte que du mouvement de précession et de nutation que produiraient sur l'axe les attractions solaire et lunaire calculées comme s'il y avait coïncidence entre l'axe principal d'inertie et l'axe de rotation⁵¹).

Si la solidité du corps terrestre n'est pas parfaite, l'invariabilité de l'axe de rotation dans l'espace est encore théoriquement plus assurée; au contraire, en ce qui concerne les mouvements à l'intérieur de la terre, c'est surtout à l'observation qu'il faut demander de nous renseigner, puisque le déplacement de l'axe d'inertie principal ne peut être étudié directement⁵²). C'est dans le courant du 19^{ième} siècle seulement qu'on réussit, après maintes recherches infructueuses, à prouver l'existence de tels déplacements de l'axe de rotation dans le globe, se traduisant par des variations de latitudes (*C. A. F. Peters*, *M. Nyrén*, *Fr. Küstner*). La période d'Euler prise d'abord comme point de départ par *C. A. F. Peters* et *M. Nyrén* est absolument masquée par d'autres influences; *S. C. Chandler*⁵³) montre qu'une période de 432 jours environ, jointe à une période annuelle, représente assez bien les observations.

50) D'une façon plus précise, le pôle instantané terrestre décrit autour du pôle du plan invariable un petit cercle (sur la sphère de rayon 1) dont le rayon est $\alpha \cdot \frac{C-A}{C}$; on a d'ailleurs $\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305}$ et $\alpha < 1''$. Voir par ex. *F. R. Helmert*, *Höhere Geodäsie*⁴⁴) 2, p. 407/8, et déjà *C. A. F. Peters*, *Resultate aus Beobachtungen des Polarsterns* [*Astron. Nachr.* (Altona) 22 (1845), col. 71, 81, 119].

51) C'est une conception inexacte du déplacement de l'axe instantané de rotation qui a été l'origine des objections erronées formulées à maintes reprises par *F. Folie* contre les méthodes de réduction des observations de déclinaison. En face des nombreux travaux de *F. Folie* sur la question [*Astron. Nachr.*; *Viertelj. der Astron. Ges.*; *C. R. Acad. sc. Paris* 110 (1890), p. 1058; *Bull. astron.* 7 (1890), p. 271; *Mém. Soc. sc. Liège* (2) 14 (1888), *Traité des réductions stellaires*, p. 1/18] voir la réfutation de *R. Radau*, *Quelques mots sur la nutation diurne* [*Bull. astron.* 7 (1890), p. 194] et de *F. Tisserand*, *Note sur la nutation diurne* [*Bull. astron.* 7 (1890), p. 273].

52) L'observation montre que l'on peut admettre que les oscillations de l'axe d'inertie sont très faibles, et sont certainement inférieures à 1''. On trouve des renseignements bibliographiques sur ce sujet dans *F. R. Helmert* [*Höhere Geodäsie*⁴⁴) 2, p. 408 et suiv.] et dans *F. Tisserand* [*Mécanique céleste*⁴⁶) 2, p. 476 (chap. 29 et 30). Voir aussi *Bull. astron.* 7 (1890), p. 449].

53) Voir une série de mémoires de *S. C. Chandler*, *On the variation of latitude* [*The astronomical Journal* 10 (1891), p. 59 et volumes suivants].

Mais les oscillations sont si irrégulières qu'il importe de les contrôler constamment; c'est le but que poursuit et que poursuivra dans l'avenir une association internationale qui publie chaque année les résultats obtenus dans diverses stations⁵⁴).

Données numériques de la précession et de la nutation. La figure 1, formée de grands cercles de la sphère céleste donne l'image du déplacement des plans fondamentaux.

EE_0 , EE_t , AA_0 , AA_t , représentent les deux plans fondamentaux aux époques 0 et t , t désignant le temps écoulé depuis l'époque origine, exprimé en siècles juliens (chaque siècle valant 36525 jours solaires); A et E sont ainsi les nœuds ascendants des plans mobiles sur les plans fixes; γ_0 , γ_t sont les vrais équinoxes de printemps des deux époques, ϑ_0 , ϑ_t sont les deux obliquités vraies, tandis que ϑ' (ou ϑ'_t) est l'obliquité de l'équateur mobile sur l'écliptique fixe, qui intervient dans les développements théoriques⁵⁵).

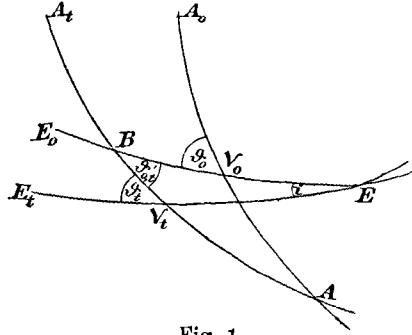


Fig. 1.

54) Voir à cet égard les différents rapports présentés dans les réunions de l'association géodésique internationale, ainsi que *T. Albrecht*, Resultate des internationalen Breitendienstes 1 à 4, Berlin 1903 à 1911. Différents mémoires de *T. Albrecht* [Astron. Nachr. (Kiel) 126 (1891), col. 145, et volumes suivants] traitent du mouvement du pôle pendant de longues années, en s'appuyant sur de nombreuses séries d'observations. Pour les contrées voisines du pôle, les observations des différences de longitudes [cf. *M. Brendel*, Über den Einfluss von Polschwankungen auf die geographische Lage der Erdorte, Astron. Nachr. (Kiel) 131 (1893), col. 59] et celle des azimuts, sont intéressantes. Jusqu'ici, ce n'est que très rarement que l'on a cherché à constater si les variations d'azimut des mires méridiennes peuvent s'expliquer en partie par le déplacement du méridien lui-même. La première indication sur ce point date de *F. W. Bessel*, Astronomische Beobachtungen Univ.-Sternwarte Königsberg 6 (1821), p. XVII; voir *A. Socolov* [Bestimmung der periodischen Bewegung der Erdpole mittels der Miren des Pulkovaer grossen Passageninstruments, Astron. Nachr. (Kiel) 132 (1893), col. 359; 134 (1894), col. 233] et *E. Becker* [Ann. Univ. Sternwarte Strassburg 1 (1896), p. LVI]. *Pour l'exposition des résultats les plus récents, voir *Ch. Lallemand*, Les marées de l'écorce et l'élasticité du globe terrestre [Annuaire pour l'an 1910, publié par le Bureau des longitudes, p. B 1 à B 90] et *H. Poincaré*, Note sur la 16^{ième} conférence de l'association géodésique internationale [Annuaire pour l'an 1911, publié par le Bureau des longitudes, p. A 1 à A 29].*

55) Dans les notations, il existe jusqu'à présent une assez grande variété: celles adoptées par *F. Tisserand* dans sa Mécanique céleste d'après *P. S. Laplace*,

Comme époque fixe, *U. J. J. Le Verrier*⁵⁶⁾ prenait l'origine de 1850; précédemment, d'après *P. S. Laplace*⁵⁷⁾ et *F. W. Bessel*⁵⁸⁾, on comptait à partir de 1750; aujourd'hui, on prend communément avec *S. Newcomb*⁵⁹⁾ l'époque 1900, 0.

Pour déterminer la position des plans fondamentaux, afin d'en déduire les variations des coordonnées, on part de leurs inclinaisons mutuelles et des longitudes des nœuds. Pour l'écliptique, on prend

$$E\gamma_0 = \Omega, \quad E\gamma_t = \Omega + \psi, \quad \gamma_0 E\gamma_t = i;$$

ce sont ces quantités que doit donner la théorie en fonction de t .

Le mouvement de l'écliptique moyen est indépendant du mouvement de l'équateur. *S. Newcomb*⁵⁹⁾ trouve pour ce déplacement:

$$\sin i \sin \Omega = + 5'',341t + 0'',1935t^2 + \dots = gt + rt^2 \text{ }^{60)}$$

$$\sin i \cos \Omega = - 46'',838t + 0'',0563t^2 + \dots = g't^2 + r't^2,$$

ou

$$i = 47'',142t - 0'',034t^2$$

$$\Omega = 173^\circ 29' 40'' - 869'',1t.$$

Mais, pour fixer dans l'écliptique mobile la position de l'équinoxe de printemps, il faut connaître le mouvement de l'équateur. La théorie commence par rapporter cet équateur à l'écliptique fixe; on détermine sa position par

$$\vartheta'_t = \gamma_0 B\gamma_t \quad (\vartheta'_{00} = \vartheta_0) \quad \text{et} \quad \psi'_t = B\gamma_0;$$

S. D. Poisson, *J. A. Serret*, ne correspondent pas à celles de *F. W. Bessel*, *F. Brünnow*, *Th. von Oppolzer*. Dans l'article actuel, on emploiera le plus souvent les notations de *Th. von Oppolzer*: on appellera ϑ l'obliquité vraie, s l'obliquité moyenne de l'écliptique, ψ le déplacement total de l'équinoxe, l le déplacement moyen dû uniquement à la précession; les lettres accentuées représenteront des grandeurs ayant une signification théorique: ainsi ϑ' désignera l'obliquité de l'équateur mobile sur l'écliptique fixe, l' la précession luni-solaire; tandis que les grandeurs observables seront désignées par des lettres non accentuées: ainsi ϑ désignera l'obliquité de l'équateur mobile sur l'écliptique mobile. Enfin on fait un usage fréquent des indices: la plupart des grandeurs théoriques, ϑ'_{0t} , et certaines observables, ψ_{0t} , l_{0t} , dépendent des deux époques 0 et t ; au contraire ϑ_t et s_t ne dépendent que d'une seule époque et entraînent leurs indices d'eux-mêmes.

56) Recherches astronomiques [Ann. Observ. Paris, Mémoires 1 (1855) à 14 (1877)].

57) Traité de mécanique céleste 1, Paris an VII; 2, Paris an VII; 3, Paris an XII (1804); 4, Paris an XIII (1805); 5, Paris 1825; Œuvres 1, Paris 1878; 2, Paris 1878; 3, Paris 1878; 4, Paris 1880; 5, Paris 1882.

58) Fundamenta⁶⁾ et Tabulae Regiomontanae⁶⁾.

59) Spherical astronomy⁶⁾, p. 232; *H. Andoyer*, Bull. astron. 28 (1911), p. 69; *L. de Ball*, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Leipzig 1912, p. 93.

60) Les notations de ces derniers nombres, ainsi que plus loin celles des quantités Ψ et Θ , sont celles de *F. Tisserand*.

la longitude du nœud ascendant B de l'équateur sur l'écliptique fixe est $180^\circ - \psi'_t$.

On a

$$\psi' = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + \mathcal{P} = l' + \mathcal{P}$$

$$\vartheta' = \varepsilon_0 + b_2 t^2 + \dots + \mathcal{Q} = \varepsilon' + \mathcal{Q}.$$

L'ensemble des termes *séculaires* de ces développements, constitué par les séries procédant suivant les puissances croissantes de t , donne le déplacement dû à la précession, ou en d'autres termes le mouvement de l'équateur moyen par rapport à l'écliptique fixe, ε_0 étant l'obliquité moyenne à l'époque origine; \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des sommes de termes périodiques et donnent le mouvement de l'équateur vrai par rapport à l'équateur moyen. l' s'appelle la précession luni-solaire, ε' l'obliquité moyenne luni-solaire; $\varepsilon' - \varepsilon_0$ est ainsi la variation luni-solaire de l'obliquité moyenne.

Tous les termes de ces formules, l' , ε' aussi bien que les termes périodiques \mathcal{P} et \mathcal{Q} , dépendent d'abord des éléments des orbites de la terre et de la lune, qui sont suffisamment connus pour le calcul exact de ces termes; mais leur expression théorique contient en outre deux autres grandeurs dont la connaissance ne peut être obtenue directement avec une précision suffisante, le rapport $\frac{C-A}{C}$ (où A et C désignent comme précédemment les moments d'inertie principaux de la terre), et le rapport de la masse de la lune à celle du soleil. C'est précisément l'observation des changements produits dans les coordonnées des astres, à la suite du déplacement des plans fondamentaux, qui, en procédant par voie inverse, permet le calcul de ces deux constantes.

Pour comparer la théorie aux observations, il faut encore montrer comment on passe à l'écliptique mobile auquel se rapportent les mesures; pour rapporter l'un à l'autre les plans mobiles, on a à calculer

$$E\gamma_t = \Omega + \psi \quad \text{et} \quad A_t\gamma_t E_t = \vartheta_t,$$

c'est-à-dire la longitude de l'équinoxe par rapport au nœud de l'écliptique mobile sur l'écliptique fixe, et l'obliquité vraie au temps t .

Le triangle sphérique $EB\gamma$, dont les côtés sont $\Omega + \psi'$, $\Omega + \psi$, $a = B\gamma_t$ et les angles i , ϑ' , $180 - \vartheta_t$, permet de calculer ces grandeurs et d'obtenir, avec les notations précédentes, les développements suivants:

$$\psi_{0,t} = (a_1 - g \cot \vartheta_0) t + [a_2 - (r_1 + a_1 g') \cot \vartheta_0 + g g' (\cot^2 \vartheta_0 - \frac{1}{2})] t^2 + \mathcal{P} = l_{0,t} + \mathcal{P},$$

$$\vartheta_t = \vartheta_0 + g' t + (b_2 + r' - a_1 g + \frac{1}{2} g^2 \cot \vartheta_0) t^2 + \mathcal{Q} = \varepsilon_t + \mathcal{Q};$$

$l_{0,t}$ et ε_t sont encore les termes séculaires, Ψ et Θ les termes périodiques. On donne à $l_{0,t}$, c'est-à-dire à la différence moyenne de $E\gamma_t$ et de $E\gamma_0$, le nom de *précession générale*⁶¹): cette précession comprend la précession luni-solaire $l'_{0,t}$, augmentée de l'effet du mouvement de l'écliptique sous l'action des perturbations planétaires; le déplacement moyen a porte le nom de *précession planétaire*; ε_t est l'obliquité moyenne de l'écliptique à l'époque t .

Cette quantité $l_{0,t}$ est celle qu'on emprunte aux observations. On désigne le coefficient du premier terme de son développement par le nom de *constante de la précession*:

$$P = a_1 - g \cot \vartheta_0;$$

cette constante dépend ainsi de l'époque origine⁶²).

Dans le cours du 19^{ème} siècle, on a fait usage des valeurs suivantes⁶³) de la constante (T étant exprimé en siècles)

$$F. W. Bessel \quad 5022'',35 + 2'',443 (T - 1800);$$

$$O. Struve \quad 5024'',11 + 2'',268 (T - 1800);$$

$$S. Newcomb \quad 5023'',41 + 2'',223 (T - 1800).$$

La dernière est, depuis le début du vingtième siècle, universellement adoptée⁶⁴).

61) *F. Tisserand* [Mécanique céleste⁴⁶) 2, p. 435] désigne par ψ' , quantité qui correspond à $\psi_{0,t}$, non l'excès de $E\gamma_t$ sur $E\gamma_0$, mais la distance $\gamma_0 D$, le point D étant la projection orthogonale de γ_t sur l'écliptique fixe; la différence entre les deux quantités est du deuxième ordre. Le développement de ψ' jusqu'aux termes en t^2 ne donne donc pas exactement la précession générale. Mais le terme $-\frac{gg'}{2}t^2$ qui manque dans l'expression de *F. Tisserand* est extrêmement faible, le coefficient constant n'atteignant que 14 unités du huitième ordre décimal auquel *F. Tisserand* s'arrête.

62) *S. Newcomb*, A new determination of the precessional constant [Astronomical papers for the use American Ephemeris and Nautical almanac 8 (1898), p. 6] désigne par la lettre P , à laquelle il donne également le nom de constante de la précession, l'expression $a_1 \sec \varepsilon$.

63) Pour ces diverses valeurs, appelées constantes de la précession de Bessel, de Struve, de Newcomb, et pour d'autres déterminations de cette grandeur, voir la comparaison faite par *S. Newcomb*⁶³), section 1: previous determinations, p. 10.

64) Conférence internationale des étoiles fondamentales de 1896 à Paris, Procès-verbaux, Paris 1896. Chaque changement de la constante de précession nécessite une énorme dépense de travail; il faut en effet reprendre toutes les réductions effectuées avec l'ancienne valeur de P [cf. n° 8]; aussi un tel changement ne doit-il être adopté qu'après mûre réflexion, lorsqu'on s'est convaincu que la nouvelle valeur est sensiblement meilleure que la précédente. Voir la discussion entre *S. Newcomb* et *L. Boss*, The astronomical Journal 18 (1898).

La constante N de la nutation est, par définition, le coefficient, dans l'expression de Θ , du terme principal $N \cos \Omega'$, Ω' étant la longitude du nœud ascendant de la Lune. Les valeurs employées pour N furent successivement:

$N = 9'',2231$ (en 1800); $9'',2240$ (en 1900) d'après *C. A. F. Peters*⁶⁵)

$N = 9'',2365$ (en 1850) d'après *M. Nyren*⁶⁶)

$N = 9'',2100$ (en 1900) d'après *S. Newcomb*⁶⁷).

P. S. Laplace n'avait formé que les termes principaux des développements de Ψ et Θ ; c'est *F. W. Bessel*⁶⁸) qui donna pour la première fois les développements complets; des termes plus petits, engendrés par l'excentricité de l'orbite terrestre, ont été ajoutés par *C. A. F. Peters*⁶⁵). Voici d'après *S. Newcomb*⁶⁹), les termes principaux de ces expressions pour 1900,0 (les coefficients sont légèrement variables):

$$\begin{aligned}\Psi &= 0'',126 \sin g - 1'',272 \sin 2\odot - 17'',234 \sin \Omega' \\ &\quad + 0'',209 \sin 2\Omega' - 0'',204 \sin 2\zeta + 0'',068 \sin g', \\ \Theta &= 0'',551 \cos 2\odot + 9'',210 \cos \Omega' - 0'',090 \cos 2\Omega' \\ &\quad + 0'',089 \cos 2\zeta.\end{aligned}$$

\odot , ζ sont les longitudes du soleil et de la lune, g et g' leurs anomalies moyennes. Le terme principal a une période de 18 ans $\frac{2}{3}$, égale à la durée de la révolution des nœuds de l'orbite lunaire dans l'écliptique; durant cette période, le pôle vrai décrit autour de sa position moyenne, appelée pôle moyen, l'ellipse de nutation dont les demi-axes sont $a = 9'',21$ et $b = \frac{a \cos 2\varepsilon}{\cos \varepsilon} = 6'',86$.

A l'aide des formules précédentes, on connaît le mouvement de l'écliptique mobile par rapport à l'écliptique fixe, c'est-à-dire les éléments i , Ω , $\Omega + \psi$; le mouvement de l'équateur vrai ou moyen par rapport à l'écliptique fixe, c'est-à-dire les éléments ψ' , ϑ' ou l' , ε'

65) Numerus constans nutationis ex asc. rectis stellae polaris deductus, St Pétersbourg 1842.

66) Bestimmung der Nutation der Erdachse [Mém. Acad. Pétersb. (7) 19 (1873), mém. n° 2.

67) Conférence internationale des étoiles fondamentales de 1896 à Paris, Procès-verbaux, Paris 1896; voir aussi *S. Newcomb*⁶⁴), et The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy, Washington 1895, p. 131.

68) Fundamenta⁶), p. 125; Astron. Nachr. (Altona) 2 (1824), p. 157; 4 (1826), p. 185.

69) Spherical astronomy⁶⁴), p. 252.

ou par rapport à l'écliptique mobile, c'est-à-dire les éléments $\Omega + \psi$, ϑ , ou $\Omega + l$, ε ; enfin on sait déterminer la position de l'équinoxe à chaque instant.

Le calcul de la nutation est facilité par des tables commodes, qui donnent pour chaque époque l'écart entre les deux équateurs vrai et moyen⁷⁰).

Les coefficients de la précession étant variables suivant l'époque origine, le calcul dépend des dates initiale et finale; au lieu de revenir chaque fois, dans ce calcul, à l'équinoxe fixe de 1850, on se sert de formules permettant de passer de l'époque 1850 + τ à l'époque 1850 + $\tau + t$, t et τ étant exprimés en siècles tropiques. Voici, d'après les données de *S. Newcomb*, ces formules calculées par *H. Andoyer*⁷¹):

$$\begin{aligned}
 l &= (5024'',53 + 2'',223\tau)t \\
 &\quad + 1'',111t^2 + 0'',001t^3; \\
 \varepsilon &= 23^\circ 27' 31'',68 - 46'',837\tau - 0'',009\tau^2 + 0'',002\tau^3 \\
 &\quad - (46'',837 + 0'',018\tau - 0'',005\tau^2)t \\
 &\quad - (0'',009 - 0'',005\tau)t^2 + 0'',002t^3; \\
 l' &= (5036'',84 + 0'',493\tau)t \\
 &\quad - (1'',071 + 0'',001\tau)t^2 - 0'',002t^3; \\
 \varepsilon' &= 23^\circ 27' 31'',68 - 46'',837\tau - 0'',009\tau^2 + 0'',002\tau^3 \\
 &\quad + (0'',065 - 0'',009\tau)t^2 - 0'',008t^3; \\
 a &= (13'',417 - 1'',887\tau)t - (2'',380 + 0'',002\tau)t^2 - 0'',002t^3; \\
 \Omega &= 173^\circ 29' 40'' + 3286'',3\tau + 0'',56\tau^2 \\
 &\quad - (869'',1 + 0'',55\tau)t + 0'',03t^2; \\
 i &= (47'',141 - 0'',068\tau)t - 0'',034t^2.
 \end{aligned}$$

Ces formules contiennent tout ce qui est nécessaire pour la réduction des lieux observés à un système fixe; mais, comme l'observation donne directement les coordonnées équatoriales⁷²), il est utile d'y adjoindre celles qui permettent de rapporter l'équateur moyen à l'équateur fixe⁷³).

70) *F. W. Bessel*, *Tabulae Regiomontanae*⁶⁾, p. 4 et suiv.; *C. A. F. Peters*⁶⁵⁾; *J. h. von Oppolzer*, *Bahubestimmung*⁴⁹⁾; et tous les annuaires astronomiques.

71) *H. Andoyer*, *Bull. astron.* 28 (1911), p. 75; voir aussi *L. de Ball*, *Sphärische Astronomie*⁶⁶⁾, p. 100. Les résultats de ces deux auteurs présentent de très faibles divergences qui n'ont aucune importance pratique.

72) On pourrait, il est vrai, revenir aux coordonnées écliptiques; les formules évitent cette transformation.

73) L'effet de la nutation sur les coordonnées équatoriales se déduira, par voie différentielle, de celui sur les coordonnées écliptiques.

C'est *J. G. F. Bohnenberger*⁷⁴⁾ qui a donné le premier ces formules. Nous introduisons, d'après *Th. von Oppolzer*, des éléments équatoriaux $m, n, 90^\circ - p$ analogues⁷⁵⁾ aux éléments écliptiques l, i, Ω pour fixer la position de l'équateur moyen: $m + a$ (correspondant à l') peut s'appeler la précession luni-solaire dans l'équateur, m la précession générale en ascension droite; n est l'inclinaison mutuelle des plans des deux équateurs.

Nous donnons ici un tableau de concordance des notations employées par les différents auteurs qui, dans les dernières années, se sont occupés de la question.

Oppolzer	Newcomb	Andoyer	de Ball
l	l	$\omega - \varphi$	\mathcal{A}
ε	ε	ε	ε
l'	ψ	ψ	$-\psi$
ε'	ε_1	ε_1	ε'
m	$z + \xi_0$	$\mu - \varrho$	m
n	θ	j	n
p	ξ_0	$90^\circ - \varrho$	p
a	$\xi - z = \lambda$	χ	a

Th. von Oppolzer et *L. de Ball* désignent par π, Π , tandis que *S. Newcomb* désigne par $k, 180^\circ - N$, et *H. Andoyer* par k, φ les quantités désignées ici par i, Ω . Les quantités ξ_0 et z de *S. Newcomb* peuvent être interprétées de la façon suivante: $-\xi_0$ est l'ascension droite du pôle à l'instant t_2 , comptée à partir de l'équinoxe de t_1 ; $180^\circ + z$ est l'ascension droite du pôle à l'instant t_1 , comptée à partir de l'équinoxe de t_2 .

Dans le triangle $A\gamma_0B$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{m+a}{2} &= \operatorname{tg} \frac{l'}{2} \cos \frac{\varepsilon_t + \varepsilon'}{2} \operatorname{sec} \frac{\varepsilon_t - \varepsilon'}{2}, \\ \operatorname{tg} \left(p - \frac{m+a}{2} \right) &= \cot \frac{l'}{2} \sin \frac{\varepsilon_t - \varepsilon'}{2} \operatorname{coséc} \frac{\varepsilon_t + \varepsilon'}{2}, \\ \sin n &= \sin l' \frac{\sin \varepsilon'}{\cos p} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \frac{n}{2} = \frac{\sin \frac{m+a}{2}}{\cos \left(p - \frac{m+a}{2} \right)} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_t + \varepsilon'}{2}. \end{aligned}$$

La première approximation donne

$$m = l' \cos \varepsilon_t - a, \quad n = l' \sin \varepsilon_t.$$

74) Über die Präzession der Fixsterne in gerader Aufsteigung und Abweichung [Z. für Astronomie und verwandte Wissenschaften 1 (1816), p. 124, 270].

75) Il est aisé de voir que la ligne d'intersection des deux équateurs a une ascension droite voisine de 90° , si les temps auxquels ils correspondent sont assez rapprochés.

Avec les nombres de *S. Newcomb*, on trouve⁷⁶⁾ pour le passage de $1850 + \tau$ à $1850 + \tau + t$, les développements suivants:

$$m = (4607'',11 + 2'',794\tau)t + 1'',397t^2 + 0'',036t^3$$

$$n = (2005'',11 - 0'',853\tau)t - 0'',426t^2 - 0'',042t^3$$

$$p = (2303'',55 + 1'',397\tau)t + 0'',302t^2 + 0'',018t^3.$$

Ces dernières formules ne convergent pas aussi rapidement que les développements relatifs aux déplacements rapportés à l'écliptique; pour des différences de l'ordre d'un millier d'années, on devra se reporter aux valeurs fournies par les formules trigonométriques, qui sont rigoureuses.

5c. Vitesse de rotation de la terre; constance de l'unité de temps. Il est impossible, dès que l'on tient compte de la variabilité de l'axe terrestre dans l'espace, de conserver la notion simple de durée de rotation sans la définir d'une façon plus précise; on peut, au contraire, définir rigoureusement la vitesse instantanée angulaire ω autour d'un axe qui se déplace. La théorie montre d'ailleurs que, si la terre était absolument rigide, cette vitesse ne subirait que des variations qui sont bien au-dessous de la limite de la précision des observations⁷⁷⁾.

On définit alors l'unité de temps T par l'équation

$$\int_0^T \omega dt = 2\pi.$$

La question se complique si l'on cesse d'envisager comme parfaite la rigidité du globe terrestre, puisque chaque déplacement de masses amène une variation de la vitesse ω . Il est relativement aisé d'évaluer le maximum d'effet produit par les phénomènes météorologiques de période diurne ou annuelle; on conclut que leur influence est tout à fait inappréciable, de sorte que la constance de l'unité qui sert à la mesure du temps n'est pas modifiée par ces phénomènes pendant de longues années. Mais, en ce qui concerne les altérations séculaires dues à de très petits effets, celles provenant du frottement des marées, de la contraction du globe, de l'extension ou de la diminution des glaces polaires, de l'augmentation de la masse du globe par les chutes de météores, etc., les observations astronomiques sont seules capables de

76) *H. Andoyer*, Bull. astron. 28 (1911), p. 75; cf. *L. de Ball*, Sphärische Astronomie⁵⁹⁾, p. 101.

77) Même une légère inégalité des moments principaux d'inertie A et B ne produirait que des irrégularités au-dessous de cette limite.

nous renseigner; il faudra comparer à la rotation du globe terrestre d'autres mouvements qui puissent être étudiés théoriquement avec plus de précision que celui d'une terre imparfaitement rigide, tels que les mouvements de translation dans le système solaire. Tout changement de l'unité de temps employée dans la pratique se reflétera dans ces phénomènes, et donnera naissance à une différence entre les positions calculées théoriquement et les observations faites à l'aide de la pendule.

Il y aura lieu, pour cette étude, de prendre en considération les mouvements qui s'opèrent avec la vitesse la plus grande, la précision des observations restant la même, et qui d'autre part peuvent être étudiés théoriquement de la façon la plus complète, de sorte que les contradictions relevées entre la théorie et l'observation ne puissent être attribuées à d'autre cause que la non-uniformité de la mesure du temps.

Le mouvement de la Lune, dans cet ordre d'idées, a depuis longtemps appelé l'attention; il présente en effet avec la théorie d'assez grands désaccords, qu'on a souvent essayé d'expliquer par la variabilité du jour sidéral⁷⁸⁾; mais dans un mémoire récent, *S. Newcomb*⁷⁹⁾ a abouti à cette conclusion que ni la théorie du mouvement de la Lune n'est poussée assez loin, ni la précision des anciennes observations elles-mêmes ou des réductions n'est assez grande, pour que ces irrégularités mettent en doute la constance du jour sidéral. Antérieurement l'illustre astronome avait cherché à déceler des variations de l'unité de temps par l'étude du mouvement de Mercure, sans pouvoir obtenir, malgré maintes coïncidences, une véritable certitude. Les observations des satellites de Jupiter pourraient aussi servir de base à la discussion; mais de ce côté, la théorie n'a pas été non plus poussée assez loin, et les méthodes d'observation n'ont pas reçu les perfectionnements suffisants. Et il faut ajouter que seul un écart de même nature, avance ou retard, entre la théorie et l'observation de ces divers mouvements permettrait de conclure à la non uniformité de la rotation terrestre. Pour nous fixer à cet égard, il faut donc attendre de nouveaux progrès de la science.

6. Définition rigoureuse des coordonnées et du temps. Les considérations exposées dans le paragraphe qui précède nécessitent une précision plus nette dans les définitions des coordonnées; en particu-

78) Voir à ce sujet l'article du tome VII consacré à l'analyse de la loi de gravitation de Newton.

79) On the desirableness of a reinvestigation of the problems growing out of the mean motion of the moon [Monthly Notices astron. Soc. 63 (1902/3), p. 316].

lier les déplacements des plans fondamentaux signalés dans le n° 5 b influent sur la détermination non seulement des coordonnées, mais du temps.

Les positions observées des astres sont affectées de la parallaxe et de l'aberration (laissant de côté la réfraction, qui sera traitée comme une erreur instrumentale); on les appelle *lieux apparents*⁸⁰). Quand on a corrigé les coordonnées apparentes de la parallaxe et de l'aberration, on obtient les coordonnées *vraies*⁸¹), qui sont rapportées aux positions instantanées de l'écliptique et de l'équateur. En passant, grâce aux tables de nutation, des plans fondamentaux vrais à leur position moyenne, on obtient ce qu'on appelle les coordonnées *moyennes* des astres. Finalement, par les corrections de précession, on rapportera les astres au pôle et à l'écliptique d'une époque fixe. Les données des observations sont les coordonnées apparentes; le but à poursuivre est la détermination des positions moyennes rapportées à l'équinoxe et à l'équateur fixes d'une année choisie. On trouvera au n° 7 les formules nécessaires à cette transformation.

a. *Hauteur du pôle; méridien; déclinaison*. La hauteur du pôle, c'est-à-dire l'angle formé par l'axe de la terre avec l'horizon, varie en raison du déplacement de l'axe terrestre et de celui de la verticale; il en est de même du méridien, plan passant par ces deux directions. Et comme les deux coordonnées équatoriales des astres sont déterminées, l'ascension droite au moment du passage au méridien, la déclinaison par comparaison avec la hauteur du pôle, les inégalités du déplacement de l'axe terrestre se transmettent à ces coordonnées. La direction de la verticale, résultante de l'attraction de la masse terrestre et de la force centrifuge, peut être considérée comme liée invariablement au corps terrestre, car les variations des masses voisines ne peuvent la faire changer que d'un angle inappréciable⁸²). Les actions simul-

80) L'expression «apparent», en tant qu'elle se rapporte à la parallaxe, n'est pas une traduction exacte de «locus apparens», lieu où l'astre semble placé.

81) Vrai est ici en opposition à apparent; on a tenté vainement de faire consacrer par l'usage une dénomination contraire à celle de lieu moyen.

82) Les déplacements soudains ou séculaires de masses dans l'intérieur du globe ne sont pas ici en question; la question des variations séculaires des hauteurs du pôle n'est pas non plus résolue définitivement [voir par ex. *F. R. Helmert*, *Höhere Geodäsie* ⁴⁴) 2, p. 445]. En ce qui concerne l'étude des variations de période annuelle de la verticale sous les influences météorologiques ou plus généralement sous l'action des déplacements de période annuelle, on peut dire qu'elle n'est pas encore élucidée, malgré les recherches récentes de: *H. Kimura*, On the existence of a new annual term in the variation of the latitude, independent of the components of the pole's motion [Astron. Nachr. (Kiel) 158 (1902),

tanées du soleil et de la lune occasionnent, par suite de la révolution apparente de ces astres autour de la terre, un déplacement de la verticale, qui décrit un petit cône autour de sa position moyenne suivant la même période que l'azimut de l'astre troublant. ξ et η désignant les écarts du zénith vers le sud et l'ouest respectivement, on a, selon qu'il s'agit du soleil ou de la lune⁸³,

$$\xi = \begin{matrix} - 0'',008 \\ - 0'',017 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} - 0'',008 \\ - 0'',017 \end{matrix}} \right\} \sin 2z \cos A, \quad \eta = \begin{matrix} - 0'',008 \\ - 0'',017 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} - 0'',008 \\ - 0'',017 \end{matrix}} \right\} \sin 2z \sin A,$$

z et A représentant la distance zénithale et l'azimut de l'astre. Il résulte de là d'abord une variation de la hauteur du pôle, dont la période est d'à peu près un jour, et dont il faudrait tenir compte pour passer des distances zénithales mesurées aux déclinaisons⁸⁴); puis une variation périodique du plan méridien, tenant surtout à ce que l'inclinaison de l'axe de l'instrument méridien, même si cet instrument est absolument fixe sur le corps terrestre, ne reste pas constante. Mais, à cause de leur extrême petitesse, ces irrégularités de la direction de la verticale peuvent être laissées de côté dans la détermination des coordonnées équatoriales, et il n'est besoin d'en tenir compte que dans l'étude des variations du pôle.

La hauteur instantanée du pôle, la position instantanée du méridien, dont on a besoin pour transformer les mesures effectuées en coordonnées équatoriales, ne sont pas obtenues rigoureusement, puisqu'on les déduit de la combinaison d'observations faites à environ douze

col. 233], *S. C. Chandler*, Questions relating to stellar parallax, aberration and Kimura's phenomenon [The astronomical Journal 23 (1903), p. 12]; *T. Albrecht*, Resultate des internationalen Breitendienstes 1, Berlin 1903, p. 153; 2, Berlin 1906, p. 157 et suiv.; 3, Berlin 1909, p. 210 et suiv.

83) *C. A. F. Peters*, Von den kleinen Abweichungen der Lotlinie und des Niveaus, welche durch die Anziehungen der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischen Gegenstände hervorgebracht werden [Astron. Nachr. (Altona) 22 (1845), col. 33]; voir aussi *F. R. Helmert* [Höhere Geodäsie⁴⁴] 2, p. 383] et *J. B. A. Gaillot*, Influence de l'attraction lunaire sur la direction de la verticale [Bull. astron. 1 (1884), p. 113].

84) S'il était possible d'installer l'instrument méridien d'une façon absolument fixe sur le corps terrestre, la combinaison de culminations supérieures et inférieures déterminerait la position du pôle sur le cercle; on pourrait par conséquent obtenir les déclinaisons indépendamment de la verticale. Cette méthode ancienne, employée encore par *F. W. Bessel* vers 1822, a été abandonnée après que *J. G. F. Bohnenberger* eut proposé de déterminer l'horizon à l'aide du bain de mercure [Neue Methode, den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen und die Horizontalachse einer Mittagsfernrohre zu berichtigen, ohne Lot oder Libelle, Astron. Nachr. (Altona) 4 (1826), col. 327].

heures d'intervalle ne pouvant fournir que les données se rapportant à une époque intermédiaire. L'extrême petitesse du déplacement de l'axe de rotation à l'intérieur du globe justifie néanmoins la pratique actuelle consistant à employer les étoiles circumpolaires; on passe des distances zénithales aux déclinaisons en utilisant la hauteur du pôle ainsi déterminée.

b. Temps et ascension droite. La nécessité de la constance de l'unité de temps adoptée dans la pratique, qui a été exposée dans le n° 5 au point de vue de l'étude des mouvements des astres, s'offre sous une forme moins importante quand il s'agit d'employer simplement les pendules à mesurer les différences d'ascensions droites par l'intervalle qui s'écoule entre les deux culminations correspondantes des deux étoiles. La différence qui peut exister entre la vitesse de rotation de la terre et une rotation uniforme est en effet trop faible pour être prise ici en considération.

Mais, en dehors de la durée de rotation, il faut tenir compte de ce fait que l'origine du temps n'est pas fixe. L'unité de temps sidéral a été définie, dans le n° 3, comme l'intervalle séparant deux culminations de l'équinoxe de printemps, et le temps sidéral comme l'angle horaire de l'équinoxe de printemps. On conserve cette définition, relative à l'équinoxe vrai, bien que ce point soit loin, non seulement d'être fixe, mais de se déplacer d'un mouvement uniforme; au point de vue de la rigueur absolue, le temps sidéral vrai, de même que le temps solaire vrai, devrait être rejeté pour la définition du temps. Mais, au point de vue pratique, les inégalités de ce mouvement sont si faibles qu'il est pour ainsi dire impossible de les évaluer; en tout cas, elles n'influent jamais sur la détermination des différences d'ascension droite. Dans le cours d'une période de nutation, soit 18 ans $\frac{2}{3}$, une horloge réglée sur le temps sidéral moyen, marchant par conséquent d'un mouvement uniforme, s'écarterait au maximum de 1^s,05 de l'angle horaire de l'équinoxe de printemps. Il existe en outre une autre irrégularité, de période semi-annuelle, dont la grandeur atteint $\pm 0^s,08$.

Enfin, de la variation du pôle terrestre sur le globe, il résulte, en toute rigueur, un déplacement du méridien, d'où une erreur sur les époques des culminations observées et, par suite, sur les ascensions droites. D'après ce qu'on a vu plus haut, cette erreur est négligeable.

Les imperfections de notre système usuel de la mesure du temps sidéral, basé sur l'angle horaire de l'équinoxe vrai de printemps, sont donc en partie inévitables, en ce qu'elles proviennent du manque d'uniformité dans la rotation terrestre; d'un autre côté, le choix d'une origine dont le mouvement en ascension droite n'est pas constant, et la méthode

consistant à déterminer le temps par l'observation des passages dans un plan qui n'est pas rigoureusement lié au globe terrestre, doivent plutôt augmenter le désaccord de l'observation et de la théorie. Néanmoins, les calculs effectués avec le temps sidéral comme base suffisent amplement à tous les besoins de la pratique actuelle, et particulièrement à la détermination des différences d'ascension droite. Dans les recherches théoriques sur le mouvement des corps célestes, on prend comme unité le jour solaire moyen, ou le siècle julien.

En résumé, on est autorisé à énoncer les propositions suivantes, dans les limites de la précision que l'on peut atteindre actuellement:

1°) Le temps du passage d'un astre au vrai méridien, évalué sur une pendule donnant le temps sidéral exact (c'est-à-dire l'angle horaire de l'équinoxe de printemps vrai), est l'ascension droite vraie de l'étoile (le mot vrai ayant la signification précédente, il est entendu qu'il faut tenir compte de l'aberration, des erreurs instrumentales etc).

2°) Les déclinaisons vraies peuvent être obtenues par la combinaison des distances zénithales et de la hauteur instantanée du pôle, observée au cercle méridien par les culminations successives d'étoiles circumpolaires.

3°) La réduction à un équinoxe moyen peut se faire par l'intermédiaire des formules qui donnent le mouvement de l'axe terrestre dans l'espace, sans tenir compte de la nutation diurne.

7. Réduction des lieux apparents aux lieux moyens. Pour effectuer réellement le passage des positions apparentes aux positions moyennes, il faut calculer les diverses corrections signalées d'une façon générale dans le n° 5. A cause de la petitesse de ces corrections, on pourra les obtenir séparément; on cherche donc d'une part celles dues à la parallaxe et l'aberration, qui correspondent à un changement d'origine des coordonnées, et de l'autre celles de précession et de nutation, causées par le déplacement des plans de coordonnées.

Dans ce qui suit, on désignera constamment par

$$r, A, B$$

les coordonnées polaires de l'astre par rapport au système auquel on se propose de le rapporter, par

$$r', A', B'$$

les coordonnées entachées de l'erreur que l'on veut calculer.

7a. Parallaxe et aberration. Quand on déplace parallèlement à lui-même le système d'axes, les projections de la translation étant α ,

b, c , on a immédiatement les relations

$$(1) \quad \begin{cases} r \cos A \cos B = r' \cos A' \cos B' + a \\ r \sin A \cos B = r' \sin A' \cos B' + b \\ r \sin B = r' \sin B' + c. \end{cases}$$

Pour le but poursuivi ici, il est plus commode de calculer les différences

$$A' - A, B' - B, r' - r.$$

Ces corrections peuvent s'exprimer soit en fonction des coordonnées rapportées au point d'observation O' , soit en fonction des coordonnées théoriques rapportées au point O . On aura besoin des premières expressions s'il s'agit de réduire une observation isolée, des secondes si l'on veut, du calcul d'une éphéméride, déduire la position apparente. Un simple échange des quantités accentuées avec celles qui ne le sont pas, suivi d'un changement de signe de a, b, c suffit pour passer de l'un des systèmes à l'autre.

On trouve facilement les formules suivantes, qui sont rigoureuses⁸⁵):

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}(A - A') &= \frac{-a \sin A' + b \cos A'}{r' \cos B' + a \cos A' + b \sin A'} = \frac{-a \sin A + b \cos A}{r \cos B - a \cos A - b \sin A}, \\ \operatorname{tg}(B - B') &= \frac{c \cos B' - \sin B' \sec \frac{A - A'}{2} \left(a \cos \frac{A + A'}{2} + b \sin \frac{A + A'}{2} \right)}{r' + c \sin B' + \cos B' \sec \frac{A - A'}{2} \left(a \cos \frac{A + A'}{2} + b \sin \frac{A + A'}{2} \right)}, \\ r - r' &= \sec \frac{A - A'}{2} \sec \frac{B - B'}{2} \left[a \cos \frac{A + A'}{2} \cos \frac{B + B'}{2} \right. \\ &\quad \left. + b \sin \frac{A + A'}{2} \cos \frac{B + B'}{2} + c \cos \frac{A - A'}{2} \sin \frac{B + B'}{2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Si a, b, c sont petits par rapport à r' , on peut développer en séries suivant les puissances de $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$. En général on peut se borner aux termes du premier ordre⁸⁶) ou à ceux du deuxième; si le calcul doit être poussé plus loin, il vaut mieux revenir aux formules rigoureuses.

La parallaxe.

On corrige les observations de la parallaxe diurne ou annuelle en les rapportant au centre de la terre ou à celui du soleil (lieux géo-

85) Voir l'établissement de ces formules dans les livres classiques, par ex. *F. Brünnow*, *Lehrbuch der sphärischen Astronomie*, (4^e éd.) Berlin 1881, p. 147, 184; éd. française publ. par *E. Lucas* et *C. André*, *Astronomie sphérique*, Paris 1869, p. 176, 237.

86) Dans le cas où l'on se borne au premier ordre, les expressions des différences $A - A', B - B', r - r'$ sont les mêmes en fonction de A, B, r , ou de A', B', r' .

centriques ou héliocentriques)⁸⁷⁾. Si le déplacement d'ensemble du système solaire était connu, il faudrait avoir égard à la parallaxe séculaire, en transportant l'origine à une position fixe.

La parallaxe diurne. Le transport de l'origine des observations au centre de la terre peut toujours s'effectuer par voie différentielle à l'aide des développements en séries. Si l'on prend l'équateur comme plan fondamental [α, δ, Δ tenant la place de A, B, r]⁸⁸⁾, a, b, c sont les coordonnées rectilignes équatoriales du point de la surface où l'on observe par rapport au centre de la terre. Comme la déclinaison géocentrique de ce point est égale à la hauteur géocentrique du pôle φ' , son ascension droite géocentrique au temps sidéral Θ , si l'on appelle ρ le rayon vecteur allant au centre de la terre, on a⁸⁹⁾

$$a = \rho \cos \varphi' \cos \Theta, \quad b = \rho \cos \varphi' \sin \Theta, \quad c = \rho \sin \varphi'.$$

Les rapports

$$\frac{\rho}{\Delta}, \quad \frac{a}{\Delta}$$

s'appellent la *parallaxe horizontale* et la *parallaxe horizontale équatoriale* de l'astre⁹⁰⁾; ce sont en effet les angles sous lesquels on verrait, soit le rayon de la terre allant au point d'observation, soit le rayon équatorial, si l'astre était à l'horizon. On exprime ordinairement ρ en prenant comme unité le rayon équatorial, Δ en rayons moyens de l'orbite terrestre, de sorte que si l'on adopte les nombres donnés par les tables, il faut multiplier le rapport $\frac{\rho}{\Delta}$ par $\sin p_{\odot}$, p_{\odot} désignant la parallaxe du soleil.

Introduisant l'angle auxiliaire γ par la formule

$$\operatorname{tg} \gamma = \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} \operatorname{sec} \left(\Theta - \frac{\alpha + \alpha'}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi',$$

87) Pour être plus rigoureux, si l'on veut considérer le mouvement séculaire comme rectiligne, on devrait, au lieu du centre du soleil, faire intervenir le centre de gravité du système solaire.

88) On voit immédiatement l'effet de la parallaxe en hauteur et en azimut; si la terre était rigoureusement sphérique, il n'y aurait pas de parallaxe en azimut; du fait qu'elle est ellipsoïdale, il s'introduit une correction, qui reste très petite.

89) Sur le calcul de ρ et de φ' en partant des dimensions connues de l'ellipsoïde terrestre, voir les traités classiques, par ex. [*F. Brünnow*, Sphärische Astron.⁸⁵⁾, p. 142; Astron. sphérique, p. 176; *Th. von Oppolzer*, Bahnbestimmung⁴⁹⁾ 1, p. 29; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 29]. Si a et b désignent les deux demi-axes de l'ellipse méridienne, on a:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi, \quad \rho^2 = a^2 \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} \operatorname{sec} (\varphi' - \varphi).$$

90) Par abréviation, et lorsqu'il ne peut y avoir confusion, on dit communément la parallaxe de l'astre.

on a les formules rigoureuses suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') &= \frac{\frac{e}{\Delta} \sin p_{\odot} \cos \varphi' \sin(\Theta - \alpha) \sec \delta}{1 - \frac{e}{\Delta} \sin p_{\odot} \cos \varphi' \cos(\Theta - \alpha) \sec \delta}, \\ \operatorname{tg}(\delta - \delta') &= \frac{\frac{e}{\Delta} \sin p_{\odot} \sin \varphi' \sin(\gamma - \delta) \operatorname{cosec} \gamma}{1 - \frac{e}{\Delta} \sin p_{\odot} \sin \varphi' \cos(\gamma - \delta) \operatorname{cosec} \gamma}, \\ \Delta' &= \Delta \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta' - \gamma)}. \end{aligned}$$

Sauf pour la lune⁹¹), on peut se contenter des termes du premier ordre, qui donnent

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= \frac{e}{\Delta} p_{\odot} \cos \varphi' \sec \delta \sin(\Theta - \alpha), \\ \delta - \delta' &= \frac{e}{\Delta} p_{\odot} [\cos \delta \sin \varphi' - \sin \delta \cos \varphi' \cos(\Theta - \alpha)], \\ \Delta - \Delta' &= e p_{\odot} [\cos \delta \cos \varphi' \cos(\Theta - \alpha) + \sin \delta \sin \varphi']. \end{aligned}$$

Dans ces formules, Δ est supposé connu. Inversement elles servent à déduire des effets parallaxiques observés l'éloignement de l'astre exprimé en rayons de l'orbite terrestre⁹²).

La parallaxe annuelle. Les quantités a, b, c sont ici les coordonnées héliocentriques du centre de la terre, ou bien les coordonnées géocentriques du centre du soleil changées de signe; ce sont ces dernières que l'on trouve dans les éphémérides publiées dans les différents annuaires (voir plus loin) et qui sont calculées d'après les diverses tables du soleil⁹³).

La transformation des coordonnées géocentriques en coordonnées héliocentriques a une importance capitale lorsqu'il s'agit de la théorie

91) Voir par ex. *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁹⁵), (4^e éd.) p. 153/4; *Astron. sphérique*, p. 191.

92) Sur la considération de la différence entre la position de l'observateur et le centre de la terre pour les planètes et comètes nouvellement découvertes, dont la distance est encore inconnue, voir l'article VII 9.

93) Les tables du soleil les plus connues du 19^{ème} siècle sont celles de *F. X. von Zach*, *Tabulae motuum solis*, Gotha 1792, et, en supplément: *Tabulae motuum solis novae et iterum correctae*, Gotha 1804; celles de *J.-B. J. Delambre*, *Tables du soleil* [Tables astronomiques publ. par le Bureau des longitudes de France 1 (1806)]; celles de *P. A. Hansen et C. F. R. Olufsen*, *Tables du soleil*, Copenhague 1853; celles de *U. J. J. Le Verrier*, *Tables du soleil* [Ann. Observ. Paris 4 (1858)]; celles de *S. Newcomb*, *Tables of the motion of the earth* [Astronomical Papers for the use of the American Ephemeris and Nautical almanac 6 (1898)].

des planètes⁹⁴); il faut dans ce cas employer le système de formules rigoureux, qu'on transforme pour les besoins de la pratique⁹⁵).

Pour les corps célestes étrangers au système solaire, l'effet du mouvement annuel de la terre est si faible que c'est seulement pour de rares étoiles qu'on a pu mesurer la parallaxe π , c'est-à-dire ici l'angle sous lequel on voit de l'étoile la distance moyenne de la terre au soleil.

Avec les coordonnées équatoriales, on a

$$a = -R \cos \odot, \quad b = -R \sin \odot \cos \varepsilon, \quad c = -R \sin \odot \sin \varepsilon,$$

et, en se bornant aux termes du premier ordre, il vient

$$\alpha - \alpha' = \pi R (\cos \odot \sin \alpha - \sin \odot \cos \varepsilon \cos \alpha) \sec \delta$$

$$= \pi R \cos D \sin (\alpha - A) \sec \delta,$$

$$\delta - \delta' = \pi R [(\cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta) \sin \odot + \cos \odot \sin \delta \cos \alpha].$$

Avec les coordonnées écliptiques l'effet de la parallaxe a une expression plus simple:

$$\lambda - \lambda' = \pi R \sin (\lambda - \odot) \sec \beta,$$

$$\beta - \beta' = \pi R \cos (\lambda - \odot) \sin \beta.$$

La parallaxe séculaire. C'est uniquement pour les corps extérieurs au système solaire qu'il y a lieu d'envisager le déplacement d'ensemble de ce système, auquel la terre participe aussi bien que les autres planètes. L'état actuel de nos connaissances est tel que nous devons envisager ce déplacement comme séculaire, le premier terme nous étant d'ailleurs très imparfaitement connu, de sorte que a , b , c sont des fonctions linéaires du temps dont les coefficients s'ajoutent à ceux des mouvements propres des étoiles fixes tant que ces mouvements peuvent se représenter par une formule du premier degré. C'est seulement, lorsqu'une étude dynamique du mouvement des étoiles fixes pourra se faire, que l'on pourra séparer l'une de l'autre les deux influences⁹⁶).

L'aberration⁹⁷).

En dehors de l'aberration des fixes, qui constitue un phénomène purement optique, on a vu qu'il faut tenir compte de ce qu'on appelle

94) Ici, au lieu du centre de gravité du système solaire, on prend comme origine le centre du soleil, dont la détermination pratique est seule possible.

95) Voir par ex. *Th. von Oppolzer, Bahnbestimmung*⁴⁹), (2^e éd.) 1, p. 20; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 20.

96) Pour plus de détails, voir l'article VII 26.

97) Voir surtout *A. J. F. Yvon Villarceau, Théorie de l'aberration* [Addition à la *Connaissance des Temps pour 1878*] et *H. Battermann, Diss. Berlin*⁴³).

aberration planétaire, ou mieux *parallaxe de lumière*: en supposant connu l'intervalle de temps $t_2 - t_1 = \tau$ qui sépare le moment t_1 de l'émission du rayon lumineux de l'instant t_2 de son arrivée à l'observateur⁹⁸), cet effet provient du déplacement parallactique de la terre pendant le temps τ (il y a ainsi des parallaxes de lumière diurne, annuelle ou séculaire). Dans le cas où le mouvement du lieu d'observation peut, durant l'intervalle τ , être considéré comme rectiligne, les deux aberrations peuvent se réunir, et l'on se base alors sur la proposition suivante:

La direction suivant laquelle on voit un astre au temps t_2 est celle de la droite qui, à l'instant t_1 , joignait l'observateur à l'astre; en d'autres termes, la position apparente au temps t_2 est la position vraie au temps $t_1 = t_2 - \tau$.

Mais il faut examiner dans chaque cas s'il est permis de considérer comme rectiligne le mouvement du lieu d'observation pendant le temps τ .

Pour calculer le temps de lumière à l'aide de la formule $\tau = \frac{\Delta}{v}$, on remplace habituellement, sans commettre de faute grave, Δ , soit par Δ_1 , soit par Δ_2 , éloignements correspondant aux temps t_1 et t_2 : Δ est en toute rigueur la distance de l'étoile au temps t_1 à la position de l'observateur au temps t_2 . *H. Battermann*⁹⁹) a cherché l'effet de cette substitution en tenant compte du mouvement annuel de la terre, et l'a trouvé insignifiant. En ce qui concerne le mouvement séculaire, il est impossible d'obtenir de telles évaluations, à cause de l'ignorance où nous sommes de la grandeur de ce mouvement. En faisant une hypothèse très particulière, *J. F. Höffler*¹⁰⁰) est parvenu sur ce point à des résultats intéressants: si l'on admet que le mouvement séculaire a lieu dans le plan de l'écliptique, les éclipses des satellites de Jupiter doivent montrer une inégalité dont la période est la durée de révolution de Jupiter. Avec la précision que l'on peut atteindre actuellement, il n'y a pas d'espoir de découvrir de telles inégalités, mais ce travail démontre la possibilité dans l'avenir de trouver la trace du mouvement séculaire^{100a}).

98) Si la distance de l'astre (et par suite le temps de lumière) est inconnue, on ne peut calculer que l'aberration des étoiles fixes, ce qui revient à confondre les instants t_1 et t_2 .

99) Diss. Berlin^{4*}), p. 14 et suiv.

100) Über eine Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Sonnensystems [Viertelj. Astron. Ges. 31 (1896), p. 297].

100a) *Dans ces dernières années, les idées des physiciens sur l'aberration se sont considérablement modifiées. D'après le principe de relativité, dont les

On a vu que les formules qui permettent de calculer l'*aberration des fixes* sont les mêmes que celles relatives à la parallaxe, pourvu qu'on introduise la vitesse de la lumière à la place de la distance de l'astre, et qu'on remplace la ligne joignant les deux positions de l'observateur par la vitesse du déplacement changée de signe. On devra donc remplacer, dans le système (1) du paragraphe 7 a, r, r' par V et V' ; a, b, c par $-\frac{da}{dt}, -\frac{db}{dt}, -\frac{dc}{dt}$.

Les projections de la vitesse $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ se présentent chacune comme la somme de trois termes, relatifs aux mouvements diurne, annuel et séculaire du point d'observation, et qu'on obtient en prenant les dérivées des expressions des coordonnées trouvées plus haut. Si l'on pouvait négliger les termes du second ordre dans les développements en séries procédant suivant les puissances de $\frac{1}{V} \frac{da}{dt}, \frac{1}{V} \frac{db}{dt}, \frac{1}{V} \frac{dc}{dt}$, on pourrait étudier séparément les effets de ces trois mouvements, et les ajouter ensuite géométriquement. En réalité, on peut isoler tout de suite l'aberration diurne, dont l'effet est presque insignifiant, et il ne reste plus qu'à considérer ensemble les aberrations annuelle et séculaire.

Soit (fig. 2) OS la direction véritable du rayon lumineux, OS' sa direction apparente. Décomposons la vitesse $v = OO'$ en deux, OO_0 qui est la vitesse séculaire v_0 , et OO_1 la vitesse annuelle v_1 . Par analogie, OS_0 sera la direction apparente observée débarrassée de l'aberration annuelle: nous désignerons OS_0 par V_0 . La figure montre que l'on peut procéder de la façon suivante dans le calcul de l'effet final des deux aberrations:

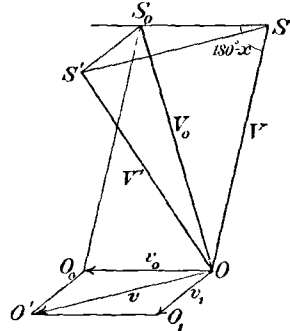


Fig. 2.

On calcule en premier lieu la correction due à l'aberration annuelle, d'après le système de formules (1), en prenant pour a, b, c les composantes changées de signe du mouvement annuel, mais en remplaçant dans les formules la vitesse absolue de la lumière V par V_0 . Pour

conséquences ont été surtout développées par *H. A. Lorentz*, aucune expérience ne peut permettre de déterminer le mouvement absolu du système solaire; il n'y a pas d'aberration séculaire et le mouvement absolu du système solaire n'a aucune influence sur l'aberration annuelle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas lieu de tenir compte du *facteur de Villarceau*. Pour plus de détails, voir par ex. *H. C. Plummer*, On the theory of aberrations and the principle of relativity [Monthly Notices astron. Soc. 70 (1909/10), p. 252/6].*

faire ensuite disparaître l'aberration séculaire des coordonnées sphériques A_0, B_0 ainsi calculées, on doit appliquer de nouveau les formules (1) en introduisant les composantes du mouvement séculaire.

Le calcul montre que les trois mouvements du lieu d'observation produisent des effets que l'on peut étudier séparément pour les ajouter géométriquement ensuite, à la seule condition de multiplier, dans le calcul de l'aberration annuelle, la vitesse de la lumière par le facteur $1 + \frac{v_0}{V}^{101}$). Si l'on appelle x l'angle formé par la direction vraie du rayon lumineux et la vitesse séculaire du mouvement de la terre, on a

$$V_0^2 = V^2 + v_0^2 + 2v_0V \cos x,$$

ou, d'une façon suffisamment approchée^{100a}),

$$V_0 = V \left(1 + \frac{v_0}{V} \cos x \right).$$

L'aberration diurne. L'aberration diurne des étoiles fixes se calcule à l'aide des expressions des coordonnées équatoriales a, b, c relatives au centre de la terre. On a

$$\frac{da}{dt} = -\varrho \cos \varphi' \sin \Theta \frac{d\Theta}{dt}, \quad \frac{db}{dt} = \varrho \cos \varphi' \cos \Theta \frac{d\Theta}{dt}, \quad \frac{dc}{dt} = 0,$$

la variation de ϱ étant négligeable. Il suit de là, en se bornant aux termes du premier ordre

$$\alpha - \alpha' = -c \cos \varphi' \cos (\Theta - \alpha) \sec \delta,$$

$$\delta - \delta' = -c \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha) \sin \delta,$$

en posant

$$c = \frac{\varrho}{V} \frac{d\Theta}{dt};$$

c s'appelle la constante de l'aberration diurne; sa valeur numérique, qui dépend de la détermination de la vitesse de la lumière, de la parallaxe du soleil, etc. est ainsi¹⁰²)

$$c = 0'',322.$$

Dans les observations méridiennes, on a

$$\alpha - \alpha' = -c \cos \varphi' \sec \delta,$$

$$\delta - \delta' = 0.$$

101) C'est *A. J. F. Yvon Villarceau*⁹⁷⁾ qui a donné le premier ce facteur. Toutes les allégations contraires à sa conclusion ont pour base une confusion soit entre les coordonnées apparentes A', B' et les coordonnées vraies A, B , ou avec A_0 et B_0 . Voir *H. Battermann*, Einige Berichtigungen aus dem Gebiete der Aberration und Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts [*Astron. Nachr.* (Kiel) 118 (1888), col. 369; 119 (1888), col. 297].

