

COURS
DE
PHYSIQUE

COURS
DE
PHYSIQUE

CONFORME AUX PROGRAMMES
DES CERTIFICATS ET DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

PAR
H. BOUASSE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

TROISIÈME PARTIE
ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT

AVANT-PROPOS

Ce Cours s'écarte des méthodes traditionnelles principalement en deux points.

Il débute par une Introduction mathématique sur les vecteurs, les flux et les actions en raison inverse du carré de la distance.

Tant qu'on n'aura pas modifié du tout au tout les Cours de Mécanique, les physiciens seront obligés d'alourdir leurs traités par l'exposé de notions qui devraient être familières aux étudiants avant qu'ils abordent l'étude de la Physique.

Tous les théorèmes démontrés dans l'Introduction sont d'un emploi continu; l'innovation consiste à les avoir rassemblés dans un ordre logique autant que possible. Que le lecteur en soit assuré : les traités de Physique dont la tenue mathématique est la plus abandonnée, démontrent toutes ces propositions, y compris les propriétés des curls (dont cependant la mise en honneur ne laissera pas d'indigner quelques amateurs égarés dans la Physique). Mais ils le font avec une sorte de honte, qui ressemble parfois, aux yeux des malveillants, à l'incompréhension totale des notions dont ils s'occupent. Le lecteur y gagne de trouver le même théorème en dix endroits, sous les formes les plus diverses et toujours sans démonstration raisonnable. Que penserait-on d'un Cours de Topographie qui établirait les théorèmes de la Géométrie et les formules de la Trigonométrie au fur et à mesure des besoins? Ce serait du gâchis pur : le terme n'est pas trop fort pour caractériser les méthodes en honneur dans un certain nombre d'ouvrages.

Suivant la loi fondamentale du développement des connaissances humaines, les vecteurs, les flux, les distributions d'équilibre, les notions de polarisations rigide et induite sont devenus des abstractions, dont l'étude doit précéder celle de la Gravitation, de l'Électricité et du Magnétisme. Le lecteur aura bien assez de mal à comprendre les théorèmes en eux-mêmes; pourquoi dès le début doubler la difficulté logique d'une difficulté d'application? Ce qui n'interdit pas, bien entendu, d'illustrer les théorèmes par des exemples empruntés aux phénomènes les plus usuels.

La seconde originalité de ce Cours est sa constante préoccupation de préparer le lecteur à l'étude de l'Électroptique. L'auteur a toujours admiré qu'un si grand nombre de physiciens parlassent sans hésiter de la Théorie électromagnétique de la lumière, dont il confesse avoir eu la plus grande peine à comprendre le premier mot. Il admet volontiers qu'il se trouve dans un état d'infériorité intellectuelle vis-à-vis des autres physiciens. Mais comme il peut se rencontrer des étudiants dont les dispositions ne soient pas plus favorables, il cherche à leur venir en aide.

La méthode qui consiste à ne s'occuper de la Théorie électromagnétique que dans un Chapitre terminal plus ou moins écourté, à la traiter comme un point qu'on met ou qu'on ne met pas sur un i, lui a paru toujours défectueuse.

Rien n'est facile comme la théorie de Maxwell, si on prend la peine de généraliser chaque loi quand on la rencontre, d'en donner l'expression analytique, de la ramener à cette forme fondamentale en Électricité, à ce fameux curl qui, je le crains, sera le désespoir d'un certain nombre de mes lecteurs. Mais si tout le long du Cours on s'est gardé comme du feu d'une expression un peu générale des lois, il est parfaitement impossible de comprendre d'où sort cet illustre système de deux curls qui est toute la théorie de Maxwell et de Hertz. On s'en tirera, je le sais, par des discours et des analogies; sous l'action dissolvante de tous ces discours et de toutes ces analogies, l'enseignement supérieur français, du moins celui qui se révèle par les livres, en est arrivé à un tel point d'anémie, qu'il est absolument impossible de lire un mémoire étranger, quand on possède seulement ce que contiennent la plupart des traités classiques. On arguera que les Cours de Physique ne sont pas écrits pour faciliter la lecture des mémoires, bien que leur bibliographie soit parfois aussi copieuse que dénuée de critique: je ne perdrai pas mon temps à discuter une conception aussi primitive de l'Enseignement supérieur.

Naturellement on dira que j'abuse des mathématiques. Je le répète,

ce Cours n'en contient ni plus ni moins que le Traité classique dont l'attitude mathématique est la plus lâchée. Ce que je demande seulement à mon lecteur, c'est de comprendre le sens des symboles. Pour lui, un symbole mathématique ne doit pas être autre chose que la représentation abrégée d'une opération physique. Je sais quelles batailles il faudra livrer avant que tous les professeurs chargés d'enseigner les mathématiques à nos futurs étudiants, veuillent bien entrer dans ces vues, qui sont familières aux meilleurs d'entre eux, je m'empresse de le reconnaître. Mais je sais aussi tout ce que les Anglais ont gagné à apprendre les mathématiques dans cet esprit. Pour eux, un symbole est un opérateur; pour nous, Français, c'est une définition. Le calcul par quaternions s'est généralisé en Angleterre et même en Allemagne, précisément à cause de cette manière de concevoir les symboles.

Quelques physiciens qui n'ont jamais voulu prendre la peine de s'initier au sens des symboles et d'acquérir une idée juste du rôle des Mathématiques dans l'étude de la Physique, ont été bien heureux quand les ions sont apparus. Quelle joie de raisonner sur ces petits corps! Enfin on y comprenait quelque chose!

Je suis navré de troubler leur quiétude; il faut cependant qu'ils sachent que les ions ont eu pour résultat, non de supprimer l'Électroptique de Maxwell, mais de la compliquer un peu plus.

Qu'ils en prennent galamment leur parti : les curls ont encore une brillante carrière à couvrir.

Ce cours a la prétention d'être expérimental, tout autant que s'il contenait la description de treize potentiomètres et de quinze hystérésimètres nouveaux. Le lecteur s'apercevra bien vite que, même lorsque je démontre un théorème, mes yeux ne quittent pas l'expérience. C'est en quoi ce Cours diffère profondément des Traités de Physique mathématique qui, même excellents, ne conservent de la Physique que le nom et des faits que le prétexte.

J'ai développé plus qu'il n'est habituel l'étude de la Gravitation. Le lecteur me saura gré de poser devant lui deux problèmes dont il ne méconnaîtra pas l'importance. Il devient indispensable de préciser ce que peut être la constitution du Soleil; il est déplorable que les physiciens ne connaissent des marées que la théorie statique dont l'absurdité ne fait plus question.

Le lecteur s'étonnera de ne pas trouver l'Électroptique dans ce troisième volume, alors que j'annonce dans la préface du premier que le Cours est divisé en quatre parties. Je me suis aperçu, en corrigeant les épreuves, qu'il était plus rationnel de couper l'ouvrage en

six volumes, ayant tous à peu près le même développement. Voici les titres des six parties :

- I. Mécanique physique.**
- II. Thermodynamique, théorie des ions.**
- III. Électricité et Magnétisme.**
- IV. Optique, instruments.**
- V. Electroptique.**
- VI. Étude des symétries.**

MM. Camilong et Turrière ont bien voulu relire les épreuves de ce troisième volume; je les en remercie sincèrement.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE

SUR LES FLUX ET LES ACTIONS EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE

CHAPITRE I

DES VECTEURS ET DE LEURS FLUX

1. **Opérations fondamentales sur les vecteurs.** — En Physique on rencontre principalement deux espèces de quantités¹ : les *quantités scalaires*, définies par un nombre et généralement susceptibles de signe; les *quantités vectorielles ou dirigées*, représentées par un vecteur, c'est-à-dire une droite donnée en grandeur et direction.

Les vecteurs sont de deux sortes :

1^o Les vecteurs *polaires*, dont le type est un déplacement, une vitesse, une force, ... et dont la symétrie est celle du tronc de cône circulaire ;

2^o Les vecteurs *axiaux*, dont le type est une rotation, une vitesse angulaire, un couple, ... et dont la symétrie est celle du cylindre circulaire tournant uniformément autour de son axe.

Nous verrons que la force *électrique* est un vecteur *polaire*, que la force *magnétique* est un vecteur *axial*.

Les règles de composition des vecteurs sont énoncées dans le Cours de Mathématiques, § 1 et suivants².

Deux opérations fondamentales sont effectuées avec un vecteur défini en tout point d'une portion de l'espace, c'est-à-dire *dans un champ* :

1^o son *intégration le long d'une courbe tracée dans le champ*, ce que nous appellerons son *travail* ou sa *circulation* (I, § 98);

¹ Nous trouverons dans l'*Étude des Symétries* une troisième sorte de quantités : les *tenseurs*, dont le rôle est important mais limité.

² *Cours de Physique élémentaire* (Seconde, Première C et D, Mathématiques A), par BOUSSE et BRIZARD (Delagrave, éditeur). Le lecteur trouvera, principalement dans le Cours de Première, les éléments de l'Électricité; il voudra bien s'y reporter pour toutes les expériences classiques dont il n'est pas parlé dans le présent ouvrage.

2° *l'intégration de son flux à travers une surface tracée dans le champ, ou plus simplement son flux.*

Nous allons étudier ces opérations indépendamment de la signification du vecteur.

2. Travail ou circulation d'un vecteur. —

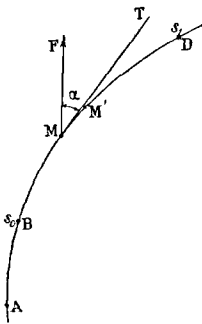


Fig. 1.

Soit un vecteur F appliqué au point M qui se déplace sur la courbe AB dans le sens AB . Le travail accompli par ce vecteur pour le déplacement MM' est *par définition* donné en grandeur et en signe par l'expression :

$$\overline{MM'} F \cos \alpha.$$

C'est l'élément de l'intégrale du vecteur le long de la courbe.

Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, le vecteur aide le déplacement : le travail est positif.

Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, le vecteur gêne le déplacement :

le travail est négatif.

Nous reconnaissons immédiatement la définition du travail au sens ordinaire du mot ; il suffit de prendre pour vecteur la force.

Fixons la position du point M par sa distance s au point origine A , distance mesurée le long de la courbe AB . L'élément de travail est $F \cos \alpha \cdot ds$. Quand le point M se déplace de $B(s = s_0)$ en $D(s = s_1)$, le travail total accompli est :

$$\bar{C} = \int_{s_0}^{s_1} F \cos \alpha \, ds.$$

C'est l'intégrale du vecteur le long de la courbe BD .

Nous pouvons aussi définir le vecteur par ses composantes, X, Y, Z , parallèlement à trois axes rectangulaires. Soient alors x, y, z , les coordonnées des points de la courbe ; on peut écrire :

$$\bar{C} = \int_A^B (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Pour que l'intégration soit possible, il faut généralement connaître le vecteur en grandeur et direction, en chaque point de la courbe et par conséquent pour chaque valeur de s ; c'est-à-dire connaître F et $\cos \alpha$, ou encore X, Y, Z , en fonction de s .

Nous emploierons dans ce qui suit comme équivalents les mots *vecteur* et *force*. Il est entendu que tout ce que nous dirons de la force s'applique à un vecteur quelconque ; mais le lecteur suivra mieux les raisonnements sur le vecteur force, auquel il est particulièrement accoutumé.

3. Champ de force. Intensité du champ. Actions à distance. — On dit qu'il y a *champ de force* lorsque la force est donnée en grandeur et direction en tous les points d'un espace qui est le champ.

Nous pouvons arbitrairement définir des champs de force. En fait nous ne rencontrons de champ de force que dans trois cas : pesanteur, électricité, magnétisme.

L'emploi des mots *champ* et *intensité du champ* implique une idée particulière sur le mode de production de la force. On admet implicitement que le milieu est déformé avant même que la force puisse effectivement se manifester.

Autour de la Terre, par exemple, nous ne pouvons définir la pesanteur en un point avant de placer une masse en ce point. Mais comme on répugne à admettre des actions à distance, on considère qu'*avant même l'introduction de cette masse*, il y a quelque chose de modifié dans le milieu : *il existe une force à l'état virtuel*. C'est précisément en vertu de cet ordre de considérations qu'on définit un champ par son intensité en chaque point, avant même qu'il y ait effectivement aucune force réalisée. *L'intensité du champ est la force qui s'exercerait sur la masse unité de l'agent capable d'obéir à cette force, si on l'introduisait dans le champ*. Dans tout ce qui suit nous confondons les termes *intensité du champ* et *force*; il n'y a aucun inconvénient pourvu que le lecteur soit prévenu.

L'intégration du vecteur force le long de trajectoires quelconques situées dans un champ est possible, puisque par hypothèse F et $\cos \alpha$ nous sont donnés en tous les points d'une trajectoire quelconque, en fonction de la distance s à un point quelconque de la trajectoire pris pour origine.

On peut passer d'un point A à un point B du champ de force par une infinité de trajectoires; les travaux accomplis par la force pour les diverses trajectoires ne sont pas nécessairement égaux.

4. Potentiel. — On dit que *la force admet un potentiel, si le travail accompli par elle, quand le point d'application M passe d'un point A de son champ à un autre point B, est indépendant de la trajectoire parcourue*.

Cherchons les conséquences de l'hypothèse que la force admet un potentiel. Désignons par \mathcal{C}_{AB} le travail accompli par la force, quand on passe de A à B; il ne dépend que de la position des points A et B. On a d'ailleurs par définition :

$$\mathcal{C}_{AB} = -\mathcal{C}_{BA}.$$

Le travail \mathcal{C}_{AB} doit s'exprimer à l'aide des seules propriétés des points A et B, et par conséquent à l'aide de leurs coordonnées. On

peut donc poser : $\tilde{C}_{AB} = \varphi(A, B)$, en appelant $\varphi(A, B)$ une fonction des six coordonnées des points A et B.

Allons d'abord de A à D par une courbe quelconque; puis, par deux autres courbes quelconques, allons de A à B, puis de B à D. Dans ces trois opérations les travaux sont : \tilde{C}_{AD} , \tilde{C}_{AB} , \tilde{C}_{BD} ; nous devons avoir *identiquement* par hypothèse :

$$\tilde{C}_{AD} = \tilde{C}_{AB} + \tilde{C}_{BD}, \quad \varphi(A, D) = \varphi(A, B) + \varphi(B, D).$$

Cette relation doit être satisfaite quelles que soient les coordonnées du point B. Ce n'est possible qu'à la condition qu'on puisse poser :

$$\varphi(A, B) = V_A - V_B,$$

V_A étant une fonction des coordonnées du seul point A, V_B étant une fonction des coordonnées du seul point B. Cette fonction V s'appelle le *potentiel*.

En définitive, *dire qu'une force admet un potentiel revient à dire que le travail effectué par elle, quand on passe d'un point A de son champ à un autre point B, peut s'exprimer par la différence des valeurs que prend, en ces deux points, une certaine fonction des coordonnées qu'on appelle le potentiel*. On peut poser :

$$\tilde{C}_{AB} = V_A - V_B.$$

On a bien : $\tilde{C}_{AB} = -\tilde{C}_{BA}$, puisque : $\tilde{C}_{BA} = V_B - V_A$.

De même :

$$\tilde{C}_{AD} = V_A - V_D = \tilde{C}_{AB} + \tilde{C}_{BD} = (V_A - V_B) + (V_B - V_D).$$

Si la trajectoire est fermée, c'est-à-dire si l'on part d'un point A pour y revenir, le travail est nul : $T_{AA} = V_A - V_A = 0$.

Cette conclusion est cependant trop particulière, comme nous le verrons plus loin (§ 10).

Le potentiel n'est pas une quantité dirigée : sa mesure est exprimée en chaque point du champ de force par un nombre : *c'est une quantité scalaire*, un *scalar*, comme disent les Anglais. Il est de la nature d'un travail et s'exprime en kilogrammètres ou en ergs suivant le système d'unités choisi.

5. Surfaces équipotentielles. — Les surfaces équipotentielles sont définies par la condition : $V = C^te$.

THÉORÈME. — La force est normale à la surface équipotentielle en tous ses points. Soient en effet deux points voisins A et B d'une surface équipotentielle : $\tilde{C}_{AB} = V_A - V_B = 0$.

Le travail est nul, la force est normale à l'élément de trajectoire AB.

Quand on passe d'un point quelconque A d'une surface équipotentielle à un autre point quelconque B, quelle que soit la trajectoire, le travail est nul; cela ne veut pas dire que tout le long de la tra-

jectoire le travail soit nul, mais que la somme des travaux positifs est égale à la somme des travaux négatifs.

REMARQUE. — On peut *généralement* considérer comme parallèles deux surfaces équipotentielles voisines.

6. Expression d'une composante quelconque de la force au moyen du potentiel.

— Soit S_1 et S_2 deux surfaces équipotentielles voisines dont les potentiels sont V et $V + \Delta V$. Considérons une trajectoire quelconque OAB ; soit F' la composante de la force au point A suivant la direction AB . Soit enfin s et $s + \Delta s$ les distances (comptées sur OAB) des points A et B à une origine quelconque O . On a par définition :

$$\begin{aligned}\bar{C}_{AB} &= V_A - V_B = F' \Delta s \\ &= V - (V + \Delta V) = -\Delta V;\end{aligned}$$

d'où :
$$F' = -\frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

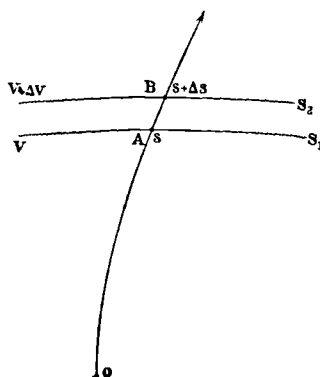


Fig. 2.

La composante suivant AB de la force au point A est donnée en grandeur et en *signe* par l'expression :

$$-\frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

Voici ce que cela veut dire. Allant du point A au point B , on constate une variation ΔV de potentiel : si $\Delta V > 0$, la composante cherchée est dirigée suivant BA ; si $\Delta V < 0$, elle est dirigée suivant AB . Sa valeur absolue est donnée par le quotient $\Delta V : \Delta s$.

La force est toujours dirigée vers les potentiels décroissants.

Cette conclusion résulte d'une convention arbitraire (§ 4); si, au lieu de poser : $\bar{C}_{AB} = V_A - V_B$, on avait posé : $\bar{C}_{AB} = V_B - V_A$, ce qui était aussi légitime, la conclusion serait inverse.

Quand on passe du point A de la surface S_1 à un point B variable de la surface S_2 , Δs est minimum si la trajectoire AB est normale aux surfaces; donc F' est maximum. Nous retombons sur le théorème précédemment démontré : la force au point A est normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point. Soit Δn la distance des deux surfaces au voisinage du point A : $-\frac{\Delta V}{\Delta n}$ est en grandeur et en signe l'expression de la force en ce point.

Considérons trois axes rectangulaires; il résulte immédiatement de la proposition générale, qu'en un point quelconque du champ de

force, les composantes de la force parallèlement aux trois axes sont :

$$-\frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad -\frac{\Delta V}{\Delta y}, \quad -\frac{\Delta V}{\Delta z}.$$

Dans ce qui précède, les déplacements sont petits mais finis ; nous calculons donc les composantes moyennes. Si V est donné en fonction de x, y, z , l'expression générale de la composante vraie en un point A , parallèlement à une trajectoire OAB , est : $-\frac{\partial V}{\partial s}$.

Les composantes parallèlement aux trois axes de coordonnées sont :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

D'une manière générale, nous dirons qu'un vecteur admet un potentiel V , fonction des coordonnées x, y, z , lorsque ses composantes sont définies au moyen du potentiel V par les relations précédentes. Le long d'une courbe fermée, sa circulation est nulle.

7. Lignes et tubes de force. — On appelle *ligne de force* une ligne toujours normale aux surfaces équipotentielles qu'elle traverse.

La force lui est tangente en chacun de ses points. C'est encore la trajectoire d'un point assujéti à suivre constamment la direction de la force là où il se trouve.

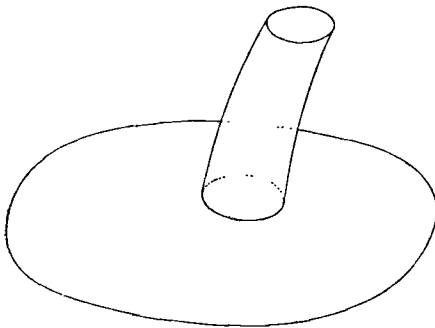


Fig. 3.

Si la force a en tous les points du champ une direction bien définie, il est clair que les lignes de force de ce champ ne peuvent pas se couper. Au voisinage d'un point elles forment donc un faisceau de droites parallèles, tout comme les surfaces équipotentielles peuvent être remplacées par un faisceau de plans parallèles.

Par tous les points d'une courbe fermée quelconque menons les lignes de force; nous obtenons *un tube de force*.

8. Superposition de plusieurs champs de force. — Nous dirons pour abrégé qu'une force admet un potentiel, quand la force est définie en tous les points d'un champ et y admet un potentiel.

Supposons que plusieurs forces admettent séparément un potentiel. Faisons-les agir simultanément et *admettons que leurs actions soient indépendantes les unes des autres*. L'ensemble des forces admet un

potentiel dont on obtient la valeur en chaque point en additionnant les valeurs des potentiels des forces agissant isolément.

Cette proposition est évidente : elle résulte de ce que les travaux s'additionnent algébriquement. Si, pour passer d'un point A à un point B, les divers systèmes de forces agissant isolément font des travaux :

$$\mathcal{C}'_{AB} = V'_A - V'_B, \quad \mathcal{C}''_{AB} = V''_A - V''_B, \dots;$$

quand ils agiront simultanément, ils feront un travail :

$$\mathcal{C}_{AB} = \mathcal{C}'_{AB} + \mathcal{C}''_{AB} + \dots$$

Tout se passe donc comme s'il existait au point A un potentiel :

$$V_A = V'_A + V''_A + \dots,$$

et au point B un potentiel :

$$V_B = V'_B + V''_B + \dots$$

9. Exemples de forces admettant un potentiel.

1° Au voisinage d'un point à la surface de la Terre, la pesanteur admet un potentiel. Nous savons (§ 23 du Cours de Seconde) que le travail accompli quand on passe d'un point A à un point B ne dépend pas de la trajectoire. Les surfaces équipotentielles sont des plans horizontaux; c'est pourquoi on appelle quelquefois ces surfaces *des surfaces de niveau*, par analogie avec le nom qu'elles portent dans le champ de la pesanteur. La force, normale aux surfaces équipotentielles, est verticale. Nous savons qu'elle est constante (au moins très sensiblement) quand on se déplace suivant la verticale.

Prenons pour axe des z la verticale et comptons les z positivement vers le zénith : soit p le poids du corps; le potentiel a pour expres-

sion :

$$V = pz, \quad -\frac{\partial V}{\partial z} = -p;$$

la pesanteur est dirigée verticalement vers le nadir.

2° Supposons qu'en tout point A du champ la force passe par un point fixe O et que sa grandeur soit proportionnelle à une certaine puissance n de la distance r à ce point. Les surfaces équipotentielles sont des sphères ayant pour centre le point O. Le potentiel qui n'est fonction que de la distance r , a pour expression : kr^{n-1} , où k est une constante. La force est donnée par la formule :

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -(n+1)kr^n.$$

D'après le théorème du § 8, il existe encore un potentiel si les forces sont dues à l'attraction ou à la répulsion d'autant de centres que l'on voudra, agissant en raison d'une puissance quelconque de la distance et suivant la droite qui les joint au point sur lequel ils agissent.

En particulier le champ de force admet un potentiel, si les centres

en nombre quelconque agissent en raison inverse du carré des distances.

Nous reviendrons longuement plus loin sur ce cas fondamental.

10. Cas où le potentiel peut prendre plusieurs valeurs discontinues au même point. Généralisation de la définition du potentiel. — Étudions un champ de force qui semble bizarre, mais dont l'importance est énorme, puisqu'il est réalisé au voisinage d'un courant quelconque, et rigoureusement dans tout l'espace pour un courant rectiligne indéfini.

Je suppose que les surfaces équipotentielles sont des demi-plans s'arrêtant à une droite indéfinie dont la trace sur un plan normal est

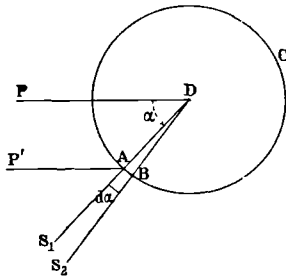


Fig. 4.

représentée en D dans la figure 4. Les lignes de force, normales aux surfaces équipotentielles (§ 5), sont donc des circonférences de cercle situées dans des plans normaux à la droite D, et ayant pour centre la trace de la droite sur chacun des plans. Ce sont donc des courbes fermées.

Enfin je prends comme expression du potentiel l'équation : $V = k\alpha$, où α désigne l'angle de la surface S_1 considérée avec l'une d'elles P prise pour origine des azimuts.

La figure représente une des lignes de force.

Cherchons quelle est la grandeur de la force sur la ligne de force ABC de rayon r . Nous avons généralement :

$$Fds = -dV.$$

Or : $ds = r d\alpha, \quad dV = k d\alpha.$

D'où : $F = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{k}{r}.$

La force est en raison inverse de la distance au point D; elle est constante en tous les points d'une ligne de force.

Partons d'un point A pour y revenir : deux cas peuvent se présenter.

1° *La trajectoire n'entoure pas le point D.* — Quand nous revenons au point A, l'angle α reprend la même valeur : le travail est nul. Il y a potentiel au sens ordinaire du mot.

2° *La trajectoire entoure le point D.* — Dans ce cas, nous ne revenons pas au point A avec la même valeur de l'angle α ; il a crû ou décrû d'un nombre entier n de fois 2π . Donc le travail total accompli par la force, le long d'une trajectoire fermée quelconque partant du point A et revenant au point A, est égal à $2\pi k \cdot n$. Chaque fois que

nous tournons autour du point D d'un tour dans le sens où les angles α croissent, le travail est $-2\pi k$; chaque fois que nous tournons d'un tour en sens contraire, le travail est $+2\pi k$.

Voici donc un exemple où la valeur numérique du potentiel sur les surfaces équipotentielles peut avoir une infinité de déterminations en progression arithmétique, et où le travail accompli quand on part d'un point pour y revenir peut avoir aussi une infinité de déterminations en progression arithmétique.

11. Connectivité de l'espace. — Le cas que nous venons de signaler se rattache à la notion plus générale de *connectivité de l'espace*.

Soit dans une portion d'espace deux points quelconques A et B, et deux chemins 1 et 2, allant de A à B à travers cet espace. On dit que *l'espace est simplement connexe lorsqu'on peut passer du trajet 1 au trajet 2 d'une manière continue sans sortir de l'espace considéré*.

Ainsi l'intérieur d'une sphère est simplement connexe.

Au contraire, l'espace compris entre deux cylindres concentriques n'est pas simplement connexe. Il est facile de voir que parmi les trajets joignant deux points quelconques A et B, certains ne jouissent pas de la propriété de pouvoir, par déformation continue et sans sortir de l'espace, se transformer les uns dans les autres; ce sont ceux qui entourent le cylindre intérieur.

Le cas traité au § 10 rentre dans celui-ci; en effet, la force devient infinie sur la droite D; *elle n'est donc définie que dans l'espace extérieur à un cylindre ayant pour axe la droite D, et dont le rayon, aussi petit qu'on veut, doit rester fini*. Le rayon du cylindre extérieur limitant l'espace devient infini, ce qui ne change pas le degré de connectivité.

Si on introduit une cloison passant par l'axe des deux cylindres, et s'il devient entendu que les trajets ne traverseront pas cette cloison, l'espace compris entre deux cylindres concentriques devient simplement connexe. On dit qu'avant l'établissement de la cloison, il était *doublement connexe*. L'intérieur d'un tore est de même doublement connexe.

D'une manière générale, la connectivité d'une portion d'espace est définie par le nombre plus un de cloisons qu'il faut établir pour la rendre simplement connexe, ces cloisons étant considérées comme infranchissables. Par exemple, l'espace traversé par deux courants rectilignes est triplement connexe du point de vue de la force magnétique.

Nous n'aurons pas souvent l'occasion d'utiliser *explicitement* ces notions; le lecteur s'apercevra cependant qu'elles interviennent *implicitement* à chaque instant.

12. Flux d'un vecteur à travers une surface. — Soit S une surface, dS un de ses éléments. Soit F un vecteur défini en tous les points de la surface, et plus généralement dans une portion d'espace qui contient la surface considérée; il fait l'angle α avec la normale ON .

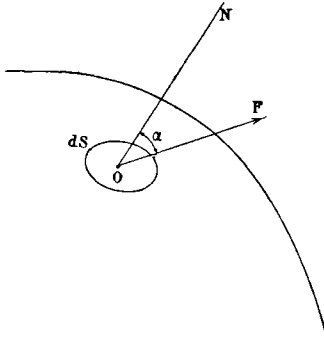


Fig. 5.

On appelle flux du vecteur à travers une portion de la surface, l'intégrale :

$$\iint F \cos \alpha dS,$$

étendue à cette portion. Elle n'est définie en signe que si l'on choisit un sens sur la normale, c'est-à-dire si on peut distinguer l'une de l'autre les deux faces de la surface.

On peut donner au flux une autre forme. Soit X, Y, Z , les composantes de F en un point x, y, z , de la surface; soit l, m, n , les cosinus directeurs de la normale. On a :

$$\iint F \cos \alpha dS = \iint (lX + mY + nZ) dS.$$

En choisissant pour découper les aires dS des plans parallèles aux plans coordonnés, on a encore :

$$\iint F \cos \alpha dS = \iint (Xdz + Ydx + Zdy).$$

Il faut, pour appliquer cette formule, tenir compte des conventions de signes. Considérons une droite parallèle à l'axe des x et définie par des valeurs données de y et de z .

Si la surface est fermée, un point se déplaçant sur cette droite de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, pénètre dans l'espace limité par la surface au point x_1 , en sort pour x_2 , y rentre pour x_3 , ... Le nombre des points d'entrée et de sortie est évidemment pair. Soit X_1, X_2, \dots les valeurs correspondantes de X : nous devons écrire, en convenant de prendre la normale positivement vers l'extérieur de la surface :

$$\iint X dz = \iint (X_2 - X_1) dy dz + \iint (X_4 - X_3) dy dz + \dots$$

Si la surface est ouverte, nous devons compter positivement X quand la traversée se fait dans un sens supposé défini à l'avance, négativement quand elle se fait en sens contraire.

13. Flux conservatif et non conservatif. — La portion de surface à travers laquelle on considère le flux est nécessairement limitée par une courbe fermée C .

Supposons le vecteur défini dans tout l'espace et faisons passer par la courbe C une infinité de surfaces. Calculons le flux du vecteur pour

les portions de toutes ces surfaces qui sont limitées par la courbe C. Si le résultat est le même, on dit que le flux est *conservatif* ou qu'il se conserve.

Nous pouvons énoncer ce qui précède en d'autres termes. Attachons à la courbe C *supposée rigide* une surface parfaitement déformable. Le flux est conservatif s'il est le même, quelle que soit la forme que nous donnions à cette surface, l'intégration étant toujours faite jusqu'au contour C.

Cette manière d'opérer a l'avantage que, la déformation de la surface étant continue, on peut toujours reconnaître les deux faces l'une de l'autre : par conséquent il n'y a pas d'ambiguïté sur le signe à donner au flux du vecteur.

THÉORÈME. — *Si le flux est conservatif, le flux à travers une surface fermée quelconque est nul. Il est entendu que les normales sont prises toutes soit vers l'extérieur, soit vers l'intérieur de la surface fermée.*

Traçons sur la surface fermée S un contour fermé C, qui la sépare en deux parties S_1 et S_2 . Puisque le flux est conservatif, il est le même pour les deux surfaces *en grandeur et en signe*, à condition de prendre les normales dans le même sens (comme l'indiquent les flèches), de manière que par une déformation continue les faces correspondantes des surfaces S_1 et S_2 se superposent. On a : $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Calculons maintenant le flux à travers la surface fermée S, les normales étant prises toutes vers l'extérieur ou toutes vers l'intérieur. Il est clair qu'il faudra changer le signe de l'un des deux flux précédemment calculés. Donc la somme : $\mp \mathcal{F}_1 \pm \mathcal{F}_2$, est nulle.

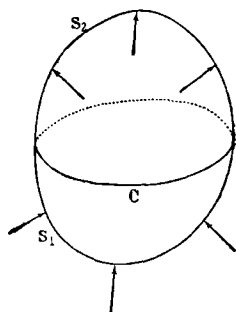


Fig. 6.

14. Comparaison entre les opérations fondamentales. — Il n'est pas inutile de montrer le parallélisme entre les notions d'intégration d'un vecteur le long d'un contour ($\int F \cos \alpha ds$, § 2) et d'intégration d'un vecteur sur une surface ($\int \int F \cos \alpha dS$). L'expression mathématique est semblable, sauf que dans un des cas il s'agit d'une ligne avec des points comme limites d'intégration ; dans l'autre cas, il s'agit d'une surface avec une courbe comme limite d'intégration.

Nous avons distingué comme cas particulier celui où l'intégrale $\int F \cos \alpha ds$ est indépendante de la trajectoire qui joint les points limites d'intégration ; il existe alors un potentiel.

Nous distinguons maintenant le cas où l'intégrale $\int \int F \cos \alpha dS$ est

indépendante de la surface d'intégration et ne dépend que du contour qui limite la surface : le parallélisme est absolu.

Dans le premier cas, l'intégrale est nulle pour une trajectoire fermée. Dans le second, elle est nulle pour une surface fermée.

Les notions que nous étudions sont à ce point fondamentales qu'il est inutile d'espérer comprendre quoi que ce soit en Électricité, si on ne les possède à fond : comme certains ont de la difficulté à se représenter d'emblée les abstractions, voici des exemples simples qui donnent corps aux définitions précédentes.

15. Exemple d'un flux conservatif. Écoulement d'un liquide incompressible.

1° Jetons dans une rivière des corps qui puissent se maintenir en suspension dans l'eau, par exemple de petites balles ayant sensiblement la densité de l'eau. Elles prennent des directions variables suivant leur proximité du fond ou des rives. Leurs directions sont celles de l'écoulement aux divers points, leur vitesse mesure la vitesse d'écoulement en ces points. Il est évident que si on considère les phénomènes au voisinage d'un point O , les directions sont parallèles et les vitesses sont les mêmes, cela avec une approximation d'autant plus grande qu'on s'écarte moins du point O .

2° Nous allons parvenir aisément à la notion de débit à travers une surface. Plongeons dans la rivière un cerceau que, pour simplifier, nous supposons d'abord plan. Nous avons tendu sur le pourtour de ce cerceau un filet dont nous supposons le fil assez fin pour qu'il ne gêne en rien le passage de l'eau. Pendant chaque seconde, il passe à travers la surface S formée par le filet, un certain nombre de litres d'eau qui sera par définition le débit à travers la surface considérée : nous le représenterons par D .

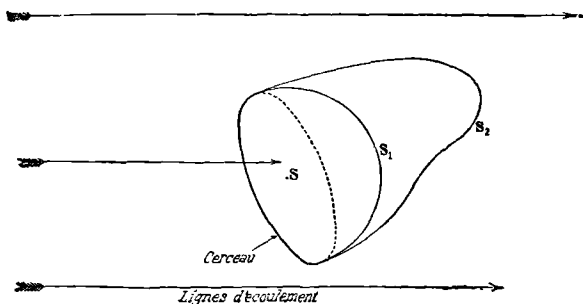


Fig. 7.

Au lieu d'un filet, employons un grillage limité toujours au pourtour du cerceau, mais pouvant prendre, grâce à la rigidité de ses fils, une forme quelconque (hémisphérique par exemple). Nous demandons quels sont les débits à travers les surfaces

S_1, S_2, \dots qu'il forme. Il est facile de voir que, quelle que soit la forme de ces surfaces, le débit sera constant et égal à D , à

la seule condition que le fluide soit incompressible et que les surfaces S_1, S_2, \dots du grillage soient tout entières immergées dans l'eau (fig. 7).

Considérons en effet le volume fermé limité par les surfaces S et S_1 : il est *plein* de liquide *incompressible*; donc, pendant un temps donné, il sort à travers S_1 autant de liquide qu'il en entre à travers S .

D'où la notion fondamentale de *débit à travers une courbe fermée*.

Puisque la forme de la surface limitée au contour du cerceau est indifférente, nous n'avons plus besoin de la spécifier, et nous pouvons parler sans ambiguïté du *débit à travers le cerceau*. Évidemment quand nous voudrions mesurer effectivement ce débit, nous serons obligés de choisir une surface particulière; mais nous pourrions prendre la plus commode, puisque nous savons que le résultat sera toujours le même.

Tout ce qui précède s'appliquerait évidemment encore, si le cerceau avait une forme gauche quelconque.

Nous voici parvenus à deux notions :

1° celle de direction et de vitesse d'écoulement;

2° celle de débit à travers une courbe fermée quelconque.

16. Expression du débit total en fonction de la vitesse d'écoulement. — Nous allons chercher à les relier l'une à l'autre, ce qui ne présente aucune difficulté.

Nous allons utiliser : 1° la remarque déjà faite, qu'au voisinage d'un point, on peut supposer constantes la direction et la vitesse d'écoulement; 2° ce fait qu'une surface courbe quelconque peut, avec autant d'approximation que l'on veut, être remplacée par un polyèdre d'un grand nombre de faces. Nous voici donc ramenés à considérer une surface plane d'aire S plongée dans un liquide où l'écoulement est uniforme.

Soit v la vitesse d'écoulement mesurée en centimètres par seconde, plaçons l'aire S normalement à la direction d'écoulement. Il passe par seconde à travers cette aire un nombre de centimètres cubes égal à vS , si S est évaluée en centimètres carrés. Supposons que l'aire ne soit plus normale au courant; si elle était parallèle, le flux serait nul. Il est facile de démontrer

que le flux est généralement égal à $vS \cos \alpha$, où α représente l'angle que fait la normale à la surface avec la direction d'écoulement (fig. 8).

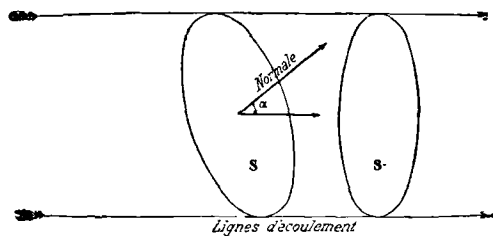


Fig. 8.

Menons en effet par le pourtour de la surface S des droites parallèles à la direction de l'écoulement : elles forment un cylindre dont la section droite est S' . A travers la surface de ce cylindre, il ne passe rien, puisque le liquide coule parallèlement : donc le flux est le même à travers S et S' . A travers S' il est vS' ; or $S' = S \cos \alpha$, nous avons donc à travers S le flux ou débit : $D = vS \cos \alpha$. Le problème est complètement résolu, puisque, quelle que soit la surface, nous pouvons la décomposer en petits plans et que nous pouvons considérer, sur chacun de ces petits plans, l'écoulement comme complètement déterminé par deux nombres constants, l'un α fixant sa direction, l'autre v fixant sa vitesse.

Dans l'exemple précédent le vecteur est la vitesse d'écoulement, le flux du vecteur est le débit total, c'est-à-dire la quantité de liquide qui passe dans l'unité de temps à travers la surface considérée.

Le flux est conservatif, et l'on peut parler du flux à travers une courbe fermée.

Le flux à travers une surface fermée est nul ; il faut supposer, bien entendu, que le volume limité par elle soit complètement rempli. Ainsi amenons à l'intérieur de la surface fermée¹ le liquide au moyen d'un tuyau : il en sort une certaine quantité par toute la surface, moins la partie qui est limitée par le tuyau ; il en entre par le tuyau une quantité égale. Le tuyau joue le rôle de tube pour le vecteur *vitesse d'écoulement*.

17. Cas d'un fluide compressible. — Reprenons les mêmes raisonnements avec un fluide compressible. Nous pouvons encore définir en chaque point la direction et la vitesse d'écoulement. Le produit de la densité (ici variable) par la vitesse d'écoulement est un vecteur qu'on peut supposer connu en direction et grandeur. Le flux de ce vecteur à travers une surface représente encore le débit à travers cette surface. *Mais le flux n'est pas conservatif.* La quantité de gaz à l'intérieur d'une surface fermée n'est pas constante à cause de la compressibilité. *L'expression débit à travers une courbe fermée n'a plus de sens.* A travers une surface fermée, le flux n'est pas nécessairement nul. Nous pouvons mettre dedans un tube plein de gaz comprimé ; quand le tube est ouvert, il sort du gaz à travers la surface fermée et aucune rentrée ne compense cette sortie.

Nous trouverons réalisés en Électricité et en Magnétisme les deux cas : tantôt le flux sera conservatif, tantôt il ne le sera pas.

18. Flux de force dans le cas d'un potentiel. — Le vecteur que nous allons maintenant considérer est la force. Traitons le cas

¹ Il va de soi que nous appelons ici surface fermée une surface mathématiquement fermée et non pas physiquement étanche : la phrase n'aurait aucun sens dans le second cas.

particulier où elle admet un potentiel. Soit S une surface quelconque dont nous pouvons distinguer les deux faces. Menons les normales; repérons les différents points de chacune de ces normales à l'aide de la distance n comptée sur elle à partir d'un de ses points arbitrairement choisi :

$$F \cos \alpha = -\frac{\partial V}{\partial n}, \quad \iint F \cos \alpha dS = -\iint \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Voici comment on peut calculer cette intégrale. Menons une surface S' parallèle à la surface considérée à une distance invariable Δn . Découpons la surface en petits éléments ΔS , mesurons pour chacun de ces éléments la variation moyenne ΔV du potentiel quand on passe de S à S' ; le flux est :

$$-\frac{1}{\Delta n} \cdot \sum \Delta V \Delta S.$$

Généralement les calculs sont impossibles, mais le sens de l'intégrale est clair.

19. L'intégrale d'un flux à travers une surface fermée est égale à l'intégrale de la divergence du vecteur étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface. — Nous allons introduire ici une quantité d'une importance fondamentale et qu'on désigne sous le nom de *divergence d'un vecteur*. Soit X, Y, Z , les composantes de ce vecteur définies dans tout un espace en fonction des coordonnées x, y, z , des points de cet espace. On appelle *divergence du vecteur* F la quantité :

$$\text{Div. } F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Nous avons montré plus haut que l'on a :

$$\int \int X dy dz = \int \int [(X_2 - X_1) + (X_4 - X_3) + \dots] dy dz.$$

Si X est une quantité continue et n'a pas de valeurs infinies entre x_1 et x_2 , x_3 et x_4 , ... (ce que nous supposons toujours dans l'application du théorème), on peut poser :

$$X_2 - X_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial X}{\partial x} dx, \quad X_4 - X_3 = \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial X}{\partial x} dx, \dots$$

On a donc :

$$\int \int X dy dz = \int \int \int \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz.$$

Opérant de même sur les intégrales :

$$\int \int Y dz dx, \quad \int \int Z dx dy,$$

on trouve, en posant : $dx dy dz = dv$:

$$\int \int F \cos \alpha dS = \int \int \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int \int \int \text{Div. } F dv.$$

Les normales à la surface sont prises positivement vers l'extérieur.

20. Condition pour qu'un flux soit conservatif. — Il faut que l'intégrale étendue à une surface fermée *quelconque* soit nulle ; la condition est donc que l'on ait en tous les points de l'espace considéré :

$$\text{Div. } F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Cette condition signifie que dans le petit volume $dx dy dz$ il entre autant de flux qu'il en sort.

Soit X, Y, Z , les valeurs des composantes au centre de gravité C du petit parallélépipède (fig. 9). Le flux à travers $abcd$ est :

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz ;$$

il sort du parallélépipède et doit être pris positivement. Le flux qui entre à travers $efgh$ est :

$$\left(X - \frac{\partial X}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz ;$$

il doit être compté négativement. La résultante des deux flux est :

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz.$$

Opérons de même sur Y et Z ; le flux total qui sort du parallélépipède est donc :

$$\text{Div. } F. dv \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Le théorème du § précédent revient donc à dire que *ce qui sort de la surface fermée entière est la somme algébrique de ce qui sort de tous les parallélépipèdes élémentaires.*

Ce sont là des notions fondamentales que nous avons rencontrées bien des fois (I, § 65 et § 85). Par exemple, soit u, v, w , les déplacements ou les vitesses d'un fluide parallèlement aux trois axes de coordonnées ; nous voulons exprimer qu'il est incompressible (I, § 85) ; il revient au même d'écrire que dans tout élément de volume il entre toujours autant de fluide qu'il en sort ; la condition est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

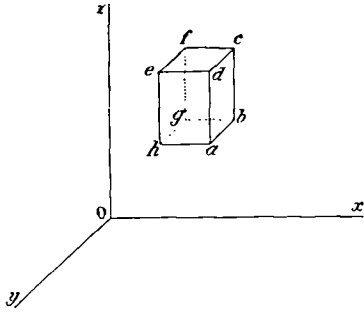


Fig. 9.

En Élasticité u, v, w , représentent les déplacements très petits pendant les déformations; la condition ci-dessus exprime encore l'incompressibilité.

21. Cas où le vecteur admet un potentiel.

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

$$\text{Div. } F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\Delta V,$$

en posant pour abrégé :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Le flux a donc pour expression :

$$\iint F \cos \alpha \, dS = -\iint \frac{\partial V}{\partial n} \, dS = -\iiint \Delta V \, dv.$$

Le flux est conservatif, si $\Delta V = 0$.