102) *Th. von Oppolzer*, Bahnbestimmung⁴⁹⁾, (2^e éd.) 1, p. 111; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 111.

L'aberration diurne exerce donc, ainsi qu'il est facile de le voir géométriquement, seulement une influence sur les ascensions droites; pour un instrument installé d'une façon fixe, elle agit de la même façon qu'une erreur instrumentale, et *F. W. Bessel*¹⁰³⁾ l'a réunie à l'erreur de collimation pour le calcul des réductions.

La parallaxe de lumière, de même que la parallaxe diurne, ne peut avoir des effets mesurables que lorsque les déplacements relatifs sont assez grands, c'est-à-dire pour les corps du système solaire. Pour les corps du système solaire les plus rapprochés, jusqu'à Jupiter inclusivement, on évalue l'effet total de l'aberration, en diminuant seulement le temps de l'observation du temps de lumière (c'est-à-dire par le passage au temps t_1); mais pour les corps plus éloignés (Saturne, etc.), on ne peut, ainsi que l'a montré *H. Battermann*¹⁰⁴⁾, considérer le mouvement du lieu de la terre comme rectiligne pendant le temps de lumière; on réunit les deux corrections très faibles, parallaxe diurne et aberration planétaire, qu'on distingue de l'aberration des fixes, et l'on applique la règle suivante: on calcule la parallaxe diurne et l'aberration des étoiles fixes (diurne et annuelle) avec les coordonnées apparentes au temps t_2 , et en ajoutant les deux corrections au lieu observé, on obtient la position géocentrique vraie au temps t_1 ¹⁰⁵⁾.

L'aberration annuelle. On ne considère, dans le calcul de cette correction, que le mouvement elliptique, selon les lois de Képler, du centre de la terre autour du soleil. Toute perturbation de ce mouvement engendre une inégalité correspondante dans le calcul de l'aberration; mais presque en aucun cas ces inégalités n'atteignent des valeurs mesurables¹⁰⁶⁾. Pour tous les corps du système solaire, le mouvement annuel de la terre peut, pendant le temps de lumière, être considéré comme rectiligne¹⁰⁷⁾; on tient donc compte de l'effet total de l'aberration

103) L'effet de l'aberration diurne a été calculé pour la première fois par *L. Euler*, Comm. Acad. Petrop. 11 (1739), éd. 1750, p. 169 et suiv.; ensuite par *J. W. von Camerer*, Über die tägliche Aberration der Fixsterne [Berliner Astron. Jahrb. für 1798, éd. Berlin 1795, p. 139]; mais c'est *F. W. Bessel* [Astron. Beob. Univ.-Sternwarte Königsberg 4 (1818), p. III] qui l'a le premier pris en considération pour les calculs pratiques.

104) Diss. Berlin⁴²⁾, p. 20 et suiv.

105) Id. p. 22/3.

106) Id. p. 28 et suiv. Le centre du soleil lui-même se meut autour du centre de gravité du système solaire, d'une façon d'ailleurs compliquée; il faut ajouter à ce déplacement les perturbations du mouvement elliptique de la terre, en particulier celles qui sont dues à l'influence de la lune. Voir aussi *H. C. Plummer*, Note on the calculation of stellar aberration [Monthly Notices astron. Soc. 69 (1908/9), p. 414].

107) *H. Battermann*, Diss. Berlin⁴²⁾ p. 20. La courbure de l'orbite terrestre

en passant du temps t_2 au temps t_1 . Pour les étoiles fixes, au contraire, il est nécessaire de séparer la parallaxe de lumière de l'aberration. La parallaxe de lumière se joint à la parallaxe annuelle, celle-ci étant calculée pour le temps d'observation t_2 .

On déduit les composantes de la vitesse du mouvement annuel de la terre des expressions des coordonnées équatoriales du soleil; on trouve ainsi¹⁰⁸⁾

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\cos \odot \frac{dR}{dt} + R \sin \odot \frac{d\odot}{dt},$$

etc., et, par l'introduction des formules du mouvement elliptique¹⁰⁹⁾

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} (\sin \odot + \sin \varphi \sin II) \\ \frac{db}{dt} &= - \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} (\cos \odot + \sin \varphi \cos II) \\ \frac{dc}{dt} &= - \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} (\cos \odot + \sin \varphi \cos II).\end{aligned}$$

Ici \odot désigne la longitude du soleil, M son anomalie moyenne, ε l'inclinaison de l'écliptique, $e = \sin \varphi$ l'excentricité de son orbite, II la longitude du périhélie.

En se bornant aux termes du premier ordre, on a¹¹⁰⁾

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha' &= k' (\sin \alpha \sin \odot + \cos \alpha \cos \odot \cos \varepsilon) \sec \delta \\ &\quad + k' \sin \varphi (\sin \alpha \sin II + \cos \alpha \cos II \cos \varepsilon) \sec \delta \\ \delta - \delta' &= k' [-\cos \odot (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) + \sin \odot \cos \alpha \sin \delta] \\ &\quad + k' \sin \varphi [-\cos II (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) + \sin II \cos \alpha \sin \delta].\end{aligned}$$

Lorsqu'on ne considère que ces termes du premier ordre, il est indifférent de faire le calcul avec les coordonnées immédiatement observées ou avec celles qui sont déjà débarrassées de l'aberration annuelle. Au contraire, dans les termes du second ordre, on obtiendrait une

produit des corrections d'aberration qui, pour Saturne, atteignent 0",01; pour Uranus elles atteignent 0",02; pour Neptune elles atteignent 0",03.

108) A la vérité, le calcul de l'aberration annuelle se fait d'une façon plus simple en introduisant les coordonnées écliptiques; mais, pour l'application directe, il est nécessaire de prendre les coordonnées équatoriales; on trouvera d'ailleurs les corrections des coordonnées écliptiques en faisant $\varepsilon = 0$.

109) Voir par ex. *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁸⁵⁾, p. 186; *Astron. sphérique*, p. 237; *Th. von Oppolzer*, *Bahnbestimmung*⁴⁹⁾, (2^e éd.) 1, p. 112; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 112.

110) Pour être rigoureux, il faudrait donner l'indice zéro aux lettres α et δ ; mais, dans la pratique, on est obligé de faire abstraction de l'aberration séculaire.

différence appréciable¹¹¹⁾ en employant l'un ou l'autre des systèmes. Il est également indifférent de prendre comme plan fondamental l'équateur vrai ou l'équateur moyen; dans le premier cas, on a naturellement la correction des coordonnées équatoriales vraies, dans le second, celle des coordonnées moyennes. Il apparaît toutefois que les formules s'appliquent plus directement à l'équateur vrai¹¹²⁾. Néanmoins on fait, dans la pratique, le calcul avec les coordonnées moyennes d'une époque voisine de celle de l'observation (environ le commencement de l'année) et l'on détermine les coefficients des seconds membres pour un temps assez long qui permet l'emploi de tables. Les termes correctifs qu'il faudrait introduire par suite de cette façon d'opérer comprennent des produits de facteurs dus, d'une part à la précession et la nutation, de l'autre à l'aberration; ils ne peuvent prendre d'importance que pour les étoiles voisines du pôle¹¹³⁾.

La quantité k' qui figure dans les formules précédentes a pour expression

$$k' = \frac{1}{V_0 \cos \varphi} \frac{dM}{dt}.$$

On néglige, dans la pratique, l'aberration séculaire, et l'on remplace V_0 par V dans cette expression; on a ainsi une constante k , qui s'appelle constante de l'aberration (il faudrait dire aberration annuelle); cette constante dépend des dimensions de l'orbite terrestre et de la vitesse de la lumière. Mais la détermination de ces données ne peut se faire directement avec une exactitude suffisante pour la détermination de k ; c'est au contraire la valeur de k , trouvée par d'autres procédés, qui sert de vérification à ces grandeurs. Dans la première moitié du 19^{ième} siècle, on fit usage de la valeur

$$k = 20'',253,$$

déduite par *J.-B. J. Delambre* des observations d'éclipses des satellites de Jupiter. Par des observations de passages dans le premier vertical, *F. G. W. Struve*¹¹⁴⁾ obtint une amélioration notable. Le nombre trouvé par lui,

$$k = 20'',445$$

111) Voir par ex. l'article „Aberration“ de *E. von Rebeur-Paschwitz*, dans *W. Valentiner*, Handwörterbuch der Astronomie 1, Breslau 1897, p. 166/79.

112) Lorsqu'on veut chercher la correction des coordonnées observées directement, on trouve dans les annuaires les éléments du calcul rapportés à l'équateur vrai: composantes de la vitesse du mouvement terrestre annuel, coordonnées du soleil, obliquité de l'écliptique, etc.

113) *F. W. Bessel*, Fundamenta⁶⁾, p. XX et suiv.; *E. von Rebeur-Paschwitz*¹¹¹⁾; *H. Battermann*, Astron. Nachr. (Kiel) 118 (1888), col. 369.

114) Sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes [Mém. Encyclop. des scienc. mathémat. VII 1. 8

fut adopté dans la seconde moitié du 19^{ième} siècle. La conférence internationale de Paris⁶⁴) conclut à la valeur¹¹⁵)

$$k = 20'',47.$$

Les formules ci dessus comprennent, dans leurs seconds membres, deux parties, dont la première, qui est la principale, est de période annuelle pour une étoile fixe; la seconde, qui contient en facteur l'excentricité terrestre $\sin \varphi$, reste sensiblement constante pour chaque étoile. Les coefficients de ces seconds termes sont très faibles; on a

$$k \sin \varphi = 0'',343.$$

Aussi laisse-t-on de côté, la plupart du temps, ces termes complémentaires; il y a lieu toutefois d'en tenir compte lorsqu'il s'agit d'astres mobiles.

Lorsqu'on emploie les coordonnées écliptiques, les corrections d'aberration annuelle, réduites à leurs parties principales, deviennent

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda' &= + k \cos (\lambda - \odot) \sec \beta \\ \beta - \beta' &= - k \sin (\lambda - \odot) \sin \beta. \end{aligned}$$

On voit que, par suite de l'aberration, la position apparente de l'étoile décrit, pendant l'année, une ellipse autour de sa position moyenne, le demi grand axe de l'ellipse étant constant et égal à k , le demi petit axe à $k \sin \beta$. C'est par l'observation de ce déplacement elliptique que *J. Bradley* découvrit le phénomène de l'aberration, dont il donna une explication correcte. *J.-B. J. Delambre*¹¹⁶) donna le premier les formules de correction en se basant sur la théorie, et il signale déjà l'existence des termes dépendant de l'excentricité de l'orbite terrestre. *F. W. Bessel*¹¹⁷) et plus spécialement *Th. von Oppolzer*¹¹⁸) s'occu-

Acad. Pétersb. [sc. math.-phys.] (6) 5 (1844), p. 229; Bull. Acad. Pétersb. (1) 1 (1836/43), col. 257].

115) Voir par ex. *M. Nyrén*, L'aberration des étoiles fixes [Mém. Acad. Pétersb. (7) 31 (1833), p. 1/47]; *S. C. Chandler*, The probable value of the constant of aberration [The astronomical Journal 23 (1903), p. 1/5]. Pour l'ensemble des valeurs proposées, voir *S. Newcomb*, Fundam. constants of astron.¹⁵).

116) Connaissance des Temps pour l'an X (1803), p. 346; Astronomie théorique et pratique 3, Paris 1814, p. 109. Il indique que, dans la manière habituelle de faire le calcul, en partant de l'ellipse d'aberration, on ne tient pas compte de l'excentricité de l'orbite terrestre; il ajoute qu'il a montré le premier qu'on est autorisé à agir ainsi, et donne de plus l'expression des termes qu'il faut ajouter si l'on veut être rigoureux.

117) Über die Aberration der Planeten und Kometen [Astron. Nachr. (Altona) 12 (1835), col. 121].

118) Eine Bemerkung über die Berechnung der Aberration [Astron. Nachr. (Altona) 65 (1865), col. 381; *Th. von Oppolzer*, Bahnbestimmung⁴⁹), (2^e éd.) 1, p. 114 et suiv.; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 114 et suiv.].

pèrent de la détermination exacte de ces termes. Une forme appropriée à la réduction en tables a été donnée par *C. F. Gauss*¹¹⁹); plus tard, *F. W. Bessel*¹²⁰) réunit sous la même formule la correction de l'aberration et celles de précession et de nutation.

Lorsque l'on veut faire intervenir l'aberration séculaire, on a vu qu'elle influe sur le calcul de l'aberration annuelle¹²¹); le dénominateur V_0 de l'expression de k' ne peut plus, dans ce cas, être remplacé par V , mais il dépend en outre de la position de l'apex inconnu du mouvement séculaire par rapport à l'étoile; on a en effet

$$V_0 = V \left(1 + \frac{v_0}{V} \cos x \right),$$

d'où sensiblement

$$k' = k \left(1 - \frac{v_0}{V} \cos x \right),$$

k étant la constante précédente. Si l'on pouvait trouver expérimentalement une loi de variation selon une formule telle que celle-ci pour les constantes d'aberration des diverses étoiles, on en déduirait la direction du mouvement du système solaire par rapport à l'éther lumineux. A l'heure actuelle, la précision de la détermination de k' n'est pas encore assez grande pour formuler nettement cette loi.

L'aberration séculaire. Ce que nous savons de la grandeur du mouvement séculaire permet de le considérer comme rectiligne pendant le temps de lumière des étoiles fixes. On peut, par conséquent, pour tenir compte de cette aberration, se borner à appliquer la proposition énoncée plus haut: le lieu observé au temps t_2 , débarrassé des aberrations diurne et annuelle, se confond avec le lieu vrai au temps $t_1 = t_2 - \tau$. Mais le temps de lumière τ est inconnu pour l'immense majorité des étoiles; d'autre part, la dénotation de l'époque, t_1 ou t_2 , est indifférente si l'on veut étudier le mouvement d'une étoile isolée; on laisse donc en général de côté l'aberration séculaire¹²²).

119) *Monatliche Correspondenz* 17 (1808), p. 312/7; *Werke* 6, Göttingue 1874, p. 123.

120) *Tafeln zur Reduktion der Örter der Fixsterne* [*Astron. Nachr.* (Altona) 1 (1823), col. 49].

121) *Au sujet de la réalité de ces considérations et de celles qui suivent, voir la note 100*.*

122) En opérant ainsi, on rapporte assurément les positions des différentes étoiles à des époques différentes, et par suite à différentes origines dans l'espace. Mais c'est seulement dans un avenir lointain qu'il faudra tenir compte de ce fait lorsqu'on commencera à étudier au point de vue dynamique le mouvement des étoiles fixes. Actuellement, et tant qu'on devra considérer le mouvement d'ensemble du système solaire comme rectiligne, il y aurait tout au plus à con-

Cependant, la correction d'aberration séculaire pourrait se calculer à l'aide des formules

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{v}{V} \cos D \sin(\alpha - A) \text{ séc } \delta,$$

$$\delta - \delta_0 = \frac{v}{V} [\cos D \cos(\alpha - A) \sin \delta - \sin D \cos \delta],$$

A et D étant les coordonnées équatoriales de l'apex du mouvement séculaire; il en résulterait, à côté d'une variation d'aspect du ciel, une multiplication du mouvement propre par un facteur qui est précisément celui de *A. J. F. Yvon Villarceau*¹²³).

7b. **Précession et nutation.** I. *La précession.* La correction due à une rotation i du plan fondamental, accompagnée d'un déplacement de l'axe à partir duquel on compte les longitudes dans ce plan, se calcule par la considération du triangle sphérique ayant pour sommets les pôles des deux plans fondamentaux et l'astre. En conservant les mêmes notations que plus haut pour déterminer l'écliptique mobile ($i, \Omega, \Omega + l$), on a, pour passer de λ, β à λ', β' ,

$$\cos(\lambda' - \Omega - l) \cos \beta' = \cos(\lambda - \Omega) \cos \beta$$

$$\sin(\lambda' - \Omega - l) \cos \beta' = \sin(\lambda - \Omega) \cos \beta \cos i + \sin \beta \sin i$$

$$\sin \beta' = -\sin(\lambda - \Omega) \cos \beta \sin i + \sin \beta \cos i.$$

Au moyen de transformations simples, on obtient, en introduisant les quantités auxiliaires q et L ,

$$q = \sin i \left[\text{tg } \beta - \sin(\lambda - \Omega) \text{tg } \frac{i}{2} \right],$$

$$\text{tg } L = \frac{q \cos(\lambda - \Omega)}{1 + q \sin(\lambda - \Omega)},$$

$$\lambda' = \lambda + l + L,$$

$$\text{tg } \frac{\beta' - \beta}{2} = -\text{tg } \frac{i}{2} \sin \left(\lambda - \Omega + \frac{L}{2} \right) \text{ séc } \frac{L}{2}.$$

Si l'on veut calculer les corrections relatives à l'équateur, on introduira les quantités m, n, p [*S. Newcomb*: $z + \xi_0, \theta, \xi_0$] qui fixent la position de l'équateur mobile, et l'on aura¹²⁴)

sidérer la variation du temps de lumière d'une étoile par suite du changement de sa distance à la terre. Ce changement étant considéré comme proportionnel au temps, il n'y aurait qu'à multiplier les mouvements propres, obtenus par les méthodes usuelles, par un facteur extrêmement voisin de l'unité pour obtenir des mouvements relatifs par rapport à la terre.

123) *K. Schwarzschild*, Über den Einfluss der säkularen Aberration auf die Fixsternörter [*Astron. Nachr.* (Kiel) 136 (1894), col. 81].

124) Les formules ont été données pour la première fois par *J. G. F. Bohnen-*

$$q = \sin n \left[\operatorname{tg} \delta + \cos(\alpha + p) \operatorname{tg} \frac{n}{2} \right],$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{q \sin(\alpha + p)}{1 - q \cos(\alpha + p)},$$

$$\alpha' = \alpha + m + L,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta' - \delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{n}{2} \cos \left(\alpha + p + \frac{L}{2} \right) \operatorname{séc} \frac{L}{2}.$$

Pour les calculs pratiques, on emploie les développements en séries. On pose

$$m = \sum m_i (t' - t)^i,$$

$$n = \sum n_i (t' - t)^i,$$

$$p = \sum p_i (t' - t)^i,$$

où les sommes sont étendues aux indices $i = 1, 2, 3, \dots$ et l'on en déduit

$$\alpha' - \alpha = \sum A_i (t' - t)^i,$$

$$\delta' - \delta = \sum D_i (t' - t)^i;$$

en particulier, on a

$$A_1 = m_1 + n_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

$$A_2 = m_2 + \frac{n_1^2}{4} \sin 2\alpha + (n_2 \sin \alpha + p_1 n_1 \cos \alpha) \operatorname{tg} \delta + \frac{n_1^2}{2} \sin 2\alpha \operatorname{tg}^3 \delta,$$

$$D_1 = n_1 \cos \alpha,$$

$$D_2 = n_2 \cos \alpha - n_1 p_1 \sin \alpha - \frac{n_1^2}{2} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \delta.$$

Les valeurs numériques se déduisent de celles qui ont été données à la fin du n° 5 b; sous une forme abrégée¹²⁵, on a, en prenant l'année comme unité de temps,

$$m_1 = 46'',0711 + 0'',000279(t - 1850,0), \quad m_2 = 0'',000140,$$

$$n_1 = 20'',0511 - 0'',000085(t - 1850,0), \quad n_2 = -0'',000043,$$

$$p_1 = 23'',036.$$

Pour de très courts intervalles de temps, jusqu'à environ une année, on se borne au premier terme. On appelle coefficients de *précession annuelle*, ou de *précession au temps t*, les dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$ à cet instant, et on les désigne par Prc_i ; on a donc

$$\operatorname{Prc}_i(\alpha) = A_i = m_i + n_i \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \quad \operatorname{Prc}_i(\delta) = D_i = n_i \cos \alpha;$$

berger⁷⁴). S. Newcomb, a employé une forme légèrement différente [Spherical astronomy^{5*}], p. 265]; il donne aussi (p. 268/70) des formules d'approximation particulières.

125) Les grandeurs m_i, n_i sont habituellement désignées par m, n ; il faudrait alors mettre les indices t et t' aux lettres désignées précédemment par m, n, p .

pour déterminer la grandeur de la précession dans l'intervalle de deux époques t et t' , on a

$$Pr c_t^{t'} = \int_t^{t'} Pr c_t dt$$

et l'on calcule cette intégrale à l'aide de quadratures mécaniques. Une valeur approchée est

$$(t' - t) Pr c_t;$$

une autre, qui est le plus souvent suffisante, est

$$(t' - t) Pr c_{\frac{t+t'}{2}};$$

cette dernière tient compte de la variation de la précession annuelle; si l'on introduit la *variation séculaire* (*variatio secularis*) V , en posant

$$V_t(\alpha) = 200 A_2, \quad V_t(\delta) = 200 D_2,$$

on a en effet avec une approximation assez grande

$$Pr c_{\frac{t+t'}{2}} = Pr c_t + \frac{t' - t}{200} V_r$$

Dans les catalogues d'étoiles, on indique, à côté des coordonnées de chaque étoile, la précession et la variation séculaire de la précession pour l'époque du catalogue. Si l'on ne connaît point la variation séculaire, on commence par calculer les coordonnées de l'étoile pour l'époque intermédiaire $\frac{t+t'}{2}$, en appliquant la correction $\frac{t' - t}{2} Pr c_t$, et avec ces coordonnées approchées, on calcule $Pr c_{\frac{t+t'}{2}}$.

Lorsque les termes du second ordre ne suffisent pas [c'est aujourd'hui le cas, déjà pour les déclinaisons moyennes, quand la différence des époques atteint 100 ans] il faut, soit calculer les termes du troisième ordre A_3 et D_3 , soit appliquer une formule de quadrature mécanique un peu plus rigoureuse, par exemple la suivante

$$Pr c_t^{t'} = \frac{t' - t}{6} [Pr c_t + 4 Pr c_{\frac{t+t'}{2}} + Pr c_{t'}],$$

qui est exacte jusqu'aux termes du quatrième ordre exclusivement¹²⁶). On peut aussi mettre les termes du troisième ordre sous forme de tables¹²⁷),

126) Par ex. *A. Auwers*, Neue Reduktion der Bradleyschen Beobachtungen aus den Jahren 1750/62, 3, St Pétersbourg 1888, p. 66. Dans le *Berliner Astron. Jahrbuch* on opère de même pour les étoiles de déclinaison supérieure à 70°.

127) *H. Klock*, Tafel für das dritte Glied der Präzession [Publicationen der Sternwarte zu Kiel 5 (1890)].

car ils sont très petits. Quand il s'agit d'étoiles voisines d'un des pôles, ou de grands intervalles de temps, on emploie les formules trigonométriques approchées de *S. Newcomb*¹²³⁾ ou bien les formules rigoureuses.

Les mouvements propres des étoiles fixes. Les réductions d'étoiles à différents équinoxes sont souvent compliquées par le fait qu'il faut avoir égard à leurs mouvements propres.

Quand on rapporte à un même équinoxe les observations d'une même étoile faites à diverses époques, et que les coordonnées obtenues varient suivant les époques obtenues, on attribue ces variations au mouvement propre de l'étoile par rapport au centre de gravité du système solaire; ces mouvements peuvent jusqu'à présent, excepté s'il s'agit d'étoiles faisant partie de systèmes physiquement doubles, être considérés comme rectilignes et uniformes. Pour l'observateur, il paraît donc se produire un mouvement suivant un grand cercle de la sphère céleste, avec une vitesse angulaire constante¹²⁸⁾, et l'on détermine, pour chaque étoile, ce mouvement par la vitesse angulaire μ , et l'angle compris entre le grand cercle sur lequel il s'opère et le cercle horaire, qu'on appelle angle de position p ; ce dernier angle varie avec le temps, par suite du changement du cercle horaire; on a, avec une approximation tout à fait suffisante,

$$p' - p = \mu, \sin p \operatorname{tg} \delta (t' - t).$$

Dans la pratique, ce n'est point ainsi qu'on définit les mouvements propres; conformément à l'emploi des coordonnées équatoriales,

128) En toute rigueur, le mouvement angulaire ne doit pas être uniforme, puisqu'il dépend du déplacement de l'observateur par rapport à l'étoile; *H. von Seeliger*, Bemerkung über veränderliche Eigenbewegungen [Astron. Nachr. (Kiel) 154 (1900/1), col. 65] trouve pour le mouvement angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ la relation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -0,0001024\pi \frac{d\varrho}{dt} \frac{d\varphi}{dt},$$

où $\frac{d\varrho}{dt}$ est la vitesse selon le rayon visuel en kilomètres par seconde et π la parallaxe annuelle en secondes d'arc. *F. Ristenpart* [Viertelj. Astron. Ges. Leipzig 37 (1902), p. 242] chercha à montrer l'existence d'un terme quadratique dans le mouvement propre de l'étoile Groombridge 1830, qui a le plus rapide mouvement propre de l'hémisphère nord; mais il n'a pu réussir complètement, à cause de l'indétermination qui subsiste sur la parallaxe de cette étoile. *L. Boss* [Preliminary general catalogue³⁶⁾] a tenu compte de cet effet de perspective pour les deux étoiles Groombridge 1830 et 61 Cygne. Dans un avenir qui ne peut encore s'entrevoir que lointain, on parviendra sans doute à obtenir ce terme proportionnel au carré du temps; on peut actuellement le négliger pour presque toutes les étoiles.

on les décompose en deux composantes μ_α et μ_δ . On a facilement

$$\mu_\alpha = \mu_s \sin p \sec \delta,$$

$$\mu_\delta = \mu_s \cos p,$$

d'où l'on tire, pour l'instant t' ,

$$\mu_\alpha' = \mu_\alpha + 2(t' - t)\mu_\alpha\mu_\delta \operatorname{tg} \delta,$$

$$\mu_\delta' = \mu_\delta - \frac{t' - t}{2} \mu_\alpha^2 \sin 2\delta.$$

Jusqu'à présent, pour la très grande majorité des étoiles, on se borne aux premiers termes, et l'on conclut un mouvement uniforme en ascension droite et en déclinaison; c'est seulement pour très peu d'étoiles animées de grands mouvements propres, de déclinaisons élevées, et quand il s'agit d'intervalles de temps considérables, qu'on a égard aux termes complémentaires¹²⁹).

A l'altération des projections des mouvements propres due au changement de cercle horaire par suite de la variation d'ascension droite, il faut ajouter celle qui correspond au déplacement du cercle horaire par l'effet de la précession; celle-ci ne change pas le mouvement angulaire μ_s . On a, avec une approximation suffisante

$$p'' - p' = n_1(t' - t) \sin \alpha \sec \delta,$$

$$\mu_\alpha'' = \mu_\alpha' + n_1(t' - t)(\mu_\delta \sin \alpha \sec^2 \delta + \mu_\alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \delta),$$

$$\mu_\delta'' = \mu_\delta' - n_1\mu_\alpha(t' - t) \sin \alpha;$$

μ_α'' , μ_δ'' sont alors les mouvements propres annuels à l'époque t' , rapportés aux plans fondamentaux à l'époque t' , de même que μ_α et μ_δ sont rapportés à l'époque t .

On conçoit dès lors comment se fait le calcul des mouvements propres: en rapportant toutes les observations d'une étoile au même équinoxe, deux séries d'équations linéaires donneront les valeurs μ_α et μ_δ relatives à cette époque; les variations ultérieures de ces moyens mouvements seront calculées par les formules précédentes. (Il est entendu qu'on néglige ici $\mu' - \mu$; s'il devait en être tenu compte, il faudrait le faire avant de résoudre les équations linéaires).

Pour transporter à un autre équinoxe la position d'une étoile dont le mouvement propre est connu, ainsi que l'exige l'emploi des étoiles de comparaison, on peut en premier lieu appliquer les formules rigoureuses: dans ce cas, ou bien on applique les formules des pré-

129) Ce point a été signalé pour la première fois par *John H. C. Coffin* [Tables to facilitate the reduction of places of the fixed stars, prepared for the use of the Amer. Ephem., Washington 1869, p. XVI et suiv.], tables dressées selon les conseils de *J. Winlock* (et publiées sans nom d'auteur).

cessions en remplaçant les coordonnées α , δ de l'étoile par

$$\alpha + (t' - t)\mu_\alpha, \quad \delta + (t' - t)\mu_\delta;$$

ou bien on transforme d'abord α , δ en α' , δ' et l'on calcule ensuite les mouvements propres dans l'intervalle $t' - t$; il faut, dans ce dernier cas, prendre les mouvements $\mu_{\alpha'}$ et $\mu_{\delta'}$ rapportés au nouvel équinoxe.

On peut aussi se servir de développements en séries, en ajoutant aux coefficients

$$A_1, A_2, \dots, D_1, D_2, \dots$$

des termes correspondant au mouvement propre¹³⁰).

II. *La nutation*. L'effet de la nutation sur les coordonnées équatoriales se calcule simplement, en traitant comme des différentielles les variations produites dans les éléments des plans fondamentaux. Les latitudes n'étant pas influencées, il suffit de donner des accroissements à λ et ε ; on a

$$\begin{aligned} d\alpha &= (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) d\lambda - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta d\varepsilon, \\ d\delta &= \cos \alpha \sin \varepsilon d\lambda + \sin \alpha d\varepsilon, \end{aligned}$$

formules qui suffisent jusqu'aux déclinaisons les plus élevées. On a vu [n° 5b, p. 95] que $d\lambda$ et $d\varepsilon$ ont été calculés pour des intervalles de temps équidistants, et réunis en tables.

7c. Récapitulation des différentes corrections à opérer pour réduire des coordonnées observées à un équinoxe déterminé. Après avoir appliqué aux coordonnées observées les corrections dues aux erreurs instrumentales (auxquelles on joindra la réfraction et l'aberration diurne), il faut d'abord, s'il s'agit d'un corps du système solaire, calculer la parallaxe diurne pour le temps t_2 de l'observation; pour les étoiles fixes, afin de rapporter la position au centre du soleil, il faut tenir compte de la parallaxe annuelle pour l'instant t_2 ¹³¹) et de l'aberration des fixes. On obtient ainsi les vraies coordonnées de l'astre au temps t_1 rapportées à l'équinoxe vrai du temps t_2 ¹³²); ce sont des

130) *Th. von Oppolzer*, Bahnbestimmung⁴⁹), (2^e éd.) 1, p. 222 et suiv.; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 226 et suiv. Les données des catalogues d'étoiles, relatives aux mouvements propres, ne sont pas uniformes. Voir *Fr. Küstner*, Veröffentlichungen der Sternwarte zu Bonn, cah. 2 (1897); *H. Battermann*, Beobachtungsergebnisse der Sternwarte zu Berlin 8 (1899); id. 10 (1902); *S. Newcomb*, Catalogue of fundamental stars¹⁵). Il convient d'ailleurs, même dans les termes d'ordre supérieur, d'isoler l'effet de la précession de celui du mouvement propre.

131) On néglige le plus souvent la parallaxe annuelle, connue pour peu d'étoiles et toujours très faible.

132) Pour les corps du système solaire, on a vu que ces équinoxes peuvent être considérés comme les mêmes.

coordonnées géocentriques s'il s'agit d'une planète, héliocentriques pour une étoile fixe. Il reste à tenir compte de la nutation; on réunit habituellement cette correction avec l'aberration annuelle des étoiles fixes et la précession à partir de l'équinoxe moyen du commencement de l'année; la somme de ces trois quantités, changée de signe, s'appelle réduction au lieu apparent (*reductio ad locum apparentem*); on l'exprime sous différentes formes, selon qu'il s'agit de la calculer pour des étoiles isolées (comme les étoiles de comparaison des planètes ou des comètes), ou pour de grandes séries d'étoiles observées plusieurs fois au méridien. Dans le premier cas, on emploie les formules

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{sec} \delta, \\ \Delta\delta &= g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta.\end{aligned}$$

Les termes contenant f, g, G sont relatifs à la précession et la nutation, ceux qui contiennent h, H, i à l'aberration. On a

$$\begin{aligned}f &= \tau' m + \cos \varepsilon d\lambda, & h \sin H &= -k \cos \odot \cos \varepsilon, \\ g \cos G &= \tau' n + \sin \varepsilon d\lambda, & h \cos H &= -k \sin \odot, \\ g \sin G &= -d\varepsilon, & i &= -k \cos \odot \sin \varepsilon,\end{aligned}$$

où m, n sont les coefficients précédemment trouvés pour la précession¹³³), τ' le temps écoulé depuis le début de l'année évalué en fraction d'année, $d\lambda$ et $d\varepsilon$ les déplacements dus à la nutation, k la constante de l'aberration.

Lorsqu'on veut réduire une longue série d'observations d'une même étoile, on calcule la réduction au lieu apparent par les formules de *F. W. Bessel*¹³⁴):

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + E, \\ \Delta\delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd',\end{aligned}$$

dans lesquelles on a posé

$$\begin{aligned}A &= \tau' + \frac{\sin \varepsilon}{n} d\lambda, & B &= -d\varepsilon, & C &= h \sin H, & D &= h \cos H, \\ E &= \frac{a}{n} \sin \varepsilon d\lambda,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, & a' &= n \cos \alpha, \\ b &= \cos \alpha \operatorname{tg} \delta, & b' &= -\sin \alpha, \\ c &= \cos \alpha \operatorname{sec} \delta, & c' &= \cos \delta \operatorname{tg} \varepsilon - \sin \alpha \sin \delta, \\ d &= \sin \alpha \operatorname{sec} \delta, & d' &= \cos \alpha \sin \delta.\end{aligned}$$

133) On emploie avec une précision suffisante les coefficients relatifs au commencement de l'année.

134) *Tafeln zur Reduktion der Örter der Fixsterne* [Astron. Nachr. (Altona) 1 (1823), col. 49].

Le terme E , dans lequel a désigne la précession planétaire, est très petit ($0'',05$ au maximum) et peut d'ailleurs être laissé de côté, puisqu'il représente une correction commune à tous les astres. Les quantités A, B, C, D, E sont des fonctions du temps indépendantes de la position de l'astre, de même que f, g, h, G, H, i ; on les calcule pour des époques équidistantes, et on les réunit sous forme de tables¹³⁵⁾; au contraire $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sont sensiblement constantes pour chaque étoile pendant un intervalle de quelques années; on calcule ces constantes avec les coordonnées moyennes¹³⁶⁾.

Dans ses „Star-correction tables“, *W. H. Finlay*^{136a)} a indiqué une forme très avantageuse de calcul. Il réduit en tables, pour des argu-

135) *F. W. Bessel* a construit ses tables¹³⁵⁾ pour des intervalles de 10 en 10 jours; il est nécessaire de calculer à nouveau A et B d'année en année, tandis que les expressions de C et D en fonction de la longitude du soleil varient très peu; elles ne dépendent que de la fraction τ' de l'année écoulée depuis le commencement de l'année fictus. *F. W. Bessel* [Tabulae Regiomontanae⁹⁾, table VIII] donne A, B, C, D, E, τ' pour des intervalles de dix en dix jours sous le titre: «Valores quantitatum ad computationem locorum apparentium stellarum fixarum generaliter inservientium, pro saeculo 1750—1850». Ces tables ont été continuées par *J. Zech* pour les années 1850 à 1860 et par *J. Ch. Wolfers* pour les années 1860 à 1880 [voir *J. Ch. Wolfers*²⁹⁾, Tabulae reductionum]. L'observatoire de Poulkovo publia ensuite une table de ces mêmes grandeurs de jour en jour, calculées pour l'heure zéro de temps sidéral [*O. Struve*, Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1840 ad 1864, S^t Pétersbourg 1861; id. 1865 ad 1874, S^t Pétersbourg 1867; id. 1875 ad 1880, S^t Pétersbourg 1869; id. 1875/9, S^t Pétersbourg 1871; etc.]. Dans l'intervalle, les divers annuaires ont repris le calcul de ces constantes, et donnent aussi bien A, B, C, D , que f, g, G, h, H, i . Pour la considération des termes lunaires rapidement variables de faible importance, voir les commentaires spéciaux. Il est à noter que le „Berliner Jahrbuch“ et l'„American Ephemeris“ ont gardé les notations de *F. W. Bessel*, tandis que dans la „Connaissance des Temps“ et le „Nautical almanac“, les significations des lettres A et B d'une part, C et D de l'autre, ont été échangées; à partir de 1916 ces deux derniers recueils reviendront aux notations originales.

136) *W. Klinkerfues* [Astron. Nachr. (Altona) 62 (1864), col. 355] a proposé un autre système de formules, qui présente maints avantages, pour la réduction au lieu apparent. *Th. von Oppolzer* [Bahnbestimmung²⁹⁾, (2^e éd.) 1, p. 256; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 261] l'a repris sous la forme

$$\Delta \alpha = f + k \cot \frac{90^\circ - \delta}{2} \sin(K + \alpha) + l \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \delta}{2} \cos(L + \alpha),$$

$$\sec \delta \cdot \Delta \delta = i + k \cot \frac{90^\circ - \delta}{2} \cos(K + \alpha) + l \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \delta}{2} \sin(L + \alpha),$$

$$2k \sin K = B + C, \quad 2l \sin L = g \cos G - D,$$

$$2k \cos K = g \cos G + D, \quad 2l \cos L = -B + C$$

136a) Appendix to Cape meridian observations 1890/1.

ments g_0 et h_0 convenablement choisis, les expressions

$$\begin{aligned} P &= g_0 \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta, & P' &= g_0 \cos(G + \alpha), \\ Q &= h_0 \sin(H + \alpha) \operatorname{séc} \delta, & Q' &= h_0 \cos(H + \alpha) \sin \delta. \end{aligned}$$

Les „Independent Day-Numbers“ qui se publient annuellement donnent les valeurs de

$$x = \frac{g - g_0}{g_0}, \quad y = \frac{h - h_0}{h_0}, \quad f, \quad G, \quad H, \quad i$$

et les réductions $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ s'expriment par les formules suivantes, commodes pour le calcul numérique,

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= f + P(1 + x) + Q(1 + y), \\ \Delta\delta &= P'(1 + x) + Q'(1 + y) + i \cos \delta. \end{aligned}$$

Les formules précédentes comprennent seulement les termes du premier ordre, qui ne suffisent pas pour les étoiles polaires; pour celles-ci, on doit calculer complètement les termes du second ordre¹³⁷). En passant par l'intermédiaire des coordonnées rectangulaires, *W. Fabritius*¹³⁸) a simplifié le calcul d'une façon notable.

8. Mise en œuvre des observations méridiennes: Catalogues d'étoiles, annuaires. Les observations méridiennes servent de base à toutes les théories astronomiques. Lorsqu'il s'agit des corps du système solaire dont le mouvement est suivi depuis longtemps, tels que le soleil, la lune, les grosses planètes, et un nombre important de petites planètes, on compare la théorie de ces mouvements, établie en tenant compte de toutes les perturbations susceptibles de calcul, et traduite sous forme de tables donnant les lieux théoriques à des intervalles de temps égaux¹³⁹), aux observations; celles-ci reposent précisément,

137) Voir par ex. pour la notation: *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁸⁵), (4^e éd.) p. 133; *Astron. sphérique*, p. 165; *Th. von Oppolzer*, *Bahnbestimmung*⁴⁹), (2^e éd.) 1, p. 259; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 264. *J. B. A. Gaillot*, *Détermination géométrique des positions des étoiles circompolaires* [*Bull. astron.* 1 (1884), p. 375, 577].

138) Über eine strenge Methode zur Berechnung des Orts von Polsternen [*Astron. Nachr.* (Kiel) 87 (1876), col. 113, 129]. Des améliorations ont été apportées à cette méthode par *Th. von Oppolzer*, *Bahnbestimmung*⁴⁹), (2^e éd.) 1, p. 259; trad. *E. L. J. Pasquier* 1, p. 264 et par *W. Fabritius* lui-même [*Ann. Observ. Kiev* 3 (1891), p. 1/3] La méthode de *W. Fabritius* a été l'objet d'une longue discussion [cf. *W. Fabritius*, *Bull. astron.* 5 (1888), p. 187; *F. Folie*, id. p. 47, 185, 384; *F. Boquet*, id. p. 137, 233; *M. Gonnessiat*, id. p. 138; *N. Herz*, id. p. 145; *L. Schulhof*, id. p. 281].

139) Pour les Tables et Éphémérides, voir: *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie*⁹) 2, p. 400/3; *A. Souchon*, *Traité d'astronomie pratique*, Paris 1883. Pour les tables les plus employées du soleil, cf. note 93; pour celles de la lune voir *I. T. Bürg*, *Tables de la lune* [Tables astronomiques publ. par le Bureau des

soit au point de vue de la détermination des constantes instrumentales, soit pour la détermination du temps, sur les positions absolues d'un certain nombre d'étoiles, que l'instrument méridien peut seul fournir. Les différences qui subsistent entre l'observation et la théorie sont expliquées soit en faisant varier les éléments des orbites ou les masses, soit par l'imperfection de la théorie. Lorsqu'au contraire on s'occupe de corps du système solaire nouvellement découverts, il faut établir une première théorie de leurs mouvements; on se sert encore des observations méridiennes des étoiles de comparaison, en rapportant toutes les positions à une époque moyenne [cf. VII 9].

Pour les étoiles fixes, deux cas sont à considérer également: ou bien l'on poursuit l'amélioration d'un catalogue fondamental, ou bien l'on cherche à déterminer les mouvements propres. Les annuaires astronomiques donnent des éphémérides contenant les positions d'un certain nombre d'étoiles, calculées à l'avance d'après leurs mouvements propres connus, et directement comparables aux observations; c'est cette comparaison qui sert à perfectionner les catalogues fondamentaux. Comme ces catalogues servent de point de départ à la détermination des positions des autres étoiles, on doit tenir compte, pour la réduction de celles-ci, des perfectionnements ainsi introduits.

Lorsqu'on a obtenu un certain nombre de positions différentes d'une même étoile, on les réduit à une seule position moyenne, en transportant toutes les observations à un équinoxe commun qui est,

longitudes de France 1806]; *J. Chr. Burckhardt*, Tables de la Lune [Tables astronomiques publ. par le Bureau des longitudes de France 1812]; *P. A. Hansen*¹⁶⁰); tables de la lune fondées sur la théorie de Delaunay [Ann. du Bureau des longitudes 7 (1911)]; ces dernières tables ont été publiées sous la direction de *R. Radau*. Des Tables fondées sur la nouvelle théorie de la lune de *E. W. Brown* sont en préparation; cf. *E. W. Brown*, On the plans for new tables of the Moon's motion [Monthly Notices astron. Soc. 70 (1909/10), p. 148]; pour les tables des planètes, voir *A. Bouvard*, Tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus [Tables astronomiques publ. par le Bureau des longitudes de France 1821], *U. J. J. Le Verrier*, Tables de Mercure [Ann. Observ. Paris 5 (1859)]; Tables de Vénus et de Mars [Ann. Observ. Paris 6 (1861)]; Tables de Jupiter et Saturne [Ann. Observ. Paris 12 (1876)]; Tables d'Uranus et Neptune [Ann. Observ. Paris 14 (1877)]; *J. B. A. Gaillot* a construit de nouvelles tables de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune d'après la théorie de *U. J. J. Le Verrier*; ces tables paraissent dans les Annales de l'Observatoire de Paris (Mémoires); le tome 24 (1904) contient les tables de Saturne, le tome 28 (1910) celles d'Uranus et de Neptune; les tables de Jupiter sont sous presse; *S. Newcomb*, Tables of the four inner planets [Astronomical papers for the use American Ephemeris and Nautical almanac 6 (1898)]; Tables of Uranus et Neptune [Astronomical papers for the use of the American Ephemeris and Nautical almanac 7 (1898)]; *G. W. Hill*, Tables of Jupiter and Saturn [Astronomical papers for the use of the American Ephemeris and Nautical almanac 7 (1898)].

autant que possible, celui du commencement de l'année le plus voisin de la moyenne des dates d'observations. Rassemblées pour un grand nombre d'étoiles, ces positions moyennes constituent un *catalogue*. Chaque position donnée dans le catalogue est rapportée à une date moyenne, l'équinoxe du catalogue et elle fournit la position de l'étoile pour la moyenne des temps observés que l'on appelle „époque des observations“ (pour cette époque l'effet des mouvements propres est compensée dans la mesure où ces mouvements peuvent être envisagés comme uniformes). C'est par la comparaison des positions moyennes des étoiles, tirées de plusieurs catalogues se rapportant à des époques aussi éloignées que possible les unes des autres et réduites à un équinoxe commun que l'on détermine les mouvements propres.

La série des catalogues que l'on utilise pour les recherches de cette nature remonte au milieu du 18^{ième} siècle, et commence par ceux de *J. Bradley* et *Tobie Mayer*¹⁴⁰); dans le cours du 19^{ième} siècle, un nombre considérable de catalogues ont été publiés¹⁴¹).

Avant de conclure les mouvements propres, il faut encore résoudre le problème difficile consistant à déterminer les erreurs systématiques des divers catalogues; ces erreurs se reconnaissent à la régularité des différences que présentent entre eux différents catalogues. On les élimine autant que possible, en adoptant un système moyen entre les catalogues de même valeur; cette élimination est toujours nécessaire, même si les observations ont eu pour but de déterminer seulement des différences de coordonnées. On doit à *A. Auwers*¹⁴²) la première construction de tables pour ramener les catalogues d'étoiles à un système moyen. On a longtemps admis que les catalogues divers avaient des valeurs sensiblement égales; si, comme c'est le cas général, il en est autrement, il faut attribuer des poids différents aux catalogues¹⁴³).

140) Comme les réductions de *F. W. Bessel*⁹⁾ ne pouvaient plus suffire aux exigences modernes, *A. Auwers* a repris le calcul des observations de *J. Bradley* et y a ajouté une réduction des observations de *Tobie Mayer*; cf. *A. Auwers*, Neue Reduktion des Bradleyschen Beobachtungen aus den Jahren 1750—1762, publ. en 3 vol., St Pétersbourg 1882—1903; *A. Auwers*, Tobias Mayers Sternverzeichnis nach den Beobachtungen auf der Göttinger Sternwarte neu bearbeitet, Leipzig 1894.

141) Cf. dans *W. Valentiner*, Handwörterbuch der Astronomie 3, Breslau 1901, l'article de *F. Ristenpart*, Sternkataloge und Karten, p. 455 et suiv.

142) Tafeln zur Reduktion von Sternkatalogen auf das System des Fundamentalkatalogs der A. G. [Astron. Nachr. (Kiel) 134 (1894), col. 33/58; 143 (1897), col. 65/90; 145 (1898), col. 101/6; 162 (1903), col. 357/74]. Voir aussi les catalogues fondamentaux de *S. Newcomb*³⁰⁾ et *L. Boss*³⁹⁾.

143) *A. Auwers*, Gewichtstafeln für Sternkataloge [Astron. Nachr. (Kiel) 151

La récapitulation définitive de toutes les positions d'étoiles déterminées à des époques et en des lieux très différents constitue alors un catalogue moyen de positions et de mouvements propres, qui sont rapportés à une époque moyenne. Le but des observations méridiennes est d'améliorer constamment ce système moyen de positions et de mouvements propres. Depuis quelques années l'Académie des sciences de Berlin a pris en main, sous l'impulsion de *F. Ristenpart*, l'œuvre colossale de récapituler et de comparer toutes les positions d'étoiles publiées jusqu'en 1900 et encore utilisables aujourd'hui; cette histoire des étoiles fixes («Geschichte des Fixsternhimmels») contiendra tous les matériaux fournis par les observations jusqu'à la fin du 19^{ième} siècle; il est clair que tous les travaux futurs sur les mouvements des étoiles devront se rattacher à cette publication¹⁴⁴).

Les données auxiliaires dont on a besoin pour les divers calculs de réduction [nécessaires, ainsi qu'on l'a vu, pour rendre les résultats de l'observation comparables à ceux de la théorie] se trouvent dans les annuaires astronomiques; les plus connus sont le „Berliner astronomisches Jahrbuch“, la „Connaissance des Temps“, le „Nautical almanac“ et l'„American Ephemeris and Nautical almanac“¹⁴⁵). Ces annuaires contiennent des éphémérides des corps les plus importants du système solaire, le soleil, la lune, les grosses planètes. On les calcule pour des époques équidistantes dont l'intervalle varie suivant la grandeur du mouvement angulaire, c'est-à-dire surtout suivant la distance de l'astre à la terre, de façon à rendre superflue la considération des différences d'ordres élevés. Ainsi les éphémérides du soleil, comme celles des planètes voisines, donnent les positions de jour en jour; pour les planètes plus éloignées, on se borne souvent à des intervalles de deux jours; pour la lune, au contraire, divers annuaires donnent la position d'heure en heure. Il est de règle de rapporter ces positions à l'équinoxe vrai du moment de l'observation, et de tenir compte de l'aberration; on peut ainsi leur comparer directement les observations. On trouve encore, dans les annuaires, les positions

(1899/1900), col. 225/74; 162 (1903), col. 357/74]. Voir aussi les catalogues fondamentaux de *S. Newcomb*³⁰) et *L. Boss*³⁰).

144) *A. Auwers*, Sitzgsb. Akad. Berlin 1900, p. 657; 1901, p. 79; et années suivantes. Dans ce domaine le travail le plus étendu est le Catalogue de 6188 étoiles publié par *L. Boss*³⁰) qui doit être suivi d'un second Catalogue de 25 000 étoiles.

145) Pour l'histoire et la disposition des annuaires, voir *A. Souchon*¹³⁹) et *H. Clemens*, Die älteren Ephemeriden Ausgaben der Berliner Akademie und die Begründung des astronomischen Jahrbuchs [Veröffentlichungen des astronomischen Recheninstitutes zu Berlin 20 (1902), p. 171].

moyennes et apparentes des étoiles fondamentales; dans le *Berliner Jahrbuch*, ces données sont tirées du catalogue d'Auwers; dans les autres, du catalogue de Newcomb; il en est de même des quantités, *f, g, G, h, H, i, A, B, C, D, E* nécessaires pour la réduction au lieu apparent, qu'on trouve calculées de jour en jour. Les recueils se terminent par des renseignements relatifs à des phénomènes spéciaux, tels que les éclipses de soleil et de lune, les occultations d'étoiles, les aspects des satellites de Jupiter et de Saturne, ou aux petites planètes.

Une conférence internationale des directeurs d'éphémérides s'est réunie en 1911 pour répartir entre les différents recueils les données les plus intéressantes à publier. Les résolutions de cette conférence ont paru dans une brochure publiée par le Bureau des longitudes^{145a}.

9. La détermination des distances des astres. La détermination de l'éloignement d'un astre exige la connaissance des directions dans lesquelles cet astre est vu de deux points différents, situés à l'extrémité d'une droite dont on connaît la longueur, et qu'on appelle la base. La mesure des différences de direction peut résulter, ou bien de la différence des directions absolues, comme s'il s'agissait de points à la surface de la terre, ou bien de l'observation du déplacement apparent de l'objet par rapport à un fond fixe, situé derrière lui, à une distance finie ou infinie.

Les deux extrémités de la base sont, ou bien deux points différents de la surface terrestre, ce qui exige, pour opérer au même instant, la collaboration de deux ou plusieurs observatoires; ou bien des positions différentes dans l'espace par suite du mouvement de la terre; dans ce dernier cas, un seul observateur suffit à déterminer les directions différentes, mais il est nécessaire de connaître d'une façon précise les mouvements de l'observateur et de l'astre. Dans l'un et l'autre cas, ce sont les effets parallaxiques résultant du déplacement de l'observateur qui sont mesurés et permettent d'arriver aux mesures linéaires dès que ce déplacement (donc la longueur de la base) est connu.

Reste à déterminer la longueur de la base: s'il s'agit d'observations faites en des points différents du globe, il faut encore faire intervenir la géodésie, qui donne la forme et les dimensions du globe terrestre. Pour mesurer le plus facilement possible des différences de direction, on aura recours aux coordonnées qui, d'après la théorie précédente de la parallaxe, varient le plus rapidement possible: les déclinaisons dans le méridien, les ascensions droites dans le premier ver-

145*) Congrès international des Ephémérides astronomiques, tenu à l'Observatoire de Paris du 23 au 26 octobre 1911. Voir aussi *Bull. astron.* 28 (1911), p. 449.

tical, etc. Parmi les sources d'erreur systématique, la réfraction exige une étude particulière.

L'obstacle fondamental à l'application courante de cette méthode est l'extrême petitesse des distances terrestres qui peuvent servir de bases; les déplacements parallaxiques n'atteignent une valeur mesurable que pour les corps du système solaire les plus voisins de la terre. Il en résulte que les méthodes trigonométriques de détermination des distances sont souvent insuffisantes, et qu'il faut leur en adjoindre d'autres basées, soit sur la théorie de la gravitation, soit sur l'observation des manifestations lumineuses qui dépendent des distances, en profitant de la connaissance de la vitesse de propagation de la lumière.

Les procédés de détermination de la distance doivent donc varier suivant l'éloignement même de l'astre; on en donnera une idée en examinant ceux qu'on emploie pour la lune, le soleil, et les étoiles fixes.

9a. La lune. La lune a une si grande parallaxe¹⁴⁶⁾ que la détermination de celle-ci par la méthode trigonométrique ne présente que des difficultés insignifiantes. La plus grande consiste dans l'incertitude de la détermination du centre de l'astre, alors que les bords seuls sont observables. La parallaxe de la lune a été calculée à maintes reprises à l'aide des observations de hauteurs de culmination du centre faites en des lieux différents, à peu près situés sur le même méridien, mais dont les latitudes géographiques étaient aussi différentes que possible; la différence des déclinaisons déduite de la différence de ces hauteurs (en tenant compte de la hauteur du pôle) donnait le déplacement parallaxique du centre¹⁴⁷⁾. La méthode différentielle, basée sur la comparaison de la lune à des étoiles voisines, n'a été employée jusqu'ici qu'en observant les occultations de ces étoiles par la lune¹⁴⁸⁾.

146) Pour les corps du système solaire, on désigne communément sous le simple nom de *parallaxe* l'angle sous lequel on voit de la distance moyenne de l'astre le rayon équatorial de la terre; pour les étoiles, le même terme désigne l'angle sous lequel on voit le demi grand axe de l'orbite terrestre.

147) Pour l'histoire de la détermination de la parallaxe lunaire, voir *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie*⁹⁾ 2, p. 240/3. Une série d'observations faites de 1751 et 1753 par *N. L. de Lacaille* au Cap, *M. J. J. Le Français de Lalande* à Berlin et d'autres encore a donné pour la première fois une parallaxe précise. De ces observations et de celles faites postérieurement, *C. F. R. Olufsen*, *Untersuchungen über den Wert der Mondparallaxe* [*Astron. Nachr.* (Altona) 14 (1837), col. 226] a déduit la valeur de la parallaxe $p_{\odot} = 57' 2''$, 95. Voir la nouvelle détermination de la parallaxe de la lune: *Determination of the parallax of the moon from meridian observations of Mösting A at the Royal observatory of Greenwich and the Cape of good hope in the years 1906/10* [*Monthly Notices astron. Soc.* 71 (1910/1), p. 526].

148) Voir par ex. *L. Struve*, *Bestimmung des Mondhalbmessers aus den* *Encyclop. des scienc. mathémat.* VII 1.

Les mesures des déplacements parallactiques ainsi faites permettent de vérifier d'une façon très approchée la détermination de la figure de la terre¹⁴⁹). Il convient d'observer ici [cf. notes 147 et 153] que pour déduire avec précision du déplacement parallactique la parallaxe elle-même, il faut déjà connaître avec une assez grande précision la figure de la terre.

On possède, en dehors de la méthode trigonométrique, pour déterminer la distance moyenne de la lune à la terre, un procédé tout différent, basé sur la loi de l'attraction universelle de Newton; on sait que la troisième loi de Képler se traduit sous la forme suivante:

$$\frac{k^2}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2(M+m)},$$

où k^2 désigne la constante de Gauss, r la distance moyenne de l'astre au corps central, T la durée de sa révolution, M et m les masses des deux corps. On utilise en général cette relation, la constante k^2 étant déduite de l'observation du système terre soleil, soit pour déterminer la distance moyenne d'une autre planète au soleil en prenant comme unité le demi grand axe de l'orbite terrestre, soit pour obtenir la somme des masses d'une planète et de ses satellites en prenant comme unité la masse du soleil. Pour obtenir la parallaxe de la lune, on calcule la constante k^2 à l'aide des mesures de l'intensité de la pesanteur terrestre (déduites le plus souvent d'observations du pendule), et l'on applique la formule

$$\lambda = \left[\frac{k^2}{4\pi^2} T^2 (M+m) \right]^{\frac{1}{3}},$$

où M et m désignent cette fois les masses de la terre et de la lune. Mais il faut remarquer que la troisième loi de Képler n'est exacte que dans le cas où il existe seulement deux corps qui s'attirent, et que, par

während der totalen Mondfinsternisse am 4. Oktober 1884 und 28. Januar 1888 beobachteten Sternbedeckungen [Astron. Nachr. (Kiel) 135 (1894), col. 169]; *H. Battermann*, Beiträge zur Bestimmung der Mondbewegung aus Beobachtungen von Sternbedeckungen [Beobachtungsergebnisse der Sternwarte zu Berlin 5 (1891); id. 11 (1902); id. 13 (1910)].

149) *J. A. Euler* [Versuch, die Figur der Erden durch Beobachtungen des Mondes zu bestimmen, Abh. Akad. München 5 (1768), p. 197/214] proposa le premier de déduire la figure de la terre des observations de la lune; *H. Bruns* [Figur der Erde, Berlin 1878, p. 32] remarqua que les observations de la lune montrent qu'en tout cas les différences entre les divers rayons du géoïde ne dépassent pas quelques kilomètres; *F. R. Helmert* [Höhere Geodäsie⁴⁴) 2, p. 451] a consacré à cette méthode de déterminer les coordonnées géocentriques d'un point de la surface du globe un paragraphe particulier; *H. Battermann*¹⁴⁸) introduit comme inconnues les corrections des coordonnées géocentriques.

suite des perturbations qui proviennent surtout de l'action du soleil, le demi grand axe de l'orbite lunaire n'a pas sa valeur théorique. Il faut par suite, d'après *P. A. Hansen*¹⁵⁰⁾, diviser l'expression de r par le facteur 1,006 537 de sorte que l'on a, en désignant par a le rayon équatorial terrestre,

$$\sin p_{\zeta} = 1,006\ 537\ a \left[\frac{4\pi^2}{T^2 k^2 (M + m)} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

En introduisant les valeurs numériques, *P. A. Hansen*¹⁵¹⁾ trouve $p_{\zeta} = 57' 2'', 27$ tandis que *S. Newcomb*¹⁵²⁾ donne par le même procédé $p_{\zeta} = 57' 2'', 63$ ce qui constitue des résultats en accord suffisant avec ceux de la méthode trigonométrique.¹⁵³⁾

9b. Le soleil. Le problème de la détermination de la parallaxe du soleil est, depuis l'époque où vivait *Aristarque* de Samos, un des plus célèbres de l'astronomie, et c'est à peine si l'on peut aujourd'hui le considérer comme résolu avec la précision désirable. On ne peut employer la méthode trigonométrique: non seulement parce qu'il se présente ici les mêmes difficultés que pour la lune, et que de plus les influences thermiques exercées par le soleil sur les instruments et les couches d'air voisines introduisent des erreurs systématiques, mais surtout parce que la quantité à mesurer est presque de l'ordre des erreurs d'observation. On est conduit¹⁵⁴⁾ à appliquer une combinaison de la méthode trigonométrique avec des déductions tirées de la loi de gravitation universelle: on détermine la parallaxe d'une autre planète, et

150) Tables de la lune, construites d'après le principe newtonien de la gravitation universelle, Londres 1857.

151) *P. A. Hansen* [Tables de la lune¹⁵⁰⁾, p. 4] obtient p par réduction de $\log \sin p = \log 56' 59'', 57$.

152) Spherical astronomy^{5*)}, p. 156.

153) La nouvelle détermination faite par voie trigonométrique qui a été indiquée dans la note 147 donne [Monthly Notices astron. Soc. 71 (1910/1), p. 539] comme correction de la valeur de *P. A. Hansen*

$$\delta p_{\zeta} = + 0'', 49 - 0'', 057\ d \left(\frac{1}{e} \right)$$

où l'aplatissement terrestre e est pris égal à $\frac{1}{293,5}$; tandis que *S. Newcomb* [Fundam. constants of astron.¹⁵⁾, p. 194] trouve, d'après des recherches basées sur la gravitation,

$$\delta p_{\zeta} = + 0'', 45 - 0'', 013\ d \left(\frac{1}{e} \right).$$

154) *Pour l'exposé des diverses méthodes permettant de déterminer la parallaxe du soleil, voir une note de *F. Tisserand*, Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du soleil [Ann. Observ. Paris, Mémoires 16 (1882), mém. n° 4, p. 1/48.*

l'emploi de la troisième loi de Képler permet de calculer la distance de la terre au soleil¹⁵⁵). On ne peut trouver, par des mesures trigonométriques, que les distances des astres les plus rapprochés de nous, Mercure, Vénus, Mars et quelques petites planètes; pour ces derniers astres, la grandeur de l'éloignement est largement compensée par la facilité et la précision des observations.

C'est Vénus qui s'approche le plus de la terre; mais, aux époques où sa distance est la plus faible, elle est invisible; aussitôt qu'on voit un croissant mesurable, la planète est déjà notablement éloignée de nous, en même temps que sa forme se prête mal aux mesures. Il existe néanmoins un cas, célèbre dans l'histoire de l'astronomie, où s'offre une occasion vraiment remarquable de déterminer la parallaxe de Vénus; c'est quand la planète passe exactement sur le soleil, et devient visible sur le disque lumineux comme une tache obscure. Elle est alors à sa plus courte distance de la terre, et sa parallaxe est près de quatre fois plus grande que celle du soleil; d'un autre côté les bords du soleil peuvent servir de points de repère, soit qu'on détermine les déplacements parallactiques pour différents points terrestres par les mesures micrométriques prises au même instant des distances de Vénus au bord du soleil, soit qu'on note les instants des divers contacts d'entrée et de sortie.

Déjà *E. Halley*¹⁵⁶) avait, il y a plus de deux cents ans, appelé l'attention sur cette circonstance exceptionnellement favorable. Mais les passages de Vénus de 1761 et 1769 apportaient une première désillusion, car la précision des mesures des instants des contacts, évaluée à une seconde par *E. Halley*, atteignit à peine une minute. Plus récemment, les observations des passages de 1874 et 1882, pour lesquelles des préparatifs considérables avaient été faits, n'ont pas pleinement répondu aux trop grandes espérances qu'on avait conçues¹⁵⁷). Comme

155) Dans la pratique, la méthode s'applique sous la forme suivante: les éphémérides contenant les perturbations dues à l'action de diverses planètes donnent les distances mutuelles évaluées en prenant comme unité la distance moyenne au soleil; chaque détermination des distances mutuelles en mesures terrestres introduit aussi un changement dans l'unité précédemment adoptée.

156) De visibili conjunctione inferiorum Planetarum cum Sole [Philos. Trans. London 17 (1690/3), p. 511]; Methodus singularis qua Solis parallaxis, ope Veneris intra Solem conspiciendae tuto determinari poterit [Philos. Trans. London 29 (1714/6), p. 454].

157) *A. Auwers*, Die Venusdurchgänge 1874 und 1882, Bericht über die deutschen Beobachtungen 1 à 6, Berlin 1887/98; *Recueil de mémoires relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le soleil (publications de l'Institut de France) en trois tomes et une annexe, Paris 1876 à 1890.*

le prochain passage de Vénus n'aura lieu qu'en 2004, on peut actuellement négliger cette méthode¹⁵⁸).

Les difficultés qui se présentent dans l'observation des passages de Vénus se retrouvent avec Mercure, dont la parallaxe est d'ailleurs moins grande. C'est ensuite Mars qu'il y a lieu de considérer; à la vérité, cette planète ne s'approche pas de la terre autant que Vénus, mais cependant son éloignement peut se réduire à 0,375 du rayon de l'orbite terrestre, et les observations de l'astre sont alors faciles. On a appliqué autrefois à la détermination de sa parallaxe la même méthode que pour la Lune, et c'est cette méthode qui a donné la première une valeur à peu près exacte de la distance moyenne du soleil¹⁵⁹).

Plus récemment, on utilisa des séries de comparaisons micrométriques de Mars¹⁶⁰), et de quelques petites planètes¹⁶¹) à des étoiles voisines; on profite ainsi, non seulement des mesures de déclinaisons obtenues dans des observatoires situés dans les deux hémisphères, mais aussi des mesures obtenues dans un même observatoire à des angles horaires très différents; dernièrement enfin¹⁶²), on a appliqué les méthodes photographiques à ces déterminations. Le plus haut degré de précision auquel on soit arrivé par la méthode trigonométrique, sans l'emploi de la photographie, est dû à la coopération de plusieurs observatoires, organisée par *D. Gill*, pour l'observation héliométrique des petites planètes Iris, Victoria et Sappho au voisinage de leurs oppositions pendant les années 1888 et 1889¹⁶³); cette coopération a obtenu un succès considérable.

158) Pour ce qui concerne la bibliographie considérable relative aux passages de Vénus, voir *R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie*⁹) 2, p. 252/7.

159) Voir par ex. dans *R. Wolf* [*Handbuch der Astronomie*⁹) 2, p. 236 et suiv.] le récit de l'expédition de *J. Richer*, envoyé à Cayenne en 1672 par l'académie des Sciences de Paris pour observer Mars en opposition, et ses résultats. Récemment, sur la proposition de *A. Winnecke*, cette méthode a été reprise avec succès: voir *A. Winnecke*, *Vorläufige Ableitung der Sonnenparallaxe aus den Pulkowaer und Cap-Beobachtungen der Marsopposition 1862* [*Astron. Nachr.* (Altona) 59 (1863), col. 264].

160) *D. Gill*, *Account of a determination of the solar parallax from observations of Mars, made at Ascension in 1877* [*Memoirs astron. Soc. London* 46 (1881), p. 1].

161) *J. G. Galle*, *Über die Anwendung der kleinen Planeten zur Ermittlung des Wertes der Sonnenparallaxe* [*Astron. Nachr.* (Altona) 80 (1873), p. 1]; voir aussi: *Über eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus korrespond. Beobachtungen des Planeten Flora*, Breslau 1875 [*Astron. Nachr.* (Kiel) 86 (1876), p. 5].

162) Pour l'opposition d'Eros en 1900/1.

163) *D. Gill*, *A determination of the solar parallax and mass of the moon from heliometer observations of the minor planets Iris, Victoria, Sappho, made in the years 1888 et 1889* [*Annals of the Cape observatory* 6 (1897) et 7 (1896)].

Une occasion particulièrement favorable fut fournie par la découverte, en 1898, de la petite planète Eros, qui peut s'approcher de la terre jusqu'à une distance de 0,15 fois la distance moyenne du soleil. Le Comité international de la Carte photographique du ciel organisa une double série d'observations, photographiques et micrométriques, de l'opposition de 1900¹⁶⁴). Ce n'est que très récemment qu'a été publié le résultat de ces recherches, qui ont été minutieusement discutées par *A. R. Hinks*¹⁶⁵).

Si considérables que soient les progrès accomplis récemment dans la détermination de la parallaxe du soleil par les observations des petites planètes, on ne peut, pour fixer une grandeur aussi fondamentale, se limiter à une seule méthode, qui peut être exposée à des erreurs systématiques¹⁶⁶), et on doit tenir compte du contrôle des autres méthodes. Ces dernières reposent, on l'a vu, sur l'étude des mouvements dus à l'attraction universelle, et d'autre part sur les apparences qui résultent de ce que la vitesse de la lumière est finie.

La détermination de la constante k^2 peut, de même que lorsqu'il s'agit de la parallaxe lunaire, se déduire, sans employer de procédés trigonométriques, d'observations purement terrestres; on a ainsi la parallaxe solaire par la comparaison de la pesanteur terrestre et de l'attraction solaire. Il faut alors connaître la masse de la terre; elle a été conclue par *S. Newcomb*¹⁶⁷) des perturbations des autres planètes.

164) Conférence astrophotographique internationale de juillet 1900, circulaire n° 1; plus tard, *M. Loewy* publia les circulaires 2 à 12, Paris 1900 à 1907.

165) Réunion du comité international permanent de la Carte photographique du Ciel tenue à Paris en 1909, annexe B; *A. R. Hinks*, La parallaxe solaire déduite des observations micrométriques d'Eros faites en 1900/1 [C. R. Acad. sc. Paris 150 (1910), p. 951]. Les détails des recherches de *A. R. Hinks* ont paru dans les „Monthly Notices astron. Soc. 62 (1901/2) à 70 (1909/10) sous le titre: „Solar parallax papers“ n° 1 à 9; les conclusions ont été publiées [Monthly Notices astron. Soc. 69 (1908/9), p. 544; 70 (1909/10), p. 588] sous le titre: The general solutions from the photographic (resp. micrometric) right ascensions of Eros at the opposition of 1900.

166) En particulier, dans les observations faites à des angles horaires très différents, ou en différents points de la terre, on a à craindre l'influence de la réfraction; on doit surtout tenir compte de la différence d'éclat ou de couleur de la planète et de l'étoile de comparaison. Voir à ce sujet *D. Gill* [Annals of the Cape observatory¹⁶⁵) 6 (1897), p. 7] et la critique des méthodes particulières dans *S. Newcomb*, Fundam. constants of astron.¹⁶⁵).

167) Fundam. constants of astron.¹⁶⁵), p. 123. *S. Newcomb* trouve ainsi la valeur $p_{\odot} = 8'',759$ assez différente des autres et discute à fond les sources d'erreur susceptibles d'affecter la masse de la terre; celle-ci est déterminée par le mouvement des nœuds de Vénus, déduit des passages de 1761 et 1769.

On peut encore obtenir la parallaxe du soleil par l'observation du mouvement de la lune; la théorie indique pour les perturbations un terme de période mensuelle dû à l'attraction solaire, qu'on appelle l'inégalité parallactique. A cause de sa grande valeur qui, d'après *S. Newcomb*¹⁶⁸), peut atteindre 124",66 cette inégalité permettrait une détermination très exacte de la parallaxe, s'il n'existait la difficulté pratique d'observer la Lune, d'où résultent des erreurs systématiques assez considérables. Récemment *H. Battermann*¹⁶⁹), à l'aide des occultations d'étoiles, et *J. Franz*¹⁷⁰), en remplaçant l'observation des bords lunaires par celle d'un cratère fixe, ont obtenu des améliorations notables.

Lorsqu'on connaît la distance de la lune, on peut en déduire la distance du soleil à la terre; on n'emploie pas dans ce but la 3^e loi de Képler, qu'on réserve plutôt pour déterminer la masse de la terre¹⁷¹), mais on considère un terme particulier des inégalités du mouvement de la terre, qui s'appelle l'équation lunaire: le centre de la terre décrit, en un mois, autour du centre de gravité du système terre-lune, une petite ellipse dont les dimensions linéaires dépendent seulement du rapport des masses des deux corps, et de la distance de la terre à la lune. Ce mouvement périodique provoque des déplacements apparents des autres astres qui, observés, font connaître leur distance à la terre. Bien que l'effet pour le soleil atteigne seulement $\pm 6'',5$ et soit ainsi inférieur à la parallaxe elle-même, *P. S. Laplace* et après lui *U. J. J. Le Verrier* et *S. Newcomb* ont pu déterminer assez exactement ce terme au moyen des observations du soleil, à cause de sa périodicité mensuelle connue à l'avance. On l'obtient d'une façon plus précise par les observations des autres planètes, surtout des plus voisines, ainsi que l'a proposé *D. Gill*¹⁷²). Actuellement, on préfère employer l'équation lunaire pour obtenir la masse de la lune¹⁷³), et de celle-ci déduire la constante de la nutation¹⁷⁴).

168) *Fundam. constants of astron.*¹⁶⁵), p. 190.

169) Cf. note 148 et en partic. *H. Battermann*¹⁴⁸), p. 165.

170) *Königsberger Meridianbeobachtungen von Mösting A* [*Astron. Nachr.* (Kiel) 136 (1894), col. 353].

171) *P. S. Laplace*, Sur quelques points du système du monde [*Hist. Acad. sc. Paris* 1789 M. p. 14; *Œuvres* 11, Paris 1895, p. 490]; il détermine la masse de la terre à l'aide de la parallaxe solaire et de la longueur du pendule. Ce qu'en dit *R. Wolf* [*Handbuch der Astronomie*⁹) 2, p. 258] peut prêter à confusion.

172) *Remarks on the best methods of determining the positions of the planets by observation* [*Monthly Notices astron. Soc.* 54 (1893/4), p. 351].

173) Par ex. *D. Gill* [*Annals of the Cape observatory* 6 (1897), p. 11] et *A. R. Hinks*, The mass of the moon, derived from the photographic observations

La connaissance de la vitesse de propagation de la lumière¹⁷⁵) peut aussi être employée à la détermination de la parallaxe du soleil. D'une part, l'observation des éclipses des satellites de Jupiter donne le temps que met la lumière à traverser l'orbite terrestre, et, par suite, les dimensions de cette orbite¹⁷⁶). Mais on peut aussi les déduire de la constante de l'aberration, qui dépend du rapport de la vitesse orbitale de la terre à la vitesse de la lumière

La valeur généralement adoptée pour la parallaxe solaire vers le milieu du 19^{ième} siècle était

$$p_{\odot} = 8'', 578.$$

Elle résultait des observations des passages de Vénus en 1761 et 1769, calculées par *J. F. Encke*¹⁷⁷). En 1867, *S. Newcomb*¹⁷⁸) entreprit une discussion générale de toutes les déterminations qui le conduisit à la valeur $p = 8'', 848$. Les déterminations ultérieures montrèrent que cette constante devait être diminuée, de sorte que la conférence de Paris¹⁷⁹) adopta, après une nouvelle discussion de *S. Newcomb*, la valeur¹⁸⁰)

$$p_{\odot} = 8'', 800.$$

*S. Newcomb*¹⁸¹) a donné la liste détaillée de toutes les valeurs qu'il y a lieu de retenir.

*Des observations d'Eros, *A. R. Hinks*¹⁸²) a déduit, en partant des mesures photographiques,

$$p = 8'', 807 \pm 0', 0028;$$

of Eros made in 1900/1, Solar parallax papers n° 8 [Monthly Notices astron. Soc. 70 (1909/10), p. 63].

174) *K. Laves*, Der Koeffizient der sog. lunaren Gleichung der Erdbewegung [Astron. Nachr. (Kiel) 132 (1893), col. 177]; On the determination of the principal term of the nutation [The astronomical Journal 14 (1895), p. 33].

175) Au sujet de cette grandeur, voir *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie⁹) 2, p. 286 et suiv.

176) C'est une série de telles observations qui conduisit *Ole Römer*, à montrer, en 1675, que la vitesse de la lumière n'est pas infinie: *O. Römer*, Démonstration touchant le mouvement de la lumière [Hist. Acad. sc. Paris 1 (1666/86), éd. 1733, p. 214; Mém. Acad. sc. Paris 10 (1666/99), éd. 1730, p. 575/7].

177) Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgange von 1761 hergeleitet, Gotha 1822; Der Venusdurchgang von 1769, Gotha 1824.

178) Investigation of the distance of the sun and of the elements which depend upon it [Astron. Observ. 1865, U. S. naval observatory Washington, appendix 2].

179) Voir la note 64.

180) *S. Newcomb*, Fundam. constants of astron.¹⁵), chap. 8.

181) Id. p. 157, ou, suivant une autre disposition, p. 166.

182) Voir la note 165.

en partant des observations micrométriques,

$$p = 8'', 806 \pm 0'', 004.*$$

9c. Les étoiles fixes. Pour mesurer la distance des étoiles fixes, on ne peut employer comme terme de comparaison que la distance moyenne de la terre au soleil, en prenant comme base le grand axe de l'orbite terrestre. A la vérité, cette base elle-même a été trop petite durant de nombreux siècles, et devient à peine suffisante aujourd'hui, malgré l'énorme augmentation apportée à la précision des observations astronomiques, pour déterminer l'éloignement de quelques rares étoiles. On chercha longtemps en vain à déterminer les parallaxes par des mesures absolues, ces parallaxes étant inférieures aux erreurs d'observation¹⁸³). Les premières conclusions méritant quelque confiance furent obtenues par des mesures relatives, qui donnent, au moyen du micromètre, les variations de positions annuelles de quelques étoiles par rapport à d'autres, supposées fixes; elles sont dues à *F. W. Bessel* et à *F. G. W. Struve*. En particulier, c'est à *F. W. Bessel* qu'on doit le premier résultat concluant, qui résulte des observations héliométriques de 61 Cygne¹⁸⁴).

Depuis, différents observateurs se sont attaqués, par différents procédés et en usant de divers instruments, à la détermination des parallaxes; on s'est servi successivement des différences de distances¹⁸⁵) mesurées à l'héliomètre, des comparaisons de déclinaisons à l'équatorial¹⁸⁶) et d'ascensions droites au cercle méridien¹⁸⁷), enfin des mesures photographiques¹⁸⁸); on n'a pu néanmoins déterminer sûrement jusqu'ici qu'un nombre relativement petit de parallaxes d'étoiles¹⁸⁹).

183) Pour l'histoire de ces tentatives de *Tycho Brahe* [*Tycho Brahé*], *R. Hooke*, *J. Picard*, *J. Flamsteed*, *Jean Dominique Cassini*, *O. Römer*, *J. Bradley*, *G. Piazzi*, *J. Brinkley*, *F. W. Bessel*, etc., voir *C. A. F. Peters*, Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes, S^t Pétersbourg 1846; Recueil de mémoires présentés à l'Académie des sciences par les astronomes de Poulkovo 1, S^t Pétersbourg 1853, p. 1.

184) *F. W. Bessel*, Bestimmung der Entfernung des 61. Sternes des Schwans, [Astron. Nachr. (Altona) 16 (1839), p. 65]; Fernere Nachricht von der Bestimmung der Entfernung von 61 Cygni [Astron. Nachr. (Altona) 17 (1840), p. 257].

185) Il faut citer en particulier les travaux de *F. W. Bessel*, *H. Schlüter*, *M. L. G. Wichmann*, *A. Winnecke*, *A. Krüger*, *A. Auwers*; pour les résultats plus récents, ceux de *D. Gill*, *W. L. Elkin*, *B. Peter*, *F. L. Chase*.

186) Quelquefois aussi celles de distances et d'angles de positions.

187) *J. C. Kapteyn*, Annalen der Sternwarte in Leiden 7 (1897), p. 117; *E. Grossmann*, Astron. Nachr. (Kiel) 188 (1911), col. 65, 343.

188) Les premières recherches dans cette voie sont dues à *H. Jacoby*, The parallaxes of μ et θ Cassiopejæ [Annals of the New York Academy of sciences 8 (1893), p. 1/23; Contributions from the observatory of Columbia University

Pour la considération d'une base plus grande, celle qui serait due au déplacement d'ensemble du système solaire au bout d'un temps suffisant, on se trouve en présence d'un obstacle fondamental, causé par le mouvement propre des étoiles. Dans ces mouvements propres, on distingue facilement les déplacements dus au mouvement annuel de la terre, parce que la période en est connue, mais il est difficile d'en séparer des déplacements séculaires uniformes. Dans l'avenir, il y aura lieu d'examiner en premier lieu si les termes du second ordre qui s'introduisent dans les corrections des coordonnées dans l'hypothèse où les mouvements séculaires sont rectilignes, ont quelque importance¹⁹⁰). Il faudra voir ensuite si l'on ne doit pas expliquer la non uniformité de ces mouvements par une courbure de l'orbite générale du système solaire, ou de celle de l'étoile.

5 (1893), p. 1/23]. *J. C. Kapteyn* a indiqué une méthode originale permettant de trouver tous les déplacements parallactiques sur une même plaque photographique: The parallax of 248 stars on the region around $BD + 35^{\circ}, 4103$ [Publications of the astronomical laboratory at Groningen 1 (1900), p. 1/98].

189) Les dernières publications qui contiennent les étoiles dont la parallaxe a pu être évaluée avec certitude sont: *G. Bigourdan*, Catalogue de parallaxes stellaires [Bull. astron. 26 (1909), p. 291, 331, 360, 397, 424, 466], *J. C. Kapteyn* et *H. A. Weersma*, List of parallax determinations [Publications of the astronomical laboratory at Groningen 24 (1910)].

190) Ainsi qu'on l'a dit plus haut, c'est *F. Ristenpart*¹²⁸⁾ qui a le premier cherché de tels termes.

VII 4. DÉTERMINATION DE LA LONGITUDE ET DE LA LATITUDE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE C. W. WIRTZ (STRASBOURG),
PAR G. FAYET (NICE).

Introduction.

1. **Limites du sujet.** La détermination des positions géographiques joue principalement un rôle en géodésie et en géographie, alors qu'au point de vue de l'astronomie proprement dite, son importance n'est que secondaire.

Mais comme la résolution des problèmes qu'elle comporte utilise des données à peu près exclusivement astronomiques, on a regardé, depuis longtemps, cette détermination des coordonnées géographiques comme intimement liée à l'astronomie sphérique, puisque c'est à cette branche particulière qu'elle emprunte les éléments dont elle a besoin.

Le but du travail actuel est d'exposer successivement les principes de la détermination des positions géographiques, puis de donner une idée des diverses méthodes, non seulement de celles considérées comme fondamentales, mais encore des autres méthodes qui, dans des cas particuliers, peuvent être avantageuses au point de vue théorique ou technique.

2. **Définition de la latitude, du temps et de la longitude.** La situation d'un point sur la surface terrestre est définie sans ambiguïté par deux coordonnées sphériques: la *latitude*, distance à l'équateur, évaluée en arc de grand cercle, et la *longitude*, distance angulaire au méridien origine, comptée sur le parallèle. Le temps s'introduit dans le calcul de ces coordonnées, mais seulement comme un élément intermédiaire.

La *latitude géographique* ou *hauteur du pôle* désigne la déclinaison du zénith du lieu d'observation.

Le *temps sidéral* est l'angle horaire du point vernal, ou l'ascension droite du point céleste coïncidant avec le zénith de la station. Sous

les noms de *temps solaire vrai* et *temps solaire moyen*, on désigne les angles horaires respectifs du soleil vrai et du soleil moyen. La différence: *temps solaire moyen* — *temps solaire vrai* a reçu le nom d'*équation du temps*.

La *longitude géographique* est l'angle que forment entre eux les plans méridiens de deux stations, dont l'un est choisi comme plan origine; mais tandis que la nature fournit l'origine des latitudes, le choix du méridien zéro est arbitraire.

Dans l'antiquité, par exemple au temps de *Marin de Tyr* et de *Ptolémée*, on utilisait celui qui passait à peu près à un degré à l'ouest des îles des Fortunés [probablement les îles du Cap Vert]; les arabes du moyen-âge se rapportaient aux colonnes d'Hercule et de la Fortune ou, suivant l'exemple de *el-Zarqâli*, comptaient les longitudes à partir d'Arin ou plus exactement d'Azin, qui est situé exactement par 10 degrés Est de Bagdad.

Les navigateurs et les auteurs des cartes, au 16^{ième} siècle, et au 17^{ième}, faisaient passer leur premier méridien par les Açores, les Canaries et les Îles du Cap Vert; les Atlas des 17^{ième} et 18^{ième} siècles ont adopté comme méridien origine celui passant par le pic de Ténériffe: cela surtout à l'époque des Hollandais *Abel Tasman* et *Nicolas Vischer*.

On a longtemps fait usage également du méridien de l'Île de Fer, dont l'emploi avait été proposé par un congrès de mathématiciens et d'astronomes tenu à Paris, en juillet 1630; peu à peu cependant sa définition fut modifiée et il fut décidé que ce méridien devait passer exactement à 20° ouest de Paris; c'était l'adoption, sous forme déguisée, du méridien de Paris¹⁾.

Actuellement enfin, et cela est très heureux, un méridien origine unique [celui de Greenwich] est adopté à peu près universellement, aussi bien dans les opérations géodésiques, qu'en ce qui concerne la pratique nautique²⁾.

La France a adopté ce méridien d'une façon définitive au début de l'année 1911³⁾.

1) Consulter: *J.S.T. Gehler*, *Physikal. Wörterbuch*, (2^e éd.) 6, Leipzig 1831; *E. Müller*, *Longitudinum geographicarum gradus non astronomicis et quibus methodis usi veteres Arabique determinaverint*, Berlin 1862; *O. Peschel*, *Geschichte der Erdkunde*, Munich 1877.

2) Unification des longitudes par l'adoption d'un méridien initial unique, Berlin 1884 [C. R. des séances de la 7^{ième} conférence générale de l'Association géodésique internationale réunie à Rome en 1883, éd. Berlin 1884, 1^{re} et 9^e séances].

3) D'après la loi du 9 mars 1911: «L'heure légale en France et en Algérie, est l'heure, temps moyen de Paris, retardée de 9^m 21^s».

Les latitudes se comptent de 0° à 90° , en partant de l'équateur jusqu'à l'un des pôles; elles sont considérées positivement dans l'hémisphère boréal. On a coutume d'évaluer les longitudes, de 0° à 180° , à partir du premier méridien, positivement vers l'est et négativement vers l'ouest.

Le demi-méridien situé à 180° de Greenwich sert aux navigateurs comme limite de date: lorsqu'on franchit ce demi-grand cercle, en naviguant de l'est à l'ouest, on omet un jour; quand on le franchit de l'ouest à l'est, on compte deux fois la même date.

3. Influence de la forme de la terre. En ce qui concerne l'écart que la forme dynamique de la terre présente par rapport à la figure mathématique, il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans la détermination des coordonnées géographiques d'un lieu. En effet on ne cherche ici que la connaissance de la déclinaison de la verticale sur la surface de niveau relative au lieu d'observation.

Le devoir de la géodésie est de fixer l'écart de la surface de niveau du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence, dont les données ont été surtout empruntées à *F. W. Bessel*.

L'ellipsoïde de référence est également suffisant pour le calcul rigoureux de l'influence parallactique, c'est-à-dire du petit déplacement qu'une étoile subit sur la sphère céleste, suivant qu'on l'examine du lieu d'observation ou du centre de la terre.

Détermination du temps.

A. Par des hauteurs.

4. Une seule hauteur. La recherche du temps revient à la détermination de l'angle horaire du point vernal. Chaque astre connu par une relation concernant ce point peut être utilisé pour la résolution du problème dont il s'agit.

La méthode la plus simple et en même temps celle qui est soumise au nombre minimum de restrictions, consiste dans l'observation de la *hauteur* et de la *distance zénithale* d'un corps céleste quelconque. Du triangle sphérique fondamental Pôle-Zénith-Étoile, dont les trois côtés [distance zénithale, distance polaire, colatitude] sont connus, on peut déduire l'angle horaire, c'est-à-dire l'angle au pôle. L'erreur commise sur l'observation exerce une influence minima sur le résultat lorsque l'astre est choisi de façon qu'à une variation déterminée de l'angle horaire corresponde la plus grande variation possible de la hauteur. Cela se produit à l'instant du passage dans le *premier vertical*, c'est-

à-dire lorsque l'azimut atteint 90° ; en outre, dans cette position, une erreur commise sur la latitude employée a une influence minima⁴).

• Pour le choix de l'astre, il faut éviter de prendre des étoiles de forte déclinaison et il y aura avantage à observer des astres situés au voisinage de l'équateur. Il est évident, en outre, que la détermination du temps déduite d'observations de hauteurs est d'autant plus incertaine que la latitude est plus forte: au voisinage du pôle, elle n'est plus d'aucune utilité.*

L'emploi rationnel de cette méthode exige que pratiquement on ne s'écarte que fort peu du premier vertical; dans cette hypothèse, en effet, les formules se simplifient également d'une façon notable, comme l'a montré A. Donner⁵): on part d'un triangle sphérique rectangle et les écarts entre le cas considéré et ce cas idéal peuvent se représenter à l'aide d'un développement en série simple.

Naturellement, on ne se limite pas à l'observation d'une seule hauteur, mais on en prend plusieurs et, en réalité, quand on emploie un instrument universel, on fait des mesures séparées par un ou plusieurs retournements de la lunette, afin d'éviter la détermination du point zénith sur le cercle divisé. Si l'on fait usage d'un sextant, il convient de déterminer les erreurs de l'index avant et après la série d'observations; dans l'intervalle on change la position du couvercle de verre ou de mica du bain de mercure. Pour le soleil, les deux bords sont observés successivement afin de se rendre indépendant de la valeur du rayon. La même précaution est à prendre lorsqu'on observe, avec un puissant instrument, une planète dont le diamètre est sensible. Au contraire, pour la lune, Vénus et Mercure l'observateur n'a qu'un seul bord illuminé à sa disposition.

En outre des erreurs instrumentales, on doit corriger les hauteurs observées de l'effet de la parallaxe et de la réfraction. On peut alors procéder au calcul de l'angle horaire et cela de plusieurs manières: traiter chaque hauteur séparée, ce qui suppose que l'on s'est assuré de l'exactitude de chaque observation, en examinant l'accord des valeurs individuelles; ou bien réunir les heures observées et les distances zénithales correspondantes sous forme de moyennes; mais alors on doit encore apporter une correction à l'angle horaire moyen ou à la hauteur

4) • Voir F. Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, (4^e éd.) Berlin 1881, p. 266; éd. française publ. par E. Lucas et C. André, Astronomie sphérique, Paris 1869, p. 343; C. Éd. Caspari, Cours d'astronomie pratique, application à la géographie et à la navigation 2, Paris 1889, p. 57.*

5) Formeln und Tafeln zur Berechnung von Zeitbestimmungen durch Höhen in der Nähe des ersten Verticals, Helsingfors 1890.

moyenne⁶⁾. Ce procédé dû à *J. Soldner*⁷⁾ a été fréquemment employé par *L. Puissant*⁸⁾. La correction est d'autant plus petite que les mesures se succèdent plus rapidement et que leur heure moyenne est plus voisine de celle du passage au premier vertical.

* Cette méthode qui abrège considérablement les calculs, présente le grave inconvénient de ne pas fournir de vérification; aussi divers auteurs donnent-ils la préférence à un procédé intermédiaire qui consiste à réunir les observations par groupes, de façon que, dans chaque groupe on puisse considérer la variation de l'angle horaire comme proportionnelle à celle de la hauteur. Quand on observe au théodolite sans déterminer la lecture du zénith on n'obtient qu'une somme de distances zénithales; on peut alors calculer directement les angles horaires sans supposer le mouvement en hauteur uniforme^{8a)}.*

Lorsque l'angle horaire est connu, la combinaison de cet élément avec l'ascension droite de l'astre donne le temps sidéral de l'observation, et la comparaison avec une pendule réglée sur le temps sidéral fournit l'état de la pendule. Si la pendule est de temps moyen, l'heure sidérale trouvée est transformée aisément en temps solaire moyen grâce aux données des *Éphémérides*⁹⁾.

Le procédé reste le même si l'on a observé le soleil: avec l'aide de l'équation du temps et du temps vrai [ou angle horaire du soleil] on déduit le temps moyen et, éventuellement, le temps sidéral.

Pour les besoins de la vie habituelle et des amateurs d'astronomie, il convient de recommander, pour la détermination de la correction approximative de la pendule, l'usage d'un sextant en bois construit par *M. Eble*¹⁰⁾, et dont la division a été tracée en ayant égard à la réfraction moyenne; un graphique rend superflu le calcul trigonométrique et permet de déduire l'angle horaire, avec une précision suffisante, à l'aide de la simple lecture d'une règle.

Le précurseur de *M. Eble* fut *F. Chr. Müller*¹¹⁾ qui imagina un sextant analogue mais qui, au lieu d'avoir recours à la méthode graphique,

6) On pourra consulter à ce sujet: *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁴⁾, (4^e éd.) p. 267; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 345; *W. Chauvenet*, *A manual of spherical and practical astronomy*, (5^e éd.) 1, Philadelphie et Londres 1885, p. 214

7) *Astron. Jahrb.* 1818, éd. Berlin 1815, p. 123/37.

8) *Nouvelle description géométrique de la France* 1, Paris 1832, p. 96.

8a) * Cf. *C. Ed. Caspari*, *Astron. pratique*⁴⁾ 2, p. 62.*

9) * On pourra utiliser, par exemple la table n° V donnée à la fin de la *Connaissance des Temps*.*

10) *Neues Zeitbestimmungswerk*, Tubingue 1853.

11) *Tafeln der Sonnenhöhen für ganz Deutschland, nebst einem in Kupfer gestochenen Sextanten*, Leipzig 1791.

simplifiait le calcul en fournissant une table étendue qui donnait directement le temps solaire vrai, pour chaque hauteur, à chaque jour de l'année. Des tables fort analogues à celle-ci ont été publiées plus tard par *M. R. Pressler*¹²⁾. Celles publiées par *O. Müller*¹³⁾ permettent seulement une légère économie de temps dans un calcul plus exact.

On trouve également, comme supplément aux tables logarithmiques à cinq décimales de *C. Bremiker*¹⁴⁾, des tables pour la détermination du temps, à l'aide de hauteurs du soleil.

Si l'on veut que les corrections de pendule conclues soient indépendantes des erreurs constantes affectant les hauteurs, on doit prendre les distances zénithales aussi bien dans la partie ouest que dans la portion est du premier vertical. Si l'on craint encore une erreur variable avec la hauteur, on ne peut s'en débarrasser que par une égalité rigoureuse des hauteurs absolues observées dans ces deux directions. On obtient une simplification considérable du calcul si l'on observe le même astre à l'est et à l'ouest. C'est ce qui se trouve réalisé dans la méthode suivante.

5. Méthode des hauteurs correspondantes. Ce procédé, sous la forme simple dont on vient de parler, a eu particulièrement la préférence chez les astronomes de l'antiquité, du moyen âge et jusqu'après la moitié du 18^{ième} siècle.

Comme une étoile fixe atteint la même hauteur pour des angles horaires de même valeur absolue, à l'est et à l'ouest du méridien, sa culmination doit se produire exactement au milieu des temps observés pour ces deux passages à la même hauteur. L'écart de la moyenne arithmétique de ces temps, relativement à l'instant de la culmination calculé à l'aide de l'ascension droite, représente la correction de pendule.

La connaissance de la latitude ne joue aucun rôle, pas plus que celle de la hauteur absolue; une seule condition reste indispensable, l'invariabilité de la hauteur. Cette condition peut être réalisée soit avec un instrument universel, soit avec un sextant à miroir, soit par tout espèce d'appareil présentant une garantie sérieuse de stabilité en hauteur.

Des variations inévitables proviennent déjà des fluctuations météorologiques qui se produisent entre les deux observations est et ouest, et qui ont pour conséquence des changements dans la réfraction. Mais

12) *Ein Zeitmessknecht oder der Messknecht als Normaluhr*, (en deux parties), Brunswick 1856.

13) *Tavole per la determinazione del tempo*, Milan 1881.

14) *Logarithmisch-trigon. Tafeln mit 5 Decimalstellen*, Berlin 1872; (5^e éd.) Berlin 1887; (10^e éd.) publ. par *A. Kallius*, Berlin 1906.

les tables de réfraction permettent d'en tenir compte d'une manière différentielle dans l'heure moyenne¹⁵).

Les conditions les plus favorables pour l'application de la méthode sont réalisées lorsqu'on choisit des astres dont l'azimut est voisin de 90° en valeur absolue.

Si l'astre observé n'est pas fixe sur la sphère céleste, comme par exemple, une planète ou le soleil, il en résulte que l'heure moyenne ne coïncide plus avec celle qui correspond à la culmination, mais tombe un peu en arrière ou en avant. La petite correction qui en résulte, appelée *équation des hauteurs correspondantes* ou *correction du midi*, fut d'abord signalée par *L. Euler*¹⁶).

On fait généralement usage, aujourd'hui, des formules données par *C. F. Gauss*¹⁷), d'autant plus que plusieurs Tables très étendues en facilitent l'emploi.

On obtient une multiplication des observations, si l'on procède avec un instrument à réflexion, en installant l'alidade successivement sur des traits de 10' ou 20'; avec un instrument universel ou un théodolite, on dispose plusieurs fils horizontaux parallèles, auxquels on observe le passage de l'étoile ou de l'un des bords (supérieur ou inférieur) du soleil.

Si, pour une raison quelconque, on a manqué l'observation de la hauteur du soleil avant midi, la combinaison d'une hauteur observée l'après-midi avec celle obtenue dans la matinée du jour suivant donnera le temps du minuit vrai, après que, naturellement, à l'aide de la table déjà citée de *C. F. Gauss*¹⁷), on aura tenu compte d'une *correction du minuit* analogue à la *correction du midi*.

Pour l'observation des hauteurs correspondantes du soleil, *S. C. Chandler*¹⁸) a imaginé un instrument qu'il appelle „Chronodeik“, lequel consiste en une lunette verticale dirigée vers le bas et devant laquelle est monté un miroir mobile.

15) Consulter par ex. *F. Brünnow*, Sphärische Astron.⁴), (4^e éd.) p. 289; éd. *E. Lucas* et *C. André*, Astron. sphérique, p. 375.

16) Methodus computandi aequationem meridiei [Comm. Acad. Petrop. 8 (1736), éd. 1741, p. 48/65 [1735]]; „cf. *G. Eneström*, Bibl. math. (3) 10 (1909/10), p. 308/16.*

17) Tafeln für die Mittagverbesserung [Monatliche Correspondenz 23 (1811), p. 401; Werke 6, Göttingue 1874, p. 166]. Des tables analogues ont été données, par ex. par *C. F. W. Peters*, Astron. Tafeln und Formeln, Hambourg 1871, p. 89; *H. Göring*, Der Zeitmesser, Tafeln der Mittagsverbesserung für die Breitengrade 30° bis 60° und der Zeitgleichung, Paderborn 1862.

18) The observatory 4 (1881), p. 14; consulter aussi *J. Palisa*, Astron. Kalender für 1889, herausgegeben von der k. k. Sternwarte in Wien, éd. Vienne 1888.

* Plus récemment le constructeur *Carl Bamberg*, à *Friedenau*, a réalisé un autre appareil destiné à déterminer rapidement le temps, à quelques secondes près, à l'aide de cette même méthode¹⁹). Sur une plate forme horizontale portant un niveau tourne, autour d'un axe vertical, un support auquel est fixé un petit télescope à miroir dirigé vers le bas et qui peut s'incliner plus ou moins dans son plan vertical; un miroir placé devant l'axe de la lunette, et incliné de 45° environ par rapport à cet axe, reçoit les rayons solaires par une ouverture latérale du tube et les renvoie dans le télescope; un système optique formé de deux miroirs permet d'obtenir à l'oculaire une image réelle du soleil. Cette image est suffisamment affaiblie par les trois réflexions successives pour qu'un écran soit généralement inutile.*

En ce qui concerne la navigation, *E. Wendt*²⁰) a montré de quelle façon le déplacement du navire entre les deux observations influençait le résultat²¹); il recommande une modification qui consiste à observer les hauteurs d'un même astre qui répondent à des angles horaires égaux et de signes contraires.

La méthode des hauteurs correspondantes n'exige pas seulement un long intervalle avant que l'observation soit achevée, mais la réussite est encore soumise aux caprices du temps. Pour cette raison, on tend à adopter la méthode qui fait l'objet du paragraphe suivant; cette méthode d'une exécution rapide et qui emprunte les traits principaux de la méthode des hauteurs correspondantes proprement dite, n'est avantageuse que si l'on possède des positions suffisamment précises des étoiles observées.

6. Hauteurs égales d'étoiles différentes. Dans ce procédé, on se propose de déterminer le temps à l'aide des passages de deux étoiles par le même cercle de hauteur²²), dans un lieu de latitude géographique connue.

Cette méthode déjà proposée par *J. G. Köhler*²³), *A. J. Tammelander*²⁴),

19) * Une description détaillée de cet instrument (avec dessin) a été donnée par *H. Clemens* [Z. für Instrumentenkunde 26 (1906), p. 137].*

20) *Annalen der Hydrographie* 28 (1900), p. 186, 198; 30 (1902), p. 152.

21) * Les formules de correction se trouvent également dans *W. Chauvenet*, *Spherical astron.*⁶), (5^e éd.) 1, p. 220.*

22) Un cercle de hauteur (appelé aussi *almulantar*, cercle horizontal) désigne un petit cercle de la sphère ayant son pôle situé au zénith; c'est un cercle de hauteur constante; en ce qui concerne d'autres significations, voir la note 356.

23) *Astron. Jahrbuch* 1784, éd. Berlin 1781, p. 148.

24) *Methodus inveniendi tempus verum ex observatis aequalibus diversarum stellarum altitudinibus*, Åbo 1785/7.

*J. A. Koch*²⁵) a été employée plus tard par *C. F. Gauss*²⁶); elle fut surtout mise en pratique par *N. J. Cinger*²⁷), *M. V. Pěvcov*²⁸) et d'autres astronomes russes qui l'estimaient particulièrement appropriée à déterminer le réseau astronomique dans les steppes lointaines de l'empire russe.

*De Cañete del Piñar*²⁹) employa aussi avec succès la méthode des hauteurs égales, en faisant usage d'un sextant construit spécialement.

Naturellement le problème est réversible: la latitude peut être déterminée à l'aide du temps, sans que l'on ait besoin de la hauteur absolue. En outre, comme résultat secondaire, on obtient encore la valeur de la hauteur, et la comparaison avec la lecture du cercle divisé de l'instrument fournit la correction de l'index.

Les circonstances les plus favorables de l'observation³⁰) varient suivant que l'on desire déterminer le temps ou la latitude: dans le premier cas, les deux étoiles doivent se trouver respectivement dans les parties est et ouest du premier vertical; dans l'autre cas, elles doivent être choisies dans le méridien, l'une au sud, l'autre au nord.

Pour la détermination du temps, les déclinaisons ne doivent pas différer de plus que quelques degrés [cf. n° 24].

7. Une différence de hauteurs. On peut encore généraliser un peu plus; les méthodes des hauteurs correspondantes sont, en effet, des cas spéciaux du problème plus vaste que voici: en supposant la latitude connue, déterminer le temps à l'aide de l'observation d'une différence de hauteurs de deux étoiles.

Ce problème fut d'abord traité par *G. F. von Tempelhof*³¹) comme une

25) *Astronomische Tafeln zur Bestimmung der Zeit aus der beobachteten gleichen Höhe zweier Fixsterne*, Berlin et Stralsund 1797 [publ. en appendice de l'*Astron. Jahrbuch* 1799]; *W. T. Pabst*, *Monatliche Correspondenz* 20 (1809), p. 140; *C. B. Mollweide*, *Monatliche Correspondenz* 25 (1812), p. 484.

26) *Methodum peculiarem elevationem poli determinanti explicat*, Göttingue 1868; *Werke* 6, Göttingue 1874, p. 37.

27) Voir *N. J. Cinger*, *Ob opre dělenii vremeni po sootvėtstvujščim vnsotam razliėnych zvėzd* [*Zapiski Akad. Nauk Petersb.* 25 (1875), daté 1874]; trad. allemande par *H. Kelchner*, *Die Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen verschiedener Sterne*, Leipzig 1877; *N. O. Ščetkin*, *Zfemeridy zvėzd dlja opredėlenia vremeni po sposolu professora N. Cingera* (Ephémérides stellaires pour la détermination du temps d'après la méthode de Cinger), S^t Pétersbourg 1902.

28) *M. V. Pěvcov*, *Ob opredėlenij geografičeskoj široty* (Sur la détermination de la latitude géographique par les hauteurs correspondantes) [*Zapiski po Obščej geografij Obščestva* 17 (1888)].

29) *Algo mas sobre observaciones de precisión con el sextante*, Madrid 1900.

30) * Voir *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁴), (4^e éd.) p. 295; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astronomie sphérique*, p. 381.*

31) *Astron. Jahrbuch*, Suppl. 1 (1793), p. 214.

généralisation des hauteurs correspondantes du Soleil, mais les procédés de calcul n'étaient valables que pour une différence de hauteur très limitée. Ce fut *C. W. Wirtz*³²⁾ qui donna une solution générale du problème; les conditions les plus favorables sont réalisées si une étoile est exactement à l'est et l'autre exactement à l'ouest. La différence de hauteur observée exige encore, avant d'être utilisée, une correction à cause de la réfraction, et éventuellement à cause de la parallaxe.

B. Par des Azimuts.

8. Dans le méridien. Alors que les méthodes considérées jusqu'ici pour la détermination du temps reposent toutes sur des observations de hauteur ou qui s'y ramènent, les méthodes les plus précises sont basées sur les observations de passages par les cercles verticaux et, en premier lieu, par le vertical le plus important: le méridien.

Un *cercle méridien* ou *instrument de passages*, fixe ou transportable, est constitué de telle sorte que son axe soit horizontal, dans la direction est-ouest et que l'axe optique soit dans le méridien. Si l'on observe maintenant avec le réticule (le fil vertical moyen représentant une portion du méridien) l'instant de la bissection d'une étoile, la différence entre cette heure observée et l'ascension droite, supposée connue, de l'astre fournira l'état de la pendule par rapport au temps sidéral. La première réalisation instrumentale de cette idée est due à *Ole Römer*³³⁾.

Dans la pratique l'exécution de la méthode est d'ailleurs notablement plus compliquée: tout d'abord on ne se limite pas à une seule étoile, mais on fait concourir à la détermination du temps les résultats de 6 à 8 étoiles; d'autre part, on n'admet nullement que l'axe optique décrive le méridien et on détermine ses écarts par rapport à cette position idéale, c'est-à-dire l'inclinaison et l'azimut: ces déterminations s'effectuent dans le cours des observations, l'inclinaison à l'aide du niveau, et l'azimut par une observation d'étoile très voisine du pôle.

Dans les petits instruments transportables, on élimine l'*erreur de collimation* [écart qui existe entre 90° et l'angle formé par l'axe de rotation et l'axe optique] par ce fait que l'on „retourne“ l'axe, c'est-à-dire qu'on le tourne de 180° dans son plan horizontal, en ayant soin d'observer l'étoile dans les deux positions.

32) *Annalen der Hydrographie* 29 (1901), p. 372.

33) *Ole Römer*, en 1689 d'après *P. Horrebow*, *Basis astronomiae*, Copenhague 1735, p. 49; reproduit dans *P. Horrebow*, *Opera math.-phys.* 3, Copenhague 1741.

En général, on choisira les étoiles horaires, non pas au voisinage immédiat de l'équateur, mais plutôt de façon que leur hauteur de culmination corresponde avec la hauteur du pôle au lieu d'observation.

Si l'on ne dispose pas de circumpolaire, il faut observer des étoiles culminant au voisinage du zénith, car en ce point l'erreur d'azimut n'a plus aucune influence.

L'azimut lui-même se détermine d'une façon précise par l'observation de trois culminations successives d'une même étoile circumpolaire: la valeur de l'azimut se déduit de la différence des deux intervalles de temps séparant la culmination intermédiaire de la première et de la dernière. Il est évident qu'une pendule de marche très régulière est ici indispensable.

Pour le calcul, on peut avoir recours aux formules de *Tobie Mayer*³⁴), de *F. W. Bessel*³⁵) ou de *P. A. Hansen*³⁶). Pour la détermination du temps, au point de vue de la géographie et de la géodésie, la représentation de *T. Mayer* en fonction des trois erreurs [inclinaison, azimut, collimation] paraît la plus appropriée.

Une nouvelle méthode de réduction graphique pour les observations de passages est due à *C. Braun*³⁷); on tient compte de tous les passages, en utilisant la méthode des moindres carrés.

Dans les observatoires permanents, il n'est pas difficile d'obtenir le temps avec une erreur moyenne ne dépassant pas $\pm 0,02$ à l'intérieur, bien entendu, d'un système d'ascensions droites d'étoiles fondamentales choisi comme base, qu'il s'agisse du système de *A. Auwers*, de celui de *S. Newcomb* ou de l'un des catalogues de fondamentales adoptés autrefois pour les éphémérides d'étoiles publiées par le *Nautical Almanac* et l'*American Ephemeris*.

Tandis que, dans les observatoires, on n'a recours aux passages du soleil pour déterminer l'heure qu'en cas de nécessité, il existe quelques petits appareils, inspirés de l'antique gnomon, qui furent mis en honneur par *W. Jordan*³⁸) et qui sont destinés à faciliter aux amateurs ce genre d'observations.

34) *Observationes astronomiae quadrante murali habitae* (exposées en 1756); *Opera inedita* 1, Göttingue 1775, p. 19.

35) *Astron. Beobachtungen Univ.-Sternwarte Königsberg* 2 (1816), p. III; *Abh. publ. par R. Engelmann* 2, Leipzig 1876, p. 33.

36) *Astron. Nachr. (Altona)* 6 (1828), col. 421/58.

37) *Berichte von dem erzbischöfl. Haynaldschen Observatorium zu Kalócsa in Ungarn*, Munster en/W. 1886, p. 59. Voir aussi *Astron. Nachr. (Kiel)* 109 (1884), col. 33.

38) *Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung*, Berlin 1886, p. 141.

A cette catégorie, appartient le dipléidoscope, qu'inventa l'horloger londonien *E. J. Dent*³⁹⁾: cet appareil consiste en deux miroirs plans et un verre transparent qui sont disposés de façon que leurs traces forment un triangle isocèle. Si l'on suppose l'orientation parfaite, il en résulte que, très peu de temps avant la culmination, les deux images du Soleil produites par les miroirs sont vues dans les petites lunettes dont ceux-ci sont munis et courent rapidement l'une vers l'autre pour se superposer à l'instant de la culmination; on obtient un résultat plus précis si l'on détermine l'heure se rapportant à la moyenne des contacts des bords.

Sur le même principe d'observation repose le „Prisme des passages“ de *C. A. von Steinheil*⁴⁰⁾ qui permet d'observer des disques solaires se dirigeant l'un vers l'autre, par ce fait que la moitié de l'objectif est couverte d'un prisme dont la surface hypoténuse est parallèle à l'axe de la lunette. L'incertitude qui peut affecter une détermination du temps avec cet instrument reste inférieure à 1^s, si l'installation est suffisamment stable.

Le dipléidoscope universel de *E. J. Dent*⁴¹⁾ permet aussi d'obtenir le temps vrai en dehors de midi.

9. Dans le vertical de la Polaire. Dans les opérations géodésiques et dans les expéditions géographiques, une circonstance s'oppose à l'emploi rapide de la méthode de la détermination du temps à l'aide d'observations dans le méridien: les circumpolaires suffisamment brillantes pour servir à déterminer l'azimut sont rares; dans le jour, et même dans le crépuscule, les plus petits instruments sont réduits à utiliser α Petite Ourse.

C'est cette considération qui a conduit à imaginer le procédé suivant: on observe le passage de l'étoile horaire non plus au méridien, mais dans un vertical passant par une circumpolaire; comme celle-ci est habituellement α Petite Ourse, la méthode est généralement désignée sous le nom de *détermination du temps dans le vertical de l'étoile polaire*.

Donnée d'abord par *J. J. von Littrow*⁴²⁾, *J. L. Tiarks*⁴³⁾ et *P. A.*

39) A description of the dipleidoscope, Londres 1843.

40) Cf. *C. Hornstein*, Astron. Nachr. (Altona) 24 (1846), col. 93, 109; *L. Seidel*, id. col. 261; *C. A. von Steinheil*, id. col. 269.

41) Voir *A. W. Hofmann*, Bericht über die wiss. Apparate auf der Londoner internat. Ausstellung 1876, Brunswick 1878, p. 180.

42) Über den erweiterten Gebrauch der Multiplikationskreise, Prague 1820.

43) Memoirs astron. Soc. London 3 (1829), p. 77.

*Hansen*⁴⁴), cette méthode a été développée plus tard par *W. Döllén*⁴⁵) et *P. Harzer*⁴⁶).

La réduction, nécessairement plus compliquée que dans la méthode où l'on observe au voisinage du méridien, peut être effectuée sous la forme directe ou sous la forme indirecte; d'après les recherches de *P. Harzer*, il résulte qu'on doit donner la préférence à la méthode indirecte. *C'est aussi l'avis qu'a exprimé *F. H. Seares*⁴⁷) dans le mémoire intéressant qu'il a consacré à cette question.*

Les règles à suivre pour garantir la meilleure exactitude ne se distinguent pas beaucoup de celles relatives aux observations effectuées dans le méridien: les plus importantes consistent dans le retournement de l'instrument au cours de la série et dans une distribution symétrique des étoiles horaires par rapport à la Polaire.

La précision des résultats obtenus finalement à l'aide de cette méthode approche de celle fournie par les observations faites dans le méridien; cette méthode est d'ailleurs utilisée dans quelques observations astronomiques ou chronométriques.

Dans ce procédé, on obtient en outre, comme résultat secondaire, la valeur de l'azimut dans lequel on a opéré, ce qui peut offrir de l'intérêt en triangulation.

Du reste des tables spéciales et des éphémérides ont été publiées pour faciliter l'emploi de la méthode⁴⁸).

E. Borrass et après lui *H. Kimura*⁴⁹) ont repris les formules de *W. Döllén*, pour les observations effectuées au méridien; *H. Kimura*

44) *Astron. Nachr.* (Altona) 9 (1831), p. 117; 48 (1858), p. 113.

45) *Die Zeitbestimmung vermittelt des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Vertikale des Polarsternes* 1, S^t Pétersbourg 1863; 2, S^t Pétersbourg 1874.

46) *Über geographische Ortsbestimmung ohne astronomische Instrumente* [Mittel der Vereinigung von Freunden der Astronomie, Berlin 1896].

47) *The polaris vertical circle method of determining time and azimuth [The university of Missouri Bulletin, astronomical series, Laws observatory bulletin n° 5 (1912)].*

48) *W. Döllén*, *Hilfstafeln für die Zeitbestimmung im Vertikal des Polarsternes*, S^t Pétersbourg 1874 et 1878; *W. Döllén*, *Sternephemeriden zur Bestimmung von Zeit und Azimut im Vertikal des Polarsternes*, S^t Pétersbourg 1886/90, Berlin 1891, Dorpat 1893; depuis 1895, la „Société astronomique de S^t Pétersbourg“ publie des „Ephémérides des étoiles pour la détermination de l'heure et de l'azimut dans le plan vertical de la polaire pour l'an . . .“, S^t Pétersbourg année 1894 et suiv.

49) *Formula and tables for determining the time with a portable transit instrument in the meridian*. Tōkyō sūgaku-buturigaku kwai kiji, Maki n° VIII, Dai 6, Tokyo 1901, p. 209].

également, s'est efforcé de faciliter le calcul dans ce cas spécial, en donnant une table à double entrée étendue.

Si le temps défavorable de certaines stations contraint d'utiliser chaque instant de beau ciel, on peut recourir à une autre façon de déterminer le temps dans le vertical de la Polaire: on mesure *la différence d'azimut entre la Polaire et une étoile horaire*, au moyen d'un instrument universel; la Polaire étant dans un azimut quelconque, et l'autre étoile aussi voisine que possible du méridien.

Cette méthode, qui constitue plutôt un moyen de secours, est naturellement moins exacte que celle où l'on observe les passages dans un azimut déterminé.

10. Dans un azimut quelconque; méthode d'Olbers. Une seule détermination d'azimut (tout aussi bien que nous l'avons vu pour une détermination de distance zénithale), jointe à la connaissance de la latitude, permet de déduire l'angle horaire et par suite le temps⁵⁰. Cette méthode toutefois est assez peu à recommander, car il est très difficile d'obtenir le point méridien du cercle horizontal et, en outre, de le maintenir constant; cette critique ne s'applique pas, cela va sans dire, au cas particulier déjà envisagé d'une installation fixe dans le voisinage immédiat du méridien.

D'une façon générale, le grand avantage des observations d'azimut est de fournir des résultats peu affectés par les erreurs de réfraction, mais cet avantage très important dans les observatoires, l'est beaucoup moins en campagne car, dans ce cas, l'azimut n'est pas connu avec une grande exactitude.

Par contre une modification simple de cette méthode s'est montrée très pratique au double point de vue de l'observation et du calcul: on observe la disparition d'une étoile derrière un mur vertical éloigné ou tout autre objet fixant commodément un azimut constant pour le lieu d'observation.

Chaque jour, la disparition de l'étoile a lieu au même instant sidéral et l'on dispose par suite d'un moyen de vérifier la *marche* de la pendule; si l'on réussit maintenant à trouver un procédé permettant de fixer l'instant de l'occultation, il en résultera la possibilité de connaître aussi l'*état* de la pendule; lorsqu'une étoile cesse d'être observable à cause du voisinage du Soleil, on opère sur une autre et l'on a ainsi une sorte de *zone céleste* capable de fournir à chaque

50) *Voir F. Brünnow, Sphärische Astron. 4), (4^e éd.) p. 311; éd. E. Lucas et C. André, Astron. sphérique, p. 404.*

époque de l'année, un point de repère pour l'heure, dès que les étoiles sont visibles.

Les modifications lentes des positions stellaires occasionnées par la précession, la nutation, l'aberration et le mouvement propre entraînent une légère variation de l'heure de la disparition, mais il est aisé d'en tenir compte différentiellement dans le calcul⁵¹).

Cette méthode a été indiquée par *H. W. M. Olbers*⁵²), qui montra son utilité et la recommanda tout particulièrement aux astronomes amateurs.

11. Plusieurs azimuts. Il n'est pas douteux que le temps peut être conclu à l'aide de l'observation des passages de deux étoiles quelconques: cela résulte déjà du cas spécial, précédemment envisagé, où l'on détermine le temps en observant dans le vertical de la Polaire.

*J. H. Lambert*⁵³) donna une courte solution du problème suivant: déterminer le temps à l'aide de deux étoiles dans le même vertical.

Par analogie au problème des trois hauteurs de *C. F. Gauss* [cf. n° 18], on pourrait se proposer de déterminer le temps, la latitude et l'azimut, à l'aide des passages observés de trois étoiles par le même vertical: mais la solution apparaît impossible, car, dans les trois équations obtenues, les deux inconnues temps et azimut ne se laissent pas séparer.

12. Méthodes approchées. On peut encore citer quelques méthodes approchées, d'une exécution facile et qui fournissent aussi bien le temps que la latitude.

Le problème suivant: „déduire le temps et la latitude connaissant les heures de la pendule auxquelles quatre étoiles passent par deux verticaux quelconques“ a été traité en 1789, par *E. F. von Platen zu Hallermund*⁵⁴).

*W. F. Wislicenus*⁵⁵) donna à la solution une forme élégante et montra que, comme dans le procédé de *H. W. M. Olbers*, on pouvait ici fixer les azimuts par des objets terrestres éloignés, et que les instruments (abstraction faite d'une lunette à faible grossissement) n'étaient pas utiles.

*P. Harzer*⁵⁶) a imaginé une détermination du temps et des coor-

51) *Voir *E. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁴), (4^e éd.) p. 313; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 407.*

52) *Monatliche Correspondenz* 3 (1801), p. 124.

53) *Astron. Jahrbuch* 1789, éd. Berlin 1786, p. 213.

54) *Id.* p. 126/7.

55) *Astron. Nachr.* (Kiel) 124 (1890), col. 89.

56) *Mitt. Freunde der Astron.*⁴⁶); **I. Janosi*, *Idömeghatározás fonalháromzöggel*

données locales par un procédé également très simple: il fixe les azimuts à l'aide de cordons verticaux qui sont attachés sur un pied primitif enfoncé fortement dans le sol, puis sont ensuite chargés. Cette méthode, malgré les moyens simples qu'elle emprunte, permet d'obtenir chaque coordonnée avec une incertitude ne dépassant pas 1' à 2'.

*E. Hammer*⁵⁷⁾ proposa d'employer un simple fil à plomb et de se servir des données qui sont connues concernant la topographie du pays; on observe l'instant où le Soleil passe par l'azimut ainsi déterminé. Dans le même ordre d'idées, il convient de citer les moyens optiques et photographiques simples au moyen desquels *K. Schwarzschild*⁵⁸⁾ apprend à résoudre les problèmes où il s'agit de déterminer le temps ou les coordonnées.