22. Règle du bonhomme d'Ampère. Relation entre les faces d'une surface et le sens de circulation sur une courbe qui limite cette surface. — Pour reconnaître les faces d'une surface, nous les affectons des signes $+$ et $-$. La normale à la surface est censée traverser la surface de la face $-$ à la face $+$.

Choisissons un sens de circulation sur le contour de la surface : les conventions suivantes, équivalentes, nous apprennent à relier ce sens aux signes des faces. On les connaît sous les noms de règles du *bonhomme d'Ampère* et du *tire-bouchon de Maxwell*.

Le *bonhomme*, placé de manière qu'un mobile allant dans le sens de circulation lui entre par les pieds et lui sorte par la tête, et tenant entre ses mains la surface, a la face positive à sa gauche.

Un *tire-bouchon* qu'on fait pénétrer dans la surface par la face négative et qui, par conséquent, avance dans le sens choisi pour la normale positive, tourne dans le sens de circulation.

Il revient encore au même de dire que *les mouvements de translation suivant un axe et de rotation autour de cet axe sont de même signe, lorsque leurs directions correspondent aux mouvements de translation et de rotation d'une vis ordinaire.*

On dit que *le système est à droite.*

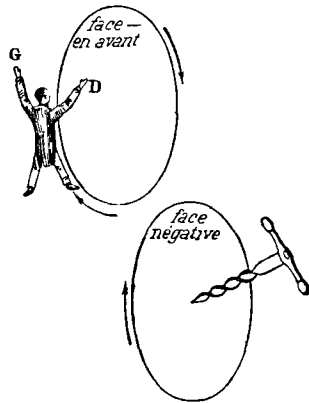


Fig. 10.

Enfin il résulte de ces conventions que si nous nous plaçons sur la face positive (face de sortie du tire-bouchon, direction positive de la normale), la circulation est en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre dont la face est tournée vers nous.

Nous remarquerons, à propos de ces conventions et pour les illustrer :

1° qu'un courant circulant dans un contour dans le sens positif crée des lignes de force traversant la surface dans le sens positif (Cours de Première, § 27);

2° qu'un courant traversant la surface dans le sens positif crée des lignes de force circulant dans le sens positif.

Pour nous conformer aux conventions précédentes, nous emploierons un trièdre de référence tel que l'ordre des symboles conduise dans l'espace à un système de directions à droite. Ainsi un mouvement de translation suivant Ox doit correspondre à un sens de circulation $abcd$, ou à une rotation dans le sens ηz .

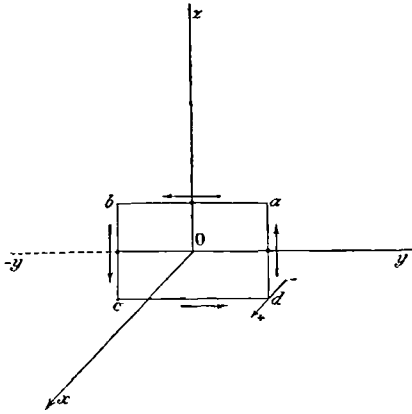


Fig. 11.

23. Expression des composantes d'un vecteur normal à deux vecteurs donnés. —

On donne deux vecteurs F_1 et F_2 par leurs composantes $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$. On demande les composantes X_3, Y_3, Z_3 , d'un vecteur F_3 normal au plan des deux premiers et égal à leur produit multiplié par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux, c'est-à-dire égal à l'aire : $F_1 F_2 \sin \varphi$, du parallélogramme construit sur eux.

Les formules bien connues de la Géométrie analytique donnent immédiatement :

$$\begin{aligned} X_3 &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \\ Y_3 &= Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \\ Z_3 &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Les axes formant un système à droite, ainsi qu'il est expliqué au paragraphe précédent, si le vecteur F_1 est dirigé suivant l'axe des x ,

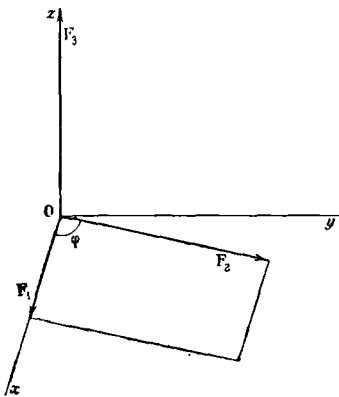


Fig. 12.

si le vecteur F_2 est dans le plan xOy et fait un angle aigu avec l'axe des y , le vecteur F_3 est dirigé suivant l'axe des z .

Un bonhomme traversé des pieds à la tête par le vecteur F_1 et regardant dans la direction F_2 a le vecteur F_3 à sa gauche.

On comparera utilement les formules (1) à celles qui donnent les moments d'une force par rapport aux axes de coordonnées (I, § 10). Le problème est exactement le même. Soit x, y, z , les coordonnées du point d'application d'une force dont les composantes sont X, Y, Z ; les moments de la force par rapport aux axes sont les projections sur ces axes d'un vecteur normal aux vecteurs x, y, z , et X, Y, Z , et égal à leur produit multiplié par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux. Les composantes de ce vecteur sont, d'après les formules (1) :

$$yZ - zY, \quad zX - xZ, \quad xY - yX,$$

c'est-à-dire précisément les moments de la force par rapport aux axes.

24. Relation entre le flux conservatif d'un vecteur φ (dont les composantes sont ξ, η, ζ) à travers une surface, et la circulation d'un autre vecteur F (dont les composantes sont X, Y, Z) le long de la courbe fermée qui limite cette surface.

La circulation d'un vecteur le long de la courbe AB est l'intégrale de ce vecteur le long de la courbe (§ 2); si le vecteur représente une force, la circulation est identique au travail.

Voici maintenant l'énoncé du théorème de Stokes.

Le flux du vecteur φ est égal à la circulation du vecteur F , à la condition que les axes soient à droite et que l'on ait :

$$\xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \quad (1)$$

Les Anglais disent que le vecteur ξ, η, ζ , est le *curl* (la boucle; prononcez *keurl*) du vecteur X, Y, Z ; les Allemands emploient l'expression *vort*, diminutif de *vortex* (tourbillon). Nous userons de la notation symbolique :

$$(\xi, \eta, \zeta) = \text{curl}(X, Y, Z)$$

LEMME I. — Soit $ABCD$ la courbe qui limite la surface; traçons sur cette surface deux systèmes de courbes quelconques, la décomposant en quadrilatères et triangles curvilignes quelconques. La somme des circulations du vecteur F (supposé défini pour toute la surface) le long de tous les quadrilatères et triangles, parcourus dans le même sens, est égale à la circulation sur la courbe extérieure.

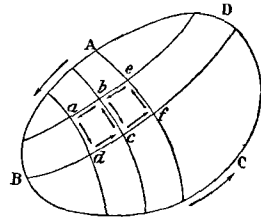


Fig. 13.

En effet, dans le premier cas, chaque côté d'un quadrilatère ou

d'un triangle, qui ne fait pas partie du contour extérieur, est parcouru deux fois en sens contraires : ainsi chaque côté fait intervenir dans la circulation totale deux quantités égales et de signes contraires qui se détruisent.

LEMME II. — Le flux total du vecteur φ est égal à la somme des flux à travers chaque élément de surface.

Ces lemmes sont vrais, quelle que soit la grandeur et la forme des éléments en lesquels on découpe la surface ; donc il suffit de démontrer le théorème quand les éléments sont infiniment petits, pour qu'il soit démontré pour une surface finie.

Découpons sur la surface un élément limité par deux systèmes de plans voisins parallèles aux plans xz et xy ; l'axe des y est dirigé d'avant en arrière, l'axe des x de gauche à droite. Les projections sur les plans coordonnés du petit élément ainsi découpé sont :

$$dy dz, dz dx_1, dx_2 dy.$$

Le flux du vecteur φ est égal à :

$$\xi dy dz + \eta dz dx_1 + \zeta dx_2 dy.$$

Évaluons maintenant la circulation du vecteur F le long du parcours ABCD.

Considérons par exemple le vecteur Y : il n'intervient que dans les parcours BA et DC. Évaluons sa valeur moyenne pour ces parcours, c'est-à-dire sa valeur en leurs milieux ; appelons Y la valeur au point A.

En α milieu de AB, il est :

$$Y_1 = Y + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx_1}{2} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{dy}{2}.$$

En β milieu de CD, il est :

$$Y_2 = Y - \frac{\partial Y}{\partial z} dz + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial Y}{\partial x} \left(dx_2 + \frac{dx_1}{2} \right).$$

La circulation du vecteur Y est :

$$- Y_1 dy + Y_2 dy = - \frac{\partial Y}{\partial z} dy dz + \frac{\partial Y}{\partial x} dx_2 dy.$$

C'est précisément par ces termes que Y entre dans le flux, si l'on suppose satisfaites les conditions (1). On procède de même pour la circulation des composantes X et Z : le théorème est donc démontré.

Nous posons dans l'énoncé que le flux du vecteur φ est conservatif :

$$\text{Div.} (\xi, \eta, \zeta) = \text{Div. curl} (X, Y, Z) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

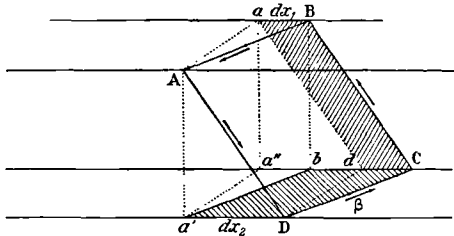


Fig. 11.

C'est évident d'après les équations (1) et aussi d'après la nature du problème : nous ne pouvons en effet remplacer une circulation qui ne dépend que d'une courbe, par un flux à travers une surface limitée par cette courbe, que si le flux est le même pour toutes les surfaces satisfaisant à cette condition.

Il résulte de là que nous pouvons arbitrairement nous donner un vecteur X, Y, Z , dans un champ et remplacer sa circulation le long d'une courbe par le flux d'un autre vecteur ξ, η, ζ , à travers une surface quelconque limitée par cette courbe. Ce second vecteur est complètement déterminé, et son flux est conservatif; autrement dit, sa divergence est nulle.

Mais la réciproque n'est pas vraie : nous ne pouvons pas prendre arbitrairement le vecteur ξ, η, ζ ; son flux doit être conservatif. De plus le vecteur X, Y, Z , dont il est le curl, n'est déterminé qu'à une fonction arbitraire près. Les vecteurs :

$$X, Y, Z, \quad \text{et} \quad X - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z - \frac{\partial V}{\partial z},$$

satisfont également aux équations (1).

Nous avons appliqué le théorème de Stokes à l'étude des Tourbillons (I, § 98); le vecteur ρ_x, ρ_y, ρ_z est moitié du vecteur ξ, η, ζ .

25. Exemple. Flux d'un vecteur constant. — Soit un vecteur constant : $\zeta = 2A$, dirigé suivant l'axe des z . Son flux à travers un contour quelconque est égal à la circulation le long de ce contour du vecteur F dont les composantes sont :

$$X = -Ay, \quad Y = Ax, \quad Z = 0.$$

Le vecteur F est normal à la droite allant de l'origine des coordonnées au point de coordonnées x et y ; il est proportionnel à la distance r de ce point à l'origine : $F = Ar$.

Vérifions la proposition pour un cercle de rayon R placé dans le plan xOy et ayant son centre à l'origine. Le flux du vecteur ζ est : $2A \cdot \pi R^2$.

La circulation du vecteur F est : $2\pi R \cdot RA$.

Nous aurions pu prendre encore pour le vecteur F les composantes :

$$X = -Ay - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = Ax - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

où V est une fonction quelconque de x, y et z . Nous savons en effet que la circulation le long d'une courbe fermée d'un vecteur qui admet un potentiel est nulle.

26. Importance des considérations précédentes. — On ne saurait trop insister sur l'importance du théorème précédent. Il est à la base des lois fondamentales de l'Electricité : toute l'Electroptique

tient dans deux curls. Le lecteur doit se familiariser avec cette notion, qui n'exige, pour être comprise, que la connaissance approfondie du *sens* des symboles mathématiques. Il la retrouvera à toutes les pages sous des formes diverses.

Montrons en quelques mots de quelle manière elle s'introduit :

1° La loi de l'induction relie la variation du flux d'induction par rapport au temps à l'existence d'une force électromotrice dans le circuit qui limite la surface d'intégration du flux. Elle s'exprime donc, à des coefficients numériques près, par le curl :

Taux de variation dans le temps du vecteur induction = curl du vecteur force électromotrice.

2° La loi de l'électromagnétisme relie le flux du courant à travers un contour au travail du pôle unité, faisant un tour complet le long de ce contour. Elle s'exprime donc, à des coefficients numériques près, par le curl :

Vecteur intensité du courant = curl du vecteur force magnétique.

Pour que ces relations aient un sens, il faut que le flux d'induction soit conservatif, et que l'électricité se conduise comme un fluide incompressible : ce sont là des conditions nécessaires, admises bien entendu par la théorie.

Ce qui précède suffirait largement à mettre le théorème de Stokes au nombre des notions primordiales de la Physique qui ne se contente pas de phrases creuses et d'analogies vaines. Voici un second ordre de considérations qui ajoute à l'intérêt du théorème.

Nous avons distingué deux sortes de vecteurs (§ 1) : les vecteurs *polaires* (déplacements, forces,...) et les vecteurs *axiaux* (rotations, couples,...). Les curls servent à relier les vecteurs d'espèces différentes. On peut le vérifier sur les lois de l'Électricité. L'induction est un vecteur axial, la force électromotrice un vecteur polaire. L'intensité du courant est un vecteur polaire, la force magnétique un vecteur axial. On conçoit, en effet, qu'un tourbillon entrant dans un contour produise une circulation dans ce contour; qu'un tourbillon, ayant pour ligne de tourbillon une courbe fermée, produise un déplacement dans l'intérieur de cette courbe.

CHAPITRE II

ACTIONS EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE

27. Définitions des agents positifs et négatifs. Densités. — Nous étudierons maintenant les champs produits par des agents s'attirant ou se repoussant proportionnellement au produit de leurs masses, en raison inverse du carré de leur distance et suivant la direction qui les joint. Les agents sont de deux espèces, *positive* et *négative*. Nous admettrons que les agents de même espèce se repoussent et les agents d'espèces différentes s'attirent.

Suivant ce qui est expliqué au § 3, nous définirons *l'intensité du champ* créé en un point A comme la force qui *s'exercerait* sur l'unité de masse de l'agent positif placé au point A. Nous parlerons de cette force comme existant antérieurement à la mise en place de l'agent destiné à la mesurer. Soit donc F le vecteur représentatif de l'intensité du champ au point A dû à une masse punctiforme m de l'agent placée en O; sa direction passe par la masse O; il est dirigé dans le sens OA si m est positif, dans le sens AO si m est négatif.

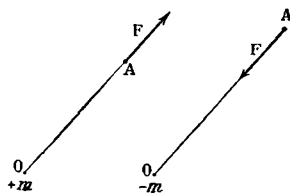


Fig. 15.

Nous pouvons supposer les agents répartis d'une manière continue dans un volume : leur masse est alors définie par une *densité de volume* ρ ; l'élément de masse est : ρdv , où dv est l'élément de volume.

Ils peuvent être aussi répartis en couches minces : leur masse est définie par une *densité de surface* σ ; l'élément de masse est : σdS , où dS est l'élément d'aire de la couche.

28. Angles solides. — La démonstration de la plupart des théorèmes qui suivent repose sur la considération des *angles solides*. Un cône quelconque de sommet O délimite sur la sphère S_1 de rayon 1 une aire s ; par définition, *cette aire mesure l'angle solide du cône*. Il peut varier de 0 à 4π ; c'est un nombre.

Soit une surface quelconque S . Un cône de sommet O et d'angle solide infiniment petit $d\omega$ découpe sur la surface un élément d'aire dS .

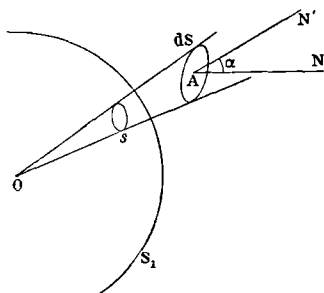


Fig. 16.

Soit r la distance OA et α l'angle de la direction moyenne AN' des génératrices du cône avec la normale AN à la surface. On a évidemment :

$$d\omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}.$$

Lorsque la surface a deux faces distinctes, l'angle solide est susceptible de deux déterminations, suivant que du sommet on regarde l'une ou l'autre face. Généralement nous distinguerons les faces et les angles solides par les signes $+$ et $-$.

CALCUL DE L'ANGLE SOLIDE ω SOUS LEQUEL ON VOIT UN DISQUE DE RAYON R D'UN POINT DE SON AXE SITUÉ À UNE DISTANCE r .

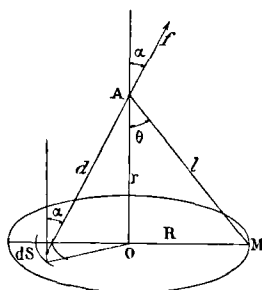


Fig. 17.

On appelle *axe* d'un disque circulaire la normale OA à son plan, élevée par le centre O du cercle.

L'aire d'une zone sphérique est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle. Faisons passer une sphère de rayon l et de centre A par le pourtour du disque : l'angle solide cherché a pour mesure l'aire de la calotte qui est au-dessous du plan du disque divisée par l^2 . La hauteur de la calotte et l'angle solide sont donc :

$$l - r = l(1 - \cos \theta), \quad \omega = 2\pi(1 - \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right).$$

29. Flux envoyé par une masse punctiforme. — Le flux envoyé par une masse punctiforme m à travers une surface qu'elle voit sous un angle solide infiniment petit $d\omega$ est : $m d\omega$.

En effet, soit dS l'élément à travers lequel nous évaluons le flux. La force est : m / r^2 ; elle est dirigée suivant AN' . Le flux est :

$$\frac{m}{r^2} dS \cos \alpha = m d\omega.$$

COROLLAIRES. — 1° Le flux étant indépendant de la position de l'élément dS , on peut parler sans ambiguïté du flux envoyé dans un cône $d\omega$: le flux est le même à travers les éléments qu'il découpe sur des surfaces quelconques.

2° Les flux s'additionnant algébriquement (ici arithmétiquement, la proposition s'applique à un cône d'angle fini quelconque ω).

3° Nous pouvons parler sans ambiguïté du flux à travers un contour fermé; c'est le flux envoyé dans le cône qui a pour sommet le point agissant et qui s'appuie sur le contour.

4° A travers une surface fermée quelconque le flux est :

$$m \sum d\omega = 4\pi m,$$

si le point agissant est dans la surface.

5° Si le point agissant est hors de la surface fermée, le flux total est nul. En effet, considérons le contour apparent de la surface vue du point agissant. Il la sépare en deux portions S_1 et S_2 , à travers lesquelles le flux est le même en valeur absolue (3°). Mais dans un des cas il entre dans la surface, dans l'autre cas il en sort : la somme est nulle. Nous pouvons affecter d'un signe la face externe et du signe contraire la face interne; la proposition s'énonce en disant que la somme algébrique des flux est nulle.

6° La surface fermée est traversée soit deux fois, soit un nombre pair de fois par une droite émanant du point agissant. Les propositions 4° et 5° s'appliquent, quelles que soient les complications de la surface, en considérant comme positifs les flux qui sortent et négatifs les flux qui entrent, ou inversement.

7° S'il y a un nombre quelconque de masses (positives ou négatives) à l'intérieur de la surface fermée, le flux total est $4\pi \Sigma m$. Le flux *sortant* est en excès, quand $\Sigma m > 0$; il est en défaut, quand $\Sigma m < 0$.

30. **Équations de Poisson et de Laplace.** — Le flux du vecteur F à travers l'élément de volume $dv = dx dy dz$, est (§ 20) :

$$\text{Div. } F dv = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv.$$

Quand le vecteur F admet un potentiel, on a (§ 21) :

$$\text{Div. } F dv = -\Delta V dv.$$

Écrivons que le flux à travers l'élément dv est égal à 4π fois la somme des masses contenues dans l'élément; il vient :

$$-\Delta V dv = 4\pi \rho dv, \quad \Delta V + 4\pi \rho = 0,$$

où ρ est la densité de volume. C'est l'équation de Poisson; Laplace l'avait déjà considérée dans le cas où $\rho = 0$.

En tous points où il n'y a pas d'agent libre :

$$\rho = 0, \quad \Delta V = 0.$$

Le flux est alors conservatif; à travers une surface fermée quelconque, il est nul (§ 20).

COROLLAIRE I. — *Le potentiel ne peut présenter ni maximum ni minimum en dehors des masses agissantes.*

Si au point A il y a un véritable maximum, A est entouré de surfaces équipotentielles fermées, extérieures les unes aux autres. En tous les points de chacune d'elles la force est dirigée vers l'extérieur : le flux total ne peut être nul. Donc au point A, il y a une masse positive. Même raisonnement si au point A il y a un véritable minimum ; mais la masse est négative.

COROLLAIRE II. — Soit A un *point d'équilibre* en dehors des masses agissantes. Il est sûrement d'équilibre *stable* pour certaines directions et d'équilibre *instable* pour d'autres. En effet, sur les lignes menées du point A, le potentiel à partir du point A ne peut (d'après le corollaire I) décroître partout ou croître partout. Donc le potentiel est sûrement au point A un maximum par rapport à certaines directions et un minimum par rapport à d'autres. Enfin il est constant sur les lignes ou surfaces qui ont même potentiel que le point A ; on aura dans ces directions un équilibre indifférent.

31. A l'intérieur d'un tube de force qui ne contient pas de masses agissantes, le flux est identique à celui d'un fluide incompressible dans un tuyau rempli. — Le flux total à travers une surface fermée est nul. Il est nul par définition sur la surface latérale du tube, puisqu'en un point quelconque la force est dirigée dans le plan tangent. Donc ce qui entre par une surface S_1 limitée au tube, sort par une autre surface S_2 quelconque. Tout se passe comme pour un tube rempli de liquide incompressible.

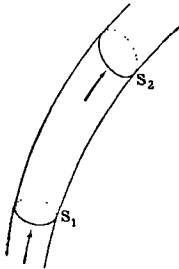


Fig. 18.

COROLLAIRE. — Dans tout espace où ne se trouvent pas de masses agissantes, la force ne peut avoir une direction constante sans être constante.

Les tubes de force sont des cylindres. Le flux doit être conservatif ; il est d'ailleurs égal à la force multipliée par la section droite du tube qui est constante : donc la force est constante. Les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles ; le potentiel décroît proportionnellement à la distance parcourue sur la normale à ces plans.

32. Action sur un point extérieur d'une couche de l'agent, sphérique, uniforme, infiniment mince. — Soit O le centre de cette couche, R son rayon, σ la densité superficielle. Évaluons le flux à travers une sphère concentrique S de rayon r . Par raison de symétrie les lignes de force *hors de la couche* sont des rayons AB, A'B',... ; la force est constante en tous les points de S et normale à S. Soit F sa valeur, le flux de force a pour expression : $4\pi r^2 F$. Il

doit être égal à $4\pi \Sigma m$. D'où : $F = \frac{\Sigma m}{r^2}$.

Donc la force exercée en un point quelconque par une couche sphérique, uniforme, infiniment mince, est la même que si toute la masse était concentrée au centre de la couche (Newton).

COROLLAIRES. — 1° La proposition s'applique évidemment à une couche d'épaisseur quelconque de densité constante, ou même à une couche d'épaisseur quelconque formée de couches concentriques de densités constantes;

2° Évaluons la force à la surface; il faut faire $r = R$; d'ailleurs

$$\Sigma m = 4\pi \cdot R^2 \sigma; \text{ d'où } F = 4\pi \sigma.$$

Nous verrons (§ 39) que cette proposition est vraie d'une manière absolument générale.

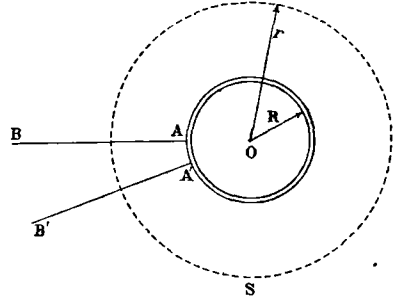


Fig. 19.

33. Action sur un point intérieur d'une couche sphérique, uniforme, infiniment mince. —

Soit A un point quelconque. Menons le diamètre AO et le plan PQ normal à ce diamètre.

Traçons deux cônes infiniment petits opposés par le sommet A et d'angle solide $d\omega$: ils découpent sur la couche deux éléments dS et dS' , faisant avec les génératrices le même angle α . Leurs charges agissent en sens contraires suivant la même direction. Les forces qu'ils exercent sont proportionnelles à :

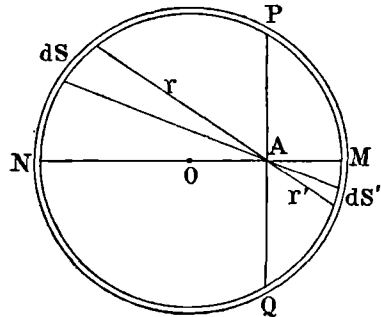


Fig. 20.

$$F = \frac{dS}{r^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha}, \quad F' = \frac{dS'}{r'^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha};$$

elles sont donc égales: les actions des éléments considérés s'équilibrent.

Sans rien négliger, nous pouvons décomposer la surface sphérique en groupes de deux éléments dont les effets se détruisent. Pour chaque groupe, les éléments sont de part et d'autre du plan PQ. Donc l'action totale de la couche sphérique en tout point intérieur est nulle.

34. Réciproquement, parmi toutes les lois fonction de la distance, la loi en raison inverse du carré est la seule pour laquelle l'action de la couche uniforme, sphérique, est nulle en tout point intérieur.

En effet, soit $\varphi(r) : r^2$, la loi de la distance. Si $\varphi(r)$ est constant,

l'action est nulle. Supposons donc que $\varphi(r)$ ne soit pas constant : nous pourrions toujours trouver deux limites r_1 et r_2 entre lesquelles $\varphi(r)$ varie dans le même sens, *croisse par exemple* ; $d\varphi : dr > 0$. Traçons une sphère de diamètre : $r_1 + r_2$, et considérons le point A tel que : $\overline{AM} = r_1$, $\overline{AN} = r_2$.

Pour les deux cônes opposés par le sommet, les forces sont :

$$F = \frac{dS \cdot \varphi(r)}{r^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha} \varphi(r), \quad F' = \frac{dS' \cdot \varphi(r')}{r'^2} = \frac{d\omega}{\sin \alpha} \varphi(r').$$

Puisque r est plus grand que r' et que $d\varphi : dr > 0$, on a : $F > F'$; cette conclusion vaut pour un groupe quelconque d'éléments dS , dS' pris de part et d'autre du plan PQ. Comme cette division en groupes ne néglige aucune partie de la surface sphérique, l'action totale de cette surface ne peut être nulle au point A. Donc, si l'action est nulle, $\varphi(r)$ est constant. C. Q. F. D.

35. Action d'une sphère homogène en un point situé à l'intérieur. — Soit R le rayon de la sphère, soit r la distance au centre du point considéré. Toutes les couches dont les rayons sont compris entre R et r n'ont aucune action : la seule action résulte de la sphère de rayon r . Appliquons le théorème du § 32, et soit ρ la densité de volume. Tout se passe comme si la masse entière $\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho$ était concentrée au centre et agissait à la distance r en raison inverse de r^2 .

La force est donc dirigée suivant le rayon et égale à :

$$\frac{4}{3} \pi \rho \frac{r^3}{r^2} = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot r.$$

Elle est proportionnelle à la distance au centre.

Application. — Le poids d'un corps qu'on descend dans un puits diminue proportionnellement à la profondeur du puits et de manière que son poids s'annule au centre de la Terre. Ceci, bien entendu, dans l'hypothèse improbable où la Terre pourrait être considérée comme homogène.

Donc le poids à la surface de la Terre est un maximum. Plus exactement, si on représente le poids P en prenant pour abscisses la distance r au centre de la Terre supposée de rayon R, il est donné par une droite quand r varie de 0 à R, puis par une hyperbole cubique, quand $r > R$. Les deux courbes ne se raccordent pas tangentielle-ment : elles se coupent sous un angle fini pour $r = R$. Le poids varie d'une manière continue, mais la dérivée $dP : dr$ présente une discontinuité pour $r = R$.

36. Action d'une couche circulaire de densité σ en un point A de son axe. — Nous appelons *axe* d'une couche circulaire la normale OA à son plan élevée au centre O du cercle (fig. 17, § 28).

Par raison de symétrie, la force F que nous cherchons est dirigée suivant l'axe; additionnons donc toutes les composantes suivant l'axe des forces f dues à chaque élément de la couche.

La force f due à l'élément dS est : $\sigma dS : d^2$, où d est sa distance au point A . La composante utile est : $f \cos \alpha = \sigma dS \cos \alpha : d^2$. Je dis que $dS \cos \alpha : d^2$ est l'angle solide sous lequel on voit du point A l'élément dS . C'est évident, puisque la normale à dS est parallèle à OA , et par conséquent fait avec la droite qui joint A et dS l'angle α .

En définitive, la force résultante exercée au point A est dirigée suivant l'axe et égale à $\omega \cdot \sigma$, où ω est l'angle solide sous lequel on voit la couche circulaire.

La force a donc pour expression (§ 28) :

$$2\pi\sigma(1 - \cos \theta) = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right).$$

ACTION SUR UN POINT EXTÉRIEUR D'UN PLAN INDÉFINI RECOUVERT D'UNE COUCHE DE DENSITÉ UNIFORME. — On peut assimiler le plan à un disque de très grand rayon; l'angle sous lequel on le voit est 2π . L'action exercée sur un point A par une couche homogène, de densité σ , répandue sur un plan indéfini, est normale au plan, indépendante de la distance du point au plan et égale à $2\pi\sigma$.

37. Discontinuité produite par une couche de densité σ . Équation de passage. — Appelons 1 et 2 les deux parties du milieu situées de part et d'autre de la couche.

La couche peut être répartie sur une surface quelconque, et la densité peut être variable d'un point à l'autre; au voisinage de la surface, les effets sont les mêmes que si la densité était constante et la surface plane et indéfinie.

Soit F_1 la composante normale à la couche de la force en un point du milieu 1 très voisin de cette couche; elle est comptée positivement vers le milieu 1.

Soit de même F_2 la composante normale à la couche de la force en un point du milieu 2 très voisin; elle est comptée positivement vers le milieu 2.

Nous savons (§ 36) que la couche de densité σ , qui peut être considérée comme plane et indéfinie, exerce une action normale et égale à $2\pi\sigma$. S'il n'y avait dans l'espace que cette couche pour produire le champ, on aurait simplement :

$$F_1 = F_2 = 2\pi\sigma, \quad F_1 + F_2 = 4\pi\sigma.$$

Mais à l'action de la surface agissante s'ajoute un champ *continu* qui donne en valeur absolue la même composante normale de part et d'autre de la surface. Avec nos conventions de signes, il produit de

part et d'autre de la surface des composantes égales et de signes contraires. Nous avons donc encore :

$$F_1 + F_2 = 4\pi\sigma,$$

où F_1 et F_2 sont maintenant les composantes normales totales. Repérons les normales vers les deux milieux au moyen des distances n_1 et n_2 comptées sur elles à partir d'origines quelconques et dans les sens convenus. On a (§ 6) :

$$F_1 = -\frac{\partial V}{\partial n_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial V}{\partial n_2}; \quad \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0.$$

Les composantes tangentielles de la force sont évidemment continues : la discontinuité ne porte que sur les composantes normales.

Couches en équilibre sur un corps conducteur.

38. Corps conducteurs. Condition d'équilibre. Corps isolants. — Jusqu'à présent nous nous sommes donné la distribution de l'agent; nous allons maintenant chercher *ce qu'elle doit être pour l'équilibre*, quand l'agent peut se déplacer librement sur le corps; le corps est dit *conducteur*.

Il résulte immédiatement de cette liberté, que la force en tout point à l'intérieur du corps conducteur est nulle pour l'équilibre; ou encore que *pour l'équilibre le potentiel est constant en tout point à l'intérieur d'un corps conducteur*.

On a alors identiquement : $\Delta V = 0$; donc *il n'existe pas de masses agissantes à l'intérieur d'un corps conducteur quand l'équilibre est atteint* (§ 30).

La surface du corps conducteur est nécessairement une surface équipotentielle, puisqu'elle limite un volume équipotentiel. La force en un point de cette surface est donc nécessairement normale à la surface, proposition que nous aurions pu tirer immédiatement des hypothèses.

Les masses agissantes sont donc poussées normalement vers l'extérieur de la surface; elles y sont maintenues par le milieu environnant qu'on appelle un *isolant*.

Les lignes de force partent normalement à la surface du corps conducteur en équilibre, puisque c'est une surface équipotentielle.

39. La force en tout point de la surface est égale à $4\pi\sigma$, où σ désigne la densité de la couche au point considéré; elle est dirigée vers l'extérieur si l'agent au voisinage du point considéré est positif, vers l'intérieur dans le cas contraire. — Soit dS un élément quelconque de la surface du corps conducteur.

Par le pourtour de cet élément, menons vers l'extérieur les lignes de force : elles forment un tube de force. Fermons ce tube à l'intérieur du conducteur par une surface Σ quelconque. Fermons-le à l'extérieur par un élément dS' parallèle à dS ; l'aire dS' est par conséquent égale à l'aire dS , puisque les lignes de force, normales à la surface S et très voisines, peuvent être considérées comme parallèles.

Évaluons le flux de force qui sort de la surface fermée composée de la surface Σ , de la surface latérale du tube et de la surface dS' : écrivons qu'il est égal à 4π fois la masse agissante, c'est-à-dire à $4\pi\sigma \cdot dS$.

Or à travers Σ il ne passe aucun flux, puisque la force est nulle : nous sommes dans le conducteur.

A travers la surface latérale du tube, il ne passe aucun flux, puisque la force agit suivant la surface. Le seul flux à considérer est celui qui traverse la surface dS' . Soit F la force qui est normale à dS , et par conséquent à dS' , on a :

$$FdS' = FdS = 4\pi\sigma dS; \quad \text{d'où : } F = 4\pi\sigma. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

COROLLAIRE. — D'une manière générale :

$$F = - \frac{\partial V}{\partial n} \quad (\S 6). \quad \text{On a donc : } - \frac{\partial V}{\partial n} = 4\pi\sigma.$$

Lorsque σ est positif, le potentiel décroît au voisinage de la surface du corps conducteur, quand on s'éloigne d'elle vers l'extérieur ; lorsque σ est négatif, le potentiel croît.

Les surfaces équipotentielles sont d'autant plus serrées au voisinage d'un point de la surface que la force est plus grande.

40. Pression électrostatique. — On peut décomposer l'action totale exercée sur un point extérieur très voisin de la surface, par une couche en équilibre répandue sur un corps conducteur, en deux parties séparément égales à $2\pi\sigma$. L'une est due aux éléments de surface voisins du point, l'autre à tout le reste de la couche.

En effet, considérons deux points A et B extrêmement voisins, mais de part et d'autre de la couche agissante. En A la force est nulle, en B elle est égale à $4\pi\sigma$. Or, quand on passe de A en B, l'action des parties de la couche qui ne sont pas très rapprochées ne change pas ; au contraire, l'action des parties très voisines change de signe. Donc, dans le premier cas, ces actions sont égales et de signes contraires ; dans le second cas, elles sont égales et de même signe. Donc elles

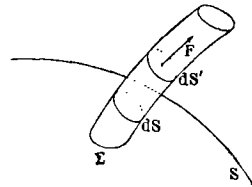


Fig. 21.

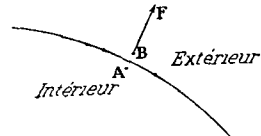


Fig. 22.

valent séparément $2\pi\sigma$. Ce théorème est très remarquable comme montrant l'importance des masses agissantes les plus voisines.

L'action sur le point B des masses agissantes voisines est la même que celle d'un plan indéfini couvert d'une couche de même densité (§ 36) : c'est évident *a priori*.

COROLLAIRE. — *La pression qui pousse la couche vers l'extérieur du conducteur, pression équilibrée par le milieu isolant, est $2\pi\sigma^2$.*

En effet, nous venons de montrer que l'intensité du champ dû à toute la couche, *moins l'élément considéré*, est $2\pi\sigma$. La force exercée sur cet élément est donc $2\pi\sigma \cdot \sigma dS$: la pression est bien $2\pi\sigma^2$.

41. Problème général de la distribution. — D'après les paragraphes précédents, le problème général de la distribution consiste à déterminer, à la surface de tous les conducteurs, une densité superficielle σ telle que le potentiel créé par toutes les couches soit constant en tout point à l'intérieur des conducteurs.

Les conducteurs doivent former des volumes équipotentiels. Nous nous bornerons à traiter quelques cas simples.

Nous admettons que *la solution du problème est unique*.

Nous nous appuyerons souvent sur la proposition suivante : *la superposition de plusieurs états d'équilibre est encore un état d'équilibre*. En effet, le potentiel en chaque point se déduit des charges en sommant des termes de la forme $m : r$; il est donc linéaire par rapport aux charges.

Trouver un état d'équilibre, c'est trouver une distribution superficielle des masses telle que, pour tous les points à l'intérieur de tous les conducteurs, le potentiel soit constant.

Soit alors : V_1, V_2, \dots les potentiels.

Soit : V'_1, V'_2, \dots les potentiels pour une seconde distribution en équilibre.

Superposer les deux états d'équilibre, c'est mettre en chaque point une densité égale à la somme des densités qui correspondent aux deux états. Les potentiels sur les conducteurs deviennent :

$$V_1 + V'_1, \quad V_2 + V'_2, \dots$$

Ils sont donc encore constants à l'intérieur de chacun d'eux ; nous avons encore un état d'équilibre.

42. Équilibre d'une sphère conductrice en présence d'un point électrisé. — Nous nous appuyerons sur le théorème du § 40 ; la densité σ en chaque point de la surface d'un conducteur et la pression électrostatique F sont liées par la relation : $F = 2\pi\sigma^2$. La pression F est normale à la surface.

Soit à calculer σ au point B d'une sphère, en présence d'une masse m placée en A, à une distance $\overline{AO} = d$ du centre de la sphère. Éva-

luons la somme des composantes suivant OB des forces exercées par toutes les masses sur la quantité d'électricité σ placée en B; cette somme est égale à la pression électrostatique F.

En C se trouve une densité σ_1 ; l'élément dS qui la porte exerce en B une

force :
$$\frac{\sigma\sigma_1 dS}{r^2}$$

dirigée suivant BC'. La composante normale dN se calcule aisément :

$$dN = \frac{\sigma\sigma_1 dS}{r^2} \cos \alpha; \quad 2R \cos \alpha = r. \quad dN = \frac{1}{2R} \frac{\sigma\sigma_1 dS}{r}$$

La composante normale due à la masse m située en A, est :

$$\frac{\sigma m}{\rho^2} \cos \beta.$$

Égalons les deux expressions de la pression électrostatique :

$$2\pi\sigma^2 = \iint dN + \frac{\sigma m}{\rho^2} \cos \beta.$$

La densité σ , en facteur dans dN , peut sortir du signe \int ; divisons par σ les deux membres de l'égalité. En définitive, la densité σ cherchée est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} 2\pi\sigma &= \frac{1}{2R} \iint \frac{\sigma_1 dS}{r} + \frac{m}{\rho^2} \cos \beta \\ &= \frac{1}{2R} \iint \frac{\sigma_1 dS}{r} + \frac{m}{2R\rho} - m \frac{d^2 - R^2}{2R\rho^3}, \end{aligned}$$

puisque : $d^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \beta.$

Soit V le potentiel en un point quelconque de la sphère; on a :

$$V = \iint \frac{\sigma_1 dS}{r} + \frac{m}{\rho},$$

quantité constante par hypothèse, quel que soit le point pour lequel se fait l'intégration.

D'où la formule qui résout le problème :

$$\sigma = \frac{1}{4\pi R} \left[V - m \frac{d^2 - R^2}{\rho^3} \right].$$

Soit M la charge positive de la sphère. Puisque son potentiel est indépendant du point considéré, calculons-le pour le centre :

$$V = \frac{M}{R} + \frac{m}{d}; \quad \sigma = \frac{1}{4\pi R} \left[\frac{M}{R} + \frac{m}{d} - m \frac{d^2 - R^2}{\rho^3} \right];$$

σ est exprimée en fonction de la distance ρ qui varie entre $d - R$ et $d + R$.

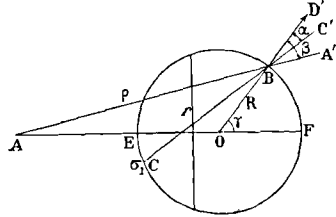


Fig. 23.

43. Cas particuliers.

SPHÈRE AU SOL. — Si la sphère est maintenue au potentiel $V=0$, c'est-à-dire mise au sol, on a :

$$\sigma = -\frac{m}{4\pi R} \frac{d^2 - R^2}{\rho^3}.$$

La densité est partout du signe contraire à celui de m .

SPHÈRE ISOLÉE. — Si la sphère est isolée et chargée d'une masse M , on obtient la densité en superposant une couche uniforme à la densité du cas précédent : c'est une application du théorème énoncé au § 41. Suivant l'épaisseur de cette couche, la densité est de signe constant ou de signe variable.

La *ligne neutre* est le petit cercle de la sphère normal à AO pour lequel $\sigma=0$; elle est donnée par la condition :

$$\frac{M}{R} + \frac{m}{d} = m \frac{d^2 - R^2}{\rho^3};$$

la valeur de ρ est admissible quand elle est comprise entre $d-R$ et $d+R$.

En particulier si la sphère est primitivement à l'état neutre ($M=0$), la ligne neutre correspond à la valeur de ρ :

$$\rho = \sqrt[3]{d(d^2 - R^2)}.$$

Elle découpe la sphère en deux parties inégales, la plus petite est du côté du point A . Elle se rapproche du point E , quand A se rapproche de la sphère ; elle tend à devenir un grand cercle, quand d croît indéfiniment.

SPHÈRE DANS UN CHAMP UNIFORME. — La sphère est dans le champ d'un point très éloigné ; la charge de ce point et sa distance sont liées

par la relation :

$$H = \frac{m}{\rho^2} = \frac{m}{d^2};$$

H est l'intensité du champ uniforme produit ; ρ et d ne diffèrent que d'une quantité très petite par rapport à leur grandeur. Prenons pour variable l'angle θ que fait le rayon OT avec le champ H :

$$\rho = d + R \cos \theta.$$

Si la sphère est d'abord isolée ($M=0$), il vient, en posant $\rho=d$ là où c'est possible :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{m}{4\pi R} \left[\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{\rho^3} \right] = \frac{m}{4\pi R} \left[\frac{1}{d} - \frac{d^2}{\rho^3} \right]; \\ \sigma &= \frac{m}{4\pi R} (\rho - d) \frac{\rho^2 + \rho d + d^2}{d^3} = \frac{3H \cos \theta}{4\pi}. \end{aligned}$$

Cette couche σ répandue à la surface de la sphère doit annuler le champ en tout point à l'intérieur de cette sphère : c'est la condition

générale d'équilibre (§ 41). Elle crée donc un champ uniforme égal et opposé au champ extérieur H.

D'où le théorème : Une couche de densité : $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, répandue à la surface d'une sphère, produit en tout point à l'intérieur de la sphère un champ uniforme :

$$H = \frac{4\pi}{3} \sigma_0.$$

Nous trouverons plus loin maintes applications de ce théorème que nous aurons l'occasion de généraliser (§ 60 et 114).

On peut représenter les couches obtenues d'une façon simple.

Déplaçons la sphère d'une longueur très petite : $\overline{OO'} = a$, dans le

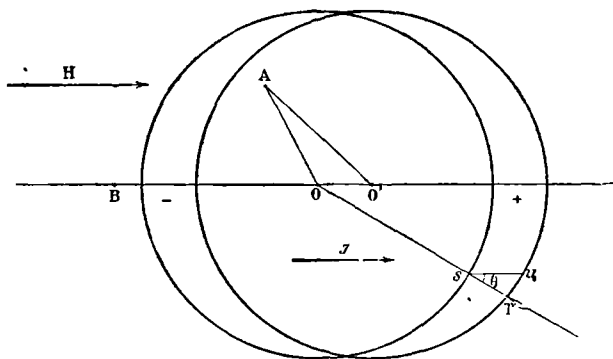


Fig. 24.

sens du champ H. L'épaisseur normale \overline{sT} des couches comprises entre les positions de la sphère est :

$$\overline{sT} = \overline{su} \cos \theta, \quad e = a \cos \theta.$$

Imaginons donc deux sphères uniformément chargées, l'une positivement, l'autre négativement d'une densité de volume ρ' . Elles sont d'abord confondues : leurs charges s'annulent. Faisons-les glisser l'une par rapport à l'autre de la longueur a : la densité superficielle ainsi obtenue est :

$$\sigma = \rho' a \cos \theta.$$

Il suffit de poser : $\rho' a = \frac{3H}{4\pi}$, pour obtenir les couches qui résultent de l'action d'un champ uniforme H.

44. Action du point sur la sphère. — Nous connaissons la densité en tous les points de la surface ; nous pouvons donc chercher la résultante des forces exercées par la masse m placée au point A sur tous les éléments. Il est plus intéressant de procéder autrement.

La pression électrostatique sur tout élément de la surface est :

$2\pi\sigma^2$ (§ 40); cherchons la résultante de ces pressions parallèlement à la droite OA, suivant laquelle est certainement dirigée la force par raison de symétrie. Cette résultante est précisément égale à la force que nous cherchons : on comparera le raisonnement actuel avec celui qui établit le principe d'Archimède.

Considérons une couronne découpée sur la sphère par les cônes circulaires d'axe AO et d'angles γ et $\gamma + \delta\gamma$; son aire est¹ :

$$2\pi R \sin \gamma \cdot R \delta\gamma = 2\pi R^2 \sin \gamma \delta\gamma.$$

La composante des pressions parallèlement à AO est pour cette couronne :

$$2\pi R^2 \sin \gamma \delta\gamma \cdot 2\pi\sigma^2 \cos \gamma = 4\pi^2 R^2 \sigma^2 \cos \gamma \sin \gamma \delta\gamma;$$

σ est une fonction rationnelle de ρ . Prenons donc ρ comme variable.

$$\rho^2 = R^2 + d^2 + 2dR \cos \gamma, \quad \rho \delta\rho = -dR \sin \gamma \delta\gamma.$$

La résultante des pressions devient pour toute la sphère :

$$-\int \frac{2\pi^2}{d^2} \sigma^2 [\rho^2 - R^2 - d^2] \rho \delta\rho.$$

Il faut intégrer entre : $\rho = d - R$, et $\rho = d + R$.

Les calculs ne présentent aucune difficulté; on trouve en définitive :

$$F = \frac{mM}{d^2} + \frac{m^2 R}{d^3} - \frac{m^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Si l'on suppose d assez grand, il reste : $F = \frac{mM}{d^2}$; tout se passe comme si la masse entière M était concentrée au centre de la sphère.

Le mode de raisonnement que nous avons choisi montre que l'attraction ne peut exister que grâce à la non-uniformité de la couche; si on la pouvait supposer uniforme, les pressions électrostatiques s'équilibreraient exactement, et leur résultante serait nulle.

45. Action d'un point électrisé sur un plan indéfini en communication avec le sol. — Soit e la distance de la masse m . Cherchons ce que donnent les formules précédentes, quand on pose :

$$d = R = \infty, \quad d - R = e;$$

$$V = \frac{M}{R} + \frac{m}{d} = 0, \quad \sigma = -\frac{m}{4\pi R} \frac{d^2 - R^2}{\rho^3} = -\frac{me}{2\pi\rho^3}.$$

Au pied de la perpendiculaire abaissée du point électrisé, la densité est :

$$\sigma_0 = -\frac{m}{2\pi e^2}.$$

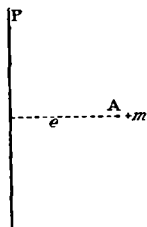


Fig. 25.

¹ On remplace le d de différenciation par δ pour éviter toute ambiguïté dans l'écriture

Le point électrisé attire le plan avec une force qu'on déduit de la formule du § 44 :

$$F = - \frac{m^2 R d}{(d^2 - R^2)^2} = - \frac{m^2}{e^2} \frac{R d}{(R + d)^2} = - \frac{m^2}{4e^2}.$$

46. Distribution sur un ellipsoïde. — On trouve dans les Traités de Mécanique la démonstration du théorème suivant :

L'attraction d'une couche de densité de volume constante ρ , limitée par les surfaces de deux ellipsoïdes semblables, semblablement placés et concentriques, est nulle sur tout point intérieur.

Si l'épaisseur de la couche décroît indéfiniment en même temps que croît sa densité de volume ρ , à la limite nous avons un ellipsoïde couvert d'une couche de densité de surface σ et dont l'action est nulle sur tout point intérieur.

L'électricité ainsi distribuée sur la surface est donc en équilibre.

L'épaisseur de la couche mince, et par conséquent la densité σ , sont égales à la distance des plans tangents aux ellipsoïdes aux points qui sont sur le même rayon vecteur émanant du centre.

A cause de la similitude, la distance des plans tangents entre eux est proportionnelle à la distance de l'un d'eux au centre. D'où le théorème :

La densité de surface σ en un point d'un ellipsoïde non soumis à des actions extérieures, est proportionnelle à la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent mené en ce point.

POUVOIR DES POINTES. — On peut assimiler le bout d'un corps allongé à l'extrémité d'un ellipsoïde; la densité croît donc à mesure qu'on s'approche des pointes, et aussi la force électrique (§ 39) proportionnelle à la densité. Nous verrons au § 241 qu'il peut résulter de là une décharge par l'air.

47. Théorie des images électriques. — Il est extrêmement difficile de trouver la distribution sur un conducteur donné. On est conduit à chercher des solutions de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

où V soit une fonction de x, y, z , finie et continue, s'annulant à l'infini et prenant une valeur constante à la surface de chaque conducteur.

Mais il est au contraire facile de se donner des fonctions V satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, et de déterminer la forme des conducteurs de manière que ces fonctions V soient des solutions. On s'appuie sur le théorème fondamental suivant :

Considérons deux groupes de masses Σm et $\Sigma m'$ placées en des points fixes. Supposons qu'il existe une surface équipotentielle V

fermée, entourant complètement le groupe Σm et laissant à l'extérieur le groupe $\Sigma m'$.

Remplaçons la surface géométrique V par une surface métallique : disposons sur cette surface une couche dont la densité σ soit en

chaque point :

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n},$$

la dérivée étant prise sur la normale à la surface V menée vers l'extérieur. Enfin supprimons le groupe des masses intérieures Σm . Je dis que le problème de la distribution sur le conducteur V en présence du groupe $\Sigma m'$ est ainsi résolu.

En effet, le potentiel est devenu constant à l'intérieur du conducteur, puisqu'il est constant à la surface et qu'il n'y a pas de masses intérieures. D'ailleurs rien n'est changé extérieurement à la surface V , puisqu'on a distribué dessus une couche maintenant précisément la même forme aux surfaces équipotentielles voisines de V et par conséquent à toutes les autres.

On dit que le groupe Σm est une image électrique de la distribution réelle sur la surface; on entend par là un système de points chargés, situés d'un côté d'une surface et produisant de l'autre côté une action identique à celle de la charge effective de la surface.

On dit que les images sont *virtuelles*, en ce sens qu'on ne peut pas trouver une distribution *différente de la distribution réelle* et produisant les mêmes effets *dans la même région*, c'est-à-dire à l'intérieur de la surface.

On remarquera que la masse totale de la couche répandue sur la surface V est précisément égale à Σm , puisque le flux à travers toute surface fermée extérieure à V est le même pour la distribution réelle et pour la distribution fictive.

Un exemple simple et déjà traité par une autre méthode éclaircira le théorème.

48. Images dans une surface plane conductrice indéfinie.

— Soit deux masses égales et de signes contraires placées aux points A et B (fig. 26). Posons $\overline{AO} = e$. Les surfaces équipotentielles ont pour équation :

$$V = \frac{m}{\sqrt{(x+e)^2 + y^2}} - \frac{m}{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}.$$

La surface de potentiel nul est le plan normal à AB et dont la trace sur le plan du tableau est Oy .

Remplaçons-la par une surface métallique devant jouer dans tout l'espace, du côté du point A , le même rôle que la masse $-m$ située en B . Il faut la charger d'une couche dont la densité σ est en chaque

point :

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{me}{2\pi e^3}.$$

Nous pouvons supprimer la masse $-m$ du point B, pourvu que nous installions le plan métallique chargé de la couche qui vient d'être définie. Si nous faisons cette opération, le plan se trouvera *ipso facto* au potentiel nul. Nous pouvons supprimer $-m$ et relier le plan au sol, c'est-à-dire lui imposer le potentiel nul : il se charge alors *ipso facto* de la couche σ .

Nous retrouvons ainsi la solution obtenue au § 45 par un procédé très différent.

ÉCRAN ÉLECTRIQUE. — Le potentiel est nul dans tout l'espace à gauche du plan métallique indéfini. Celui-ci sert donc d'écran contre les actions du point A.

REMARQUE. — Dans le faisceau des surfaces équipotentiellles, nous avons choisi la surface équipotentielle plane; nous aurions pu prendre l'une quelconque, nous aurions résolu un problème particulier de distribution.

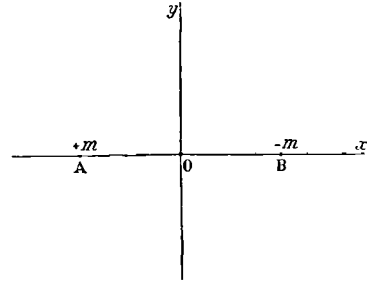


Fig. 26.

CHAPITRE III

POLARISATION

Nous étudierons dans ce Chapitre une distribution particulièrement importante : le milieu est dit *polarisé*. La polarisation est *rigide* quand on suppose que rien ne peut la modifier ; c'est une donnée du problème.

Nous étudierons ensuite, sous le nom de *polarisation induite*, le cas où elle est fonction du champ ; nous nous limiterons à une hypothèse simple.

Polarisation rigide.

49. Définition de la molécule polarisée. Aimant élémentaire. Couple ou doublet électrique. — Une molécule polarisée

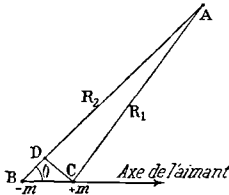


Fig. 27.

est constituée par deux petites masses $+m$ et $-m$ situées à une distance dl l'une de l'autre. L'axe de la molécule est la direction qui joint les masses. Le moment dM de la molécule est le produit : $dM = mdl$; on peut le représenter par un vecteur parallèle à l'axe de la molécule, dirigé de la masse $-m$ à la masse $+m$ et de longueur proportionnelle à dM .

Nous emploierons souvent un langage différent tiré du fait que les aimants peuvent être considérés comme l'ensemble d'une infinité de molécules polarisées infiniment petites. L'aimant élémentaire, l'axe de cet aimant et son moment remplaceront la molécule polarisée, l'axe de cette molécule et son moment.

Les expressions *couple* ou *doublet électrique*, empruntées à la théorie des diélectriques, ont exactement le même sens que *molécule polarisée*.

50. Potentiel d'un doublet en un point extérieur. — Cherchons le potentiel du doublet au point A. Joignons le point A aux

deux masses $+m$ et $-m$; soit θ l'angle que font avec l'axe du doublet l'une ou l'autre des droites AB ou AC; posons :

$$\overline{AC} = R_1, \quad \overline{AB} = R_2.$$

Ces distances diffèrent infiniment peu. Le potentiel cherché est :

$$dV = m \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{m dl \cos \theta}{R^2} = \frac{dM \cos \theta}{R^2}.$$

R est la distance du point A au doublet.

AUTRE EXPRESSION. — Supposons le doublet dirigé suivant l'axe des x ; le potentiel créé au point A situé à la distance R est :

$$dV = m \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = m dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = dM \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = dM \frac{\partial p}{\partial x},$$

en posant pour abrégier $p = 1 : R$.

L'observateur va de la masse négative à la masse positive; si la distance R diminue, si par conséquent son inverse p croît, le potentiel dû au doublet est positif au point considéré. Les composantes de la force au point A de coordonnées x', y', z' , sont :

$$X = -dM \frac{\partial^2}{\partial x' \partial x} \left(\frac{1}{R} \right),$$

$$Y = -dM \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x} \left(\frac{1}{R} \right),$$

$$Z = -dM \frac{\partial^2}{\partial z' \partial x} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Mais on a : $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$.

Donc les dérivées par rapport à x et x' , y et y' , z et z' , sont respectivement égales et de signes contraires; d'où :

$$X = dM \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right), \quad Y = dM \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{R} \right), \quad Z = dM \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Ces expressions seront d'un emploi continu.

On remarquera que le potentiel d'un doublet est en raison inverse du carré, et la force en raison inverse du cube de la distance au point agi.

§1. Intensité de polarisation ou d'aimantation. Remplacement d'une constitution discontinue par une constitution continue. — Soit un milieu constitué par un nombre infini d'aimants élémentaires dont les moments et les axes varient d'une manière continue. Nous poserons que le moment magnétique d'un élément de volume est proportionnel au produit du volume par une quantité vectorielle \mathcal{J} que nous appellerons *intensité de polarisation ou d'aimantation* :

$$dM = \mathcal{J} dv.$$

\vec{J} est un vecteur dont nous représenterons les composantes parallèles à trois axes rectangulaires par A, B, C .

Le milieu ainsi constitué est un aimant.

Calculons le potentiel en un point extérieur. Chaque élément de volume équivaut à trois aimants de moments :

$$Adv, \quad Bdv, \quad Cdv,$$

respectivement dirigés suivant les axes Ox, Oy, Oz . Les potentiels s'ajoutant algébriquement, on a immédiatement, d'après le § 50 :

$$V = \iiint \left(A \frac{\partial p}{\partial x} + B \frac{\partial p}{\partial y} + C \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv.$$

L'intégrale est étendue à tout le volume; $p = 1/R$ est l'inverse de la distance de l'élément considéré au point pour lequel on calcule le potentiel.

Intégrons par parties; V devient :

$$\iint p(A dy dz + B dz dx + C dx dy) - \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) p dv.$$

Donc tout se passe comme s'il existait :

1° en tout point de la surface de l'aimant, une densité superficielle :

$$\sigma = Ax + B\beta + C\gamma,$$

α, β, γ , représentant les cosinus directeurs de la normale à la surface dirigée vers l'extérieur.

En effet : $A dy dz = Ax dS$, où dS est l'élément de surface.

L'intégrale double devient :

$$\iint \frac{Ax + B\beta + C\gamma}{R} dS = \iint \frac{\sigma dS}{R}.$$

$Ax + B\beta + C\gamma$ est la projection du vecteur \vec{J} sur la normale à la surface dirigée vers l'extérieur. Soit θ l'angle que fait ce vecteur avec la normale; on peut poser : $\sigma = J \cos \theta$.

2° en tout point à l'intérieur de l'aimant, une densité de volume :

$$\rho = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = - \text{Div. } \vec{J}.$$

L'intégrale triple peut alors s'écrire :

$$\iiint \frac{\rho dv}{R}.$$

52. Induction. — Soit X, Y, Z , la force due à toutes les masses existant soit dans l'aimant, soit hors de l'aimant : ces masses sont définies dans l'aimant par les densités σ et ρ . Nous venons de voir que tout se passe comme s'il existait sur l'aimant une couche de densité σ , dans l'aimant une densité de volume ρ . Ces masses agissent par hypothèse en raison inverse du carré des distances.

On appelle *induction* \mathfrak{B} le vecteur dont les composantes sont :

$$a = X + 4\pi A, \quad b = Y + 4\pi B, \quad c = Z + 4\pi C.$$

Cherchons le flux de ce vecteur à travers une surface fermée quelconque; il a pour expression :

$$\iint (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) dS + 4\pi \iint (A\alpha + B\beta + C\gamma) dS;$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'extérieur de la surface fermée quelconque considérée.

$$\text{Or on a :} \quad \iint (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) dS = \sum 4\pi m,$$

$\sum 4\pi m$ représente la somme des masses qui sont dans la surface. On peut écrire la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} & 4\pi \iint (A dy dz + B dz dx + C dx dy) \\ &= 4\pi \iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= -4\pi \iiint \rho dv = -4\pi \sum m = -\sum 4\pi m. \end{aligned}$$

Donc la somme des deux intégrales est nulle.

Le flux du vecteur induction à travers une surface fermée quelconque est nul. Il est le même à travers toute surface limitée par un même contour. D'après le § 20, les composantes a, b, c , du vecteur induction satisfont à l'équation :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = \text{Div. } \mathfrak{B} = 0.$$

INTERPRÉTATION DU VECTEUR INDUCTION. — En tout point de l'air, la force est définie sans ambiguïté. A l'intérieur d'un corps aimanté il n'en est plus ainsi. Nous devons *creuser une cavité* à l'intérieur de laquelle la mesure est censée faite.

Si la cavité est un cylindre *mince et long* parallèle à l'aimantation, la densité du magnétisme libre sur les parois latérales est nulle (1^o, § 51); la densité sur les fonds ne change pas sensiblement la force en tous les points qui ne sont pas contre ces fonds. En définitive, la force conserve la même valeur X, Y, Z , que s'il n'existait aucune cavité.

Si, au contraire, la cavité est un cylindre *plat*, le magnétisme libre des fonds intervient; il faut ajouter au vecteur force X, Y, Z , précédemment défini, l'action de deux plaques portant une couche de densité \mathfrak{J} : c'est une force $4\pi\mathfrak{J}$ normale aux bases du cylindre plat (§ 36). Les composantes de la force sont dès lors a, b, c ; elle devient identique à l'induction.

53. **Énergie potentielle d'un volume polarisé d'une manière rigide dans un champ.** — Soit une molécule polarisée rigidement dans un champ. Le potentiel *dû au champ extérieur* est V là où se trouve la masse $+m$; il est V' là où se trouve la masse $-m$. L'énergie potentielle de la molécule est :

$$mV - mV' = m(V - V') = m \frac{\partial V}{\partial n} dn = dM \cdot \frac{\partial V}{\partial n},$$

si la variable n est comptée du pôle négatif au pôle positif. L'énergie potentielle est donc le produit du moment de la molécule par la projection changée de signe de la force sur la direction de cette molécule. C'est aussi bien le produit du moment de la molécule par la force changée de signe et par le cosinus de l'angle que font les deux directions. C'est donc :

$$\left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

L'énergie potentielle totale a pour expression :

$$W = \iiint \left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

Intégrant par parties, et comparant aux résultats du § 51, on a :

$$W = \iint V_{\sigma} dS + \iiint V_{\rho} dv;$$

expression qu'on aurait pu écrire immédiatement.

Solénoïdes.

54. **Solénoïde élémentaire.** — Soit d'abord un *filet*, c'est-à-dire un corps dont les deux dimensions transversales sont très petites. C'est un *solénoïde élémentaire*, si l'intensité de polarisation \mathfrak{J} est partout tangente à la surface latérale, et si le produit : $\Phi = \mathfrak{J} s$, de l'intensité par la section droite s est partout constant.

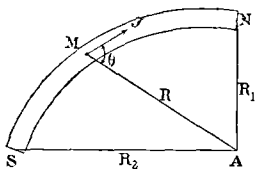


Fig. 28.

Soit dl un élément de longueur; son *moment* est par définition :

$$dM = \mathfrak{J} s dl = \Phi dl. \quad (1)$$

L'axe de ce moment est la direction même du filet au point considéré.

Calculons le potentiel en un point extérieur.

PREMIÈRE MÉTHODE. — La densité superficielle σ est nulle en tout point de la surface latérale, puisque le vecteur \mathfrak{J} est tangent à cette surface. D'après l'équation (1), le flux du vecteur \mathfrak{J} tout le long du solénoïde est conservatif : donc la densité de volume ρ est nulle.

On peut encore dire que, le moment dM étant proportionnel à dl , il faut que les masses $\pm m$ soient égales pour tous les éléments dl en lesquels on peut diviser le solénoïde. L'action sur tout point extérieur de la masse $+m$ d'un élément est exactement compensée par l'action de la masse $-m$ de l'élément consécutif, puisque ces masses sont accolées.

Bref, il ne reste absolument comme agissantes que les masses qui sont sur les *surfaces terminales* du solénoïde, *surfaces auxquelles le vecteur $\vec{\lambda}$ est normal*.

Soit s l'aire de l'une d'elles; elle contient une masse :

$$\lambda s = \Phi, \quad \text{puisque (1}^\circ, \text{§ 51) : } \lambda = \sigma.$$

Le potentiel au point A est donc :

$$V = \Phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Il ne dépend que de la position des extrémités du solénoïde.

SECONDE MÉTHODE. — Appliquons la formule générale :

$$dV = \frac{dM \cos \theta}{R^2} = \Phi \frac{dl \cos \theta}{R^2}.$$

Quand les dl sont pris positivement dans le sens du vecteur $\vec{\lambda}$, on a :

$$dR = -dl \cos \theta, \quad dV = -\Phi \frac{dR}{R^2} = \Phi d\left(\frac{1}{R}\right), \quad V = \Phi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

expression qu'on déduit immédiatement de la seconde forme du potentiel (§ 50).

55. Aimants solénoïdaux. — On appelle *aimant solénoïdal* un aimant constitué par des solénoïdes élémentaires qui partent tous de la surface de l'aimant et aboutissent tous à cette surface. Il revient au même de dire que c'est un aimant dans lequel il n'y a de magnétisme libre qu'à la surface. L'aimantation y satisfait à la condition :

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\rho = 0.$$

Parmi ces aimants l'un est fondamental : c'est le *solénoïde*; les filets magnétiques sont rectilignes. On peut dire qu'un solénoïde est un aimant cylindrique, terminé par des sections droites et dans lequel l'intensité d'aimantation, constante en direction et en grandeur, est parallèle aux génératrices du cylindre. Il n'y a de magnétisme libre que sur les bases; la densité superficielle est numériquement égale à l'intensité d'aimantation.

Feuillets.

56. Feuillet. — La matière polarisée est réduite à une surface mince. L'intensité de polarisation \mathfrak{J} est partout normale à la surface et en raison inverse de l'épaisseur e . La puissance Φ du feuillet, par hypothèse constante en tout point, est définie par l'équation :

$$\Phi = e\mathfrak{J} = e\sigma.$$

Soit dS un élément du feuillet; menons les normales au feuillet par tous les points du pourtour de l'élément. Nous découpons un doublet de moment :

$$\Phi dS.$$

Le potentiel du feuillet en un point extérieur A est (§ 28) :

$$V = \iint \frac{dM \cos \theta}{R^2} = \Phi \iint \frac{dS \cos \theta}{R^2} = \Phi \Omega;$$

Ω est l'angle solide sous lequel est vu du point A la face positive du feuillet.

V est indépendant de la forme du feuillet; il ne dépend que de sa puissance et du contour qui le limite.

57. Cas particuliers.

FEUILLET CIRCULAIRE. FORCE EXERCÉE EN UN POINT DE SON AXE. — Reprenons les notations des §§ 28 et 36. L'angle solide a pour valeur :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right).$$

Sur un point de l'axe du disque, la force F est par raison de symétrie dirigée suivant l'axe; on a :

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\Phi \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{2\pi\Phi}{R} : \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

La force F_0 tout près du feuillet est : $F_0 = 2\pi\Phi : R$. D'où :

$$F = F_0 : \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

REMARQUE. — Le résultat précédent peut être obtenu à partir des résultats du § 36. Nous avons montré que l'action d'une couche circulaire de densité σ sur un point de son axe est : $\Omega\sigma$. Or le feuillet est équivalent à deux couches de densités $\pm\sigma$ situées à la distance e . On a donc :

$$F = \Omega\sigma - \left(\Omega + \frac{\partial \Omega}{\partial r} e \right) \sigma = -e\sigma \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\Phi \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

FEUILLET FORMÉ D'UN DEMI-PLAN P LIMITÉ PAR UNE DROITE INFINIE D. — Reprenons la figure du § 40; son plan est normal à la droite D

dont le point D est la trace. La droite PD est la trace du feuillet sur le plan de la figure.

Cherchons sous quel angle on voit le demi-plan P d'un point quelconque A. Suivant la définition des angles solides, menons par le point A des droites qui s'appuient sur le pourtour du demi-plan. Elles forment un cône qui se réduit ici à deux plans normaux au plan de la figure et dont les traces sont les droites AP' et AD. Traçons maintenant du point A comme centre une sphère de rayon 1 et déterminons l'aire découpée sur cette sphère par le cône précédemment obtenu. C'est l'aire d'un fuseau d'angle $\widehat{P'AD} = \pi - \alpha$. L'aire de ce fuseau est : $2(\pi - \alpha)$.

COROLLAIRES. — 1° Les surfaces équipotentielles sont des demi-plans s'arrêtant à la droite D.

2° Les lignes de force sont des circonférences admettant comme centres les points de la droite D, et situées dans des plans normaux à cette droite.

3° La force en un point A est en raison inverse de la distance AD.

Ce sont précisément ces corollaires que nous avons rencontrés au § 10.

58. Énergie potentielle d'un feuillet dans un champ. — Appliquons la formule générale du § 53 :

$$W = \iiint \left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv = \iiint dM \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Soit l , m , n , les cosinus directeurs de la normale au feuillet dirigée dans le sens $-+$; soit Φ la puissance du feuillet. On a par définition¹ :

$$dM = \delta dv = \Phi dS; \quad Adv = l\Phi dS, \quad Bdv = m\Phi dS, \quad Cdv = n\Phi dS.$$

$$W = \Phi \iint \left(l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} \right) dS = \Phi \iint \frac{\partial V}{\partial n} dS,$$

expression qu'on pouvait écrire immédiatement à partir du § 53, puisque, par définition, les aimants élémentaires sont normaux à la surface du feuillet. On a :

$$W = \iiint dM \frac{\partial V}{\partial n} = \Phi \iint dS \frac{\partial V}{\partial n},$$

la variable n étant comptée sur la normale au feuillet.

L'énergie potentielle est donc égale au produit de la puissance par le flux de force qui pénètre dans le sens $-+$, c'est-à-dire à travers la face positive du feuillet.

¹ Les lettres m et n sont employées dans deux sens différents; mais la confusion est impossible.

En particulier, si le feuillet est soumis à l'action d'une masse $+m$ et si l'observateur placé sur cette masse voit la face positive du feuillet sous l'angle solide Ω , l'énergie potentielle du feuillet dans le champ de la masse $+m$ est : $W = m\Phi\Omega$.

Polarisation induite.

59. Hypothèses. — Nous empruntons à Lorentz son mode d'exposition : il est simple et prépare le lecteur aux théories actuellement en faveur.

1° Dans les molécules des corps matériels ou de l'éther, il existe des particules chargées.

2° Si toutes les particules chargées d'une molécule sont dans leurs positions naturelles, elles n'exercent aucune influence sur les autres molécules, même les plus voisines.

3° Soit e la charge d'une particule A ; il résulte du 2° que toutes les autres particules exercent la même action sur tout point extérieur qu'une charge $-e$ placée en A .

4° Il n'y a dans chaque molécule qu'une seule particule chargée qui puisse être déplacée de sa position d'équilibre. Soit φ, χ, ψ , les composantes de son déplacement. D'après le 3°, une fois cette particule déplacée, la molécule est identique à un *doublet* ou à un *couple* (§ 49) de moment : $\varphi e, \chi e, \psi e$.

5° Soit N le nombre de molécules par unité de volume ; pour définir l'intensité de polarisation, on a les expressions :

$$A = Ne\varphi, \quad B = Ne\chi, \quad C = Ne\psi.$$

6° Dès que le corpuscule a été déplacé, les autres parties de la molécule exercent une force qui tend à le ramener et dont les composantes sont : $-\tau\varphi, \quad -\tau\chi, \quad -\tau\psi$;

τ est un paramètre qui caractérise le milieu considéré.

Soit p, q, r , la résultante du champ dû à toutes les particules chargées qui sont hors de la molécule ; il faut pour l'équilibre que l'on ait :

$$e p = \tau\varphi, \quad e q = \tau\chi, \quad e r = \tau\psi.$$

Ces hypothèses faites, il faut évaluer le champ p, q, r , pour connaître les lois de la polarisation induite.

60. Calcul du champ p, q, r . — Décrivons dans le diélectrique une sphère qui a son centre dans la molécule considérée et dont le rayon, très petit en valeur absolue, est très grand par rapport aux distances moléculaires. Enlevons le diélectrique à l'intérieur de la sphère : calculons la force en un point quelconque du trou ainsi obtenu.

Il faut faire intervenir :

- 1^o les charges des conducteurs extérieurs au diélectrique ;
- 2^o la charge superficielle sur la surface extérieure du diélectrique lui-même (§ 51) ;
- 3^o la densité de volume en tout point du diélectrique (§ 51) ;
- 4^o enfin la densité superficielle que nous mettons en évidence du fait que nous creusons une cavité.

Nous savons calculer les actions des trois premières catégories de charges, à supposer toutefois que nous connaissions le vecteur : A , B , C , en tous les points du diélectrique, ce qui est précisément le problème. Quant à la densité sur la sphère, elle est égale à la projection du vecteur $\vec{\delta}$ sur la normale dirigée vers l'extérieur du diélectrique, c'est-à-dire vers l'intérieur de la sphère ; $\vec{\delta}$ pouvant être considéré comme constant, nous retombons sur une distribution déjà étudiée (§ 43). *Le champ à l'intérieur de la sphère est constant, parallèle à $\vec{\delta}$ et égal à :*

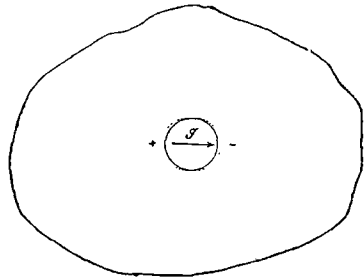


Fig. 29.

$$\frac{4\pi}{3} \vec{\delta}.$$

En définitive, appelons P , Q , R , les composantes du champ créé par les trois premières catégories ; le champ dans le trou est :

$$p_1 = P + \frac{4\pi}{3} A, \quad q_1 = Q + \frac{4\pi}{3} B, \quad r_1 = R + \frac{4\pi}{3} C.$$

Mais ce ne sont pas encore là les composantes p , q , r , cherchées.

Nous avons en effet distrait une petite sphère polarisée au centre de laquelle se trouve le point A ; il faut calculer l'action p_2 , q_2 , r_2 , de cette sphère sur le point A . Considérons-la comme pleine de petits doublets dont nous représentons par m_x , m_y , m_z , les composantes des moments. Pour simplifier l'écriture, faisons un instant passer les axes par le centre de la sphère : soit x , y , z , les coordonnées d'un des doublets, et r sa distance au centre.

Il est facile de vérifier, en utilisant les équations du § 50, que les composantes p_2 , q_2 , r_2 dues à la sphère sont :

$$p_2 = \sum \frac{1}{r^3} [(3x^2 - r^2) m_x + 3xy m_y + 3xz m_z],$$

$$q_2 = \sum \frac{1}{r^3} [3yx m_x + (3y^2 - r^2) m_y + 3yz m_z],$$

$$r_2 = \sum \frac{1}{r^3} [3zx m_x + 3zy m_y + (3z^2 - r^2) m_z],$$

la somme étant étendue à toutes les molécules comprises dans la sphère.

Par exemple, on a :

$$p_z = \sum \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) m_x + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) m_y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) m_z \right];$$

on tire de la relation : $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3xy}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3xz}{r^5}.$$

Admettons que, dans le petit volume occupé par la sphère, toutes les molécules sont identiquement polarisées; tous les m_x , les m_y , les m_z seront respectivement égaux entre eux.

Admettons enfin que dans un milieu isotrope les molécules sont régulièrement disséminées; nous devons avoir :

$$\begin{aligned} \sum xy &= \sum yz = \sum zx = 0. \\ \sum \frac{3x^2 - r^2}{r^5} &= \sum \frac{3y^2 - r^2}{r^5} = \sum \frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \sum \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

En définitive, au moins dans les corps isotropes et les corps cubiques, on a :

$$p_z = q_z = r_z = 0.$$

Les équations d'équilibre sont donc enfin :

$$\tau\varphi = e \left(P + \frac{4\pi}{3} A \right), \quad \tau\chi = e \left(Q + \frac{4\pi}{3} B \right), \quad \tau\psi = e \left(R + \frac{4\pi}{3} C \right).$$

Substituant à φ , χ , ψ , leurs valeurs en fonction de A, B, C, il vient :

$$A = kP, \quad B = kQ, \quad C = kR;$$

en posant :

$$k = \frac{Ne^2}{\tau - \frac{4\pi}{3} Ne^2}.$$

k s'appelle la *susceptibilité*.

61. Manière synthétique de présenter ces résultats. — Sans chercher à préciser le mécanisme de la polarisation, il reviendrait au même d'admettre la proposition suivante :

En tout point A d'un corps polarisé par influence, les composantes A, B, C, de la polarisation induite sont proportionnelles aux composantes P, Q, R, de l'action de toutes les masses extérieures à une sphère infiniment petite entourant le point A.

Le coefficient de proportionnalité est la susceptibilité.

Les composantes P, Q, R, sont calculées au moyen des trois potentiels suivants :

$\iiint \frac{\rho dv}{r}$, étendue à toutes les charges hors du milieu polarisé ;
 $\iint (A\alpha + B\beta + C\gamma) \frac{dS}{r}$, étendue à la surface du milieu polarisé (§ 51) ;

$-\iiint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{dv}{r}$, étendue au volume du milieu polarisé, y compris si l'on veut la sphère infiniment petite qui entoure le point A, ce qui ne change qu'infiniment peu la valeur de l'intégrale.

C'est sous cette forme synthétique que Lord Kelvin et Maxwell énoncent toujours les hypothèses sur la polarisation induite. La méthode du paragraphe précédent se rapproche au contraire beaucoup de la méthode originale de Poisson, qui est l'inventeur de la notion de milieu polarisé.

On verra plus loin pour quelles raisons nous l'avons exposée, quoique en apparence plus compliquée.

62. Équation indéfinie dans un milieu polarisé ; équation de passage. — Le potentiel V, calculé à la manière ordinaire, correspond aux masses 1^o, 2^o, 3^o du § 60 ; il correspond donc aux forces P, Q, R, et nous pouvons écrire :

$$-\Delta V = \text{Div} (P, Q, R).$$

En vertu des égalités :

$$A = kP, \quad B = kQ, \quad C = kR,$$

nous avons donc la condition :

$$-k\Delta V = k \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) = -\rho',$$

où ρ' est la densité dans le milieu polarisé. Chargeons le corps, c'est-à-dire ajoutons à cette densité ρ' une autre densité ρ ne résultant pas de la polarisation. On a d'une manière générale (§ 30) :

$$\Delta V + 4\pi\rho' + 4\pi\rho = 0, \quad \Delta V(1 + 4\pi k) + 4\pi\rho = 0.$$

Le paramètre : $K = 1 + 4\pi k$, qui s'introduit ici, s'appelle *pouvoir inducteur spécifique*. L'équation de Poisson dans un milieu polarisé devient :

$$K\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Si $\rho = 0$, on a : $\Delta V = 0$; d'où : $\rho' = 0$.

Donc à l'intérieur d'un milieu polarisé par induction et qui n'a pas été préalablement chargé, la densité de volume est nulle.

A la surface du milieu polarisé, il y a une densité σ' :

$$\sigma' = A\alpha + B\beta + C\gamma = k(P\alpha + Q\beta + R\gamma) = -k \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Soit deux milieux polarisés 1 et 2, séparés par une surface sur

laquelle nous disposons une couche σ . D'après ce qui précède, les densités qui résultent de la polarisation sont dans les deux milieux :

$$\sigma_1 = k_1 \frac{\partial V}{\partial n_1}, \quad \sigma_2 = k_2 \frac{\partial V}{\partial n_2},$$

en comptant les normales positivement vers chacun des milieux (et non plus vers l'extérieur). Appliquons la condition générale du

$$\begin{aligned} \S 37 : \quad & \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi(\sigma + \sigma_1 + \sigma_2) = 0, \\ & (1 + 4\pi k_1) \frac{\partial V}{\partial n_1} + (1 + 4\pi k_2) \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0, \\ & K_1 \frac{\partial V}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0. \end{aligned}$$

Telle est la condition générale de passage à travers la surface de séparation de deux milieux polarisés différents.

63. Réfraction des lignes de force. — Soit A_1OA_2 une ligne de force faisant les angles i_1 et i_2 avec la normale à la surface de séparation des deux milieux. Soit H_1 et H_2 les intensités des champs dans les deux milieux au voisinage du point O . Supposons nulle la densité σ .

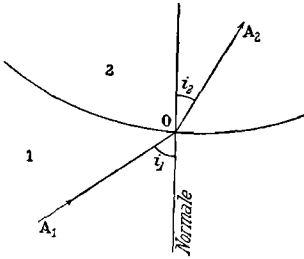


Fig. 30.

Avec nos conventions de signes, les composantes normales sont :

$$\begin{aligned} & -H_1 \cos i_1, \quad \text{dans le milieu 1;} \\ & H_2 \cos i_2, \quad \text{dans le milieu 2.} \end{aligned}$$

On a donc les conditions :

$$K_1 H_1 \cos i_1 = K_2 H_2 \cos i_2, \quad H_1 \sin i_1 = H_2 \sin i_2.$$

La seconde exprime la continuité des composantes tangentielles (§ 37). Divisons membre à membre, nous obtenons la loi de réfraction :

$$\frac{\operatorname{tg} i_1}{K_1} = \frac{\operatorname{tg} i_2}{K_2}.$$

Potentiel vecteur ¹.

64. Potentiel vecteur. — Le vecteur induction \mathfrak{B} (de composantes a, b, c) est la résultante du vecteur force F (de composantes X, Y, Z) et du vecteur $4\pi\mathfrak{J}$, intensité de polarisation multiplié par 4π (de composantes $4\pi A, 4\pi B, 4\pi C$) (§ 52).

¹ Dans une première lecture, on peut passer la fin de ce Chapitre, dont l'importance est grande, mais que l'on comprendra mieux plus tard.

Le flux du vecteur induction est conservatif :

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Par conséquent, à travers une surface limitée par une courbe fermée, le flux ne dépend que de cette courbe et non de la forme de la surface qu'elle limite. Donc on doit pouvoir déterminer le flux à travers une courbe fermée par un procédé qui ne met en jeu que la courbe et qui n'implique pas la construction d'une surface passant par la courbe.

C'est ce que nous apprend à faire le théorème de Stokes (§ 24). *Il existe un vecteur F, G, H, que nous appellerons potentiel vecteur (on verra plus loin pourquoi), tel que l'on ait :*

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned}$$

et tel que sa circulation le long d'un contour fermé soit égale au flux du vecteur a, b, c, à travers une surface quelconque limitée à ce contour.

Nous pouvons écrire :

$$(a, b, c) = \text{curl} (F, G, H).$$

Partout où l'intensité de polarisation est nulle, les vecteurs force et induction se confondent. Enfin il peut arriver que le vecteur \mathcal{J} soit proportionnel à la force. Nous avons alors :

$$a = \mu X, \quad b = \mu Y, \quad c = \mu Z.$$

Le flux du vecteur force est conservatif et le potentiel vecteur est défini, au coefficient μ près, par les mêmes équations en fonction des composantes de la force.

65. Expression générale des composantes F, G, H, en un point extérieur à un aimant dont on donne en tous les points les composantes de l'aimantation A, B, C. — Posons pour abrégé 1 : $r = p$. Nous désignons par r la distance du point O (x, y, z) de l'aimant au point O' (x', y', z') extérieur à l'aimant où nous nous proposons de calculer les composantes F, G, H.

Soit A, B, C, les composantes de l'aimantation dans l'élément de volume dv , dont le centre est en O. Le potentiel δV créé au point O' par l'élément de volume dv est (§ 51) :

$$\delta V = \left(A \frac{\partial p}{\partial x} + B \frac{\partial p}{\partial y} + C \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv.$$

Puisque par hypothèse en O' l'aimantation est nulle, l'induction se confond avec la force et l'on a, d'après l'expression générale de la force en fonction du potentiel :

$$c : dv = -\frac{\partial \cdot \delta V}{\partial z'} = \frac{\partial \cdot \delta V}{\partial z} = A \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + B \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + C \frac{\partial^2 p}{\partial z^2},$$

$$c : dv = \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial p}{\partial z} - C \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial z} \right),$$

en vertu de l'identité :

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Pour démontrer sans calcul cette dernière identité, il suffit de remarquer que p est le potentiel en O' de la masse électrique unité placée en O .

Nous pouvons écrire c sous une forme équivalente, du fait que les dérivées de p par rapport à x, y, z , et par rapport à x', y', z' , sont égales et de signes contraires :

$$c : dv = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(B \frac{\partial p}{\partial z} - C \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x'} \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

On a des expressions analogues pour a et b .

Ceci posé, il s'agit de trouver le flux du vecteur a, b, c , à travers un parcours dont les points ont pour coordonnées générales x', y', z' .

D'après le théorème de Stokes, on peut remplacer ce flux par la circulation du vecteur F, G, H , défini par la relation :

$$c = \frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial y'},$$

et deux relations analogues. Comparant cette expression à celle que nous venons de trouver, nous voyons que les composantes F, G, H , sont données par les intégrales suivantes étendues aux volumes occupés par l'aimant :

$$F = \iiint \left(B \frac{\partial p}{\partial z} - C \frac{\partial p}{\partial y} \right) dv,$$

$$G = \iiint \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial p}{\partial z} \right) dv,$$

$$H = \iiint \left(A \frac{\partial p}{\partial y} - B \frac{\partial p}{\partial x} \right) dv.$$

Il revient au même de calculer le flux du vecteur a, b, c , à travers un contour ou la circulation du vecteur F, G, H , le long de ce contour.

66. Cas particulier d'un feuillet. — Soit l, m, n , les cosinus directeurs de la normale dirigée dans le sens ordinaire $-+$. Soit Φ la puissance du feuillet; on a par définition :

$\delta dv = \Phi dS$; $A dv = l\Phi dS$, $B dv = m\Phi dS$, $C dv = n\Phi dS$.
La composante F prend la forme :

$$F = \Phi \iint \left(m \frac{\partial p}{\partial z} - n \frac{\partial p}{\partial y} \right) dS.$$

F est donc, au facteur Φ près, le flux à travers le contour du feuillet, d'un vecteur dont les composantes sont :

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \zeta = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

D'après le théorème de Stokes, F est donc, au facteur Φ près, la circulation du vecteur dont les composantes sont : 0, 0, p. On tire une conclusion analogue pour G et H. En définitive, on a :

$$F = \Phi \int \frac{dx}{r}, \quad G = \Phi \int \frac{dy}{r}, \quad H = \Phi \int \frac{dz}{r};$$

les intégrales doivent être étendues à tout le pourtour du feuillet ou du fil traversé par le courant, puisque nous verrons que les actions d'un courant sont identiques à celles d'un feuillet de même contour et de puissance convenable.

GÉNÉRALISATION. — Supposons que le courant, au lieu de passer dans un fil, soit défini en tout point de l'espace par ses composantes u, v, w .

Soit un courant d'intensité totale Φ , passant dans un conducteur dont l'aire de la section droite est dS . Soit ds la longueur de l'élément dont la projection est dx .

$\Phi \frac{dx}{ds}$ est la quantité qui passe parallèlement à l'axe des x ; il faut donc poser :

$$\Phi \frac{dx}{ds} = u dS, \quad \Phi dx = u ds dS = u d\omega,$$

en appelant $d\omega$ l'élément de volume.

Si donc le courant se trouve réparti dans tout l'espace, il vient :

$$F = \iiint \frac{u d\omega}{r}, \quad G = \iiint \frac{v d\omega}{r}, \quad H = \iiint \frac{w d\omega}{r}.$$

F, G, H sont donc les potentiels de trois matières fictives agissant en raison inverse de la distance et dont les densités sont u, v, w : d'où le nom donné à ce vecteur.

67. Flux d'induction à travers un feuillet. Énergie potentielle d'un feuillet. — Soit un feuillet Φ' . Nous désignons par x', y, z' , les coordonnées des points de la courbe qui le limite et par ds' un élément de cette courbe. Par définition, le flux à travers ce feuillet est égal à la circulation du potentiel vecteur :

$$\mathcal{F} = \int \left(F \frac{dx'}{ds'} + G \frac{dy'}{ds'} + H \frac{dz'}{ds'} \right) ds',$$

l'intégrale étant étendue au pourtour entier.

Le feuillet tend à se déplacer (§ 58) de manière que \mathcal{F} augmente. La force suivant une variable a est, comme nous le verrons :

$$\Phi' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

D'après la définition même de l'énergie potentielle W , cette force a aussi pour expression : $-\frac{\partial W}{\partial a}$.

D'où l'expression de W :

$$W = -\Phi' \int \left(F \frac{dx'}{ds'} + G \frac{dy'}{ds'} + H \frac{dz'}{ds'} \right) ds'.$$

68. Énergie potentielle d'un feuillet dans le champ d'un autre feuillet; formule de Neumann. — Il suffit de substituer les valeurs de F , G , H , calculées au § 66 :

$$W = -\Phi\Phi' \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right) ds ds'.$$

Or la parenthèse est le cosinus de l'angle ε des éléments ds et ds' considérés. D'où la célèbre formule de Neumann symétrique par rapport aux deux contours :

$$W = -\Phi\Phi' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'.$$

On peut donner à l'énergie potentielle W une autre forme également classique.

Soit OC , $O'C'$ (fig. 31) les deux contours. Joignons le point E repéré par la distance s à une origine O (distance comptée sur le contour) au point E' repéré par la distance s' à une origine O' . Soit θ et θ' les angles de EE' avec les éléments ds et ds' ; soit ε l'angle des deux éléments.