* *W. Förster*⁵⁹⁾, préconise l'emploi d'un petit instrument de passages, destiné à observer le Soleil dans le méridien, et dans lequel objectif et oculaire seraient remplacés par de très petites ouvertures.*

13. Différence d'azimut, de hauteur et de temps. Nous terminerons par une méthode basée uniquement sur la mesure de différence de coordonnées, ce qui dispense de connaître la position du zéro instrumental.

A l'aide d'un instrument universel on observe, pour deux étoiles, les différences des hauteurs, des azimuts et des heures de la pendule, puis, à l'aide de ces données, on cherche à déduire le temps, la latitude et la direction du méridien.

Si l'on veut réduire l'influence des erreurs d'observation, les formules différentielles montrent qu'il convient d'observer les plus grandes différences possibles en azimut et en hauteur.

La question a d'abord été présentée sous cette forme par *J. F. Encke*⁶⁰⁾.

Le problème suivant, discuté par *J. Lyons*⁶¹⁾, présente une grande analogie: déterminer le temps et la latitude, si l'on connaît seulement

(Détermination du temps avec le triangle polaire) *Mathematikai és Fizikai lapok* (Budapest) 16 (1907), p. 236/47.*

57) *Zeitbestimmung (Uhrkontrolle) ohne Instrumente*, Stuttgart 1893.

58) *Astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln*, dans *F. Klein* et *E. Riecke*, *Beiträgen zur Frage des Unterrichts in der Mathematik, Physik und Astronomie*, Leipzig 1904.

59) **Ein Sonnenrohr zur genäherten Zeitbestimmung* [*Deutsche Mechaniker-Zeitung* 1907, p. 169].*

60) *Über eine Erweiterung des Douwesschen Problems* [*Berliner astron. Jahrbuch für 1859*, éd. Berlin 1856, p. 334.

61) *Nautical almanac and astronomical ephemeris for 1778*, éd. 1776.

l'intervalle que met le diamètre du soleil pour passer suivant un cercle de hauteur⁶²⁾.

*H. G. von Mattuschka*⁶²⁾, *J. C. Schulze*⁶³⁾ et aussi quelques auteurs modernes se préoccupèrent également de ce problème, dénué d'intérêt au point de vue pratique.

Détermination de la hauteur du pôle.

*Par définition, la latitude d'un lieu situé à la surface de la terre est la déclinaison du zénith de ce lieu; cet élément est égal à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. On convient qu'une dépression au-dessous de l'horizon est une hauteur négative et que les latitudes australes sont comptées négativement.

Il faut se souvenir que la latitude ainsi définie n'est pas un angle géocentrique mesuré par un arc de méridien, ce qui aurait lieu si notre planète était une sphère: il s'agit de l'angle que la verticale du lieu forme avec le plan de l'équateur.

Il existe, comme on sait, des déviations anormales du fil à plomb, de sorte qu'il devient nécessaire de distinguer la *latitude géodésique* et la *latitude astronomique*; on se préoccupera uniquement, dans ce qui va suivre, des méthodes pouvant fournir la latitude astronomique.*

14. Hauteurs méridiennes. Au n° 4, nous avons appris à conclure le temps à l'aide d'une observation de hauteur; réciproquement, on peut déduire la latitude connaissant une hauteur et l'instant de l'observation.

Une erreur commise sur le temps aura une répercussion d'autant plus faible sur la latitude calculée que la variation de hauteur sera plus petite. Cette variation est nulle pour les instants des passages au méridien⁶⁴⁾.

En outre, c'est dans ce cas particulier que les calculs sont les plus simples; l'observateur n'a qu'à combiner par addition algébrique la distance zénithale et la déclinaison.

On peut même se dispenser de connaître la déclinaison de l'étoile: si l'on mesure les deux hauteurs méridiennes d'une étoile circumpolaire (passage supérieur et passage inférieur), la moyenne arithmétique des résultats fournit la latitude, et la demi-différence donne la distance polaire de l'étoile.

62) Voir *Astron. Jahrbuch* 1781, éd. Berlin 1778, 2^e partie, p. 185.

63) Id. p. 186.

64) *Voir *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁶⁾, (4^e éd.) p. 272; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 350.*

Cette méthode est surtout employée dans les observatoires permanents, avec le cercle méridien; mais comme, avec cet instrument, il n'est pas toujours aisé de déterminer le point zénith par retournement, ainsi qu'on a coutume de le faire avec l'instrument universel, on dirige la lunette sur un bain de mercure placé au-dessous, et on lit au cercle la position qui correspond à la coïncidence du fil direct et du fil réfléchi.

Ce procédé permet donc, en somme, une détermination absolue de la latitude et de la déclinaison de l'étoile; on a coutume d'entreprendre, concurremment avec ces sortes de déterminations, des recherches concernant la flexion du tube, la réfraction astronomique et les erreurs de division du cercle.

La connaissance de la déclinaison est aussi évitée si l'on mesure la plus grande et la plus petite hauteur méridienne du soleil, aux époques des solstices⁶⁵); la demi-somme de ces résultats donne la hauteur de l'équateur, tandis que la demi-différence fournit la valeur de l'obliquité de l'écliptique.

Déjà, vers l'an 1100 avant notre ère, les astronomes chinois utilisaient ce procédé en se servant du gnomon⁶⁶); l'histoire rapporte aussi une détermination analogue due à *Pythéas de Marseille*⁶⁷).

La méthode des distances méridiennes, sous sa forme simple, fut employée, suivant l'exemple de *R. von Sterneck* (colonel autrichien) par l'Institut géodésique prussien⁶⁸), dans des travaux où l'extrême degré de précision n'est pas indispensable, par exemple pour des recherches concernant les déviations de la verticale. Les résultats obtenus sont satisfaisants: il semble assez aisé de déduire une latitude avec une erreur moyenne de $\pm 1''$. Mais il convient toutefois d'ajouter qu'aucune précaution n'a été négligée en vue d'éliminer les sources d'erreurs systématiques: observations dans les deux positions de l'instrument universel et dans plusieurs situations du cercle divisé; répartition symétrique des étoiles par rapport au zénith, de façon que les effets de la réfraction et de la flexion s'éliminent presque complètement.

Avec un instrument à réflexion, on pourra suivre l'astre peu de

65) *Voir *W. Chauvenet*, *Spherical Astron.*⁶), (5^e éd.) 1, p. 228.*

66) Voir *J. S. T. Gehler*, *Physikal. Wörterbuch*, (2^e éd.) 9, Leipzig 1840, p. 2138.

67) Vers 350 avant notre ère [cf. *J. S. T. Gehler*, id. (2^e éd.) 9, p. 2172; *F. W. Bessel*, *Über Pytheas von Massilia*, Göttingue 1858].

68) L'Institut géodésique prussien a publié: *Die Polhöhe von Potsdam*, cah. 1, Berlin 1898; *Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 92 Stationen*, Berlin 1896.

temps avant son passage au méridien et effectuer la lecture à l'instant où il parvient à sa plus grande hauteur. Le soleil, à cause de son mouvement en déclinaison, n'atteint pas sa plus grande hauteur dans le méridien, et il est nécessaire d'appliquer une correction⁶⁹⁾ pour passer de la hauteur maxima observée à la hauteur méridienne; cette réduction, nulle aux solstices, atteint sa plus grande valeur lors des équinoxes. Il en est de même pour les autres astres à mouvement propre, en particulier pour la lune, dont l'emploi à la détermination des lieux à la mer a fait l'objet de récentes controverses⁷⁰⁾.

Il convient de citer à cette place une méthode donnée par *M. Loewy* et qui a été expérimentée au cercle méridien Bischoffsheim de l'observatoire de Paris par *H. Renan*, *J. Perchot* et *W. Ebert*⁷¹⁾; on observe une étoile très voisine du pôle ($P < 1^{\circ}$) dans deux situations de sa course diurne, symétriques par rapport aux cercles horaires de 6^{h} , et cela permet de conclure la situation du pôle. *W. Ebert*⁷²⁾ a indiqué des relations commodes permettant également de déduire d'observations d'étoiles très voisines du pôle, les variations dues à l'aberration, à la nutation et à la précession.

Bien qu'il ne soit pas utilisé directement pour la détermination de la latitude, l'instrument que *G. B. Airy*⁷³⁾ fit construire à Greenwich mérite d'être cité ici: le „reflex zenit tube“, comme il le désigne, consiste en un objectif dont l'axe est placé verticalement. Au-dessous, à la demi-distance focale se trouve un bain de mercure; un peu au-dessus de l'objectif, sur le côté, se trouve solidement fixé un micromètre dont le plan des fils coïncide avec celui de l'image. A l'aide d'une rotation de 180° du micromètre objectif, on peut mesurer de petites distances zénithales avec une grande précision. *Ch. L. Poor*⁷⁴⁾ a perfectionné la théorie de cet appareil et *J. C. Kapteyn*⁷⁵⁾ a préconisé une modification photographique.

*La lunette zénithale photographique imaginée par *A. de la Baume*

69) Voir par ex. *A. Roth*, Lehrbuch der astronomischen Navigation, Fiume 1898, p. 131.

70) Voir la publication de l'office impérial de la marine allemande (*Reichs-Marine-Amt*), Lehrbuch der Navigation 2, Berlin 1901, p. 176.

71) Ann. Observ. Paris, Observations 1897, éd. 1899; *H. Renan* et *W. Ebert*, Détermination de la latitude d'après les méthodes de Loewy [Ann. Observ. Paris, Observations 1900, éd. 1904.

72) Astron. Nachr. (Kiel) 151 (1899/1900), col. 145.

73) Astronomical observations Observatory Greenwich 1854, appendice I.

74) The astronomical Journal 9 (1890), p. 153.

75) Astron. Nachr. (Kiel) 125 (1890), col. 81.

*Pluvinel*⁷⁶⁾ et réalisée la première fois à l'observatoire de Paris, repose sur un principe analogue. Cet instrument permet aux voyageurs de déterminer l'heure locale et la latitude; établi à poste fixe, il est susceptible de fournir des données concernant les variations de la latitude.*

15. **Hauteurs circumméridiennes.** On peut augmenter la précision réalisée dans la méthode des distances méridiennes, en faisant usage d'un instrument universel et en multipliant les observations au voisinage du méridien; c'est alors la méthode dite des *hauteurs circumméridiennes*, qui exige toutefois une connaissance approchée du temps.

Le procédé de calcul qui s'offre immédiatement à l'esprit consiste à résoudre le triangle sphérique Pôle-Zénith-Étoile par rapport au côté Pôle-Zénith; cependant on préfère, puisqu'il s'agit ici de petits angles horaires, faire usage de développements en série, en conservant un nombre de termes d'autant plus grand qu'on désire une précision plus considérable. La formule donnée par *J.-B. J. Delambre*⁷⁷⁾ est très avantageuse et son emploi peut être facilité par l'emploi de tables appropriées.

Dans beaucoup de cas, on peut se borner au premier terme d'un développement en série et la réduction au méridien se présente sous la forme simple du produit, par un facteur constant, du carré de l'angle horaire exprimé en minutes de temps; c'est alors la méthode des *secondes de culmination*⁷⁸⁾ utilisée principalement en astronomie nautique.

De chaque hauteur on déduit la hauteur méridienne à l'aide d'une des nombreuses formules appropriées, et, de la moyenne des résultats, on conclut la latitude cherchée.

Les observations très voisines du zénith ne sont pas favorables pour l'emploi de cette méthode.

Lorsqu'il s'agit du Soleil ou, plus généralement, d'un astre à mouvement propre, il convient de tenir compte de la variation de la déclinaison; on démontre aisément que, dans ce cas, on pourra supposer la déclinaison constamment égale à celle qui correspond à l'instant de la culmination, mais à la condition de compter alors les

76) *Sur une lunette zénithale photographique [C. R. Acad. sc. Paris 148 (1909), p. 147; voir aussi: Revue scient. (5) 11 (1909), p. 786].*

77) *Voir par ex. *F. Brünnow*, Sphärische Astron.⁴⁾, (4^e éd.) p. 272; trad. *E. Lucas* et *C. André*, Astron. sphérique, p. 351; *W. Chauvenet*, Spherical astron.⁶⁾, (5^e éd.) 1, p. 238; *C. Éd. Caspari*, Astron. pratique⁴⁾ 2, p. 15.*

78) Voir par ex. la publication de l'office impérial de la marine allemande (*Reichs-Marine-Amt*), Navigation⁷⁹⁾ 2, p. 181.

angles horaires non plus du passage au méridien, mais à partir du moment de la hauteur maxima⁷⁹). Cette solution est due à *C. F. Gauss*.

Dans les milieux nautiques, on a fait très bon accueil à un travail de *M. A. Goodwin*⁸⁰); dans le procédé indiqué par ce savant, on évalue la réduction au méridien en calculant simultanément l'influence de la variation de hauteur du Soleil et du mouvement du navire.

D'autres méthodes, très simples au point de vue de l'observation et du calcul, sont basées sur les considérations suivantes: trois hauteurs mesurées près du méridien, avec leurs différences d'azimuts (comme le fournit l'instrument universel) peuvent servir à calculer la hauteur méridienne, sans qu'il soit nécessaire de connaître la latitude; si l'on possède déjà une valeur approchée de ce dernier élément, deux hauteurs et leur différence d'azimut suffisent. Si l'on dispose, en outre, d'une pendule, la hauteur méridienne peut se déduire à l'aide de trois hauteurs et des intervalles de temps correspondants, sans qu'il soit nécessaire de connaître ni l'état de la pendule, ni sa marche⁸¹).

Il est clair que l'on peut substituer l'azimut à la place du temps, dans ces données⁸²).

16. Hauteur de la Polaire. Tandis qu'avec une étoile quelconque, on est contraint de rester au voisinage du méridien, cette restriction disparaît avec une étoile voisine du pôle, animée d'un mouvement toujours lent: ainsi, aux points les plus défavorables de la course diurne de α Petite Ourse, c'est-à-dire dans les angles horaires de 6^h et 18^h, la hauteur de cette étoile ne varie pas de 20'' en 1 minute de temps.

Le calcul sphérique rigoureux n'est plus ici nécessaire, à cause de la faible distance polaire et l'on a recours à un développement

79) Voir *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.* 4), (4^e éd.) p. 275; trad. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 357; *W. Chauvenet*, *Spherical astron.* 6), (5^e éd.) 1, p. 244.

80) *The ex-meridian*, Londres 1894.

81) Voir par ex. *W. Chauvenet*, *Spherical astron.* 6), (5^e éd.) 1, p. 296; *T. Albrecht*, *Formeln und Hülftafeln für geographische Ortsbestimmungen*, Leipzig 1873; (4^e éd.) Leipzig 1908, p. 59; *V. M. Caillet*, *Traité de navigation*, (2^e éd.) Paris 1857, p. 319; *J. J. Åstrand*, *Neue einfache Methode für Zeit- und Längenbestimmung* [Sitzgsb. Akad. Wien. 56 II (1867), p. 350]; *C. L. von Littrow*, *Ann. Sternwarte Wien* (2) 1 (1841/4), p. LVI; *Th. von Oppolzer*, *C. von Littrows Methode der Zeitbestimmung durch Circummeridianhöhen* [Sitzgsb. Akad. Wien. 58 (1868)II, p. 772]; *P. Bouguer*, *Nouveau traité de navigation*, (2^e éd.) publ. par *N. L. de Lacaille*, Paris 1760; *G. S. Klügel*, *Astron. Jahrbuch* 1799, éd. Berlin 1796, p. 148; *cf. *C. Éd. Caspari* [*Astron. pratique* 4) 2, p. 65] où le problème de la recherche simultanée de l'heure et de la latitude est traité par deux méthodes.*

82) *J. J. von Littrow*, *Memoirs astron. Soc. London* 2 (1826), p. 321. *Cf. *C. Éd. Caspari*, *Astron. pratique* 4) 2, p. 21, 341.*

en série⁸³). * Les Ephémérides astronomiques renferment d'ailleurs des tables destinées à fournir la latitude par l'observation de α Petite Ourse. Quand on connaît déjà une valeur approximative de la latitude et que l'on se propose de l'améliorer à l'aide de la moyenne d'un grand nombre de hauteurs observées loin du méridien, il y a avantage à utiliser une méthode, due à C. F. Gauss, et particulièrement simple dans le cas de la Polaire⁸⁴)*.

Si, en vue d'obtenir une plus grande exactitude, on répartit les observations de la Polaire symétriquement le long du petit cercle diurne, on pourra se rendre indépendant des coordonnées choisies pour cette étoile.

Les hauteurs circommériennes en relation avec les hauteurs de la Polaire fournissent une des trois principales méthodes utilisées pour déterminer la latitude dans les déterminations modernes des points du premier ordre, se rapportant aux grandes triangulations et mesures de degré.

17. Problème des deux hauteurs; cas spéciaux; problèmes qui s'y rattachent. Si les circonstances exigent que l'on obtienne le temps et la latitude de la façon la plus rapide, il devient alors impossible de restreindre les observations au méridien ou au premier vertical.

Pour déterminer ces deux éléments, il suffit de connaître deux hauteurs et la différence des temps correspondants. Ce problème a été résolu pour la première fois, il y a plus de quatre siècles; la solution a été depuis, bien souvent modifiée.

La solution rigoureuse pour deux étoiles différentes fut trouvée rapidement, de sorte que les progrès réalisés ont principalement consisté en des transformations de calcul.

La marche générale est la suivante: on résout d'abord le triangle formé par le pôle et les deux étoiles, puis le triangle défini par les étoiles et le zénith, triangle dans lequel les trois côtés sont alors connus.

De cette façon, dans chacun des deux triangles formés par le pôle, le zénith et une étoile, on possède deux côtés et l'angle compris, ce qui permet de déduire l'angle horaire et la latitude.

Si l'on désire obtenir une séparation rigoureuse des inconnues, il convient d'observer une hauteur près du méridien et l'autre près du premier vertical. L'exactitude de la détermination du temps dépend

83) Voir par ex. *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁴⁾, p. 277; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 358; *C. Éd. Caspari*, *Astron. pratique*⁴⁾ 2, p. 23.

84) * Voir *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁴⁾, (4^e éd.) p. 280; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 363.*

principalement de celle de la hauteur au voisinage du premier vertical, tandis que la précision de la latitude conclue est surtout fonction de celle de la hauteur prise près du méridien⁸⁵).

Une première simplification se produit, si l'on observe deux fois le même astre; comme les navigateurs avaient surtout recours au soleil, il en est résulté de nombreuses méthodes d'approximation indirectes, dans lesquelles il fallait tenir compte différentiellement de la petite variation de déclinaison du soleil pendant l'intervalle de 3^h à 6^h qui pouvait séparer les deux observations.

Parmi ces méthodes celle qui pendant longtemps s'est le plus recommandée est la méthode indirecte de *C. Douwes*⁸⁶). Son principe est le suivant: la latitude approchée déduite à l'aide de la marche du navire, du compas et du loch, la hauteur prise au voisinage du premier vertical, l'intervalle de temps et la déclinaison fournissent une détermination du temps très approchée, avec laquelle la hauteur voisine du méridien permet de conclure la latitude. Avec cette nouvelle valeur de la latitude on reprend le calcul de l'angle horaire.

C. Douwes construisit des tables volumineuses destinées à faciliter l'emploi de cette méthode, tables que l'on trouve dans tous les anciens ouvrages nautiques⁸⁷). Le gain qui résulte de leur emploi est cependant très minime, sinon tout à fait illusoire.

Toute la méthode se ressent de cet inconvénient que, dans certaines conditions et en particulier lorsque la latitude de départ est très erronée, on ne peut espérer d'amélioration dans les approximations: les résultats successifs sont de plus en plus divergents de la réalité. Aussi cette méthode ne trouva-t-elle pas à la mer cette application étendue qu'on aurait dû attendre d'après l'importance des tables que lui consacraient les traités nautiques.

La solution du problème général est très ancienne: elle remonte à *J. Regiomontan* [1472]⁸⁸), à *Tyge Brahe* [*Tycho Brahe*]⁸⁹) et à *Guillaume IV*

85) * Voir *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.* 4), (4^e éd.) p. 295; trad. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 382.*

86) *Verhandeling om buiten den Middag op Zee de waare Middags-Breedte te vinden*, Harlem 1754; *De noodige Zeemanstafelen en voorbeelden tot het vinden der Breedte buiten den Middag*, (1^{re} éd.) Amsterdam 1761; (nouv. éd.) Amsterdam 1774, 1789, 1795, 1802, 1827, 1853.

87) Voir par ex. les tables 37, 38, 39 dans *J. F. Domke*, *Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln*, (7^e éd.) Berlin 1879.

88) *J. Regiomontanus*, *De cometæ magnitudine, longitudine ac de loco ejus vero, problemata XVI*, Nuremberg 1531; *Scripta Regiomontani*, éd. *J. Schöner*, Nuremberg 1544.

de Hesse [1566]⁹⁰), dans le cas où il s'agit de déduire le lieu d'une étoile en utilisant la mesure de ses distances à deux étoiles connues.

Plus tard, ce problème fut traité par *P. Nuñez*⁹¹), *R. Hues*⁹²), *C. H. Gietermaker*⁹³), *N. Fatio*⁹⁴), mais il ne fut résolu sous une forme pratique pour la navigation que par *C. Douwes*⁹⁶) et *P. Nieuwland*⁹⁵).

*F. L. Schubert*⁹⁶), *W. L. Krafft*⁹⁷), *C. B. Mollweide*⁹⁸), *J. F. Hennert*⁹⁹), *J. Ivory*¹⁰⁰) s'occupèrent de la solution rigoureuse; d'ailleurs la méthode de *J. Ivory* est identique à celle de *W. L. Krafft*.

*C. F. Gauss*¹⁰¹) donna une représentation purement analytique, pendant que *J. F. Encke*⁶⁰) développait à nouveau, et d'une façon détaillée, la méthode trigonométrique. *J. A. Grunert*¹⁰²) et *A. Matern*¹⁰³) publièrent aussi des solutions de ce problème. Une étude historique détaillée du problème des deux hauteurs est due à *G. D. E. Weyer*¹⁰⁴) et nous aurons l'occasion d'y renvoyer le lecteur.

Un cas spécial est le passage à deux hauteurs égales, que *C. F. Gauss* envisage également dans l'ouvrage cité¹⁰¹). En vue de la détermination du temps on observe une étoile à l'est et une à l'ouest; en ce qui concerne la latitude, on prend une étoile au nord et une au sud. Les auteurs qui suivirent, en particulier *N. J. Cinger*¹⁰⁵) et plus récemment

89) De nova stella anno 1572 conspecta, Copenhague 1573; Denuo edidit regia societas danica, Copenhague 1901.

90) Voir *Willebord Snellius van Roijen*, Coeli et siderum in eo errantium observationes Hassiacae Tychonis Brahe, Leyde 1618.

91) *P. Nonius*, De crepusculis, Lisbonne 1542, Coïmbre 1573.

92) Tractatus de globis et eorum usu, Lyon 1594; (nouvelles éditions) Amsterdam 1611, 1613, 1617, 1624, Francfort s/M. 1627, Oxford 1633.

93) Vergulde Licht der Zeevaert, Amsterdam 1660.

94) Navigation improv'd, beeing chiefly the method for finding the latitude, Londres 1728.

95) Astron. Jahrb. Suppl. 1 (1793), p. 42.

96) Astron. Jahrb. 1790, éd. Berlin 1787, p. 188.

97) Nova Acta Acad. Petrop. 9 (1791), éd. 1795, p. 353 [1794].

98) Monatliche Correspondenz 19 (1809), p. 545; Astron. Nachr. (Altona) 3 (1825), col. 197.

99) Astron. Jahrb. 1803, éd. Berlin 1800, p. 124.

100) Philos. mag. and Journal 58 (1821), p. 81.

101) Methodus peculiarem⁹⁹); Werke 6, p. 37.

102) Archiv Math. Phys. (1) 14 (1850), p. 83.

103) Annalen der Hydrographie 10 (1882), p. 400.

104) Die direkten oder strengen Auflösungen für die Bestimmung des Beobachtungsortes [Annalen der Hydrographie 11 (1883), p. 69/85, 148/63, 209, 226, 262; Die indirekten oder genäherten Auflösungen für das Zweihöhenproblem [Annalen der Hydrographie 12 (1884), p. 481/6, 541/54, 597/605, 653/63; 13 (1885), p. 65/75].

105) Voir *N. J. Cinger*, Ob opre dělenii vremeni⁹⁷). Des tables ont été construites

*De Cañete del Pinar*¹⁰⁶), améliorèrent la méthode au point de vue pratique. *M. V. Pëvcov*²⁸) en facilita l'emploi en donnant des tables étendues * et tout récemment *A. Orlov*¹⁰⁷) a publié une méthode graphique pour le choix des couples d'étoiles à utiliser.*

*F. Hayn*¹⁰⁸) et *E. Kohlschütter*¹⁰⁹), munis tous deux du même petit télescope zénithal, firent valoir la méthode dans les colonies allemandes et obtinrent des résultats très satisfaisants, eu égard aux conditions qui étaient extrêmement défavorables.

**N. S. Bartlett*¹¹⁰) propose aux explorateurs munis du théodolite une méthode un peu analogue, dans laquelle il s'agit d'observer, avec des angles horaires faibles, les heures des passages de deux étoiles par un même fil horizontal; ces étoiles, l'une au nord et l'autre au sud, doivent avoir sensiblement même ascension droite et leurs distances zénithales méridiennes ne doivent pas différer de plus de 15' environ. Cette façon de procéder évite des lectures de cercles et de micromètre, et permet de se rendre à peu près indépendant de la réfraction et des constantes instrumentales, pourvu que l'horizontalité du fil se trouve bien réalisée.

*B. Mantšev*¹¹¹) a indiqué une méthode par laquelle on peut déterminer la latitude, sans chronomètre, à l'aide des observations, au même instant, des hauteurs de deux étoiles situées dans un même cercle de déclinaison; l'auteur examine non seulement le cas où les déclinaisons ne sont pas identiques, mais encore celui où les hauteurs seraient observées à des instants un peu différents.*

à ce sujet par *N. O. Ščetkin*²⁹) et par *Th. F. G. Wittram*, Tables auxiliaires pour la détermination de l'heure par des hauteurs correspondantes, S^t Pétersbourg 1892.

106) Observaciones de precisión con el sextante, Madrid 1895.

107) **A. Orlov*, Graphische Methode zur Auswahl der Sternpaare für die Breitenbestimmung nach der Methode gleicher Zenitdistanzen [Publikationen der Univ.-Sternwarte zu Jurjev (Dorpat) 21 (1909), cah. 2, p. 1].*

108) *Astronomische Ortsbestimmungen im deutschen Schutzgebiete der Südsee*, Berlin 1897.

109) Bericht über die astronomischen und geodätischen Arbeiten der deutschen Grenzregulierungskommission zwischen dem Nyassa- und dem Tanganyika-See [Mitteilungen von Forschungsreisenden und Gelehrten aus den deutschen Schutzgebieten 13 (1900), p. 265].

110) *Description of a field method for the determination of latitude with a theodolite [Monthly Notices astron. Soc. 70 (1909/10), p. 197].*

111) **B. Mantšev*, Opredëlenie geografičeskoj široty bez chronometra po dvum zvezdam, ležaščim vblizi odnogo kruga sklonenija (détermination de la latitude sans chronomètre, à l'aide des observations de deux étoiles dans le voisinage d'un même cercle de déclinaison) [Morskij Sbornik 333 (1906), n° 4 p. 117/46].*

*L. von Camphausen*¹¹²⁾ a proposé d'obtenir la latitude, le temps et la direction du méridien, en observant la différence d'azimut de deux étoiles, à l'est et à l'ouest, avec un instrument universel, lorsque leur hauteur est égale à leur déclinaison. Nous croyons pouvoir signaler ici cette idée, parce qu'elle a inspiré le travail de *J. F. Encke* sur le problème de Douwes.

On peut encore, dans le même but, mesurer les hauteurs dans lesquelles deux étoiles connues passent successivement au même cercle horaire¹¹³⁾, sans qu'il soit nécessaire de connaître les angles horaires ou azimuts respectifs.

La dernière méthode exige un instrument universel, mais aucune pendule, aussi longtemps qu'il s'agit de la détermination du pôle; la première méthode nécessite seulement un sextant, sans pilier, mais elle exige une pendule de marche connue.

*Ibn Iûnis*¹¹⁴⁾ connaissait déjà le problème suivant, qui a beaucoup de rapport avec celui des deux hauteurs: des deux hauteurs d'une même étoile et de la différence des azimuts conclure les azimuts, en supposant la latitude connue.

18. Méthode de Gauss. Le problème des deux hauteurs suppose que la position de l'astre est connue; si l'on prend trois hauteurs du même astre, on se rend alors indépendant des coordonnées de l'objet. Cette méthode, très séduisante à première vue et plusieurs fois expérimentée¹¹⁵⁾, ne mérite cependant pas d'être recommandée, parce qu'une petite erreur commise dans les observations affecte très fortement les résultats. Si, par contre, renonçant à la détermination simultanée de la déclinaison, on choisit trois étoiles différentes en réalisant l'égalité des hauteurs, on a la *méthode de Gauss*¹¹⁶⁾.

Cette méthode repose sur le problème trigonométrique: calculer la hauteur du pôle à l'aide des temps de passage de trois étoiles par le même cercle de hauteur²²⁾.

112) Voir *J. F. Encke*⁶⁰⁾ et *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.*⁴⁾, p. 298; trad. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 337.

113) *J. W. von Camerer*, *Astron. Jahrb.* 1797, éd. Berlin 1794, p. 246; *W. F. Wislicenus*, *Astron. Nachr.* (Kiel) 124 (1890), col. 89.

114) *Ibn Iûnis* ou *Yûnos* [Le Caire 960/1008], *Tables hakimitiques*, chap. 23 (ms. qui n'a pas été imprimé); consulter *A. von Braumühl*, *Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie* [Nova Acta Acad. Leop. (Halle) 71 (1898), p. 24/6].

115) Par exemple *J. F. Hennert*, *Astron. Jahrb.* 1803, éd. Berlin 1800, p. 124; *J. K. F. Hauff*, *Astron. Jahrb. Suppl.* 4 (1808), p. 237.

116) *C. F. Gauss*, *Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie* [Monatliche Correspondenz 18 (1808), p. 277; Werke 6, Göttingue 1874, p. 129, 142].

Déjà *A. Cagnoli*¹¹⁷⁾ avait résolu ce problème, mais toutefois sous une autre forme: à l'aide de trois lieux héliocentriques d'une tache du soleil, il cherchait à déduire le plan de l'équateur du soleil et la déclinaison de la tache. *C. F. Gauss*¹¹⁶⁾ montra l'identité des deux problèmes.

Au point de vue des positions relatives que les trois étoiles doivent occuper pour que les résultats soient les meilleurs, on trouve¹¹⁸⁾ qu'il convient de choisir des étoiles telles que la différence de leurs azimuts soit voisine de 120°.

Si l'on désire réaliser une plus grande exactitude par la multiplication des observations, on pourra y parvenir, soit par l'emploi d'un instrument fixe, en observant les passages à plusieurs fils horizontaux, soit en augmentant le nombre des étoiles. Cette dernière généralisation de la méthode de Gauss a été imaginée par *H. Knorre*¹¹⁹⁾; les valeurs les plus vraisemblables sont naturellement déduites par la méthode des moindres carrés¹²⁰⁾.

*E. Perrin*¹²¹⁾ s'occupa aussi de cette question d'une façon spéciale. Comme la hauteur absolue ne joue aucun rôle et que son invariabilité est seule nécessaire, il s'ensuit que le résultat est complètement indépendant de l'erreur d'index, des erreurs de division, de l'influence de la réfraction et de l'excentricité; l'observation est simple et facile à exécuter.

Dans l'hémisphère nord, on peut choisir comme première étoile la Polaire, qui offre cet avantage que la hauteur reste constamment dans des limites qui ne diffèrent pas de 3°.

On réalise encore d'autres grands avantages, si l'on effectue l'ob-

117) *Trigonometria plana e sferica*, Paris 1786; (2^e éd.) Paris 1804; trad. par *N. M. Chompré*, *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris 1786, p. 44*/51; (2^e éd.) Paris 1808. La solution simple, résultant de la considération de la figure se trouve, par exemple, dans *Th. Epstein*, *Die Sonnenflecke* [Festschrift zur Jahresfeier der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a/M. 1904, p. 108].

118) *Voir par ex. *F. Brünnow*, *Sphärische Astron.**, (4^e éd.) p. 306; éd. *E. Lucas* et *C. André*, *Astron. sphérique*, p. 396.*

119) Cf. *A. N. Savič*, *Priloženje praktičeskoj astronomii k geografičeskomu opredeleniju měst*, S^t Pétersbourg 1845; (2^e éd.) 1, S^t Pétersbourg 1868; 2, S^t Pétersbourg 1871; trad. par *W. C. Götze*, *Abriss der praktischen Astronomie, vorzüglich in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung*, Hambourg 1850/1; (2^e éd.) publ. par *C. F. W. Peters*, Leipzig 1879, p. 776.

120) *Voir par exemple *W. Chauvenet*, *Spherical astron.**, (5^e éd.) 1, p. 289.*

121) Détermination exacte de la latitude et du temps du lieu à l'aide d'observations au sextant, par la méthode des hauteurs égales [Annales du Bureau des longitudes 4 (1892), mém. n° 3, p. 1 [1890]].

servation exactement dans le cercle de hauteur¹²²⁾ du pôle visible, puisque là les étoiles passent à une hauteur égale à la latitude géographique. *S. C. Chandler*¹²³⁾ a fait construire, spécialement dans ce but, un grand instrument flottant sur du mercure, un soi-disant almucantar, qui doit servir, non seulement à la détermination de la latitude, mais aussi à la détermination de la position des étoiles en général. *R. A. Sampson*¹²⁴⁾ s'est occupé également de la méthode et a observé par ce procédé un assez grand nombre de positions d'étoiles fondamentales. Naturellement, pour chaque lieu, on ne peut appliquer cette méthode qu'aux étoiles dont la hauteur, à l'instant de la culmination supérieure, surpasse la latitude géographique. **C. Éd. Caspari*^{124a)} a proposé une méthode qui dispense de l'emploi du chronomètre. Calant la lunette d'un théodolite à une hauteur fixe, qu'il est inutile de mesurer, on observe les directions azimutales de trois étoiles réparties le plus également possible sur le cercle de hauteur. Le calcul donne azimut et latitude.*

19. Trois hauteurs. Si l'on suppose que trois hauteurs ont été mesurées, alors les données sont surabondantes et la voie la plus naturelle pour obtenir les deux inconnues, latitude et temps, est la suivante: avec la latitude et la correction de pendule provisoirement admises, on calcule les hauteurs d'étoiles se rapportant à chaque instant d'observation, puis à l'aide des petites différences qui existent entre ces nombres et les mesures, on représente les différentielles de la latitude et de l'angle horaire. On obtient ainsi autant d'équations linéaires que de hauteurs et l'on est alors capable, en faisant usage de la méthode des moindres carrés, de déduire les améliorations les plus probables que nécessitent les valeurs de la latitude et de la correction de pendule qui ont servi de point de départ au calcul des hauteurs. „Le problème des trois hauteurs“, comme on le trouve souvent chez les écrivains nautiques, n'existe pas aux sens rigoureux du mot. Le lieu le plus probable du navire se déduit toujours des méthodes déjà décrites ou des méthodes apparentées¹²⁵⁾. Le problème suivant se laisse traiter également d'une façon simple: des différences de hauteurs de trois étoiles et des différences de temps, déduire la latitude, le temps

122) Pour la définition de ce cercle, voir note 22.

123) The almucantar [Annals of the astron. Observatory of Harvard college 17 (1887), p. 1].

124) Monthly Notices astron. Soc. 63 (1902/3), p. 338.

124*) *J. Éc. polyt. (2) cah. 5 (1900), p. 1.*

125) Voir Annalen der Hydrographie 29 (1901), p. 467.

et les hauteurs. *C. W. Wirtz*¹²⁶) a exposé une méthode de résolution indirecte de cette généralisation du problème de Gauss.

20. Méthode de Horrebow-Talcott. On a déjà vu [n° 6] comment on peut déterminer la latitude à l'aide du passage de deux étoiles par le même cercle de hauteur²²). Plus on s'approche du méridien, moindre est l'influence qu'une incertitude dans la connaissance du temps exerce sur la hauteur du pôle calculée, et cette influence disparaît complètement si l'on observe les deux étoiles rigoureusement au nord et au sud. Toute variation de hauteur disparaît ici, de sorte que dans ce cas, il ne peut plus être question d'un passage par un cercle de hauteur.

On renonce à réaliser l'égalité parfaite des hauteurs des deux étoiles et on se limite à remplir cette condition que les étoiles culminent à des hauteurs assez peu différentes pour que la différence des hauteurs soit mesurable avec un micromètre filaire. On se trouve de la sorte en présence de ce cas spécial du problème: déduire la hauteur du pôle connaissant la différence des hauteurs de deux étoiles. La solution consiste ici dans la règle simple que la latitude se représente comme somme de la moyenne arithmétique des déclinaisons des deux étoiles et de la demi-différence des distances zénithales mesurées au micromètre.

On emploie aussi le principe essentiel de la méthode, si l'on mesure, avec un instrument quelconque, des hauteurs au sud et au nord du méridien: la différence des hauteurs a une influence essentielle.

L'idée de la méthode est due à *P. Horrebow*¹²⁷) et aussi, d'une façon indépendante à *M. Hell*¹²⁸), qui l'employa occasionnellement à la détermination de la latitude de Wardoehus, lors du passage de Vénus de 1769. Plus tard *Carsten Niebuhr*^{128*)} l'employa avantageusement en Arabie, sur le conseil de *T. Mayer*. Cette méthode tomba quelque temps dans l'oubli, jusqu'au moment où, mise de nouveau en lumière par *A. Talcott*¹²⁹), elle trouva emploi à la détermination des longitudes lors de la mesure des côtes américaines.

La méthode de *P. Horrebow* reçut un nouvel essor, lorsque *Fr. Küstner*¹³⁰) apprit à l'utiliser pour la recherche de la constante de l'aber-

126) *Annalen der Hydrographie* 29 (1901), p. 323.

127) *Opera mathematico-physica* 3, Copenhague 1741.

128) *Observatio transitus Veneris*, Copenhague 1770; *Beobachtung des Durchgangs der Venus 1769 zu Wardoehus*, Breslau et Hirschberg 1793.

128*) Cf. *Monatliche Correspondenz* 5 (1802), p. 425/34; 7 (1803), p. 240/6.

129) *Report of the superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey 1857*, éd. Washington 1858, p. 324/34.

130) *Zur Bestimmung der Aberrationskonstante* [Beobachtungsergebnisse der Sternwarte zu Berlin 3 (1888); *Astron. Nachr.* (Kiel) 126 (1891), col. 233].

ration et à la même époque put faire la preuve pratique de la variation du pôle déjà présumée par *F. W. Bessel*¹³¹). Peu après, *A. Marcuse*¹³²) alla à Honolulu pour y étudier de plus près, et en coopération avec les observatoires européens, les oscillations du pôle.

Alors le Bureau central de l'Association géodésique internationale se chargea de l'étude systématique de l'orbite du pôle terrestre, et décida d'organiser un service régulier: d'ailleurs, depuis déjà 1895, tous les rapports annuels fournissaient les résultats concernant la recherche de la variation de la latitude¹³³).

L'exécution de ce plan fut précédée de recherches sur la catégorie d'instruments la plus opportune; celles-ci aboutirent à la prise en considération de la méthode signalée par *Fr. Küstner*¹³⁰) et essayée photographiquement par *A. Marcuse*¹³⁴) avec un réfracteur de cinq pouces disposé spécialement dans ce but.

On se décida pour la méthode purement optique, en faisant usage d'un télescope zénithal de 108^{mm} d'ouverture et de 1^m,30 de distance focale. Le procédé d'observation est réglé sur celui préconisé par *Fr. Küstner*¹³⁵).

Après avoir lu deux niveaux situés dans le plan du méridien, on pointe avec le fil une première étoile au sud; on tourne ensuite l'instrument de 180°; à l'aide d'une vis fine on amène les niveaux à une position voisine de celle qui convient et l'on pointe alors l'étoile nord

131) Lettre à *A. von Humboldt*, datée du 1 juin 1848; cette lettre est mentionnée dans: *Briefe zwischen A. von Humboldt und C. F. Gauss*, publ. par *C. Bruhns*, Leipzig 1877, p. 53. Une théorie élémentaire des mouvements du pôle est due à *F. Klein* et *A. Sommerfeld*, *Über die Theorie des Kreisels*, Leipzig 1910 [cah. 3, 1903], p. 663.

132) Bericht über die Expedition nach Honolulu [C. R. des séances de la 10^{ième} conférence générale de l'Association géodésique internationale réunie à Bruxelles en 1892, éd. Berlin 1893, p. 631]; *T. Albrecht*, *Resultate der Beobachtungsreihe in Honolulu, betreffend die Veränderlichkeit der Polhöhe* [id. 10 Bruxelles 1892, éd. Berlin 1893, Annexe A VII]; *A. Marcuse*, *Astron. Nachr.* (Kiel) 131 (1893), col. 297.

133) *T. Albrecht*, Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Jahre . . ., paru annuellement dans les C. R. des séances de la commission permanente de l'Association géodésique internationale depuis la session d'Innsbruck en 1894; paraît depuis 1898, d'une façon indépendante comme „Veröffentlichungen des Centralbureaus der internationalen Erdmessung zu Berlin“, 1898 et suiv.; on en trouvera des extraits *Astron. Nachr.* (Kiel); consulter à cet effet la Table générale de cette publication, Kiel 1902, p. 2.

134) *Beobachtungsergebnisse der Sternwarte zu Berlin 7* (1897).

135) Cf. *T. Albrecht*, *Anleitung zum Gebrauche des Zenitteleskopes auf den internationalen Breitenstationen*, (2^e éd.) Berlin 1902.

avec le fil du micromètre. La combinaison des données des niveaux avec les lectures de la vis fournit la différence de hauteur cherchée pour les deux étoiles.

L'erreur accidentelle qui correspond à une observation de hauteur du pôle est faible: *Fr. Küstner* trouve $\pm 0'',20$ d'erreur moyenne, alors que pour les stations internationales, on obtient $\pm 0'',15$ d'erreur moyenne.

Comme le caractère différentiel de mesure reste conservé, les erreurs systématiques ne sont à craindre que dans une très faible mesure; à vrai dire il y a des indices certains qui laissent supposer des traces d'anomalies locales de la réfraction.

Cependant comme une distance zénithale de 25° n'est jamais dépassée pour les étoiles de latitude proprement dites, une anomalie ne peut guère compromettre le résultat, étant donnée déjà la petitesse de la réfraction absolue.

Du reste, on essaye d'employer, comme contrôle, l'observation de couples d'étoiles qui culminent à 60° du zénith¹³⁶).

Selon une remarque de *F. Angelitti*¹³⁷), la différence des hauteurs peut se mesurer sans micromètre; il suffit pour cela d'installer la lunette pour une distance zénithale qui surpasse un peu la plus grande des distances zénithales méridiennes des deux étoiles, puis de substituer aux mesures micrométriques des observations de passages des deux étoiles par un ou plusieurs fils horizontaux, à l'est et à l'ouest du méridien.

21. Passages par le premier vertical. Au *premier vertical*, cercle vertical du système de coordonnées locales qui est le plus important après le méridien (auquel il est perpendiculaire), se rattache une méthode de détermination de la latitude qui offre plusieurs traits communs avec celle de *P. Horrebow*.

Suivant le témoignage de *P. Horrebow*, dans une table dressée en 1704 en vue de son ouvrage „*Basis astronomiae*“, l'idée fondamentale de cette méthode est due à *Ole Römer*¹³⁸); la voici sous sa forme simple: si une étoile atteint le premier vertical, le triangle sphérique pôle-étoile-zénith se transforme en un triangle rectangle au zénith, dans lequel, au début, un côté (distance polaire de l'étoile) est connu.

On observe encore l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de l'étoile dans la partie est et la partie ouest du premier

136) Cf. *T. Albrecht*, Resultate des internationalen Breitendienstes 1, Berlin 1903.

137) Rendic. Accad. Napoli (2) 4 (1890), p. 50.

138) Cf. *P. Horrebow*, *Basis astronomiae*⁴⁵), table VIII.

vertical; alors, de la demi-différence de temps, résulte l'angle au pôle, c'est-à-dire l'angle horaire au moment du passage par le premier vertical.

La méthode ne fut guère estimée avant que *F. W. Bessel*¹³⁹), après l'avoir perfectionnée au double point de vue théorique et pratique, l'ait appliquée, en collaboration avec *J. J. Baeyer*¹⁴⁰) pour des mesures géodésiques dans la Prusse orientale.

F. W. Bessel a montré que l'erreur de collimation de l'instrument de passages disparaissait complètement des résultats si l'on retournait l'instrument entre les positions est et ouest de la même étoile. La grandeur de l'azimut ne joue aucun rôle, tout au moins aussi longtemps que cette quantité reste minime; au contraire, il convient d'être très exigeant relativement à la constance de cet élément et l'inclinaison doit être déterminée avec la plus grande minutie, car elle apparaît en vraie grandeur dans la latitude.

Une étude plus approfondie du problème fut faite d'abord par *P. A. Hansen*¹⁴¹) et *J. F. Encke*¹⁴²) qui prirent également comme point de départ la méthode d'observation esquissée par *O. Römer* et *F. W. Bessel*, avec un retournement de l'instrument entre les passages de la même étoile à l'est et à l'ouest.

*F. G. W. Struve*¹⁴³) ouvrit un nouveau champ d'activité aux passages dans le premier vertical: la détermination de la constante d'aberration. Il fit installer à Poulkovo, par *G. Repsold* et *J. A. Repsold*, un instrument de passages aisément retournable, avec forte puissance lumineuse, et il observa de façon à effectuer un retournement pendant chaque passage, à l'est et à l'ouest.

L'avantage immédiat consiste en ce fait que la condition d'invariabilité pour l'erreur de collimation se trouve limitée à un intervalle

139) *Astron. Nachr.* (Altona) 3 (1825), col. 9; 6 (1828), col. 221; *Abhandlungen*, publ. par *R. Engelmann* 1, Leipzig 1875, p. 317; 2, Leipzig 1876, p. 45.

140) *F. W. Bessel* et *J. J. Baeyer*, *Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten*, Berlin 1838; *F. W. Bessel*, *Abhandlungen*, publ. par *R. Engelmann* 3, Leipzig 1876, p. 62.

141) *Astron. Nachr.* (Altona) 6 (1828), col. 101/116, 421/58.

142) *Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West* [Berliner astron. Jahrb. für 1843, éd. Berlin 1841]; *H. Raper*, *Memoirs astron. Soc. London* 10 (1838), p. 337; *W. H. Simms*, id. 26 (1858), p. 1; *J. F. Tennant*, id. 28 (1860), p. 235/48.

143) Notice sur l'instrument des passages de Repsold, établi dans le premier vertical [Bull. Acad. Pétersb. (1) 10 (1842), col. 209]; *O. Struve*, *Tabulae auxiliares ad transitus per primum verticale reducendos inservientes*, S^t Pétersbourg 1868. Sur la méthode de *F. G. W. Struve*, consulter aussi *T. Albrecht*, *Hilfstafeln*⁸¹), (3^e éd.) p. 66; (4^e éd.), p. 86.

de temps beaucoup plus restreint; du reste des simplifications de calcul se produisent également.

Si l'on désire observer d'après la méthode de Römer-Bessel ou d'après celle de Struve, dans le but de déterminer la hauteur du pôle, on doit employer des étoiles au voisinage immédiat du zénith¹⁴⁴⁾ et, à la vérité, on ne doit pas prendre d'astres dont la distance zénithale méridienne dépasse 3°.

Plus loin du zénith on se trouve, plus fortement une erreur de temps agit sur la latitude conclue; d'autre part, il faudra se montrer d'autant plus difficile pour la constance de l'azimut que l'intervalle de temps entre les passages est et ouest est plus considérable.

Pour obtenir l'azimut en l'absence de mires, *W. Förster*¹⁴⁵⁾ a indiqué le procédé suivant: on observe les passages, à l'est et à l'ouest, de deux étoiles qui passent à l'horizon peu de temps l'une après l'autre; on en déduit alors, à l'aide du temps qui est connu, l'azimut de l'axe de retournement.

A côté des méthodes de détermination dans le premier vertical il convient de citer diverses propositions concernant quelques modifications. *R. Mauritius*¹⁴⁶⁾ préconise l'extension de la méthode de Römer-Bessel à tout le ciel; il demande un instrument de passage dont on puisse incliner le tube sous un angle quelconque, par rapport à l'axe de rotation. Cette idée ne semble pas avoir été réalisée.

Au contraire, le projet de *N. Herz*¹⁴⁷⁾, d'ajouter à l'instrument de passages dans le premier vertical un cercle vertical finement divisé, a été expérimenté, mais on ne connaît pas encore de résultats publiés.

D'autres méthodes exigent seulement des observations *au voisinage* du premier vertical. *R. Schumann*¹⁴⁸⁾, en collaboration avec *H. Bruns*, a étudié le procédé suivant: on choisit deux étoiles qui passent simultanément par un même vertical, au voisinage du premier vertical, et l'on observe les passages par ce même vertical; l'une des étoiles prise voisine du zénith sert plus spécialement à conclure la latitude, tandis que la seconde étoile qu'il convient de choisir assez loin du zénith, fournit l'azimut de l'instrument.

144) *Voir par ex. *F. Brünnow*, Sphärische Trigon.⁴⁾, (4^e éd.), p. 318; éd. *E. Lucas* et *C. André*, Astron. sphérique, p. 413.*

145) De altitudine poli Bonnensi [Diss. Bonn 1854].

146) Bestimmung der Polhöhe von Marburg [Diss. Marbourg 1862].

147) Theorie eines mit einem Vertikalkreise versehenen Passageinstrumentes im I. Vertical [Publicationen der von Kuffnerschen Sternwarte in Wien-Ottakring 2, Vienne 1892].

148) Astron. Nachr. (Kiel) 134 (1894), col. 249.

**M. A. F. Prestel*¹⁴⁹) indique une méthode, destinée surtout aux navigateurs, dans laquelle on doit observer la variation de hauteur en fonction de la variation du temps, au voisinage du premier vertical.*

Le procédé indiqué par *W. Döllen* et publié par *B. Wanach*¹⁵⁰) se distingue par une élimination des erreurs instrumentales; cette méthode de déterminer la latitude au voisinage du premier vertical se rapproche déjà de la méthode des digressions étudiée dans le paragraphe suivant.

**P. Gast*¹⁵¹) montre que la latitude se laisse conclure indépendamment de l'influence de la réfraction, si l'on observe les différences des temps des passages de deux ou plusieurs étoiles par un vertical est ou ouest.*

D'ailleurs l'observation dans le premier vertical constitue le cas le plus commode et le plus favorable du problème général, qui n'a d'ailleurs pas beaucoup de portée pratique sous cette forme: déduire la latitude ou le temps à l'aide de deux passages d'étoiles par le même cercle vertical¹⁵²). D'une façon analogue le problème de Pothénot étendu à la sphère, traité par *C. Rümker*¹⁵³), et qui consiste à calculer la latitude avec les différences d'azimut de trois étoiles, offre un intérêt d'ordre spécialement théorique.

*On trouvera dans *C. Éd. Caspari*¹⁵⁴), l'indication d'une méthode qui présente une grande analogie avec celle des passages d'étoiles au premier vertical: on estime le temps que met le Soleil à passer par un vertical; la méthode, illusoire au méridien, est surtout favorable dans le premier vertical. Un autre procédé approché, indiqué par le même auteur¹⁵⁵), consiste à évaluer le temps que le diamètre du Soleil met pour disparaître à l'horizon.*

22. Digressions. On ne peut observer à l'instant de leur passage par le premier vertical que les astres dont la déclinaison est comprise entre 0° et la latitude du lieu.

149) *Astron. Nachr. (Altona) 37 (1854), col. 281.*

150) Astron. Nachr. (Kiel) 136 (1894), col. 51. Voir aussi *F. Contarino*, Astron. Nachr. (Kiel) 136 (1894), col. 369.

151) *Ein Beitrag zur Polhöhenbestimmung [Z. für Vermessungs-Wesen 35 (1906), p. 81].*

152) *Voir par ex. *W. Chauvenet*, Spherical. Astron.⁶), (5^e éd.) 1, p. 293.*

153) Handbuch der Schiffahrtskunde, (4^e éd.) Hambourg 1844, p. 151; *S. Günther*, Handbuch der mathematischen Geographie, Stuttgart 1890, p. 561.

154) *Cours d'astronomie pratique, application à la géographie et à la navigation⁴) 1, Paris 1888; 2, Paris 1889, p. 40.*

155) *Id. 2, p. 43.*

Les étoiles qui culminent au nord du zénith présentent des points particuliers de leur course, appelés *digressions*, pour lesquels leur parallèle est tangent à un cercle vertical.

A l'instant de la digression, le triangle pôle-étoile-zénith est rectangle à l'étoile et, pour déterminer la latitude, il sera nécessaire d'observer l'angle au zénith; on atteint ce résultat en déterminant, avec un théodolite, la différence de deux digressions consécutives, dont la moitié représente l'angle cherché.

L'observation consiste à lire le cercle horizontal lorsque l'étoile ne manifeste plus aucun changement en azimut, mais semble courir verticalement dans le champ.

Si l'on veut se placer dans les conditions les plus favorables, il convient de choisir des étoiles de plus grande distance polaire, qui passent tout près du premier vertical. *J. G. Böhm*¹⁵⁶) donna un exposé détaillé de cette méthode, qui n'a d'ailleurs jamais été répandue.

23. Méthodes absolues. Si l'on fait exception pour celle où l'on observe les deux culminations, supérieure et inférieure, d'une même étoile circompolaire, on peut dire que toutes les méthodes dont il a été question jusqu'ici exigent la connaissance de la déclinaison de l'étoile, à un degré tel qu'une erreur dans cette coordonnée affecte dans la même mesure la latitude conclue.

La tendance vers les méthodes absolues, indépendantes des lieux des étoiles, se fit jour lorsque se présenta la question de la variation des latitudes. La première idée est due à *W. Förster*¹⁵⁷); sa solution est basée sur l'emploi d'un instrument de passages muni d'une installation de *P. Horrebow*, et qui peut être déplacé en azimut, afin de permettre l'observation des passages dans un plan vertical quelconque.

W. Förster choisit une étoile circompolaire, une zénithale et une étoile sud; toute l'efficacité de la méthode provient seulement des heures des passages et des différences des hauteurs qui sont observées dans trois azimuts différents. La méthode exige une excellente pendule et une grande stabilité de l'instrument. *W. Förster* fit construire par

156) Methode, geographische Breite und Azimut auf das Genaueste zu finden, Prague 1855. Voir aussi par ex. *C. Éd. Caspari*, *Astron. prat.* 2, p. 33.

157) *Zur Theorie des Durchgangs-Instrumentes* [Berliner Astron. Jahrb. für 1880, éd. 1878; id. für 1882, éd. 1880 (réimpr. dans *W. Förster*, *Studien zur Astronomie*, Berlin 1888]; *W. Förster*, *Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen Ortsbestimmungen am Himmel* [Astronomische Abhandlungen als Ergänzungshefte zu den astronomischen Nachrichten, publ. par *H. Kreutz*, cah. n° 5, Kiel 1904].

C. Bamberg, pour l'observatoire de Berlin, un instrument universel approprié à ce mode d'observation.

J. C. Kapteyn¹⁵⁸) publia une autre méthode absolue qui possède peut-être quelques avantages sur celle de W. Förster. J. C. Kapteyn exige la mesure de différences d'azimut, de différences de hauteurs et de petits intervalles de temps. Les différences de hauteur sont déterminées, d'après la méthode de P. Horrebow, pour deux étoiles dans les branches nord et sud du méridien, mais les différences d'azimut se rapportent à deux étoiles de déclinaisons presque égales et qui, à peu de temps l'une de l'autre, atteignent des hauteurs égales à l'est et à l'ouest du méridien.

De cette manière, on s'affranchit des erreurs de déclinaison, de réfraction, de flexion et de la marche de la pendule, ou tout au moins leur influence n'est plus capable d'altérer les résultats d'une manière sensible.

Plus récemment F. Contarino¹⁵⁹) mit en lumière une proposition qui offre quelque ressemblance avec celle de J. C. Kapteyn; le cas idéal se présente ainsi: l'azimut d'une étoile, dont la déclinaison égale la latitude, est observé lorsque cet astre passe par le cercle horaire de six heures; dans la pratique, on substitue à l'étoile zénithale unique deux étoiles dont les ascensions droites diffèrent de douze heures environ, et on détermine leur différence d'azimut par leurs passages aux cercles de six heures à l'est et à l'ouest.

Ici encore les distances zénithales méridiennes des deux étoiles sont en relation avec des mesures micrométriques selon la manière employée dans la méthode Horrebow.

L. Courvoisier¹⁶⁰), qui effectua des observations à Strasbourg d'après la méthode de J. C. Kapteyn, donne dans la troisième partie de son travail, une méthode nouvelle pour la détermination de la latitude absolue; elle repose sur les observations d'azimut de quatre étoiles ayant des déclinaisons voisines de la latitude, mais des ascensions droites qui diffèrent de six heures. On y tend avant tout à réaliser l'uniformité et la simplicité dans l'observation et, d'autre part, à éliminer les erreurs constantes relatives à la réfraction et à la flexion en hauteur.

158) Methode, die Polhöhe möglichst frei von systematischen Fehlern zu bestimmen [Copernicus (Dublin) 3 (1884), p. 147].

159) Su di un metodo per determinare la latitudine geografica, Naples 1897.

160) Untersuchungen über die absolute Polhöhe von Strassburg i/E. [Diss. Heidelberg 1901].

*Nous avons eu déjà l'occasion de citer la méthode indiquée par *M. Loewy*¹⁶¹⁾ pour déterminer la latitude à l'aide de mesures sur des étoiles situées au voisinage immédiat du pôle.*

24. Instruments pour l'observation des hauteurs égales. Il s'agit ici des instruments imaginés spécialement pour la détermination des positions géographiques, en supposant comme éléments d'observation les passages d'étoiles par le même cercle de hauteur.

Après l'instrument le plus simple, le Chronodeik, déjà mentionné au n° 5, *A. Beck*¹⁶¹⁾ commença en 1890 à se préoccuper de la construction d'un moyen auxiliaire pour la détermination de hauteurs constantes.

Le principe des divers instruments proposés par lui, et en partie réalisés, nommés „instruments nadiraux“, est le suivant: une lunette est dirigée verticalement vers le bas et un prisme placé au-dessous d'une façon appropriée réfléchit l'image d'une étoile, lorsqu'elle atteint 60° de distance zénithale; on observe les temps de passages à un certain nombre de fils.

A. Beck a étudié en détail la théorie, la marche du calcul et diverses variations de son appareil.

L'appareil „circumzénithal“ imaginé et expérimenté par *F. Nušl* et *J. J. Frič*¹⁶²⁾ se distingue d'une façon notable de celui de *A. Beck*; ici, devant une lunette installée horizontalement, on place un prisme avec une face également disposée horizontalement et dont deux faces tournées vers la lunette sont argentées. Tout près, sous le prisme se trouve un bain de mercure, et l'observation consiste dans la détermination de l'instant auquel les images appartenant à la même étoile coïncident, images qui parviennent dans le tube, d'une part de la surface supérieure du prisme, d'autre part après double réflexion sur le bain de mercure et à la surface inférieure du prisme.

*Les auteurs sont d'ailleurs revenus sur ce sujet¹⁶³⁾ et ont apporté quelques perfectionnements à l'appareil primitivement décrit; en par-

161) Über die geographische Breite von Riga aus Beobachtungen an einem astronomischen Instrument [Festschrift Naturf.-Verein Riga] Riga 1896. Plus tard, *Astron. Nachr.* (Kiel) 126 (1891), col. 385; 130 (1892), col. 81; 132 (1893), col. 65; 136 (1894), col. 225; 140 (1896), col. 119; 159 (1902), col. 133; 163 (1903), col. 193.