On a évidemment en grandeur et en signe :

$$\cos \theta = -\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos \theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Projetons l'élément ds' sur la tangente EF ; on a :

$$\overline{EM} = r \cos \theta, \quad \overline{EN} = (r + dr) \cos(\theta + d\theta);$$

$$MN = ds' \cos \varepsilon = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial s'} ds', \quad \cos \varepsilon = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial s'};$$

$$\cos \varepsilon = -\frac{\partial}{\partial s'} \left(r \frac{\partial r}{\partial s} \right) = -\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} = \cos \theta \cos \theta' - r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}.$$

On peut poser identiquement :

$$\iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' = \iint \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} ds ds' - \iint \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} ds ds',$$

ces intégrales étant étendues aux deux contours. Il est facile de

voir que la seconde intégrale du second membre est nulle, à la seule condition que l'un des contours d'intégration soit fermé. Considérons, en effet, un élément ds et le contour fermé dont ds' fait partie; intégrons d'un point A jusqu'au même point A :

$$ds \int \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} ds' = ds \left[\frac{\partial r}{\partial s} \right]_A^A = 0.$$

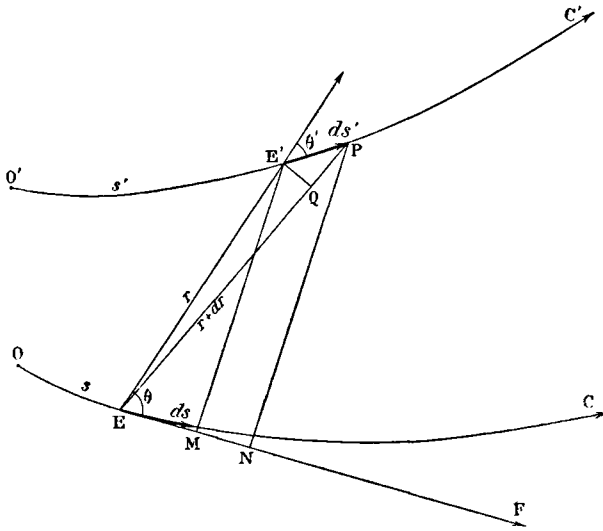


Fig. 31.

On a donc pour nouvelle expression de l'énergie potentielle :

$$W = -\Phi\Phi' \iint \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} ds ds'.$$

On trouve encore W sous la forme évidemment équivalente :

$$W = \Phi\Phi' \iint \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} ds ds' = 4\Phi\Phi' \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s'} ds ds'.$$

ATTRACTION DES CORPS MATÉRIELS

Constante de la gravitation.

69. **Lemmes préliminaires.** — Démontrons d'abord quelques lemmes indépendamment de toute hypothèse physique.

LEMME I. — En prenant pour axe de référence le grand axe d'une ellipse, pour origine le foyer, l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires est :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}; \quad (1)$$

a et b sont les demi-axes principaux; $e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$ est l'*excentricité*. On trouve aisément :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = -\frac{r^4}{a^2(1 - e^2)} + \frac{2r^3}{a(1 - e^2)} - r^2. \quad (2)$$

LEMME II. — Soit un point de masse m attiré par un centre fixe de masse M en raison inverse du carré des distances et proportionnellement au produit des masses. La force d'attraction F à la distance r est :

$$F = G \frac{mM}{r^2};$$

G s'appelle la *constante de la gravitation*.

Les forces extérieures passant par un point fixe, nous pouvons appliquer le théorème des aires (I, § 11). Soit r et θ les coordonnées polaires par rapport au centre d'attraction; on a :

$$r^2 d\theta = C dt, \quad (3)$$

où C est une constante.

Le travail de la force F est égal à la variation de la quantité GMm ; r , c'est-à-dire à la variation du potentiel GM ; r multipliée par la masse m sur laquelle la force F est appliquée. Soit v la vitesse de m ; le principe des forces vives donne :

$$d \cdot \frac{mv^2}{2} = d \cdot \frac{GMm}{r}, \quad v^2 = C' + \frac{2GM}{r}. \quad (4)$$

LEMME III. — En coordonnées polaires on a :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Le lemme II permet donc de poser :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = C' + \frac{2GM}{r};$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C' + \frac{2GM}{r} - \frac{C^2}{r^2}, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}.$$

Divisons membre à membre les deux dernières équations :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{C'}{C^2} r^4 + \frac{2GM}{C^2} r^3 - r^2. \quad (5)$$

CONCLUSION. — Il résulte de la comparaison des équations (2) et (5) qu'un point *m* attiré par un centre M en raison inverse du carré de la distance, décrit une ellipse admettant ce point comme foyer.

Ce théorème est démontré dans toutes les Mécaniques rationnelles ; il n'était pas inutile de le rappeler ici en raison de ses conséquences.

70. Lois de Képler et hypothèse de Newton. — Voici l'énoncé des lois découvertes par Képler plus d'un siècle avant que Newton n'en donnât l'interprétation, à savoir : *que l'attraction des astres se fait proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances.*

1^o *Les trajectoires de toutes les planètes sont des ellipses dont un des foyers est au Soleil; le rayon vecteur parti du Soleil et aboutissant à la planète balaye des aires qui varient proportionnellement au temps.*

Ce résultat est conforme à la loi de Newton, si l'on admet que l'action du Soleil sur une planète l'emporte énormément sur l'action des autres astres de notre système sur cette même planète; ce qui implique que la masse du Soleil est énorme vis-à-vis de la masse des planètes. Bien entendu, les étoiles sont trop éloignées pour avoir une influence sensible.

2^o *Les carrés des temps T employés pour une révolution par les différentes planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes des ellipses.*

Écrivons que pendant le temps T l'ellipse entière est balayée par le rayon vecteur. On a d'après la définition de la constante C :

$$2\pi ab = 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = CT.$$

L'identification des équations (2) et (5) donne :

$$\frac{GM}{C^2} = \frac{1}{a(1 - e^2)}, \quad GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

La masse M du Soleil est naturellement la même pour les différentes planètes; G est une constante absolue : donc $a^3 : T^2$ a pour toutes les planètes la même valeur.

71. Comparaison des masses du Soleil et des planètes. —

Il est facile de comparer à la masse M du Soleil, la masse m d'une planète qui a un satellite; il suffit de connaître : 1° les grands axes a et a' des orbites de la planète autour du Soleil et du satellite autour de la planète; 2° les durées T et T' des révolutions sur ces orbites.

Tout ce que nous avons dit de la planète par rapport au Soleil pouvant se répéter du satellite par rapport à la planète, on a :

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \quad Gm = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}; \quad \frac{m}{M} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Comparons les masses du Soleil et de la Terre, qui possède la Lune pour satellite. Les longueurs a et a' mesurées en rayons terrestres sont 24 000 et 60,3; les périodes T' et T sont 27^j,32 et 365^j,24. On tire de là :

$$M = 333'000 m.$$

Il existe naturellement sur M une incertitude énorme, puisque a est en définitive fort mal connu.

La plupart des planètes ayant des satellites, on peut appliquer cette méthode; pour les autres planètes on utilise les perturbations; nous ne pouvons insister. On trouve en fonction de la masse terrestre prise comme unité :

Mercure	Vénus	Mars	Uranus	Neptune	Saturne	Jupiter
0,06	0,80	10	14	17	93	310

72. Constante de la gravitation. — Les masses des astres de notre système sont donc connues *en fonction de la masse de la Terre*. Reste à mesurer celle-ci ou, *ce qui revient au même*, à déterminer la constante G de la loi de la gravitation.

Assimilons la Terre à une sphère composée de couches concentriques homogènes. Nous savons (§ 32) qu'elle attire un point extérieur comme si toute sa masse M était concentrée en son centre. Soit Δ , M , R , la densité *moyenne*, la masse totale et le rayon terrestres, g l'intensité de la pesanteur à la surface; on a :

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \Delta, \quad g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi}{3} \cdot G\Delta R;$$

g et R sont connus; la mesure de G fera donc connaître la densité moyenne Δ et par conséquent la masse totale M .

D'après la définition du mètre, très approximativement réalisée, nous avons :

$$2\pi R = 40'000 \text{ kilomètres} = 4 \cdot 10^9 \text{ centimètres};$$

$$g = \frac{8}{3} G\Delta \cdot 10^9,$$

et, d'après la valeur de g : $G\Delta = 36,79 \cdot 10^{-8}$.

Newton avait deviné que la densité *moyenne* terrestre était comprise entre 5 et 6. Anticipons sur le résultat des expériences décrites plus loin; on a trouvé :

$$\Delta = 5,53, \quad G = 6,65 \cdot 10^{-8}.$$

Cela veut dire que deux sphères au contact, d'un centimètre de diamètre, dont les centres sont par conséquent à 1 centimètre de distance, ayant chacune la masse d'un gramme, s'attirent avec une force de $6,65 \cdot 10^{-8}$ dynes. Si elles sont en métal de densité 20 (l'or a une densité voisine), l'attraction sera : $1,33 \cdot 10^{-6}$ dynes, soit de l'ordre du millionième de dyne. Ce calcul montre la petitesse des quantités à mesurer. La grande difficulté est cependant, moins d'observer des forces aussi petites, que d'éviter les actions perturbatrices de toute nature.

73. Expériences de laboratoire. — Imaginons un fléau très léger FF poli et formant miroir. Il est suspendu à un fil de quartz extrêmement fin AB. Le quartz joint à une ténacité très grande l'immense avantage de posséder une réactivité négligeable (I, § 119). Deux petites balles d'or b_1 et b_2 sont suspendues au fléau par deux fils de quartz $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$ inégalement longs.

Si on exerce sur les balles b_1, b_2 deux forces dirigées en sens inverses et normalement au plan du tableau, l'équipage tournera d'un angle α à partir de la position d'équilibre, de manière que l'attraction soit équilibrée par la torsion du fil AB. Si on renverse le sens des forces, le fléau tournera d'un angle 2α .

Ceci posé, l'expérience consiste à placer en avant de b_1 et en arrière de b_2 , ou inversement, deux sphères de plomb B_1 et B_2 d'une dizaine de kilogrammes. Les centres de b_1 et B_1 d'une part, de b_2 et B_2 de l'autre, sont dans le même plan horizontal. Les sphères attirent les balles et changent la position d'équilibre de l'équipage d'un angle α dans un sens ou dans l'autre. Quand on les fait passer simultanément, l'une de l'avant à l'arrière de b_1 , l'autre de l'arrière à l'avant de b_2 , la position d'équilibre du fléau, déterminée par réflexion sur le fléau lui-même avec la méthode de Poggendorff, change de l'angle 2α .

Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur la technique, on conçoit que la détermination en valeur absolue (I, § 20) de la constante de torsion du fil AB, de la longueur du fléau $a_1 a_2$, de la distance moyenne des centres des grosses et des petites sphères, de l'angle 2α , permet de calculer l'attraction en valeur absolue, et par conséquent la constante de la gravitation.

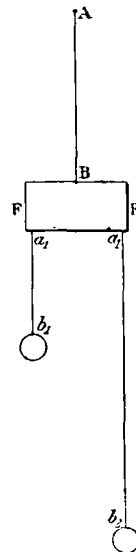


Fig. 32.

Les sphères b_1 et b_2 et le fléau sont à des niveaux différents, de manière que les attractions de la grosse sphère B_1 sur le fléau et sur la balle b_2 soient négligeables, ainsi que les attractions de la grosse sphère B_2 sur le fléau et sur la balle b_1 .

Chaleur solaire ¹.

74. Position de la question.

Il est naturel de se demander d'où provient l'extraordinaire quantité d'énergie que le Soleil déverse continuellement dans l'espace. Voici la théorie la plus vraisemblable.

A une époque reculée existaient, très éloignés les uns des autres, des fragments de matière à basse température. En vertu de leurs attractions mutuelles, ils se sont rapprochés et ont formé la masse actuelle. Pendant la contraction ils ont perdu de l'énergie potentielle, qui s'est transformée d'abord en énergie cinétique, puis en chaleur, quand les masses sont venues au contact.

Durant une première période, il y a donc eu échauffement, liquéfaction, vaporisation de la matière, l'émission calorifique dans l'espace ne faisant que modérer le phénomène sans changer son sens. La température *moyenne* du Soleil s'est donc rapidement élevée, a passé par un maximum, enfin s'est mise à décroître : le Soleil est entré dans la période actuelle. Nous devons le considérer comme une masse fluide à haute température, gaz ou liquide, au choix, peu importe, car la température est supérieure aux points critiques des matières qui la composent.

Cet état du Soleil varie d'une manière continue par refroidissement. D'une part, il émet dans l'espace de la chaleur, *corrélativement* il se contracte. La *théorie météorique* consiste précisément à dire que l'énergie fournie par la contraction, en vertu même de la loi de la gravitation, *compense très approximativement l'énergie perdue par émission*. Au taux actuel de variation, nous ne pouvons nous apercevoir ni de la diminution de volume, ni de l'abaissement de la température *apparente*.

Nous allons étudier d'un peu plus près cette hypothèse; voici le plan que nous suivrons : après avoir rappelé les valeurs numériques des constantes solaires (§ 75), nous chercherons (§ 76) à quelle condition un fluide dont la densité ρ est une fonction de la pression p et de la température T , peut être en équilibre sous l'action de la gravité seule.

Nous particulariserons ensuite le problème en explicitant la ma-

¹ Les questions traitées dans cette fin de ce Chapitre ne sont pas dans les programmes officiels. Il paraît cependant impossible de les passer sous silence.

nière dont la densité dépend de la température et de la pression ; nous chercherons (§ 77) ce qui se passe d'une manière générale pour un gaz parfait, et ce que devient la solution dans le cas de l'*équilibre convectif*, c'est-à-dire d'une loi de distribution des températures telle que le mélange ne modifie pas la température en chaque point (§ 78).

Le problème général étant ainsi bien posé, nous montrerons dans un cas schématique que la théorie météorique conduit à des résultats admissibles (§ 79).

75. Constantes solaires. — Voici le tableau général des constantes solaires.

Nous admettrons $8'',80$ pour *parallaxe équatoriale*, angle sous lequel on voit du centre du Soleil le demi-diamètre équatorial de la Terre à la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Le demi-diamètre terrestre vaut 6377 kilomètres.

A un mètre l'arc d'une seconde vaut $4^m,848$; à mille kilomètres il vaut $4^m,848$. La parallaxe à mille kilomètres vaut : $42^m,66$. Soit D la distance en kilomètres ; on a :

$$D \cdot 42,66 = 6377 \cdot 10^6, \quad D = 149'500'000 \text{ kilomètres,}$$

environ 24000 rayons terrestres.

De la connaissance du diamètre apparent moyen du Soleil ($32' 3'',64$), on déduit :

le diamètre solaire en kilomètres :	1'391'000 ;
» en diamètres terrestres :	109.

La loi de la gravitation donne pour le rapport de la masse du Soleil à la masse de la Terre (§ 74) : 333'000.

Connaissant le rapport des masses et le rapport des rayons, on trouve aisément le rapport des densités moyennes. La densité moyenne du Soleil est 3,89 fois plus petite que celle de la Terre. Celle-ci valant 5,53, la première vaut 1,42.

La pesanteur à la surface d'un astre est proportionnelle au produit de son rayon par sa densité moyenne. On tire de là que la pesanteur à la surface du Soleil est 27,9 fois plus grande qu'à la surface de la Terre.

ÉNERGIE RAYONNÉE. — La Terre reçoit par minute sur chaque centimètre carré 2,54 petites calories, soit par mètre carré et par seconde $25400 : 60 = 423$ petites calories. Cette chaleur vaut 180 kilogrammètres par seconde, soit une puissance de 2,4 chevaux-vapeur par mètre carré.

Or la distance du Soleil à la Terre est de 215 rayons solaires. Chaque mètre carré de la surface solaire développe donc une puissance : $215^2 \times 2,4 = 111'000$ chevaux-vapeur.

76. Équilibre d'un gaz sous l'influence de la gravité seule.
— Dans la cinquième partie de ce Cours, nous serons amenés à considérer le Soleil comme une masse fluide. C'est à volonté un gaz ou un liquide; la température y est très élevée (au moins dans les parties centrales) et très supérieure aux températures critiques de tous les corps.

Le problème se pose donc naturellement de chercher à quelle condition une masse gazeuse est en équilibre sous l'action de la gravité seule. C'est la généralisation du problème barométrique traité au tome I, § 33.

Cette masse prend par raison de symétrie une forme sphérique. Nous admettons que la température T , la pression p , ... sont fonction de la distance r au centre.

Soit m la masse comprise dans la sphère de rayon r :

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, dr.$$

La force F par unité de volume en un point situé à la distance r du centre est la même, d'après le théorème de Newton (§ 32), que si la masse m , comprise dans la sphère de rayon r , était tout entière condensée au centre de la sphère; elle tire radialement la masse ρ contenue dans l'unité de volume avec une force :

$$F = \frac{G \rho m}{r^2} = \frac{G \rho}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho r^2 \, dr,$$

où G est la constante de la gravitation. Nous avons d'autre part la relation :

$$-\frac{dp}{dr} = F.$$

Démontrons rapidement cette formule par un raisonnement analogue à celui du § 28 du tome I.

Considérons un tronc de cône dont les bases circulaires sont placées sur deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$.

Soit ε le demi-angle au sommet. Comptons positivement les forces dirigées vers le centre. Voici leurs résultantes suivant le rayon :

$$-\pi \varepsilon^2 \cdot p r^2,$$

sur la base extérieure :

$$\pi \varepsilon^2 \cdot (p + dp)(r + dr)^2 = \pi \varepsilon^2 \cdot (p + dp)(r^2 + 2r \, dr),$$

sur la surface latérale :

$$-2\pi r \varepsilon \, dr \cdot p \varepsilon = -\pi \varepsilon^2 \cdot 2p r \, dr,$$

enfin sur le volume : $\pi \varepsilon^2 \cdot r^2 \, dr \cdot F$.

Écrivons que la résultante est nulle; il reste précisément :

$$-\frac{dp}{dr} = F,$$

formule très analogue à celle du § 28, tome I, mais qui demandait cependant une démonstration spéciale.

D'où la condition :

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{G\varrho m}{r^2}, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\varrho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \varrho. \quad (1)$$

En particulier, si on suppose la température constante, la densité est une fonction de la pression seule. L'équation (1) est satisfaite en admettant que la densité et la pression sont proportionnelles entre elles et sont en raison inverse de r^2 .

77. Expression des énergies interne et de gravitation dans le cas d'un gaz parfait (Perry).

1° ÉNERGIE INTERNE. — Soit c la chaleur spécifique à volume constant. Le gaz étant parfait, son énergie interne par unité de masse est cT (II, § 23). Son équation caractéristique est :

$$p = \sigma \varrho T,$$

où σ est une constante convenable, en rapport avec les unités de pression et de densité choisies. L'énergie interne totale est :

$$U = c \int_0^R 4\pi r^2 \varrho T dr = \frac{4\pi c}{\sigma} \int_0^R p r^2 dr,$$

où R représente le rayon à partir duquel l'énergie de la matière est négligeable.

2° TRAVAIL DE LA GRAVITATION. — Calculons le travail nécessaire pour amener toutes les masses de l'infini à leur situation présente. Nous savons qu'il est indépendant des chemins parcourus.

Supposons donc en place tout ce qui se trouve dans la sphère de rayon r , c'est-à-dire la masse m . Amenons de l'infini, de $z = \infty$ jusqu'à $z = r$, la couche d'épaisseur dz et de masse $\mu = 4\pi r^2 \varrho dz$. La force est $Gm : z^2$; elle accomplit un travail :

$$-\int_{\infty}^r \frac{Gm}{z^2} \mu dz = \frac{Gm\mu}{r} = Gm 4\pi \varrho r dz.$$

Le travail total W accompli par la gravitation est :

$$W = 4\pi G \int_0^R m \varrho r dr.$$

En vertu de l'équation (1) du § 76, on peut poser :

$$G\varrho m = -r^2 \frac{dp}{dr}, \quad W = -4\pi \int_0^R r^3 \frac{dp}{dr} dr = -4\pi \int_{p_0}^0 r^3 dp,$$

où p_0 est la pression au centre de l'astre.

3° CONSERVATION DE L'ÉNERGIE. — Nous devons écrire que le travail W , augmenté de l'énergie primitive P existant quand les masses étaient à l'infini, est égal à l'énergie interne actuelle U , plus l'énergie totale qui a été rayonnée E : $W + P = U + E$.

Nous pouvons négliger P qui est certainement petit. Il reste la condition :

$$W = U + E.$$

4° RELATION ENTRE W ET U . — On a :

$$\int_0^R p r^2 dr = \left[\frac{1}{3} p r^3 \right]_0^R - \int_{p_0}^0 \frac{r^3}{3} dp.$$

La parenthèse est nulle, puisque $r = 0$ pour une des limites et $p = 0$ pour l'autre. Il vient :

$$\frac{U}{W} = \frac{c}{3\sigma}.$$

Or, si tout est évalué en unités mécaniques, on a (II, § 23) :

$$\sigma = C - c, \quad \frac{U}{W} = \frac{c}{3(C - c)} = \frac{1}{3(\gamma - 1)}.$$

En particulier, $U = W$, $E = 0$, quand $3(\gamma - 1) = 1$, $\gamma = 1,33$. Résultat évidemment absurde, puisque le rayonnement total E depuis le temps $-\infty$ jusqu'au temps actuel serait nul.

Il faut conclure de là qu'un gaz parfait ne peut admettre qu'un rapport γ supérieur à 1,33, résultat bien conforme à l'expérience.

Si $\gamma = 1,4$, $U = 0,84 W$, $E = 0,16 W$;
l'énergie rayonnée est les 0,16 de l'énergie qui résulte de la gravitation.

78. **Équilibre convectif d'un gaz parfait (Lane).** — Nous n'avons rien supposé jusqu'à présent sur la loi de distribution des températures en fonction de la distance r . Nous devons en chercher une telle que l'équilibre ne soit pas altéré par la circulation, sans perte ni gain de chaleur, d'une partie de la matière dans un tube fermé sur lui-même. La masse gazeuse est dite alors en *équilibre convectif*. La température est stationnaire, malgré les mouvements qui brassent la masse gazeuse.

Nous écrirons donc que les températures sont en tous points celles qui résulteraient d'une détente adiabatique. Ce n'est évidemment qu'une première approximation, puisque nous imaginons les transformations réversibles et l'équilibre atteint à chaque instant.

Soit p_0 , ρ_0 , T_0 , les quantités qui caractérisent le centre de l'astre ; nous avons :

$$p = \sigma \rho T, \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma - 1}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma};$$

posons : $\alpha = 1 : (\gamma - 1)$, $T : T_0 = \theta$. Il vient :

$$p = p_0 \theta^{\alpha \gamma}, \quad \rho = \rho_0 \theta^{\alpha}.$$

On vérifiera immédiatement que l'équation (1) (§ 76) devient :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} = - \frac{4\pi G \rho_0^2}{\alpha \gamma p_0} \theta^x = - \frac{4\pi G}{\alpha \gamma \sigma} \frac{\rho_0}{T} \theta^x.$$

Posons : $A = \sqrt{\frac{\alpha \gamma \sigma}{4\pi G}}$, $r = A \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} z$:

l'équation prend la forme très remarquable :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\theta}{dz} + \theta^x = 0,$$

avec les conditions : $\theta = 1$ pour $z = 0$, $\theta = 0$ pour $z = \infty$. Telle est la loi de variation des températures dans l'astre formé d'un gaz parfait en équilibre convectif.

On a calculé les valeurs correspondantes de z , θ , $\rho : \rho_0$ et μ , cette dernière quantité étant définie par l'intégrale :

$$\mu = \int_0^z \frac{\rho}{\rho_0} z^2 dz.$$

Voici les résultats multipliés par 1000 dans l'hypothèse où l'on a :

$$\gamma = 1,4, \quad \alpha = 5 : 2.$$

$z =$	$\theta = 1000$	$\rho : \rho_0 = 1000$	$\mu =$
0	1000	1000	0
795	904	777	136
883	884	734	184
993	857	679	252
1140	819	607	355
1330	763	508	512
1590	681	385	758
1990	562	237	1133
2650	384	92	1666
3970	141	7	2117
5300	0	0	2177

Appelons z' la valeur de z pour laquelle θ et ρ sont pratiquement nuls; z' correspond au rayon R de l'astre. La valeur μ' correspond d'une part à z' , de l'autre à la masse totale de l'astre. D'après le tableau :

$$z' = 5,30, \quad \mu' = 2,177.$$

Il est facile de voir que l'on a :

$$R = A \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} z' = 5,3 \cdot A \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}},$$

$$M = 4\pi A^3 T_0 \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \mu' = 2,177 \cdot 4\pi A^3 T_0 \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}.$$

Or R et M sont donnés, si nous connaissons l'astre; A est donné, si nous connaissons le gaz dont il est formé. Nous pouvons calculer dès lors T_0 et ρ_0 . Par exemple, on trouve que pour un Soleil uniquement formé d'hydrogène, la température au centre sera t :

$T_0 = 3,25 \cdot 10^7$ centigrades; la densité ρ_0 serait 22,5 fois la densité moyenne, soit : $22,5 \times 1,42 = 32$ environ.

Évidemment ces nombres n'ont qu'une valeur d'indication, car il est bien difficile d'admettre que le gaz reste parfait jusqu'aux pressions formidables qu'il supporterait au centre de l'astre. La formule précédente donne une température centrale de 32 millions de degrés avec une densité égale à une fois et demie celle du platine.

Ces résultats n'ont guère de sens.

Il en résulte cependant que l'hypothèse classique sur la constitution solaire (noyau solide enveloppé d'une nappe de flammes violemment agitées) n'a rien de nécessaire; les grandes densités au centre de l'astre résultent tout naturellement, dans une masse fluide et compressible, de la pression due aux attractions mutuelles régies par la loi de la gravitation. Il en résulte aussi qu'il n'y a pas à déterminer *une température* pour le Soleil, la température, énorme au centre, devant diminuer à mesure qu'on s'éloigne du centre.

Tout se passe comme si le Soleil était limité par une surface de discontinuité de rayon R , à une température voisine de 6000° . Mais il est plus que probable que cette surface n'existe pas (voir tome V); nous ne sommes pas davantage fixés sur le sens de cette température *apparente* de 6000° .

Évidemment la constitution du Soleil est un beau sujet de méditations!

79. Origine de la chaleur solaire. — Laissons cet aspect de la question et cherchons d'où peut provenir l'extraordinaire quantité d'énergie que rayonne le Soleil.

Il serait trop long de traiter le problème pour un gaz parfait et pour l'équilibre convectif, en associant ce que renferment les §§ 77 et 78.

Montrons seulement *dans l'hypothèse d'une densité uniforme et uniformément variable du fait de la contraction* que l'énergie peut être fournie par la gravité seule.

Dans ce cas, ρ est indépendant de r pour un rayon R donné; mais il dépend évidemment de R ; la formule du § 77 s'intègre immédiatement et donne :

$$W = \frac{16}{15} \pi^2 G \rho^2 R^3 = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R},$$

où M est la masse totale que nous supposons constante.

$$\Delta W = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} \Delta R = -\frac{16}{15} G \pi^2 R^2 \rho^2 \Delta R.$$

Soit ΔE l'énergie rayonnée pendant une seconde et *par mètre carré*; divisons ΔW par $4\pi R^2$, il reste comme condition :

$$\Delta E = -\frac{4}{15} G \pi R^2 \rho^2 \Delta R.$$

Calculons en CGS : $G = 6,65 \cdot 10^{-8}$.

$$\frac{4}{15} G R^2 \rho^2 = 545 \cdot 10^{12} \text{ dynes par centimètre carré.}$$

Pour avoir en tonnes, il faut diviser par 10^9 environ. Enfin en tonnes par mètre carré, on trouve : $545 \cdot 10^7$.

Or, par mètre carré, le Soleil développe 111 000 chevaux-vapeur ; soit en une heure :

$$111\,000 \times 270 = 300 \cdot 10^5 \text{ tonnes mètres.}$$

On a donc :

$$\pi \cdot 545 \cdot 10^7 \cdot \Delta R = 300 \cdot 10^5, \quad \Delta R = \frac{1}{572} \text{ mètre.}$$

C'est une diminution de rayon de 1 mètre en 572 heures, 16 mètres par an.

Il est clair qu'une pareille diminution est absolument imperceptible à nos procédés de mesure, et qu'à ce taux la réserve d'énergie du Soleil ne disparaîtra qu'au bout d'un grand nombre de millions d'années. Nous voici rassurés.

On a proposé d'autres théories pour expliquer la conservation de la chaleur solaire. En particulier, on a cru nécessaire d'invoquer les phénomènes chimiques. Ils seraient tout à fait insuffisants. Voici un exemple pour fixer les idées.

En brûlant, un kilogramme de houille développe 8000 calories (Cours de Seconde, § 136), soit l'équivalent de $8000 \times 425 = 3,4 \cdot 10^6$ kilogrammètres. Calculons l'énergie disponible quand un kilogramme masse est attiré de l'infini jusqu'à la surface solaire, où nous savons que sa pesanteur est 28 kilogrammes poids environ. Le travail est :

$$-\int_x^R \frac{K}{r^2} dr = \frac{K}{R}, \quad \text{avec la condition : } \frac{K}{R^2} = 28;$$

$$\text{soit : } 28 R = 28 \cdot 695 \cdot 10^6 = 19\,460 \cdot 10^6.$$

Il est 6000 fois plus grand environ que le travail résultant de la combustion d'un kilogramme de houille.

Le résultat est du même ordre à quelque réaction qu'on s'adresse.

La *théorie météorique* est la seule admissible ; elle ne dit pas que ce sont des météores distincts du Soleil qui tombent journellement à sa surface et la réchauffent. De pareilles chutes (analogues à nos étoiles filantes) sont possibles, mais ne suffiraient pas. Il faut concevoir le Soleil comme une masse fluide qui se contracte. Ce n'est qu'à une époque très reculée que le Soleil s'est formé par la jonction de corps plus petits, tombant les uns sur les autres. Les morceaux froids se sont fondus, volatilisés depuis longtemps. Le Soleil est probablement très vieux.

Marées.

80. **Potentiel des forces d'où résultent les marées.** — Il ne s'agit pas de donner une théorie complète des marées, mais simplement d'indiquer dans quel sens les astronomes la développent. Nous supposons donc que l'astre de masse m qui les produit (la Lune et le Soleil, mais principalement la Lune) se meut dans le plan de l'équateur, à une distance constante D du centre de la Terre, dont R désignera le rayon.

Calculons le potentiel de l'action de la Lune sur un point de la surface terrestre, *le centre de la Terre étant supposé immobile.*

Soit A un point de la surface terrestre, θ l'angle que fait le rayon qui y aboutit avec la ligne TL joignant le centre de la Terre avec le centre de la Lune. Nous considérons le centre de la Terre comme immobile; nous appliquerons donc à tous les points une accélération égale et opposée à celle que la Lune produit sur la Terre. Cela revient à ajouter le potentiel :

$$V_1 = -G \frac{mR}{D^2} \cos \theta.$$

Vérifions que l'effet de ce potentiel est bien une force constante en grandeur et dirigée suivant LT .

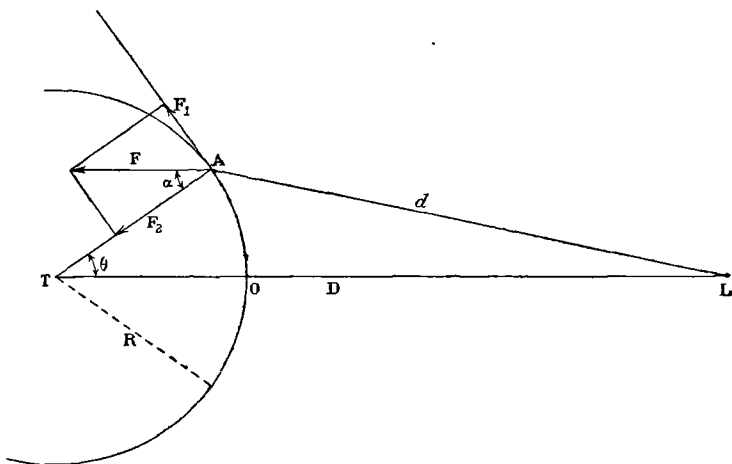


Fig. 33.

Dans l'expression du potentiel V_1 , nous devons considérer θ et R comme des variables; R désigne alors, non plus le rayon terrestre, mais la distance au centre de la Terre. Reportons-nous à la figure 33, dont le plan passe par les centres des astres et le point A considéré.

La composante F_1 de la force suivant la tangente au cercle de centre T passant par le point A, est :

$$F_1 = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = -\frac{Gm}{D^2} \sin \theta;$$

c'est, en effet, le quotient de la variation du potentiel changé de signe, par le chemin parcouru, qui est ici $Rd\theta$.

La composante F_2 de la force suivant le rayon est :

$$F_2 = -\frac{\partial V_1}{\partial R} = \frac{Gm}{D^2} \cos \theta.$$

On a évidemment :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_1}{F_2} = -\operatorname{tg} \theta.$$

Donc, au signe près, les angles α et θ sont égaux.

D'ailleurs :

$$\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{Gm}{D^2};$$

la résultante due au potentiel V_1 est constante. Il reste à montrer que les composantes F_1 et F_2 sont bien dirigées comme l'indique la figure 33.

Mais une remarque est nécessaire : pour nous conformer aux notations précédemment adoptées, nous devons considérer m comme négatif, puisque les masses matérielles *s'attirent* : la Terre et la Lune agissent comme des agents de déterminations contraires (§ 27). La force F_1 *positive* est dirigée vers les θ croissants ; la force F_2 *négative* est dirigée vers les R *décroissants*.

Le potentiel V_1 fournit donc une force constante et dirigée suivant LT.

Nous trouverons une application de cet exercice au § 113.

Le potentiel total a dès lors pour expression :

$$V = \frac{Gm}{d} - \frac{GmR}{D^2} \cos \theta; \tag{1}$$

$$d = \sqrt{D^2 + R^2 - 2DR \cos \theta}$$

est la distance du centre de la Lune au point considéré A.

Développant $1/d$ en série, il vient aisément :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{D} + \frac{R}{D^2} \cos \theta + \frac{R^2}{D^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \dots$$

Les seuls termes importants du potentiel sont :

$$V = \frac{Gm}{D} + \frac{GmR^2}{D^3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2};$$

le premier terme Gm/D peut être négligé, puisqu'il est le même pour tous les points de la Terre.

Soit λ la latitude du point A, H l'angle horaire de la Lune par rapport au méridien de ce lieu (fig. 34 ; on a :

$$\cos \theta = \cos \lambda \cos H, \quad (2)$$

d'où :
$$V = \frac{GmR^2}{D^3} \frac{3 \cos^2 \lambda \cos^2 H - 1}{2}. \quad (3)$$

Telle est l'expression du potentiel dû à la Lune en un point de la surface terrestre.

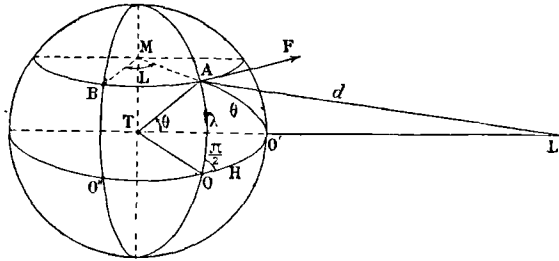


Fig. 34.

Cherchons l'expression de la force *tangentielle* F dirigée suivant le parallèle : soit x le chemin compté suivant ce parallèle.

$$F = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial H} \frac{1}{R \cos \lambda} = \frac{3}{2} \frac{GmR}{D^3} \cos \lambda \sin 2H. \quad (4)$$

La force *tangentielle* est donc de période semi-diurne ; elle est en raison inverse du cube de la distance D de la Terre à l'astre agissant. On conçoit comment la Lune peut avoir une action prédominante, malgré l'insignifiance de sa masse vis-à-vis de celle du Soleil (§ 82 .

Soit L la longitude (en radians) d'un lieu B quelconque, par rapport au méridien qui passe par A ; l'angle horaire H fixant la position de la Lune par rapport à ce lieu, peut être mis sous la forme générale :

$$H = \omega t - L,$$

où ω est la vitesse angulaire de la Lune par rapport à la Terre, les angles L et H étant comptés dans le même sens. On a :

$$x = \text{arc } \overline{AB}, \quad L = \frac{\text{arc } \overline{AB}}{\overline{MA}} = \frac{x}{R \cos \lambda}, \quad H = \omega t - \frac{x}{R \cos \lambda}.$$

Pour faire concorder ces formules avec la figure 34, il ne faut pas oublier que si les angles horaires H sont comptés positivement dans le sens OO' , la longitude de B est négative en vertu de la convention précédemment faite. L'angle horaire par rapport au lieu B est mesuré par l'arc $\overline{O''O'}$.

81. Explication des marées. — L'explication des marées ne doit pas être cherchée dans la variation périodique de l'intensité de la pesanteur; elle résulte de la variation de la direction de la pesanteur sous l'action de la force horizontale semi-diurne dont nous avons donné ci-dessus l'expression.

Pour comprendre de quoi il s'agit, le lecteur relira les §§ 92 et 169 du Tome I. Les marées sont au premier chef le résultat d'une *résonance* sous l'influence d'une force horizontale périodique.

Pour fixer les idées, considérons *une onde solitaire ou de translation* (I, § 92) se déplaçant dans un canal creusé suivant un parallèle, c'est-à-dire suivant le chemin repéré par la variable x . L'équation aux dérivées partielles qui la régit est :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (1)$$

où g est l'intensité de la pesanteur, h la profondeur du canal, ζ le déplacement horizontal, x le chemin compté suivant le parallèle, t le temps.

La *protubérance superficielle* qui résulte du déplacement inégalement rapide du liquide aux divers points du canal a pour hauteur :

$$-r = h \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Dans le cas de la marée, il faut ajouter la force horizontale F qui résulte de l'action de la Lune (ou du Soleil).

L'équation (1) complétée devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + F, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{3}{2} \frac{GmR}{D^3} \cos \lambda \sin \left(2\omega t - \frac{2x}{R \cos \lambda} \right). \end{aligned}$$

On vérifiera aisément que la solution est périodique et de la forme :

$$\zeta = A \sin \left(2\omega t - \frac{2x}{R \cos \lambda} \right), \quad r = \frac{2Ah}{R \cos \lambda} \cos \left(2\omega t - \frac{2x}{R \cos \lambda} \right).$$

La protubérance qui constitue la marée est donc un phénomène périodique, semi-diurne, ayant, par rapport au passage de la Lune au méridien considéré, un certain décalage dont le signe dépend des grandeurs relatives de la vitesse \sqrt{gh} de propagation de la protubérance dans le canal, et de la vitesse de déplacement relatif de la Lune qui est de 448 mètres par seconde sur l'équateur terrestre.

82. Remarques sur l'explication précédente. — Le lecteur comprend que l'explication précédente ne se prête pas à des vérifications numériques. Nos canaux fictifs réguliers, entourant la Terre suivant des parallèles, n'existent pas. Les continents les barrent.

Quand un véritable canal plus ou moins long existe, il est dirigé n'importe comment par rapport au méridien.

D'ailleurs ni la Lune, ni le Soleil ne se promènent dans le plan de l'équateur; pour voir qu'il résulte de la variabilité de leur déclinaison une force de période *diurne*, il suffit de compléter l'équation (2) du § 80.

Ce qu'il faut retenir de cette explication, c'est l'existence de protubérances se déplaçant à la surface des mers, avec une vitesse variable suivant la profondeur, et correspondant à un déplacement alternatif horizontal d'ensemble des tranches verticales liquides successives.

Sur ces ondes de translation agit, outre la force horizontale qui résulte de la protubérance (force due à la pesanteur propre du liquide), une force périodique horizontale complexe, dépendant des actions tangentielles combinées du Soleil et de la Lune. *D'où résonance.*

On s'explique ainsi aisément que d'une mer telle que la Méditerranée où les marées sont généralement très faibles, certaines parties (fond de l'Adriatique et côtes de la Tripolitaine) puissent avoir, grâce à une résonance particulière, des marées relativement considérables.

On s'explique comment l'heure et l'amplitude de la marée varient d'une manière continue dans les mers étroites telles que la Manche. Des phénomènes d'interférence peuvent même se produire : l'amplitude de la marée est 6 mètres sur les côtes de Bretagne, 8 mètres sur les côtes de Normandie, 14 mètres au mont Saint-Michel; elle tombe à 2 mètres le long des côtes de la mer du Nord.

L'explication des marées ordinairement donnée dans les livres élémentaires est entièrement différente. Elle fait intervenir non la force tangentielle, mais la force normale. On cherche quelle est la figure d'équilibre d'une masse liquide sous l'action d'un astre attirant. Il est clair qu'on néglige la masse du liquide et son inertie, ce qui est absurde, ainsi qu'on s'en rend compte aisément.

On admet que le vent est la cause première des ondulations à la surface de la mer, ondulations que nous appelons *vagues* ou *lames*. Une fois le vent tombé, *le mouvement ondulatoire*, qui prend le nom de *houle*, *persiste un temps qui, suivant les cas (profondeur, dimensions et forme de la mer), se chiffre par heures ou par jours*. Il peut se propager au loin, de sorte qu'on ressent la houle en un point où ne s'est rencontrée aucune cause déterminante locale. Nous avons étudié la théorie de la houle au § 90 du Tome I. Voici pourquoi nous rappelons ce phénomène qui n'a qu'un rapport lointain avec les marées.

Si un mouvement oscillatoire tel que la houle peut persister pendant des heures et des jours, *que faut-il penser d'une théorie qui suppose à chaque instant l'équilibre atteint dans l'onde formidable qui constitue la marée?* Elle ne peut avoir aucun sens.

Le Soleil et la Lune agissent tous deux ; le rapport de leurs actions est égal au rapport des quotients de la masse par le cube de la distance. Les distances en rayons terrestres sont environ 24 000 et 60 ; le rapport est 400, le cube de ce rapport est $64 \cdot 10^6$. D'ailleurs, le quotient de la masse du Soleil par la masse de la Lune est :

$$88 \times 330\,000 = 29 \cdot 10^6.$$

L'action du Soleil est donc environ deux fois plus petite que celle de la Lune.

Les actions s'ajoutent quand les astres sont en conjonction ou en opposition. Mais les marées plus fortes, correspondant aux syzygies, ne se produisent qu'un certain temps après, suivant les principes généraux qui régissent la résonance.

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

CHAPITRE I

ÉLECTRICITÉ STATIQUE. DISTRIBUTION. CAPACITÉS

Les hypothèses posées au début du Chapitre II de l'Introduction s'appliquent à l'Électricité. Nous sommes donc en possession de nombreux résultats généraux sur les conditions d'équilibre des couches à la surface des corps conducteurs. En particulier, nous avons étudié la distribution sur la sphère et le plan en présence d'un point influençant, et sur l'ellipsoïde. Avant d'énoncer des théorèmes généraux sur les *capacités*, c'est-à-dire sur l'influence réciproque d'un nombre quelconque de corps conducteurs, nous reprendrons l'étude de l'influence de deux corps l'un sur l'autre *en insistant sur les phénomènes indépendants de la forme*. Il s'agit de préciser les notions exposées au Chapitre XII du Cours de Première, notions qui sont le fond de l'Enseignement Secondaire en Électricité Statique.

83. **Démonstration de la loi de l'inverse du carré de la distance (Coulomb).** — Coulomb a établi cette loi en équilibrant au moyen de la torsion d'un fil les répulsions de deux sphères chargées.

Un fil fin de métal ou de verre supporte une tige isolante COB très fine, horizontale (gomme laque), au bout de laquelle est collée une petite boule B de moelle de sureau dorée et bien unie. Une autre petite boule B' est montée sur une tige isolante ; on

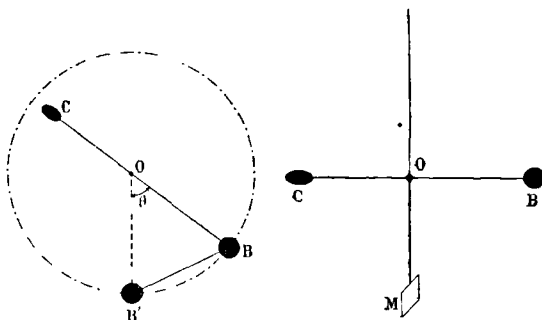


Fig. 35.

la charge, puis on l'introduit dans la cage de l'appareil de manière

que son centre soit sur le cercle horizontal que décrit le centre de la première (fig. 35).

Le fil de suspension peut être tordu par sa partie supérieure d'un angle connu α . Un miroir M très léger collé sur un prolongement vertical rigide du fil de suspension, au-dessous de la tige isolante, permet de mesurer les rotations.

Supposons que les boules *chargées* des masses m et m' soient à une distance angulaire θ et qu'alors le fil ait une torsion α . Soit a le rayon de la circonférence sur laquelle sont les centres des sphères dont la distance actuelle est d . Soit Γ la constante de torsion du fil, et par conséquent $\Gamma\alpha$ le couple actuel. La force F entre les balles et le couple qui en résulte sont :

$$F = \frac{mm'}{d^2} = mm' : \left(4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad \Gamma\alpha = Fa \cos \frac{\theta}{2}. \quad (1)$$

L'expérience consiste à faire varier θ , *les charges restant constantes*, et à vérifier que la torsion α dépend de θ comme l'indique le système des formules (1).

Dans le dispositif original, la cage renfermant l'appareil était en verre : c'est une technique fautive, car il est impossible de tenir compte de l'électrisation du verre. La cage doit être en métal ou en verre, mais garnie intérieurement d'une lame métallique.

On suppose, dans le calcul précédent, que la distribution est invariable sur les sphères et que tout se passe comme si leurs charges étaient concentrées aux centres. C'est d'autant plus inexact que les sphères sont plus rapprochées. Quand la distance diminue, la répulsion augmente moins vite que ne le veut la loi de l'inverse du carré des distances. Mais si la distance est de 5 à 10 fois le rayon, l'hypothèse devient admissible.

Il y a toujours déperdition des charges; toutefois on connaît aujourd'hui des isolants assez parfaits, pour que la perte de charge soit négligeable pendant la durée de deux expériences croisées avec des distances θ_1 et θ_2 différentes.

84. Démonstration indirecte (Cavendish). — Nous avons démontré au § 34 que *si la force à l'intérieur d'une couche homogène sphérique est nulle, la loi d'action est certainement en raison inverse du carré de la distance.*

Soit donc une sphère métallique S; plaçons à l'intérieur un petit corps métallique *isolé* C. Chargeons la sphère, établissons un instant une communication métallique entre elle et le corps C. Supprimons la communication, déchargeons la sphère.

Si la force intérieure est toujours restée nulle, le corps C n'a pu prendre aucune charge pendant qu'existait la communication. Sinon il a dû se charger superficiellement de manière à annuler l'action de

la sphère S en tous les points de son intérieur. *Il doit être resté chargé*, puisque nous ne déchargeons la sphère qu'après avoir supprimé la communication.

Pour savoir ce qu'il en est, réunissons métalliquement le corps C et un électromètre sensible, à travers un trou percé dans la sphère.

L'expérience prouve que la charge du corps C est nulle. Cette expérience est infiniment plus démonstrative que celle de Coulomb.

85. Éléments correspondants. — Une ligne de force électrique ne peut être une courbe fermée, puisque le long d'une telle ligne le potentiel décroît constamment et que *par hypothèse* chaque point est caractérisé par une valeur unique du potentiel. Une ligne de force ne peut donc émaner d'un corps conducteur et aboutir à ce même conducteur.

Considérons un tube de force dont les lignes émanent toutes d'un conducteur 1 et aboutissent toutes au conducteur 2. Il découpe sur les conducteurs des aires S_1 et S_2 qu'on appelle *surfaces correspondantes*.

Les quantités d'électricité qui existent sur ces surfaces sont égales et de signes contraires.

En effet, complétons une surface fermée par deux calottes situées à l'intérieur des deux conducteurs. Le flux à travers cette surface est nul : il est nul sur les parois latérales du tube, puisque la force est dans le plan tangent à ces parois ; il est nul sur les calottes terminales, puisqu'elles sont tout

entières dans les conducteurs où le potentiel est constant. Donc la somme des masses que renferme la surface fermée est nulle : les surfaces *correspondantes* supportent donc des masses égales et de signes contraires.

Nous disons que le tube *émane* du conducteur pour lequel l'élément est positif, qu'il *aboutit* au conducteur ou est *absorbé* par le conducteur pour lequel l'élément est négatif.

COROLLAIRE I. — Les tubes de force qui émanent d'un conducteur sont tous absorbés par les autres conducteurs ou se perdent en partie à l'infini : dans ce dernier cas le potentiel du corps est sûrement positif, le potentiel de l'infini étant nul.

Inversement, si le conducteur absorbe des tubes venant de l'infini, son potentiel est sûrement négatif.

COROLLAIRE II. — Si deux conducteurs A et B sont seuls dans l'espace, l'un au moins est recouvert d'une couche de signe constant.

Admettons que le potentiel de A soit positif. Il se peut que B ait une couche en partie positive, en partie négative. Je dis alors que son potentiel est positif et plus petit que celui de A .

En effet, quelques tubes émis par A viennent aboutir sur B partie

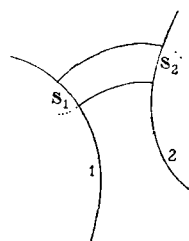


Fig. 36.

négative), qui émet à son tour des tubes absorbés par l'infini (partie positive); donc le potentiel de B est positif puisqu'il émet vers l'infini; il est plus petit que celui de A puisqu'il absorbe des tubes émis par A. Donc toute la couche de A est positive, car il n'existe aucun corps à un potentiel plus élevé que lui, dont il puisse absorber les tubes.

Même raisonnement si nous supposons le potentiel de A négatif et plus grand en valeur absolue que celui de B.

Mais il peut arriver que A et B possèdent simultanément des couches entièrement positives ou négatives. Dans le premier cas leurs tubes aboutissent tous à l'infini, dans le second ils absorbent des tubes venant de l'infini. Aucun tube émis par l'un n'aboutit sur l'autre.

Il peut arriver enfin que la couche de A soit tout entière positive et celle de B tout entière négative.

86. Cavités creusées dans un conducteur. — On creuse une cavité dans un corps conducteur C et on y introduit des masses électriques distribuées n'importe comment, dont la somme algébrique est M. Pour l'équilibre il doit se distribuer sur la surface interne de la cavité une couche dont la quantité totale est $-M$.

Nous pouvons le montrer de bien des manières.

1^o Traçons *dans* le corps C une surface fermée quelconque entourant la cavité. Le flux total à travers cette surface est nul, puisque la force est nulle en tous ses points.

Donc la masse totale qu'elle contient est nulle.

2^o Considérons tous les tubes de force à l'intérieur de la cavité.

Les uns relient entre elles un premier groupe des masses introduites. Les autres émanent de la surface interne de la cavité; comme ils ne peuvent avoir leur autre extrémité sur cette surface qui est équipotentielle (§ 85), il faut qu'ils aboutissent à un second groupe des masses introduites.

D'après le théorème des éléments correspondants, le premier groupe a une somme algébrique nulle; le second a une somme algébrique égale et de signe contraire à la somme des masses qui se trouvent sur la surface interne de la cavité. Cette somme est donc bien égale à $-M$.

87. Cylindre de Faraday. — Les phénomènes dans le cylindre de Faraday sont la conséquence immédiate des considérations précédentes. Si le cylindre est d'abord isolé et si l'on introduit dedans des masses de somme M, il faut qu'une masse égale M se distribue en équilibre sur la surface extérieure (Cours de Première, fig. 108).

La loi de cette distribution ne dépend absolument que de la position des masses extérieures et non de celle des masses intérieures, puisque la couche $-M$, dont le paragraphe précédent montre la nécessité, se distribue sur la surface intérieure du cylindre, de ma-

nière à annuler sur tout point extérieur l'action de ces masses intérieures.

Si le cylindre n'est pas isolé, mais s'il est maintenu à un potentiel déterminé, dans des conditions déterminées pour les masses extérieures, la masse M sera éliminée par les procédés qui maintiennent le potentiel constant. Par exemple, si le cylindre est au sol (potentiel 0), la masse M se perdra dans le sol.

Nous supposons le cylindre assez long pour qu'on puisse le considérer comme fermé. Le raisonnement précédent ne vaut en effet que si aucun des tubes de force qui émanent des masses introduites, n'échappe par l'ouverture du cylindre. Il faut donc que l'angle solide sous lequel est vu l'orifice à partir de l'une quelconque des masses introduites, soit assez petit.

88. Corps d'épreuve. — La méthode du *corps d'épreuve* consiste à mettre un petit corps conducteur C en contact avec la surface du conducteur A sur lequel on étudie la distribution. Il faut que les dimensions de C soient toutes très petites vis-à-vis des rayons de courbure de la surface A au point de contact. On emploie par exemple un petit plan ou une petite sphère montés sur une tige mince isolante; on s'arrange de manière que pendant le contact la tige soit normale à la surface A .

On admet que la charge de C est proportionnelle à la densité au point de contact. C'est évident si l'on peut considérer la surface A comme un plan indéfini par rapport au corps C , au voisinage du point de contact.

Quand on écarte le corps d'épreuve, il conserve sa charge : il ne peut se produire d'étincelle entre A et C . En effet, ils sont au même potentiel pendant le contact. Le potentiel est presque constant dans l'espace voisin du point de contact; la densité y est donc quasi nulle. *Il en est de même au point de contact au moment où il cesse de l'être.* Donc la force électrostatique y est quasi nulle, et aucune étincelle ne peut se produire.

Suivant la forme du corps d'épreuve, le coefficient de proportionnalité entre sa charge et la densité au point de contact varie. La connaissance de ce coefficient n'a d'ailleurs aucun intérêt *pratique*; car dans l'étude de la distribution on ne s'occupe que de mesures relatives.

89. Influence entre deux corps. Disposition des surfaces équipotentiellles. — Dans l'Enseignement Secondaire (Cours de Première, § 136), les expériences d'influence se font généralement entre une sphère A et un corps allongé B . Proposons-nous de déter-

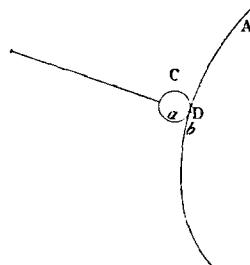


Fig. 37.

miner d'une manière générale la disposition des surfaces équipotentiellles. Nous supposons que les corps A et B sont immobiles ; le potentiel de A est fixe et *positif*, nous faisons diminuer le potentiel de B à partir de celui de A.

1° Lorsque $V_A = V_B$ (fig. 38, les potentiels décroissent à partir des

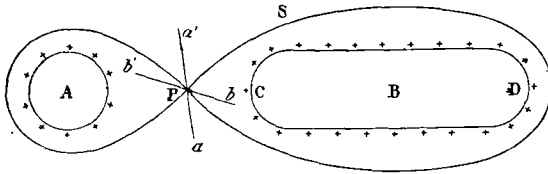


Fig. 38.

surfaces A et B. Soit V_1 un potentiel peu inférieur à V_A ou V_B ; la surface équipotentielle V_1 se compose de deux nappes distinctes : l'une entoure complètement A, l'autre complètement B.

A grande distance les surfaces équipotentiellles sont toujours très approximativement des sphères concentriques admettant pour centre un point quelconque du système formé par les corps A et B.

La sphère de l'infini est au potentiel 0.

Donc les surfaces équipotentiellles sont d'abord à deux nappes, ensuite à une nappe, à mesure que le potentiel décroît.

La surface S, qui sert de passage entre les deux groupes, possède un point P conique d'équilibre. En effet, menons par ce point des directions quelconques ; elles forment deux groupes suivant qu'elles pénètrent dans la surface S ou qu'elles restent en dehors.

Suivant les directions Pb, Pb',... le potentiel croît ; suivant les directions Pa, Pa',... le potentiel décroît ; donc le potentiel au point P est un minimum par rapport au premier groupe, un maximum par rapport au second. Il y a équilibre stable pour une masse positive située en P par rapport au premier, équilibre instable par rapport au second. C'est l'inverse pour une masse négative située en P.

2° Diminuons le potentiel de B ; le point d'équilibre s'en rapproche. Pour un certain potentiel, il se trouve en C à la surface même de B ; en C la densité est nulle.

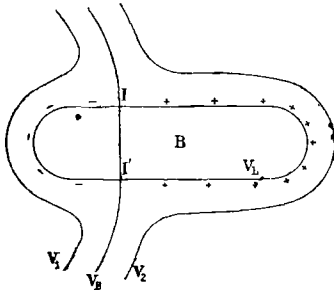


Fig. 39.

3° Diminuons encore le potentiel de B. La surface équipotentielle V_B , qui entoure le corps A, coupe maintenant le corps B (fig. 39) : elle se compose donc de deux nappes dont l'une est la surface même du corps B. Je dis que la ligne d'intersection II est la ligne de densité nulle ou *ligne neutre*.

En effet, dans l'hypothèse où le potentiel de A est positif, V_1 est plus grand que V_B , V_2 est plus petit que V_B . D'après la formule générale qui relie la force en un point de la

surface d'un corps à la densité en ce point, il faut que la densité soit négative en regard de A, positive au delà de la surface V_B . Donc la densité est nulle sur la ligne d'intersection.

Les deux nappes de la surface équipotentielle V_B se coupent à angle droit. C'est une application d'une proposition générale dont voici la démonstration.

Prenons la tangente à la ligne d'intersection pour axe des z ; au voisinage d'un point de cette ligne, la surface équipotentielle se réduit à deux plans :

$$xy + Ax^2 + By^2 = 0.$$

Écrivons que l'équation de Laplace est satisfaite : il vient :

$$A + B = 0, \quad xy + A(x^2 - y^2) = 0;$$

équation de deux plans rectangulaires.

4° Diminuons encore le potentiel de B. La ligne neutre décrit toute la surface du corps B et se réduit à un point d'équilibre D; la densité est nulle en ce point.

5° Enfin pour un potentiel de B encore plus petit, le point conique P d'équilibre passe de l'autre côté du corps B (fig. 40). Les potentiels

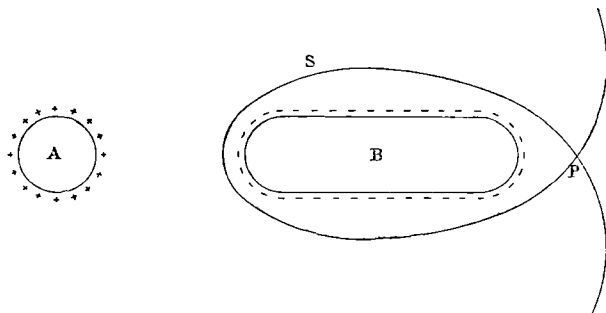


Fig. 40.

vont vers la surface équipotentielle S : en décroissant à partir de A (chargé positivement en tous ses points), en croissant à partir de B (chargé négativement en tous ses points).

Les surfaces équipotentielles sont toutes à une nappe à l'exception de la surface S. On montrerait comme plus haut que P est un point d'équilibre stable pour un groupe de directions, d'équilibre instable pour l'autre groupe.

Lorsque le corps B est mis au sol (potentiel zéro en présence du corps A chargé), on se trouve précisément dans ce cinquième cas.

6° Enfin si les deux corps ont des charges égales et de signes contraires, le point P passe à l'infini sur la surface de potentiel nul : la force ne peut être nulle qu'à une très grande distance du système constitué par les corps A et B. La surface équipotentielle zéro ne se

ferme qu'à l'infini ; elle présente une nappe ouverte entre les deux corps. Par exemple dans le cas de deux points chargés de masses égales et de signes contraires, la surface de potentiel nul est le plan perpendiculaire au milieu de la droite qui les joint.

Capacités.

90. Le potentiel de chaque conducteur appartenant à un système formé de p conducteurs quelconques, invariables, électrisés, est une fonction linéaire des p charges de ces conducteurs. — Nous nous appuierons pour démontrer ce théorème :

1° sur la possibilité de superposer des états d'équilibre sans changer l'état d'équilibre (§ 41) ;

2° sur un corollaire de cette proposition : si le système est en équilibre pour une certaine distribution, on obtient un nouvel état d'équilibre en multipliant toutes les charges par un même nombre : tous les potentiels sont alors multipliés par ce nombre.

Supposons que toutes les charges soient nulles, sauf celle du corps 1 sur lequel se trouve l'unité d'électricité : on obtient sur les corps 1, 2, 3, ..., une certaine distribution d'équilibre correspondant à des potentiels que nous appellerons :

$$a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots$$

Si la charge du corps 1 devient M_1 , les potentiels d'équilibre seront :

$$a_{11}M_1, a_{21}M_1, a_{31}M_1, \dots$$

Supposons maintenant que toutes les charges soient nulles, sauf celle du corps 2 ; le même raisonnement nous permet de dire que les potentiels d'équilibre sont :

$$a_{12}M_2, a_{22}M_2, a_{32}M_2, \dots$$

Et ainsi de suite. Superposons ces états d'équilibre, il vient les équations qui démontrent le théorème :

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + \dots + a_{1p}M_p, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ V_p &= a_{p1}M_1 + a_{p2}M_2 + \dots + a_{pp}M_p. \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de ces équations, résolues par rapport aux charges, que les charges sont des fonctions linéaires des potentiels.

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad M_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1p}V_p, \\ M_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2p}V_p, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ M_p &= C_{p1}V_1 + C_{p2}V_2 + \dots + C_{pp}V_p. \end{aligned}$$

Les a et les C dépendent des positions relatives de tous les conducteurs. Les p^2 quantités C s'appellent les *capacités* du système. Nous montrerons plus loin qu'elles ne sont pas toutes distinctes; on a la condition : $C_{ij} = C_{ji}$.

91. **Energie d'un système de conducteurs.** — Soit :

$$M_1, M_2, \dots, M_p, \quad V_1, V_2, \dots, V_p,$$

les charges et les potentiels des conducteurs formant le système. Quand on amène une petite quantité dm d'électricité prise à l'infini, sur un conducteur dont le potentiel est V , le travail nécessaire à l'opération est Vdm ; l'énergie potentielle du système augmente d'autant.

Considérons la succession continue d'états d'équilibre définis par les conditions :

$$nM_1, nM_2, \dots, nM_p, \quad nV_1, nV_2, \dots, nV_p,$$

où n est un nombre variable de 0 à 1. Pour $n=0$, le système n'est pas chargé; pour $n=1$, il est dans son état actuel d'équilibre.

Pour passer de l'état n à l'état $n + dn$, il faut augmenter simultanément les quantités d'électricité de chacun des corps du système de :

$$M_1 dn, M_2 dn, \dots,$$

et par conséquent effectuer des travaux :

$$M_1 V_1 n dn, \quad M_2 V_2 n dn, \dots,$$

puisque les potentiels au moment où l'on transporte les charges sont :

$$nV_1, \quad nV_2, \dots,$$

L'énergie potentielle W est la somme des travaux effectués quand n passe de 0 à 1 :

$$W = [M_1 V_1 + M_2 V_2 + \dots] \int_0^1 n dn = \frac{1}{2} \sum MV.$$

COROLLAIRES. — 1° L'énergie est une fonction homogène et du second degré des charges ou des potentiels : cette proposition résulte immédiatement du paragraphe précédent.

2° Soit $M'_1, M'_2, \dots, V'_1, V'_2, \dots$ un second état d'équilibre.

Nous pouvons passer continuellement du premier au second en ajoutant les masses $(M'_1 - M_1)n, (M'_2 - M_2)n, \dots$ où n varie de 0 à 1. Pour $n=0$, nous avons le premier système; pour $n=1$, le second.

Les potentiels étant reliés linéairement aux charges, l'état n défini par les charges $M + (M' - M)n$ correspond à des potentiels $V + (V' - V)n$.

Cherchons le travail $W' - W$ à dépenser pour passer du premier état au second :

$$W' - W = \sum \int_0^1 (M' - M)[V + (V' - V)n] dn = \frac{1}{2} \sum (M' - M)(V' + V).$$

$$\text{Or} \quad W = \frac{1}{2} \sum MV, \quad W' = \frac{1}{2} \sum MV ;$$

$$\text{d'où :} \quad \sum MV' = \sum MV.$$

92. Propriétés des capacités. — 1^o Appliquons le corollaire précédent aux deux états d'équilibre définis :

le premier par les potentiels $V_1, 0, 0, \dots$,

le second par les potentiels $0, V_2, 0, \dots$.

Pour le premier les charges sont :

$$M_1 = C_{11}V_1, \quad M_2 = C_{21}V_1, \quad M_3 = C_{31}V_1, \dots$$

Pour le second :

$$M'_1 = C_{12}V_2, \quad M'_2 = C_{22}V_2, \quad M'_3 = C_{32}V_2, \dots$$

Multiplions la charge d'un corps dans l'un des états par le potentiel du même corps dans l'autre, additionnons toutes les quantités de même espèce ; en vertu du corollaire 2^o du § précédent, égalons les deux sommes ainsi obtenues. Il reste seulement :

$$C_{21}V_1V_2 = C_{12}V_1V_2, \quad C_{21} = C_{12}.$$

Donc tous les C ne sont pas distincts ; on a toujours : $C_{ij} = C_{ji}$.

On démontrerait de même la condition : $a_{ij} = a_{ji}$.

2^o Il est évident, d'après la manière même dont les C s'introduisent, que tous les coefficients C_{ii} sont positifs.

Cherchons à nous rendre compte de la distribution des lignes de force quand le corps 1 est au potentiel V_1 (que nous supposons positif pour préciser le langage), et tous les autres au potentiel 0. Je rappelle les principes suivants :

le flux total envoyé par un corps est égal à 4π fois la somme des masses qu'il contient ;

entre deux corps au même potentiel il ne peut exister une ligne de force.

Tous les corps sauf 1 étant au potentiel 0, aucune ligne de force

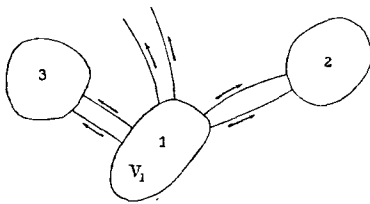


Fig. 11.

ne les réunit : ils n'en envoient aucune à l'infini pour la même raison ; donc ils ne peuvent être réunis par des lignes de force qu'avec le corps 1. D'après le théorème des éléments correspondants, nous sommes assurés que leurs charges sont de signe contraire à celle du corps 1, et que la somme de ces charges est généralement inférieure en valeur absolue

à la charge de 1, puisque parmi les lignes de force qui émanent de celui-ci, une partie peut seulement aboutir aux corps 2, 3, ... ; le reste se perd à l'infini.

Donc : 1° tous les C_{ij} sont négatifs ;

2° on a l'inégalité :

$$-[C_{21} + C_{31} + C_{41} + \dots + C_{n1}] < C_{11}.$$

Mais on sait que : $C_{ij} = C_{ji}$; on peut donc écrire la relation précédente :

$$-[C_{12} + C_{13} + C_{14} + \dots + C_{1n}] < C_{11}.$$

Tous les coefficients à deux indices différents correspondant à un même corps sont tous négatifs et ont une somme plus petite en valeur absolue que le coefficient à deux indices égaux relatif à ce corps.

Cas particulier. — Si le corps 1 est complètement enveloppé par le corps 2, on a : $C_{11} = -C_{12}$. Chargeons en effet le corps 1 au potentiel V_1 et maintenons le corps 2 au potentiel 0. La charge de la surface extérieure du corps 2 est nulle ; la charge de la surface intérieure du corps 2 est égale et de signe contraire à la charge du corps 1.

On comprend maintenant le sens de l'égalité : $C_{ij} = C_{ji}$. Quand nous chargeons i au potentiel 1, les autres corps étant maintenus au potentiel 0, j prend une certaine charge ; i prend la même charge lorsque c'est le corps j qui est au potentiel 1 et tous les autres au potentiel 0.

Quand le corps 1 est isolé dans l'espace, c'est-à-dire quand tous les autres conducteurs sont suffisamment éloignés, tous les C sont nuls, sauf C_{11} qui prend le nom de *capacité du corps*.

93. Condensateurs. — Supposons le système formé seulement de deux corps, le corps 2 enveloppant complètement le corps 1.

Généralement les équations peuvent s'écrire, en simplifiant les symboles :

$$M_1 = C_1 V_1 - C V_2, \quad M_2 = -C V_1 + C_2 V_2.$$

Mais le corps 2 enveloppant le corps 1, on a : $C = C_1$; en définitive, les équations prennent la forme :

$$M_1 = C(V_1 - V_2), \quad M_2 = -C(V_1 - V_2) + C_2 V_2,$$

en posant : $C_2 = C_2 - C$. Par définition, le système est un *condensateur* ; le coefficient C est la *capacité du condensateur*.

94. Application à quelques cas particuliers. Sphères concentriques. — Quand une sphère est isolée dans l'espace, sa capacité est égale au rayon. En effet la couche qui la recouvre est uniforme, et le potentiel qu'elle crée en un point quelconque, par exemple au centre de la sphère, est :

$$V = \frac{M}{R}; \quad \text{d'où : } C = R.$$

Soit maintenant deux sphères concentriques 1 et 2, dont les rayons sont : R_1 et R_2 ; posons : $R_1 < R_2$.

Par raison de symétrie, les couches sont encore uniformes. Voici les équations à satisfaire :

$$M_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2,$$

$$M_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2.$$

Nous ne supposons rien de connu sur les coefficients. Appliquons la méthode générale en nous souvenant qu'une couche sphérique uniforme produit le même effet sur un point extérieur que si elle est concentrée au centre de la sphère, et que le potentiel qu'elle crée dans la sphère est le quotient de la charge par le rayon.

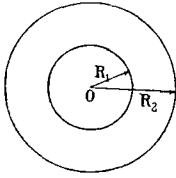


Fig. 42.

Première opération. $V_2 = 0$:

$$M_1 = C_{11} V_1, \quad M_2 = C_{21} V_1.$$

Le potentiel est nul sur 2; d'où :

$$\frac{M_1}{R_2} + \frac{M_2}{R_2} = 0, \quad M_1 = -M_2; \quad C_{11} = -C_{21}.$$

Le potentiel est V_1 sur 1; d'où :

$$\frac{M_1}{R_1} + \frac{M_2}{R_2} = V_1, \quad \frac{C_{11}}{R_1} + \frac{C_{21}}{R_2} = 1.$$

Résolvant il vient :

$$C_{11} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad C_{21} = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Seconde opération. $V_1 = 0$: les deux équations de condition, obtenues en écrivant que le potentiel est 0 sur 1 et V_2 sur 2, sont :

$$\frac{C_{12}}{R_1} + \frac{C_{22}}{R_2} = 0, \quad C_{12} + C_{22} = R_2.$$

$$\text{D'où :} \quad C_{22} = \frac{R_2^2}{R_2 - R_1}, \quad C_{12} = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

En définitive, on a :

$$M_1 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2), \quad M_2 = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) + R_2 V_2.$$

La condition : $M_2 = -M_1 + R_2 V_2$, est d'une forme que l'on pouvait prévoir, puisque le système est un condensateur. Les couches qui se trouvent, l'une sur la surface intérieure de la sphère 2, l'autre sur la surface extérieure de la sphère 1, forment un état d'équilibre; il en est de même de la couche uniforme qui se trouve sur la surface extérieure de 2. Les équations résultent de la superposition de ces états d'équilibre.

Ce raisonnement nous permet de généraliser immédiatement la formule. Nous avons supposé la sphère 2 sans épaisseur; admettons

maintenant que R_2 restant le rayon de la surface intérieure de cette sphère, R_2' soit le rayon de sa surface extérieure. Nous pouvons poser sans calcul nouveau :

$$M_1 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2), \quad M_2 = -\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) + R_2' V_2.$$

95. Condensateur cylindrique (voir II, § 245). Cherchons quelles doivent être les capacités *par unité de longueur* d'un condensateur cylindrique. Ce problème a de très importantes applications dans la télégraphie sous-marine. Les rayons sont R_1 et R_2 . Les surfaces équipotentielles sont par raison de symétrie des cylindres concentriques; les lignes de force sont des rayons. Pour trouver la loi de variation du potentiel en fonction du rayon d'un cylindre équipotentiel, écrivons que le flux de force est constant à travers l'unité de hauteur de tous les cylindres. L'équation de condition est :

$$-2\pi r \cdot \frac{dV}{dr} = A, \quad 2\pi V = -A \log r + B,$$

où A et B sont des constantes.

Déterminons A et B par la condition que le potentiel soit V_1 pour $r = R_1$, V_2 pour $r = R_2$. Il vient :

$$A = 2\pi \frac{V_1 - V_2}{\log \frac{R_2}{R_1}}.$$

Or A est le flux de force total à travers l'unité de hauteur du cylindre. La charge par unité de hauteur du cylindre intérieur est

donc :

$$M_1 = \frac{A}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{2 \log \frac{R_2}{R_1}}.$$

D'où la capacité du condensateur :

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{R_2}{R_1}}.$$

96. Théorie générale des condensateurs. — Soient deux conducteurs 1 et 2 très rapprochés l'un de l'autre sur une grande partie de leur surface. Leurs potentiels sont V_1 et V_2 . Considérons une surface Σ qui est partout à l'intérieur des deux conducteurs, excepté à la traversée de la lame d'isolant, et qui enferme des portions quelconques des surfaces qui sont très rapprochées. Le flux à travers Σ est sensiblement nul, puisqu'il ne peut avoir de valeur différente de 0 qu'à la traversée de l'isolant, et par conséquent sur une aire petite. Donc les quantités supportées par les surfaces en regard des deux conducteurs sont égales et de signes contraires. Il revient au

même de dire qu'elles forment les éléments correspondants des tubes de force reliant les deux corps.

Cherchons les charges en fonction de l'aire S des surfaces en regard, de leur distance que nous supposons constante et égale à d , et de la différence des potentiels $V_1 - V_2$.

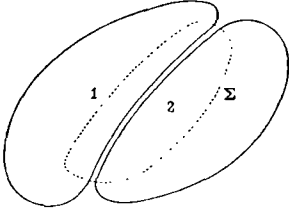


Fig. 13.

Les lignes de force sont normales aux deux conducteurs.

La force moyenne dans la lame d'isolant est :

$$\frac{V_1 - V_2}{d}.$$

La densité est donc :

$$\frac{V_1 - V_2}{4\pi d}.$$

La quantité qui se trouve sur l'une ou l'autre surface est :

$$S \frac{V_1 - V_2}{4\pi d}.$$

La capacité C du condensateur qu'elles forment est :

$$C = \frac{S}{4\pi d}.$$

Cela ne veut pas dire que $\pm C(V_1 - V_2)$ soit la totalité de l'électricité supportée par l'un ou l'autre corps.

Reprenons, en effet, les équations générales :

$$M_1 = C_1 V_1 - C V_2, \quad M_2 = -C V_1 + C_2 V_2.$$

Nous pouvons les mettre sous la forme :

$$M_1 = C(V_1 - V_2) + a_1 V_1, \quad M_2 = -C(V_1 - V_2) + a_2 V_2.$$

Si les corps sont suffisamment rapprochés sur une grande partie de leur surface, la capacité C devient énorme vis-à-vis des coefficients a_1 et a_2 de sorte qu'il est permis de ne conserver que les premiers termes des deux équations.

Appliquons au cas de deux sphères. Posons :

$$d = R_2 - R_1, \quad R = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{R^2}{d} \text{ sensiblement } = \frac{4\pi R^2}{4\pi d} = \frac{S}{4\pi d}.$$

On a donc :

$$M_1 = \frac{S}{4\pi d}(V_1 - V_2), \quad M_2 = -\frac{S}{4\pi d}(V_1 - V_2) + R_2 V_2.$$

Or le rapport de la capacité C à R_2 est $R:d$. Soit par exemple

$R = 10^6$, $d = 1^{\text{mm}}$; le rapport vaut 100 : le second terme de M_2 est négligeable devant le premier.

Le coefficient a_1 est ici rigoureusement nul, parce que le corps extérieur enveloppe complètement le corps intérieur.

Dans le cas des condensateurs cylindriques, on a de même :

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{2 \log \left(1 + \frac{d}{R_1} \right)} = \frac{R}{2d} = \frac{S}{4\pi d},$$

lorsque la distance : $d = R_2 - R_1$, des armatures est assez petite.

Déplacement des corps conducteurs. Électromètres.

97. Travail des forces électriques pendant le déplacement, à charges constantes, d'un système de conducteurs. — Lorsqu'on connaît l'énergie potentielle d'un système *isolé*, il est facile de calculer les forces qui agissent pour produire un déplacement donné, en s'appuyant sur le principe général que l'énergie tend vers un minimum. Exprimons l'énergie W en fonction des variables indépendantes a, b, c, \dots qui fixent la position du système; la force A suivant

la variable a est égale à : $-\frac{\partial W}{\partial a}$.

Soit généralement $d\tilde{C}$ le travail élémentaire; on a :

$$d\tilde{C} = A da + B db + \dots; \quad d\tilde{C} + dW = 0.$$

Nous savons que l'énergie d'un système de conducteurs électrisés

est :

$$W = \frac{1}{2} \sum MV.$$

D'ailleurs les V s'expriment en fonction des M à l'aide d'équations linéaires : $V_1 = a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + \dots + a_{1p}M_p$,

avec les conditions : $a_{ij} = a_{ji}$. Nous pouvons donc poser :

$$2W = \sum a_{ii} M_i^2 + 2 \sum a_{ij} M_i M_j.$$

Les coefficients a_{ii} et a_{ij} sont déterminés quand on se donne la forme du système; par conséquent leurs variations sont calculables quand on se donne les da, db, dc, \dots qui déterminent le changement de forme.

Si on pose comme condition que les charges sont constantes, le

système est isolé et la force suivant une variable indépendante quelconque, b par exemple, est :

$$B = - \frac{\partial W}{\partial b} = - \frac{1}{2} \sum M_i^2 \frac{\partial a_{ii}}{\partial b} - \sum M_i M_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial b}.$$

Le problème est donc résolu.

Voici un intéressant corollaire.

Supposons que toutes les charges soient nulles, sauf une, celle du corps 1 par exemple : $B = - \frac{1}{2} M_1^2 \frac{\partial a_{11}}{\partial b}$.

Il résulte de cette formule que les déplacements se font d'eux-mêmes, de manière que a_{11} décroisse.

On sait d'ailleurs que les corps non chargés sont attirés par le corps chargé; on peut conclure que le coefficient a_{ii} diminue quand on rapproche du corps i un corps conducteur. L'introduction dans le système d'un corps conducteur diminue de même les coefficients a_{ij} de tous les corps du système, car introduire un corps revient à le prendre à l'infini et à l'amener à distance finie.

98. Travail des forces électriques pendant le déplacement, à potentiels constants, d'un système de conducteurs. — Le problème est plus difficile parce que le système n'est pas isolé; il faut donc lui adjoindre un second système tel que l'on puisse considérer l'ensemble comme isolé et qu'automatiquement les potentiels soient maintenus constants sur tous les corps du premier système pendant leurs déplacements.

Nous connaissons, sous le nom de *piles* (II, § 163), des appareils qu'il suffit de définir pour l'instant par les propriétés suivantes. Ils possèdent deux pôles; relier l'un des pôles au sol, c'est-à-dire à un corps de dimensions énormes et dont nous admettrons le potentiel égal à 0; l'autre pôle est relié avec l'un des corps du système par un long fil métallique établissant une communication lointaine. Nous admettrons que ce corps est automatiquement maintenu à un potentiel V constant, et que chaque fois qu'il reçoit une quantité dm d'électricité, la pile a dû fournir un travail Vdm . Il n'y a là rien qui soit contradictoire avec toutes nos hypothèses précédentes.

Nous avons donc maintenant affaire à un système *isolé*; il se compose du système primitif, d'autant de piles qu'il y a de corps dans ce système et d'un réservoir de capacité énorme dont nous pouvons considérer le potentiel comme constamment nul. Appliquons le principe de la décroissance de l'énergie potentielle à ce système.

Cette énergie se compose de deux parties que nous désignerons par W_c et W_p ; l'indice c se rapporte au système des conducteurs, l'indice p au système des piles.

$$2W_c = \sum MV = \sum C_{ii} V^2 + 2 \sum C_{ij} V_i V_j.$$

Les C sont déterminés quand on se donne les variables a, b, c, \dots qui fixent la position du système. On connaît donc les variations de l'énergie potentielle à potentiels constants, en déterminant les dC en fonction des da, db, dc, \dots . En particulier pour la variable b :

$$\frac{\partial W_c}{\partial b} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial C_{ii}}{\partial b} V_i^2 + \sum \frac{\partial C_{ij}}{\partial b} V_i V_j.$$

Nous ne pouvons plus poser comme précédemment :

$$B = - \frac{\partial W_c}{\partial b},$$

puisque le système c n'est pas isolé. Nous avons maintenant à cal-

$$\text{culer :} \quad B = - \frac{\partial (W_c + W_p)}{\partial b}.$$

Or :

$$W_c = \frac{1}{2} \sum MV, \quad dW_c = \frac{1}{2} \sum MdV + \frac{1}{2} \sum VdM = \frac{1}{2} \sum VdM,$$

puisque par hypothèse les dV sont nuls. D'après notre hypothèse sur les piles, quand les quantités dM sont communiquées aux corps isolés, le système des piles travaille et son énergie potentielle W_p diminue. On a *par hypothèse* :

$$dW_p = - \sum VdM.$$

La variation totale d'énergie potentielle est :

$$dW_c + dW_p = - \frac{1}{2} \sum VdM = - dW_c.$$

Il vient en définitive :

$$B = - \frac{\partial (W_c + W_p)}{\partial b} = \frac{\partial W_c}{\partial b} = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial C_{ii}}{\partial b} V_i^2 + \sum \frac{\partial C_{ij}}{\partial b} V_i V_j.$$

Ainsi les déplacements se font maintenant de manière que l'énergie du système de conducteurs croisse; cela n'empêche pas l'énergie potentielle du système total isolé de décroître, conformément au principe général.

99. Application aux condensateurs. — Très sensiblement on a :

$$M_1 = C(V_1 - V_2), \quad M_2 = -C(V_1 - V_2); \quad 2W = C(V_1 - V_2)^2.$$

La force A suivant une variable quelconque a est à potentiels constants :

$$A = \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial a} (V_1 - V_2)^2.$$

Le déplacement tend à se faire de manière que la capacité augmente.

CONDENSATEUR PLAN. — Supposons un condensateur plan de sur-

face S dont les deux armatures parallèles sont à une distance d . Cherchons la force pour un déplacement, normal aux armatures, qui fait varier seulement leur distance :

$$C = \frac{S}{4\pi d}, \quad \frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{S}{4\pi d^2}.$$

La force tend à rapprocher les armatures ; sa valeur absolue est :

$$\frac{S}{8\pi d^2} (V_1 - V_2)^2.$$

En appliquant cette formule, on peut calculer la différence des potentiels $V_1 - V_2$, quand on connaît la force d'attraction des plateaux de l'électromètre absolu de L. Kelvin (§ 100).

Supposons que les armatures puissent glisser parallèlement l'une à l'autre, leur distance restant constante. On peut admettre que la capacité varie proportionnellement au déplacement x . La force qui produit ce glissement est :

$$\frac{1}{8\pi d} \frac{\partial S}{\partial x} (V_1 - V_2)^2.$$

Elle tend à augmenter la capacité, et par conséquent à amener les lames exactement en regard l'une de l'autre. Les longueurs sont exprimées en centimètres. Les charges sont exprimées avec l'unité dite *électrostatique* dont voici la définition : deux charges unités placées à l'unité de distance s'attirent avec une force d'une dyne. Dans ces conditions, les formules précédentes donnent les forces en dynes.

Par la suite, nous préférons exprimer les potentiels en unités pratiques électromagnétiques, c'est-à-dire en volts ; nous aurons à chercher le rapport de ces deux unités. Voici le résultat.

L'unité électrostatique de potentiel (potentiel à 1° d'une masse unité) vaut 300 unités pratiques électromagnétiques, soit $3 \cdot 10^2$ volts. Donc le nombre qui exprime une différence de potentiel en volts est $3 \cdot 10^2$ fois plus grand que le nombre qui exprime la même différence de potentiel en unités CGS électrostatiques. Pour que les formules exprimées en centimètres et volts donnent des dynes, il faut donc diviser par $9 \cdot 10^4$.

On a donc *en volts et en dynes* pour le condensateur plan, les armatures restant parallèles et se déplaçant normalement à leurs plans :

$$\frac{1}{9 \cdot 10^4} \frac{S}{8\pi d^2} (V_1 - V_2)^2;$$

pour le condensateur plan, les armatures se déplaçant parallèlement à leurs plans :

$$\frac{1}{9 \cdot 10^4} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{1}{8\pi d} (V_1 - V_2)^2.$$

100. Electromètre de Lord Kelvin. — Lord Kelvin a réalisé une disposition très ingénieuse à laquelle s'applique rigoureusement

la formule trouvée ci-dessus pour l'attraction entre les armatures d'un condensateur se déplaçant normalement à leurs plans.

La grande difficulté est la suivante : nous supposons dans la théorie que les lignes de force sont normales aux armatures ; or ce n'est vrai qu'à une distance des bords des armatures d'autant plus grande qu'elles sont plus éloignées l'une de l'autre.

Pour que la théorie s'applique, il faut donc que les corps formant les armatures des condensateurs soient très rapprochés par rapport à l'étendue des surfaces S en présence, étendue à laquelle les possibilités mécaniques imposent une valeur relativement petite.

Il y aurait donc la plus grande difficulté pratique à mesurer exactement la distance d des armatures.

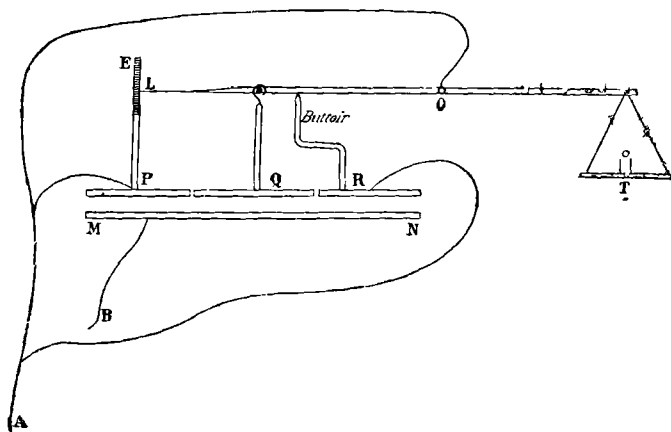


Fig. 44.

Lord Kelvin a tourné la difficulté d'une manière fort ingénieuse (fig. 44).

Soit MN l'un des plateaux du condensateur, PQR l'autre plateau : PR est un anneau, dit *anneau de garde*, qui entoure le disque mobile Q en laissant entre lui et ce disque un intervalle d'une fraction de millimètre. Le disque Q est suspendu au fléau d'une balance, et l'on sait qu'il est dans le même plan que PR, lorsque la pointe L, fixée au fléau, est en face d'une certaine division de l'échelle E.

Soit à mesurer la différence de potentiel entre deux corps A et B.

Le plateau MN communique métalliquement avec le corps B ; l'anneau et le disque mobile celui-ci par l'intermédiaire du fléau) communiquent avec le corps A. Sur le pourtour extérieur de l'anneau, la formule établie ne s'applique plus : elle s'applique au contraire au disque Q d'autant mieux que celui-ci est plus petit par rapport à l'anneau de garde.

En somme, les conditions d'application de la formule se trouvent réalisées : cependant les dimensions du plateau mobile Q sont assez restreintes pour que le réglage de l'appareil reste possible, la distance d demeurant assez grande pour être déterminée avec une approximation suffisante.

L'expérience consiste à mesurer la force nécessaire pour maintenir le disque Q dans le plan de l'anneau de garde, c'est-à-dire pour équilibrer l'attraction.

Il se présente toutefois une difficulté. Supposons que les poids placés sur le plateau T soient insuffisants ; Q se déplace vers le bas. Mais à mesure qu'il se rapproche de MN, l'attraction augmente. Le mouvement ne cessera que lorsque Q s'appliquera sur MN.

En un mot, la position d'équilibre de Q est instable.

Pour rendre possible la mesure, sans risquer un court circuit, on dispose un buttoir *isolant*, tel que l'indique la figure. Quand le fléau bute, Q est dans le plan PR. L'expérience consiste alors à déterminer les charges p et p' à placer dans le plateau de la balance, pour séparer le fléau de son buttoir :

1° p est la charge nécessaire quand on relie métalliquement et directement les deux plateaux : $V_1 = V_2$; l'attraction électrique est nulle.

2° p' est la charge nécessaire quand $V_1 \geq V_2$:

$p' - p$ mesure l'attraction pour la distance d des plateaux.

Reste à mesurer cette distance. Le plateau MN est monté sur une vis verticale à tête divisée. On l'amène exactement au contact du plan PQR, puis on l'écarte en tournant la vis ; on détermine alors l'écartement en comptant le nombre n de tours de vis. Soit a le pas de la vis, na est la distance d .

Cet appareil est relativement peu sensible ; il ne sert que pour des différences de potentiel de plusieurs milliers de volts.

101. Electromètres à quadrants. —

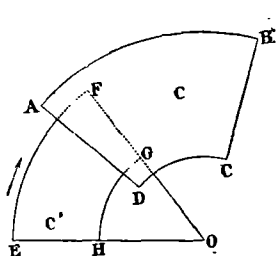


Fig. 45.

On ne peut réaliser commodément un accroissement de surface des armatures à l'aide d'un mouvement de translation ; on le réalise au contraire aisément à l'aide d'une rotation. D'où les électromètres à quadrants.

Appelons C et C' les deux armatures du condensateur.

Le corps C (fig. 45) est formé d'une plaque horizontale ABCD limitée par deux arcs de circonférence, AB, CD, de centre O, et par deux rayons DA, CB. Le corps C' (*aiguille*) est une plaque horizontale EFGH de forme analogue ; elle peut tourner autour de l'axe vertical O auquel elle est reliée par des fils rigides OG et OII.

Quand elle tourne dans le sens de la flèche, la capacité du système augmente : donc le couple qui s'exerce tend à produire une rotation dans ce sens. Si θ est la rotation *en radians*, le couple F (évalué en ergs) est donné par la formule (dynes et volts) :

$$F = \frac{1}{9 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{8\pi d} \frac{dS}{d\theta} (V_1 - V_2)^2.$$

Si S varie proportionnellement à θ , ce qui est le cas, ΔS est la variation de surface en centimètres carrés pour $\Delta\theta = 1$, c'est-à-dire pour une rotation voisine de 57° . Puisque $\Delta S : \Delta\theta$ est constant, le couple est constant et indépendant de la rotation déjà éprouvée par la plaque mobile, pourvu que les bords des plaques restent à une distance suffisamment grande l'un de l'autre. Cette distance doit être égale à plusieurs fois la distance des plaques.

On équilibre le couple par la torsion d'un fil qui sert d'axe. Les deux armatures étant d'abord au même potentiel, c'est-à-dire directement reliées, on détermine la position d'équilibre de la plaque mobile. On relie ensuite les armatures à deux points dont les potentiels sont V_1 et V_2 . Il se produit une torsion proportionnelle à $(V_1 - V_2)^2$, *puisque le couple électrique reste le même après une torsion quelconque.*

On étalonne l'appareil avec une différence de potentiel connue.