162) Étude sur l'appareil circumzénithal [Rozpravy české Akad. 12 (1903) II, mém. n° 21; Acad. François-Joseph I, Bull. intern. (Prague) 8 (1903), p. 1/63].

163) **F. Nušl* et *J. J. Frič*, Deuxième étude sur l'appareil circumzénithal [Rozpravy české Akad. 15 (1906) II, mém. n° 33; Acad. François-Joseph I, Bull. intern. (Prague) 11 (1906), p. 221/62].*

ticulier, le prisme à réflexion est remplacé par deux miroirs inclinés l'un sur l'autre et qui couvrent chacun une moitié de l'objectif.*

L'astrolabe à prisme, de *A. Clauide* et *L. Driencourt*¹⁶⁴) repose sur des considérations assez analogues; *il consiste en un prisme droit de flint, à base triangulaire équilatérale, dont deux faces renvoient horizontalement dans une lunette les rayons émanant d'une étoile et de son image réfléchie dans un bain de mercure. On note l'instant où les deux images passent en coïncidence ou plutôt à une distance minima.

L'ensemble du prisme et de la lunette, mobile autour d'un axe vertical, peut être orienté dans un azimut quelconque.

Les officiers du service géographique français ont effectué de nombreuses déterminations de coordonnées géographiques à l'aide de cet appareil et ont obtenu d'excellents résultats. Nous citerons en particulier la différence de longitude entre Paris et Bizerte²⁰⁹) et la nouvelle mesure de degrés qu'ils ont effectuée de 1899 à 1906 au Pérou et dans l'Équateur.

Tout récemment, *E. Rabiouille*¹⁶⁵) a employé cet instrument avec succès, pour déterminer les coordonnées de la station du Pic du Midi.*

25. Méthodes photographiques. On a tenté, à maintes reprises, de mettre la photographie au service de la détermination des positions géographiques; on y a d'ailleurs déjà fait allusion dans les n^{os} 14 et 20.

*C. Runge*¹⁶⁶) déterminait la longitude de la façon suivante: avec une chambre ordinaire, il photographiait d'abord la lune et, ensuite, après écoulement d'un intervalle de temps évalué avec l'horloge, il photographiait, avec la même position de la chambre, un groupe d'étoiles assez brillantes. La mesure du cliché fournissait le lieu de la Lune et par suite, on en pouvait déduire la longitude.

*E. H. Hills*¹⁶⁷) suivit plus tard une voie analogue, mais en employant principalement des chambres lourdes.

*C. Koppe*¹⁶⁸) s'efforça d'éliminer des mesures l'influence du bord lunaire continuellement mal défini; il dirigeait son petit théodolite

164) *Description et usage de l'astrolabe à prisme, Paris 1910.*

165) *Résultats des déterminations des coordonnées géographiques de la station astronomique du Pic du Midi de Bigorre, au moyen de l'astrolabe à prisme et de l'heure radiotélégraphiée de Paris [C. R. Acad. sc. Paris 154 (1912), p. 497].*

166) *Z. für Vermessungs-Wesen* 22 (1893), p. 417.

167) *Memoirs astron. Soc. London* 53 (1899), p. 117.

168) *Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung*, Brunswick 1896.

photographique sur la Lune et, entre deux poses d'une distance lunaire, il tournait la plaque par la rotation de 180° du théodolite, de sorte qu'il obtenait le double de la distance lunaire à l'aide de la distance des deux images stellaires; cet astronome employa aussi le photo-théodolite qu'il avait construit, à la détermination des latitudes par des hauteurs circummériidiennes.

*A. Marcuse*¹⁶⁹) construisit un instrument universel photographique qui présente beaucoup de ressemblance avec ce photo-théodolite.

Après une proposition de *F. Stolze*¹⁷⁰) reconnue irréalisable, *M. Schnauder*¹⁷¹) montra que l'on pouvait, en se servant d'une chambre dirigée vers le zénith, déterminer ce point zénith. Pour cela, on fait 3 poses à intervalles de temps égaux et courts, en tournant la plaque de 180° dans son plan, pour la pose intermédiaire.

La chambre zénithale de *M. Schnauder* consiste en une simple chambre photographique, mobile de 180° autour d'un axe vertical, avec 2 niveaux pour l'orientation.

C. Runge remplace les niveaux par ce dispositif qui consiste à faire flotter la chambre dans une cuve pleine d'eau.

*K. Schwarzschild*¹⁷²) suspend tout l'appareil à des ressorts fins. Une autre méthode donnée par ce même savant¹⁷³) exige une chambre installée d'une façon parfaitement invariable, dirigée vers le zénith, et un collimateur zénithal suspendu.

Ce dernier appareil se compose d'une lunette dirigée vers le bas, suspendue à ressort, ayant au plan focal une plaque noire avec des traits en croix. Le point zénith trouve sa fixité de cette manière que, avant la pose, la suspension précédemment décrite est poussée sur l'objectif de la chambre et que, au moyen d'une lampe à incandescence, deux images de la croix sont réalisées sur la plaque, images qui appartiennent à deux positions du tube du collimateur différant de 180° .

Le zénith est au milieu des deux images.

Alors la plaque est exposée sur le ciel une demi-heure ou une heure; durant ce temps les étoiles voisines du zénith laissent leur trace. Les mesures ultérieures fournissent la distance zénithale méridienne des étoiles enregistrées. L'appareil peut servir également à

169) Viertelj. astron. Ges. Lpz. 33 (1898), p. 235.

170) Die photographische Ortsbestimmung ohne Chronometer, Berlin 1893 [Photographische Bibliothek, publ. par *F. Stolze* I].

171) Astron. Nachr. (Kiel) 154 (1900/1), col. 134.

172) Id. 164 (1904), col. 177.

173) Id. 164 (1904), col. 1.

déterminer la longitude. *K. Schwarzschild*¹⁷⁴) utilisa le même principe pour la construction d'une chambre légère destinée aux explorateurs: un petit tube solide dirigé vers le bas, ajustable au moyen de deux niveaux, remplace ici le collimateur suspendu.

Détermination de la longitude.

A. Par des signaux simultanés.

(La méthode par les occultations sera examinée au n° 34).

26. **Éclipses de Lune; éclipses des Satellites de Jupiter.** Tandis que la détermination de la latitude est basée uniquement sur des observations effectuées dans la station étudiée, on a besoin, pour fixer la longitude, de connaître le temps du méridien initial.

Le procédé le plus simple, auquel on est immédiatement conduit, consiste à observer des phénomènes célestes qui se produisent au même instant pour tout l'hémisphère dans lequel ils sont visibles. La différence des heures locales auxquelles le phénomène a été noté coïncide avec la différence de longitude.

Avant tout autre chose, les éclipses de lune servirent à cet objet dans l'antiquité et le moyen-âge; même au 18^{ième} siècle, elles étaient encore regardées comme le procédé le plus sûr pour la détermination des longitudes¹⁷⁵).

Le commencement et la fin d'une telle éclipse, c'est-à-dire de l'entrée ou de la sortie du disque lunaire dans l'ombre produite par notre planète, n'ont pas lieu rigoureusement au même instant pour tous les lieux, à cause du déplacement parallactique; cependant, en négligeant cette influence, comme on le fait assez souvent, on ne commet qu'une erreur très faible, et surtout négligeable à côté de l'incertitude afférente au phénomène: les limites de l'ombre terrestre sont très mal terminées et cela à un degré susceptible de varier considérablement d'une éclipse à l'autre.

Du reste, le diamètre de l'ombre paraît plus grand qu'il ne doit être géométriquement; *H. von Seeliger*¹⁷⁶) donna l'explication de cet agrandissement apparent, en prouvant que, dans ce cas, on subit une influence essentiellement physiologique.

174) Jahrbuch für Photographie und Reproduktions-Technik (Halle) 1903.

175) Voir par ex. *J. G. F. Bohnenberger*, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich mittelst des Spiegelsextanten, Göttingue 1795; (2^e éd.) revue et complétée par *G. A. Jahn*, Göttingue 1852, p. 316.

176) Die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens bei Mondfinsternissen [Abh. Akad. München 19 (1899), Abt. II (1896/7), p. 383/448].

On peut observer avec beaucoup plus d'exactitude, comme le proposa *J. Richer*¹⁷⁷, les instants auxquels l'ombre de la terre couvre ou découvre une formation particulière sur la surface lunaire (cratère, chaîne de montagnes). Ces instants sont rigoureusement les mêmes pour tous les lieux de la terre.

Il est possible, à condition de s'entourer de toutes les précautions possibles (analogie des lunettes, choix de cratères purement définis, conventions concernant les contours d'ombre observés) de déduire, d'une observation d'éclipse de notre satellite, la différence de longitude de deux stations, à quelques secondes de temps près.

De nos jours, ces phénomènes ont perdu leur importance à ce sujet; leur valeur relève exclusivement du domaine de la physique atmosphérique.

Un phénomène identique, mais se produisant à une distance beaucoup plus considérable de nous, devint abordable après l'invention des lunettes; il consiste dans les *éclipses des satellites de Jupiter*.

*G. Galilée*¹⁷⁸ paraît être le premier qui remarqua leur convenance à ce but. Tout d'abord, il n'eut pas en vue l'éclipse elle-même mais, comme aussi *N. C. F. de Peiresc*¹⁷⁹, les configurations des quatre premiers satellites, par l'aspect desquelles on déduit le temps correspondant du méridien initial.

Cependant ces premières tentatives demeurèrent stériles jusqu'au moment où (*G.*) *Jean Dominique Cassini*¹⁸⁰ construisit des tables utilisables pour les satellites.

Plus tard, en particulier au cours du 18^{ième} siècle, la méthode jouit d'une grande faveur, surtout après que *M. Hell*¹⁸¹ eût préparé, de la même façon que pour l'observation précise des éclipses de lune, des données pour les phénomènes du système de Jupiter. Il voulait employer seulement les deux premiers satellites pour la détermination

177) Observations astronomiques faites en l'isle de Caïenne, Paris 1679.

178) *G. Galilei*, *Il Sidereus nuncius* (*Astronomicus nuncius*), Venise 1610; Opere 3, Florence 1843, p. 53; ed. nazionale 3¹, Florence 1892, p. 59/96; voir aussi les lettres de *Galilée* datées d'août 1636 et adressées aux États-généraux hollandais: *Galileo agli Stati Generali delle Provincie Unite dei Paesi Bassi* [Opere 2, Padoue 1744, p. 455, 459; Opere 7, Florence 1843, p. 73, 82; ed. nazionale 16, Florence 1905, p. 463, 468.

179) *N. C. F. de Peiresc*, né en 1580, mort en 1637 [*R. Wolf*, *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur* 2, Zurich 1893, p. 149].

180) *Ephemerides Bononienses Mediceorum syderum*, Bologne 1668.

181) *Ephemerides astronomicae ad meridianum Vindobonensem*, année 1764, Vienne 1763/4, p. 189. *F. X. von Zach* [*Astron. Jahrb. Suppl.* 3 (1797), p. 44] a publié une étude concernant l'incertitude de ces observations.

des longitudes, à cause de leur grand mouvement et par suite de leur entrée rapide dans l'ombre de Jupiter; de plus, il exigeait des lunettes identiques, la répartition symétrique des instants de l'entrée et de la sortie; en outre, le rejet du voisinage de l'opposition de la planète.

Les améliorations les plus récentes réalisées au point de vue théorique ou pratique relativement à l'observation de ces satellites sont dues à A. Cornu¹⁸²), A. Obrecht¹⁸³), H. von Seeliger¹⁸⁴), E. Anding¹⁸⁵), mais elles n'ont guère de rapport avec la détermination des longitudes. Elles sont relatives à la mécanique du système jovien, à l'étude de la méthode photographique pendant le séjour du satellite dans l'ombre du corps principal, ou à la détermination de la vitesse de la lumière.

27. **Étoiles filantes.** Leur apparition, perceptible dans un domaine beaucoup plus restreint, a été proposée pour servir à la détermination de la longitude, depuis déjà fort longtemps et à une époque où apparaissait à peine la certitude de la nature cosmique de ces astres.

E. Halley¹⁸⁶) indiqua, le premier, la possibilité d'obtenir une comparaison de pendule par l'apparition d'une étoile filante.

Bientôt G. Lynn¹⁸⁷) revint à cette idée simple, qui, plus tard, fut reprise par J. F. Benzenberg¹⁸⁸).

Cependant la méthode n'a jamais été beaucoup appliquée: d'un côté parce qu'on ne sait jamais quand et où un météore apparaît et, d'autre part, à cause surtout de la difficulté d'identification d'un tel phénomène observé en 2 endroits différents.

Néanmoins A. Bouquet de la Grye¹⁸⁹) a encore tenté d'utiliser les étoiles filantes à la détermination des longitudes.

28. **Signaux artificiels.** On peut également réaliser des apparitions instantanées à l'aide de signaux artificiels, et cette méthode fut fréquemment employée naguère, lorsque la nature des problèmes exigeait une connaissance très exacte de la différence des longitudes entre

182) C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 1815.

183) Ann. Observ. Paris, Mémoires 18 (1885), mém. n° 8, p. 1.

184) Viertelj. Astron. Ges. Lpz. 20 (1885), p. 176, 267.

185) Photometrische Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupitertrabanten, Munich 1889.

186) Philos. Trans. London 30 (1717/9), éd. 1720, p. 978.

187) Id. 35 (1727/8), p. 351.

188) Über die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen
Hambourg 1802.

189) C. R. Acad. sc. Paris 129 (1899), p. 464.

2 points: par exemple, dans les mesures des degrés de longitude qui servaient à l'étude de la grandeur et de la figure de la terre.

Dès 1671, *J. Picard* et *O. Römer*¹⁹⁰⁾ déterminaient ainsi la différence de longitude entre l'île Hveen, rendue célèbre par l'observatoire de *Tyge Brahe* [*Tycho-Brahé*], et Copenhague.

N. L. de Lacaille et *C. F. Cassini de Thury*¹⁹¹⁾ utilisèrent l'explosion de la poudre pour fixer la différence de longitude de 1°,9, dans une mesure de degré effectuée en 1739—1740 sur un parallèle situé par + 43°,5 de latitude.

Au début du 19^{ème} siècle et encore durant 40 ans, la méthode était en faveur dans toute l'Europe; elle le devint surtout après que *C. F. Gauss*¹⁹²⁾ eut découvert l'héliotrope, instrument qui permet de rendre les signaux lumineux facilement visibles des stations choisies.

Ces stations où se trouvent placés les signaux de poudre ou les héliotropes, doivent être situées le plus possible au milieu des lieux à déterminer. Si toutefois la distance est trop considérable, on intercale des stations intermédiaires pour lesquelles on a seulement besoin d'observer l'intervalle de temps entre les signaux. Des déterminations de temps local indépendantes ne sont nécessaires qu'aux deux extrémités de l'arc.

La plus grande détermination de longitude réalisée avant la période électrique est celle exécutée sur le parallèle 45° 43',2 qui se dirige de Bordeaux, sur l'Atlantique jusqu'à Fiume dans l'Adriatique et qui comporte plus de 15°,5 en longitude; commencée du côté français par *B. Brousseau*¹⁹³⁾, colonel au corps des ingénieurs-géographes de l'état major français, elle fut achevée vers 1824 par les états majors italien, sarde et autrichien.

B. Par transport du temps.

29. Voyages chronométriques. La réalisation de comparer le temps d'une façon simple fut liée au développement d'un des instruments les plus essentiels de l'astronomie: celui de la pendule.

190) *J. Picard*, Voyage d'Uraniborg, ou observations astronomiques faites en Dannemarck, Paris 1680.

191) *C. F. Cassini de Thury*, La méridienne de l'observatoire royal de Paris, Paris 1744.

192) Göttingische gelehrte Anzeigen 1821, p. 1249; Werke 9, Göttingue (Leipzig) 1903, p. 461.

193) Voir, entre autres: *F. Arago*, Astronomie populaire 3, Paris 1859, p. 339. Et encore *B. Brousseau*, Mesure d'un arc du parallèle moyen entre le pôle et l'équateur, Limoges 1839. La première édition parut dans la *Connaissance des Temps* pour 1829, éd. Paris 1826, p. 252/95.

R. Gemma-[*Frisius*]¹⁹⁴) mentionne, le premier, la possibilité, à l'aide d'une pendule, de transporter le temps d'un lieu dans un autre, mais il a fallu encore plus de deux siècles avant que la technique soit capable de fournir des appareils garantissant le degré de certitude exigé.

L'idée conductrice est la suivante: en un lieu *A*, on observe, pendant un certain intervalle de temps, l'allure du chronomètre, c'est-à-dire l'état et la marche en fonction de la pression, de la température et de l'état hygrométrique; on se rend ensuite au lieu *B*, dont la longitude est à déterminer et, là, avec le chronomètre étudié en *A*, on mesure le temps local; la différence entre ce temps et le temps local en *A*, connu à l'aide de la marche du chronomètre, fournit immédiatement la différence de longitude entre *A* et *B*.

Le retour de *B* à *A* fournit un contrôle; il est d'ailleurs nécessaire de faire à la fin une nouvelle étude du chronomètre.

On réalise une précision supérieure en employant un grand nombre de chronomètres¹⁹⁵).

Des voyages chronométriques de cette sorte ont parfois servi, avant l'invention de la télégraphie électrique, à la détermination fondamentale des différences de longitude dans l'Europe boréale; entre autres, de 1817 à 1821 entre Altona et Copenhague, sous la direction de *H. C. Schumacher*¹⁹⁶), en 1823 et 1824 entre Greenwich et Altona, sous la direction de *J. L. Tiarks*¹⁹⁷). Enfin *F. G. W. Struve*¹⁹⁸) a entrepris la plus grande opération de cette espèce entre Poulkova, Altona et Greenwich, à une époque où la méthode télégraphique commençait déjà à triompher en Amérique.

Le transport chronométrique du temps prit une grande importance dans la navigation, après que *J. Harrison*¹⁹⁹) réussit, en 1735, à construire le premier chronomètre de marine. Jusqu'à ces derniers temps, cette méthode est restée la plus fréquemment employée. Il va sans

194) *R. Gemma*-[*Frisius*], De principiis astronomiae, cosmologiae et cosmographiae, Anvers 1530; (nouv. éd.) Paris 1547.

195) *On trouvera une étude détaillée de ce problème dans *C. Éd. Caspari* [Astron. pratique⁴] 2, p. 111; Les chronomètres de marine, Paris 1894, p. 142] et dans *W. Chauvenet*, Spherical astron.⁶), (5^e éd.) 1, p. 317.*

196) Astron. Nachr. (Altona) 1 (1823), col. 303/6.

197) Cf. *H. C. Schumacher*, Astron. Nachr. (Altona) 5 (1827), col. 225.

198) Expédition chronométrique entre Poulkovo et Altona 1, S^t Pétersbourg 1844; 2, S^t Pétersbourg 1846.

199) An account of the proceedings in order to the discovery of the longitude at sea, (2^e éd.) Londres 1763; The principles of Mr. Harrison's time-keeper, Londres 1767. Cf. *E. Gelcich*, Geschichte der Uhrmacherskunst, (5^e éd.) Weimar 1892, p. 56.

dire que la télégraphie sans fil est vraisemblablement appelée à remplacer, à très brève échéance, tous les anciens procédés.

Les recherches concernant les observations chronométriques ont permis d'établir, pour les chronomètres, des formules d'après lesquelles il est possible, en ayant égard à un terme fonction de la température, de déterminer le temps de Greenwich à un instant quelconque. Comme d'autre part, l'observation à bord fournit le temps local correspondant, la différence des deux résultats donne immédiatement la longitude du lieu d'observation relativement à Greenwich.

Les navires de guerre qui sont appelés à parcourir un long trajet, ont au moins trois chronomètres à bord et les navires de commerce, dans la plupart des cas, en ont également deux ou trois.

Pour les poids relatifs à attribuer aux temps de Greenwich conclus de plusieurs chronomètres, on peut s'en rapporter à divers mémoires dans lesquels on indique de s'appuyer à la fois sur l'étude faite à terre et sur les comparaisons journalières effectuées à bord. Le travail le plus important sur cet objet est dû à *C. F. Gauss*²⁰⁰).

Dans les voyages d'exploration à terre, on se sert, au lieu des chronomètres de marine, à oscillations lentes, des chronomètres de poche qui oscillent rapidement (chaque cinquième de seconde) et dont on peut prendre un grand nombre avec soi.

De recherches récentes de *P. Ditsheim*²⁰¹), il semble résulter l'existence certaine d'un coefficient barométrique chez les chronomètres.

30. Télégraphie; *téléphonie; radiotélégraphie.* On put réaliser une comparaison de pendule sans transport d'heure lorsqu'en 1833, grâce à *C. F. Gauss* et *W. Weber*, le télégraphe commença à devenir un moyen général de communication.

Les américains ont été les premiers qui, suivant en cela l'idée donnée par *S. F. B. Morse* en 1839, réalisèrent dès 1844 la première comparaison télégraphique de pendule entre Washington et Baltimore, par *K. Wilkes* et *Eld*²⁰²). La méthode, en 1845, avec *A. D. Bache* et *S. C. Walker*²⁰³) fut accueillie dans le service naval des États-Unis, et servit à la détermination des différences de longitude entre les principales stations. Désormais, la détermination télégraphique des longitudes devint celle qui, avec les ressources les plus limitées en

200) *Astron. Nachr. (Altona)* 5 (1827), col. 227; *Werke* 6, Göttingue 1874, p. 455.

201) *C. R. Acad. Paris* 138 (1904), p. 1027. Cf. VII 5, 9.

202) Voir *J. Hilfiker*, *Die astronomische Längenbestimmung* [*Mitt. Naturf. Ges. Aarau* 1881, éd. Aarau 1882, p. 31].

203) *Astron. Nachr. (Altona)* 27 (1848), col. 121.

temps et en argent, pouvait conduire aux résultats les plus précis; aussi fut-elle adoptée pour les travaux de l'Association géodésique internationale. Les résultats, par ce procédé, sont comparables en précision avec ceux relatifs aux latitudes; on arrive à une incertitude finale qui ne dépasse pas quelques dixièmes de seconde [en arc de grand cercle]. Pour améliorer la précision du résultat, on s'affranchit, dans la détermination du temps, des erreurs d'ascension droite des étoiles par ce fait qu'on observe les mêmes étoiles, dans les deux stations, aussi longtemps que le permet la distance en longitude. L'équation personnelle de l'observateur peut être éliminée par une inversion des observateurs et des instruments dans le cours de l'opération. Les erreurs instrumentales exercent seulement une très faible influence sur les résultats si la moyenne des distances zénithales des étoiles horaires est la plus proche possible de la distance zénithale du pôle. Depuis assez longtemps les observations s'effectuent à l'aide du chronographe, mais au lieu de l'enregistrement tactile du passage des étoiles aux fils du micromètre, on tend aujourd'hui à faire usage du micromètre impersonnel de *J. A. Repsold*²⁰⁴⁾ avec lequel l'observateur doit seulement réaliser la bissection, par un fil conduit par une vis, de l'étoile qui parcourt le champ; un certain nombre de contacts portés par le tambour de la vis transmettent les signaux automatiquement à la bande du chronographe.

D'ailleurs on peut rendre l'observation encore plus aisée en produisant mécaniquement le mouvement d'entraînement de la vis micrométrique; ce perfectionnement a été réalisé, en particulier, au Cercle méridien Bischoffsheim de l'observatoire de Paris et a donné toute satisfaction^{204a)}.

Les passages d'étoiles sont enregistrés aux chronographes des deux stations; on se contente simplement de comparer les pendules assez souvent dans le courant d'une soirée. De cette façon on utilise le télégraphe seulement un court intervalle de temps, ce qui n'est pas un point sans importance à notre époque où les communications sont si surchargées.

Les nombreuses déterminations de longitudes entreprises jusqu'ici ont fourni en même temps des valeurs pour le temps que le courant électrique emploie à parcourir la ligne; pour un intervalle de 1000 km. ce temps paraît atteindre 0^s,042; cependant il ne croît pas linéairement avec la longueur du fil, mais augmente plus vite que cette

204) Cf. *Astron. Nachr.* (Kiel) 141 (1896), col. 279.

204a) *Cf. *H. Renan*, Le nouveau micromètre enregistreur du cercle méridien du jardin de l'Observatoire de Paris [*Ann. Observ. Paris, Mémoires* 26 (1910), mém. n° 5].*

longueur²⁰⁵). Le Coast and Geodetic Survey réussit la première détermination de longitude transocéanique, en 1866, entre Hearts-Content (Terre-Neuve), Valencia (Irlande) et Greenwich. Depuis lors de nombreuses déterminations ont relié divers points aux deux Amériques.

*Dès 1905, *E. Guyou*²⁰⁶) a appelé l'attention sur le parti que l'on pouvait tirer, pour la détermination des longitudes, de la méthode des coïncidences au moyen du téléphone. Une première application a été faite entre Paris et Brest. On a utilisé deux chronomètres à demi-seconde, l'un de temps sidéral et l'autre de temps moyen; sur la glace de chacun on avait placé un microphone Hughes intercalé dans le primaire d'une bobine d'induction dont le secondaire aboutissait aux bornes de la ligne téléphonique: les deux opérateurs percevaient ainsi les battements dans la même oreille et conservaient la possibilité de communiquer verbalement. Les expériences ont établi que les comparaisons faites par divers observateurs, en un même lieu, concordent à 0^o,01 et ne présentent pas de différence systématique, la même précision se trouve réalisée pour les résultats obtenus aux deux stations. Cette détermination de longitude, dans laquelle le temps local a été déterminé à l'aide de l'astrolabe à prisme [n° 24] a montré les grands avantages de cet instrument.*

Mais, dès que la télégraphie sans fil est entrée dans le domaine pratique on a songé tout naturellement à l'utiliser pour la transmission des signaux dans la détermination des longitudes.

*En 1907, *W. Förster*²⁰⁷), en annonçant les résultats de la détermination Potsdam-Brocken par ce procédé, laissait déjà entrevoir les grands avantages qui en résulteraient.

Il semble que le résultat le plus précis se trouve réalisé lorsqu'on emploie la télégraphie sans fil, en ayant recours à la méthode des *coïncidences téléphoniques*, dont nous parlions un peu plus haut.

Des expériences déjà très satisfaisantes ont été effectuées en 1910²⁰⁸) par *A. Claude*, *G. A. Ferrié* et *L. Driencourt*, entre Paris et Brest, mais

205) Voir *T. Albrecht*, *Hilfstafeln*²¹), (3^e éd.) p. 110; (4^e éd.) p. 119.

206) *Application du téléphone et de l'astrolabe Claude-Driencourt à la détermination de la longitude de Brest [C. R. Acad. sc. Paris 142 (1906), p. 1379].*

207) *Astron.-geodät. Arbeiten I. Ordnung, Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Brocken im Jahre 1906 [Veröffentlichungen des Geodätischen Instituts, Neue Folge [Potsdam] n° 31 (1907), éd. Leipzig 1907]; Mitt. der Vereinigung von Freunden der Astron. und kosmischen Physik 17 (1907), p. 91.*

208) **A. Claude*, *G. A. Ferrié* et *L. Driencourt*, Comparaison de chronomètres et de pendules à distance par la méthodes des coïncidences au moyen de signaux radiotélégraphiques [C. R. Acad. sc. Paris 150 (1910), p. 306] et aussi: compa-

la méthode a surtout reçu une consécration définitive lors de la détermination de longitude effectuée récemment entre Paris et Bizerte. Cette détermination a été faite simultanément par deux groupes d'observateurs: tandis que *F. Lancelin* et *Tsatsopoulos* observaient avec des instruments méridiens portatifs munis d'un micromètre à fil entraîné, les officiers du service géographique français opéraient à l'aide de l'astrolabe à prisme²⁰⁹). Les deux groupes ont utilisé la méthode radiotélégraphique et observé les coïncidences par téléphone et il semble définitivement établi que les comparaisons ainsi effectuées sont susceptibles de fournir à moins de 0^s,01 près la différence des heures de deux instruments de mesure de temps placés en deux stations quelconques comprises dans la portée d'un même poste de télégraphie sans fil.

Il apparaît donc que ce soit la méthode la plus précise pour l'obtention des différences de longitudes. Nous croyons savoir du reste que tous les observatoires français (et cet exemple sera vraisemblablement suivi par les principaux observatoires de l'étranger) vont être ou sont même déjà pourvus d'un poste complet de télégraphie sans fil et que de nombreuses déterminations de longitudes vont être effectuées par cette méthode.*

C. Méthodes basées sur la position de la Lune.

(Voir au n° 25 les méthodes photographiques.)

31. Culminations lunaires. Ces méthodes sont à peu près contemporaines des déterminations chronométriques. Comme, chaque jour, la Lune se meut parmi les étoiles de 13° environ vers l'est, il faudrait déduire la position de la Lune à $\frac{1}{2}$ seconde d'arc près si l'on voulait conclure à 1^s près le temps du méridien de l'éphéméride²¹⁰). Cela exige que l'on dispose d'instruments précis et que l'on utilise des méthodes d'observation très perfectionnées; il n'y a donc pas lieu

raisons téléphoniques et radiotélégraphiques de chronomètres par la méthode des coïncidences entre Paris et Brest [C. R. Acad. sc. Paris 151 (1910), p. 935].*

209) *Voir à ce sujet: *A. Claude*, *G. A. Ferrié* et *L. Driencourt*, Comparaisons radiotélégraphiques de chronomètres, par la méthode des coïncidences, entre Paris et Bizerte [C. R. Acad. sc. Paris 152 (1911), p. 1152]; *H. Renan*, Résultat de la discussion des observations faites par MM. Lancelin et Tsatsopoulos pour déterminer par la télégraphie sans fil la différence de longitude entre Paris et Bizerte [C. R. Acad. sc. Paris 153 (1911), p. 1211; Annales du Bureau des longitudes 9 (1913), mém. n° 3].*

210) *Au point de vue des calculs à effectuer, on pourra consulter par ex.: *F. Brünnow*, Sphärische Astron.⁴), (4^e éd.) p. 358; trad. *E. Lucas* et *C. André*, Astron. sphérique, p. 468; *W. Chauvenet*, Spherical Astron.⁶), (5^e éd.) 1, p. 350.*

d'être surpris si, avant l'an 1500, on ne trouve nulle part mention de l'emploi de notre satellite pour la détermination des longitudes.

Le premier, *J. Werner*²¹¹⁾ signale la méthode, en 1514, dans son commentaire de la Géographie de Ptolémée. Cette proposition ne put recevoir une exécution que lorsque *J. Tobie Mayer* (senior)²¹²⁾ réussit en 1752 à former des tables lunaires d'un usage pratique. *Oronce Fine*²¹³⁾ assujettit la méthode des lieux lunaires à une spécialisation heureuse: il observait la lune à son passage au méridien et de là il déduisait l'ascension droite; il passait alors au temps correspondant du méridien initial de l'éphéméride. Ou bien, pour déterminer la différence de longitude, il utilisait la différence des ascensions droites observées, en tenant compte de la variation en ascension droite. *W. Baffin*²¹⁴⁾ semble avoir été le premier qui, en 1615, rendit la méthode pratique pour l'usage. Avant les autres méthodes qui vont suivre, les culminations lunaires jouirent de la préférence à cause de la simplicité du calcul, car le déplacement parallactique de la Lune en ascension droite est nul à l'instant du passage au méridien.

*G. (J.) Toaldo*²¹⁵⁾ et *E. Pigott*²¹⁶⁾ recommandèrent d'observer en outre les culminations d'étoiles situées près de la lune et près de son parallèle car, dans ce cas, disparaissent presque entièrement non seulement les erreurs instrumentales mais encore celles affectant les positions des étoiles. Cette méthode fit ses preuves et bientôt parurent des éphémérides fournissant les ascensions droites apparentes des étoiles de culmination lunaire appropriées²¹⁷⁾. *F. B. G. Nicolai*²¹⁸⁾ développa une méthode de calcul par laquelle la correction de pendule, le rayon

211) Claudii Ptolemaei geographia, liber primus, argumenta, chap. 4, annot. VIII, Nuremberg 1514; *Pierre Apian* (*Petrus Apianus*), Introductio geographica in Veneri annotationes, Ingolstadt 1533; on trouve des détails historiques dans *R. Wolf*, Handbuch der Astron.¹⁷⁹⁾ 2, p. 153 et suiv.

212) Tabulae motuum solis et lunae novae et correctae, quibus accedit methodus longitudinum promoti, mém. posth. publ par *N. Maskelyne*, Londres 1770.

213) De inveniendi longitudinum locorum differentia, Paris 1544.

214) Le navigateur anglais *W. Baffin* (1584/1622) employa la méthode des culminations lunaires pendant son voyage au Grönland; voir par ex.: *T. Rundall*, Narratives of voyages towards the North-West 1496/1631 [Works issued by the Hakluyt-Society 5, Londres 1849, p. 117].

215) De methodo longitudinum ex observato lunae transitu per meridianum, ad *N. Maskelyne* epistola, Padoue 1784.

216) Philos. Trans. London 76 (1786), p. 409.

217) Nautical almanac and astronomical ephemeris for 1834, éd. 1833; voir en partic. p. XVI et le rapport § 16; *M. Loewy*, Ephémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour l'an 1878 et suivants, publiées annuellement par le Bureau des longitudes jusqu'en 1904.

lunaire et les erreurs tabulaires de l'astre ne jouent presque plus de rôle dans le résultat.

La diffraction que produit un rayon lunaire, différente pour des observateurs et des instruments divers, ce qui porte préjudice au résultat, ne s'éliminerait pas complètement même si l'on s'assujettissait à l'observation des deux bords par des culminations de jour et de nuit.

*J. Franz*²¹⁹), qui avait pour précurseurs *J. H. Mädler*, *M. L. G. Wichmann* et *H. Schlüter*, conseilla d'observer, au lieu des bords, le cratère Mösting A, qui est près du centre de la Lune, et il publia, dans le „Berliner astronomischer Jahrbuch“, des éphémérides facilitant la réduction. *A. Alessio*²²⁰) revint sur ce sujet et fit lui-même des essais.

Les culminations lunaires ont été beaucoup utilisées par *G. E. Fleuriais*²²¹) pour la détermination des méridiens fondamentaux en Amérique, en Asie et en Australie, de 1867 à 1870; les rapports figurent dans la *Connaissance des Temps* pour 1870, 1871, 1872, 1873 et 1874.

*A. D. Pio*²²²) chercha aussi à rendre les culminations lunaires abordables pour les instruments à miroir, le plus souvent employés en voyage; il modifie la méthode de manière à ce que l'on prenne des hauteurs correspondantes de la lune et déduise ensuite l'heure locale de la position la plus haute. Déjà et beaucoup plus tôt, *A. Mackay*²²³) exprimait la même idée, qu'il estimait particulièrement profitable pour la navigation. **E. B. H. Wade*²²⁴) a employé, en Égypte la méthode suivante: une lunette horizontale de deux pouces $\frac{1}{2}$ est mobile autour de son axe optique; devant l'objectif se trouvent deux miroirs inclinés de 45° par rapport à celui-ci, chacun agissant sur une moitié de l'objectif. Sur un de ces miroirs, l'image de l'étoile est réfléchiée par un troisième miroir. En observant des coïncidences d'images on peut déterminer l'instant où la lune est à égale distance d'une étoile précédente et d'une étoile suivante; il n'y a aucune lecture de cercle à effectuer.*

218) *F. B. G. Nicolai*, *Astron. Nachr* (Altona) 1 (1823), col. 7; 2 (1824), col. 17; *F. Baily*, *Memoirs astron. Soc. London* 2 (1826), p. 1.

219) *Astron. Nachr.* (Kiel) 136 (1894), col. 1.

220) *Determinazione speditiva della longitudine con osservazioni del cratere lunare Mösting A* [*Rivista marittima* 36 c (1902) suppl.].

221) *Nouvelle réduction de A. Auwers*, *Astron. Nachr.* (Kiel) 108 (1884), col. 313.

222) *Monthly Notices astron. Soc.* 59 (1898/9), p. 513.

223) *The theory and practice of finding the longitude at sea or land*, (3^e éd.) 2, Londres 1810, p. 214.

224) **A field method of determ. longitude by observations of the moon* [*Egyptian Survey Department, paper n° 5*]; voir aussi *Nature* (Londres) 78 (1908), p. 152.*

Une généralisation, de très peu de valeur pratique, des culminations lunaires est celle des azimuts de la lune²²⁵), dont le cas le plus favorable réside précisément dans celui des culminations. L'observation est alors plus difficile et l'on se trouve dans l'obligation de calculer la parallaxe. Il ne peut être d'ailleurs sérieusement question des azimuts que sous les hautes latitudes. Par contre, on peut recommander la combinaison d'un passage de la lune avec une détermination de temps effectuée dans le vertical de la polaire [voir n° 9].

32. Hauteurs de la Lune. *P. Bouguer*²²⁶) recommanda l'observation des hauteurs lunaires pour la détermination des longitudes; en effet, après la réduction de la hauteur au centre de la terre et en tenant compte du faible mouvement en déclinaison, on peut déduire l'angle horaire du triangle sphérique lune-zénith-pôle, et de cette façon, à l'aide du temps sidéral local, conclure la longitude du lieu d'observation²²⁷).

Pour se débarrasser des erreurs systématiques, on doit observer également un couple d'étoiles ayant presque même hauteur et même azimut que notre satellite. Déjà longtemps avant *P. Bouguer*, *F. de Herrera*²²⁸) avait essayé, mais en vain, de déduire à l'aide de hauteurs lunaires, les longitudes se rapportant au dernier voyage de Magellan. Les hauteurs lunaires, sous de faibles latitudes, pourraient rivaliser en précision avec des distances lunaires: elles n'ont d'ailleurs pas été employées uniquement sur mer, et certains voyageurs les ont utilisées dans leurs explorations géographiques, par exemple *A. d'Abbadie*²²⁹), en Éthiopie, *H. Wissmann*²³⁰) lors de sa traversée de l'Afrique et *F. Hayn*²³¹) dans la mer du sud. Ce dernier adopta l'idée émise, par *F. Kaiser*^{231a}) et développée par *J. A. C. Ondemans*^{231b}) consistant à noter les heures de passage de la lune et d'une ou plusieurs étoiles voisines par le même fil horizontal du théodolite. Appliquée avec succès par *S. H. de Lange*

225) *Voir par ex.: *W. Chauvenet*, Spherical astron.⁶), (5^e éd.) 1, p. 371; *C. Éd. Caspari*, Astron. pratique⁴) 2, p. 165.*

226) Nouveau traité de navigation, Paris 1753.

227) *Voir par ex.: *W. Chauvenet*, Spherical astron.⁶), (5^e éd.) 1, p. 382.*

228) Cf. *A. von Humboldt*, Examen critique de l'histoire de la géographie du Nouveau Continent et des progrès de l'astronomie nautique aux 15^{ème} et 16^{ème} siècles 1, Paris 1836, p. 301/2.

229) Résumé géodésique des positions déterminées en Éthiopie, Leipzig 1859.

230) Unter deutscher Flagge quer durch Afrika von West nach Ost, Berlin 1889/90.

231) Astron. Ortsbestimmungen¹⁰⁸).

231a) *De Sterrekundige plaatsbepaling Indisch. Archipel, Amsterdam 1851.*

231b) *Verslagen Meded. Akad. Wetensch. [Amsterdam], Afdeeling Natuurk.

(1) 6 (1857), p. 25 [1856].*

et *G. H. de Lange*, elle a été pratiquée à la fin du siècle dernier par de nombreux voyageurs, surtout en Afrique²³²). Elle est susceptible d'une grande précision.*

Une méthode proposée par *R. Radau*²³³), reposant sur la combinaison de distances zénithales et de différences d'azimuts de la lune et d'une étoile voisine, en vue d'obtenir le temps du méridien initial, n'a jamais été appliquée. *F. de Herrera*²³⁴) voulait déjà employer la déclinaison de la lune pour la détermination des longitudes, idée que *J. Olmanns*²³⁵) expérimenta et tenait pour réalisable dans des conditions favorables. Beaucoup plus tard, *W. Spottiswoode*²³⁶) se préoccupa de la question; cet astronome estime que l'on doit observer la hauteur maxima de la lune, en conclure la déclinaison puis en déduire la longitude en effectuant une comparaison avec l'éphéméride.

*Tout récemment *M. V. Pëvcov*²³⁷), reprenant la méthode de *F. Hayn*²³¹), a montré à nouveau qu'il était possible de s'affranchir de beaucoup d'erreurs systématiques, en faisant usage d'observations de la lune, à des hauteurs égales concurremment avec celles d'étoiles, dans le voisinage du premier vertical.*

33. Distances lunaires. Une méthode, au perfectionnement de laquelle de nombreux savants ont travaillé, a joui sur mer, pendant fort longtemps, d'une faveur presque exclusive: nous voulons parler de la méthode dite des distances lunaires; elle consiste à évaluer l'arc qui sépare la Lune soit d'une étoile convenablement placée, soit même du Soleil. Avant l'adoption des culminations lunaires, cette méthode offrait l'avantage de n'être liée à aucun instant déterminé, mais d'être toujours utilisable, pourvu que la Lune soit sur l'horizon du lieu d'observation. Relativement aux hauteurs lunaires, les distances lunaires ont en outre l'avantage qu'elles sont indépendantes des anomalies de l'horizon dont on n'est guère capable de s'affranchir complètement. Même dans les pénibles voyages d'exploration à terre, elles disputent le premier rang

232) **C. Éd. Caspari*, *Astron. pratique*⁴) 2, p. 155; *W. Chauvenet* [*Spherical astron.*], (5^e éd.) 1, p. 386] donne un exposé du calcul.*

233) *Astron. Nachr.* (Altona) 54 (1861), col. 345.

234) Cf. *A. von Humboldt*, *Examen critique*²²⁸) 1, p. 301/2.

235) *Astron. Jahrb.* 1824, éd. Berlin 1821, p. 181..

236) *Memoirs astron. Soc. London* 29 (1861), p. 343.

237) **Ob Opredelenii geografičeskoj dolgoty iz nabljudenij lunny na ravných vysotach so zvézdami bliz pervago vertikala* (sur la détermination de la longitude géographique à l'aide d'observations de la lune faites à des hauteurs égales avec des étoiles au voisinage du premier vertical [*Izvěstija russkago astronomičeskago obmestva* (publication de la société astronomique russe) 11 (1905/6), p. 118 [1901]].*

aux hauteurs lunaires, car ces dernières nécessitent pour une mesure précise un appareil installé solidement, avec un instrument à réflexion et un bain de mercure. Les hauteurs lunaires sont difficiles à utiliser, parce qu'on n'est pas capable [exception faite pour la pleine lune] de réaliser aucun contact de bord; au contraire, les distances lunaires s'effectuent avec sécurité au moyen d'un sextant à miroir ou d'un cercle à prisme, avec adjonction si possible d'un pied commode installé d'ailleurs sans grande précaution. *De Cañete del Piñar*²³⁸) s'est occupé avec beaucoup de soin de la pratique de la mesure des distances lunaires.

On raconte souvent que *Amerigo Vespucci*²³⁹) fit effectuer le 23 août 1499, à la côte du Vénézuëla, la première détermination de longitude à l'aide d'une distance lunaire; le fait est cependant inexact. Les traces d'une méthode de calcul proprement dite se trouvent seulement chez *F. A. Pigafetta*²⁴⁰) et *J. Werner*²⁴¹).

Le manque d'instruments appropriés et d'éphémérides convenables ne permettait cependant pas encore un emploi à la mer. Enfin *T. Mayer*²⁴²) construisit ses tables lunaires et *J. Harrison*¹⁹⁹), à peu près à la même époque, par la construction des chronomètres perfectionnés, réduisit l'importance des distances lunaires à celle d'un contrôle des pendules, sauf le cas de nécessité.

Sans compter que l'observation d'une distance lunaire, avec un instrument à réflexion, n'est pas chose facile si l'on n'en a pas une grande expérience. En outre la réduction par des procédés rigoureux revêt une forme très incommode. Cette réduction se subdivise en deux parties: on doit d'abord réduire au centre de la terre la distance mesurée à la surface et ensuite, avec cette distance réduite, conclure le temps correspondant du méridien initial de l'éphéméride.

La première partie est de beaucoup la plus ennuyeuse. Avant de commencer le calcul on se procure les distances zénithales de la Lune et de l'astre, soit par une observation comme sur mer, soit par un calcul. La solution de deux triangles sphériques conduit d'abord à la distance corrigée de la réfraction. De ces triangles, le premier a comme

238) De como se han de observar las distancias lunares, Madrid 1904; *Revista general de marina* [Madrid] 52 (1903), p. 635, 697.

239) Comparer [*F. X. von Zach*] (anonyme), *Monatliche Correspondenz* 22 (1810), p. 530.

240) *F. A. Pigafetta* (1491/1534) participa au voyage de Magellan autour du monde et rédigea des notes de voyage; consulter: *Stanley of Alderley*, *The first voyage round the world by Magellan* [Works issued by the Hakluyt Society 52, Londres 1874]; *R. Wolf*, *Handbuch der Astron.*¹⁷⁹) 2, p. 151.

éléments le zénith géographique et les distances zénithales des objets; le second a le même zénith et les distances zénithales corrigées de la réfraction. Alors on transforme de façon à obtenir des distances zénithales géocentriques. On trouve enfin la distance lunaire géocentrique cherchée, par le calcul de deux triangles sphériques qui ont le zénith géocentrique commun; les côtés issus de ce sommet sont des distances zénithales corrigées de la réfraction et de la parallaxe.

Il est évident que, sur mer, on ne peut songer à effectuer un tel calcul qui doit être fait avec au moins 6 décimales; la première simplification consista à négliger l'aplatissement terrestre; de la sorte on avait seulement à considérer deux triangles dont un sommet (zénith géographique) et l'angle correspondant (différence d'azimut de la Lune et de l'étoile) étaient communs. Beaucoup d'auteurs se sont occupés des méthodes à employer pour calculer la distance lunaire géocentrique en partant de ces deux triangles; certains cherchèrent la solution rigoureuse à l'aide de calculs abrégés, d'autres énoncèrent des méthodes indirectes qui apportaient une correction à la distance observée. C'est ce dernier point de vue qui de nos jours sur mer l'a emporté; cette façon de procéder permet de réaliser le degré d'approximation que l'on désire, et les termes individuels peuvent être calculés d'une façon assez exacte avec quatre décimales. Dans ce qui suit, on se contente de signaler les méthodes les plus essentielles, celles dont les autres ne sont que des modifications peu importantes. D'ailleurs *G. D. E. Weyer*²⁴¹) a publié une étude historique complète de cette question.

Une des plus anciennes et plus courtes formules directes est due à *R. Dunthorne*²⁴²), qui calcula une table relative à un facteur dépendant des hauteurs des deux astres. Sur la formule de *R. Dunthorne* reposent toutes les autres.

*A. Mackay*²⁴³) évita le changement de signe de l'arc sinus, tandis que *A. J. Lexell*²⁴⁴) sut rendre la formule plus abordable pour le calcul logarithmique. Le développement donné par *J. Ch. Borda*²⁴⁵) jouit longtemps d'un accueil très favorable: *J. G. F. Bohmenberger*, entre

241) *G. D. E. Weyer*, *Annalen der Hydrographie* 9 (1881), p. 177/94; 10 (1882), p. 21/7; 18 (1890), p. 471/88.

242) *The practical astronomy of the moon, or: new tables of the moon's motions*, Londres et Cambridge 1739.

243) *Theory and practice*²²³), (3^e éd.) 1, Londres 1810, p. 214.

244) *Observationes circa methodum inveniendi longitudinem* [*Acta Acad. Petrop.* 4 (1780) pars posterior, éd. 1784, p. 350].

245) *De Verdun de la Crenne*, *J. Ch. Borda*, *A. G. Pingré*, *Voyage fait par ordre du roi en 1771 et 1772*, Paris 1778, p. 367; cf. *Hist. Acad. sc. Paris* 1773, éd. 1777, M. p. 258.

autres, lui accorde la préférence. La méthode de *W. L. Krafft*²⁴⁶) est facilitée par une table calculée par *J. H. van Swinden*²⁴⁷); elle évite presque entièrement le calcul logarithmique, et suppose seulement que l'on dispose d'une table des arcs sinus naturels. *J. Mendoza y Rios*²⁴⁸) a donné une table volumineuse peu transformée, pour la méthode de *W. L. Krafft*. On est redevable à *C. Bremiker*²⁴⁹) d'un procédé très avantageux dont l'idée se trouve chez *A. J. Lexell*²⁴⁴); la formule de *C. Bremiker* fut légèrement transformée par *W. Ligowski*²⁵⁰), et *J. M. Simonov*²⁵¹) modifia l'équation fondamentale de façon que certains petits termes complémentaires puissent s'obtenir à l'aide d'un calcul à quatre décimales, ainsi que l'avait déjà fait *D. Huber*²⁵²). Du reste, *W. Ligowski*²⁵³) reprit cette idée.

Ces dernières méthodes forment le passage aux méthodes indirectes, mais avant d'énumérer celles-ci il convient de citer la solution rigoureuse et seule complète que *F. W. Bessel*²⁵⁴) apporta au problème. Il renversa la question: partant d'une distance géocentrique vraie, il la réduisit à la distance locale et alors, de la différence avec l'observation il put déduire un moyen d'améliorer la valeur supposée pour la longitude. Durant quelques années, de 1835 à 1838, *H. C. Schumacher*²⁵⁵) fit paraître des éphémérides spéciales pour les distances lunaires, lorsqu'on calcule par la méthode de *F. W. Bessel*.

Dans le cas où l'on subit des perturbations chronométriques, sur

246) Méthode à la portée des navigateurs [Nova Acta Acad. Petrop. 7 (1789), éd. 1793, p. 370 [1791]].

247) *J. H. van Swinden*, Verhandeling over het bepaalen der lengte op zee, Amsterdam 1796, p. 77.

248) Memoria sobre algunos metodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares, Madrid 1795; Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'astronomie nautique [Philos. Trans. London 87 (1797), p. 43].

249) Astron. Nachr. (Altona) 30 (1850), col. 311.

250) Archiv Math. Phys. (1) 51 (1870), p. 374; (1) 53 (1871), p. 103, 498.

251) Cf. *R. W. Rothmann*, History of astronomy, Londres 1832, p. 227.

252) Versuch über das astronomisch-nautische Problem betreffend die Reduktion der scheinbaren Mondstanzanzen auf wahre [Monatliche Correspondenz 12 (1805), p. 309].

253) Archiv Math. Phys. (1) 40 (1863), p. 250.

254) Neue Berechnungsart für die Methode der Entfernung des Mondes von andern Himmelskörpern [Astron. Nachr. (Altona) 10 (1833), col. 17]; Astronomische Untersuchungen 2, Königsberg 1842, p. 266; Abhandlungen, publ. par *R. Engelmann* 3, Leipzig 1876, p. 434.

255) Distances of the sun and four planets Venus, Mars, Jupiter and Saturn from the moon calculated according to Mr. Bessel's method, Copenhagen 1834/7.

mer principalement, on a recours, pour la réduction des distances lunaires, à l'une des nombreuses méthodes indirectes qui toutes présentent entre elles beaucoup d'analogie. *N. L. de Lacaille*²⁵⁶) a pris seulement les deux premiers termes du développement suivant la réfraction et la parallaxe. *N. Maskelyne*²⁵⁷), *J. Lyons*²⁵⁸), *A. J. Lexell*²⁵⁹), *N. Bowditch*²⁶⁰) ont eu égard à un terme correctif qui dépend du carré de la réfraction et de la parallaxe.

Une formule qui jouit encore d'une assez grande faveur est celle due à *G. Witchell*²⁶¹), qui utilise un schéma de calcul et une interpolation géométrique simple des grandeurs qui se présentent; une méthode analogue fut d'ailleurs développée par *J. J. Åstrand*²⁶²).

*A. M. Legendre*²⁶³) se contente de deux termes, pendant qu'il prouve que l'on tient complètement compte des termes jusqu'au troisième ordre inclusivement, si l'on calcule les angles à la Lune et à l'étoile, non par leurs positions apparentes, mais en introduisant les moyennes entre les positions apparentes et vraies (géocentriques).

*J.-B. J. Delambre*²⁶⁴) indiqua aussi cette voie; plus tard, à l'instigation de *W. Döllén*, elle fut poussée plus loin par *Ludwig Schwarz*²⁶⁵). La méthode de Delambre trouva également un défenseur en *C. Rümker*²⁶⁶), qui conçut une table pour la quantité *N* de la méthode de Delambre. Indépendamment et par une voie analytique, *G. B. Airy*²⁶⁷) parvint à une méthode qui ne diffère pas essentiellement de celle de *A. M. Legendre*.

C'est des calculateurs anglais que vint le projet de mettre la correction totale de distance en tables numériques ou graphiques, et de dispenser ainsi le navigateur d'effectuer chaque calcul. Une table

256) Hist. Acad. sc. Paris 1759, éd. 1765, M., p. 63.

257) Philos. Trans. London 54 (1764), p. 271.

258) Tables requisite to be used with the astronomical and nautical ephemeris, Londres 1766, p. 44.

259) Acta Acad. Petrop. 4 (1780), pars posterior, éd. 1784, p. 348.

260) The improved practical navigator, revu par *Th. Kirby*, Londres 1802; The american practical navigator, revu par *P. H. Cooper* et *G. W. Logan*, Washington 1904.

261) Nautical Almanac and astronomical ephemeris for 1772, éd. 1770.

262) Monthly Notices astron. Soc. 39 (1878/9), p. 425.

263) Mém. Institut national sc. et arts, sc. math. phys. 6, Paris 1806, p. 30.

264) Astronomie théorique et pratique 3, Paris 1814, p. 625.

265) Über die Reduktion der scheinbaren und wahren Mondstanzzen aufeinander, Dorpat 1865.

266) Längenbestimmung durch den Mond, Hambourg 1849; Vorschlag zur genaueren Berechnung der Refraktion bei der Längenbestimmung durch Mondstanzzen, Hambourg 1835.

267) A new method of clearing the lunar distance, Londres 1881.

numérique de cette catégorie, calculée par *G. Witchell*, *J. Lyons*, *T. Parkinson* et *S. Williams*, fut éditée par *A. Shepherd*²⁶⁸). *G. Margetts*²⁶⁹) ne publia une table graphique qu'en 1794. Ces deux travaux n'eurent pas d'utilité dans la pratique, mais ils donnèrent l'impulsion à une méthode plus courte de calcul des distances lunaires, méthode qu'on a coutume de rapprocher du nom de *James M. Elford*²⁷⁰), et qui est considérée aujourd'hui comme la meilleure.

Voici en quoi consiste cette méthode (dite méthode Nègre): par un calcul simple, très suffisamment exact avec quatre décimales, on obtient le terme principal de la parallaxe lunaire, pendant que les corrections relatives à la réfraction, à la parallaxe solaire et aux termes du second ordre se trouvent dans une table à triple entrée pour laquelle on utilise la valeur constante d'une parallaxe lunaire moyenne: les trois arguments sont la distance et les hauteurs de la Lune et de l'étoile, mais au lieu de cela on distingue bien aussi entre les plus grandes et plus petites hauteurs. Chaque recueil moderne de tables nautiques contient une telle table de la méthode de *J. M. Elford*.

Quand on a effectué la réduction de la distance lunaire au centre de la terre, dans l'hypothèse d'une forme sphérique, on doit encore évaluer ultérieurement la correction due à l'aplatissement de notre planète, correction qui atteint 15'' au maximum. Il existe pour cela deux procédés: l'un, indiqué par *J.-B. J. Delambre*²⁷¹) exige la connaissance approchée de l'azimut de la Lune et procède en passant par la parallaxe latérale de la Lune; aux tables et éphémérides nautiques annuelles sont jointes des tables permettant d'éviter ce calcul. *J. Ch. Borda*²⁷²) enseigne une autre méthode facile: l'azimut lunaire disparaît et il s'introduit seulement la déclinaison de l'étoile et sa distance.

268) Tables for correcting the apparent distance of the moon and a star, Published by order of the commissioners of longitude, Cambridge 1772.

269) Longitude tables for correcting the effect of parallax and refraction on the observed distance, Londres 1794. Des tables analogues ont été éditées par *J. W. Norie*, A set of lunar tables for correcting the apparent distance, Londres 1820.

270) Second edition of longitude tables, Charleston 1818; reproduit dans *F. X. von Zach*, Correspondance astronomique [Gênes] 6 (1822), p. 209/32. Voir *G. D. E. Weyer*, Annalen der Hydrographie 9 (1881), p. 177/94; 10 (1882), p. 21/7; *J. F. Encke*, Berliner astron. Jahrb. für 1842, éd. 1840, p. 307; *F. X. von Zach*, Memoirs astron. Soc. London 5 (1833), p. 245.

271) Astronomie théorique et pratique 3, Paris 1814, p. 636.

272) Description et usage du cercle de réflexion, Paris 1787, (4^e éd.) Paris 1816, p. 82.

Entre autres, *J. G. F. Bohnenberger*^{272*}, *F. W. Bessel*²⁵⁴, *G. B. Airy*²⁶⁷, *W. Chauvenet*²⁷³) ont suivi cette méthode; elle n'est cependant pas entrée dans la pratique nautique, bien que les calculs puissent être facilités par l'emploi d'une petite table à trois arguments: distance, déclinaison de la Lune et de l'étoile.

Avant de commencer le travail de réduction, il faut appliquer quelques corrections aux distances lunaires fournies immédiatement par l'observation. D'abord, on observe les distances au bord lunaire et non au centre: il faut donc introduire le rayon de la Lune et, si le Soleil est l'autre astre, aussi son rayon. Les rayons sont déformés par l'effet de la réfraction; la correction qui en résulte peut être déduite d'une table spéciale que renferment toutes les éphémérides nautiques. En outre le rayon lunaire local nous apparaît plus grand que celui fourni par l'éphéméride et qui est relatif au centre de la terre; cette correction parallactique atteint au maximum 18''²⁷⁴). On considère, d'ailleurs, la plus courte distance de l'astre et du disque lunaire observé qui n'est pas rigoureusement circulaire par suite de la réfraction. Cependant selon *F. W. Bessel*²⁵⁴) l'écart est négligeable en comparaison de l'inexactitude provenant du fait que, dans le calcul, on admet généralement l'hypothèse que l'on a mesuré le point du disque situé exactement sur la ligne qui joint les centres des astres. Une erreur dans la mesure affecte au même degré la distance géocentrique; les hauteurs absolues ne jouent donc pas un grand rôle; bien plus importante est l'exactitude de la différence conclue entre les hauteurs vraies et apparentes.

En vue de faciliter la recherche du temps correspondant à la distance lunaire géocentrique, les éphémérides donnent, de 3^h en 3^h, les distances de la Lune au Soleil, aux étoiles brillantes et aux planètes; elles fournissent également des données qui rendent commode l'interpolation à l'aide des différences premières et secondes. Des calculs de prédiction de cette sorte paraissent déjà dans le *Nautical Almanac*, depuis sa fondation en 1767, pour les neuf étoiles brillantes: α Bélier, α Taureau, β Gémeaux, α Lion, α Vierge, α Scorpion, α Aigle, α Poisson austral et α Pégase. La *Connaissance des Temps* suivit en 1774; par

272*) *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, vorzüglich mittelst des Spiegelsextanten*, Göttingue 1795; (2^e éd.) revue par *G. A. Jahn*, Göttingue 1852.

273) On a new method of correcting lunar distances for parallax and refraction [*The astronomical Journal* 2 (1852), p. 24].

274) Consulter, à ce sujet, les tableaux des tables d'astronomie nautique et éphémérides qui figurent dans les renseignements bibliographiques placés à la fin de ce volume VII₁ de l'Encyclopédie.

contre, le *Berliner astronomischer Jahrbuch* n'a fourni des éphémérides de distances lunaires que pendant la courte période de 1844 à 1851. Sur la proposition de *Lovenörn*, *H. C. Schumacher*²⁷⁵) fit paraître, à partir de 1820, des éphémérides spéciales de distances lunaires pour les planètes Vénus, Mars, Jupiter, Saturne; ces éphémérides se retrouvaient régulièrement dans le *Nautical Almanac* et la *Connaissance des Temps*, de telle sorte que la publication de Schumacher prit fin en 1838. Parmi les étoiles choisies, qui auraient dû être situées le plus près possible de l'orbite apparente de la Lune, quelques-unes sont très défavorables (par exemple α Aigle, α Poissons, α Pégase qui sont distantes de l'écliptique de 20° à 30°); il arrive ainsi que, dans les cas extrêmes, le facteur avec lequel une erreur commise sur la distance se répercute sur la longitude, atteint 45 au lieu de 27, sa valeur moyenne. Pour se libérer des erreurs constantes qui pourraient être imputées à l'instrument ou à l'observateur, il convient de prendre deux étoiles l'une à l'est et l'autre à l'ouest de la Lune, autant que possible à des distances égales de cet astre.

Dans les voyages d'exploration à terre, les distances lunaires ne contribuent pas souvent à la détermination des longitudes. *Carsten Niebuhr*²⁷⁶), instruit et préparé par *Tobie Mayer*, les utilisa avec profit lors de son voyage en Arabie de 1762 à 1767, et plus d'un siècle plus tard, *W. Jordan*²⁷⁷) mesura des distances lunaires pour la longitude pendant l'expédition de *G. Rohlf* dans les déserts de Lybie, en 1873/4; *W. Jordan* arrive à cette conclusion que les distances lunaires ont peu contribué à l'exactitude à laquelle on est finalement parvenu.

Étant donné l'état d'abandon dans lequel sont tombées les distances lunaires, en astronomie nautique, la *Connaissance des Temps* a cessé, depuis 1905, de publier les données relatives à leur calcul de prédiction; cet exemple a d'ailleurs été suivi par le *Nautical Almanac*, en 1907. *A l'avenir, le navigateur devra donc recourir à un calcul qui lui permet de se passer de la distance calculée d'avance dans les éphémérides, en s'appuyant directement sur les coordonnées tabulaires de la lune.*

275) Ephemeris of the distances of the four planets Venus etc. from the moon for 1822/8, Copenhagen 1820/36.

276) Les résultats de ses observations sont publiés: *Monatliche Correspondenz* 5 (1802), p. 570/5; 6 (1802), p. 28/34, 160/6, 542/8; 7 (1803), p. 69/74, 333/43.

277) *Phys. Geographie und Meteorologie der libyschen Wüste*, Cassel 1876; *Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung*, Berlin 1885.

277*) *Cf. *C. Éd. Caspari*, Note sur une nouvelle méthode de calcul par les distances lunaires [*Annales hydrographiques* (2) 24 (1902), p. 130/7].*

Avant de terminer ce numéro, il faut encore mentionner un cas spécial intéressant que C. Rümker²⁷⁸) observa d'abord, puis que F. W. Bessel²⁶⁴) étudia théoriquement.

Si l'astre dont on mesure la distance est proche de son coucher, alors que la lune reste haute, il peut arriver que les effets de même signe provenant du mouvement propre lunaire et de la réfraction de l'étoile deviennent égaux à un moment donné, de telle sorte que la distance locale apparente passe lentement par un maximum. Il est alors possible d'obtenir par ce procédé une détermination de longitude aussi bonne que celles effectuées dans des conditions normales; et même l'observation seule d'un tel maximum fournit une longitude sans l'assistance d'une détermination de temps. Une discussion approfondie de ce problème a été faite par G. D. E. Weyer²⁷⁹).

Comme chaque irrégularité du bord lunaire est déformée par le phénomène particulier de flexion et par celui d'irradiation, tous deux variables suivant les cas, il est à recommander, dans les déterminations précises de longitudes absolues affectuées à terre, de pointer, non le bord de la lune, mais un cratère convenablement choisi. Le cratère Platon, très régulier, permet l'observation avec une exactitude particulière, car, sur sa surface sombre, l'étoile peut être pointée avec une grande sécurité, même lorsqu'on fait usage de petites lunettes à sextants de valeur médiocre.

34. Occultations d'étoiles et éclipses de soleil. La lune, par l'effet de son mouvement propre, vient se placer successivement entre divers astres et l'œil d'un observateur situé sur la terre. Un tel phénomène s'appelle *occultation* s'il s'agit d'une étoile ou d'une planète; c'est une *éclipse de soleil*, totale, partielle ou annulaire, lorsque l'astre caché en totalité ou en partie est le soleil.

Au point de vue de la précision, le phénomène d'une occultation d'étoile est supérieur à celui d'une éclipse de soleil, surtout s'il s'agit de la disparition (*immersion*) ou de la réapparition (*émersion*) d'une étoile brillante au bord obscur de la lune. En outre, une telle observation peut être effectuée avec une simple longue-vue et comme le phénomène est net et instantané, il est possible d'atteindre une assez grande exactitude. Lorsqu'on observe au bord éclairé de la lune, il est nécessaire, pour obtenir de bons résultats, d'utiliser une grande lunette et de forts grossissements: sans cela, l'irradiation fait que les

278) Astron. Nachr. (Altona) 1 (1823), col. 77.

279) G. D. E. Weyer, Über das nautische Längenproblem [Annalen der Hydrographie 18 (1890), p. 471/88].

immersions sont notées trop tôt et les émerisions trop tard. Dans une éclipse de soleil, le premier contact extérieur mérite peu de confiance: l'instant est constamment noté trop tard. En ce qui concerne les occultations, les observateurs ont assez souvent mentionné cette particularité que la disparition ou la réapparition de l'étoile paraissait exiger quelques fractions de seconde, ce que l'on pourrait être tenté d'attribuer à l'existence d'une atmosphère lunaire. C'est cependant par suite d'un simple phénomène d'irradiation que l'étoile disparaît et reparaît presque toujours un peu à l'intérieur du disque apparent de notre satellite.

Les occultations occasionnées par la lune ne sont pas tautochrones; à cause de la proximité de notre satellite, les circonstances du phénomène varient d'un lieu terrestre à un autre; les heures d'immersion et d'émerision varient également. D'ailleurs les occultations, (comme les éclipses de soleil) ne se produisent que pour une portion déterminée de la terre. Les instants observés à diverses stations doivent donc, avant leur comparaison, être réduits à une phase bien déterminée du phénomène comme ils sont vus au centre de la terre; par exemple, on peut, en s'aidant des éléments fournis par les éphémérides, déduire, de l'heure notée, l'instant de la conjonction en longitude ou en ascension droite. Sous ce nom, on entend le moment où les deux corps célestes possèdent la même longitude ou ascension droite, pour le centre de la terre.

Par analogie avec ce qui concerne les distances lunaires, se présente la méthode de calcul suivante, dans l'énoncé de laquelle on pourra lire étoile ou planète, au lieu de soleil; le mot pôle se rapportera aussi à celui de l'écliptique ou de l'équateur: Du triangle sphérique pôle-lune-soleil, dont les côtés sont connus, on déduit l'angle au pôle c'est-à-dire la différence de longitude ou d'ascension droite locale apparente et l'on réduit au centre de la terre, à l'aide du déplacement parallactique. Ensuite, connaissant la vitesse relative en longitude ou ascension droite des deux corps célestes, on peut conclure, avec la différence des coordonnées au moment de l'observation, l'instant cherché de la conjonction. Pour la détermination de la longitude, cet instant est enfin comparé, ou bien avec l'époque de la conjonction du méridien initial fournie par l'éphéméride, ou, ce qui est meilleur, avec le temps de conjonction obtenu d'une manière analogue dans une autre station. Dans ce dernier cas, les erreurs des tables lunaires n'exercent qu'une faible influence et, si l'on combine des phases identiques (entrées seules ou sorties seules), les inexactitudes dans le rayon de l'astre n'altèrent pas notablement le résultat.

La méthode de *J. A. C. Oudemans*²⁸⁰) est également très simple: à l'aide de l'ascension droite de l'étoile, on cherche l'ascension droite de la lune et avec cette dernière donnée on déduit, dans l'éphéméride, le temps correspondant de Greenwich.

Le premier qui fut en possession d'une méthode correcte pour le calcul d'un phénomène d'occultation fut *J. Kepler*²⁸¹) qui, en utilisant l'éclipse de soleil du 7 mars 1598, chercha à déduire la différence de longitude entre Gratz et Uranibourg. On peut regarder comme avant-coureurs de cette méthode les conjonctions de la Lune et des planètes qu'utilisèrent *Christophe Coulomb*, *Amerigo Vespucci*, *F. A. Pigafetta*, *A. San Martino*²⁸²).

Le problème fut plus tard repris par beaucoup d'astronomes, entre autres *Chr. Wren*²⁸³), *J. Flamsteed*²⁸⁴), *N. L. de Lacaille*²⁸⁵), *Jacques Cassini*²⁸⁶), *A. Cagnoli*²⁸⁷), *J. H. Lambert*²⁸⁸), *M. J. J. Le Français de Lalande*²⁸⁹), *L. Euler*²⁹⁰), *J. L. Lagrange*²⁹¹).

Cependant *F. W. Bessel*²⁹²) le premier donna à cette question une nouvelle orientation.

Le problème fut étudié indépendamment par *P. A. Hansen*²⁹³) qui

280) *Astron. Nachr.* (Altona) 74 (1869), col. 168.

281) *Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*, Francfort s/M. 1604, p. 392 (chap. 11, problème 27); *Opera*, éd. *C. Frisch* 2, Francfort s/M. et Erlangen 1859, p. 372.

282) Cf. *A. von Humboldt*, *Examen critique de l'histoire de la géographie du Nouveau Continent et des progrès de l'astronomie nautique aux 15^{ème} et 16^{ème} siècles* 4, Paris 1837, p. 183.

283) *Chr. Wren* (1632/1723) n'a rien publié lui-même, mais il est cité par *J. Flamsteed*²⁸⁴) à ce sujet. Voir aussi *R. Wolf*, *Handbuch der Astron.*¹⁷⁹) 2, p. 292.

284) *The doctrine of the sphere*, Londres 1680, publ. dans *J. Moore*, *New system of mathematics*, Londres 1680/1.

285) *Calcul des projections* [*Hist. Acad. sc. Paris* 1744, M. p. 191].

286) *Méthode de déterminer les longitudes* [*Hist. Acad. sc. Paris* 1705, M. p. 194].

287) *Méthode pour calculer les longitudes géographiques*, Vérone 1789.

288) *Astron. Jahrb.* 1778, éd. Berlin 1775, p. 49.

289) *Nouvelle méthode pour calculer rigoureusement les éclipses de Soleil* [*Hist. Acad. sc. Paris* 1763, éd. 1766, M. p. 426].

290) *De eclipsibus solaribus* [*Acta Acad. Petrop.* 4 (1780) pars posterior, éd. 1784, p. 308 [1780]].

291) *Astron. Jahrb.* 1782, éd. Berlin 1779, p. 16; *Œuvres* 7, Paris 1877, p. 415.

292) *Analyse der Finsternisse*, publ. dans *F. W. Bessel*, *Astronomische Untersuchungen* 2, Königsberg 1842, p. 95; *Abhandlungen*, publ. par *R. Engelmann* 3, Leipzig 1876, p. 369.

293) *Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen* [*Abh. Ges. Lpz.* 4 (1859), mém. n° 4, p. 303 [1858]].

porta spécialement son attention sur la représentation des rapports de visibilité sur la terre.

*A. R. Clarke*²⁹⁴), *W. Klinkerfues*²⁹⁵), *Fr. Küstner*²⁹⁶) trouvèrent des simplifications aux formules données par *F. W. Bessel* pour les occultations. *N. Garbich*²⁹⁷) croit avoir découvert des fautes dans les développements de *C. F. Gauss*.

Aujourd'hui on emploie généralement les formules de Bessel pour le calcul et la prédiction des éclipses et occultations; *J. F. Encke*²⁹⁸) a écrit à ce sujet des instructions très nettes qui s'appuient sur le travail de *F. W. Bessel*.

*H. Battermann*²⁹⁹) a publié des tables commodes de parallaxe lunaire; elles sont spécialement destinées à Berlin, mais elles permettent aussi un passage facile à d'autres latitudes. D'autres tables également pratiques sont dues à *G. Bigourdan*³⁰⁰). *A. Cayley*³⁰¹) a donné le moyen d'effectuer graphiquement la prédiction complète d'une éclipse de soleil et de représenter d'une façon claire les conditions de visibilité sur la terre. *Temple Chevallier*³⁰²) examina l'influence que la différence de parallaxe exerce sur les temps d'immersion et d'émergence de l'étoile occultée. *C. Stechert*³⁰³) s'est efforcé de réaliser une abrégé

294) *Memoirs astron. Soc. London* 27 (1859), p. 97.

295) *W. Klinkerfues* dans *H. T. W. Seeling*, *Berechnung der Tafelfehler des Mondes aus der Plejadenbedeckung von 1858*, Februar 20 [*Astron. Nachr.* (Altona) 52 (1860), col. 289 et suiv.].

296) *Bestimmungen des Monddurchmessers aus neun Plejadenbedeckungen* [*Nova Acta Acad. Leop. (Halle)* 41 (1879), p. 253/364]; Thèse Strasbourg 1879, éd. Halle 1880; *J. A. Grunert*, *Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen* [*Denkschr. Akad. Wien* 8 I (1854), p. 133]; *J. L. Gruy*, *Les formules écliptiques simplifiées* [*Bull. astron.* 9 (1892), p. 233, 286]; *C. Rümker*, *Über die Berechnung der Sonnenfinsternisse*, Hambourg 1837; *R. Schram*, *Beitrag zur Hansen'schen Theorie der Finsternisse* [*Sitzgsb. Akad. Wien* 92 II (1885), p. 1233/47].

297) *Analytische Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse sowie aller andern Occultationen*, Trieste 1871.

298) *Berliner astron. Jahrb. für 1830*, éd. 1828, p. 253. Cf. par ex. *W. Chauvenet*, *Spherical astron.*⁶), (5^e éd.) 1, p. 436.

299) *Astron. Nachr. (Kiel)* 144 (1897), col. 1.

300) *Ann. Observ. Paris, Mémoires* 23 (1902), mém. n° 5, p. 1.

301) *Memoirs astron. Soc. London* 39 (1871), p. 1/17; *Papers* 7, Cambridge 1894, p. 479/92.

302) *Memoirs astron. Soc. London* 19 (1851), p. 231.

303) *Tafeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen* [Aus dem Archiv der deutschen Seewarte (Hambourg) 19 (1896), mém. n° 3]; *Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwertung zur Längenbestimmung* [Aus dem Archiv der deutschen Seewarte (Hambourg) 22 (1899), mém. n° 1].

viation plus considérable de la méthode de calcul, en appuyant sur des tables volumineuses aussi bien le calcul préliminaire du phénomène que celui conduisant à la connaissance de la longitude; cette façon de procéder est en particulier recommandable lorsqu'il s'agit d'utiliser les occultations sur mer ou sur les côtes de longitude mal connue, surtout dans les mers du sud. Peu de temps auparavant, L. Cruls³⁰⁴) avait publié des tables étendues reposant également sur l'idée de F. W. Bessel; L. Cruls laisse une partie du calcul à exécuter graphiquement. Une autre méthode proposée par W. Rigge³⁰⁵) est purement graphique. C. Berry³⁰⁶) a publié une théorie des occultations en ayant égard tout particulièrement aux applications avantageuses pour la nautique.

J. Peters³⁰⁷) discuta la valeur du rayon lunaire employée pour le calcul des éclipses de soleil et la trouva de 1",4 plus faible que celle conclue des occultations d'étoiles.

L'importance des occultations d'étoiles et des éclipses de Soleil était encore très grande, dans le premier tiers du 19^{ième} siècle, en ce qui concernait les déterminations de longitude: en particulier J. F. Wurm et F. Triesnecker³⁰⁸) déduisirent de cette façon les différences de longitude des principales stations du globe.

De nos jours ces phénomènes sont importants à d'autres points de vue: les occultations d'étoiles fournissent des données utiles pour la connaissance de l'orbite lunaire, du rayon de la lune, des parallaxes de la lune et du soleil³⁰⁹); les éclipses de soleil instruisent sur la physique de l'atmosphère solaire.

Tandis qu'une occultation stellaire présente seulement deux phases, immersion et émergence, on peut, dans une éclipse de Soleil, suivre le cours entier de la pénétration du disque sombre de la Lune sur le

304) Méthode graphique pour la détermination des heures approchées des éclipses du soleil et des occultations, Rio de Janeiro 1894.

305) Astron. Nachr. (Kiel) 158 (1902), col. 274.

306) Théorie complète des occultations, Paris 1880.

307) Veröffentlichungen des astronomischen Rechen-Institutes Berlin, 20 (1902), p. 135.

308) J. F. Wurm et F. Triesnecker publièrent de nombreuses réductions dans les journaux: Monatliche Correspondenz, Astronomische Nachrichten, Allgemeine Geographische Ephemeriden (publ. par F. X. von Zach et autres, Weimar 1798/1816). Cf. J. F. Wurm, Praktische Anleitung zur Parallaxen-Rechnung, Tubingue 1804.

309) Voir, par ex. H. Battermann, Bestimmung der Mondlänge, des Mondhalbmessers und der Sonnenparallaxe aus Sternbedeckungen [Beobachtungsergebnisse der Sternwarte zu Berlin 11 (1902)].

disque solaire, et par conséquent obtenir un grand nombre de données permettant de déduire l'instant de la conjonction.

Il est avantageux, durant une éclipse de soleil, de mesurer, avec un micromètre à double image (héliomètre), la distance des pointes de la corne. *P. A. Hansen*³⁰⁹) a développé les calculs relatifs à cette méthode. Moins recommandable est le procédé qui consiste à déterminer, à l'aide d'un réfracteur, les différences d'ascension droite et de déclinaison des pointes des cornes: le travail se complique alors notablement et l'on ne gagne rien en précision.

La méthode des occultations d'étoiles, assez compliquée au point de vue des calculs, a cependant sur les autres observations de la lune, un grand avantage: l'erreur commise sur l'évaluation de l'heure du phénomène n'est pas multipliée, dans le résultat, par un facteur de beaucoup supérieur à l'unité, ce qui n'a pas lieu dans les autres méthodes.

L'exactitude d'une longitude déduite d'une occultation ne correspond pas néanmoins à la précision avec laquelle on est en état de noter la disparition ou la réapparition instantanée: la cause provient des inégalités du bord lunaire occasionnées par les monts et les vallées; des monts isolés du bord dépassent jusqu'à 4" le contour normal du disque circulaire et l'erreur résultante sur la longitude atteint 8".

L'expérience semble montrer³¹⁰) qu'une occultation est susceptible d'une incertitude moyenne de $\pm 2^s,2$.

*Un observateur disposant d'une lunette micrométrique à fil mobile pourrait encore prendre des mesures de distances de l'étoile au bord éclairé de la Lune, lorsque cette distance devient très petite, c'est-à-dire lorsqu'il y a *appulse*; une telle observation est peu précise et elle ne peut conduire à un résultat avantageux que si la déclinaison lunaire varie rapidement, c'est-à-dire si l'astre est voisin de l'équateur: l'erreur sur la latitude du lieu a alors une grosse influence.

De même, les occultations des planètes³¹¹) ne donnent pas des résultats comparables en exactitude à celles des étoiles et cela à cause du diamètre apparent: la lumière de la planète occultée diminue progressivement et le moment noté pour l'extinction varie suivant la puissance de la lunette employée.*

310) Voir *A. Auwers*, Bestimmung eines absoluten Meridians für Australien durch absolute Methoden [Astron. Nachr. (Kiel) 110 (1885), col. 289]; voir aussi *J. Peters*, Astron. Nachr. (Kiel) 138 (1895), col. 113.

311) *Pour les calculs à effectuer, voir par ex. *W. Chauvenet*, Spherical astron.⁶), (5^e éd.) p. 565.

35. Phénomènes parents des occultations. Il existe un certain nombre de phénomènes, qui se rattachent plus ou moins à la catégorie des occultations, et qui peuvent être utilisés pour la détermination des longitudes.

Les passages de Vénus devant le soleil ont provoqué un grand nombre de publications; pendant deux siècles, on a cru que ces observations permettraient d'obtenir la meilleure valeur pour la parallaxe solaire.

Les passages de Mercure, beaucoup plus fréquents (il y en a environ treize par siècle), jouent un rôle important pour la théorie de cette planète.

*K. Friesach*³¹²) a donné une théorie élémentaire des passages de planètes, basée sur les méthodes de *J. F. Encke* et de *P. A. Hansen*.

*L. Weinek*³¹³) a cherché, en utilisant un procédé géométrique, de rendre plus accessible la méthode imaginée par *J. L. Lagrange* et perfectionnée par *J. F. Encke*.

Non seulement à cause de la lenteur du déplacement relatif des deux astres, mais aussi à cause de circonstances particulières et en partie physiologiques, les quatre contacts du disque sombre de la planète avec le contour solaire ne se laissent pas apprécier avec précision, de sorte que la longitude conclue pour le lieu d'observation n'est pas capable de prétendre à une grande exactitude.

Le système de Jupiter, avec ses quatre principaux satellites, offre des phénomènes variés. Abstraction faite des éclipses des satellites déjà signalées au n° 26, ces astres, dans leur cours autour du corps principal, passent fréquemment devant ou derrière la planète, ce qui fournit un moyen de déterminer la longitude. Mais c'est un procédé peu recommandable: à cause de l'éclat de Jupiter, les instants de ces phénomènes ne peuvent être appréciés avec précision, même dans les grands réfracteurs.

On peut dire la même chose des rares occultations d'étoiles par les planètes: la lenteur du mouvement apparent de la planète, son éclat et son atmosphère plus ou moins dense, constituent autant de facteurs qui s'opposent à ce que la disparition et la réapparition puissent être notées avec certitude.

312) *Theorie der Planetenvorübergänge*, Leipzig 1874.

313) *Zur Theorie der Planetenvorübergänge* [Sitzgsb. Akad. Wien 112 II^a (1903), p. 1752/77]; *J. L. Lagrange*, Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769 [Hist. Acad. Berlin 22 (1766), éd. 1768, p. 265; Œuvres 2, Paris 1868, p. 335]; *J. F. Encke*, *Vorausberechnung der Planetenvorübergänge* [Berliner astron. Jahrb. für 1842, éd. 1840, p. 291].

Les phénomènes de cette nature apportent plutôt une contribution utile à l'étude physique de l'atmosphère de la planète qui a provoqué l'occultation³¹⁴).

*A. F. Möbius*³¹⁵) a publié une étude analytique concernant l'occultation des étoiles par les planètes.

Détermination de l'azimut.

36. Méthode générale. Le problème de la détermination de l'azimut se présente très fréquemment en géodésie, en particulier lorsqu'il s'agit d'orienter une chaîne de triangles par rapport au méridien.

On peut dire qu'en général toutes les méthodes qui conviennent à la détermination de la latitude pourraient servir également, avec quelques légères modifications, à fixer l'azimut.

On sait que d'un triangle sphérique on peut déduire l'angle au pôle (angle horaire) pour la détermination du temps, ou le côté pôle-zénith (colatitude) lorsqu'il s'agit de conclure la latitude; de la même façon, on peut calculer l'angle au zénith, c'est-à-dire l'azimut de l'astre observé. Si l'on ajoute à l'azimut de l'étoile la différence d'azimut entre cette étoile et un signal terrestre (mire), différence mesurée au cercle horizontal de l'instrument universel, on obtient l'azimut du signal.

La détermination de l'azimut prend une importance particulière dans les contrées lointaines, lorsqu'il s'agit, en topographie, de mesurer une base de grande étendue: la partie astronomique consiste à déterminer les latitudes des points extrêmes de la base et leur azimut mutuel; en utilisant ces données et les dimensions supposées connues du globe terrestre, il est possible d'évaluer en kilomètres la longueur de la base.

Parmi les nombreux procédés utilisables pour la détermination de l'azimut³¹⁶), nous esquisserons ceux qui ont la préférence dans les opérations géodésiques de grande envergure.

37. Méthodes spéciales. On peut disposer la mire assez près du méridien, pour qu'elle apparaisse dans le champ de la lunette des passages; alors on obtiendra l'azimut de cette mire par une détermination de temps dans le méridien [cf. n° 8] qui fixe d'abord l'azimut de la ligne de visée; on mesure en outre avec un micromètre la distance angulaire du signal par rapport au fil moyen du réticule.

314) Voir par ex. *A. Pannékoek*, *Astron. Nachr.* (Kiel) 164 (1904), col. 6.

315) *De computandis occultationibus fixarum per planetas*, Leipzig 1815; *Werke* 4, Leipzig 1887, p. 343.

316) * Voir par ex. *C. Éd. Caspari*, *Astron. pratique* 2, p. 81 et suiv.*

On dispose de limites plus étendues pour la position de la mire, si l'on veut observer dans le vertical de l'étoile polaire [cf. n° 9].

Une méthode utilisable avec une situation quelconque du signal consiste à observer α Petite Ourse, en pointant tour à tour la mire et l'étoile; à l'aide du temps local, on déduit l'azimut de l'étoile, puis de la différence d'azimut on conclut l'azimut de la mire.

Des tables auxiliaires, comme entre autres celles de *W. Valentiner*³¹⁷) et *T. Albrecht*³¹⁸), facilitent le calcul d'azimut à l'aide de la polaire.

Une erreur commise sur le temps a une influence maxima sur l'azimut lorsqu'on observe dans le méridien, tandis qu'une erreur affectant la déclinaison se répercute sur l'azimut de la façon la plus sensible dans les digressions.

On obtient d'excellents résultats si, comme l'ont préconisé *Guillaume IV de Hesse*³¹⁹) et (*G.*) *Jean Dominique Cassini*³¹⁹), on observe les deux digressions; alors la moyenne des lectures faites au cercle horizontal fournit le point nord de ce cercle, d'une façon indépendante du temps et de la position de l'étoile.

Pour les étoiles de faible déclinaison, les digressions sont remplacées avantageusement par les hauteurs correspondantes; l'azimut moyen donne alors le point sud du cercle horizontal.

*C. B. Mollweide*³²⁰) a indiqué d'une façon détaillée la manière de déterminer l'azimut à l'aide de trois hauteurs et des différences d'azimut.

Faute d'un instrument universel susceptible d'être solidement installé, on peut obtenir l'azimut à l'aide d'une mesure de distance avec un instrument à réflexion³²¹). Dans ce cas, il est indispensable de connaître avec exactitude le temps et la hauteur apparente du signal. Ensuite la distance de la mire à un astre (qui est le plus souvent le soleil) complète le triangle sphérique signal-zénith-astre, dont les trois côtés sont alors connus; on calcule l'angle au zénith, c'est-à-dire la différence d'azimut entre l'astre et le signal.

Si l'on veut qu'une erreur commise sur le temps n'exerce pas une grande influence, il faut que l'astre observé soit à une hauteur

317) Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen, Leipzig 1869; plus tard *E. Block*, Hilfstafeln zur Berechnung der Polarisazimute, S^t Pétersbourg 1875.

318) Cf. *R. Wolf*, Astron. Mitteil. 45 (1878), p. 142; Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 22 (1877), p. 370.

319) Pendant la mesure française du degré (1683/1718); voir *Jacques Cassini*, Traité de la grandeur et de la figure de la terre, Paris 1720.

320) Monatliche Correspondenz 28 (1813), p. 419.

321) *Voir, par ex. *F. Brünnow*, Sphärische Astron.⁴), (4^e éd.) p. 262; éd. *E. Lucas* et *C. André*, Astron. sphérique, p. 339.

qui ne dépasse guère 10°. Une étude approfondie de ce procédé a été publiée par *F. X. von Zach*³²²).

Astronomie nautique.

38. L'horizon et son rôle. Le principal, pour ne pas dire l'unique problème que se propose l'astronomie nautique consiste à fixer, à l'aide des observations astronomiques, la position du navire en longitude et latitude; il convient de citer encore la détermination du temps et de l'azimut comme des questions intermédiaires pour lesquelles compas et sondages sont d'un précieux secours.

Comme l'emploi d'un appareil solidement fixé est naturellement impossible à bord du navire constamment mobile, il faut nécessairement avoir recours aux instruments à réflexion, parmi lesquels, d'ailleurs, le sextant à miroir est à peu près le seul utilisé dans la pratique.

La marine de guerre utilise parfois le cercle à prisme, particulièrement pour les relevés concernant les côtes.

Lorsqu'on a traité des diverses méthodes générales concernant la détermination des coordonnées géographiques, on a montré quelles étaient celles qui pouvaient trouver leur application en nautique; il reste à étudier ici quelques mesures nautiques proprement dites, les sources d'erreur y attachées ainsi que les procédés employés afin d'éliminer ces erreurs; enfin on exposera avec un peu plus de détails une solution du problème de la détermination des coordonnées qui aujourd'hui, et d'une façon générale, est très en faveur auprès des jeunes générations: c'est ce que l'on désigne sous le nom de „navigation moderne“.

A la mer, il ne faut plus songer aux méthodes basées sur les mesures d'azimut; seules les hauteurs et, à vrai dire, les hauteurs au-dessus de la ligne d'horizon, sont susceptibles d'être mesurées, à bord, avec une exactitude suffisante.

Mais déjà on voit surgir une difficulté; l'horizon va jouer ici un rôle analogue à celui que jouent, sur terre, le niveau ou le bain de mercure: il fixe la position de la verticale et définit le zénith du lieu d'observation. Or, sur le pont ou en tout autre place du navire choisie pour l'observation, l'œil, à cause de la *dépression de l'horizon*, aperçoit la limite de la mer un peu au-dessous de l'horizon théorique, au-dessus duquel les hauteurs se comptent.

Sous la dénomination de *dépression de l'horizon*, on comprend

322) *Astron. Jahrb.* 1793, éd. Berlin 1790, p. 167; *J. F. van Beeck-Calkoen*, *Astron. Jahrb.* 1814, éd. Berlin 1811, p. 99.

l'angle que forme avec l'horizontale la tangente menée de l'œil à la surface de la mer; on peut aussi la définir comme le complément de l'angle sous lequel l'observateur aperçoit le rayon apparent de la sphère terrestre. Si la terre était rigoureusement sphérique et s'il n'existait point d'atmosphère, la dépression de l'horizon se déduirait rigoureusement d'une manière trigonométrique en envisageant le triangle rectiligne: centre de la terre, œil, point de contact du rayon visuel; comme la hauteur de l'œil à bord de nos navires n'atteint que 20 mètres au maximum, l'influence due à la forme ellipsoïdale de la terre est négligeable³²³).

D'autre part il faut compter avec les perturbations provenant de la réfraction. Son influence, dans les mesures terrestres, était déjà mise en évidence dans les mesures des distances zénithales d'objets terrestres effectuées par *J. Picard*³²⁴), lors de ses travaux géodésiques.

La dépression de l'horizon devant vraisemblablement subir cette influence d'une manière analogue, on y a égard en diminuant la dépression purement géométrique d'un treizième environ de sa valeur; cette correction se déduit de tables.

*C. F. Gauss*³²⁵), *G. Sabler*³²⁶), *H. Hartl*³²⁷), *C. M. von Bauernfeind*³²⁸) soumièrent les conditions variables de la réfraction terrestre, comme elles se présentent dans les opérations géodésiques, à une discussion approfondie qui peut s'appliquer également aux lois analogues relatives à la dépression de l'horizon.

Des séries d'observation étendues concernant cette dépression ont été faites par *F. Lingg*³²⁹) au lac Starnberg, par *E. Kayser*³³⁰) dans

323) Voir *C. W. Wirtz*, *Marine-Rundschau* 12 (1901), p. 837.

324) *J. Picard*, dans l'année 1669, à l'occasion de mesures d'angles de dépression entre Monthéry et Mareuil [cf. *J. Picard*, *La mesure de la terre*, Paris 1671].

325) *Astron. Jahrb.* 1826, éd. Berlin 1823, p. 89; *Werke* 9, Göttingue (Leipzig) 1903, p. 437.

326) *Höhenunterschied zwischen dem Schwarzen und Kaspischen Meer*, publ. par *F. G. W. Struve*, St Pétersbourg 1849; *G. Sabler*, *Beobachtungen über die irdische Strahlenberechnung und die Gesetze der Veränderung derselben* [Diss. Dorpat 1839].

327) *Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie* (Vienne) 16 (1881), p. 129; *Mitteilungen militär-geograph. Instituts Wien* 3 (1883).

328) *Die terrestrische Refraktion und ihr Einfluss auf trigonometrische Höhenmessungen*, Munich 1866; *Ergebnisse aus Beobacht. der terrestrischen Refraktion* [Abh. Akad. München 13 (1880), Abt. III, p. 181].

329) *Über die bei Kimbeobachtungen am Starnberger See wahrgenommenen Refraktionserscheinungen* [Nova Acta Acad. Leop. (Halle) 55 (1891), p. 1/95].

330) *E. Kayser*, *Beobachtung über Refraktion des Seehorizontes und Leuchtturms von Hela* [Schriften Naturf. Ges. Danzig (2) 4 (1876/80), cah. 2 [1877]].

la Baltique, à Dantzig, par *F. A. Forel*³³¹⁾ au lac de Genève; des expériences sur le même sujet ont été obtenues également lors des croisières du navire français „La Gallisonnière“³³²⁾, effectuées en 1884, dans la mer rouge et l'océan Indien.

De leurs observations récentes effectuées, en partie dans la mer rouge, en partie à terre, au fort Verudella, à Pola, *K. Koss* et *E. von Thun-Hohenstein*³³³⁾ ont pu tirer les conclusions suivantes: non seulement la ligne d'horizon subit des déplacements pouvant s'écarter jusqu'à 10' de la position moyenne, mais en outre cette variation ne se comporte pas de la même façon dans tous les azimuts.

Elle se modifie avec la différence des températures de l'air et de l'eau, sans que la pression ni l'état hygrométrique aient sur elle une influence sensible.

L'absence de toute loi régulière se manifeste surtout si le vent est nul ou tout à fait faible, alors que par une légère brise, disons de force 2 à 3, on peut constater une dépression assez uniforme tout autour de l'horizon.

K. Koss exprime une partie de ses résultats dans l'énoncé suivant: pour une même hauteur de l'œil, l'élévation ou la dépression de la ligne d'horizon, relativement à l'horizon géodésique, est une fonction linéaire de la différence entre les températures respectives de l'air et de l'eau; ce savant adjoint à son travail deux tables de dépression, dans lesquelles les arguments sont la hauteur de l'œil et la différence des températures dont il vient d'être question; l'une de ces tables est valable pour un vent notable, l'autre, pour une brise très faible.

Les mesures autrichiennes relatives à la dépression de l'horizon donnèrent lieu à une étude approfondie de la part de *E. Kohlschütter*³³⁴⁾; entre autres choses, celui-ci appela l'attention sur la forme du chemin parcouru par le rayon lumineux allant de la ligne d'horizon à l'œil, et montra l'impossibilité d'admettre un trajet en forme d'arc circulaire.

331) Cf. *J. B. Messerschmitt*, Resultate neuerer Kimmtiefenbeobachtungen [Annalen der Hydrographie 29 (1901), p. 162].

332) Cf. note 331 et *Alois Walter*, Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung, Leipzig 1898.

333) *K. Koss* et *E. von Thun-Hohenstein*, Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella [Denkschr. Akad. Wien (math.) 70 II (1901), p. 347; voir aussi: *K. Koss*, Nächtliche Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella [Veröffentlichungen des Hydrographischen Amtes in Pola, n° 18, éd. Pola 1904].

334) Folgerungen aus den Koss'schen Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella [Annalen der Hydrographie 31 (1903), p. 533/54].

39. Instruments destinés à déterminer ou à éliminer la dépression de l'horizon. L'incertitude de la ligne d'horizon et, d'autre part, sa visibilité difficile pendant la nuit ou par temps brumeux, expliquent les efforts qui ont été faits dans le but de parvenir à s'en rendre indépendant, à l'aide d'instruments appropriés.

D'autres appareils ont seulement pour objet d'en permettre la détermination dans tous les cas, de façon à éliminer les anomalies.

*J. Hadley*³³⁵), l'inventeur du sextant, avait déjà eu l'idée de rendre superflue l'observation de l'horizon: il voulait relier un niveau avec un quadrant de hauteur, niveau qui devait être lu par un assistant.

Plus tard on disposa le niveau de façon telle que l'observateur lui-même put l'observer; une pareille disposition se présente dans le quadrant à niveau de *G. Butenschön*³³⁶); dans le champ de l'instrument on aperçoit simultanément la bulle du niveau, la croisée des fils du réticule et l'astre dont il s'agit de mesurer la hauteur.

**C. M. Goulier*^{336a}) propose de monter sur le sextant son niveau à collimateur, ce qui permet d'observer la hauteur à la mer lorsque l'horizon n'est pas visible.*

*G. E. Fleuriais*³³⁷) suivit une autre voie avec son *collimateur gyroscopique*: l'horizontale est ici déterminée à l'aide d'un cercle animé d'un rapide mouvement de rotation, cercle sur lequel sont installées deux lentilles collimatrices.

Si les expériences de *E. Gelcich*³³⁸) n'ont pas été très concluantes, **J. Alberts* et *D. Hubert*³³⁹) ont obtenu avec cet appareil des résultats satisfaisants*. L'octant à niveau de *G. Butenschön* ne paraît pas avoir eu beaucoup de succès à la mer.

335) A spirit level to be fixed to a quadrant [Philos. Trans. London 38 (1733/4), p. 167.

336) *G. Butenschön*, Brevet allemand délivré le 8 février 1894, publié sous le n° 76668; Patentschrift, 16 août 1894; Z. für Instrumentenkunde 15 (1895), p. 152; 17 (1897), p. 186.

336a) *C. R. Acad. sc. Paris 78 (1874), p. 1098. Description détaillée de son appareil [Mémorial de l'officier du génie n° 24 (1875), p. 224/41].*

337) C. R. Acad. sc. Paris 103 (1886), p. 1305; Revue maritime et coloniale 91 (1886), p. 452/518; La description détaillée et la théorie d'un sextant de Fleuriais perfectionné ont été donnés par *M. E. J. Gheury* [Monthly Notices astron. Soc. 64 (1903/4), p. 768].

Voir aussi *L. Favé*, Notice sur l'horizon gyroscopique Fleuriais, modèle de *Ponthus* et *Terrode* [Annales hydrographiques (2) 26 (1904), p. 49/80].

338) *E. Gelcich*, Hansa, Deutsche Nautische Zeitung (Hambourg) 37 (1901), p. 125.

339) *Waarnemingen met den gyroscopischen horizon Fleuriais (observations avec le sextant Fleuriais) De Zee (Tijdschrift Rotterdam), 31 (1909), p. 480, 676.*

**B. A. Fiske*³⁴⁰) propose de remplacer l'observation de l'horizon par une visée effectuée sur un canot, placé à une distance connue, dans l'azimut de l'astre observé.

*Gadsden*³⁴¹) paraît avoir obtenu des résultats satisfaisants en adjoignant, aux deux miroirs du sextant, un troisième miroir maintenu horizontal. L'instrument, notablement plus lourd, est appuyé contre l'épaule à l'aide d'une sorte de crosse de fusil. L'auteur donne à son dispositif le nom de *Spanner*.

Plus récemment, *C. V. Boys*³⁴²) a proposé d'apporter au sextant la modification suivante qui permet de se passer de l'horizon: une échelle située au foyer d'un collimateur vertical, et éclairée par en bas, est réfléchi dans le champ de la lunette. Ce collimateur repose sur des coussinets placés à la poignée du sextant et un contrepoids disposé au-dessus de la lunette (comme dans un métronome) régularise l'oscillation.*

Mais finalement il semble qu'il faille se résoudre à observer sur la ligne d'horizon; aussi s'est-on efforcé, d'une part de rendre cette ligne mieux perceptible la nuit en utilisant des lunettes plus lumineuses et, d'autre part, de déterminer plus exactement la place de l'astre relativement à l'horizon: dans ce dernier but, on peut, suivant la méthode de *G. E. Fleuriais*, intercaler entre les deux miroirs du sextant un prisme doublant l'image de l'étoile, de façon à amener l'horizon entre les deux images, ou bien comme l'a indiqué *A. Laurent*³⁴³) on peut transformer l'image stellaire de façon à l'obtenir sous forme d'une courte ligne lumineuse³⁴⁴).

*C. Decante*³⁴⁵) eut l'idée d'une méthode originale pour l'élimination de l'horizon: à l'aide d'un troisième miroir mobile adjoint au sextant, il projette la distance zénithale d'une étoile sur celle d'une seconde étoile, puis mesure la différence de distance zénithale entre cette seconde étoile et la projection de la première.

340) *Navigating without horizon [Proc. of the U. S. Naval Institute 33 (1907), p. 955].*

341) *Voir *H. H. Turner*, Note on „the Spanner“, Captain Gadsden's artificial Horizon for Sextants [Monthly Notices astron. Soc. 68 (1907/8), p. 535].*

342) *Position finding without an Horizon [Nature (Londres) 81 (1909/10), p. 111].*

343) *A. Laurent*, Les Mondes, (3^e année) 8 (1865), p. 612.

344) Voir la publication de l'office impérial de la marine allemande (*Reichs-Marine-Amt*), Lehrbuch der Navigation 2, Berlin 1901, p. 79.

345) Position du navire quand l'horizon n'est pas visible [Revue maritime 147 (1900), p. 491].

Pour déduire la position de la verticale, l'auteur indique trois méthodes, mais elles sont toutes difficiles dans la pratique et nécessitent un chargement du sextant qui rend son maniement fort pénible.

Une autre façon de s'affranchir des anomalies de la dépression de l'horizon consisterait à mesurer cet élément pour chaque observation de hauteur; ceci est déjà réalisable avec un sextant habituel, si l'astre possède une hauteur supérieure à 50° ; alors on mesure la distance par rapport à deux points diamétralement opposés de la ligne d'horizon et l'excès de la somme de ces distances sur 180° fournit le double de la dépression.

A l'aide des cercles à prisme de diverses sortes, deux régions opposées de l'horizon peuvent être amenées directement en coïncidence, ce qui permet de conclure la valeur de la dépression. *W. H. Wolleston*³⁴⁶), en 1817, réalisa un instrument destiné spécialement à cet objet, le dipsecteur (dipsektor), dont, cependant, il n'a plus été question.

Très compliqué apparaît le micromètre à dépression construit par *E. Kayser*³⁴⁷), appareil dont le champ de mesure atteint 2° et qui consiste essentiellement en une lunette se dirigeant vers le haut ou le bas, à laquelle sont adjoints deux prismes disposés à angle droit.

*E. Kohlschütter*³⁴⁸), à l'aide d'un prisme double facile à ajouter au sextant, rassemble dans le champ de la lunette les images de deux points de la ligne d'horizon diamétralement opposés en azimut et fournit ainsi un moyen pratique permettant d'éliminer l'horizon, en mesurant aussi, suivant le procédé de *T. Ferguson*³⁴⁸), le supplément de la hauteur d'un astre.

Cependant *E. Kohlschütter* lui-même préfère à ce double prisme un prisme d'horizon dû à *J. B. Blish*³⁴⁹) et qui donne la somme des dépressions en avant et en arrière de l'observateur; *K. Koss* et *Fr. Teichgräber*³⁵⁰) ont préconisé des dispositifs analogues.*

L'appareil de *C. Pulfrich*³⁵¹) pour la dépression de l'horizon se

346) En ce qui concerne cet appareil, comparer *J. S. T. Gehler*, *Physikal. Wörterbuch*, (2^e éd.) 2, Leipzig 1826, p. 558.

347) *Das Depressionsmikrometer* [Schriften Naturf. Ges. Danzig (2) 1 (1864) cah. 2, p. 1/16].

348) *De Zee* (Tijdschrift Rotterdam) 17 (1895).

349) Voir *E. Kohlschütter*, *Annalen der Hydrographie* 32 (1904), p. 84/5; *Mitteilungen aus dem Gebiet des Seewesens* [Pola] 32 (1904), p. 518/22.

350) *K. Koss*, *Kimprismen* [Mitteilungen aus dem Gebiet des Seewesens 32 (1904), p. 495]; *K. Koss* et *Fr. Teichgräber*, *Das Kimmprisma* [id. 32 (1904), p. 560].*

351) *Z. für Instrumentenkunde* 24 (1904), p. 225.

compose surtout d'un miroir angulaire, et la mesure a lieu ou bien au moyen d'une échelle installée dans le champ de la lunette, ou bien à l'aide d'une vis micrométrique déplaçant le miroir.

Il convient de remarquer que toutes ces méthodes supposent implicitement que la dépression de l'horizon est la même pour tous les azimuts, ce qui n'est pas toujours le cas.

Naturellement, la télégraphie sans fil pourra rendre aussi de grands services pour la détermination des coordonnées en astronomie nautique³⁵².

40. Les droites de hauteur et leur établissement. Pendant longtemps les marins ont estimé la valeur des observations astronomiques à bord de la même façon que sur terre: une hauteur méridienne servait à la détermination de la latitude et une autre, effectuée dans le premier vertical, fournissait le temps local et la longitude. On ne songeait même pas à tirer profit de hauteurs groupées pour répondre à un azimut moyen.

Ce fut tout à fait fortuitement, et pour ainsi dire par nécessité, que *Thomas H. Sumner*³⁵³, étant obligé d'entrer à la voile dans le Canal Saint-Georges, au cours d'un voyage effectué de l'Amérique du nord vers Greenock, envisagea la possibilité d'utiliser chaque hauteur d'étoile pour obtenir un lieu géométrique des positions occupées par le navire; c'est ce qui donna naissance à la notion de *droite de hauteur*. Cela exige toutefois que l'on connaisse l'heure du premier méridien, à l'aide d'un chronomètre emporté à bord [n° 29].

Depuis le 17 décembre 1837, date à laquelle *Th. H. Sumner* mit en relief les droites de hauteur et leur importance nautique, les conséquences de cette idée simple ont été développées dans un grand nombre de publications que l'on voit du reste s'accroître journellement.

La distance zénithale z d'un astre à un instant donné convient à tous les points du globe situés sur un petit cercle k décrit autour du point de projection P de l'astre comme centre, avec un rayon sphérique égal à la distance zénithale (fig. 1).

Par point de projection on entend le point où la droite qui va

352) *Voir par ex. *J. H. Holtappel*, Plaatsbepaling door dradlooze telegrafie in verband met het mistkloksignaal (Détermination des coordonnées géographiques par la télégraphie sans fil combinée avec les signaux) [Marineblad, Bijblad op de Verslagen der Marinevereeniging 22 (1907), p. 43]; *E. Guyou*, Détermination des longitudes en mer par la télégraphie sans fil [C. R. Acad. sc. Paris 146 (1908), p. 800].*

353) A new and accurate method of finding a ships position at sea by projection on Mercators chart, Boston 1843; (2^e éd.) Boston 1845.

de l'étoile au centre de la terre traverse la surface terrestre; en d'autres termes, c'est le lieu qui voit à son zénith l'objet observé.

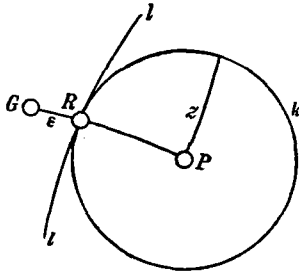


Fig. 1.

La latitude géographique du point de projection est constamment égale à la déclinaison de l'astre, et la longitude géographique par rapport au méridien initial, disons Greenwich, est égale à l'angle horaire de l'astre à Greenwich.

La distance zénithale z et le point P déterminent ainsi, sur la terre, le cercle k ; et au moment de l'observation le navire doit se trouver quelque part sur ce cercle.

Si l'on suppose qu'à bord on trace la route du navire sur une carte marine³⁵⁴), on est conduit à considérer la projection du cercle k de Sumner dans le système de Mercator, en d'autres termes de la courbe de hauteur³⁵⁵).

Avant d'aller plus loin rappelons les dénominations employées pour les divers éléments de la figure 1

z = distance zénithale approchée,

P = point de projection de l'astre,

k = cercle de hauteur; Sumnerkreis, Höhenkreis, Höhengleiche; circle of position, circle of equal altitude³⁵⁶),

G = point estimé; gegisster Schiffsort; estimated place,

R = point rapproché; wahrscheinlichster Schiffsort,

l = droite de hauteur; Standlinie; Sumner line.

Dans la pratique le navigateur qui ne possède pas de détermination astronomique connaît cependant la position de son navire à

354) Les cartes marines sont dressées suivant la projection de Mercator, parce que, dans ce système, chaque loxodromie (ligne de navigation, qui coupe tous les méridiens suivant un même angle) correspond à une transversale rectiligne de la carte. Comparer la note 381 ainsi que C.F. Gauss, Werke 4, Göttingue 1880, p. 204 et l'article „Cartographie“ VI 6 de l'Encyclopédie.

355) En ce qui concerne les méthodes analytiques et graphiques relatives à la construction rigoureuse ou approchée des courbes de hauteur, on pourra consulter E. Guyou [Les problèmes de navigation et la carte marine, Paris 1895; Annales hydrographiques (2) 17 (1895), p. 113/58], A. J. F. Yvon Villarceau et A. de Magnac [Nouvelle navigation astronomique, Paris 1877] et aussi „J. Verstraeten, Solution théorique et pratique des problèmes du point astronomique par la méthode des lieux géométriques ou droites de hauteur, Bruxelles 1907.*

356) Le mot cercle de hauteur signifie ainsi tantôt un cercle de Sumner, tantôt un almucantar (note 22). Il y a encore naturellement le cercle vertical, expression qui désigne soit un grand cercle passant par le zénith, soit un cercle divisé destiné à la mesure des distances zénithales.

une fraction de degré près qui, au maximum, ne dépasse pas $\frac{1}{2}$ degré ou 30 milles marins; il dispose en effet d'une position approchée déduite du „calcul de route“ qui repose sur une détermination régulière de la vitesse en grandeur et direction, au moyen du loch et du compas. Il n'a donc besoin que d'une petite partie l du cercle de Sumner dans le voisinage du point estimé G .

Sur la carte marine³⁵⁴), on remplace (sauf un cas exceptionnel qu'il faudra considérer) cette portion l par une loxodromie, dans la projection de Mercator, c'est-à-dire par une droite qui forme ou bien une petite corde (ancienne méthode) ou une tangente (nouvelle méthode) relativement à la courbe de hauteur rigoureuse. Cette droite se nomme „droite de hauteur“.

La plus ancienne méthode pour la détermination de la droite de hauteur, employée déjà par *Th. H. Sumner*³⁵⁵), est la méthode de *longitudes et latitudes* (méthode de Sumner).

Lorsque l'azimut de l'étoile est plus petit que 45° , *Th. H. Sumner*, à l'aide de deux longitudes acceptées comprenant la longitude estimée, calcule les deux latitudes qui correspondent à la hauteur mesurée; la ligne qui joint les deux points ainsi définis sur la carte est la droite de hauteur cherchée qui, dans ce cas, est obtenue par la *méthode des latitudes*.

Mais si la hauteur mesurée est dans un azimut plus proche du premier vertical que du méridien, on choisit alors deux latitudes voisines de celle estimée, on calcule avec elles les longitudes et on obtient, dans la ligne qui réunit les deux points correspondants, la droite de hauteur, cette fois par la *méthode des longitudes*.

Les deux méthodes fournissent, à vrai dire, des cordes de la courbe des hauteurs, mais sauf dans le cas de très faibles distances zénithales, il n'y a pas d'erreur sensible à confondre ces cordes avec les arcs qu'elles sous-tendent.

*Marcq Saint-Hilaire*³⁵⁷) enseigna la méthode moderne [*méthode des hauteurs*, fig. 1]; elle est devenue à notre époque la méthode prédominante parce qu'elle a sur celle de *Th. H. Sumner* l'avantage de l'unité et de l'économie de calcul. Pendant que, avec *Th. H. Sumner*, on calcule ou bien les longitudes ou bien les latitudes, *Marcq Saint-Hilaire* calcule, dans tous les cas, avec le point estimé du navire et le temps de Greenwich, le rayon sphérique du cercle de Sumner, c'est-à-dire la distance zénithale, dont la comparaison avec celle observée fournit une mesure concernant l'exactitude du point estimé.

On retranche, dans la carte marine, du point estimé G et dans

³⁵⁷) Voir *A. J. F. Yvon Villarceau* et *A. de Magnac*, *Navigation astron.*³⁵⁶), partie pratique, p. 104 (en note).

la direction de l'astre observé, la différence ϵ entre les hauteurs calculée et mesurée. Suivant le signe de cette différence on s'éloigne ou l'on s'approche du point P (fig. 1).

La droite l menée par ce nouveau point R , perpendiculairement à RP , représente la droite de hauteur cherchée qui, dans cette *méthode des hauteurs*, coïncide avec une tangente à la courbe de hauteur, au lieu le plus probable pour la position du navire.

On regarde comme lieu le plus vraisemblable du navire le point R de la droite de hauteur qui est le plus rapproché du point estimé.

En dehors du calcul des hauteurs, il faut encore exécuter un calcul analogue pour l'azimut, mais celui-ci est à effectuer d'une façon seulement approximative.

Dans le cas exceptionnel où la hauteur de l'étoile atteint le voisinage de 90° , on peut considérer la droite de hauteur comme donnée par l'arc de cercle décrit autour du point de projection avec la distance zénithale alors très minime comme rayon. Une meilleure approximation de la courbe de hauteur est obtenue au moyen d'un cercle excentrique au point de projection ou, encore mieux, par une ellipse dont le centre est également déplacé par rapport au point de projection³⁵⁸).

41. Problème de deux hauteurs, selon la méthode des droites de hauteur. La méthode des droites de hauteur allège et rend très simple le *problème des deux hauteurs*; si l'on a obtenu deux mesures de hauteur, il en résulte deux droites de hauteur, au point d'intersection desquelles doit se trouver le navire.

En admettant que le cercle de Sumner soit complètement tracé, on voit que *deux* points d'intersection satisfont aux hauteurs mesurées. Le passage au lieu vrai s'effectue ensuite aisément en utilisant les azimuts des astres.

Le point d'intersection sera déterminé de la façon la meilleure si les lignes se coupent orthogonalement; l'azimut absolu ne joue aucun rôle pour l'exactitude du lieu du navire, mais seulement la différence d'azimut qui, égale à 90° dans le cas le plus favorable, ne doit jamais descendre au-dessous de 30° .

Vu la rapidité des navires modernes, à vapeur et même aussi à voile, il n'est plus suffisant d'accepter les deux droites de hauteur trouvées comme étant valables pour le même lieu: afin de ramener à l'instant de la seconde droite la première droite obtenue, il convient d'appliquer une correction due au déplacement du bateau.

358) Voir *A. J. F. Yvon Villarceau* et *A. de Magnac*, *Navigations astron.*³⁵⁸), *partie pratique*.

Un procédé pour atteindre ce but consiste à déplacer l'une des droites de hauteur, parallèlement à elle-même, d'une distance correspondant au mouvement accompli par le navire pendant l'intervalle de temps; autre méthode: avant de commencer les calculs définitifs, on réduit l'une des hauteurs mesurées au lieu d'observation de l'autre (réduction zénithale) et l'on traite ensuite les deux hauteurs comme si elles avaient été mesurées en un même point de la surface terrestre.

Le procédé graphique indiqué pour passer du lieu estimé du navire au lieu vrai se traduit numériquement par la résolution de petits triangles plans. A ce problème, comme au problème général des deux hauteurs, se rattachent un grand nombre de mémoires d'astronomie nautique.

D'ailleurs il existe des tables spéciales destinées à faciliter ce calcul [cf. n° 44].

42. Trois (ou plus) droites de hauteur. Problème des trois hauteurs. On rencontre, dans la littérature nautique, la dénomination de *problème des trois hauteurs* ou *problème des hauteurs multiples*; cela ne correspond pas à un problème à détermination unique, mais à une question à données surabondantes: deux inconnues, en effet, longitude et latitude, sont fournies par un nombre de relations égal ou supérieur à trois.

Le problème ne peut se trouver déterminé à nouveau que si nous adjoignons la condition que la somme des carrés des résidus qui subsistent dans les hauteurs soit minima, de sorte qu'ensuite le calcul doit être effectué par la méthode des moindres carrés.

Veut-on recourir aux droites de hauteur pour la solution, alors on utilisera trois d'entre elles pour le problème des trois hauteurs, mais à cause des inévitables erreurs d'observation, ces droites, au lieu de concourir en un point unique, formeront un triangle.

Les étoiles sont réparties de la façon la plus favorable si les azimuts diffèrent de 120° environ. Le lieu le plus probable du navire est, à l'intérieur du triangle, celui pour lequel est minima la somme des carrés des distances aux trois côtés; ce point, du nom de l'inventeur³⁵⁹), a été nommé *point de Grebe*³⁶⁰).

On réalise un gain minime en utilisant plus de trois hauteurs fa-

359) *E. W. Grebe*, Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte auf seine Seiten fallen kann [Archiv Math. Phys. (1) 9 (1847), p. 250].

360) Sur le point de Grebe ou de Lemoine, comparer l'article du volume 2 du tome III consacré à la géométrie du triangle. Cf. *E. Hain*, Archiv Math. Phys. (1) 58 (1876), p. 84.

vorablement réparties. L'œil se fatigue vite, étant donnée déjà la mauvaise visibilité si fréquente de la ligne d'horizon pendant la nuit, et à cause de cela les dernières mesures sont notablement plus médiocres que les premières.

A. A. Nijland³⁶¹) a montré qu'il était possible, sans instrument et sans calcul, par une simple estimation de la hauteur d'astres, de fixer facilement, à un degré près, la situation du navire.

43. Droite de hauteur pour une différence de hauteur. Le problème entièrement déterminé, conclure le point du navire à l'aide de deux différences de hauteur de trois étoiles [voir n° 19], contribua à éliminer la partie principale de l'anomalie de la ligne d'horizon.

Ensuite se présente l'étude du lieu géométrique donné sur la terre par une différence de hauteurs. La question a été discutée par C. W. Wirtz³⁶²): la droite de hauteur reste sur une hyperbole sphérique, courbe d'intersection d'un cône du second ordre avec une sphère.

La portion voisine du point estimé de cette droite de hauteur „indépendante de l'horizon“ est définie par un point de la droite de hauteur et son azimut en ce point.

44. Calcul de la hauteur, Tables de hauteurs. Nulle part plus qu'en nautique, on n'a tendance à effectuer toutes les opérations numériques à l'aide de Tables, et, depuis l'avènement de la méthode des droites de hauteur de *Marcq Saint Hilaire*, nombreuses ont été les tentatives faites en vue de simplifier, ou même de traiter entièrement avec des Tables, le seul calcul sphérique nécessaire qui consiste à déduire la hauteur connaissant la latitude, la déclinaison et l'angle horaire.

L'époque n'est pas encore bien loin de nous, où le navigateur effectuait avec 6 ou 7 décimales (ce qui correspond à mieux que la seconde d'arc) des calculs portant sur des mesures à peine exactes à la minute. Un premier pas bien timide vers l'amélioration fut le retour aux logarithmes à 5 ou 4 décimales. La marine impériale allemande s'en tint à cinq décimales, après que *E. Kohlschütter*³⁶³) eût montré, qu'en procédant ainsi, on pouvait compter dans tous les cas sur une exactitude de 2' pour la hauteur obtenue. Dans la marine marchande, l'usage des logarithmes à quatre décimales progresse de plus en plus;

361) Astron. Nachr. (Kiel) 160 (1902/3), col. 257.

362) Über eine neue kimmfreie astronomische Standlinie [Aus dem Archiv der deutschen Seewarte (Hambourg) 25 (1902), mém. n° 3].

363) Marine-Rundschau 13 (1902), p. 1330.

la formule de hauteur peut être modifiée de façon à donner ainsi une exactitude suffisante pour les besoins de la pratique.

La forme primitive de la formule de hauteur a subi plus de 80 transformations ayant pour but de la rendre plus commode dans les applications ou de faciliter sa mise en Tables. Il ne semble pas qu'aucune des tables actuelles fournisse les hauteurs plus sûrement et plus rapidement que le calcul direct.

Les tables de hauteurs les plus importantes sont dues à *F. Souillagouët*³⁶⁴), *R. Delafon*³⁶⁵), *W. Döllén*³⁶⁶), *V. Fuss*³⁶⁷), *A. Vital*³⁶⁸), *P. Bossen* et *D. Mars*³⁶⁹), *H. B. Goodwin*³⁷⁰), *F. Ball*³⁷¹), *S. Baikie*³⁷²), *Köster*³⁷³).

Parmi les tables de hauteurs, celle de *F. Souillagouët* est encore la plus pratique, parce qu'elle repose sur la formule la plus simple.