On peut augmenter la sensibilité de cet appareil par un perfectionnement très simple. On forme le corps C avec deux plaques identiques et parallèles entre lesquelles tourne le corps C' : au lieu d'un condensateur, on en a deux ; l'aire S est doublée. On peut encore disposer, les unes au-dessous des autres, toute une série de plaques identiques et métalliquement reliées : elles forment des cellules superposées en nombre n : c'est le corps C . Le corps C' est aussi formé de plaques parallèles, reliées au même axe O et tournant dans les intervalles laissés par les premières. On obtient ainsi *l'électromètre multicellulaire*. La sensibilité est $2n$ fois plus grande que celle de l'appareil primitif.

AUTRE DISPOSITIF. CONDENSATEUR CYLINDRIQUE. — Soit deux cylindres (fig. 46) métalliques C et C' de rayons r et r' peu différents et portés à des potentiels V_1 et V_2 . Ils tendent à rentrer l'un dans l'autre avec une force qui est proportionnelle à $(V_1 - V_2)^2$ et en raison inverse de $r - r'$. On pèse l'attraction à l'aide d'une balance.

Calculons le quotient $\frac{\partial S}{\partial x}$ du § 99 : c'est la variation de surface utile pour un déplacement de 1 centimètre ; c'est donc environ $\pi(r + r')$. La formule devient :

$$F = \frac{1}{9 \cdot 10^4} \frac{r + r'}{8(r - r')} (V_1 - V_2)^2.$$

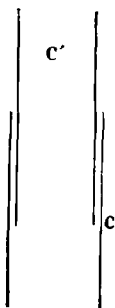


Fig. 46.

Si on connaît les dimensions des cylindres, l'appareil permet de déterminer en valeur absolue la différence $V_1 - V_2$. Ici encore la valeur de la force est indépendante du déplacement, pourvu que la distance des bords des cylindres soit assez grande par rapport à $r - r'$.

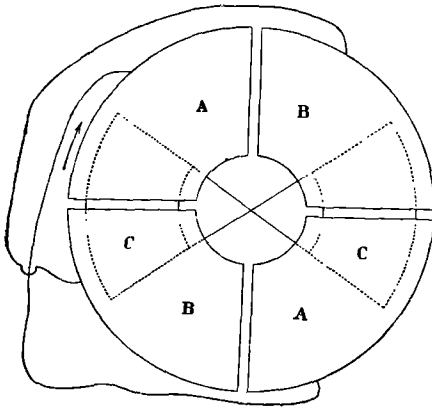


Fig. 47.

102. Électromètre donnant des indications proportionnelles à la différence des potentiels. Électromètre à feuilles d'or de Hankel.

— Associations fig. 47) quatre appareils semblables à celui de la figure 45. Quand l'aiguille tourne autour de son axe, la capacité des deux condensateurs marqués A et C augmente : la capacité des deux condensateurs marqués B et C diminue d'une quantité égale. Comme tout est symétrique, le couple qui agit sur la partie mobile est proportionnel à :

$$(A - C)^2 - (B - C)^2 = (A - B)[A + B - 2C].$$

Si cette expression est positive, l'aiguille tend à tourner dans le sens de la flèche. Elle tend à tourner en sens inverse, si cette expression est négative.

CAS PARTICULIER. — Supposons (nous verrons plus loin comment réaliser cette condition) que les potentiels A et B satisfassent à la condition : $A + B = 0$.

Le couple est proportionnel à $-AC$. L'aiguille tend à aller vers les quadrants dont le potentiel est de signe contraire au sien : si $A > 0$ et $C > 0$, elle tourne en sens inverse de la flèche.

L'aiguille est suspendue par un fil métallique fin dont la torsion fait naître un couple qui équilibre le couple électrique : ce fil sert aussi à établir une communication métallique entre l'aiguille et le corps dont on veut évaluer le potentiel C.

Plus généralement soit :

$$A = T + E, \quad B = T - E, \quad C = T + C,$$

T étant un potentiel quelconque que nous supposons fixe. On a :

$$A + B = 2T, \quad A - B = 2E;$$

le couple est donc proportionnel à :

$$E(T - C) = -EC'.$$

On réalise généralement la condition : $A + B = 0$, en chargeant les quadrants A et B de l'électromètre avec une pile dont le milieu est au sol. On suppose implicitement que le potentiel T du sol est rigoureusement nul. Les formules précédentes montrent comment intervient ce potentiel. Quand T n'est pas nul, on mesure effectivement la différence C' entre le potentiel C de l'aiguille et le potentiel T du sol.

ÉLECTROMÈTRE A FEUILLES D'OR DE HANKEL. — Une feuille d'or C est suspendue entre deux plateaux A et B, avec lesquels elle forme deux condensateurs. La force qui agit sur elle est proportionnelle à :

$$(A - B)[A + B - 2C],$$

où A, B, C, sont les potentiels des corps A, B, C.

On charge les plateaux à l'aide d'une pile dont le milieu est au sol; on réalise ainsi la condition : $A + B = 0$. Les déviations de la feuille sont alors proportionnelles à son potentiel (ou, plus exactement, à la différence entre son potentiel et celui du sol, si celui-ci ne peut être considéré comme nul). On observe les déviations à l'aide d'un microscope. L'appareil est

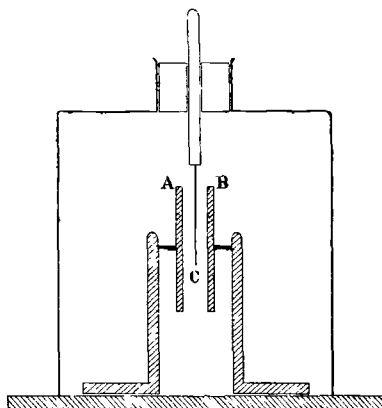


Fig. 48.

surtout employé comme électroscope; il peut être rendu sensible au millième de volt. On modifie sa sensibilité en rapprochant les plateaux de la feuille d'or : comme première approximation, elle est en raison inverse du carré de leur distance (§ 99).

On peut comparer l'électromètre de Hankel à un double électromètre de Lord Kelvin.

On peut réaliser de même un double électromètre cylindrique (fig. 49).

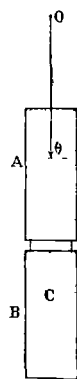


Fig. 49.

103. Théorie générale des électromètres (Gouy). — Nous faisons implicitement dans les paragraphes précédents des hypothèses simplificatrices qui laissent de côté des phénomènes importants. Reprenons la théorie en tenant compte de l'action des bords des conducteurs en présence.

Prenons pour type l'électromètre cylindrique double et symétrique (fig. 49) : tout ce que nous dirons s'applique aux autres.

Les équations générales reliant les charges aux potentiels sont :

$M_A = aA + \gamma B + \beta C$, $M_B = \gamma A + bB + \alpha C$, $M_C = \beta A + \alpha B + cC$,
 en désignant par a , b , c , α , β , γ , les capacités. Ces quantités sont
 fonction de la position du corps C déterminée par la distance θ à un
 point O, d'un point invariablement lié à C. Pour $\theta = 0$, le tube C
 est symétriquement placé par rapport aux tubes A et B.

Nous pouvons poser :

$$\begin{aligned} a &= a_0 - a_1\theta + a_2\theta^2, & \alpha &= \alpha_0 - \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2, \\ b &= b_0 + a_1\theta + a_2\theta^2, & \beta &= \beta_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2, \\ c &= c_0 + c_2\theta^2, & \gamma &= \gamma_0 + \gamma_2\theta^2. \end{aligned}$$

Voici les raisons de symétrie qui permettent de réduire le nombre
 des paramètres *distincts* dans l'expression des capacités.

Quand le tube C se déplace, la longueur contenue dans le tube B
 augmente *précisément* de la quantité dont diminue la longueur con-
 tenue dans le tube A. Or les capacités a et β (ou b et α) du système
 formé par A et C (ou par B et C) varient proportionnellement à la
 longueur du tube C, qui se trouve dans A (ou dans B). Donc, les
 capacités a et b , α et β , varient proportionnellement au déplacement
de la même manière : d'où le même coefficient a_1 dans a et b ,
 α_1 dans α et β .

Le terme en θ^2 ne peut provenir que de l'action des bouts du
 tube C sur les bouts des tubes A et B : or, quel que soit le sens du
 mouvement, il y a toujours rapprochement d'un bout du tube C de
 l'une ou l'autre des extrémités de chacun des tubes ; l'accroissement
 est indépendant du sens du mouvement, d'où le terme en θ^2 . Il
 ne doit exister que deux coefficients distincts a_2 et α_2 , pourvu que le
 tube C soit d'abord symétriquement placé par rapport à A et B, con-
 dition que nous supposons réalisée.

La capacité c du tube C ne contient pas de terme en θ . En effet,
 pour définir cette capacité, il faut poser : $A = B = 0$. Il est évident
 que, dans ces conditions, la variation de la charge M_c , quand on
 déplace le tube, à potentiel C constant, à partir de la position
 moyenne, ne dépend pas du sens du déplacement ; donc : $c_1 = 0$.

Une raison de symétrie analogue conduit à poser : $\gamma_1 = 0$.

104. Expression générale des forces. — L'énergie poten-
 tielle W et la force F qui résulte des actions électriques ont pour
 expressions (§ 98) :

$$2W = aA^2 + bB^2 + cC^2 + 2(\alpha BC + \beta CA + \gamma AB);$$

$$F = \frac{dW}{d\theta} = F_1 + F_2 :$$

$$F_1 = \frac{1}{2} (A - B) [2\alpha_1 C - a_1 (A + B)],$$

$$F_2 = \theta [a_2 (A^2 + B^2) + c_2 C^2 + 2\alpha_2 C (A + B) + 2\gamma_2 AB].$$

I. F_1 tend à écarter le cylindre de sa position d'équilibre : elle est indépendante de la position actuelle. C'est la seule force que nous considérons dans les paragraphes précédents. Si le corps C est suffisamment protégé contre les actions extérieures, si les corps A et B sont suffisamment rapprochés, on a évidemment : $\alpha_1 = a_1$; d'où la formule précédemment employée :

$$F_1 = \frac{a_1}{2} [(C - B)^2 - (C - A)^2].$$

II. F_2 est appelée la *force électrique directrice*. On peut en simplifier l'expression en admettant la symétrie parfaite de l'appareil.

1° Chargeons C et mettons A et B à la terre : $F_2 = \theta c_2 C^2$. Or F_2 est nulle, si les tubes A et B sont suffisamment rapprochés et bien identiques. Donc : $c_2 = 0$.

2° Faisons : $A = B$, $C = 0$. La force est encore nulle; donc : $a_2 = -\gamma_2$.

3° Il en est de même si : $A = B = C$; donc : $\alpha_2 = 0$. Il reste :

$$F_1 = \frac{a_1}{2} [(C - B)^2 - (C - A)^2], \quad F_2 = a_2 \theta (A - B)^2.$$

Outre la force F_1 indépendante de la position du corps C, il existe, comme seconde approximation et pour un appareil symétrique, une force F_2 proportionnelle : 1° à la distance du corps mobile C à la position symétrique; 2° au carré de la différence des potentiels des corps A et B.

Rien ne fixe encore le signe de a_2 , c'est à l'expérience d'intervenir.

Soit $F = \Gamma \theta$ la force mécanique quelconque qui maintient C dans la position initiale. Posons : $F_2 = \Gamma_2 \theta$.

Pour l'équilibre nous avons :

$$\Gamma \theta = F_1 + \Gamma_2 \theta, \quad \theta = \frac{F_1}{\Gamma - \Gamma_2}.$$

105. **Expériences avec la charge symétrique**, $A + B = 0$. — Fixons d'abord le signe de a_2 . Relions l'aiguille à la terre ($C = 0$) et les quadrants aux pôles d'une pile de force électromotrice E dont le milieu est au sol. L'expérience montre que la durée d'oscillation de l'aiguille décroît, quand on augmente le nombre d'éléments. Le couple sous l'influence duquel elle oscille est $(\Gamma - a_2 E^2) \theta$. Donc $a_2 < 0$: *le couple directeur électrique tend à ramener l'aiguille à une position symétrique par rapport aux quadrants.*

Conformément à la théorie, pour de petites amplitudes les oscillations sont isochrones. Posons : $a'_2 = -a_2$, et cherchons quelle est la déviation θ dans le cas d'une charge symétrique :

$$F_1 = a_1 C E, \quad F_2 = -a'_2 E^2 \theta, \quad \theta = \frac{a_1 C E}{\Gamma + a'_2 E^2}.$$

Donc la *sensibilité de l'électromètre croît proportionnellement à E*

pour de très petites valeurs de E , passe par un maximum, puis décroît rapidement vers 0 quand E prend de très grandes valeurs.

En particulier si $\Gamma = 0$, si le couple de suspension est nul, $\theta = \frac{a_2 C}{a_1 E}$; la sensibilité est indépendante du couple de suspension quand celui-ci est petit; elle est *en raison inverse* du nombre d'éléments de la pile de charge.

N. B. — Il peut arriver que l'appareil ne soit pas symétrique. Nous ne pouvons plus faire de simplifications dans l'expression des capacités. Il résulte de cette dissymétrie des phénomènes aussi faciles à prévoir qu'à vérifier; nous n'insisterons pas.

106. Électromètres à balles ou à feuilles d'or.

LEMME. — Considérons un corps isolé dans l'espace. Il résulte du § 40 qu'une portion quelconque du corps tend à se déplacer suivant une variable quelconque, sous l'influence d'une force proportionnelle au carré du potentiel.

En effet, sur chaque élément de surface agit une traction normale, dirigée vers l'extérieur et égale à $2\pi\sigma^2$. Or la densité σ , variable d'un point à l'autre, reste proportionnelle au potentiel; on peut écrire : $\sigma = \sigma_0 V$, où σ_0 est la densité pour le potentiel unité. La force agissant sur un élément fini quelconque, et tendant à le déplacer suivant une certaine variable, possède une intensité qui dépend de la forme de l'élément et du corps entier, mais qui est sûrement proportionnelle au carré du potentiel.

EXEMPLE. — Les hémisphères d'une sphère de rayon R , chargée d'une quantité M et portée au potentiel $V = M : R$, se repoussent avec une force $V^2 : 8$.

En effet, la pression normale est ici uniforme et égale à :

$$2\pi\sigma^2 = \frac{V^2}{8\pi R^2}.$$

Tout se passe comme si elle agissait sur la surface d'un grand cercle. La force totale est donc :

$$2\pi\sigma^2 \cdot \pi R^2 = V^2 : 8.$$

APPLICATION AUX ÉLECTROMÈTRES A FEUILLES D'OR. — Lorsque les feuilles sont au contact et qu'on les charge au potentiel V , elles tendent, d'après le principe général, à s'écarter avec une force proportionnelle au carré du potentiel. Mais quand elles obéissent à cette force et s'écartent de manière que la pesanteur équilibre la répulsion électrostatique, le système change de forme. Le coefficient de V^2 dans l'expression de la force se modifie : il est clair qu'il diminue.

L'écart des feuilles, qui est sensiblement proportionnel à la force répulsive, est donc proportionnel à V^2 pour de très faibles valeurs; il croît moins vite que V^2 pour de grandes valeurs.

La loi complète des déplacements de la feuille est évidemment représentée par une courbe analogue à celle de la figure 11 du tome II. Les potentiels seraient portés en abscisses, les déplacements en ordonnées. L'asymptote correspond à l'écart maximum des feuilles; elles sont alors évidemment dans le prolongement l'une de l'autre.

Il faut ajouter que les feuilles ne forment pas un système isolé dans l'espace; la cage intervient pour modifier la loi.

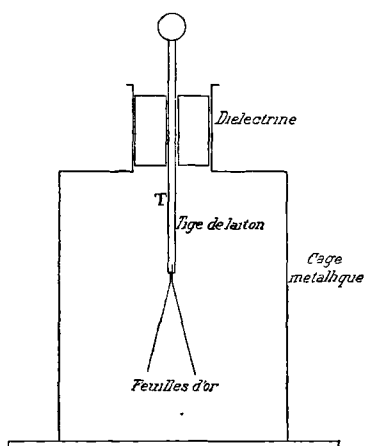


Fig. 50.

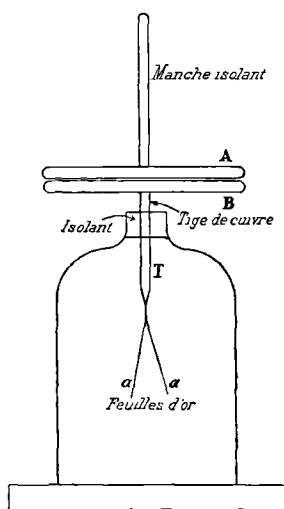


Fig. 51.

Les figures 50 et 51 représentent l'électromètre à feuilles d'or ordinaire et l'électromètre condensateur.

Quelquefois on n'emploie qu'une feuille d'or dont une des extrémités est fixée à plat sur un plan vertical conducteur. La répulsion se fait entre le plan et la feuille; la relation entre son écart et le potentiel obéit aux lois générales énoncées ci-dessus.

CHAPITRE II

DIÉLECTRIQUES

107. Changement de l'isolant : on le suppose homogène et unique dans tout l'espace. — Jusqu'ici l'isolant était l'air ou le vide; remplaçons-le partout par un autre isolant. L'expérience légitime l'hypothèse suivante :

Chaque isolant est caractérisé par une constante K appelée pouvoir inducteur spécifique.

Deux charges qui dans le vide s'attirent avec la force F, s'attirent dans le diélectrique avec une force K fois plus petite, égale par conséquent à $F : K$.

Partant de cette hypothèse, cherchons à écrire les formules générales.

Le potentiel V reste défini comme le travail à dépenser pour amener l'unité d'électricité de l'infini au point où le potentiel est V. La force suivant la direction quelconque n a toujours pour expression :

$$-\frac{\partial V}{\partial n}.$$

La force qui résulte d'une densité σ à la surface d'un conducteur situé dans le diélectrique est K fois plus petite que pour le vide; d'où

l'équation :

$$-\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{4\pi\sigma}{K}.$$

Le flux de force à travers une surface fermée contenant la masse totale Σm d'électricité est maintenant :

$$\frac{1}{K} \Sigma 4\pi m.$$

Évaluons ce flux à travers un parallépipède élémentaire; l'équation de Laplace devient :

$$\Delta V = -\frac{4\pi\rho}{K}, \quad K\Delta V = -4\pi\rho.$$

L'énergie potentielle d'un système de conducteurs est toujours :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma MV,$$

en vertu de la définition même du potentiel V ; le raisonnement (§ 91) qui établit cette formule subsiste en entier. Mais les masses M et les potentiels V ne sont plus reliés par les mêmes équations.

L'équation :

$$M_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + \dots + C_{1p} V_p,$$

et les $p - 1$ équations analogues sont remplacées par :

$$\frac{M_1}{K} = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + \dots + C_{1p} V_p,$$

$$\frac{M_p}{K} = C_{p1} V_1 + C_{p2} V_2 + \dots + C_{pp} V_p.$$

En effet, les forces devenant K fois plus petites, le travail pour amener l'électricité sur les corps est diminué dans le même rapport. Pour les mêmes masses M_1, M_2, \dots nous devons avoir des potentiels K fois plus petits. Il revient au même de dire qu'en remplaçant l'air par un diélectrique de pouvoir K , on multiplie par K tous les coefficients C . L'énergie W en fonction des potentiels devient :

$$W = \frac{K}{2} \sum C_{ii} V_i^2 + K \sum C_{ij} V_i V_j.$$

Donc les déplacements à potentiels constants se font maintenant sous l'influence de forces K fois plus grandes.

Le même raisonnement montrerait que les coefficients a des formules du § 90, sont tous divisés par K . L'énergie W en fonction des charges devient : ▸

$$W = \frac{1}{2K} \sum a_{ii} M_i^2 + \frac{1}{K} \sum a_{ij} M_i M_j.$$

Donc les déplacements à charges constantes se font maintenant sous l'influence de forces K fois plus petites.

Il faut bien comprendre ce que ces résultats veulent dire.

Prenons un électromètre et chargeons les armatures avec *des charges constantes*; déterminons les forces, puis plongeons l'appareil dans du pétrole; les charges restant les mêmes, les forces sont diminuées dans le rapport de K à 1.

Reprenons le même électromètre et maintenons ses armatures à des potentiels constants.

Quand nous introduisons du pétrole, les mêmes quantités d'électricité n'agissent plus qu'avec des forces K fois plus petites.

Mais pour maintenir les mêmes potentiels, il faut que les quantités d'électricité deviennent K fois plus grandes; or les forces sont proportionnelles à leur carré. Par conséquent les forces deviennent d'une part K^2 fois plus grandes, de l'autre K fois plus petites : en définitive, elles deviennent K fois plus grandes par l'introduction du diélectrique. L'expérience est possible et permet de déterminer K .

Le problème général de l'Électrostatique est donc résolu dans le cas d'un diélectrique quelconque, *pourvu qu'il reste unique.*

108. Hypothèses fondamentales dans le cas de plusieurs diélectriques séparément homogènes. — La loi de Coulomb ne subsiste plus; la loi plus générale qu'on doit lui substituer est assujettie à donner des forces centrales et en raison inverse du carré de la distance dans le diélectrique unique.

1° On obtient *l'équation indéfinie* en généralisant l'équation de Laplace (§ 30). Dans chacun des diélectriques nous poserons qu'on a encore :

$$K\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

2° On obtient *l'équation de passage* d'un milieu 1 à un milieu 2 en généralisant l'équation du § 37.

$$K_1 \frac{\partial V}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0;$$

n_1 et n_2 sont des variables comptées sur la normale à la surface de contact, n_1 dans la direction du milieu 1, n_2 dans la direction du milieu 2; σ est la densité de la couche répandue sur la surface de séparation.

3° Il y a encore par hypothèse continuité pour les composantes tangentielles de la force à la traversée de la surface de séparation. En d'autres termes, les composantes tangentielles en deux points très voisins, situés de part et d'autre de cette surface, sont égales.

109. Polarisation du diélectrique. — Il suffit de se reporter au § 62 pour constater que les équations du paragraphe précédent sont celles mêmes qu'on déduit de l'hypothèse d'une polarisation. On peut donc prendre ces équations directement comme base de la théorie des diélectriques; mais, après la démonstration expérimentale qu'elles renferment les phénomènes, il est légitime d'aller plus loin et de leur donner pour raison d'être une polarisation réelle.

Quoi qu'il en soit, *du point de vue mathématique*, l'hypothèse de la polarisation diélectrique est exactement équivalente aux équations. Sans préjuger de la réalité d'une polarisation, il nous est donc toujours permis de calculer les phénomènes comme si elle était réelle.

110. Remplissage par un diélectrique K de l'espace compris entre deux surfaces équipotentiels d'un système en équilibre dans l'air. — Quand on remplit d'un diélectrique K l'espace compris entre deux surfaces équipotentiels, les surfaces ne sont pas déformées, leur numérotage seul est modifié. En effet, les surfaces équipotentiels peuvent être définies comme normales aux lignes de force; si les lignes de force conservent leur forme, il en est de même

des surfaces équipotentielles. Or, quand on remplit d'un diélectrique l'espace compris entre deux surfaces équipotentielles, la force qui était normale à la surface équipotentielle est maintenant normale à la surface de séparation. Elle ne change donc pas de direction. Mais elle change brusquement de grandeur suivant l'équation :

$$F_1K_1 + F_2K_2 = 0,$$

obtenue en posant $\sigma = 0$ dans la seconde équation de condition du § 108.

Montrons qu'il en résulte un changement dans le numérotage des surfaces équipotentielles.

Soit deux corps conducteurs 1 et 2 placés dans l'air et dont les potentiels sont V_1 et V_2 . Traçons entre eux $n - 1$ surfaces équipotentielles telles que les potentiels varient de l'une à la suivante de la même quantité δV . Elles forment n intervalles avec les surfaces des conducteurs, on a évidemment :

$$n\delta V = V_1 - V_2.$$

Remplissons exactement m de ces intervalles avec le diélectrique K ; la variation de potentiel quand on passe d'une surface à la suivante est :

$$\text{dans l'air : } \delta'V,$$

$$\text{dans le milieu : } \delta'V : K,$$

puisque, toutes choses égales d'ailleurs, la force est K fois plus petite dans ce milieu. On a :

$$(n - m)\delta'V + m \frac{\delta'V}{K} = n\delta V = V_1 - V_2;$$

$$\frac{\delta'V}{\delta V} = 1 - \frac{m}{n} \left(1 - \frac{1}{K}\right).$$

Dans tous les milieux K est plus grand que l'unité; on a donc :

$$\delta'V > \delta V.$$

Pour la même différence de potentiel $V_1 - V_2$, la force a donc augmenté dans les intervalles non remplis de diélectrique.

Il est généralement faux de dire que tout se passe comme si l'on rapprochait les conducteurs; car le rapprochement peut changer la forme des surfaces équipotentielles qui doit rester invariable pour que le raisonnement subsiste.

L'effet produit par le remplissage de m intervalles est le même, où que soient pris ces intervalles. En particulier, ils peuvent être consécutifs ou séparés les uns des autres.

111. Application à un condensateur plan. — Soit d la distance des armatures; introduisons parallèlement à elles une plaque

planparallèle du diélectrique K . Si les armatures sont suffisamment étendues, on peut considérer les surfaces équipotentielles comme des plans indéfinis : la variation de potentiel quand on passe de l'une à l'autre, est proportionnelle à leur distance. L'introduction de la plaque de diélectrique revient, conformément à l'énoncé de la question que nous traitons, à remplir l'intervalle entre deux surfaces équipotentielles.

Il est évident que le nombre n des intervalles est proportionnel à la distance d des armatures, le nombre m est proportionnel à l'épaisseur E avec le même coefficient de proportionnalité. On a donc :

$$\frac{\Delta V}{\Delta' V} = 1 - \frac{E}{d} \left(1 - \frac{1}{K}\right).$$

Comme les surfaces équipotentielles sont des plans et qu'on ne change pas leur forme en rapprochant les armatures, on peut dire que tout se passe comme si la distance d des armatures était devenue $d - E \left(1 - \frac{1}{K}\right)$, ou comme si les armatures s'étaient rapprochées de $E \left(1 - \frac{1}{K}\right)$.

D'après le principe général que la densité σ est égale à $\frac{1}{4\pi}$ fois la force, pour la même différence de potentiel $V_1 - V_2$, les charges égales et de signes contraires des armatures deviennent plus grandes dans le rapport $1 : 1 - \frac{E}{d} \left(1 - \frac{1}{K}\right)$. La capacité du condensateur croît dans le même rapport.

Les méthodes les plus précises de comparaison des pouvoirs diélectriques sont basées sur la proposition qui vient d'être démontrée.

112. Expression de l'énergie potentielle d'un système plongé dans l'air ou dans des diélectriques en nombre quelconque. — Considérons un tube de force reliant deux conducteurs 1 et 2 dont les potentiels sont V_1 et V_2 . Soit $\pm m$ les masses égales et de signes contraires que portent les éléments correspondants. Traçons les surfaces équipotentielles intermédiaires ; le tube découpe sur ces surfaces des aires s . Pour repérer la surface considérée, prenons comme variable la longueur n comptée sur une ligne de force ; sa valeur est n_1 au point A et n_2 au point B. En un point C quelconque la force est : $-\frac{\partial V}{\partial n}$; l'aire de la section du tube est s ; ce sont des fonctions de n . Appliquons le théorème des flux ; nous avons pour une section s quelconque : $m = -\frac{s}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n}$, puisque le flux se conserve.

Ceci posé, les masses $\pm m$ interviennent dans l'expression de l'énergie pour la quantité :

$$\frac{m}{2} (V_1 - V_2) = -\frac{m}{2} \int_{n_1}^{n_2} \frac{\partial V}{\partial n} dn = -\int_{n_1}^{n_2} \frac{m}{2} \frac{\partial V}{\partial n} dn,$$

puisque m est constant.

Remplaçons m par sa valeur : les masses $\pm m$ interviennent dans l'énergie pour la quantité :

$$\frac{1}{8\pi} \int_{n_1}^{n_2} s \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 dn.$$

Or $s dn$ est l'élément de volume du tube entre les sections n et $n + dn$; $-\frac{\partial V}{\partial n}$ est la force totale F en un point de cet élément de volume. Donc le tube intervient dans l'énergie pour la quantité :

$$\frac{1}{8\pi} \iiint F^2 dv;$$

l'intégrale est étendue au volume entier du tube. Il est clair que la même expression s'applique à l'ensemble des tubes de force et par conséquent à l'espace tout entier.

La généralisation à un milieu contenant plusieurs diélectriques est immédiate. L'expression de l'énergie est encore la même : $\frac{m}{2} (V_1 - V_2)$; mais m doit être remplacé par : $-\frac{sK}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n}$. L'expression de l'énergie

devient :

$$W = \frac{K}{8\pi} \iiint F^2 dv.$$

Chaque diélectrique intervient pour tout le volume qu'il occupe.

Ces expressions sont fort remarquables ; elles permettent de localiser l'énergie, non plus sur les corps conducteurs et généralement là où se trouvent les électricités libres, mais dans le milieu isolant qui les sépare. Elles modifient complètement l'importance du rôle à attribuer aux isolants.

L'énergie potentielle W ne peut être que positive, puisque les éléments de l'intégrale sont tous positifs.

113. Sphère diélectrique dans un champ uniforme. — Soit une sphère de rayon R , de pouvoir diélectrique K , placée dans un champ uniforme d'intensité H . Prenons son centre pour origine des coordonnées ; repérons un point de l'espace par sa distance r au centre et par l'angle θ du rayon vecteur avec la direction du champ

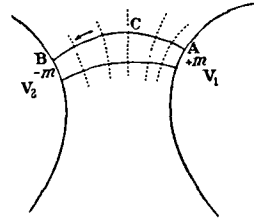


Fig. 52.

qui est évidemment un axe de révolution du phénomène. (fig. 53).

Le potentiel V en tout point extérieur à la sphère :

$$V = R^3 \frac{K-1}{K+2} H \frac{\cos \theta}{r^2} - Hr \cos \theta,$$

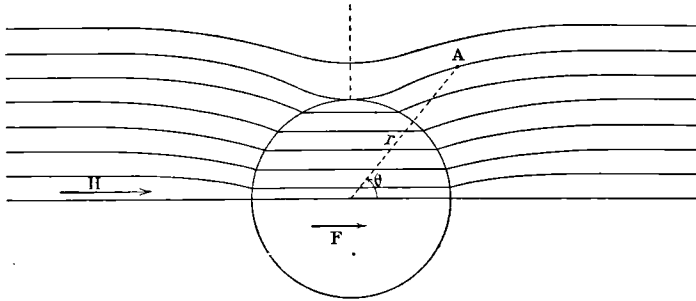


Fig. 53.

et le potentiel V' en tout point intérieur :

$$V' = \frac{-3H}{K+2} r \cos \theta,$$

satisfont aux équations de condition ; soit :

$$\Delta V = 0, \text{ en tout point ;}$$

$$K \frac{\partial V'}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0, \text{ à la surface de la sphère.}$$

Donc il existe à l'intérieur de la sphère diélectrique un champ constant (§ 80) résultant du potentiel V' :

$$F = \frac{3H}{K+2}.$$

Au moyen du potentiel V , nous pouvons calculer les lignes de force à l'extérieur de la sphère. La figure 53 en représente quelques-unes.

114. Sphère uniformément polarisée. — Nous allons reprendre le même problème sous une autre forme en nous appuyant sur le § 51. Cherchons à quelle condition une sphère uniformément polarisée peut être en équilibre dans un champ.

D'après la relation générale entre la densité superficielle σ et l'intensité de polarisation \mathcal{J} supposée uniforme, on a :

$$\sigma = \mathcal{J} \cos \theta.$$

La fig. 24 représente l'épaisseur des couches du fluide de densité de volume constante qui équivaut à cette densité superficielle. Nous

savons (§ 43) qu'une telle distribution crée en tout point à l'intérieur de la sphère un champ constant, dirigé suivant $O'O$ et égal à :

$$\frac{4\pi\sigma_0}{3} = \frac{4\pi\mathcal{J}}{3}.$$

Soit H un champ extérieur uniforme ; pour que la polarisation de la sphère soit en équilibre dans ce champ, il faut que l'intensité \mathcal{J} soit égale à k fois le champ total intérieur, résultant du champ H et du champ dû à la polarisation.

$$\mathcal{J} = k \left(H - \frac{4\pi\mathcal{J}}{3} \right), \quad \mathcal{J} = \frac{3kH}{3 + 4\pi k} = \frac{3}{4\pi} \frac{K-1}{K+2} H,$$

en posant : $1 + 4\pi k = K.$

Le champ à l'intérieur de la sphère a diminué ; il est devenu :

$$F = H - \frac{4\pi\mathcal{J}}{3} = \frac{3H}{K+2}.$$

C'est le résultat trouvé plus haut par une méthode différente.

115. Déplacements d'une sphère diélectrique dans un champ variable. — La considération de la polarisation diélectrique permet de déterminer aisément le sens des mouvements des diélectriques dans un champ.

Nous savons que la sphère polarisée est identique à l'ensemble de deux sphères dont les centres sont à la distance a et dont les densités uniformes de volume ρ' , égales et de signes contraires, satisfont à la condition (§§ 43 et 114) :

$$\rho' a = \mathcal{J} = \frac{3}{4\pi} \frac{K-1}{K+2} H.$$

Les deux sphères ne sont pas au même potentiel moyen. La sphère négative est au potentiel moyen V_1 , la sphère positive est au potentiel moyen :

$$V_2 < V_1;$$

on a :

$$\frac{V_1 - V_2}{a} = H.$$

L'énergie potentielle W est donc, en appelant v le volume de la sphère :

$$W = \frac{1}{2} \rho' v (V_2 - V_1) = - \frac{\rho' a v H}{2} = - \frac{3v}{8\pi} \frac{K-1}{K+2} H^2.$$

Plaçons la sphère supposée petite dans un champ variable. En chaque point tout se passe à peu près comme si le champ était uniforme. Mais la sphère abandonnée à elle-même tend à se déplacer de manière que son énergie potentielle décroisse ; elle tend donc à aller vers les points où le champ est le plus intense. La force X , suivant une direction x , est :

$$X = - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{3v}{8\pi} \frac{K-1}{K+2} \frac{\partial(H^2)}{\partial x}.$$

En particulier si K est très voisin de l'unité, la formule devient :

$$X = \frac{vk}{2} \frac{\partial(H^2)}{\partial x},$$

où k est la *susceptibilité* (§ 60) reliée au pouvoir inducteur par la relation :

$$K = 1 + 4\pi k.$$

Dans un champ parfaitement uniforme la force est nulle.

Tout ce qui précède s'applique à de petits corps de forme quelconque qu'on peut toujours assimiler à un assemblage de sphères; en effet les réactions de ces sphères les unes sur les autres, outre qu'elles ne sont pas considérables, ne changent rien à l'ensemble des phénomènes. Si les petits corps sont parfaitement libres, ils tendent à se déplacer vers les points où la force est maxima, c'est-à-dire, en définitive, à se coller sur les corps électrisés.

116. Orientation d'une aiguille diélectrique dans un champ variable. — Admettons que l'énergie soit de la forme :

$$W = -vDH^2,$$

où v est le volume de l'élément considéré, D une constante qui dépend du pouvoir diélectrique, H l'intensité du champ au point où se trouve l'élément de volume.

Considérons un petit élément pouvant tourner autour d'un axe; il est assujéti par conséquent à se déplacer dans un plan P . Prenons dans ce plan deux axes rectangulaires Ox et Oy et faisons coïncider l'origine des coordonnées avec la trace de l'axe sur le plan P .

Comme première approximation et d'une manière générale, nous pouvons poser :

$$H^2 = H_0^2 + ax + by, \quad \text{ou même : } H^2 = H_0^2 + ax,$$

en choisissant convenablement la direction des axes. Si r représente la distance de l'élément à l'axe, θ l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x :

$$r \cos \theta = x, \quad H^2 = H_0^2 + ar \cos \theta.$$

Le moment par rapport à l'axe de la force qui fait tourner l'élément a pour expression, à un facteur constant près :

$$\Gamma = -\frac{1}{vD} \frac{\partial W}{\partial \theta} = -ar \sin \theta.$$

Le couple est nul pour $\theta = 0$ (équilibre stable) et pour $\theta = \pi$ (équilibre instable).

Faisons tourner l'aiguille à partir de la position d'équilibre d'un angle petit ε . Il suffit de substituer dans Γ , ε ou $\varepsilon + \pi$ à θ .

On trouve :

$$\begin{array}{ll} \text{au voisinage de } \theta = 0, & \Gamma = -ar\varepsilon; \\ \text{au voisinage de } \theta = \pi, & \Gamma = ar\varepsilon. \end{array}$$

Cela veut dire qu'au voisinage de $\theta = 0$, le couple tend à diminuer l'angle θ , et qu'au voisinage de $\theta = \pi$, il tend au contraire à l'augmenter.

Il résulte de là que si l'aiguille mince et cylindrique est suspendue par son milieu, son équilibre est aussi indifférent que dans un champ uniforme. Car si un point se trouve dans une position $\theta = \theta_0$, un autre se trouvera dans une position $\theta = \theta_0 + \pi$; ils sont respectivement soumis à deux forces dont les moments sont égaux et de signes contraires.

117. Existence d'une position d'équilibre déterminée. — Voici au contraire un cas où il existe une position d'équilibre parfaitement déterminée.

1° Supposons que l'on ait :

$$H^2 = H_0^2 + ax^2 - by^2 = H_0^2 + (a \cos^2 \theta - b \sin^2 \theta)r^2.$$

Ce cas se présente par exemple au point O, à égale distance des deux masses égales et de signes contraires A et B (fig. 26). Quand on parcourt l'axe Ox tracé par A et B, H^2 passe par un minimum en O; quand on parcourt l'axe Oy normal au milieu de AB, H^2 passe par un maximum au même point.

Il est évident que la position d'équilibre de l'aiguille suspendue en O par son milieu, est l'axe des x . Le moment de la force qui agit sur un élément est en effet :

$$\Gamma = - \frac{\partial W}{\partial \theta} ,$$

soit, à un facteur près :

$$- (a + b) r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Les positions d'équilibre stable correspondent à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$; les positions d'équilibre instable correspondent à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Faisons : $\theta = \varepsilon$, $\theta = \pi + \varepsilon$; il vient :

$$\Gamma = - (a + b) \varepsilon r^2.$$

Faisons : $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\theta = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon$; il vient :

$$\Gamma = + (a + b) \varepsilon r^2.$$

L'aiguille se placera donc d'elle-même suivant Ox.

Rétablissons le facteur qui manque et déterminons la durée d'oscillation T. Soit Δ la densité de la matière; $\Delta v r^2$ est le moment d'inertie d'un élément. On a pour cet élément *supposé seul* :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta r^2 v}{2vD(a+b)r^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta}{2D(a+b)}} .$$

Donc T est indépendante du volume de l'aiguille; elle ne dépend que du champ caractérisé par les constantes a et b , de la densité Δ , et du coefficient D qui est fonction du pouvoir inducteur spécifique. On peut, par la mesure de la durée d'oscillation d'aiguilles, comparer les pouvoirs diélectriques de divers corps : il suffit de maintenir le champ électrostatique toujours le même et de connaître les densités de ces corps.

2° Supposons que l'on ait :

$$H^2 = ax^2 + by^2 = (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) r^2,$$

avec la condition $b < a$. Ce cas se présente au point O à égale distance de deux masses égales et de même signe A et B . La position d'équilibre stable est encore Ox . Le moment de la force qui agit sur un élément est encore, à un facteur près :

$$\Gamma = -\frac{1}{2vD} \frac{\partial W}{\partial \theta} = -(a - b) r^2 \sin \theta \cos \theta;$$

c'est la même expression que plus haut, à la valeur près du coefficient.

118. Courant de déplacement de Maxwell. — Puisque nous pouvons regarder l'énergie comme localisée dans l'isolant, il est naturel de supposer que celui-ci se déforme et de considérer l'énergie emmagasinée comme le résultat de la déformation.

Soit P , Q , R , les composantes de la force électrique F ; Maxwell prend pour mesure de la déformation, qu'il appelle *déplacement électrique*, le vecteur :

$$f = \frac{K}{4\pi} P, \quad g = \frac{K}{4\pi} Q, \quad h = \frac{K}{4\pi} R.$$

On peut écrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$\frac{1}{2} \iiint (fP + gQ + hR) dv.$$

Cette définition prend un intérêt considérable par suite d'une seconde hypothèse qui est la partie la plus originale des idées de Maxwell. *Quand la déformation mesurée par le vecteur f , g , h , varie, il en résulte un véritable courant électrique dont l'intensité a pour composantes :*

$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}.$$

On lui donne le nom de *courant de déplacement*.

Un exemple simple montre le rôle de ce courant.

Soit un condensateur plan chargé aux potentiels V_1 et V_2 , dont les armatures A et B ont une aire S et sont à la distance d . Prenons l'axe des x normal aux armatures. Le *déplacement* a pour expres-

sion :

$$f = \frac{K}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{d};$$

il est numériquement égal à la densité σ des couches qui recouvrent les faces opposées des armatures (§§ 96 et 111).

Déchargeons le condensateur en reliant les points E et F. Il circule dans le fil de connexion un courant qui transporte une quantité totale σS . Pendant ce temps le déplacement f devient nul ; il varie donc de la quantité $-f$ qui représente le courant total par unité de surface normale à Ox dans le diélectrique. Le courant total pour la surface S est σS , c'est-à-dire justement ce qui passe simultanément dans le fil. Le signe $-$ indique que le courant de déplacement a lieu dans le sens BA, c'est-à-dire justement dans le sens du courant dans le circuit extérieur.

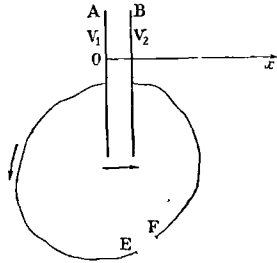


Fig. 54.

Grâce à l'intervention de ce courant de déplacement, le courant électrique devient *conservatif* : il ne s'accumule nulle part.

On doit considérer le condensateur comme chargé, mais aussi le diélectrique comme déformé. A une déformation dans un sens correspond un courant dans le fil de connexion, et dans le diélectrique un courant *de nature spéciale qui complète et ferme le premier*.

Le mouvement complexe qu'on appelle *courant électrique* est donc toujours soumis à la même condition que celui d'un fluide incompressible ; à chaque instant il doit entrer dans un espace fermé quelconque autant de ce courant qu'il en sort.

Nous avons montré au § 26 la nécessité de cette condition.

119. Contradiction entre la théorie de Maxwell et l'idée de polarisation. — Supposons l'existence de particules électriques mobiles pouvant par conséquent se déplacer sous l'influence d'une force électromotrice (§ 59). Le déplacement de ces particules a pour composantes :

$$\begin{aligned} Ne\varphi &= A = kP, \\ Ne\chi &= B = kQ, \\ Ne\psi &= C = kR. \end{aligned}$$

On peut admettre, quand le déplacement varie, qu'il en résulte un véritable courant d'électricité dont les composantes sont :

$$u = \frac{\partial A}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Cela veut dire qu'à travers la surface $dy dz$ passe dans le temps dt une quantité d'électricité : $u dy dz dt$; de même pour les autres composantes.

Le déplacement dû à la polarisation diélectrique est donc propor-

tionnel à la *susceptibilité diélectrique* k et non pas au *pouvoir inducteur spécifique* : $K = 1 + 4\pi k$.

Le courant de déplacement de Maxwell a donc l'inconvénient de ne pouvoir se représenter au moyen de la polarisation diélectrique. Les subtilités au moyen desquelles on a cherché à lever la contradiction, n'ont jamais servi qu'à en affirmer l'évidence. On peut cependant se tirer d'affaire par une généralisation hardie due à Lorentz.

120. Courants de déplacement et de polarisation de Lorentz. — Lorentz considère l'éther comme immobile et répandu même dans les parties de l'espace occupées par la matière. Dans l'éther se produisent les déplacements de la théorie de Maxwell. Ils ont pour expression :

$$f = \frac{P}{4\pi}, \quad g = \frac{Q}{4\pi}, \quad h = \frac{R}{4\pi},$$

puisque nous devons poser : $k = 0$, $K = 1$.

Mais il existe de plus une polarisation du diélectrique dont les composantes A, B, C, ont pour expression :

$$A = kP, \quad B = kQ, \quad C = kR.$$

Le déplacement total est donc :

$$f + A = \left(\frac{1}{4\pi} + k \right) P = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi} P = \frac{K}{4\pi} P,$$

$$g + B = \left(\frac{1}{4\pi} + k \right) Q = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi} Q = \frac{K}{4\pi} Q,$$

$$h + C = \left(\frac{1}{4\pi} + k \right) R = \frac{1 + 4\pi k}{4\pi} R = \frac{K}{4\pi} R.$$

On retrouve exactement les équations de Maxwell dans le cas des corps immobiles. Seulement le déplacement est de deux espèces : l'un est une déformation de l'éther ; l'autre est un déplacement des particules électrisées qui s'éloignent de leurs positions d'équilibre. Les théories de Maxwell et de Lorentz coïncident donc *chaque fois qu'il s'agit de diélectriques immobiles et d'état permanent*.

En chaque point la force électrique est caractérisée par le déplacement dans l'éther f , g , h . A l'état permanent la polarisation diélectrique est liée au déplacement par les équations :

$$A = (K - 1)f, \quad B = (K - 1)g, \quad C = (K - 1)h.$$

Mais, et c'est là que la théorie de Lorentz est plus souple que celle de Maxwell, rien ne dit que ces relations subsisteront dans l'état

variable. S'il existe une inertie pour les particules, on peut poser :

$$A = (K - 1)f - j \frac{\partial^2 A}{\partial t^2},$$

$$B = (K - 1)g - j \frac{\partial^2 B}{\partial t^2},$$

$$C = (K - 1)h - j \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}.$$

Nous en resterons là pour l'instant; nous aurons l'occasion de revenir sur les deux théories, principalement dans la cinquième partie de ce Cours.

Action mécanique entre deux systèmes électrisés comme résultant de la déformation du milieu¹.

121. Rappel des notions fondamentales sur l'équilibre d'un milieu déformé. — Nous avons montré dans la *Mécanique physique* (§§ 121 et suivants) que les *tensions* dans un milieu quelconque sont complètement définies sur tous les plans qui passent par un point, quand on connaît six quantités :

$$N_1, N_2, N_3; \quad T_1, T_2, T_3,$$

fonctions de la position de ce point. Les composantes X, Y, Z, de la *tension* sur un élément dont la normale est définie par les cosinus directeurs m, n, p , sont données par les équations :

$$\begin{aligned} X &= m N_1 + n T_3 + p T_2, \\ Y &= m T_3 + n N_2 + p T_1, \\ Z &= m T_2 + n T_1 + p N_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Soit X_0, Y_0, Z_0 , les forces qui agissent par unité de volume du milieu; on a pour l'équilibre (I, § 124) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + X_0 &= 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + Y_0 &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

¹ Le lecteur peut dans une première lecture passer la fin de ce Chapitre. Nous avons dû cependant traiter la question malgré sa difficulté et son obscurité trop réelles, d'abord parce qu'en Optique on utilise de plus en plus l'un des résultats auxquels nous parviendrons. En second lieu il était essentiel de mettre le lecteur en garde : 1° contre les raisonnements approchés par lesquels on essaie d'étayer ce résultat; 2° contre les conclusions absurdes qu'on a tirées de cette théorie touchant la déformation des diélectriques et des milieux aimantés.

Considérons une surface fermée limitant un volume en tous les points duquel agissent des forces X_0, Y_0, Z_0 ; les résultantes de ces forces sont :

$$\iiint X_0 dx dy dz, \quad \iiint Y_0 dx dy dz, \quad \iiint Z_0 dx dy dz.$$

La condition d'équilibre pour ce volume est :

$$\iiint \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) dx dy dz + \iiint X_0 dx dy dz = 0; \quad (3)$$

de même pour les composantes parallèles à Oy et à Oz .

Nous pouvons faire une des intégrations indiquées pour les trois premiers termes. Soit m, n, p , les cosinus directeurs de la normale à l'élément dS de la surface fermée considérée. Il vient :

$$\iint (mN_1 + nT_3 + pT_2) dS + \iiint X_0 dx dy dz = 0, \quad (4)$$

et deux autres analogues. En vertu des équations (1), elles expriment qu'il y a équilibre entre les forces exercées à la surface du milieu déformé et ce qu'on peut appeler *les forces de volume*. On comparera ce raisonnement à celui du tome I, § 30, en Hydrostatique.

Réciproquement, chaque fois que l'on peut mettre les forces de volume sous la forme (3), il est légitime de dire qu'il existe dans le milieu des tensions. C'est précisément ce qui arrive en Électricité.

122. Expression de la force qui s'exerce entre deux systèmes électrisés. — Soient deux systèmes électrisés 1 et 2; V_1 est le potentiel résultant de la densité ρ_1 existant dans chaque élément du système 1; V_2 est le potentiel résultant de la densité ρ_2 existant dans chaque élément du système 2. On a, en posant $d\omega = dx dy dz$:

$$V_1 = \iiint \rho_1 \frac{d\omega_1}{r}, \quad V_2 = \iiint \rho_2 \frac{d\omega_2}{r}.$$

Dans l'intégration r représente la distance à l'élément $d\omega$ considéré du point pour lequel on calcule le potentiel. Le potentiel total en un point est : $V = V_1 + V_2$.

La composante dX suivant l'axe des x de la force exercée sur la masse $\rho_1 d\omega_1$ par le système 2 est :

$$dX = - \frac{\partial V_2}{\partial x} \rho_1 d\omega_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V_2}{\partial x} \Delta V_1 d\omega_1,$$

en vertu de l'équation de Laplace. De même pour les autres composantes. Les résultantes s'obtiendront par intégration.

Jusqu'ici le raisonnement est inattaquable.

Maxwell admet que l'on peut poser identiquement :

$$4\pi X = \iiint \frac{\partial V_2}{\partial x} \Delta V_1 d\omega_1 = \iiint \frac{\partial V}{\partial x} \Delta V d\omega,$$

c'est-à-dire substituer dans l'intégration le potentiel total V aux potentiels partiels V_1 et V_2 .

Supposons que le système 1 (sur lequel nous voulons calculer l'action du corps 2 tout entier) soit complètement enfermé dans une surface S qui laisse en dehors tout le système 2. Posons :

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad V = V_1 + V_2.$$

A l'intérieur de S :

$$\rho_2 = 0, \quad \rho_1 = \rho; \quad \Delta V_1 = \Delta V.$$

A l'extérieur de S :

$$\rho_2 = \rho, \quad \rho_1 = 0; \quad \Delta V_2 = \Delta V.$$

Il résulte de là que nous pouvons dans l'intégration qui doit être étendue à tout l'intérieur de la surface S , remplacer ΔV_1 par ΔV .

En substituant V à V_2 , nous ajoutons encore l'intégrale :

$$\iiint \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V_1}{\partial x} \Delta V_1 d\omega_1.$$

Maxwell la considère comme nulle en vertu du raisonnement suivant : elle représente, dit-il, l'action de tout le système 1 sur un point de ce système. La résultante de toutes ces forces est nulle, puisque l'action de la molécule P sur la molécule Q est égale et de signe contraire à l'action de Q sur P . Ce raisonnement ne vaut rien. Un raisonnement plus complet prouve que cette intégrale est indéterminée et dépend de la surface d'intégration.

Quoi qu'il en soit, continuons avec Maxwell. Suivant lui l'action totale du système 2 sur le système 1 a pour composantes :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial V}{\partial x} \Delta V d\omega, \\ Y &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial V}{\partial y} \Delta V d\omega, \\ Z &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial V}{\partial z} \Delta V d\omega, \end{aligned} \quad (5)$$

les intégrales étant étendues à tout le volume limité par la surface S qui enveloppe le système 1 ; V est le potentiel dû à toutes les masses intérieures et extérieures à cette surface.

123. Les forces électriques peuvent s'expliquer par des tensions dans le diélectrique. — Posons :

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial V}{\partial x}, & Q &= -\frac{\partial V}{\partial y}, & R &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \\ N_1 &= \frac{1}{8\pi} (P^2 - Q^2 - R^2), & T_1 &= \frac{1}{4\pi} QR, \\ N_2 &= \frac{1}{8\pi} (Q^2 - R^2 - P^2), & T_2 &= \frac{1}{4\pi} RP, & (6) \\ N_3 &= \frac{1}{8\pi} (R^2 - P^2 - Q^2), & T_3 &= \frac{1}{4\pi} PQ. \end{aligned}$$

On vérifiera que :

$$X = \iiint \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) d\omega,$$

en vertu des relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= P \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} P^2, \\ \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} PQ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} Q^2, \\ \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} RP - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} R^2. \end{aligned}$$

On a des formules analogues pour Y et Z.

En définitive, *les formules (6) donnent les tensions du milieu diélectrique capables de produire sur le volume limité par la surface S, et considéré comme rigide, les actions qui résultent, dans la théorie des actions à distance, des charges du système A intérieur à la surface S.*

124. Position et grandeur des tensions. — Nous avons montré (I, § 125) qu'il existe, passant par chaque point du milieu, trois plans auxquels la force X, Y, Z, est normale : ce sont les plans principaux. Prenons pour axe des x la direction de la force électrique ;

on a :

$$Q = 0, \quad R = 0; \\ N_1 = \frac{P^2}{8\pi}, \quad N_2 = N_3 = -\frac{P^2}{8\pi}, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Donc les plans principaux sont :

le plan normal à la force, c'est-à-dire tangent à la surface équipotentielle au point considéré ;

deux plans quelconques normaux entre eux passant par la force.

Suivant un élément de surface équipotentielle s'exerce normalement une tension égale au carré de la force divisé par 8π .

Suivant un élément quelconque passant par la direction de la force

s'exerce normalement une pression égale au carré de la force divisé par 8π .

Tels sont les résultats énoncés par Maxwell.

Les mêmes raisonnements donneront pour tension et pression par unité de surface :

$$\frac{K}{8\pi} P^2,$$

dans un milieu dont le pouvoir inducteur spécifique est K . En effet, l'expression de la force électrique est toujours la même, mais l'équation de Laplace doit être remplacée par :

$$\rho = -\frac{K}{4\pi} \Delta V.$$

En vertu du § 112, les tension et pression par unité de surface ont même expression que l'énergie électrostatique par unité de volume.

125. Généralisation pour les corps où peut exister une polarisation rigide. — Au paragraphe 123 du tome I nous avons pu réduire à six les neuf composantes $X_x, X_y, \dots, Z_y, Z_z$, en vertu de l'hypothèse que les éléments du corps ne tendent pas à tourner autour d'eux-mêmes, ou qu'aucun couple ne leur est appliqué. Cette hypothèse n'est pas nécessaire ; en particulier, elle est incompatible avec la polarisation plus ou moins rigide qui existe ordinairement dans les corps aimantés.

Il y a donc lieu de généraliser les résultats précédents. Nous ne suivrons pas Maxwell dans ses calculs ; nous donnerons seulement les résultats.

Rappelons que le symbole X_y représente une tension X dirigée suivant l'axe des x , l'indice y signifiant que la force est appliquée à une face normale à l'axe des y ; et ainsi de suite.

$$\text{Posons : } \alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C.$$

α, β, γ , représentent la force magnétique ; a, b, c , sont les composantes de l'induction ; elles satisfont à la condition :

$$\text{Div}(a, b, c) = 0.$$

Maxwell trouve que pour identifier les actions dans le milieu polarisé à des tensions, il faut admettre :

1° une pression dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{ax}{4\pi}, & X_y &= \frac{bx}{4\pi}, & X_z &= \frac{cx}{4\pi}, \\ Y_x &= \frac{a\beta}{4\pi}, & Y_y &= \frac{b\beta}{4\pi}, & Y_z &= \frac{c\beta}{4\pi}, \\ Z_x &= \frac{a\gamma}{4\pi}, & Z_y &= \frac{b\gamma}{4\pi}, & Z_z &= \frac{c\gamma}{4\pi}; \end{aligned}$$

2^o une *traction* :

$$\frac{H^2}{8\pi} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi},$$

analogue à la pression hydrostatique, normale à l'élément sur lequel elle s'applique et indépendante de son orientation.

CAS PARTICULIERS. — Soit H le champ magnétique, \mathcal{B} l'induction. Admettons que les deux vecteurs aient même direction, ce qui arrive quand le magnétisme est induit : *les couples sont nuls*. Prenons l'axe des x parallèle aux lignes de force :

$$\beta = \gamma = 0, \quad b = c = 0.$$

La *pression* 1^o est égale à :

$$\frac{H\mathcal{B}}{4\pi};$$

elle est dirigée suivant l'axe des x , c'est-à-dire suivant les lignes de force.

Ajoutons la *traction* 2^o ; le système des pressions est constitué par :

une pression : $\frac{1}{4\pi} \left(H\mathcal{B} - \frac{H^2}{2} \right)$, suivant les lignes de force ;

une traction : $-\frac{H^2}{8\pi}$, normalement à ces lignes.

Enfin dans le cas où la perméabilité (ou le pouvoir diélectrique) est égale à 1, la pression et la traction ont la même valeur numérique :

$$-\frac{H^2}{8\pi}.$$

C'est précisément le résultat du § 124.

126. Remarques sur la théorie de Maxwell. — Nous avons dit que la théorie de Maxwell était sujette à contestation. MM. Duhem et Liénard ont donné de la rigueur à ses raisonnements. Ils ont prouvé la nécessité de deux nouvelles espèces de pressions, soit en tout quatre groupes de forces.

3^o Tout se passe comme s'il existait à la surface des corps polarisés une *pression* : $2\pi\mathcal{J}^2 \cos^2 \theta$, normale à l'élément de surface sur lequel elle s'applique.

4^o Enfin il faut ajouter à ces trois groupes un système de pressions P satisfaisant aux conditions de la Théorie de l'Elasticité et équilibrant les forces extérieures (autres que le magnétisme), qui agissent en chaque point du corps. Nous désignerons par N et T ses composantes.

On a le choix entre une infinité de systèmes. Mais il faut prendre le système P de manière qu'en cas de déformation ou de déplacement le travail de l'ensemble des pressions soit égal au travail des forces

magnétiques et des forces extérieures. Il ne suffit pas en effet qu'il existe un système de pressions équivalent *au point de vue statique* au système des forces magnétiques; il faut que le principe de la conservation de l'énergie soit toujours satisfait.

Si les forces extérieures autres que le magnétisme sont nulles, tout système de la forme suivante donne des résultantes nulles et des couples nuls *pour l'état statique* :

$$\begin{aligned} N_1 &= -\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right), & T_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \\ N_2 &= -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right), & T_2 &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial x}, \\ N_3 &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}\right), & T_3 &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

127. Application à un fluide parfait. — Cherchons à déterminer la pression P de manière que les conditions d'équilibre soient satisfaites. Les pressions doivent être normales à l'élément considéré. Soit λ , μ , ν , les cosinus directeurs de sa normale. On a (I, § 122), en comptant positivement les pressions :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(N_1 + \frac{ax}{4\pi}\right)\lambda + \left(T_3 + \frac{bx}{4\pi}\right)\mu + \left(T_2 + \frac{cx}{4\pi}\right)\nu \right\} : \lambda \\ &= \left\{ \left(T_3 + \frac{a\beta}{4\pi}\right)\lambda + \left(N_2 + \frac{b\beta}{4\pi}\right)\mu + \left(T_1 + \frac{c\beta}{4\pi}\right)\nu \right\} : \mu \\ &= \text{une troisième équation analogue.} \end{aligned}$$

Ce système doit être satisfait pour toutes valeurs de λ , μ , ν . On tire de là :

$$N_1 + \frac{ax}{4\pi} = N_2 + \frac{b\beta}{4\pi} = N_3 + \frac{c\gamma}{4\pi} = f(x, y, z). \quad (1)$$

$$T_3 + \frac{bx}{4\pi} = T_2 + \frac{cx}{4\pi} = \dots = 0. \quad (2)$$

Ces conditions nous apprennent d'abord que les pressions 1^o et 4^o se réduisent à une pression normale f indépendante de l'orientation de l'élément.

Des conditions (2) on tire :

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}.$$

L'aimantation et le champ ont même direction. C'était évident a priori : car le système P n'impliquant aucun couple, le système des pressions 1^o ne doit pas en comporter. *Le magnétisme rémanent est donc incompatible avec une fluidité parfaite.* Soit donc :

$$(a, b, c) = (1 + 4\pi k)(\alpha, \beta, \gamma),$$

la relation entre l'induction et la force magnétique : k est la suscep-

tibilité magnétique ; c'est, comme nous allons le voir, une fonction du champ ou de l'intensité d'aimantation.

On a, en admettant nulles les forces extérieures étrangères au magnétisme :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0,$$

et en vertu des conditions précédentes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (ax) + \frac{\partial}{\partial y} (bx) + \frac{\partial}{\partial z} (cx) \right] = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} \frac{\partial(H^2)}{\partial x}.$$

$$df = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} dH^2 = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} d\frac{j^2}{k^2}.$$

En particulier si k est une constante, ce qui est le cas général pour les liquides, au moins avec une approximation bien suffisante :

$$f = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi k^2} j^2 = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} H^2.$$

En définitive, nous obtenons pour la pression totale Π sur un élément dont la normale fait l'angle θ avec le champ ou l'intensité d'aimantation :

$$\Pi = \frac{1 + 4\pi k}{8\pi} H^2 - \frac{H^2}{8\pi} + 2\pi j^2 \cos^2 \theta = \frac{kH^2}{2} + 2\pi j^2 \cos^2 \theta.$$

La pression au sein d'un fluide aimanté est donc normale à l'élément sur lequel elle s'applique (c'est notre hypothèse), mais elle a une valeur variable en un même point suivant la direction de l'élément.

128. Changement de volume des solides par polarisation électrique ou magnétique. — *De la connaissance des tensions ou pressions équivalentes aux forces magnétiques ou électriques, on ne peut pas conclure les déformations des corps polarisés par l'application pure et simple des formules de la Théorie de l'Élasticité. C'est qu'en effet le corps est complètement modifié par sa polarisation. L'introduction de la pression P (4^o) correspond précisément à la nécessité de faire intervenir des forces nouvelles. Kirchhoff est entré le premier dans cette voie ; depuis, on n'a fait que développer ses idées.*

Nous n'insisterons pas davantage sur ces questions pour les raisons que voici.

Toutes les théories et toutes les formules proposées supposent explicitement ou implicitement que *les propriétés des solides sont complètement déterminées par leur état actuel*, ou, ce qui revient au même, qu'il est légitime de parler de leur énergie potentielle. Or c'est radicalement impossible chaque fois qu'il existe un phénomène à hystérésis, et l'on sait que les champs soit magnétiques, soit électriques, nécessaires pour obtenir des déformations sensibles, sont

bien au delà des limites où il faudrait se restreindre, pour ne pas avoir à tenir compte de l'hystérésis.

De fait pour l'aimantation et en particulier pour la torsion, où les expériences sont relativement aisées, *les phénomènes n'ont aucun rapport avec ceux qu'indique la théorie*. L'hystérésis est formidable. C'est un *non-sens absolu* que d'imaginer une énergie potentielle bien déterminée ; c'est perdre son temps que de construire des théories qui sont, *dans leur essence*, contradictoires avec les phénomènes qu'on veut expliquer.

Pour la déformation des diélectriques, comme les phénomènes sont plus petits et plus difficiles à observer, l'absurdité est moins apparente. Attendons que les méthodes se soient perfectionnées : elle deviendra aussi choquante que pour l'aimantation.

En définitive, tout ce que l'on a trouvé de certain au sujet de la polarisation diélectrique tient en ceci : les déformations varient proportionnellement au carré des forces. Mais si l'on veut bien considérer que toute fonction qui, développée par rapport à sa variable, ne contient pas de terme du premier degré, contient *du point de vue expérimental* un terme du second, on peut, sans excès de prudence, résumer tout ce qui a été fait en disant que les déformations ne varient pas linéairement en fonction des forces. A part cela, les expériences ne sont que contradiction.

Il est vrai qu'on donne comme basées sur des principes définitivement acquis à la Science *des relations de réciprocité* dont on trouvera des exemples aux §§ 17 et 18 de la Seconde partie de ce Cours. Ces relations, desquelles on n'a d'ailleurs rien tiré d'autre que ce que Kirchhoff avait dit, supposent essentiellement que les propriétés des solides sont définies sans ambiguïté par leur état actuel, *ce qui est absolument et incontestablement faux*. On ferait bien mieux d'abandonner *pour les solides* des méthodes de raisonnement parfaitement absurdes, et de ne pas mettre à la base des théories ce qu'on sait être contradictoire avec les faits¹.

¹ Ces considérations s'appliquent à de soi-disant perfectionnements de la Théorie de l'Élasticité qu'on a tentés récemment. Ils peuvent être de précieuses contributions *mathématiques*, mais ils sont d'intérêt *physique* nul. Les véritables perfectionnements attendus résident dans une théorie acceptable de l'hystérésis et dans l'introduction rationnelle de la variable TEMPS.

CHAPITRE III

CHAMPS DES AIMANTS ET DES COURANTS

Aimants permanents.

129. Définition des pôles des aimants. Aimant dans un champ uniforme. — Tout ce qui est dit aux §§ 49 et suivants sur la *polarisation rigide* s'applique sans y changer un mot aux aimants permanents. Nous savons déjà (Cours de Première, § 12) qu'une partie quelconque d'un aimant est un aimant; pour loin qu'on pousse la division, on ne sépare jamais le magnétisme positif du magnétisme négatif.

Les aimants sont dits *permanents* lorsque la polarisation est rigide, c'est-à-dire qu'elle n'est pas modifiée par un champ extérieur.

Plaçons un aimant rigide dans un champ uniforme et déterminons à quel système de forces il est soumis.

Sur chaque masse élémentaire m contenue dans l'aimant agit, d'une part, le champ uniforme; de l'autre, le champ dû à toutes les autres masses contenues dans l'aimant. Mais ces masses agissent deux à deux l'une sur l'autre avec des forces égales et de sens contraires: les forces intérieures se détruisent, au moins pour ce qui est de communiquer à l'aimant un mouvement d'ensemble. En définitive, nous n'avons à tenir compte que des forces extérieures qui se réduisent par hypothèse au champ uniforme d'intensité H .

Nous savons que le *magnétisme libre* d'un aimant est défini par une densité de volume φ et une densité de surface σ (§ 51) :

$$\varphi = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right), \quad \sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

Il est de toute évidence, il résulte d'ailleurs du § 52, que la somme des masses magnétiques *libres* est nulle.

Sur toutes les masses élémentaires libres m , le champ H produit des forces mH , parallèles entre elles, appliquées aux masses et pro-

portionnelles à leur grandeur. Si les masses sont positives, les forces sont dirigées dans la direction du champ; elles sont dirigées en sens inverse, si les masses sont négatives.

Considérons à part les masses *libres* positives m et déterminons les coordonnées de leur centre de gravité P par les formules ordi-

$$\text{naires : } x_1 = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad y_1 = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad z_1 = \frac{\sum mz}{\sum m}.$$

Au point P est appliquée la résultante des forces qu'exerce le champ uniforme sur l'ensemble des masses libres positives; elle est dirigée parallèlement au champ et dans le même sens; son intensité est : $H\sum m$. Nous appellerons *pôle positif* le point P.

Opérons de même sur l'ensemble des masses négatives *libres* m' . Nous déterminons un point N, centre de gravité de ces masses; c'est le *pôle négatif*, point d'application de la résultante. Cette résultante est parallèle au champ, dirigée en sens contraire, et son intensité est : $H\sum m'$. Or :

$$\sum m = \sum m', \quad H\sum m = H\sum m'.$$

En définitive, les pôles sont les centres de gravité des masses libres positives et négatives considérées isolément. L'action du champ uniforme se réduit à deux forces parallèles au champ, appliquées aux pôles et de grandeur $H\sum m$. Elles forment un couple.

Si les composantes A, B, C, de l'aimantation sont données en tous les points de l'aimant, on peut calculer σ et τ , et par conséquent la position des pôles.

Les calculs sont généralement inextricables et d'ailleurs sans intérêt.

Nous montrerons plus loin que la détermination expérimentale, au moins approchée, de la position des pôles n'est pas impossible.

On appelle *axe de l'aimant* la droite qui passe par les pôles¹.

130. Moment magnétique d'un aimant. — La considération des pôles des aimants a un intérêt très secondaire : il n'en est pas de même du *moment magnétique* de l'aimant.

La grandeur et la direction du moment d'un élément dv sont complètement déterminées par le vecteur δdv , ou ses composantes :

$$Adv, \quad Bdv, \quad Cdv.$$

¹ Il n'est pas inutile de faire observer pourquoi l'aiguille aimantée se conduit *dans un champ uniforme* d'une manière toute différente qu'une aiguille diélectrique. Dans l'aiguille aimantée la distribution du magnétisme est imposée à l'avance, le magnétisme est permanent; dans l'aiguille diélectrique, au contraire, la polarisation dépend essentiellement du champ extérieur et par conséquent de l'orientation de l'aiguille. Nous reviendrons plus loin sur cette comparaison, quand nous parlerons de l'aimantation induite.

On appelle *moment magnétique* M d'un aimant fini la résultante de ces vecteurs infiniment petits. Soit λ , μ , ν , la direction de l'axe de l'aimant; on a :

$$M\lambda = \iiint A dv, \quad M\mu = \iiint B dv, \quad M\nu = \iiint C dv.$$

Dans un champ magnétique dont les composantes sont X , Y , Z , chaque élément est soumis à un couple dont l'axe a pour composantes :

$$(BZ - CY) dv, \quad (CX - AZ) dv, \quad (AY - BX) dv.$$

En effet, il peut être représenté par un vecteur normal aux deux vecteurs représentatifs du champ H et du moment dM de l'élément, et égal au produit de ces vecteurs multiplié par le sinus de l'angle qu'ils font entre eux (§ 23), ou, ce qui revient au même, égal à l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

Le couple auquel est soumis un aimant fini est la résultante de tous ces couples.

Considérons le cas où le champ extérieur H est uniforme et fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus sont λ' , μ' , ν' . La composante du couple résultant suivant l'axe des x est :

$$\iiint (BZ - CY) dv = MH (\mu\nu' - \nu\mu');$$

on a des expressions analogues pour les autres axes de coordonnées.

Soit φ l'angle des directions du moment M et du champ H ; l'axe du couple résultant est perpendiculaire à ces deux directions; il a pour grandeur :

$$MH \sqrt{(\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2} = MH \sin \varphi;$$

résultat qu'on aurait pu écrire immédiatement.

Si nous connaissons la distance l des pôles et la somme des masses libres de même signe Σm , nous avons immédiatement une autre expression de M :

$$M = l \Sigma m,$$

car le champ uniforme H exerce sur l'aimant un couple qui est évidemment égal à :

$$Hl \Sigma m \sin \varphi.$$

Un aimant placé dans un champ uniforme s'oriente de manière que l'angle φ soit minimum. S'il est absolument libre, la position d'équilibre correspond à $\varphi = 0$; l'axe de l'aimant se met dans la direction du champ.

Si on lui impose un axe de rotation AOB , son axe magnétique doit se placer dans le plan formé par le champ et l'axe AB ; φ est alors minimum. Soit CD une droite normale à l'axe et située dans le plan

d'équilibre ; soit α_1 et α_2 les angles que font avec CD la direction du champ et l'axe de l'aimant *lors de l'équilibre*.

Définissons à chaque instant la position de l'aimant par l'angle plan θ du dièdre formé par le plan d'équilibre (plan de la figure) et le plan passant par l'axe de rotation et par l'axe de l'aimant. Le couple qui tend à ramener l'aimant dans la position d'équilibre est :

$$M \cos \alpha_2 \cdot H \cos \alpha_1 \cdot \sin \theta \\ = MH \cdot \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cdot \sin \theta.$$

En effet il n'y a d'utiles que la composante $H \cos \alpha_1$ du champ et la composante $M \cos \alpha_2$ du moment qui sont normales à l'axe de rotation ; ces composantes font précisément l'angle θ .

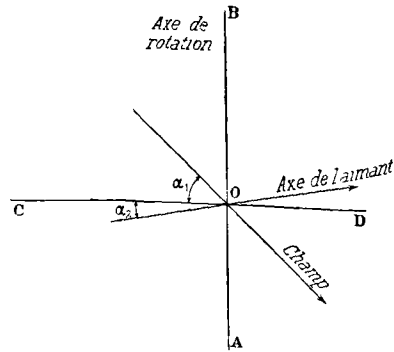


Fig. 55.

131. Petites oscillations d'un aimant autour de sa position d'équilibre. — Soit I le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe AOB, et supposons qu'aucune autre force n'intervienne, à l'exception de frottements proportionnels à la vitesse. La durée des petites oscillations est donnée par la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}}.$$

En particulier, supposons que l'aimant soit suspendu à un fil sans torsion servant d'axe vertical, qu'on sache par raison de symétrie que l'axe de l'aimant est horizontal, $\alpha_2 = 0$; désignons pour simplifier l'écriture par H la composante horizontale du champ ($H \cos \alpha_1$), la formule devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

S'il est impossible de calculer I , on obtiendra expérimentalement le moment d'inertie par la méthode indiquée Tome I, § 20. La mesure de deux durées d'oscillation permet donc de déterminer le produit MH . On remarquera que le réglage de l'axe de l'aimant peut être assez grossier, car l'angle α_2 , qui est petit par hypothèse, intervient par son cosinus.

132. Remarque sur le calcul du moment magnétique. Aimants solénoïdaux. — On peut calculer le moment magnétique en utilisant soit le magnétisme libre, soit le magnétisme total : le résultat est le même. Appliquons ce qui précède aux aimants solé-

noïdaux (§ 55), dans le cas où l'intensité d'aimantation est constante en grandeur et direction.

AIMANT CYLINDRIQUE, BASES NORMALES AUX GÉNÉRATRICES. — C'est le solénoïde proprement dit. Soit l la longueur, S la section droite, $V = lS$ le volume, \mathfrak{J} l'intensité d'aimantation constante et parallèle aux génératrices.

\mathfrak{J} est encore la densité superficielle σ sur les bases ; la densité de volume est partout nulle.

Les pôles de l'aimant sont aux centres de gravité des bases ; le moment magnétique est :

$$M = lS\mathfrak{J} = V\mathfrak{J} = V\sigma.$$

On peut encore considérer deux volumes V pleins d'une densité de volume uniforme ρ ; pour l'un de ces volumes ρ est positif, pour l'autre ρ a la même valeur libre mais négative. Quand ces volumes sont confondus, le magnétisme libre est partout nul. On déplace l'un des volumes de la longueur a dans le sens des génératrices. On fait apparaître sur les bases deux densités superficielles égales et de signes contraires :

$$\sigma = a\rho.$$

Les centres de gravité des magnétismes *totaux* positif et négatif sont distants de a ; la masse totale de chacun des magnétismes est ρV ; le moment magnétique est :

$$M = a\rho V = V\sigma.$$

C'est la même expression que précédemment.

AIMANT SPHÉRIQUE. — Il est ici plus facile de commencer par la seconde évaluation. Imaginons deux sphères de rayon R , remplies uniformément de la densité de volume ρ (§§ 43 et 115) ; faisons glisser l'une d'elles de la quantité a . Le moment magnétique devient :

$$M = a\rho V = \mathfrak{J}V.$$

Cherchons la masse totale des couches. L'épaisseur de la couche parallèlement au déplacement a est a ; donc la masse est :

$$\Sigma m = \rho a \cdot \pi R^2 = \sigma_0 \cdot \pi R^2 = \mathfrak{J} \cdot \pi R^2,$$

en appelant σ_0 la densité sur le diamètre parallèle au déplacement a .

Déterminons la distance l des pôles :

$$l\Sigma m = l\mathfrak{J} \cdot \pi R^2 = \mathfrak{J}V, \quad l = V : \pi R^2 = 4R : 3.$$

Les pôles sont donc aux deux tiers du rayon à partir du centre.

On peut calculer la masse totale et la position des pôles par les formules ordinaires donnant le centre de gravité d'une couche sphérique dont la densité est : $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. Les résultats sont naturellement les mêmes.

133. Champ produit par un petit aimant en un point extérieur. — Le potentiel créé par un petit aimant d'axe OO' et de

moment M , dans une direction OM et à une distance $OM = r$, est donné par la formule (§ 30) :

$$V = \frac{M \cos \theta}{r^2}.$$

Calculons les composantes de la force au point M .

La composante suivant MN est :

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M \cos \theta}{r^3}.$$

La composante suivant MP est :

$$-\frac{\partial V}{\partial(r\theta)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{M \sin \theta}{r^3}.$$

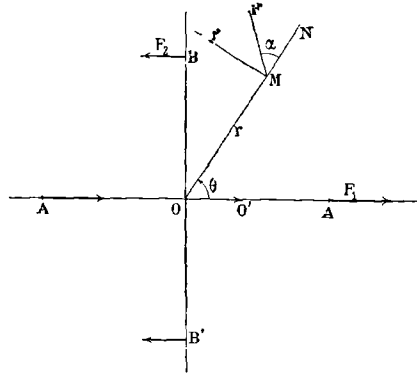


Fig. 56.

En particulier, aux points A et A' la force est dirigée suivant l'axe de l'aimant, dans le sens de cet axe, et a pour valeur ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) : $F_1 = \frac{2M}{r^3}$.

Aux points B et B' , la force est dirigée parallèlement à l'axe de l'aimant et en sens inverse; elle a pour valeur ($\theta = \frac{\pi}{2}$) : $F_2 = \frac{M}{r^3}$.

En un point quelconque M elle fait avec le rayon vecteur un angle α donné par la formule :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta,$$

et sa grandeur est : $\frac{M}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$.

On se reportera à la figure 44 du Cours de Première donnant le spectre d'un aimant.

Pour que les formules précédentes soient applicables, il faut que l'aimant soit assez petit, ou le point M assez éloigné.

Supposons maintenant que l'aimant puisse être assimilé à deux masses $+m$ et $-m$ situées à une distance l qui n'est plus très petite : on a $ml = M$. Calculons la force aux points A et B . Soit r la distance de ces points au centre de l'aimant.

En A :

$$F'_1 = \frac{m}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{m}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = F_1 \left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^{-2}.$$

Développant en série, il vient :

$$F'_1 = F_1 \left[1 + \frac{l^2}{2r^2} + \frac{3l^4}{16r^4}\right].$$

En B, il est facile de voir que l'on a :

$$F'_2 = F_2 \frac{1}{\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = F_2 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{l^2}{r^2} + \frac{3 \cdot 5}{2^7} \frac{l^4}{r^4}\right).$$

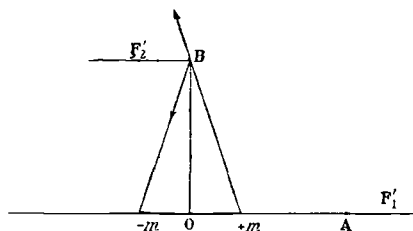


Fig. 57.

Évidemment l'assimilation d'un aimant de dimensions finies à deux masses est impossible. Ce qu'il faut retenir de ce raisonnement, c'est qu'on peut poser :

$$F'_1 = \frac{2M}{r^3} \left(1 + \frac{A_1}{r^2} + \frac{B_1}{r^4}\right) = Mf_1(r),$$

$$F'_2 = \frac{M}{r^3} \left(1 + \frac{A_2}{r^2} + \frac{B_2}{r^4}\right) = Mf_2(r);$$

les constantes A_1, B_1, A_2, B_2 , seront déterminées par l'expérience; leur ordre de grandeur est indiqué par les formules précédentes.

134. Méthode de Gauss pour la détermination de MH et de $M : H$.

— Soit au point O un champ horizontal uniforme H, par exemple la composante horizontale du champ terrestre. Soit M le moment magnétique d'un barreau.

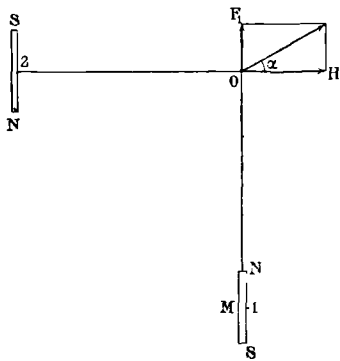


Fig. 58.

PREMIÈRE OPÉRATION. — Faisons osciller le barreau sous l'influence du champ H, en le suspendant par un fil sans torsion de manière que son axe soit horizontal. Nous avons vu plus haut (§ 131) que de la durée d'oscillation on peut déduire la valeur de MH.

SECONDE OPÉRATION. — Plaçons en O l'aiguille d'un magnétomètre; son axe magnétique s'oriente suivant OH. Disposons dans la position 1, à une distance r, le barreau de moment M que nous étudions :

il crée un champ normal au champ H. L'aiguille du magnétomètre tourne d'un angle α , tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Mf_1(r)}{H}.$$

Comme première approximation on a : $f_1(r) = \frac{2}{r^3}$; des expériences faites avec plusieurs distances r permettent de calculer A_1 et B_1 . On a donc $M : H$ avec toute la précision désirable.

Connaissant MH et $M : H$, on peut calculer M et H .

On peut encore placer le barreau dans la position 2; la déviation est alors :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Mf_2(r)}{H}.$$

On opère comme ci-dessus.

REMARQUE I. — Quand on étudie la déviation α produite à diverses distances dans les deux positions 1 et 2 par un aimant (ce qui revient à étudier le champ de cet aimant en fonction de la distance), on trouve que les formules du paragraphe précédent (où les A et B sont déterminés par l'expérience) représentent parfaitement le résultat des mesures. On peut conclure de là l'exactitude de nos hypothèses fondamentales et en particulier de la loi d'action en raison inverse du carré des distances. Cette vérification a été faite avec toute la précision possible par l'illustre Gauss, qui a mis ainsi hors de doute la loi de Coulomb.

REMARQUE II. — Ce que nous venons de dire dans ce Chapitre des aimants et des champs qu'ils créent, légitime les méthodes expérimentales exposées dans les §§ 20 et suivants du Cours de Première, méthodes qui permettent de comparer entre eux des champs uniformes en y faisant osciller un même aimant, et les moments de plusieurs aimants par la déviation imposée à la même distance à l'aiguille d'un magnétomètre. Le lecteur se reportera donc à cette partie du Cours pour le détail des expériences. La connaissance qu'il a des procédés de détermination des moments d'inertie (I, § 20), permet de lever la restriction du § 23 du Cours de Première; la comparaison des moments de plusieurs aimants par leur durée d'oscillation dans un même champ implique, en effet, que l'on tienne compte de la grandeur de leurs moments d'inertie.

135. **Unité CGS d'intensité de champ : gauss.** — Les for-

mules :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{H} f(r),$$

définissent *par convention* les intensités de champ magnétique et les moments magnétiques en valeur absolue : par conséquent elles définissent *conventionnellement* l'unité d'intensité de champ et l'unité de moment magnétique.

On mesure T en secondes, I en grammes masse et en centimètres, r en centimètres; par convention, M et H sont alors exprimés numériquement en unités absolues CGS. Comme pour arriver

à ces formules, nous admettons que deux masses m_1 et m_2 agissent l'une sur l'autre d'après la relation : $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, implicitement nous appelons *unité de masse magnétique* celle qui, agissant à un centimètre sur une masse égale, exerce sur elle la force d'une dyne.

L'unité CGS d'intensité de champ s'appelle *gauss* ; la composante horizontale du champ terrestre en France est voisine de $0^s,19$.

Admettons que l'inclinaison soit égale à 61° : quelle est l'intensité totale F du champ terrestre ?

On a : $F \cos 61^\circ = H = 0,19$; d'où $F = 0,19 : 0,485 = 0^s,39$.

La composante verticale V serait donnée par la formule :

$$V = H \operatorname{tg} 61^\circ = 0,19 \times 1,804 = 0^s,34.$$

136. Résultats numériques. — Considérons un aimant cylindrique suffisamment allongé. Si l'intensité d'aimantation est partout parallèle aux génératrices, nous avons un solénoïde ; il n'y a de magnétisme libre que sur les sections droites terminales. Le moment M est égal au volume V multiplié par l'intensité d'aimantation :

$$M = \mathfrak{J}V.$$

Dans la section droite qui passe par le milieu de l'aimant et qui est par conséquent suffisamment éloignée des bouts pour que la force magnétique due au magnétisme libre (force démagnétisante) soit sensiblement nulle, l'induction magnétique a pour expression :

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J}.$$

A la vérité, aucun aimant ne satisfait rigoureusement à la définition du solénoïde. Toutefois dans la pratique on convient de définir une intensité d'aimantation et une induction moyennes, tout comme si l'aimantation était solénoïdale.

Voici quelques nombres pour fixer les idées.

Un aimant en bon acier au carbone bien trempé et bien aimanté, ayant la forme d'un prisme droit d'un centimètre carré de section et de 10 centimètres de longueur, ayant par conséquent un volume $V = 10$, a une intensité d'aimantation moyenne de l'ordre de 100 unités. Son moment M est de l'ordre de 1000 unités. L'induction \mathfrak{B} est de l'ordre de $400\pi = 1257$. Il s'agit là de l'aimantation que le barreau conserve indéfiniment. Pour certains aciers les nombres peuvent être doubles.

Essayons de nous rendre compte de la signification de ces nombres.

Si le barreau peut tourner seulement dans le plan horizontal (par exemple sur un pivot), tout se passe comme s'il n'était soumis qu'à la composante horizontale du champ. Pour le maintenir normalement aux lignes de force du champ, c'est-à-dire au méridien magnétique, il faut exercer un couple MH numériquement égal à

$0,19 \times 1000 = 190$ unités de couple (dyne centimètre). Ce couple vaut environ 194 milligrammes appliqués à l'extrémité d'un bras de levier d'un centimètre, soit encore 0,194 grammes centimètre.

Prenons 8 comme densité de l'acier : le poids du barreau est 80 grammes ; son moment d'inertie est 660 environ (I, § 12).

Sa durée d'oscillation est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{660}{190}} = 11^s,8.$$

On augmente l'aimantation moyenne résiduelle par un choix convenable des aciers. Ils doivent renfermer, outre le carbone, du chrome ou du tungstène dans la proportion de 2 à 3 %.

Avec des barreaux de ces aciers spéciaux, à section carrée et dont la longueur est 20 fois le côté, on obtient des aimantations moyennes qui peuvent dépasser 500.

On se rend compte aisément des raisons qui font que de longs barreaux peuvent conserver des aimantations permanentes plus considérables que de courts barreaux. Le magnétisme libre produit en effet un champ *démagnétisant*, qui tend à créer une aimantation de sens contraire à celle du barreau, et par conséquent à diminuer peu à peu celle qu'il possède. Cet effet croît naturellement à mesure que le barreau est plus court, c'est-à-dire la force démagnétisante plus grande. Des fils d'acier très longs, où la force démagnétisante est à peu près nulle, peuvent conserver des intensités d'aimantation de l'ordre de 800.

Champs des courants.

137. Champs des courants. Unité absolue : ampère. — L'expérience a montré que *la force magnétique, en tout point du champ créé par un courant, est identique à l'induction due à un feuillet de puissance convenable, limité au conducteur dans lequel passe le courant.* Cette loi n'a évidemment de sens que si le courant est permanent et passe dans un conducteur linéaire, fermé, sans dérivation : nous verrons plus loin comment on la généralise pour un courant quelconque.

La face positive du feuillet est à la gauche du bonhomme d'Ampère convenablement placé, c'est-à-dire traversé des pieds à la tête par le courant et tenant le feuillet entre ses bras. Le sens du courant est supposé défini par un voltamètre fer soude (Cours de Première, § 4). L'unité d'intensité CGS de courant est égale par définition à l'unité de puissance du feuillet : l'unité d'intensité pratique, l'*ampère*, est le dixième de l'unité CGS. Le nombre qui mesure l'intensité d'un courant en ampères est donc dix fois plus grand que celui qui la mesure en CGS.

Le feuillet peut être absolument quelconque, pourvu qu'il s'applique au contour traversé par le courant; cela résulte : 1° de la propriété des feuillets de produire en tout point *extérieur* un champ indépendant de leur surface et ne dépendant que du contour qui les limite; 2° de la propriété du vecteur induction magnétique d'être continu, non seulement hors du feuillet où il se confond avec la force magnétique due au feuillet, mais encore dans la traversée même du feuillet. Nous avons démontré la première proposition au § 56, la seconde au § 52; mais il est utile de reprendre cette démonstration dans le cas particulier.

Supposons que l'unité de magnétisme positif parvienne au point A de sa trajectoire, très voisin de la face négative du feuillet (fig. 59). Nous assimilons celui-ci à deux couches de densité constante σ placées à une distance e ; sa puissance Φ est définie par la relation :

$$\Phi = \sigma e.$$

Soit F la force en A. Elle subit, quand le point passe en B, une brusque variation. Les parties voisines du point A de la plaque négative exerçaient une force normale dirigée dans le sens AB et égale à $2\pi\sigma$; elles exercent maintenant une force égale, mais dirigée dans le sens BA; la discontinuité, quand on passe de A à B, est donc représentée par une force $4\pi\sigma$ dirigée de B vers A (§ 37).

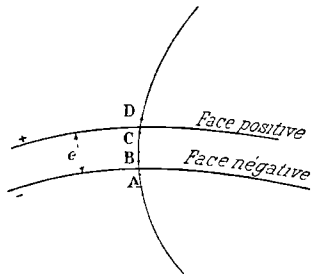


Fig. 59.

L'intensité d'aimantation est normale à la surface du feuillet; la densité σ est donc égale à l'intensité (§ 51) : $\mathfrak{J} = \sigma$. La discontinuité est donc égale à $4\pi\mathfrak{J}$ et dirigée de B vers A.

Évaluons maintenant le vecteur induction. En A à l'extérieur du feuillet il est égal à la force magnétique; en B il est égal à la résultante de la force et du vecteur $4\pi\mathfrak{J}$ dirigé de B vers C, ou de A vers B. Or nous venons de démontrer que la force subit précisément une discontinuité égale et de signe contraire. En ajoutant le vecteur $4\pi\mathfrak{J}$ dirigé de A à B, nous supprimons la discontinuité : le vecteur induction est donc continu au passage à travers le feuillet.