On a proposé de calculer directement la différence entre la hauteur observée et la hauteur qui résulte du point estimé du navire, mais les résultats ont été peu satisfaisants³⁷⁴).

*P. L. H. Davis*³⁷⁵) a mis en Tables un autre élément du triangle fon-

364) Tables du point auxiliaire pour la hauteur et l'azimut estimés, Paris 1891; (nouv. éd.) Toulouse 1900.

365) Méthode rapide pour déterminer les droites et les courbes de hauteur et faire le point, Paris 1893.

366) Zur Reform der nautischen Astronomie, Dorpat 1896.

367) Tafel zur Berechnung der Höhe und des Azimuts der Gestirne [Verhandl. des 7. internationalen Geographen-Kongresses zu Berlin 1899, 2. Teil, Berlin 1901, p. 27]; Tablicy dlja nachoženija vysot i azimutov (tables pour le calcul des azimuts), S^t Pétersbourg 1901.

368) Über Höhentafeln, Mitteilungen aus dem Gebiet des Seewesens [Pola] 30 (1902), p. 283.

369) *P. Bossen* et *D. Mars*, Nautical tables for ex-meridian observations, with application to the double altitude probleme by means of position, Groningue 1904 (en hollandais et anglais); (2^e éd.) Groningue 1909.*

370) *Position-line star tables*, Londres 1906.*

371) *Altitude Tables*, computed for intervals of four minutus between the parallels of latitude 31° and 61 and parallels of declination 0° and 24°, Londres 1907; *Altitude Tables*, computed for intervals of four minutes between the parallels of latitude 24° et 60° and parallels of declination 24° and 60°, Londres 1909. Ces tables renferment les hauteurs d'étoiles au dixième de minute pour chaque degré nord de latitude et de déclinaison et par quatre minutes de temps d'angle horaire; en outre elles contiennent quelques tables auxiliaires.*

372) *New Navigation Tables*, Londres 1907.*

373) *Hilfstafel zur Bestimmung des Schiffsortes aus zwei Höhen nach der Höhenmethode* [Annalen der Hydrographie 35 (1907), p. 227].*

374) A ce sujet, consulter, entre autres, *O. Fulst* [Annalen der Hydrographie 28 (1900), p. 320], *W. Reuter* [id. 30 (1902), p. 32, 583], *H. Teege* [id. 31 (1903), p. 153, 501].

damental en astronomie nautique, l'azimut, avec trois arguments: déclinaison, hauteur et latitude; cependant, d'après l'avis du „Lehrbuch der Navigation“ imprimé par l'administration de la marine allemande³⁷⁶) ces tables sont maintenues dans des limites si étroites en ce qui concerne la détermination des positions géographiques, qu'elles ne sont plus conformes aux exigences de la navigation actuelle.

Assez récemment G. W. Littlehales³⁷⁷) donna un plan nouveau pour la construction d'une table de hauteurs: sur une carte en projection stéréographique, l'auteur résout graphiquement le triangle nautique fondamental d'après la hauteur et l'azimut.

La priorité de l'idée revient cependant à C. Braun³⁷⁸) qui déjà, en 1873, avait construit un petit instrument formé de deux projections équatoriales stéréographiques concentriques se déplaçant l'une sur l'autre, et dont la supérieure est tracée sur papier transparent. L'exactitude moyenne de cet appareil, que C. Braun appelle *trigonomètre* atteint $\pm 5'$, avec un diamètre de 45^{cm}.

D'une façon moins appropriée à atteindre ce but, M. A. F. Prestel³⁷⁹) voulut remplacer le calcul par un maniement graphique dans le diagramme astronomique qu'il a tracé. G. Bigourdan³⁸⁰) a construit, pour la latitude de Paris, un excellent diagramme, limité cependant à une exactitude un peu moindre.

45. Usage de la fonction de Mercator³⁸¹). Par suite de l'amon-

375) P. L. H. Davis, Chronometer tables or hour angles for selected altitudes between latitudes 0° and 50°, Londres 1899.

376) Voir la publication de l'office impérial de la marine allemande (*Reichs-Marine-Amt*), Lehrbuch der Navigation 2, Berlin 1901, p. 233.

377) A new and abridged method of finding the locus of geographical position and the compass error [Bull. philos. Soc. Washington 14 (1903), p. 233]. Voir aussi, à ce sujet, J. W. Froyley [Bull. Amer. geograph. Soc. (New York) 36 (1904), p. 299].

378) Berichte von dem erzbischöfl. Haynald'schen Observatorium zu Kalocsa in Ungarn, Munster en/W. 1866, p. 142.

379) Das astronomische Diagramm, Brunswick 1859.

380) Ann. Observ. Paris, Observations 1885, éd. 1893.

381) Sous le nom de nombre longitudinal, *transcendante de Lambert*, ou *angle de Gudermann*, on désigne une fonction

$$\tau = \text{gd}(x)$$

par laquelle on passe des fonctions hyperboliques aux fonctions circulaires, au moyen des formules

$$-i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh } x = \text{tg } \tau,$$

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x = \frac{1}{\cos \tau},$$

cellement des tables construites pour faciliter les calculs astronomiques nautiques, bientôt se fit la tendance d'en limiter le nombre autant que possible et de rendre le calcul trigonométrique superflu en introduisant la *partie méridionale de Mercator*.

*W. H. Preuss*³⁸²) a d'abord montré l'importance de la fonction de Mercator, puis la question fut travaillée par *E. Guyou*³⁸³), *R. Türr*³⁸⁴), *H. B. Goodwin*³⁸⁵) et surtout par *C. Börgen*³⁸⁶) qui montra combien

$$-i \operatorname{tg}(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x = \sin \tau.$$

A l'aide de la fonction inverse $x = \mathfrak{L}(\tau)$, dite „Längezahl“ par *S. Gudermann*,

$$x = \mathfrak{L}(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\cos \tau} = \log_e \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\tau}{2} \right),$$

on définit la *fonction de Mercator* $f(\tau)$ et sa cofonction $\operatorname{cof}(\tau)$ par les formules³⁸⁶)

$$f(\tau) = A \cdot x, \quad \operatorname{cof}(\tau) = f(90^\circ - \tau),$$

où A est un facteur numérique, $A = \frac{10800}{\pi}$, qui mesure le rapport de l'unité d'angle absolue à la minute d'arc; l'introduction de ce facteur A a ici pour but de rapporter, à la *minute d'arc* de la longitude géographique, comme unité, la *distance*

$$f(\varphi_1) - f(\varphi_2),$$

suivant laquelle deux degrés de latitudes φ_1 et φ_2 procèdent sur une carte de Mercator³⁸⁴); cette façon de procéder offre du reste des avantages certains pour l'interpolation des tables, sans qu'il en résulte pour cela aucun inconvénient en ce qui concerne l'élégance des développements théoriques: les questions concernant le triangle sphérique se laissent résoudre notamment en formules linéaires *homogènes*, à l'aide des fonctions $f(\tau)$ et $\operatorname{cof}(\tau)$ [cf. note 386].

Chr. Gudermann [J. reine angew. Math. 7 (1831), p. 72/96, 176/200; 8 (1832), p. 64/116] donne des tables pour la fonction inverse $x = \mathfrak{L}(\tau)$.

On trouvera des renseignements bibliographiques relatifs à *l'angle de Lambert*, dans *A. von Braunmühl*, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie 2, Leipzig 1903, p. 134, 231; *E. Pascal*, trad. allemande de *A. Schepp*, Repertorium der höheren Mathematik, Leipzig 1900, p. 470; *R. Wolf*, Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur 1, Zurich 1891, p. 205/7.

382) Homographische Nautik [Annalen der Hydrographie 4 (1876), p. 387/93, 431/8, 478/84; 5 (1877), p. 89/97].

383) Les problèmes de navigation et la carte marine, Paris 1895; Annales hydrographiques (2) 17 (1895), p. 113/58; *Nouvelle méthode pour déterminer les droites de hauteur et le point observé [Revue maritime 180 (1909), p. 223].*

384) Metodo per fare il punto astronomico, Milan 1894.

385) A nautical astronomy of a new type [Nautical magazin (Londres) 64 (1895)].

386) Voir *C. Börgen*, Über die Auflösung nautisch-astronomischer Aufgaben mit Hilfe der Tabelle der Meridionalteile (der „Mercatorschen Funktion“) [Aus dem Archiv der deutschen Seewarte (Hambourg) 21 (1898), mém. n° 1].

simplement se laissent résoudre, par les fonctions de Mercator, les problèmes de trigonométrie sphérique, et en particulier ceux relatifs à la détermination des positions géographiques³⁸⁷).

46. Tables d'azimut. La connaissance de l'azimut n'est pas seulement indispensable au navigateur pour le calcul de la droite de hauteur d'après la méthode des hauteurs [n° 40], mais cet élément est également utile à la détermination de la *déviatiou du compas*³⁸⁸, grandeur qui, sur les bâtiments modernes construits en fer ou en acier, atteint une importance considérable et en outre, dans certains cas, est soumise à de brusques variations.

Pour cette raison, un contrôle continu de la déviation est absolument indispensable pour la sécurité de la navigation, et on atteint ce but par le „sondage“ (c'est-à-dire un rattachement d'azimut à l'aiguille aimantée) d'un astre situé à une hauteur moyenne.

A l'aide de la différence entre l'azimut lu et celui de l'astre calculé par le moyen de la latitude, de la déclinaison et de l'angle horaire, on peut, après avoir tenu compte de la déclinaison magnétique du lieu, conclure la déviation cherchée de la boussole.

Pour faciliter le calcul de l'azimut, qui se présente fréquemment, on a construit des tables qui répondent beaucoup mieux à leur but que les tables de hauteurs publiées jusqu'ici. Ceci provient, en partie, de ce fait que, dans les Tables d'azimut, on n'a pas besoin du degré d'exactitude qui est nécessaire lorsqu'il s'agit de hauteurs.

Les données à 0°,1 près sont tout à fait suffisantes dans les tables d'azimut; dans l'interpolation, l'erreur peut atteindre 0°,5 sans qu'il en résulte pour cela une incertitude inacceptable.

Les Tables dont il s'agit se laissent séparer en deux groupes principaux; il y a d'abord celles dans lesquelles les azimuts sont donnés simplement d'après les trois arguments latitude, angle horaire et déclinaison.

Parmi elles il faut citer celles de *J. Burdwood*³⁸⁹), *J. E. Davis* et *L. H. Percy*³⁹⁰), *F. Labrosse*³⁹¹), *J. Ebsen*³⁹²).

387) *C. Börgen*, Über die Berechnung von Mondsdistanzen mit Hilfe der Mercatorschen Funktionen [Aus dem Archiv der deutschen Seewarte (Hambourg), 26 (1903) mém. n° 1].

388) La *déviatiou* est l'écart de l'aiguille du compas produit par la partie en fer du navire.

389) Sun's true bearing or azimuth tables between latitude 30° N and 60° N, (3^e éd.) Londres 1873; (nouv. éd.) Londres 1894.

390) *J. E. Davis* et *L. H. Percy*, Sun's true bearing or azimuth tables between 30° N and 30° S, Londres 1875; Star's true bearing or azimuth tables between

Les tables du second groupe décomposent la table unique à trois arguments en trois tables ayant chacune deux arguments seulement, ce qui permet de réaliser une forme plus condensée. Dans presque chaque table nautique moderne se trouve une telle table d'azimut disposée d'après la méthode de *E. Perrin* ou *O. Fulst*³⁹³).

Parmi les récentes, on peut citer celles publiées par *H. S. Blackburne*³⁹⁴), *S. Mars*³⁹⁵), *E. Wendt*³⁹⁶).

*G. D. E. Weyer*³⁹⁷) construisit autrement sa table d'azimut qui se recommande particulièrement pour la méthode des droites de hauteur d'après *Marq Saint Hilaire* [n° 40]: elle embrasse, en latitude, hauteur et déclinaison, la totalité du ciel, pendant que les autres tables ne concernent qu'une zone, plus ou moins limitée, pour les trois arguments.

47. Détermination des coordonnées géographiques à l'aide des éléments magnétiques. Uniquement au point de vue de l'intérêt historique et pour être complet, il convient d'indiquer que l'on a cherché, à plusieurs reprises, à utiliser, pour déterminer la longitude sur mer, la déclinaison magnétique, si rapidement variable avec le lieu et le temps. *F. A. Pigafetta*³⁹⁸), entre autres, indique cette méthode dans sa nautique.

60° N and 60° S, Londres 1902. *Ex-meridian Tables, giving the reduction to the meridian for latitudes up to 64° and declinations to 64°, and hour angles less than 75^m, Londres 1904; Supplementary Azimuth Tables for various intervals of hour angles between the parallels of latitude 64° North und 64° South, giving azimuths for altitudes greater than 60° and others suitable for use with ex-meridian observations, Londres 1904.*

391) *F. Labrosse*, Tables des azimuts du soleil entre 55° S et 55° N, Paris 1868; en langue anglaise: Londres 1868.

392) *J. Ebsen*, Azimut-Tabellen, enthaltend die wahren Richtungen der Sonne von 70° N bis 70° S, Hambourg 1896; (4° éd.) Hambourg 1909.

393) *E. Perrin*, Nouvelles tables destinées à abrégér les calculs nautiques, (4° éd.) Paris 1906; *O. Fulst*, Azimuttafel, Brême 1898.

394) *Azimuths for every four minutes of time of sun, moon, planets and fifty of the brightest stars, through tables *A*, *B* and *C* (1905); *A*, *B* and *C*, Tables for Azimuth and great circle sailing, (2° éd.) Wellington (Nouvelle Zélande) 1908.*

395) **A*, *B*, *C* tafels voor azimuth, Plaatsbepaling door hoogtelijnen, lengtefout door bredtefout enz. [Tables *A*, *B*, *C* pour la détermination de l'azimut, pour la détermination des coordonnées géographiques au moyen des droites de hauteur, pour la détermination des erreurs de longitude par les erreurs de latitude, Groningue 1906].*

396) *Eine neue Anordnung der *A*, *B*, *C*-Tafeln [Annalen der Hydrographie 35 (1907), p. 39].*

397) Kurze Azimuttafel für alle Deklinationen, Stundenwinkel und Höhen auf beliebigen Breiten, Hambourg 1890.

398) Cf. *Stanley of Alderley*, The first voyage round the world by Magellan

L'idée première en revient cependant à *Christophe Colomb*, dont l'exemple fut suivi par *W. Bourne* (1577), *L. Sanutio* (1588) et *S. Cabot*³⁹⁹.

Beaucoup plus tard *Z. Williams*⁴⁰⁰ se préoccupa de ce procédé pour déterminer la longitude et donna des tables, qui ne furent pas jugées bien favorablement de la part de *J. Bradley*.

Enfin *A. von Humboldt*⁴⁰¹ a donné des indications sur une méthode, expérimentée par lui, et destinée à fournir la latitude à l'aide de l'inclinaison magnétique.

48. Astronomie aéronautique. De même que l'astronomie nautique forme seulement une branche très modeste en ce qui concerne la détermination exacte des coordonnées géographiques, la navigation aérienne, si florissante depuis quelque vingt ans, a suscité une astronomie aéronautique qui doit permettre, par des conditions atmosphériques incertaines, de fixer d'une façon approximative la longitude et la latitude géographiques pendant le voyage aérien; il s'agit aussi de déterminer la projection horizontale et la vitesse du chemin décrit dans l'atmosphère.

Naturellement les méthodes ne sont pas différentes de celles déjà reconnues comme opportunes dans la pratique nautique: le jour, les hauteurs du Soleil et de la Lune prises à de courts intervalles de temps fixent la route; si le Soleil est seul visible, on doit combiner la hauteur et l'azimut.

La nuit, il suffit d'un couple de hauteurs d'étoiles convenablement choisies.

*A. Marcuse*⁴⁰² se propose d'exécuter des Tables condensées fournissant d'une manière simple le lieu du ballon à l'aide des hauteurs obtenues; l'exactitude suffit au but qu'on se propose: $\pm 5'$ (9 kil) à $\pm 10'$ (18 kilomètres).

Comme instrument le plus approprié à la mesure des hauteurs,

[Works issued by the Hakluyt Society (Londres) 52 (1874), p. 167/9]. Voir aussi la note 240.

399) Cf. *A. von Humboldt*, Examen critique²⁸² de l'histoire de la géographie du nouveau continent et des progrès de l'astronomie nautique aux 15^{ième} et 16^{ième} siècles 3, Paris 1837, p. 38/41.

400) Voir *W. T. Lynn*, The longitude and the Magnetic Variation [The observatory 27 (1904), p. 276].

401) Examen critique³⁹⁹ 3, p. 43.

402) Voir *A. Marcuse*, Zur Frage der astronomischen Ortsbestimmung im Ballon, Protokoll über die dritte Versammlung der internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt [Berliner Tagung 1902], Strasbourg 1903, supplément 22, p. 145; réimpr. dans: Sirius, Z. für populäre Astronomie (Leipzig) 36 (1903), p. 169.

LIBRAIRIE GAUTHIER VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

BAILLAUD (B.), Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, Directeur de l'Observatoire. — **Cours d'Astronomie à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

I^{re} PARTIE : Quelques théories applicables à l'étude des sciences expérimentales. — Probabilités : erreurs des observations. — Instruments d'Optique. — Instruments d'Astronomie. — Calculs numériques, interpolations, avec 58 figures; 1893 8 fr.

II^e PARTIE : Astronomie sphérique. Mouvements dans le système solaire. Eléments géographiques. Eclipses. Astronomie moderne, avec 72 fig.; 1896 15 fr.

Extrait de la Préface du Tome I.

Nous nous sommes proposé d'exposer dans le présent Ouvrage, aussi brièvement qu'il nous serait possible de le faire, les notions essentielles de l'Astronomie, notions dont l'étude sérieuse est d'un haut intérêt pour les étudiants des Facultés des Sciences, l'Astronomie utilisant constamment des procédés applicables aux Sciences expérimentales, aussi bien que les méthodes générales des Sciences mathématiques.

Nous avons réuni dans une première Partie diverses questions dont la connaissance intéresse autant les physiciens que les astronomes : les principes du Calcul des probabilités et leur application à la Théorie des erreurs des observations; l'étude des instruments d'Optique; celle des instruments de précision qui servent à la mesure du temps, des longueurs ou des angles et, en particulier, des principaux instruments astronomiques; les procédés usités dans les calculs numériques, notamment l'emploi des Tables de logarithmes des nombres et des fonctions trigonométriques, celui des logarithmes d'addition, les formules principales de la Trigonométrie sphérique, les méthodes d'interpolation.

La seconde Partie de cet Ouvrage sera consacrée à l'Astronomie elle-même. Nous y introduirons, avec les questions explicitement comprises dans le programme de la Licence des Sciences mathématiques, diverses questions d'Astronomie théorique qui doivent être, aujourd'hui, regardées comme élémentaires : la détermination des orbites des planètes et des comètes d'après trois observations, les principes de la théorie des planètes, de la théorie de la Lune et du calcul numérique des perturbations.

Nous ne pouvons, en terminant, que solliciter l'indulgence des lecteurs. C'est une entreprise hardie que la rédaction d'un Traité didactique. Nous ne nous y serions pas décidé, même après quinze années d'enseignement, s'il ne nous avait paru utile de réunir en un livre peu volumineux un certain nombre de connaissances importantes que les étudiants ne trouvent qu'éparses dans des Traités spéciaux.

Extrait de la Table des Matières du Tome I.

I^{re} Partie. Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales. CHAP. I. Principes du Calcul des probabilités. — CHAP. II. Loi de probabilité des erreurs. Combinaison des observations. — CHAP. III. Théorie générale des instruments d'Optique. — CHAP. IV. Dispersion. Achromatisme. — CHAP. V. Théorie des instruments d'Optique en deuxième approximation. Aberration de sphéricité d'une lentille. Propriété des faisceaux infiniment minces. Lignes focales. Cas du prisme. — CHAP. VI. Vision. Nature et clarté des images.

au foyer d'un instrument d'optique. Loupe. Lunette astronomique. Oculaires. Microscope. Télescope à miroirs. — CHAP. VII. Pendules, chronomètres. Niveau, vernier, microscope micrométrique. Cercle méridien, équatorial. Description sommaire de l'équatorial coudé, de l'altazimut, du sextant, de l'héliomètre. — CHAP. VIII. Mesure des angles et des arcs au moyen des unités ordinairement employées. Précision que comportent les calculs numériques; exemples. Logarithmes d'addition et de soustraction. Formules principales de la Trigonométrie sphérique. Résolution d'un triangle sphérique dans le cas qui se présente ordinairement en Astronomie. Théorème de Legendre. — CHAP. IX. Interpolation. Formules de Newton, de Lagrange, algorithme des différences. Application aux calculs des dérivées, de l'intégrale simple et de l'intégrale double d'une fonction. Méthode de Gauss pour le calcul d'une intégrale simple. Interpolation au moyen des séries trigonométriques. Calcul des coefficients. Formule de Jacobi. Quelques développements en séries.

Préface du Tome II.

Dans la Préface du premier Volume de cet Ouvrage, nous avons sommairement marqué l'objet que nous nous proposons, et indiqué les matières que renfermerait le second Volume. Nous avons voulu réunir, en un Livre aussi concis qu'il nous serait possible de le faire, les notions les plus immédiatement indispensables à l'étudiant qui veut apprendre l'Astronomie. Ce n'est pas un Traité complet que nous avons voulu écrire. Tout en espérant que ce Livre pourrait être utile à d'autres, nous avons eu spécialement en vue les étudiants des Facultés des Sciences, en particulier les candidats à la Licence, examen dont il nous a toujours paru nécessaire d'élargir le programme d'Astronomie. Nous n'avons pas hésité à introduire, dans un Livre destiné surtout à cette catégorie d'étudiants, les problèmes relatifs aux déterminations d'orbites, les éléments de la Mécanique céleste, les propositions les plus simples de la haute Géodésie qui, à notre avis, rentrent dans ce fonds commun de connaissances auquel correspond la Licence et offrent aux étudiants d'admirables exemples de l'application des méthodes de l'Algèbre et de l'Analyse.

Bien que nous ayons voulu surtout écrire un Livre de Mathématiques et non une Astronomie descriptive, ni un Traité de Physique céleste, nous avons cru indispensable d'indiquer rapidement les problèmes et les méthodes de l'Astronomie moderne et quelques-uns des résultats obtenus. Nous leur avons consacré le dernier Chapitre de ce Volume. Quelques-unes des questions qui y sont traitées auraient eu leur place marquée dans le premier Volume; quelques-unes mêmes, comme la Spectroscopie, y avaient été signalées. Nous avons cru bon de les rassembler à la fin de l'Ouvrage, comme en un Chapitre complémentaire, afin de faire profiter le lecteur des derniers progrès accomplis....

Extrait de la Table des Matières du Tome II

II^e Partie. Astronomie sphérique. Astronomie physique. CHAP. I. Sphère céleste. Coordonnées d'un astre. Mouvement diurne. — CHAP. II. Réfraction astronomique. Modification qu'elle produit dans la distance zénithale d'un astre, dans la différence d'angle horaire et la différence de distance polaire de deux astres très voisins. Mesure des hauteurs au moyen du baromètre. — CHAP. III. Parallaxe. — CHAP. IV. Aberration des fixes. Son influence sur les coordonnées équatoriales d'un astre. Influence du mouvement du système solaire dans l'espace. Aberration annuelle; éclipse d'aberration. Aberration diurne. Aberration des planètes. — CHAP. V. Déplacement de l'écliptique et de l'équateur sur la sphère, précession des équinoxes. Précession lunisolaire, précession planétaire, précession générale. Nutation. Éléments de la précession

sur l'équateur. Variation des coordonnées écliptiques ou équatoriales des astres dues à la précession proprement dite. Précession annuelle; sa détermination directe. Influence de la nutation. Formules pour trouver les coordonnées vraies d'un astre à une date donnée. Influence de la précession sur les éléments qui définissent un grand cercle de la sphère. Mouvements propres des étoiles. — CHAP. VI. Observations du Soleil. Ascension droite et déclinaison de son centre. Diamètre apparent, distance du Soleil à la Terre. L'orbite apparente du Soleil est plane, équinoxes. Cette orbite est une ellipse : périégée, excentricité. Position du Soleil à un instant donné; anomalie vraie, excentrique; équation de Képler, anomalie moyenne. Résolution de Képler, méthode de Gauss. Développements en séries. Equation du centre. Durée de la révolution du Soleil, année sidérale, année tropique. Jour moyen. Transformation du temps sidéral en temps moyen et vice versa. Equation du temps. Calendrier. — CHAP. VII. Mouvements apparents des planètes. — Elongations; stations; rétrogradations. Révolutions sidérales, synodiques. Lois de Képler; constante de Gauss. Éléments de l'orbite. Déterminations de la position de l'astre à un instant donné dans une orbite elliptique, dans une orbite parabolique; cas des orbites très allongées. Calcul des coordonnées géocentriques. Variation des coordonnées correspondant à des variations déterminées des éléments. — CHAP. VIII. Détermination d'une ellipse par deux rayons vecteurs et l'intervalle de temps mis par l'astre à passer de l'un à l'autre. Même problème pour la parabole. Théorème d'Euler. Théorème de Lambert. Rapport des aires des triangles compris entre trois rayons vecteurs. Expressions des distances d'une planète à la Terre à trois époques, en fonction des aires de triangles compris entre les rayons vecteurs menés du Soleil à la planète à ces trois époques. — CHAP. IX. Détermination d'une orbite elliptique. Trois observations complètes donnent les six équations nécessaires. Réductions préliminaires et changement d'axes de coordonnées. Méthode de Gauss. Méthode d'Oppolzer. Orbites circulaires. — CHAP. X. Comètes. Généralités sur leurs orbites. Méthode d'Olbers pour la détermination d'une orbite parabolique. — CHAP. XI. Lois de Newton. Équations des mouvements des planètes autour du Soleil. Intégration dans le cas d'une seule planète. — CHAP. XII. Mouvement troublé : intégrales du problème des $n + 1$ corps. Méthode d'approximation de Lagrange, dite de la variation des constantes arbitraires : application aux inégalités séculaires des planètes principales. — CHAP. XIII. Calcul des perturbations spéciales par quadratures mécaniques. Méthode de la variation des éléments. Méthode des coordonnées rectangulaires ou méthode de Bond et d'Encke. Méthode des coordonnées polaires, ou méthode de Hansen, perfectionnée par Tietjen. Comparaison des éléments primitifs aux observations. Lieux normaux. — CHAP. XIV. De la Lune. Équations différentielles du mouvement d'un satellite. Réduction des équations qui donnent la latitude et le rayon vecteur à une équation linéaire du second ordre à coefficients périodiques. Intégration approchée de cette équation; application au cas de la Lune. Expression du temps en fonction de la longitude. Valeurs numériques des principales inégalités obtenues. Inégalité parallaxique; inégalité séculaire du moyen mouvement. — CHAP. XV. Satellites de Jupiter. Représentation approchée de leurs mouvements. Explication de leurs principales inégalités. Éclipses des satellites. Vitesse de la lumière. — CHAP. XVI. La Terre. Aperçu historique concernant l'étude de sa forme et de ses dimensions. — CHAP. XVII. Forme de la Terre : instruments et mode de mesure. Mesure des bases et des angles : règles, altazimut, signaux. Détermination, dans un observatoire ou en voyage, de l'heure, de la latitude, de la longitude; azimut d'un signal géodésique. — CHAP. XVIII. Calculs géodésiques. Triangulations. Mesures de l'intensité de la pesanteur au moyen du pendule; formules de Bouguer. Calcul des triangles géodésiques. Calcul des longitudes, des latitudes et des azimuts. Longueur d'un arc de méridien. Résultats. Nivellement géodésique, nivellement mathématique. — CHAP. XIX. Des cartes géographiques. — CHAP. XX. Apparences qu'offrent les astres du système solaire. Rotation. Phases. Éclipses. — CHAP. XXI. Astronomie moderne. Distances, mouvements, éclat des étoiles. Spectroscopie. Photométrie.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS 6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

BULLETIN ASTRONOMIQUE

FONDÉ EN 1884 PAR

E. MOUCHEZ et F. TISSERAND,

Publié par l'Observatoire de Paris sous la direction de

B. BAILLAUD,

Directeur de l'Observatoire

Avec la collaboration de

H. Andoyer, G. Bigourdan, H. Deslandres, G. Fayet et P. Puiseux

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris 16 fr.
Départements et Union postale..... 18 fr.

Ce Bulletin comprend deux Parties distinctes :

La première contient des observations présentant un intérêt d'actualité, faites dans nos observatoires pendant le mois précédent, des éphémérides de planètes ou de comètes, et aussi des Mémoires ou des Notices sur diverses questions d'Astronomie théorique ou pratique.

Dans la seconde Partie se trouvent une revue aussi complète que possible de toutes les nouvelles astronomiques et une analyse des principales publications périodiques et des Ouvrages nouvellement parus.

Enfin, quand l'occasion s'en présente, une troisième Partie donne, sous le titre *Variétés*, des articles sur des questions d'actualité concernant les Sciences liées étroitement avec l'Astronomie, telles que la Physique du globe, la Géodésie, la Météorologie; on y traite aussi de points intéressants relatifs à l'histoire de la Science.

Le Bulletin est assuré de l'active collaboration des astronomes français, qui peuvent y publier régulièrement, soit les Observations, soit les Notices ou Mémoires qu'ils étaient obligés d'envoyer auparavant à des journaux de l'étranger. L'entente commune que ce Bulletin établit entre les divers Observatoires leur donne en outre une précieuse facilité pour coordonner leurs travaux de la manière la plus utile au progrès de la Science.

Enfin le Bulletin accepte aussi avec empressement les Observations et les Articles que veulent bien lui adresser les astronomes étrangers.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

COURS D'ASTRONOMIE PRATIQUE

APPLICATION

A LA GÉOGRAPHIE ET A LA NAVIGATION,

PAR

E. CASPARI,

Ingénieur hydrographe de la Marine.

OUVRAGE COURONNÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DEUX BEAUX VOLUMES GRAND IN-8, SE VENDANT SÉPARÉMENT.

- I^{re} PARTIE : *Coordonnées vraies et apparentes. Théorie des instruments.*
Avec figures dans le texte; 1888..... 9 fr.
II^e PARTIE : *Détermination des éléments géographiques. Applications
pratiques.* Avec figures dans le texte et 1 planche; 1888..... 9 fr.

Avant-propos de l'Auteur.

Celui qui entreprend l'étude de l'Astronomie se trouve en présence d'une bibliographie abondante en chefs-d'œuvre : vouloir y ajouter un Livre qui n'a pas pour lui l'excuse d'une nouveauté complète peut paraître présomptueux ou pour le moins inutile : il est donc nécessaire de marquer les raisons qui nous ont fait entreprendre ce travail, et d'en bien préciser l'objet.

Chargé, à plusieurs époques, de professer un cours d'Astronomie pratique aux services hydrographiques de la Marine, nous avons eu l'occasion de reconnaître que, malgré l'abondance des Traités sur des matières connexes, on manque, en France, d'un Manuel pouvant servir de Guide pratique pour la solution des problèmes plus spécialement géographiques. Les Traités classiques de Franccœur, de Brunnow, de M. Faye et bien d'autres, ont plus particulièrement en vue les travaux des grands observatoires : la majeure partie de leur contenu est inutile au voyageur; les Traités d'Hydrographie et de Navigation, au contraire, n'envisagent qu'un seul côté du problème.

Il est nécessaire, pour bien exposer cette partie de la Science, d'avoir pratiqué les observations dans des circonstances variées de temps et de lieux et d'en avoir calculé soi-même les résultats. Il n'est pas moins utile d'avoir appris, par la pratique de l'enseignement, quels sont les points de doctrine qui réclament plus de développements, quels sont les malentendus qu'il faut éviter. C'est parce que nous avons fait cette double expérience des voyages et de l'enseignement que nous nous sommes cru autorisé à entreprendre cette tâche. Notre ambition est d'être utile au marin aussi bien

qu'à l'explorateur des continents : la différence du mode de locomotion ne peut pas introduire une différence essentielle dans les méthodes destinées à fixer la position des points.

Nous n'entrons pas dans le détail du calcul des éphémérides : nous devons nous borner à montrer l'usage pratique qu'on en fait, en expliquant sommairement la signification de leur contenu. Nous avons eu plus particulièrement en vue l'usage de la *Connaissance des Temps*, qui est aujourd'hui au premier rang des Almanachs astronomiques.

Nous insistons sur les instruments et les méthodes d'observation. Le voyageur n'a souvent à sa disposition que des instruments imparfaits plus ou moins détériorés ; mais il est possible, même dans ce cas, par un choix judicieux des méthodes d'observation, de résoudre les problèmes avec une précision plus grande que celle que l'on pouvait espérer *a priori*. C'est dire que, sans vouloir aborder par le menu tous les problèmes possibles de Trigonométrie sphérique, et en élaguant tous ceux dont l'intérêt pratique n'est pas bien net, nous nous sommes efforcé de donner un choix d'un assez grand nombre de méthodes éprouvées par l'expérience. Nous y joignons des démonstrations aussi simples, mais aussi variées que possible, afin de familiariser l'esprit avec les méthodes analytiques aussi bien qu'avec celles de la Géométrie : elles ne sont pas uniquement destinées à établir la vérité de nos formules, mais elles doivent guider le lecteur pour lui apprendre à modifier lui-même les solutions des problèmes selon les cas variés qui se présentent et à voir toujours, par delà les expressions algébriques, les faits concrets dont ces expressions sont la traduction. . . .

Afin de bien accentuer le caractère pratique du Livre, nous avons appuyé nos démonstrations par des exemples choisis parmi nos observations personnelles, faites tant sur les côtes de France ou à l'Observatoire du Dépôt de la Marine que hors d'Europe, aux Antilles, en Indo-Chine et en Afrique.

Nous terminons par la théorie des erreurs et la résolution des équations de condition. Nous tenions, en effet, à accompagner cette théorie d'exemples pris dans ce qui précède : il sera pourtant utile d'en étudier les principes en même temps que tous les autres problèmes : elle est l' α et l' ω des Sciences d'observation. Mais sa principale utilité, pensons-nous, est de guider l'observation elle-même ; et nous attachons beaucoup moins d'intérêt à la manière de résoudre les équations de condition, qui, dans la plupart des cas que nous examinerons, n'ajouterait guère à l'exactitude des résultats obtenus et discutés autrement, qu'à la marche à suivre pour établir ces équations et évaluer la précision d'une observation.

Les Tables numériques données à la suite de la première Partie dispenseront de l'emploi de Tables auxiliaires autres que celles des logarithmes et de la *Connaissance des Temps*.

E. C.

EXTRAIT DES *Nouvelles Annales de Mathématiques* (mai 1888).

. . . L'un des mérites de M. Caspari est d'avoir su se borner : son sujet est nettement circonscrit ; il s'agit, comme le sous-titre du livre l'indique, non d'un traité complet d'Astronomie pratique, mais de l'application de l'Astronomie à la Géographie et à la Navigation. . . .

Certes il serait malaisé d'inventer beaucoup sur des questions abordées déjà par Ulysse et par les Phéniciens et si diversement résolues depuis Copernic et Tycho Brahé. Mais, si le sujet n'est pas neuf, il a peut-être plus qu'un autre besoin d'être rajeuni. Il y a, sans nul doute, une place à prendre à côté du charmant volume de M. Faye, que les gens du métier trouvent trop exclusivement théorique. Nous ne voulons pas dire, on le

pense bien, qu'il faut se priver des ressources de la Géométrie et de l'Analyse; à notre sens, au contraire, le praticien digne de ce nom doit posséder parfaitement toutes les connaissances propres à faciliter sa besogne et il doit manier le calcul et les formules avec la même dextérité que le théodolite ou le sextant. Le véritable objectif est une étude approfondie des instruments et des méthodes, une critique sévère qui montre l'étendue et les limites de leur emploi, et qui apprenne à en tirer le meilleur parti dans les circonstances si diverses où l'observateur peut être placé.

L'examen attentif du livre de M. Caspari permet d'affirmer, à en juger par ce premier Volume, que l'auteur a rempli ce programme avec autant de conscience que de talent.

C'est la théorie des instruments qui nous a le plus séduit. Un Chapitre est consacré aux instruments pour la mesure des angles, lunette astronomique, cercles divisés, cercle méridien, théodolite, instruments à réflexion. Un autre est relatif aux chronomètres et contient le résumé des travaux de MM. Phillips, Lieussou, Daussy, Vincendon, Mouchez, Villarceau, etc. On trouve dans ces deux Chapitres, outre une exposition claire et précise, des remarques intéressantes, des détails ingénieux qui révèlent, chez l'auteur, la double expérience des voyages et de l'enseignement. Non seulement M. Caspari connaît à fond tous les secrets du métier, mais il les dévoile avec l'art et la mesure d'un professeur qui sait instruire sans fatiguer. Cette Partie, qui forme les deux derniers tiers du Volume, sera certainement fort appréciée, aussi bien par les personnes compétentes que par les lecteurs qui n'auraient aucune connaissance antérieure du sujet....

RÉSUMÉ DE L'OUVRAGE.

Première Partie.

Le Livre I, *Coordonnées vraies et apparentes*, résume toutes les notions et définitions nécessaires pour traiter les problèmes d'Astronomie sphérique. Le résumé de la Trigonométrie contient les formules ordinaires et différentielles, et les principaux développements en série. Tout en donnant les formules destinées à rendre, comme on dit, les expressions calculables par logarithmes, on recommande l'emploi des logarithmes d'addition et de soustraction, qui mériteraient d'entrer plus généralement dans l'usage.

Le problème des parallaxes est traité d'une façon toute générale, comme transformation des coordonnées; de simples substitutions de lettres dans les expressions obtenues donneront les parallaxes relativement à un système quelconque de coordonnées.

On oublie souvent qu'un tracé graphique peut, dans bien des cas, remplacer avec avantage des calculs longs et laborieux : il était donc utile de rappeler les principales méthodes à employer à cet effet.

Vient ensuite les définitions relatives à la sphère céleste, aux coordonnées des astres, aux mouvements diurne et annuel, à la mesure du temps, à l'usage des éphémérides et des Catalogues d'étoiles. Les coordonnées sont les angles et les côtés mêmes du triangle de position, les coordonnées polaires des Géomètres.

L'étude de la forme et des dimensions de la Terre et des éléments de l'ellipsoïde sert de base au calcul des parallaxes et de toutes les corrections qui en dérivent. Une esquisse de la théorie des réfractions astronomiques et géodésiques est surtout destinée à montrer ce qui, dans cette difficile question, est bien acquis, et ce qui reste encore hypothétique et incertain : l'essentiel est que le lecteur se rende compte des erreurs qui peuvent provenir de cette cause et du degré d'approximation qu'il est possible d'atteindre par l'observation.

Le Livre II, *Théorie des instruments*, contient la description des instruments portatifs pour la mesure des angles et du temps. Il a paru utile d'insister sur les organes tels que lunettes, niveaux, cercles divisés, etc., dont la connais-

sance exacte est beaucoup plus nécessaire que les descriptions détaillées des instruments complets. Le cercle méridien, le théodolite ou altazimut, l'instrument des passages au premier vertical et les instruments à réflexion sont étudiés avec soin, et plus spécialement au point de vue des corrections instrumentales et des procédés d'observation propres à déterminer ces corrections ou à en éliminer les effets. Il n'y a aucune raison pour ne pas appliquer aux instruments portatifs les méthodes en usage dans les observatoires : on ne peut jamais les supposer rectifiés d'une façon parfaite, quelque soin qu'on y apporte, tandis qu'il est relativement facile de mesurer et de calculer les erreurs.

La théorie des chronomètres, dont l'auteur s'occupe depuis longtemps d'une façon toute spéciale, est traitée dans le même esprit. Le chronomètre est un instrument précieux pour qui le connaît bien, et dont on ne tire pas toujours tout le parti possible; mais il est nécessaire pour cela, non seulement d'avoir une idée nette des parties qui le composent, mais encore de connaître toutes les causes d'inégalité de la marche et la loi de leur action. Ces causes sont étudiées en détail, et leur étude est suivie d'un examen critique des formules proposées pour représenter leurs effets et de l'exposé des moyens propres à en déterminer les constantes.

Seconde Partie.

Le Livre III, *Détermination des éléments géographiques*, traite des problèmes de l'Astronomie sphérique. Colatitude, Heure, Azimut et Longitude : tels sont les titres de ses quatre Chapitres. Chaque question est résolue par plusieurs méthodes de calcul, dans le but de provoquer la vérification systématique des opérations numériques; la précision des résultats est discutée avec soin, et de nombreux exemples expliquent l'usage des formules.

Nous signalons plus particulièrement à l'attention du lecteur : la détermination de la latitude par la mesure du temps que met le Soleil à passer par un vertical donné; le calcul de l'heure par les distances zénithales doubles et par les hauteurs égales de deux étoiles différentes; la détermination simultanée de l'heure et de la latitude par des observations faites dans le voisinage du méridien et le calcul des corrections que comporte cette précieuse méthode: l'emploi des observations de passages au premier vertical et des digressions des circompolaires pour trouver la latitude et l'azimut; des méthodes nouvelles et simples pour le calcul des longitudes par le transport du temps; le calcul de la longitude par les observations de la Lune, culminations, distances, hauteurs égales de la Lune et d'une étoile; la prédiction graphique des occultations, etc.

Le Livre IV, *Application pratique*, donne le résumé substantiel de la marche à suivre pour dresser les Cartes et pour s'en servir. Il débute par la théorie des projections de Cartes : au lieu d'en étudier un grand nombre, il a paru préférable de traiter avec détail les plus intéressantes, sur lesquelles on peut faire des constructions géométriques, savoir : celle de Mercator et les canevas stéréographique et gnomonique.

La Géographie et la Navigation procèdent des mêmes principes; leurs méthodes sont analogues, souvent identiques : *faire le point* et relier les points entre eux.

De là le *point* astronomique (détermination simultanée de la longitude et de la latitude, problème de Douwes, méthode Lalande, point rapproché) et le résumé des principes de la planimétrie et du nivellement, en envisageant plus spécialement la Géodésie expéditive. On trouvera quelques détails sur les courbes de hauteur.

La théorie des erreurs d'observation clôt l'Ouvrage. On a donné les notions essentielles sur la loi de probabilité des erreurs, d'après Gauss. L'auteur s'est attaché plus particulièrement à montrer par des exemples pratiques comment on établit les équations de condition et quelles sont les précautions à prendre pour ne réunir que des observations comparables entre elles. Les méthodes de résolution étudiées sont celles de Mayer, des moindres carrés et celle dite d'*interpolation*, de Cauchy.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

COURS
DE
MÉCANIQUE,

PAR

CH. CELLÉRIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE.

UN BEAU VOLUME GRAND IN-8 DE VIII-618 PAGES, AVEC NOMBREUSES
FIGURES; 1892. — PRIX : 12 FR.

Le *Cours de Mécanique* que nous publions est le dernier ouvrage de M. Cellérier, qui occupait la chaire de Mécanique à l'Université de Genève. L'auteur l'a terminé et entièrement recopié peu de mois avant sa mort, en 1889. Son intention étant de faire un Ouvrage pour l'enseignement de la Mécanique selon sa méthode personnelle, il ne s'est pas borné à une simple reproduction de son cours tel qu'il le professait, mais il lui a donné, en le rédigeant, une plus grande extension. Il a simplifié les démonstrations tout en augmentant leur rigueur; et ce qui semble être un caractère propre à ses écrits et en particulier à ce cours, c'est que, pour des sujets traités comme exemples ou applications, il ne s'en tient pas seulement aux résultats analytiques, mais les complète souvent par une discussion serrée, à l'aide d'un système d'inégalités conformes à la nature du problème.

Outre ce manuscrit, que nous livrons aujourd'hui à la publicité sans aucun changement, M. Cellérier a laissé un grand nombre de travaux inédits, dont plusieurs sont très importants, sur la Mécanique céleste, la Théorie des nombres, l'Électricité, l'Analyse, etc. L'Académie des Sciences de Paris a jugé son travail sur les *Variations des excentricités et des inclinaisons* digne d'être inséré dans les *Mémoires des Savants étrangers*. Nous lui exprimons ici notre profonde gratitude pour cet honneur rendu à la Mémoire de M. Cellérier. Nous conservons aussi une vive reconnaissance à M. Bertrand, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, ainsi qu'à M. Camille Jordan et à M. Gaston Darboux pour le bienveillant empressement avec lequel ils se sont occupés de l'examen et de la publication de plusieurs de ces manuscrits.

LA FAMILLE DE L'AUTEUR.

Genève, février 1892.

Table des Matières.

INTRODUCTION. Propriétés des résultantes. Projections. Propriétés des projections sur trois axes rectangulaires. Coordonnées dans l'espace. Distinction

des sens de rotation. Projections des aires. — CHAP. I. *Statique théorique* Notions préliminaires. Nature des corps dont on considère l'équilibre. Principe des vitesses virtuelles. Seconde forme du principe des vitesses virtuelles. Transformation des forces appliquées à un solide. Equilibre et transformation des forces appliquées à un même point. Equilibre et transformation des forces appliquées à un solide ne pouvant que glisser le long d'un axe fixe sans tourner, ou que tourner autour de lui sans glisser. Transformation des forces agissant sur un solide entièrement libre. Conditions d'équilibre et d'équivalence des forces agissant sur un solide. Moments d'une force par rapport aux axes. Moment principal d'une force et d'un système de force. Sommet des moments de forces par rapport à une droite quelconque menée par l'origine, et somme de leurs projections sur cette droite. Changement de coordonnées; cas où le système se réduit à une force unique. Couples. Equilibre et transformation des forces parallèles. Centres de gravité. — CHAP. II. *Applications de la Statique*. Equilibre d'un solide ne pouvant que tourner autour d'un axe fixe. Remarques sur l'emploi du principe des vitesses virtuelles. Applications du principe des vitesses virtuelles. Méthode générale de solution des questions de Statique. Forces de contact. Equilibre d'un système de solides. Exemples d'équilibre d'un solide sans frottement. Cas où sa forme et sa position sont données. Equilibre d'un solide en négligeant le frottement. Cas où l'on demande sa position. Exemple de l'équilibre d'un système de solides en négligeant le frottement. Equilibre d'une voûte. Equilibre d'une chaîne et d'un système articulé. Lois du frottement à l'état de repos ou de mouvement. Equilibre d'un solide en ayant égard au frottement. Equilibre d'un système de solides en ayant égard au frottement. Equilibre d'un corps déformable par rupture. Solides de moindre résistance. Murs de soutènement. Massif de terrain. Equilibre du polygone funiculaire. Equilibre d'un pont suspendu. Equations générales d'équilibre d'un fil flexible. Application de ce qui précède à l'équilibre d'un fil pesant et à la courbe des voiles. Equation de la chaînette. Flexion d'une tige. — CHAP. III. *Cinématique*. Mouvement d'un point. Accélération. Extension de la définition des résultantes. Composition de mouvements. Mouvement de translation d'une figure. Mouvement relatif et absolu. Distribution des vitesses dans un solide. Relations entre deux positions quelconques S , S' d'un même solide. Projections de la vitesse de rotation d'un point. Composition des vitesses de rotation. Démonstration géométrique du principe de la composition. Applications. Angles déterminant la position d'un solide par rapport à un point O . Expressions de p , q , r , au moyen de leurs dérivées. Mouvement de roulement et son application au déplacement d'une figure invariable. Transmission de mouvements. Engrenages. — CHAP. IV. *Première Partie de la Dynamique*. *Mouvement d'un point matériel*. Principes fondamentaux. Mouvement d'un point matériel produit par des forces. Equation du mouvement d'un point matériel. Loi du mouvement du centre de gravité. Méthodes d'intégration de l'équation du mouvement rectiligne. Mouvement rectiligne dû à une force constante. Mouvement vertical d'un corps pesant dans un milieu résistant. Mouvement rectiligne d'un point attiré vers un point fixe O proportionnellement à la distance. Mouvement d'un point attiré vers un point fixe O en raison inverse du carré de la distance. Remarques générales sur le cas où la vitesse devient infinie. Méthodes d'intégration des équations du mouvement curviligne. Mouvement dû à une force constante de grandeur et de direction. Equation du mouvement dû à une force centrale. Cas où la force est proportionnelle à la distance. Mouvement dû à une force centrale. Application de ce qui précède à l'attraction universelle. Autre méthode d'intégration du même mouvement. Loi des vitesses. Mouvement d'un corps pesant dans l'air. Mouvement d'un corps pesant attiré vers un point fixe O en raison inverse du carré des distances. Travail des forces. Principe des forces vives dans le mouvement d'un point matériel. Pendule simple. Pendule cycloïdal. Recherche de la brachistochrone. Pendule conique. Théorie du choc. Equilibre mobile de rotation. Forces apparentes et leur application aux mouvements terrestres. Force apparente provenant de la translation terrestre. Force centrifuge. Effets de la force centrifuge composée. — CHAP. V. *Evaluations des sommes géométriques*. Préliminaires. Expression des sommes étendues à une aire plane. Sommes étendues à un volume ou une surface courbe,

en coordonnées linéaires ou semi-polaires. Sommes étendues à un volume ou une surface courbe en coordonnées polaires. Centres de gravité. Moments d'inertie et axes principaux. Moments d'inertie de divers corps. Evaluation générale de l'attraction d'une masse quelconque sur un point. Applications diverses. Théorème de Green. Application à l'attraction d'une surface sphérique. Attraction d'une sphère et ses applications. Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur. Attraction d'un polygone ou d'un polyèdre sur un point H. — CHAP. VI. *Seconde Partie de la Dynamique. Mouvement d'un solide ou d'un système de solides.* Lois des aires. Principe de d'Alembert. Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. Pendule composé. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Cas où les moments μ , μ' , μ'' sont nuls. Mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe. Mouvement d'une toupie dont la pointe repose sans frottement sur un plan horizontal. Mouvement de l'axe de la Terre. Première forme des équations du mouvement d'un système de solides. Application à la machine d'Atwood. Nature du système. Si le système est en repos ou a un mouvement régulier, les travaux des forces de contact correspondant à un déplacement régulier infiniment petit quelconque ont une somme nulle. Principe des vitesses virtuelles. Seconde forme des équations du mouvement d'un système. Principe des forces vives. Réciproque du principe des vitesses virtuelles. Remarques sur les formules (A) et (B) du n° 98. Equations du mouvement sous forme finie. Conditions additionnelles. Liaisons dues aux solides sans masse. Cas où les liaisons sont fonctions du temps. Formules de Lagrange. Mouvement du gyroscope. Effets d'un tremblement de terre. Effets d'une percussion extérieure sur un solide. Effets des percussions extérieures sur un système; centre de percussion. Effet d'une percussion intérieure sur un système. Fonction des forces. Stabilité de l'équilibre. Application à la chatnette. — CHAP. VII. *Complément de la Dynamique.* Signification industrielle du travail. Transmission du travail par les machines. Résistances passives. Effet des déformations. Moyens de régulariser le travail. Modérateurs, régulateurs et volants. Mesure du travail. Frein de Prony. Vibrations longitudinales d'une tige élastique. Emploi du principe de d'Alembert. Relations fondamentales entre les pressions intérieures d'un corps. Valeur des pressions en fonction des variables qui expriment la déformation. Principes généraux relatifs aux petits mouvements vibratoires. — CHAP. VIII. *Mécanique des fluides.* Formules générales. Hydrostatique. Propriétés des surfaces de niveau. Formule barométrique. Equilibre des fluides pesants. Hydrodynamique. Applications. Remarques générales sur le mouvement des fluides. Démonstration du principe des forces vives pour un liquide. Principes fondamentaux de l'Hydraulique. Formule de Bernoulli. Effet d'un élargissement du courant. Effet d'un obstacle. Ecoulement par un orifice. Vérification expérimentale des formules du numéro précédent. Remarques sur les pertes de charge. Frottements. Applications. Application du principe des forces vives aux moteurs hydrauliques. Travail moteur pendant le mouvement périodique.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

PONGELET. — **Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale.** 3^e édition, publiée par *Kretz*, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. Un beau volume in-8 de 757 pages, avec 3 planches; 1870..... 12 fr

SAINT-GERMAIN (de), Professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen. — **Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle,** à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation des Sciences mathématiques. 2^e édition, revue et augmentée. In-8, avec figures; 1889. 9 fr. 50 c.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6°).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

DESCRIPTION ET USAGE
DE
L'ASTROLABE A PRISME

PAR

A. CLAUDE,
Membre adjoint
du Bureau des Longitudes.

L. DRIENCOURT,
Ingénieur hydrographe en chef
de la Marine.

IN-8 (22-16) DE XXX-392 PAGES, AVEC 35 FIGURES ET 7 PLANCHES,
1910. Cartonné..... 45 FR.

Extrait de l'Avant-propos.

Cet Ouvrage se compose de deux Parties très inégales : la première, qui comprend les Chapitres I à VI inclus. est plus particulièrement descriptive et théorique. Les Chapitres I et II contiennent les principes de l'astrolabe à prisme, l'étude de l'influence des erreurs instrumentales, la description des deux types d'instruments, les procédés à employer pour leur réglage et la marche des images dans le champ de la lunette de chacun d'eux. Le Chapitre III est entièrement consacré à l'exposition de la méthode générale des hauteurs égales pour la détermination de la latitude et de l'heure et de son application au cas particulier des hauteurs observables avec l'astrolabe à prisme. Il débute par l'exposé des notations et conventions adoptées qui sont les plus commodes pour l'Astronomie de position et par une étude de la précision de la droite de hauteur, question qu'on ne trouve traitée nulle part et qui est fondamentale pour tous les problèmes d'Astronomie où interviennent les mesures de hauteurs d'astres.

Le problème général des hauteurs égales est abordé ensuite. La solution géométrique, extrêmement simple en théorie, est inacceptable en pratique, et il est nécessaire d'avoir recours au calcul pour le tracé des cercles de hauteur approchés. Ceux-ci peuvent être remplacés par des droites; d'autre part, on peut substituer à la sphère une projection plane. Les limites dans lesquelles les substitutions sont permises sont nettement définies. Le problème se trouve ainsi ramené à celui du tracé d'un cercle sur un plan connaissant un certain nombre de tangentes. Les différents procédés de calcul et de construction graphique sont successivement étudiés et comparés entre eux. Enfin, on trouve les formules pour le choix de

la solution graphique par la méthode des moindres carrés et la marche à suivre pour tracer directement le cercle tangent sur le graphique à grande échelle avec une approximation suffisante dans la plupart des cas. La détermination des éléments approchés complète cet exposé du problème général. Le Chapitre se termine par l'étude d'un problème particulier intéressant, celui de la détermination de l'heure en un lieu de latitude connue. Ce problème est susceptible d'une solution très rapide au moyen d'une Table d'angles horaires dont le mode de construction est donné.

La détermination des longitudes par les hauteurs égales de Lune et d'étoiles, qui forme la matière du Chapitre IV, est traitée également par la méthode des lieux géométriques. Cette application de la méthode est nouvelle et constitue un perfectionnement relativement aux anciens procédés. La position de la Lune au moment de l'observation est définie sur une projection plane à grande échelle par l'intersection de deux droites, dont l'une est graduée en temps du premier méridien; l'heure du premier méridien s'obtient ainsi par simple lecture. Des formules donnent l'effet produit sur la longitude par une erreur sur chacun des éléments qui entrent dans sa détermination.

Les Chapitres V et VI concernent la préparation des observations et l'identification des étoiles inconnues observées. Ces deux problèmes qui sont inverses l'un de l'autre sont résolus d'abord par le calcul, puis nomographiquement et au moyen de Tables. La préparation des circomméridiennes qui réclame plus de précision, de même que la recherche précise d'une étoile inconnue observée, font l'objet d'études spéciales. Nous avons omis de parler de l'identification de toutes les étoiles lorsque la colatitude et l'état de la montre sont inconnus. Il faudrait pour cela avoir une Carte céleste assez exacte dans le genre de celle qu'avait publiée l'ingénieur hydrographe Chazallon en 1850 et dont on ne trouve plus que de rares exemplaires. La solution de ce problème est un nouvel exemple des services que peuvent rendre les méthodes graphiques.

La deuxième Partie, qui se distingue du reste du Volume par le rouge de la tranche, est formée du septième et dernier Chapitre intitulé : *Pratique des observations et des calculs*. Elle renferme, classées dans l'ordre où l'on peut en avoir besoin, toutes les notions vraiment pratiques acquises au cours de la première, avec des exemples de séries d'observations et de détermination de longitude. Les Tables générales de préparation, à défaut de l'abaque général, figurent à la suite du numéro relatif à leur emploi. Nous avons adopté pour les Tableaux numériques de calages et de calculs les dispositions que notre expérience nous a fait reconnaître comme étant les meilleures. Ils ont été autographiés de façon à servir de types qu'on n'ait qu'à copier sans avoir à modifier les dimensions des colonnes. Les graphiques peuvent être pris également comme modèles. L'Ouvrage se termine par une Note sur les conditions de parallélisme des rayons lumineux quelconques réfléchis à l'intérieur d'un prisme.

Tel qu'il est, notre Manuel présente sans doute bien des défauts, dont quelques-uns ne nous ont pas échappé. Un travail de ce genre ne saurait être complet du premier coup. Aussi nous serons très reconnaissants à ceux de nos lecteurs qui voudront bien nous signaler des corrections, des lacunes ou des simplifications.

Table des Matières.

Introduction. — **CHAP. I. De l'astrolabe à prisme.** Principe de l'astrolabe à prisme. Description de l'instrument type Vion. Réglage de l'instrument type Vion. Marche des images dans le champ de l'astrolabe type Vion. —

CHAP. II. Instruments de M. Jobin. Description de l'astrolabe à prisme modèle géodésique de M. Jobin. Autres modèles. Réglage des instruments. Marche des images dans le champ des instruments de M. Jobin. Etude de la marche des images directe et réfléchie. — **CHAP. III. Méthode des hauteurs pour la détermination de la latitude et de l'heure locale. Son application au cas particulier des hauteurs observées avec l'astrolabe à prisme.** Préliminaires. Problème général des hauteurs égales. Cas particulier des observations faites avec l'astrolabe à prisme. Calcul des points déterminatifs et des azimuts. Construction graphique. Choix de la solution graphique. Détermination des éléments approchés. Problèmes particuliers des hauteurs égales. Détermination de l'heure. — **CHAP. IV. Détermination des longitudes géographiques par les hauteurs égales de Lune et d'étoiles.** Définition. Diverses méthodes pour obtenir la longitude susceptibles d'être appliquées avec l'astrolabe à prisme. Principe de la méthode des hauteurs égales de Lune et d'étoiles. Solution graphique. Corrections de parallaxe et de demi-diamètre. Circonstances favorables pour l'emploi de la méthode. Influence produite sur la longitude par les erreurs des éléments entrant dans sa détermination. — **CHAP. V. Préparation des observations.** Emploi du calcul. Emploi de Tables ou de nomogrammes. Formation du Tableau de calages. — **CHAP. VI. Identification des étoiles observées.** Emploi du calcul. Emploi des Tables ou des nomogrammes de préparation. Recherche plus précise d'une étoile inconnue observée. Calcul des positions moyennes pour l'identification. — **CHAP. VII. Pratique des observations et des calculs.** Préparation des observations. Mise en station de l'instrument. Observations. Calculs et graphiques.

Types de calculs. Calculs de positions moyennes et appareils d'étoiles. Détermination de valeurs approchées des inconnues et de la marche. Calcul des points déterminatifs des droites de hauteur approchées et des azimuts. Construction d'une Table d'angles horaires, d'azimuts et d'angles à l'astre. Usage des Tables d'angles horaires pour le calcul des points déterminatifs de deuxième espèce. Construction graphique des droites de hauteur approchées. Choix de la solution graphique. Recherches des erreurs. Identification des étoiles inconnues observées.

Types de calculs et graphiques. Calcul d'une série d'observations. Construction d'une table d'angles horaires. Recherche d'une étoile inconnue observée.

Types de calcul et graphique. Détermination d'une longitude par des hauteurs égales de Lune et d'étoiles.

Note I. Conditions de parallélisme des rayons lumineux quelconques réfléchis à l'intérieur d'un prisme. — **PLANCHES I à VII.**

A LA MÊME LIBRAIRIE

BLIM (E.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur, Chef du Service des Ponts et Chaussées en Cochinchine, et **ROLLET de l'ISLE,** Ingénieur hydrographe de la Marine. — **Manuel de l'Explorateur. Procédés de levés rapides et de détail. Détermination astronomique des positions géographiques.** 2^e édition, in-18 (19-12), avec 90 fig., modèles d'observations ou de carnets de levés; 1911. Cartonné..... 5 fr.

CRÉPIN de BEAUREGARD, (P.) Chef de bataillon d'Infanterie coloniale, Ancien Stagiaire au Service géographique de l'Armée. — **Guide scientifique du géographe-explorateur. (Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences.)** Volume in-8 (28-18) de x-250 pages, avec 102 figures, tables et 2 planches; 1912..... 10 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris

CONNAISSANCE DES TEMPS ou des mouvements célestes pour le méridien de Paris, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, publiée par le Bureau des Longitudes pour l'an 1915. in-8 (25-16) de xxx-856 pages, avec 2 Cartes en couleurs; 1913.

Broché..... 4 fr. | Cartonné..... 4 fr. 75 c.

Pour recevoir l'Ouvrage franco dans tous les pays de l'Union postale, ajouter 1 fr.

Le présent Volume est le 237^e d'une éphéméride qui n'a jamais souffert d'interruption depuis sa création, en 1679, par Picard, mais qui, à différentes époques, a subi dans sa composition et dans sa forme d'utiles modifications.

Le Bureau des Longitudes, institué par la Convention nationale en 1795, fut principalement chargé de la rédaction et de la publication de la *Connaissance des Temps*. C'est surtout depuis cette époque que la *Connaissance des Temps* a reçu de nombreuses additions et d'importants perfectionnements. Chaque année, on s'est efforcé de réunir dans le Volume correspondant l'ensemble des données utiles aux astronomes, et de les présenter sous la forme la plus pratique, en réduisant au minimum les calculs nécessaires à leur utilisation.

Mais, en raison des besoins toujours croissants de l'Astronomie et devant l'impossibilité matérielle de satisfaire intégralement à tous ces besoins, le Bureau des Longitudes et les différents Instituts similaires qui remplissent à l'étranger le même office, ont été amenés à établir un programme de collaboration : ce programme a été élaboré au cours du *Congrès international des Ephémérides astronomiques* tenu à l'Observatoire de Paris du 23 au 26 octobre 1911.

Le Congrès a reconnu qu'il était désirable que les divers Instituts de calcul ou Bureaux chargés de la préparation des éphémérides astronomiques missent dans l'avenir, au moins partiellement, leurs efforts en commun, de façon à assurer une plus grande production de travail utile, sans cependant augmenter leur tâche. Pour arriver à ce résultat, on a adopté le principe de l'échange du travail, en même temps que celui de la division du travail, en se proposant pour but de publier dans l'ensemble des recueils d'éphémérides toutes les données nécessaires aux besoins de l'Astronomie actuelle, sans que, cependant, chacun des recueils soit astreint à assumer isolément chaque année la totalité de cette publication. Mais en même temps, il a été expressément convenu de conserver à chacun des grands *Annuaire*s astronomiques son caractère propre, et l'on a écarté l'idée de réaliser une unification absolue ; bien au contraire, afin de faciliter les progrès de la théorie, on a maintenu, par exemple, l'emploi de sources diverses pour le calcul des éphémérides fondamentales du Soleil, de la Lune et des planètes.

Les résolutions adoptées par le Congrès forment une convention dont la mise en vigueur doit être faite successivement de manière à être complète en 1917. Dès la présente année 1915, la *Connaissance des Temps* offre avec les Volumes précédents des différences qui vont être signalées dans l'analyse suivante, et qui résultent presque toutes de l'application du programme élaboré par le Congrès.

Constantes astronomiques. — On a placé à la suite de cet avertissement un Tableau renfermant les valeurs des principales constantes astronomiques, en particulier celles adoptées par la *Connaissance des Temps*. Ce Tableau, qui figurait déjà dans le Volume de 1914, a été étendu cette année, de façon à comprendre les éléments relatifs aux observations physiques des astres et les éléments des satellites; d'une façon générale, on a indiqué les éléments adoptés par les Annaires qui publient les éphémérides correspondantes; on trouvera leur désignation plus loin.

Soleil. — L'éphéméride du Soleil est calculée d'après les Tables de Le Verrier, mais l'obliquité de l'écliptique (depuis la présente année seulement) est celle donnée par Newcomb, en même temps que les éléments de la précession et de la nutation adoptés par la *Conférence internationale des Étoiles fondamentales* (Paris, 1896).

Pour plus de détail sur la disposition de l'éphéméride, on consultera l'*Explication et usage des articles de la Connaissance des Temps*, à la fin du Volume; la même observation s'applique à ce qui suit.

Lune. — L'éphéméride de la Lune est calculée, depuis cette année, d'après les Tables de R. Radau fondées sur la théorie de Delaunay (*Annales du Bureau des Longitudes*, t. VII).

A la fin du Volume on trouvera la comparaison des coordonnées de la Lune tirées des Tables de Radau, aux mêmes coordonnées tirées des Tables de Hansen et affectées des corrections indiquées par S. Newcomb (Washington, 1878), telles que les publie le *Nautical Almanac*.

Planètes. — Les éphémérides des grosses planètes sont calculées d'après les Tables de Le Verrier pour Mercure, Vénus, Mars et Jupiter, et d'après les Tables rectifiées de M. A. Gaillot pour Saturne, Uranus et Neptune.

Les valeurs indiquées pour les masses sont celles adoptées par S. Newcomb.

Étoiles. — Les constantes pour la réduction des positions apparentes des étoiles dérivent des nombres et des formules adoptés par la *Conférence internationale des Étoiles fondamentales*.

Les positions moyennes des étoiles fondamentales sont tirées du Catalogue de S. Newcomb; on donne des éphémérides de jour en jour pour 23 circompolaires, de deux en deux jours pour 10 autres étoiles un peu plus éloignées des pôles, enfin de 10 en 10 jours pour 475 étoiles non circompolaires.

Éclipses. — Les circonstances des éclipses de Soleil ont été calculées, à partir de cette année, d'après une nouvelle méthode, un peu différente de celles suivies jusqu'à ce jour, et dont le principal avantage est de prendre le temps comme argument.

L'aplatissement terrestre a été pris égal à $\frac{1}{297,0}$, conformément aux résolutions du *Congrès international des Ephémérides astronomiques*; le choix des autres données du calcul est indiqué dans l'*Explication et usage des articles de la Connaissance des Temps*.

Occultations. — Les données relatives aux occultations des étoiles et des planètes par la Lune ont été communiquées par le *Nautical Almanac Office*, conformément à l'esprit du programme de collaboration établi par le *Congrès des Ephémérides astronomiques*.

Satellites. — Depuis la présente année, la *Connaissance des Temps* ne publie plus d'éphémérides relatives aux satellites de Mars, Saturne, Uranus et Neptune et aux nouveaux satellites de Jupiter : on trouvera, d'après les résolutions du Congrès, les éphémérides de l'anneau et des satellites de Saturne, à l'exception de Phœbé, dans le *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, et les éphémérides des satellites de Mars, Uranus et Neptune, ainsi que celles de Phœbé et des nouveaux satellites de Jupiter, dans l'*American Ephemeris*.

De même, on trouvera les éphémérides relatives aux observations physiques des astres dans l'*American Ephemeris*, sauf celle du cratère Mœsting A que publie le *Berliner Jahrbuch*.

En revanche, la *Connaissance des Temps* a assumé la tâche de calculer et publier, d'après les nouvelles Tables de M. R.-A. Sampson, des éphémérides détaillées pour les quatre premiers satellites de Jupiter : ce travail a été entièrement exécuté sous la direction de M. L. Schulhof, qui, grâce à d'heureuses modifications des Tables de M. Sampson, a pu abréger notablement la somme des calculs nécessaires.

Ces nouvelles éphémérides sont destinées à faciliter les observations micrométriques, en fournissant soit directement, soit comme résultat d'un calcul très simple, les positions géocentriques des satellites.

De plus, comme par le passé, on trouve toutes les indications relatives aux divers phénomènes présentés par les satellites de Jupiter, calculées d'après les Tables de M. R.-A. Sampson, avec toute la précision qu'elles peuvent fournir, de façon à permettre directement leur comparaison aux observations. Enfin on a rétabli cette année le Tableau des configurations des satellites calculées, comme précédemment à l'aide des Tables de Damoiseau.

Dans tout ce Chapitre, les époques sont comptées en temps moyen de Greenwich.

Tables diverses. — Au sujet des Tables diverses qui terminent le Volume, il est nécessaire de signaler que les Tables relatives à l'ellipsoïde terrestre et à la parallaxe ont été calculées à nouveau, d'après la valeur de l'aplatissement $\frac{1}{297,0}$ adoptée, comme il a été dit, par le Congrès ; de plus, dans le calcul des longueurs des arcs de 1° sur les méridiens et les parallèles aux diverses latitudes, on a pris pour le rayon équatorial la valeur moyenne $a = 6378200^m$ recommandée par M. Helmert.

En outre, les Tables de réfraction dues à Caillet et publiées chaque année par la *Connaissance des Temps* depuis 1851, ont été remplacées par de nouvelles Tables plus exactes qui sont tirées, avec les modifications nécessaires indiquées à la page 652, des Tables plus étendues publiées par R. Radau en 1889 (*Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires, t. XIX*).

Supplément. — La *Connaissance des Temps pour 1915* publie en supplément des Tableaux renfermant les éléments des 732 petites planètes classées jusqu'à ce jour, ainsi que les données relatives à leur découverte. Ces éléments sont tirés des publications de l'*Astronomisches Rechen-*

Institut, qui, d'après les résolutions du Congrès des Ephémérides, doit continuer à assurer la mise en œuvre des données relatives aux petites planètes. Mais afin de collaborer efficacement à cette vaste entreprise, on a joint ici aux éléments proprement dits des planètes, les valeurs des *Constantes de Gauss* correspondantes et de leurs variations : le Bureau des Longitudes a été aidé pour ces calculs par le Laboratoire d'Astronomie de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

Le Supplément, en tête duquel on trouvera une analyse détaillée des matières qu'il renferme, est terminé par le Tableau des éléments des comètes périodiques dont le retour a été observé ou dont une seule apparition est connue : ce Tableau est dû à M. L. Schulhof.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

BAILLAUD (B.), Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, Directeur de l'Observatoire. — **Cours d'Astronomie à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.** 2 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément

I^{re} PARTIE : *Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales. — Probabilités : erreurs des observations. — Instruments d'Optique. — Instruments d'Astronomie. — Calculs numériques, interpolations, avec 58 figures; 1893..... 8 fr.*

II PARTIE : *Astronomie sphérique. Mouvements dans le système solaire. Éléments géographiques. Éclipses. Astronomie moderne, avec 72 figures; 1896..... 15 fr.*

DIEN et FLAMMARION. — **Atlas céleste**, comprenant toutes les Cartes de l'ancien Atlas de CH. DIEN, rectifié, augmenté et enrichi de 5 Cartes nouvelles relatives aux principaux objets d'études astronomiques, par C. FLAMMARION, avec une *Instruction* détaillée pour les diverses Cartes de l'Atlas. In-folio, cartonné avec luxe, de 31 planches gravées sur cuivre dont 5 doubles. 11^e édition; 1904.

PRIX { EN FEUILLES, dans une couverture imprimée. 40 fr.
{ CARTONNÉ AVEC LUXE, toile pleine..... 45 fr.

On vend séparément :

Fascicule contenant les 5 Cartes nouvelles de l'Atlas céleste. 15 fr.

PROCTOR Richard A.), Sociétaire honoraire de la Société royale astronomique, (auteur de divers Ouvrages astronomiques. — **Nouvel atlas céleste**, précédé d'une Introduction sur l'*Étude des constellations*, augmenté de quelques études d'Astronomie stellaire. Traduit de l'anglais par PHILIPPE GÉRIGNY, Rédacteur de la Revue *L'Astronomie populaire*. In-8 (23-14), avec figures et 16 planches; 1886.

Broché..... 6 fr. | Cartonné avec luxe..... 7 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

EXTRAIT DE LA CONNAISSANCE DES TEMPS, à l'usage des Écoles d'Hydrographie et des marins du Commerce pour l'an 1914, publié par le *Bureau des Longitudes*. In-8 (25-16) de 120 p. avec 2 planches ; 1912..... 1 fr. 50 c.

Avertissement.

L'*Extrait de la Connaissance des Temps* a subi d'importantes modifications. On s'est efforcé d'y présenter les différentes Ephémérides sous la forme la plus propre à simplifier les calculs usuels de la Navigation.

Une première simplification a été réalisée en réduisant la précision aux limites utilisables dans la navigation courante; la *Connaissance des Temps* reste à la disposition des Navigateurs qui désireraient faire des applications exigeant une précision supérieure : par exemple, la détermination de la longitude par occultations ou les distances lunaires. Cette simplification a permis d'introduire des tables de parties proportionnelles facilitant les interpolations.

Pour le Soleil, la Lune et les Planètes, l'*Extrait* donne à midi moyen (et de 3^h en 3^h pour la Lune) les déclinaisons et, sous le titre commun d'*avance sur le soleil moyen*, la quantité à ajouter au temps moyen pour obtenir l'angle horaire de l'astre. Pour la Lune et les Planètes, il donne en outre le temps moyen du passage au Méridien de Paris. Pour la *Polaire*, la correction à ajouter au temps local pour obtenir l'angle horaire a été donnée à la fois pour le temps moyen et pour le temps vrai.

Un planisphère céleste, contenant les étoiles du Catalogue de Newcomb jusqu'à la grandeur 3,5 a été inséré pour faciliter les observations d'étoiles dont l'usage se répand de plus en plus.

Les renseignements sur les marées, trop incomplets pour dispenser de recourir à l'*Annuaire des Marées* publié par le Service hydrographique de la Marine, ont été supprimés. Les tables permanentes ont elles-mêmes été notablement modifiées; en remplacement des tables devenues inutiles, on a mis toutes les tables de correction de hauteurs familières aux marins. La table bien connue qui donne l'angle horaire et l'azimut au lever d'un astre jusqu'à 24° de déclinaison remplace les tables annuelles donnant les levers et couchers du Soleil et de la Lune pour Paris.

Enfin la table pour convertir le temps sidéral en temps moyen a été supprimée, la table pour la conversion inverse donnant, à première entrée, une approximation suffisante pour les deux problèmes, et permettant au besoin, par une seconde entrée, d'obtenir le résultat exact pour le premier problème.

On a ajouté, cette année, les degrés aux arguments proportionnels des éphémérides du Soleil et de l'ascension droite moyenne, afin d'éviter l'obligation de transformer les longitudes en heures pour passer du Méridien de Paris à un autre méridien.

E. GUYOU.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

GRANDEUR ET FIGURE

DE LA TERRE

Par J. B. J. DELAMBRE.

OUVRAGE AUGMENTÉ DE NOTES, DE CARTES ET PUBLIÉ PAR LES SOINS

DE

G. BIJOURDAN

Membre de l'Institut

IN-8 (25-16) DE VIII-402 PAGES, AVEC 31 FIGURES ET CARTES; 1912. 45 fr.

Introduction.

A sa mort, Delambre laissa deux Ouvrages inédits : l'*Histoire de l'Astronomie au XVIII^e siècle*, publiée par L. Mathieu en 1827, et l'*Histoire de la mesure de la Terre* que nous publions aujourd'hui sous le titre adopté par l'auteur : *Grandeur et figure de la Terre*.

Le manuscrit de ce dernier Ouvrage est contenu dans une chemise portant cette indication écrite par L. Mathieu : « Figure de la Terre Manuscrit sur lequel M. Delambre paraît avoir fait sa copie définitive. »

Le style du manuscrit est assez souvent négligé : parfois j'ai cru devoir le modifier par l'addition de certains mots qu'on a généralement placés entre [] ou entre (). On a aussi ajouté la ponctuation, ordinairement absente, et rectifié diverses citations en remontant aux sources. L'orthographe est souvent incertaine, aussi on a adopté celle de la *Base du Système métrique*. Enfin les exigences typographiques ont souvent obligé de modifier certains Tableaux. Mais tous ces changements ont été faits avec la plus grande réserve, de manière à bien conserver à l'œuvre son caractère propre. Les Notes que nous avons ajoutées au bas des pages sont distinguées par la signature G. B., sauf celles qui ont été tirées de l'exemplaire de la *Base du Système métrique* annoté par Delambre. Enfin, nous avons ajouté des Cartes, qui manquent totalement dans le manuscrit. Delambre, paraît avoir eu l'intention de diviser cet Ouvrage en *Livres*, mais il ne réalisa pas ce projet, et il en résulte pour l'Ouvrage un défaut

de clarté. Nous avons tâché de remédier à cet inconvénient par l'addition de deux Tables détaillées, l'une méthodique et l'autre alphabétique.

Dans cet Ouvrage, pour la composition duquel Delambre avait une compétence spéciale, l'auteur a suivi la même marche que dans ses Ouvrages historiques : les Livres et Mémoires relatifs au sujet traité sont passés en revue autant que possible dans l'ordre chronologique, et analysés d'une manière serrée, très profitable au lecteur, mais qui pourrait faire attribuer à l'auteur une sévérité exagérée, si tous ceux qui l'ont approché ne nous le peignaient comme essentiellement bon.

Extrait de la Table des Matières.

Rappel très sommaire des anciennes mesures de la Terre. — I. Première mesure de la méridienne de France. De la grandeur et de la figure de la Terre de *J. Cassini*. Prolongation de la mesure de Picard vers le Sud. Prolongation de la Méridienne vers le Nord. Apparition de l'examen désintéressé de Maupertuis. Critiques de Désaguliers. — II. Première mesure de l'arc de Laponie. La figure de la terre de Maupertuis et manuscrit de Le Monnier. Vérification du degré entre Paris et Amiens (pour l'amplitude seule). Suite de la mesure de l'arc de Laponie. — III. Seconde mesure de la méridienne de France. La méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifiée, par *Cassini de Thury*. Mesure du degré du Cap, par *La Caille*. — IV. Première mesure de l'arc du Pérou. La figure de la Terre de *Bouguer*. Journal du voyageur à l'Equateur de *La Condamine*. Mesure des trois premiers degrés du méridien, de *La Condamine*. Justification des Mémoires à l'Académie pour 1744, et du Livre de la figure de la Terre, par *Bouguer*. Supplément au Journal de l'Equateur, par *La Condamine*. Lettre à *M. X****, par *Bouguer*. Voyage historique de l'Amérique méridionale, par *G. Juan et A. de Ulloa*. — V. Mesures de divers degrés de 1750 à 1780. Degré de Rome, par les *PP. Maire et Boscovich*. Degré de Vienne, par le *P. Liesganig*. Degré de Hongrie, par le *P. Liesganig*. Gradus taurinensis, par *Beccaria*. Degré de Pensylvanie, par *Ch. Mason et J. Dixon*. — VI. Troisième mesure de la Méridienne de France. Base du système métrique décimal, par *Méchain et Delambre*. Reprise de la triangulation en France sur l'impulsion de *Callon*. Prolongation de la méridienne de France jusqu'aux Baléares. Prolongation de la méridienne de France, jusqu'à Greenwich d'après les opérations du général *Roy*. — VII. Mesures de degrés après 1800. Degré de Laponie, remesuré de 1801 à 1803. Exposé des opérations faites en 1787, pour la jonction des Observatoires de Paris et de Greenwich, par *Cassini, Méchain et Legendre*. An account of the operations carried for accomplishing a trigonometrical survey of England and Wales, by *W. Mudge and J. Dalby*. Degrés mesurés dans l'Inde par *W. Lambton*.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

DELABRE, Membre de l'Institut. — **Traité complet d'Astronomie théorique et pratique**. 3 volumes in-4 (28-23), avec planches; 1814. 40 fr.

DELABRE. — **Histoire de l'Astronomie ancienne**. 2 volumes in-4 (28-23), avec planches; 1817..... 25 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

M. H. RESAL,

Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique

DEUXIÈME ÉDITION.

UN BEAU VOLUME IN-4; 1884. — 25 FR.

Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques.*

(Septembre 1884.)

Nous avons aujourd'hui à appeler l'attention de nos lecteurs sur une nouvelle et importante publication de M. H. Resal. La première édition du *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, dans lequel le savant auteur s'était proposé d'exposer les principes fondamentaux de cette science, en ayant recours aux démonstrations les plus simples, avait été accueillie avec la plus grande faveur et se trouvait depuis longtemps épuisée. Au lieu de la réimprimer purement et simplement, M. Resal lui a fait subir de profondes modifications qui en font un Ouvrage nouveau à bien des égards. Au reste, pour donner une idée de l'ordre adopté et des matières traitées, nous n'aurons qu'à reproduire l'extrait suivant de la Préface de l'Ouvrage.

Pour déblayer le terrain, et en même temps pour faciliter la lecture du texte proprement dit, nous avons cru devoir placer en tête de l'Ouvrage une Introduction où se trouvent traitées, d'une manière spéciale, la plupart des questions de Mécanique analytique et d'Analyse qui doivent ultérieurement se présenter, et parmi lesquelles nous signalerons les suivantes : dans le Titre I, nous avons donné les équations de la Mécanique analytique, dues à Lagrange, Hamilton et Jacobi, suivies de celles auxquelles conduit la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le Titre II se rapporte à l'emploi des coordonnées elliptiques dans la solution de certains problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel dans un plan. Dans le Titre III, nous avons reproduit les intégrales connues des équations du mouvement relatif, par rapport à l'un de ses points, d'un système matériel uniquement soumis à ses actions mutuelles. Nous avons eu pour objet, dans le Titre IV, d'établir les équations du mouvement dans l'espace d'un point matériel, exprimées en coordonnées polaires, équations auxquelles on doit avoir recours

dans la théorie de la Lune. Le Titre V et dernier de l'Introduction renferme les solutions de quelques questions d'Analyse dont les énoncés ne peuvent pas être traduits en langage ordinaire et pour lesquelles nous renverrons à la Table des matières.

Nous arrivons maintenant à la partie essentielle de l'Ouvrage.

Dans le Chapitre I, nous nous sommes occupé du mouvement elliptique des planètes, de la gravitation, de la détermination des masses, de la formule de Lambert et de ses conséquences dans le mouvement parabolique des comètes; de la détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique et notamment par la méthode de Gauss, qui n'est mentionnée ni dans la *Mécanique céleste* de Laplace, ni dans l'*Exposition analytique du système du monde* de Pontécoulant; des développements en séries des coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps et de leurs applications, ainsi que de la détermination des éléments d'une orbite cométaire. Comme première innovation apportée au programme de la première édition, nous avons terminé le Chapitre dont il s'agit en nous occupant du problème du mouvement plan d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance; ce problème, posé par Euler, a été complètement résolu par Legendre, puis par Liouville, dont nous avons reproduit la démonstration, en raison de sa simplicité.

Le Chapitre II est consacré entièrement à la théorie des perturbations. Nous avons pensé que, pour bien faire comprendre le sens du problème que l'on a en vue, il convenait de faire précéder les recherches analytiques de la théorie géométrique des perturbations, dont l'idée première est due à Newton et qui a été reprise plus tard par Lagrange, dans l'hypothèse où les planètes circuleraient dans le plan de l'écliptique. Dans cette seconde innovation, nous avons eu uniquement recours aux propriétés de l'accélération, qui, comme on le sait, n'ont été établies que vers le commencement de la seconde moitié de notre siècle. Nous avons déduit très facilement, des résultats obtenus, les formules de Poisson qui s'appliquent au mouvement d'une planète dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Nous avons exposé ensuite la théorie analytique des perturbations des planètes, en prenant pour point de départ les théorèmes d'Hamilton et de Jacobi, méthode qui est beaucoup plus simple que celle de Lagrange, lorsqu'on s'est bien assimilé les matières contenues dans l'Introduction. Nous avons terminé le Chapitre en donnant les formules qui se rapportent aux perturbations du mouvement elliptique des comètes.

Dans le calcul de l'attraction des corps, qui fait l'objet du Chapitre III, nous avons reproduit, à quelques modifications près, les démonstrations géométriques que nous avons données dans la première édition, en vue d'apporter quelque clarté sur cette partie de la *Mécanique céleste*. Nous avons continué à démontrer *a priori*, au moyen d'une double intégration par parties, la convergence du développement du potentiel en fonctions sphériques dans les cas douteux auxquels Laplace ne s'est pas arrêté. Nous avons employé, pour déterminer la forme de ces fonctions, la méthode de Jacobi, à laquelle nous avons donné plus de développements, et qui est l'une des plus élégantes et des plus simples.

Parmi les questions traitées dans le Chapitre IV, relatif à la figure des planètes, nous citerons celle de l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi, la discussion des équations qui en résultent, établie d'abord par Meyer, puis modifiée et complétée par Liouville; les hypothèses de Legendre et de E. Roche sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre; le théorème de Liouville sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, théorème dont nous avons donné une démonstration géométrique et que nous avons ensuite appliqué à la stabilité de l'équilibre des mers.

Nous avons déduit (Chap. V), de considérations géométriques sur le mouvement d'un point, les propriétés, dues à Laplace, des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde.

Dans le Chapitre VI, où nous nous occupons des atmosphères des corps célestes, nous avons notamment emprunté à E. Roche les considérations qui, en tenant compte de l'hypothèse de la force répulsive due aux radiations calo-

riétés, imaginée par M. Faye, permettent d'expliquer la forme des comètes.

En tête du Chapitre VII, intitulé *Des oscillations de la mer et de l'atmosphère*, nous avons établi immédiatement les équations des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal, en nous appuyant uniquement sur le théorème de Coriolis dans le mouvement relatif, et sur le principe de l'indépendance des forces centrifuges composées avec les mouvements composants. Nous sommes parvenu à établir la formule pratique relative aux marées, donnée par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, formule qui paraît être due à Poisson, mais dont nous n'avons trouvé nulle part la démonstration.

Une interprétation géométrique des propriétés du mouvement d'un solide autour d'un point fixe nous a permis de poser presque immédiatement les équations du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Chap. VIII). En ce qui concerne les déplacements séculaires de la Terre, nous avons, dans la première édition, pris pour origine du temps l'année 1750; mais ici nous parlons de l'année 1850, et nous mettons à profit les chiffres obtenus par Le Verrier en discutant les résultats des observations de Peters. Une simple considération géométrique basée sur la théorie des mouvements relatifs nous a permis d'établir facilement ce théorème de Laplace : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont absolument les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent.*

Les équations du mouvement de la Lune et de l'anneau de Saturne, comme celles qui se rapportent à la Terre, ont aussi été déduites de considérations géométriques.

La publication de notre Ouvrage sur la *Physique mathématique* nous a dispensé de reproduire, dans le Chapitre IX, relatif à la chaleur terrestre, les développements sur le mouvement de la chaleur dans une sphère et sur la chaleur centrale du globe, que nous avons donnés dans la première édition; nous n'avons eu dès lors, à quelques préliminaires près, à nous occuper que de la diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre.

Nous avons ajouté au programme que nous avons adopté dans la première édition, et d'après Laplace dont nous sommes efforcé de simplifier les démonstrations : 1° la théorie des réfractions astronomiques; 2° la théorie des inégalités du mouvement des planètes dues à l'ellipticité du Soleil, avec son application à Mercure; 3° enfin, pour terminer, les principes fondamentaux de la théorie de la Lune, en suivant la voie tracée par Laplace.

A cet exposé si complet et si intéressant, nous n'ajouterons qu'un seul mot. L'exposition est claire et satisfaisante. Quant à l'impression, elle est digne en tout des presses de M. Gauthier-Villars. La seconde édition du *Traité élémentaire de Mécanique céleste* se présente sous la forme d'un beau Volume in-4° où rien ne laisse à désirer, ni les figures, ni les formules, ni le texte.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

RESAL (H.), Membre de l'Institut. — *Traité de Physique mathématique.*
2^e édition, augmentée et entièrement refondue. Deux beaux volumes
in-4 se vendant séparément :

TOME I : *Capillarité. Élasticité, Lumière*; 1887..... 15 fr.

TOME II : *Chaleur. Thermodynamique. Électrostatique. Courants électriques. Electrodynamique. Magnétisme statique. Mouvement des aimants et des courants*; 1888..... 12 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

COLLECTION
DE
MÉMOIRES
RELATIFS A LA
PHYSIQUE,

PUBLIÉS PAR

LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE.

- TOME I.** — *Mémoires de Colomb*, publiés par les soins de *A. Potier*. Un beau volume grand in-8, avec figures et planches; 1884.... 12 fr.
TOME II. — *Mémoires sur l'Electrodynamique (I^{re} PARTIE)*, publiés par les soins de *J. Joubert*. Un beau volume grand in-8, avec figures et planches; 1885..... 12 fr.
TOME III. — *Mémoires sur l'Electrodynamique (II^e PARTIE)*, publiés par les soins de *J. Joubert*. Un beau vol. grand in-8, avec fig.; 1887. 12 fr.
TOME IV. — *Mémoires sur le pendule, précédés d'une Introduction historique et d'une Bibliographie*, publiés par les soins de *C. Wolf*. (Ce volume contient des Mémoires de *La Condamine, Borda et Cassini, de Prony, Henry Kater, F.-W. Bessel*.) Grand in-8, avec figures et 7 planches; 1889..... 12 fr.
TOME V. — *Mémoires sur le pendule*, publiés par les soins de *M. Wolf*. (Ce volume contient des Mémoires de *Bessel, Sabine, Baily, Stokes*.) Grand in-8, avec figures dans le texte et 1 planche; 1891. 12 fr.

Avertissement du Tome I.

Le Conseil de la Société française de Physique, sur la proposition de M. Joubert, son Secrétaire général, a émis l'avis qu'il serait opportun et conforme aux intentions des fondateurs de la Société de publier, dans la mesure des ressources disponibles, une série de Mémoires concernant la Physique, en s'attachant à reproduire particulièrement les Mémoires parus depuis un siècle environ et qu'il est devenu difficile de se procurer.

Dans sa séance de janvier 1883, la Société a approuvé cette proposition : elle a décidé, en outre, que le choix des Mémoires à publier et l'ordre de leur publication seraient fixés par le Conseil : celui-ci, considérant que les Mémoires de Coulomb sont la base de nos connaissances actuelles sur l'Électricité et le Magnétisme, que la Collection des Mémoires de l'ancienne Académie, où sont insérés les plus importants, est peu répandue, a estimé que la publication des Mémoires de Coulomb devait ouvrir cette série de reproductions. Bien que les sujets traités dans ces Mémoires soient variés, puisqu'ils traitent de l'Électricité, du Magnétisme et de la résistance des fluides,

ils forment néanmoins un ensemble dans lequel la méthode et l'instrument de mesure restent les mêmes; on s'est donc décidé à les réunir, tout en se proposant, dans les Volumes suivants, de rassembler plutôt des Mémoires relatifs à un sujet unique et écrits par des auteurs différents.

Table des Matières du Tome I.

AVERTISSEMENT. — INTRODUCTION. — Recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées. [Extrait du t. IX des *Savants étrangers* (1777)]. Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal. [Extrait des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences* (1784)]. — MÉMOIRES SUR L'ÉLECTRICITÉ ET LE MAGNÉTISME : I. Construction et usage d'une balance électrique fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal d'avoir une force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion (1785). — II. Où l'on détermine suivant quelles lois le fluide magnétique ainsi que le fluide électrique agissent soit par répulsion, soit par attraction (1785). — III. De la quantité d'électricité qu'un corps isolé perd dans un temps donné, soit par le contact de l'air plus ou moins humide, soit le long des soutiens plus ou moins idio-électriques (1785). — IV. Où l'on démontre deux principales propriétés du fluide électrique : la première, que ce fluide ne se répand dans aucun corps par une affinité chimique, ou par une attraction élective, mais qu'il se partage entre différents corps mis en contact, uniquement par son action répulsive; la seconde, que dans les corps conducteurs le fluide parvenu à l'état de stabilité est répandu sur la surface du corps et ne pénètre pas dans l'intérieur (1786). — V. Sur la manière dont le fluide électrique se partage entre deux corps conducteurs mis en contact; et de la distribution de ce fluide sur les différentes parties de la surface de ces corps (1787). — VI. Suite des recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs conducteurs. Détermination de la densité électrique dans les différents points de la surface de ces corps (1788). — VII. Du magnétisme (1789) (Extraits des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*.) Détermination théorique et expérimentale des forces qui ramènent différentes aiguilles, aimantées à saturation, à leur méridien magnétique. [Extrait du t. III des *Mémoires de l'Institut*, an IX (1801).] — Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents. [Extrait du t. III des *Mémoires de l'Institut*, an IX (1801).] — Résultat des différentes méthodes employées pour donner aux lames et aux barreaux d'acier le plus grand degré de magnétisme. [Extrait du t. VI des *Mémoires de l'Institut* (1806).] — Influence de la température sur le magnétisme de l'acier. (Extrait, d'après Biot, d'un Mémoire inédit.) — ADDITION : Sur la distribution à la surface de deux sphères conductrices électrisées, et l'attraction de ces sphères, d'après Poisson et Sir W. Thomson.

Avvertissement des Tomes II et III.

Ce Volume et le suivant, lesquels forment les Tomes II et III de la Collection, sont consacrés à la reproduction des principaux Mémoires publiés sur l'Électrodynamique. Ces Mémoires sont rangés par ordre de date, de manière à présenter, au moins dans ses origines, l'histoire de cette branche de la Physique.

Le premier Volume commence par le Mémoire d'Ørsted, publié le 21 juillet 1820, et va jusqu'à la fin de 1823. Il renferme des Mémoires d'Ampère, d'Arago, de Biot, de Davy, de Faraday, de G. et A. de la Rive, etc. Ceux d'Ampère tiennent naturellement la plus grande place; les Mémoires d'Ampère postérieurs à 1823 occupent également une grande partie du Volume suivant.

On trouvera, à très peu près, dans ces deux Volumes tout ce qui a été

publié sur l'Électrodynamique par l'illustre physicien. Quelques articles seulement ont été omis pour éviter des répétitions inutiles : par exemple l'Opuscule intitulé : *Précis de la théorie des phénomènes électrodynamiques* (1823), dont toutes les parties se trouvent reproduites textuellement dans le grand *Mémoire* publié en 1826.

Je dois à l'obligeance de M. J. Bertrand, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, d'avoir pu compiler la collection des papiers d'Ampère, qui appartient à l'Académie; j'ai pu, avec son autorisation, en tirer pour la présente édition quelques morceaux restés inédits ou publiés seulement par extraits et qui, sans apporter de faits nouveaux, n'en présentent pas moins un intérêt réel. Tels sont, en particulier, les articles publiés sous les n^{os} VII, XXI, XXV et XXIX. C'est également de cette collection qu'ont été tirées les deux Notes inédites de Fresnel, relatives au Magnétisme, qui forment les articles IX et X.

Le texte des auteurs a été respecté scrupuleusement : une collection comme celle-ci doit offrir au lecteur, qui voudrait y puiser une citation, la même sécurité que l'original lui-même. Les figures ont été reproduites également avec toute la fidélité possible, avec cette différence seulement qu'on les a, pour la plupart, intercalées dans le texte. Quant aux traductions des Mémoires écrits en langue étrangère, elles ont été refaites entièrement, et l'on a cherché à leur donner la rigueur et la fidélité qu'on demande aujourd'hui aux traductions des auteurs classiques.

J. JOUBERT.

Table des Matières du Tome II.

AVERTISSEMENT. — *Ørstedt*. Expérience relative à l'effet du conflit électrique sur l'aiguille aimantée. — *Ampère*. De l'action exercée sur un courant électrique par un autre courant, le globe terrestre ou un aimant. — *Arago*. Expériences relatives à l'aimantation du fer et de l'acier par l'action du courant voltaïque. — *Davy*. Sur les phénomènes magnétiques produits par l'électricité. (*Lettre à Wollaston*.) — Extrait d'un Mémoire intitulé : *Nouvelles recherches sur les phénomènes magnétiques produits par l'électricité* (1821). — *Fresnel*. — Note sur des essais ayant pour but de décomposer l'eau avec un aimant. *Biot et Savart*. Sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricité en mouvement. — *Ampère*. Mémoire sur l'expression mathématique des attractions et des répulsions électriques. — *Ampère*. Analyse des Mémoires lus à l'Académie les 11 et 26 décembre 1820 et les 8 et 15 janvier 1821. — *Fresnel*. Comparaison de la supposition des courants autour de l'axe avec celle des courants autour de chaque molécule. — *Fresnel*. Deuxième Note sur l'hypothèse des courants particuliers. — *G. de la Rive*. Notice sur quelques expériences électromagnétiques. — *Ampère*. Extrait d'une Lettre d'Ampère à M. le professeur de la Rive, sur des expériences électromagnétiques. — *Faraday*. Mémoire sur les mouvements électromagnétiques et la théorie du magnétisme. — *Notes d'Ampère sur le Mémoire de Faraday*. — *Ampère*. Expériences relatives aux nouveaux phénomènes électrodynamiques obtenus au mois de décembre 1821. — *Barlow*. Sur une expérience électromagnétique curieuse. — *Davy*. Sur un nouveau phénomène électromagnétique. — *Ampère*. Réponse à la Lettre de M. Van Beck, sur une nouvelle expérience électromagnétique. — *Ampère*. Exposé sommaire des nouvelles expériences électromagnétiques faites par différents physiciens, depuis le mois de mars 1821, lu dans la séance publique de l'Académie royale des Sciences le 22 avril 1822, et Notes sur cet exposé. — *Ampère*. Second Mémoire sur la détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques. — *Ampère*. Note lue à la séance du 24 juin. — *Ampère*. Extrait d'une Lettre adressée à M. Faraday. — *G. de la Rive*. Lettre à M. Arago sur de nouvelles expériences relatives aux actions des courants galvaniques. — *Ampère*. De l'action qu'exerce la Terre sur les conducteurs voltaïques. — *A. de la Rive*. Mémoire sur l'action qu'exerce le globe terrestre sur une portion de circuit

voltaïque. — *Ampère*. Notice sur quelques expériences nouvelles relatives à l'action mutuelle de deux portions de circuit voltaïque et à la production des courants électriques par influence, et sur les circonstances dans lesquelles l'action électrodynamique doit, d'après la théorie, produire dans un conducteur mobile autour d'un axe fixe un mouvement de rotation continu, ou donner ce conducteur une direction fixe. — *Savary*. Mémoire sur l'application du calcul aux phénomènes électrodynamiques. — *Ampère*. Note relative au Mémoire de Savary. — *Ampère*. Extrait d'une Lettre à M. Faraday. — *Ampère*. Extrait d'un Mémoire sur les phénomènes électrodynamiques, par M. Ampère, présenté à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 22 décembre 1823.

Table des Matières du Tome III.

Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 28 novembre 1825. Notes contenant quelques nouveaux développements sur des objets traités dans le Mémoire précédent. — *Ampère*. Mémoire communiqué à l'Académie royale des Sciences dans sa séance du 21 novembre 1825, faisant suite au Mémoire lu dans la séance du 12 septembre. — *Ampère*. Précis d'un Mémoire lu à l'Académie royale des Sciences dans sa séance du 21 novembre 1825. — *Ampère*. Lettre de M. Ampère à M. Gherardi, sur divers phénomènes électrodynamiques. — *Ampère*. Mémoire sur l'action mutuelle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant. — *Ampère*. Lettre à M. le D^r Gherardi (supplément au Mémoire sur l'action mutuelle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant). — *W. Weber*. — Mesures électrodynamiques absolues. Sur la loi fondamentale des actions électriques.

Extrait de l'avertissement des Tomes IV et V.

Les Tomes IV et V sont consacrés au pendule. Une Introduction historique résume les progrès successifs de la Science sur la théorie et les applications du pendule, et une liste bibliographique et chronologique signale tous les Travaux et Mémoires publiés sur la matière.

Ces deux Tomes ne pouvant contenir qu'un nombre restreint de Mémoires, on a ajouté dans la Bibliographie, à l'énoncé des titres, des citations souvent étendues des Ouvrages qui n'avaient pu être publiés *in extenso*. L'ensemble de ces citations et des Mémoires forme ainsi une histoire vraiment documentaire du pendule.

Table des Matières du Tome IV.

Introduction historique. *Bibliographie du pendule*: liste chronologique des Ouvrages et Mémoires relatifs à la théorie et aux applications du pendule, qui ont été publiés de 1629 à la fin de 1885. — *Mémoires sur le pendule*. — De la mesure du pendule à Saint-Domingue, par M. de La Condamine. — Expériences pour connaître la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris, par MM. Borda et Cassini. — Méthode pour déterminer la longueur du pendule simple qui bat les secondes et pour trouver, en général, les positions des centres de gravité et d'oscillation et le moment d'inertie d'un corps de forme quelconque, par M. de Prony. — Relation des expériences faites pour déterminer la longueur du pendule à secondes, à la latitude de Londres, par le capitaine Henry Kater. — Description du pendule. Méthode pour déterminer le nombre des oscillations faites par le pendule en vingt-quatre heures. Appareils et méthodes employés pour la mesure de la distance des couteaux, et pour la comparaison des étalons les plus autorisés des mesures anglaises. Comparaisons des différents étalons. Mesure du pendule. Dilatation du pendule. Méthode employée pour déduire la longueur du pendule qui bat la seconde. Correction de la perte de poids dans l'air. Détails des expériences. Examen des sources d'erreur. Conclusion. — Recherches sur la longueur du pendule

simple qui bat la seconde, par *F.-W. Bessel*. — I^{re} PARTIE. *Détermination de la longueur du pendule simple qui bat la seconde, à l'observatoire de Königsberg*. Description de l'appareil. Observation des coïncidences. Comparaison des horloges. Température de l'appareil. Mesure de la longueur du pendule. Calcul des observations. Influence de l'air. Détermination du facteur *k*. Détails des expériences. Conclusions. Examen des causes d'erreur. — II^e PARTIE. *Comparaison de la détermination de la longueur du pendule à Königsberg avec d'autres déterminations, et étude de diverses circonstances dont il faut tenir compte dans les expériences du pendule*. Comparaison de la pesanteur à Königsberg, Paris et Londres. Expériences sur des pendules oscillant dans l'eau. Expériences sur l'influence de l'arête des couteaux. Comparaison des divers modes de suspension du pendule. Expériences sur l'influence des plans qui portent les couteaux. Construction d'un pendule symétrique à axes réciproques.

Planches.

I. Pendule de M. de La Condamine. II. Pendule de MM. Borda et Cassini (ensemble). III. Pendule de MM. Borda et Cassini (détails). IV. Pendule du capitaine Kater (détails). V. Pendule du capitaine Kater (disposition générale). VI. Pendule de Bessel (ensemble). VII. Pendule de Bessel (détails).

Table des matières du Tome V.

Recherches sur la longueur du pendule simple qui bat la seconde (*suite*); par *F.-W. Bessel*. — *Appendices et Tableaux d'expériences*. I. Mouvement d'un pendule dont le fil s'enroule sur un cylindre horizontal. II. Influence de l'élasticité du fil sur la forme de ce fil et sur la durée d'oscillation du pendule. III. Table des valeurs d'un battement de l'horloge P, exprimées en temps moyen. IV. Influence de la température sur l'appareil du pendule. V. Certificat de comparaison de la toise. VI. Mouvement d'un pendule dans un milieu fluide. VII. Détermination des diverses pièces qui composent les différents pendules employés dans les expériences, et calcul des pendules ainsi composés. (Calcul des éléments des pendules de la première série d'expériences. Calcul des pendules de la deuxième série d'expériences. Calcul des pendules de la troisième série d'expériences). VIII. Etude de l'influence des inégalités du fil sur la réduction au pendule simple. IX. Influence de la forme cylindrique de l'arête du couteau, autour de laquelle oscille le pendule, sur la durée de l'oscillation. X. Influence du support sur le mouvement d'un corps solide oscillant autour d'un couteau. — Tableaux d'expériences. — Expériences sur la force avec laquelle la Terre attire les corps de nature différente; par *F.-W. Bessel*. — Sur la réduction au vide des oscillations d'un pendule invariable; par le capitaine *Edward Sabine*. — Sur la réduction au vide du pendule réversible du capitaine Kater; par le capitaine *Sabine*. — Recherches sur la correction du pendule pour la réduction au vide, accompagnées de remarques sur quelques anomalies observées dans les expériences du pendule; par *F. Baily*. (Réduction au vide. Description des pendules. Résultats des expériences. Coup d'œil général sur l'ensemble des résultats. Tableau de comparaison de l'ancienne et de la nouvelle réduction au vide. Différence entre les deux extrémités d'un pendule réversible. Expériences additionnelles. Résultats généraux des expériences additionnelles. Expériences du chevalier Du Buat. Suspension sur un cylindre. Influence des parois de l'appareil d'observation dans le vide. Anomalies provenant du couteau de suspension. Correction relative à l'amplitude de l'arc. Sur la détermination récente de la longueur du pendule à secondes à Greenwich, par le capitaine *Sabine*. Méthode d'observation et de réduction des observations). — Appendice. Tableaux d'expériences. — De l'effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules; par *G.-G. Stokes*. — I^{re} PARTIE. *Etude analytique*. I. Adaptation des équations générales au cas d'un fluide environnant un corps qui oscille comme un pendule. Lois générales qui ressortent de la forme des équations. Solution des équations dans le cas d'un plan oscillant. II. Solution des équations dans le cas d'une sphère oscillant au milieu d'une masse de fluide soit illimitée, soit confinée dans une cave-

loppe sphérique concentrique à la sphère dans sa position d'équilibre. III. Résolution des équations dans le cas d'un cylindre infini oscillant dans une masse de fluide illimitée, dans une direction perpendiculaire à son axe. IV. Détermination du mouvement d'un fluide autour d'une sphère qui se meut uniformément avec une faible vitesse. Justification de l'application des solutions obtenues dans les *Sections II et III*, au cas où l'étendue de l'oscillation n'est pas petite en comparaison du rayon de la sphère ou du cylindre. Discussion d'une difficulté qui se présente par rapport au mouvement uniforme d'un cylindre dans un fluide. V. De l'effet du frottement intérieur pour amortir le mouvement du fluide. — II^e PARTIE. *Comparaison de la théorie et de l'expérience*. I. Discussion des expériences de Baily, Bessel, Coulomb et Du Buat. II. Suggestions relatives à des expériences à faire. — NOTE. — Remarques sur le Mémoire de M. G. Stokes. — Construction d'un pendule de forme symétrique à axes réciproques; par F.-W. Bessel. Planche : Appareil de Sabine.

A LA MÊME LIBRAIRIE.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES ÉLECTRICIENS (Exposition universelle de 1889). — **Comptes rendus des travaux**, publiés par les soins de J. JOUBERT, Rapporteur général. Grand in-8, avec figures; 1890. 10 fr.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE (Exposition universelle de 1889). — **Comptes rendus des travaux, procès-verbaux, rapports et mémoires**, publiés sous les auspices du Bureau du Congrès, par M. E. CASPARI, Secrétaire. In-4, avec figures; 1890. . . . 7 fr. 50 c.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHOTOGRAPHIE (Exposition universelle de 1889). — **Rapports et Documents**, publiés par les soins de M. S. PECTOR, Secrétaire général. Grand in-8, avec figures dans le texte et 2 planches; 1890. 7 fr. 50 c.

GUILLAUME (Ch.-Edm.), Docteur ès Sciences, Attaché au Bureau international des Poids et Mesures. — **Traité pratique de la Thermométrie de précision**. Grand in-8, avec 45 figures dans le texte et 4 planches; 1889. 12 fr.

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Electricité**. (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité*. Volume de vi-329 pages avec 145 figures; 1901. 10 fr.

TOME II : *Electrodynamique. Magnétisme. Induction. Mesures électromagnétiques*. Volume de iv-554 pages, avec 221 figures; 1903. 18 fr.

TOME III : *Electrolyse. Électrocapillarité. Ions gazeux*. Volume de vi-290 pages, avec 17 figures; 1908. 10 fr.

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Thermodynamique**. Leçons professées à la Sorbonne en 1865-1896, et rédigées par MM. DUPERRAY, Agrégé de l'Université, Professeur au Lycée de Nantes, et GOISOT, ancien élève de l'École normale supérieure, Préparateur à la Sorbonne. In-8 (25-16) de 312 p., avec 50 fig.: 1897. 12 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 53, A PARIS (6^e).

LAPLACE. — *Œuvres complètes de Laplace*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par les *Secrétaires perpétuels*, avec le concours de *Puiseux*, Membre de l'Institut, de *F. Tisserand*, Membre de l'Institut, de *J. Houël*, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, et de *Soullart*, Professeur à la Faculté des Sciences de Lille, de *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, de *Lebœuf*, Directeur de l'Observatoire de Besançon. Nouvelle édition avec un beau portrait de Laplace, gravé sur cuivre par *Tony Goutière*. In-4 (23-14); 1878-1898.

Traité de Mécanique céleste. Tomes I à V (1878-1882).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4..... 100 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre); 5 vol. in-4..... 130 fr.

Les Tomes III, IV et V, papier vergé, se vendent séparément. 20 fr.

Les Tomes I à V, papier hollandais, se vendent séparément... 26 fr.

Exposition du système du Monde. Tome VI (1884).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..... 20 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 25 fr.

Théorie des probabilités. Tome VII (1886).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..... 35 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 43 fr.

Ce Volume, qui comprend 832 pages sur papier fort, est d'un manie- ment peu facile pour les lecteurs qui veulent faire une longue étude de la THÉORIE DES PROBABILITÉS; aussi avons-nous divisé un certain nombre d'exemplaires en deux fascicules. — Pour permettre de relier ultérieu- rement ces deux fascicules en un volume unique, nous avons joint au premier fascicule un titre de l'Ouvrage complet. — Les fascicules se vendent séparément :

PREMIER FASCICULE.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..... 15 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 18 fr.

SECOND FASCICULE.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..... 20 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 25 fr.

Mémoires divers. Tomes VIII à XIV.

TOMES VIII, IX, X, XI et XII. — *Mémoires extraits des Recueils de l'Académie des Sciences*; 1891-1898.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..... 20 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 25 fr.

TOME XIII. — *Mémoires extraits de la Connaissance des Temps*; 1904.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace..... 15 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 18 fr.

TOME XIV ET DERNIER. — *Correspondance et Mémoires divers. Tables générales*; 1912.

Tirage sur papier vergé fort au chiffre de Laplace..... 20 fr.

Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace..... 25 fr.

On vend à part : TABLES GÉNÉRALES : Table synoptique. Table analy- tique. Table alphabétiques des auteurs cités; 1912..... 4 fr.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6^e)

OBSERVATOIRE DE MÉTÉOROLOGIE DYNAMIQUE DE TRAPPES. —
Travaux scientifiques, publiés par L. TEISSERENC DE BORT. In-4
(33-25).

TOME I : *Étude internationale des nuages* (1896-1897). *Observations et mesures de la France*. Volume de XVI-290 pages avec 2 planches; 1903 10 fr.

TOME II (*En préparation.*)

TOME III : *Étude de l'atmosphère par sondages aériens* (1901-1904).
Volume de IV-50 pages; 1908 10 fr.

TOME IV : *Étude de l'atmosphère marine par sondages aériens. Atlantique moyen et région intertropicale*, par L. TEISSERENC DE BORT et LAWRENCE ROTCH. Volume de 243 pages avec 36 figures et 17 planches (publié avec la collaboration de l'Observatoire de Blue-Hill); 1909. 10 fr.

RADAU (R.). — **Étude sur les formules d'interpolation.** In-8 (25-16);
1891..... 2 fr. 50 c.

SOUCHON (Abel), Membre adjoint du Bureau des Longitudes, attaché à la rédaction de la *Connaissance des temps*. — **Traité d'Astronomie pratique**, comprenant l'EXPOSITION DU CALCUL DES EPHÉMÉRIDES ASTRONOMIQUES ET NAUTIQUES d'après les méthodes en usage dans la composition de la *Connaissance des Temps* et du *Nautical Almanac*, avec une INTRODUCTION HISTORIQUE et de nombreuses Notes. In-8 (25-16), avec figures et Tables; 1883..... 15 fr.

SOUCHON (Abel). — **Traité d'Astronomie théorique**, contenant l'exposition du calcul des perturbations planétaires et lunaires, et son application à l'explication et à la formation des Tables astronomiques, avec une introduction historique et de nombreux exemples numériques. Ouvrage dédié aux astronomes, aux marins et aux élèves de l'Enseignement supérieur. In-8 (25-16) de VIII-504 pages; 1891..... 16 fr.

TISSERAND (F.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Traité de Mécanique céleste.** 4 volumes in-4 (28-23) avec figures.

TOME I : *Perturbation des planètes, d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires*; 1889..... 25 fr.

TOME II : *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*; 1891..... 28 fr.

TOME III : *Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune*; 1894..... 22 fr.

TOME IV ET DERNIER : *Théorie des satellites de Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planètes*; 1896..... 28 fr.

Abrévi:

Dans les publications de l'académie de Paris, H. signifie Histoire; M. signifie mémoires.

I, \Rightarrow renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, 19 = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*, *š* se prononce comme *ch* dans *chat*, *ž* se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abh. = Abhandlungen.	élém. = élémentaire.	p. ex., par ex. = par exemple.
Acad. = Academie.	ex. = exemple.	partic. = particulier.
Accad. = Accademia.	extr. = extrait.	Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
Akad. = Akademie.	fasc. = fascicule.	philol. = philologie.
Alg. = Algèbre, Algebra.	fig. = figure.	philom. = philomatique.
Allg. = Allgemeine.	fis. = fisica.	philos. = philosophique.
Amer. = American.	fol. = folio.	phys. = physique.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.	Géom. = Géométrie.	pl. = planche.
Anw. = Anwendung.	Ges. = Gesellschaft.	polyt. = polytechnique.
appl. = appliqué.	Gesch. = Geschichte.	pontif. = pontificia.
arit. = arithmetica.	Giorn. = Giornale.	posth. = posthume.
arith. = Arithmetik, arithmétique.	Gött. = Göttingen, Göttingue.	Proc. = Proceeding.
assoc. = association.	Gymn. = Gymnasium.	progr. = programme.
Aufs. = Aufsätze.	Hist. = Histoire.	prop. = proposition.
Avanc. = Avancement.	id. = idem, ibidem.	publ. = publié.
Ber. = Berichte.	imp. = imprimé.	Quart. = Quarterly.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.	inscr. = inscription.	R. = reale, royal.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.	inst. = institution.	Recent. = Recentiores.
Brit. = British.	interméd. = intermédiaire.	Rendic. = Rendiconto.
Bull. = Bulletin.	intern. = international.	réimp. = réimprimé.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.	introd. = introduction.	sc. = sciences.
cah. = cahier.	Ist. = Istituto.	Schr. = Schriften.
Cambr. = Cambridge.	J. = Journal.	scient. = scientifique.
car. = carton.	Jahresb. = Jahresbericht.	s. d. = sans date.
cf. = comparez.	Lehrb. = Lehrbuch.	sect. = section.
chap. = chapitre.	Leop. = Leopoldina.	Selsk. = Selskabs.
chim. = chimie, chimique.	Lpz., Lps. = Leipzig.	sign. = signature.
circ. = circolo.	Mag. = Magazine.	Sitzgsb. = Sitzungsberichte.
circul. = circular.	Méc. = Mécanique.	s. l. = sans lieu.
col. = colonne.	med. = medicinisch.	spéc. = spéciale.
Comm. = Commentarii.	Mém. = Mémoire.	suiv. = suivante.
Commentat. = Commentationes.	métaph. = métaphysique.	sup. = supérieure.
Corresp. = Correspondance.	Mitt. = Mitteilung.	suppl. = supplément.
C. R. = Comptes rendus.	Monatsh. = Monatshefte.	soc. = société.
déf. = définition.	Monatsb. = Monatsberichte.	theor. = theoretische.
Denkschr. = Denkschriften.	ms., mss. = manuscrit, manuscrits.	trad. = traduction.
Diss. = Dissertation.	Nachr. = Nachrichten.	Trans. = Transactions.
Ec. = Ecole.	nat. = naturelle.	Unterh. = Unterhaltung.
éd. = éditée à, éditée par, édition.	naturf. = naturforschende.	Ver. = Vereinigung.
Edinb. = Edinburgh.	naturw. = naturwissenschaft-	Verh. = Verhandlung.
Educ. = Educational.	norm. = normale. [lich.	Vetensk. = Vetenskabs.
elem. = elementare.	nouv. = nouveau, nouvelle.	Viertelj. = Vierteljahres-
	num. = numérique.	schrift.
	numism. = numismatique.	vol. = volume.
	Op. = Opera.	Vorles. = Vorlesung.
	Opusc. = Opuscul.	Wiss. = Wissenschaft,
	Overs. = Oversight.	wissenschaftlich.
	p. \Rightarrow page.	Z. = Zeitschrift.

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Poststraße 3

- ANDING, E.**, kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. IV Abschnitt: Hilfsmittel und vorbereitende Untersuchungen zur Stellarastronomie. [VI u. S. 81—250] 4. 1910. geh. *M* 10.—
- DARWIN, G. H.**, K. C. B., F. R. S., Ebbe und Flut sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der dritten englischen Auflage von Agnes Pockels in Braunschweig. Mit einem Einführungswort von weil. Georg von Neumayer, Hamburg, und 52 Illustrationen 2. Auflage. [XXIV u. 420 S.] 8. 1911. In Leinwand geb. *M* 8.—
- HÖFLER, A.**, Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie. Mit Beiträgen von W. Foerster, Berlin; K. Haas, Wien; M. Koppe, Berlin; S. Oppenheim, Wien; A. Schülke, Tilsit. Mit 2 Tafeln und 80 Figuren. [XII u. 413 S.] 1913. Geh. *M* 11.—, geb. *M* 12.—
- PRINGSHEIM, E.**, Vorlesungen über die Physik der Sonne. Mit 235 Abb. u. 7 Tafeln. [VIII u. 435 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M* 16.—, in Leinwand geb. *M* 18.—
- SCHNEIDER, J.**, populäre Astrophysik. 2., durch einige Nachträge ergänzte Aufl. Mit 30 Tafeln u. 210 Figuren. [VI u. 723 S.] gr. 8. 1912. In Leinw. geb. *M* 14.—
- SCHWAHN, P.**, mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. Mit 20 Figuren. [V u. 128 S.] 8. 1910. Geh. *M* 3.20, in Leinwand geb. *M* 3.60.
- SCHWARZSCHILD, K.**, über das System der Fixsterne. Mit 13 Figuren. [44 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M* 1.—
- TRABERT, W.**, Lehrbuch der kosmischen Physik. Mit 149 Figuren u. 1 Tafel. [X u. 662 S.] gr. 8. 1911. Geh. *M* 20.—, in Leinwand geb. *M* 22.—

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55, PARIS (6^e)

- ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS**, fondées par U. J. Le Verrier, et publiées par B. Baillaud, Directeur.
- Mémoires: Tomes I à XXVIII. In-4 (30-23), 1855—1910. Chaque volume . . . 27 fr.
(sauf les Tomes XI et XIV qui se vendent chacun 40 fr.)
- Observations. Volumes in-4 (30-23). Années 1800 à 1829, 1837 à 1893, 1897 à 1906.
Chaque année 40 fr.
- CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE**, (Paris 1889).
Comptes rendus des travaux, Procès-verbaux, Rapports et Mémoires, publiés par E. Caspari, Secrétaire. In-4 (28-23), 1890 7 fr. 50
- CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE**, (Paris 1900).
Comptes rendus des travaux, Procès-verbaux, Rapports et Mémoires, publiés par E. Fichot et P. de Vanssay, Secrétaires. In-4 (28-23) de XL-254 pages, 1902 15 fr.
- YVON VILLARCEAU ET AVED DE MAGNAC**. — Nouvelle navigation astronomique. Théorie et pratique. Un beau vol. in-4 (28-23), avec planches; 1877. 20 fr.
- OPPOLZER** (le chevalier Théodore d'), Traité de la détermination des orbites des Comètes et des Planètes. Édition française, publiée, par Ernest Pasquier. Vol. in-4 (28-18), de 500 p. de texte et 200 p. de Tables; 1886. 20 fr.