138. Existence de dérivations. — L'assimilation d'un courant à un feuillet est encore possible quand il y a des dérivations grâce à l'hypothèse suivante : *les courants sont toujours fermés*, il n'y a jamais accumulation de ce qui constitue le courant. Même quand on charge un condensateur, le courant se ferme à travers les isolants suivant un mécanisme spécial (courants de déplacement, § 118), mais de manière qu'au point de vue qui nous occupe, nous puissions toujours

retrouver exactement les éléments constitutifs d'un certain nombre de courants linéaires fermés, assimilables chacun à un feuillet.

Montrons sur une dérivation comment il faut entendre cette proposition.

Dans le circuit principal circule un courant I ; dans les circuits formant la dérivation circulent les courants i_1, i_2, i_3 , tels que l'on ait :

$$I = i_1 + i_2 + i_3.$$

Faisons d'abord abstraction de la pile : remplaçons-la par un conducteur linéaire.

Le système est équivalent à trois feuillets :

le premier de puissance	i_1	est limité au contour :	ACBPA	
le second	—	i_2	—	ADBPA
le troisième	—	i_3	—	AEBPA.

Les trois feuillets s'appliquent au contour ouvert ABP ; mais on a : $I = i_1 + i_2 + i_3$.

Les courants se ferment à l'intérieur de la pile ; nous pouvons la considérer comme une dérivation plus ou moins complexe et appliquer le raisonnement précédent.

Dans bien des cas où le circuit est ouvert, on peut le fermer par l'adjonction d'un conducteur parcouru par deux courants égaux et de signes contraires : on fait apparaître ainsi deux feuillets distincts sur lesquels on raisonnera. Nous verrons une application de ce procédé quand nous parlerons des bobines.

Grâce à l'hypothèse posée au paragraphe précédent, l'étude des champs des courants n'est plus qu'une affaire de calcul.

139. Autre forme de la loi fondamentale. Loi de Laplace.

— Soit le circuit 1 traversé par un courant; soit A_1 le point où nous voulons calculer la force (fig. 61).

Dans la direction A_1A_2 , la force est égale au taux de variation du potentiel. Si Ω_1 est l'angle solide sous lequel on voit du point A_1 la face positive du feuillet, Ω_2 l'angle solide sous lequel on voit la même face du point A_2 , la force suivant A_1A_2 est (§ 56) :

$$\frac{\Phi}{A_1A_2} (\Omega_1 - \Omega_2).$$

Comme seul le déplacement relatif intervient, laissons le point A_1 immobile et donnons au circuit 1 une translation égale et de sens contraire à A_1A_2 . Le circuit vient en 2 ; un élément a_1b_1 occupé après la translation la position a_2b_2 .

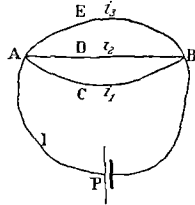


Fig. 60.

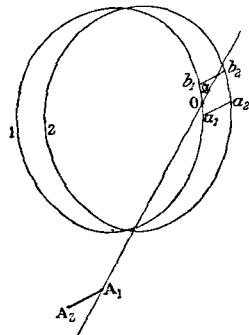


Fig. 61.

La force en A_1 suivant la direction A_1A_2 a pour expression :

$$\frac{\Phi}{\overline{b_1b_2}} (\Omega_1 - \Omega_2),$$

Ω_1 étant toujours l'angle solide sous lequel nous voyons la face positive du circuit 1 du point A_1 , Ω_2 étant maintenant l'angle solide sous lequel nous voyons du même point A_1 la face positive du circuit 2.

La variation $\Omega_1 - \Omega_2$ dépend du déplacement de tous les éléments du circuit.

Admettons que la force créée au point A_1 par l'élément $ds = \overline{a_1b_1}$ peut être calculée, INDÉPENDAMMENT DU RESTE DU CIRCUIT, par la diminution élémentaire d'angle solide due au déplacement de cet élément.

Cette diminution est évidemment, au signe près, l'angle ω sous lequel on voit du point A_1 l'aire $a_1b_1b_2a_2$. Si cette aire présente au point A_1 sa face négative, l'angle solide diminue : la force due à l'élément est dirigée suivant A_1A_2 . Si elle présente sa face positive, l'angle solide augmente : la force est dirigée suivant A_2A_1 .

DIRECTION DE LA FORCE. — La force varie évidemment avec la direction A_1A_2 ; cherchons pour quelle direction elle est maxima.

1° Il faut que l'aire $a_1b_1b_2a_2$ soit maxima pour une longueur donnée b_1b_2 ; donc b_1b_2 est alors normal à l'élément ds .

2° Il faut que l'aire soit le plus possible normale au rayon visuel A_1O , afin que pour une aire donnée l'angle ω soit le plus grand possible : donc b_1b_2 est alors normal à A_1O .

En définitive, la force au point A_1 est maxima pour un déplacement A_1A_2 perpendiculaire au plan formé par l'élément ds et par la droite qui le joint au point A .

SENS DE LA FORCE. — La force est dirigée suivant A_1A_2 si l'élément de feuillet tourne vers A_1 sa face négative.

Le bonhomme d'Ampère a donc les pieds en b_1 ou b_2 et la tête en a_1 ou a_2 : la direction A_1A_2 est vers sa gauche. Donc la force créée en un point par un élément de courant est vers la gauche du bonhomme d'Ampère convenablement placé sur le courant et regardant le point.

GRANDEUR DE LA FORCE. — L'aire $a_1b_1b_2a_2$ est égale à $\overline{a_1b_1} \cdot \overline{b_1b_2}$ quand la force est maxima, puisqu'alors le parallélogramme est un rectangle. Soit α l'angle de la direction A_1O avec l'élément ds . L'angle solide est :

$$\text{est : } \frac{\overline{a_1b_1} \cdot \overline{b_1b_2} \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{ds \sin \alpha}{r^2} \cdot \overline{b_1b_2},$$

en posant : $\overline{A_1O} = r$. Pour obtenir la force, il faut multiplier par la puissance Φ du feuillet et diviser par le déplacement qui est $\overline{b_1b_2}$. Elle

a donc pour expression : $\Phi \frac{ds \sin \alpha}{r^2}$.

En définitive, l'hypothèse du § 137 est, pour un circuit fermé quel-

conque, rigoureusement équivalente à la loi suivante découverte par Laplace :

Chaque élément de courant ds exerce en un point Λ une force normale au plan formé par l'élément et la droite qui le joint au point Λ ; elle est dirigée vers la gauche du bonhomme d'Ampère placé sur l'élément et traversé par le courant des pieds à la tête; elle a pour

expression :

$$\Phi \frac{ds \sin \alpha}{r^2}.$$

Si l'intensité du courant est exprimée en ampères, la grandeur de la force exercée sur l'unité de masse magnétique a pour expression en dynes :

$$\frac{1}{10} \frac{ds \sin \alpha}{r^2}.$$

Bien entendu, si l'équivalence est absolue pour un circuit fermé, rien ne dit que, la première loi étant expérimentalement vérifiée, il en sera de même pour la seconde; car nous n'avons pu déduire la seconde de la première que grâce à une hypothèse supplémentaire.

L'expérience confirme-t-elle la loi de Laplace et par conséquent l'hypothèse ?

Pour réaliser l'expérience, il faudrait disposer d'un élément ouvert de courant; on ne sait comment l'obtenir: les théories modernes admettent même que les courants sont toujours fermés. On ne sait pas davantage isoler l'action magnétique d'un élément déterminé d'un courant fermé. S'il en est ainsi, la question posée est insoluble; toute loi donnant la même résultante pour un circuit fermé est également admissible, car elle doit être considérée seulement comme un outil de calcul.

Nous verrons plus loin (§§ 154 et 161 à quelles singulières conséquences conduit la loi de Laplace.

Nous appliquerons par la suite l'une ou l'autre des deux lois, suivant qu'elles donneront lieu à des calculs plus aisés. Nous montrerons sur quelques exemples leur équivalence.

140. Expression analytique de la loi de Laplace. — Il suffit d'appliquer le théorème du § 23.

Pour obtenir la solution en grandeur et en signe dans le système des axes à droite (§ 22, fig. 11), il faut prendre comme vecteur F , l'élément de courant; ses composantes sont alors dx , dy , dz . Le vecteur F_2 a pour direction la droite qui joint l'élément de courant au point considéré; soit λ , μ , ν , ses cosinus directeurs. La force électromagnétique représentée par le vecteur F_1 a pour composantes :

$$\frac{\Phi}{r^2} (\nu dy - \mu dz, \quad \frac{\Phi}{r^2} (\lambda dz - \nu dx, \quad \frac{\Phi}{r^2} \mu dx - \lambda dy).$$

Ce résultat démontre ce qu'on appelle le principe des courants

sinueux. La force due à un élément ds de courant est la résultante des forces dues aux composantes dx , dy , dz , de cet élément, agissant isolément.

Plaçons le point A sur l'axe des x :

$$\lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0.$$

Les composantes de la force deviennent :

$$0, \quad \Phi dz : r^2, \quad -\Phi dy : r^2,$$

c'est-à-dire précisément ce qu'indique le principe des courants sinueux.

141. Champ d'un courant rectiligne fini ou indéfini. — Pour trouver le champ du courant, il faut calculer l'induction due à un feuillet formé par un demi-plan et limité au courant. Nous avons étudié complètement ce cas aux §§ 10 et 57. Les lignes de force sont des cercles dont le plan est perpendiculaire au courant.

Le centre des cercles est la trace du courant sur leur plan. La force est en raison inverse de la distance r du point au courant; elle a pour expression : $\frac{2\Phi}{r}$. Si l'intensité est exprimée en ampères, la force sur l'unité de masse magnétique a pour valeur en dynes :

$$H = \frac{0,2 \cdot I}{r}.$$

Appliquons la loi de Laplace à un courant rectiligne limité AB allant de bas en haut. Cherchons son action au point O. Prenons le plan OAB pour plan du tableau; abaissons la perpendiculaire OD sur le prolongement de AB, soit $OD = r$. Appelons ρ la distance du point O à l'élément $CD = ds$.

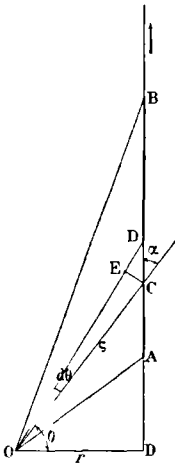


Fig. 62.

D'après la loi de Laplace, la force due à l'élément CD est dirigée normalement au plan du tableau et vers l'avant de ce plan. Pour avoir l'action du courant entier AB, il faut additionner algébriquement les actions de tous les éléments, puisqu'elles sont parallèles. Menons du point O un arc de cercle CE. On a :

$$\overline{CE} = \rho d\theta = ds \sin \alpha,$$

$$\rho \cos \theta = r;$$

$$\frac{ds}{\rho^2} \sin \alpha = \frac{1}{r} \cos \theta d\theta.$$

Soit θ_1 et θ_2 les valeurs de l'angle θ pour les points A et B. L'action

en O est :

$$\Phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta d\theta}{r} = \frac{\Phi}{r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1),$$

en exprimant Φ avec l'unité CGS d'intensité. Si le courant est exprimé en ampères, l'intensité du champ au point O est :

$$H = \frac{I}{40r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1).$$

Si le courant est rectiligne et indéfini :

$$\sin \theta_1 = -1, \quad \sin \theta_2 = 1; \quad H = I : 5r,$$

formule que nous avons déjà trouvée par la considération du feuillet équivalent.

TRAVAIL DANS LE DÉPLACEMENT AUTOUR DU COURANT RECTILIGNE ET INDÉFINI. — Soit une trajectoire quelconque. Le champ étant toujours dans un plan normal au courant, le travail est le même pour la trajectoire ou pour sa projection sur un plan normal au courant : il suffit donc de considérer cette projection.

Soit $d\sigma$ un élément de cette projection et ε l'angle que fait sa normale avec le rayon vecteur mené de la trace O du courant sur le plan de projection. Le travail du champ sur le pôle positif unité est :

$$d\sigma \cos \varepsilon \frac{2I}{r} = 2I d\psi;$$

$d\psi = d\sigma \cos \varepsilon : r$, est l'angle sous lequel est vu du point O l'élément de trajectoire projetée. Si la trajectoire n'entoure pas le courant :

$$\int d\psi = 0,$$

le travail est nul. Si la trajectoire fait n tours autour du courant, le travail est en CGS : $2I \cdot n \cdot 2\pi = 4\pi I \cdot n$.

Nous avons déjà trouvé ce résultat par un procédé très différent au § 10.

142. Expérience de Biot et Savart. — Supposons que le courant rectiligne ne soit indéfini que dans un sens; le point B étant très éloigné, le champ est en CGS :

$$I(1 - \sin \theta_1) : r.$$

On peut donner à cette expression une autre forme.

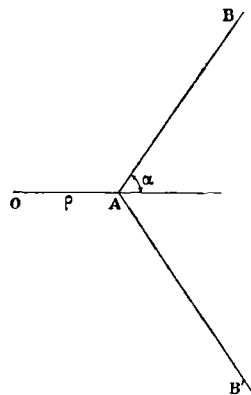
Soit α_1 et ρ_1 les valeurs des variables α et ρ au point A. On a :

$$\rho_1 \cos \theta_1 = r, \quad \alpha_1 + \theta_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$H = \frac{I}{\rho_1} \frac{1 - \sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{I}{\rho_1} \frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \frac{I}{\rho_1} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}.$$

Fig. 63.

D'où la célèbre expérience de Biot et Savart d'après laquelle Laplace trouva sa loi.



Un petit barreau aimanté oscille sous l'action d'un courant formé de deux demi-droites indéfinies AB et AB'. L'angle $\overline{BAB'} = 2\alpha$; la distance $\overline{OA} = \rho$. Ils trouvèrent que le champ en O est en raison inverse de ρ et proportionnel à $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Effectivement la formule précédente donne pour le courant angulaire BAB' évalué en ampères :

$$H = \frac{0,2 \cdot I}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

143. Expression générale du travail dans le déplacement autour d'un courant de forme quelconque. — Menons une surface quelconque par le contour fermé traversé par le courant : cette surface sera, si l'on veut, la surface du feuillet équivalent.

Si la trajectoire fermée traverse n_1 fois le feuillet dans le sens de l'intensité d'aimantation du feuillet fictif équivalent et n_2 fois dans le sens inverse, le travail accompli par les forces électromagnétiques est :

$$4\pi(n_1 - n_2)\Phi.$$

Il suffit de démontrer le théorème pour un tour.

Soit F le feuillet. Évaluons le travail de la *force magnétique* le long d'une trajectoire fermée ACDBA, qui comprend nécessairement

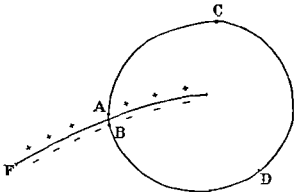


Fig. 64.

la traversée BA du feuillet. Il est nul, puisque pour les forces magnétiques qui proviennent du magnétisme libre il y a un potentiel au sens strict du mot. Mais nous savons que la traversée du feuillet amène une discontinuité de la force; la force accomplit pendant la traversée un travail négatif égal à $-4\pi\Phi = 4\pi\lambda \cdot e$, où λ est l'intensité d'aimantation et e l'épaisseur du feuillet. Donc le long de la

trajectoire ACDB, le travail est positif et égal à $4\pi\Phi$, puisqu'en ajoutant le travail $-4\pi\Phi$ dû à la traversée, on doit avoir une somme nulle.

On peut d'ailleurs montrer facilement que le travail effectué par les forces magnétiques le long de la courbe ACDB est égal à $4\pi\Phi$.

En A l'angle solide sous lequel on voit le feuillet est $+2\pi$; en B, il est -2π ; la diminution est 4π , le travail est donc $4\pi\Phi$.

Or le vecteur induction est continu; donc les travaux pour la trajectoire ouverte ACDB et la trajectoire fermée ACDBA diffèrent infiniment peu. Comme hors du feuillet l'induction et la force magnétique sont identiques, le travail de l'induction pour la trajectoire fermée ACDBA est égal à : $4\pi\Phi = \frac{4\pi I}{10}$. C. Q. F. D.

144. **Expression analytique du théorème précédent.** — Considérons une trajectoire fermée que parcourt un pôle magnétique unité positif, soumis à un champ dont les composantes sont X, Y, Z . Faisons passer par cette trajectoire une surface et considérons le flux, à travers la portion de la surface limitée par la trajectoire, d'un vecteur dont les composantes sont : u, v, w . Appelons l, m, n , les cosinus directeurs de la normale en tout point de la surface.

Écrivons que le travail du pôle pour un parcours complet de la trajectoire est égal à 4π fois le flux du vecteur :

$$4\pi \iint (ul + vm + wn) dS = \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Le théorème de Stokes (§ 24) nous apprend qu'il existe entre les composantes des vecteurs u, v, w , et X, Y, Z , les relations :

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ 4\pi v &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ 4\pi w &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nous pouvons les énoncer sous la forme (§ 26) :

$$4\pi(u, v, w) = \text{curl}(X, Y, Z).$$

Ces équations entraînent la conservation du flux du vecteur u, v, w ; car on a évidemment :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Pour retrouver la règle du paragraphe précédent, il suffit de supposer que le courant, au lieu d'être disséminé dans l'espace d'une manière continue, est localisé dans un circuit. Les composantes u, v, w , représentent les *intensités par unité de surface*; ce sont les vitesses d'écoulement du fluide incompressible auquel l'équation (2) permet d'assimiler l'agent qui se déplace. Ce que nous avons appelé *intensité* dans les paragraphes précédents est le flux du vecteur u, v, w , à travers la section droite du conducteur.

X, Y, Z , sont les composantes de la *force magnétique*. Nous ne supposons rien sur la nature du milieu, qui est le vide ou un corps aimanté. C'est que, pour un circuit fermé, le travail des forces dues à des aimants est toujours nul, puisqu'il dépend d'un potentiel qui n'a qu'une seule détermination en chaque point.

Le travail d'un pôle d'aimant, se déplaçant par exemple autour d'un conducteur *en fer* traversé par un courant, est exactement le même pour un tour complet que si le conducteur était en cuivre. La disposition des lignes de force dans le champ peut être modifiée par l'introduction d'un métal magnétique; le travail total ne l'est pas.

145. Étude des solénoïdes. — Une bobine cylindrique régulièrement enroulée est assimilable, d'après l'hypothèse générale du § 137, à une série de feuillets de même puissance, placés parallèlement les uns aux autres, à une certaine distance les uns des autres.

Il serait difficile de traiter cette distribution discontinue; mais nous pouvons la remplacer par une distribution continue, grâce à la propriété fondamentale du vecteur induction.

S'il y a n spires par centimètre de génératrices et si le courant est I unités CGS, nous aurons donc par centimètre n feuillets de puissance $\Phi = I$. En tout point qui n'est pas très rapproché des spires, on peut remplacer ces n feuillets qui ne se touchent pas, par n feuillets d'épaisseur plus grande, se touchant et par conséquent donnant une distribution solénoïdale.

Cela revient à dire que l'effet d'un courant I dans un fil est égal à l'effet de n courants, n fois plus petits, passant dans n conducteurs très voisins du premier.

Le solénoïde est donc équivalent à un volume dont l'aimantation est solénoïdale et dont l'intensité d'aimantation est :

$$\mathfrak{J} = n\Phi = nI.$$

Bien entendu, ce n'est vrai qu'à la condition qu'on ne soit pas trop près des spires : au voisinage immédiat des spires, les lignes de force sont des courbes fermées autour de chacune d'elles. Nous reviendrons là-dessus quand nous aurons étudié les propriétés générales du champ du solénoïde.

Nous supposons que le solénoïde est formé de courants circulaires fermés régulièrement distribués; il est effectivement constitué par un circuit hélicoïdal. Mais il résulte de la loi de Laplace (§ 140), et il est confirmé par l'expérience, qu'on peut toujours remplacer un élément de circuit par ses composantes. Le circuit hélicoïdal revient donc aux circuits circulaires sur lesquels nous avons raisonné, plus un circuit rectiligne parallèle aux génératrices et traversé par le même courant. Sans insister sur la position exacte que doit occuper ce courant rectiligne, il est bien évident que son effet sera généralement négligeable.

146. Champ du solénoïde. — Il n'y a de magnétisme libre que

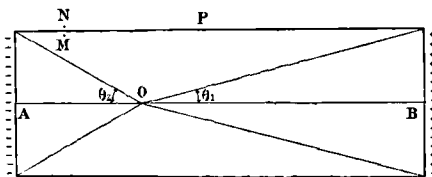


Fig. 65.

sur les sections droites terminales du volume polarisé équivalant au solénoïde; donc le vecteur induction se compose :

1° en tout point à l'intérieur du volume, d'un vecteur constant :

$$4\pi\mathfrak{J} = 4\pi n\Phi = 4\pi nI,$$

dirigé parallèlement aux génératrices du cylindre et dans le sens AB (de la plaque — à la plaque +);

2° en tout point de l'espace, du vecteur force magnétique provenant des plaques terminales.

Les vecteurs que nous venons de distinguer ne sont généralement pas parallèles.

CHAMP INTÉRIEUR DANS UN SOLÉNOÏDE A SECTION CIRCULAIRE. — Calculons le vecteur force pour un solénoïde à section circulaire et pour un point O situé sur l'axe AB du solénoïde. L'action d'une plaque circulaire recouverte d'une densité uniforme σ sur un point de son axe est (§ 36) :

$$2\pi\sigma(1 - \cos \theta).$$

L'induction a donc pour valeur :

$$\begin{aligned} 4\pi n\Phi - 2\pi n\Phi [2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2] &= 2\pi n\Phi (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \\ &= 4\pi n\Phi \left[1 - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4} \right], \end{aligned}$$

si θ_1 et θ_2 sont assez petits.

On obtient donc avec un solénoïde un champ très sensiblement constant, pourvu que la bobine soit suffisamment allongée par rapport aux dimensions de sa section droite, et que le point O soit assez éloigné des bases. Supposons par exemple que le diamètre soit 10° et la longueur 50° , et que le point O soit au milieu de l'axe; θ_1 et θ_2 sont égaux et donnés par la condition :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{5}{25} = 0,2.$$

L'angle θ , qui est de $11^\circ 18'$, a pour expression en radians une valeur légèrement inférieure à 0,2. On peut donc écrire :

$$\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4} = \frac{\theta_1^2}{2} = 0,02.$$

Le champ est : $H = 4\pi n\Phi$, à 2 % près. Bien entendu, dans une expérience précise la correction n'est pas négligeable, mais elle ne présente aucune difficulté.

CHAMP EXTÉRIEUR. — Il est celui que produirait un aimant solénoïdal de même volume V et de même intensité d'aimantation.

Le moment magnétique du solénoïde est en CGS :

$$M = \partial V = SlnI = SNI;$$

n est le nombre de spires par centimètre, l la longueur, N le nombre total de spires. Le solénoïde tend à s'orienter dans un champ uniforme comme le ferait un aimant de moment M .

Le champ extérieur est dû uniquement à l'action des plaques terminales; pour un point suffisamment éloigné, il est identique au champ d'un doublet de longueur l et de masses $\pm SnI$.

Il est facile de voir qu'entre deux points voisins M et N, l'un dans le solénoïde, l'autre à l'extérieur (fig. 65), il existe pour la force électromagnétique une discontinuité représentée par le vecteur $4\pi\mathfrak{J} = 4\pi n\Phi$. En effet, la force magnétique due aux plaques terminales est sensiblement la même; mais si à l'extérieur la force électromagnétique est identique à la force magnétique, à l'intérieur elle est égale à la résultante de cette force et du vecteur $4\pi\mathfrak{J}$. Donc la force électromagnétique est sensiblement nulle en tout point P *extérieur*, situé dans le plan d'une section droite où la force électromagnétique dans l'intérieur du solénoïde est constante et égale à $4\pi n\Phi$.

On s'explique ainsi très aisément la forme du champ d'un solénoïde représenté figure 19 du Cours de Première.

147. Force magnétomotrice. — Soit N le nombre total de spires d'un solénoïde. On appelle *force magnétomotrice* la quantité $\frac{4\pi NI}{10}$. Elle mesure le travail des forces électromagnétiques exercées sur l'unité de masse magnétique, quand cette masse décrit une trajectoire fermée faisant un tour complet autour de chacune des spires. C'est par conséquent aussi le travail effectué par une masse qui partirait de l'infini sur l'axe d'un solénoïde, suivrait cet axe, traverserait le solénoïde et s'en irait jusqu'à l'infini de l'autre côté du solénoïde.

La force magnétomotrice n'a pas les dimensions d'une force magnétique ou d'une induction; ses dimensions sont celles du produit d'une force magnétique par une longueur.

On l'exprime en *gilberts*.

148. Champ d'un circuit circulaire plan en un point de son axe. — Soit R le rayon du cercle, r la distance AO du point A où nous calculons la force électromagnétique, au centre O du cercle. Nous avons montré aux §§ 36 et 57 que la force en A est dirigée suivant l'axe et égale à :

$$F = \frac{2\pi\Phi}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{F_0}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_0 = \frac{2\pi\Phi}{R};$$

F_0 est la valeur de la force électromagnétique quand le point A coïncide avec le centre O du cercle.

Nous allons retrouver la même expression en partant de la loi de Laplace.

Considérons un élément de courant $\overline{CD} = ds$, pris n'importe où sur le cercle; par raison de symétrie l'action est la même, quelle que soit sa position. Pour faciliter la construction de la figure, prenons-le normal au plan du tableau. La distance de l'élément ds au point A est l ; l'angle α que fait avec l'élément la droite AB qui va de l'élé-

ment au point A est droit. L'action de l'élément est dirigée suivant AE, normalement à la droite AB; elle a pour grandeur :

$$\Phi \frac{ds}{l^2} = \frac{I}{10} \frac{ds}{l^2}.$$

Par raison de symétrie, la résultante est dirigée suivant OA. Tous les éléments donnant des actions semblablement dirigées, la résultante a pour expression :

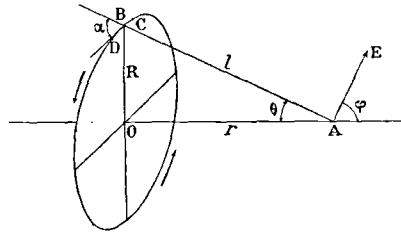


Fig. 66.

$$F = \frac{2\pi R\Phi}{l^2} \cos \varphi = \frac{2\pi R\Phi}{l^2} \sin \theta = \frac{2\pi R^3\Phi}{l^3} = \frac{2\pi\Phi}{R \left[1 + \frac{r^2}{R^2} \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est la formule donnée plus haut.

Reprenons l'expression :

$$F = \frac{2}{l^3} (\pi R^3\Phi);$$

le facteur $\pi R^3\Phi$ représente par définition le moment magnétique total du feuillet. La formule peut donc s'écrire :

$$F = \frac{2M}{l^3} = \frac{2M}{r^3},$$

si r est assez grand. Nous retombons naturellement sur la formule qui donne le champ d'un aimant dans la première position de Gauss (§ 133 : à grande distance, en effet, le feuillet plan peut être assimilé à un petit aimant, dirigé normalement au feuillet et de même moment magnétique.

DISCUSSION DE LA FORMULE. — Quand on se déplace sur l'axe OA de l'infini du côté de la face négative à l'infini du côté de la face positive, la force électromagnétique, dirigée suivant l'axe, conserve toujours le même sens. Nulle à l'infini, elle passe par un maximum pour $r = 0$; ses valeurs sont égales pour des distances égales de part et d'autre du cercle. Il est important de montrer avec quelle rapidité la décroissance a lieu quand on s'éloigne du centre du cercle.

Prenons la force F_0 pour unité; on trouve :

$r = 0$	$F = 1$	$r = 3R$	$F = 0,125,$
$r = R$	$0,354$	$r = 4R$	$0,089,$
$r = 2R$	$0,192$	$r = 5R$	$0,068.$

149. Profil à imposer à une bobine dont les spires sont circulaires, pour obtenir le plus grand champ possible en un point de l'axe des spires, avec une longueur de fil donnée. Application au galvanomètre à aimant mobile. — Soit R le

rayon de la spire, r sa distance au point A, θ l'angle sous lequel on voit son rayon du point A. Le champ en A est (§ 148) :

$$F = \Phi \cdot 2\pi R \frac{\sin \theta}{l^2}.$$

Le champ par unité de longueur est :

$$\frac{F}{2\pi R} = \Phi \frac{\sin \theta}{l^2}.$$

Construisons la courbe : $l^2 = K \sin \theta$, où K est une constante.

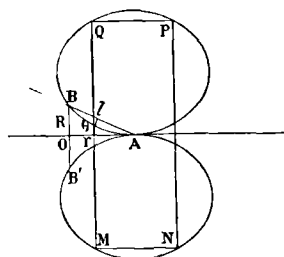


Fig. 67.

Toutes les spires, telles que BB' , qui sont sur la surface de révolution admettant cette courbe comme méridienne, produisent exactement le même effet par unité de longueur de fil. Elles sont aussi avantageuses les unes que les autres. Hors de cette surface, les spires sont moins avantageuses ; dans cette surface elles le sont davantage. Comme il est nécessaire pour la commodité du bobinage que les joues des bobines des galvanomètres soient planes, on choisira une épaisseur MN de bobine (distance des joues)

qui soit au diamètre MQ dans un rapport tel que l'on ne s'éloigne pas trop de l'une des surfaces ci-dessus considérées.

A mesure que la quantité totale de fil à loger augmente, on doit utiliser, pour déterminer le profil extérieur, une surface caractérisée par une constante K de plus en plus grande. C'est dire que les portions extérieures de la bobine jouent un rôle de plus en plus effacé.

150. Sensibilité des galvanomètres. — On appelle généralement sensibilité S d'un appareil le quotient de l'accroissement de l'indication θ à l'accroissement de la cause i , ici le courant ; $S = d\theta : di$.

On appelle constante G du galvanomètre à aiguille mobile un coefficient tel que le produit Gi soit le champ produit par le courant i . Soit H le champ constant dans lequel se meut l'aiguille, la déviation est : $\theta = Gi : H$; la sensibilité est : $S = G : H$.

Il serait très incommode d'exprimer la sensibilité en valeur absolue ; on l'énonce généralement de manière que son interprétation soit immédiate. On suppose que l'échelle sur laquelle on observe par la méthode du miroir, est divisée en millimètres et située à un mètre.

On convient quelquefois d'appeler sensibilité le nombre de millimètres dont le spot se déplace pour un courant de 10^{-6} ampères, ou, ce qui revient au même, la résistance en mégohms qu'il faut mettre sur le circuit pour que la déviation soit d'un millimètre quand la force électromotrice est d'un volt.

Si cette manière d'énoncer la sensibilité est suffisante dans le cas

d'un appareil donné employé dans des conditions déterminées, elle ne représente pas le mérite de l'appareil. En effet, on peut modifier à son gré la sensibilité d'un galvanomètre en faisant varier le champ extérieur; d'autre part, pour une sensibilité donnée, il est préférable d'avoir un galvanomètre peu résistant.

D'où la définition suivante plus complète de la sensibilité.

C'est le déplacement du spot, exprimé en millimètres, lu sur une échelle située à un mètre, pour un courant d'un microampère, la résistance étant supposée d'un ohm, et la période d'une seconde. Soit R la résistance du galvanomètre, T sa période d'oscillation, d en millimètres la déviation pour un courant de i microampères; la sensibilité est en vertu de cette définition :

$$S = \frac{d}{iR} \frac{1}{T^2}.$$

Il existe bien d'autres définitions aussi arbitraires les unes que les autres.

151. Nappes de courant. — Une nappe de courant est une couche infiniment mince de matière conductrice, limitée sur chaque face par des milieux isolants, de sorte que les courants ne peuvent entrer et sortir que par certains points appelés *électrodes*.

Les courants étudiés aux §§ 173 et 174 constituent des nappes de courant, d'autant plus exactement que les plaques sont plus minces.

On peut se proposer de calculer le champ dû à une nappe de courant; nous traiterons seulement quelques cas particuliers.

NAPPE PLANE INDÉFINIE; COURANTS PARALLÈLES, DENSITÉ DE COURANT CONSTANTE. — Cherchons l'action sur un point O situé à la distance r du plan de la nappe. Coupons par un plan passant par le point O et perpendiculaire à la direction des courants; soit CAB l'intersection. Décomposons la nappe en courants de largeur dx situés à une distance $AD = x$, du pied de la perpendiculaire OA. Soit AOD = θ .

Le courant qui passe dans la bande dx a une intensité ϵdx , si ϵ est la densité. Le champ qu'il crée en O est dirigé suivant la direction OD' normale à OD. Son intensité est (§ 141) :

$$2\epsilon dx : \rho.$$

Sa composante suivant OA' est :

$$\frac{2\epsilon dx}{\rho} \cos \theta = 2\epsilon d\theta.$$

L'élément dx , situé en D₁ symétrique de D par rapport à A, donne un champ symétrique de OD' par rapport à OA'. La résultante

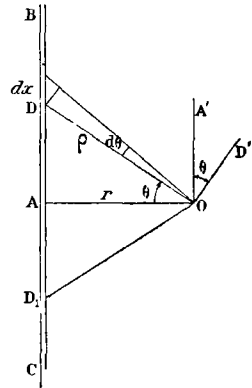


Fig. 68.

est donc un champ parallèle à la nappe de courant, perpendiculaire à la direction des courants, dirigé suivant la règle d'Ampère, indépendant de la distance r et égal à :

$$\int_0^\pi 2 \epsilon \, d\theta = 2\pi\epsilon.$$

NAPPE CYLINDRIQUE CIRCULAIRE DE RAYON R ; COURANTS D'ÉGALE DENSITÉ, PARALLÈLES AUX GÉNÉRATRICES.

L'action d'une telle nappe est nulle sur tout point intérieur.

La démonstration est analogue à celle du § 33 (fig. 20).

Soit A un point quelconque; menons par ce point deux droites déterminant un angle infiniment petit $d\theta$ et séparant dans la nappe deux courants rectilignes et indéfinis d'intensité totale ϵdS et $\epsilon dS'$; dS et dS' sont des arcs de circonférence qui font avec la direction dS , dS' le même angle α . Ces deux courants produisent au point A des actions électromagnétiques normales à la droite qui joint le point A aux éléments, ayant par conséquent la même direction, et de sens contraires. Elles ont pour expressions :

$$2\epsilon \frac{dS}{r} = \frac{2\epsilon d\theta}{\sin \alpha}, \quad 2\epsilon \frac{dS'}{r'} = \frac{2\epsilon d\theta}{\sin \alpha};$$

elles se détruisent donc. Or on peut décomposer le cylindre, sans rien en négliger, en groupes de deux éléments dont les actions s'équilibrent. Le champ total est donc nul.

L'action sur un point extérieur est la même que si tout le courant $I = 2\pi R\epsilon$ passait dans l'axe de la nappe.

En effet, par raison de symétrie, les lignes de force sont des cercles situés dans un plan normal au cylindre circulaire, et concentriques à ce cylindre. Soit r le rayon de l'une d'elles et F le champ. Le travail d'un pôle pour un tour complet est $4\pi I$ (§ 143). On a donc :

$$2\pi rF = 4\pi I, \quad F = \frac{2I}{r}.$$

NAPPE CYLINDRIQUE; COURANTS D'ÉGALE DENSITÉ, NORMAUX AUX GÉNÉRATRICES. — C'est le solénoïde ordinaire. Soit n le nombre de spires par unité de longueur, I le courant qui passe dans le fil; le solénoïde équivaut à une nappe de densité :

$$\epsilon = nI.$$

NAPPE SPHÉRIQUE PRODUISANT A L'INTÉRIEUR DE LA SPHÈRE UN CHAMP UNIFORME. — Il suffit d'enrouler le fil qui conduit le courant de manière que le nombre de tours compris entre deux petits cercles soit proportionnel à la distance des plans de ces cercles. On obtient ainsi l'équivalent d'une sphère uniformément polarisée (§ 114). Un bobinage régulier de fil uniforme satisfait à la condition.

Action des champs sur les courants.

152. Hypothèse fondamentale. — *Un courant placé dans un champ tend à se déplacer comme le ferait un feuillet de même contour ; il importe peu que le champ soit dû à des aimants ou à d'autres courants.*

Cette règle résout tous les problèmes qui se rapportent à des circuits fermés, et quand on veut calculer seulement l'action totale.

Nous avons démontré au § 58 que *l'énergie potentielle d'un feuillet est égale au produit de la puissance par le flux qui pénètre par la face positive.*

Les déplacements se font spontanément, de manière que l'énergie potentielle diminue ; *un feuillet tend donc à se déplacer de manière que le flux qui pénètre par la face négative croisse.*

En définitive, soit a une variable qui repère le déplacement ; soit \mathcal{F} le flux positif, c'est-à-dire pénétrant par la face négative et traversant le feuillet dans le sens de la normale positive : le travail correspondant au déplacement da est $\Phi d\mathcal{F}$; la force suivant le déplacement est :

$$F = \Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

D'après l'hypothèse, cette règle s'applique immédiatement aux courants. Quand le courant est évalué en ampères, la force est :

$$F = \frac{I}{10} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

Quand a est une longueur, F est une force évaluée en dynes. Quand a est un angle, F est un couple évalué en ergs.

153. Loi de Laplace. — La variation du flux, quand le feuillet se déplace, est due aux déplacements des éléments qui forment son pourtour. Ainsi l'élément a_1b_1 venant en a_2b_2 coupe un certain nombre de lignes de force ; d'où une certaine variation du flux.

Admettons que le travail qui provient de cette variation est précisément dû à la force qui agit sur l'élément a_1b_1 , quels que soient la forme et le déplacement du reste du circuit.

Cette hypothèse correspond à celle du § 139.

Pour que le travail dû au déplacement $\overline{b_1b_2}$ donné soit maximum, c'est-à-dire pour que la variation du flux soit maxima, il faut que $\overline{b_1b_2}$ soit normal à l'élément. L'aire du parallélogramme $a_1b_1b_2a_2$ est alors égale à : $ds \cdot \overline{b_1b_2}$, puisqu'il devient un rectangle. Il faut encore que cette aire soit le plus près d'être normale

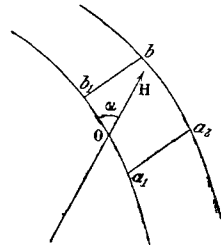


Fig. 69.

au champ H ; $b_1 b_2$ est donc aussi normal au champ, et par conséquent normal au plan qui passe par l'élément de courant et le champ. La variation du flux est alors : $ds \cdot \sin \alpha \cdot H \cdot \overline{b_1 b_2}$; la force en jeu est égale au travail divisé par le déplacement, soit :

$$H\Phi ds \cdot \sin \alpha.$$

La force est donc définie en grandeur et en direction. Il ne reste plus qu'à connaître son sens.

Je dis qu'elle est dirigée vers la gauche du bonhomme d'Ampère, placé sur le courant de manière à être traversé des pieds à la tête et regardant dans le sens des lignes de force. Supposons le champ dirigé vers l'arrière du tableau; quatre hypothèses sont possibles au sujet du déplacement de l'élément.

Dans les hypothèses I et II, le feuillet présente sa face $+$. En I le

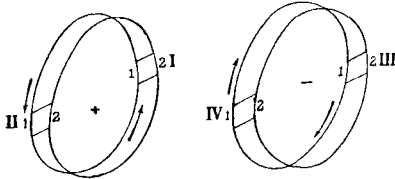


Fig. 70.

déplacement augmente le flux total négatif, il amène une diminution du flux : la force s'oppose au déplacement. En II le déplacement de l'élément diminue le flux négatif : la force aide le déplacement. On voit que la force est dirigée vers la gauche du bonhomme qui, convenablement placé

sur le circuit, nous tourne le dos et regarde dans le sens des lignes de force.

Même démonstration pour les cas III et IV.

En définitive, un champ H exerce sur un élément de courant ds , dont l'intensité évaluée en CGS est I , une force :

$$HI \sin \alpha ds,$$

normale au plan du champ et de l'élément; elle est dirigée vers la gauche du bonhomme convenablement placé sur le courant et regardant dans le sens des lignes de force.

Si le courant est évalué en ampères, la force est :

$$0,1 HI \sin \alpha ds.$$

Suivant les cas, nous utiliserons la loi de Laplace ou la loi du § 152. Elles sont strictement équivalentes pour un circuit fermé. La seconde implique une hypothèse supplémentaire.

Nous pouvons poser à propos de cette seconde loi de Laplace la même question qu'au § 139 : que faut-il penser de sa réalité?

Du point de vue expérimental, le problème actuel est très différent de celui du § 139. Si en effet nous ne pouvons ni créer un courant ouvert, ni isoler l'action magnétique d'un élément d'un courant fermé, nous pouvons parfaitement isoler mécaniquement un élément d'un courant

fermé, par exemple au moyen de contacts liquides ou de pivots qui ne gênent en rien le passage du courant.

Rien n'empêche donc d'étudier l'action d'un champ sur un élément de courant : nous donnons ci-dessous plusieurs exemples de cette étude. Il semble bien que la loi de Laplace représente les phénomènes.

154. Expression analytique de la loi de Laplace. — Nous n'avons qu'à appliquer les formules du § 23. Les composantes de l'élément sont dx, dy, dz ; les composantes de la force magnétique sont X, Y, Z ; les composantes de la force électromagnétique sont en CGS :

$$I(Zdy - Ydz), \quad I(Xdz - Zdx), \quad I(Ydx - Xdy).$$

CAS PARTICULIER. — Le champ est créé par un pôle unique unité situé à la distance r de l'élément; ses cosinus directeurs, là où se trouve l'élément, sont λ, μ, ν . La force électromagnétique a pour composantes :

$$\frac{I}{r^2}(\nu dy - \mu dz), \quad \frac{I}{r^2}(\lambda dz - \nu dx), \quad \frac{I}{r^2}(\mu dx - \lambda dy).$$

Ce sont les expressions du § 140; l'action d'un élément sur un pôle est par conséquent égale et de sens contraire à l'action du pôle sur l'élément. Le sens est bien contraire, car λ, μ, ν , se rapportent au § 140 à la direction *élément-pôle*; ils se rapportent ici à la direction *pôle-élément*.

Une difficulté apparaît immédiatement : nous admettons, au § 140, que l'action d'un élément de courant sur un pôle est appliquée au pôle; nous admettons ci-dessus que l'action d'un pôle sur un élément de courant est appliquée à l'élément. *Les forces, égales et de sens contraires, ne sont donc pas opposées; l'une ne peut être équilibrée par l'autre que grâce à l'adjonction d'un couple.*

Cette conséquence n'a rien de surprenant; d'ailleurs il n'en résulte aucun inconvénient pratique.

Nous avons déjà fait observer (§ 139) que *seul* le champ d'un circuit fermé intervient dans les expériences. Peu importe dès lors le point d'application réel des forces dues à chaque élément, pourvu que la résultante de tous les couples provenant des différents choix pour la position de ces points, soit nulle quand il s'agit d'un circuit fermé.

Nous admettrons donc les propositions suivantes :

1° on peut calculer les actions des courants sur les aimants et réciproquement par les deux lois dites de Laplace (§§ 139 et 153);

2° le point d'application réel de l'action d'un champ sur un élément de courant est l'élément lui-même, ainsi que le prouve l'expérience de Faraday (Cours de Première, § 35, fig. 33);

3° le point d'application de l'action d'un élément sur un pôle peut être mis sur le pôle, pourvu que le calcul porte sur un circuit fermé, seul cas expérimentalement réalisable.

Dans cette dernière proposition, nous ne préjugeons en rien la position réelle du point d'application : il est même possible que le problème de sa détermination soit un non-sens.

155. Cadre plan tournant dans un champ uniforme autour d'un axe passant par les spires. Galvanomètre à cadre mobile.

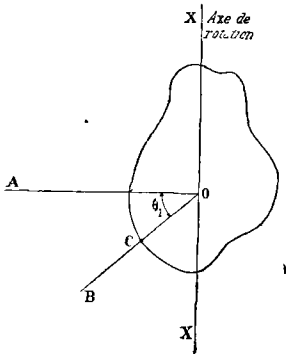


Fig. 71.

— Fixons la position du cadre par la direction d'une droite OB invariablement liée au cadre, normale à l'axe XX et située dans le plan des spires. Soit n le nombre des spires, S la surface de chacune d'elles, H l'intensité de la composante du champ normale à l'axe de rotation, θ l'angle que fait la droite OB avec la direction du champ. Le flux à travers le cadre est :

$$nSH \sin \theta.$$

Le couple en ergs est :

$$\frac{InSH}{10} \frac{d \sin \theta}{d \theta} = \frac{InSH}{10} \cos \theta.$$

Il est maximum et égal à $0,1 \cdot nSIH$, quand le plan des spires est parallèle au champ : au voisinage de cette position, il reste naturellement constant.

La théorie du galvanomètre à cadre mobile se déduit immédiatement de cette formule. Soit $C\theta$ le couple dû à la réaction élastique des fils de suspension ; la condition d'équilibre est :

$$\frac{InSH \cos \theta}{10} = C\theta.$$

Si θ est petit :

$$I = \frac{10 C}{nSH} \theta.$$

Nous pouvons arriver aux mêmes résultats par un raisonnement un peu différent. Un circuit plan de surface S , traversé par un courant I (en ampères), est équivalent à un aimant dont le moment est normal au plan du circuit et égal à : $\frac{SI}{10}$. S'il y a n feuillets parallèles et égaux, le moment de l'ensemble est : $\frac{nSI}{10}$. Ce système placé dans un champ uniforme H subit un couple ; si φ est l'angle de la normale au plan des courants et de la direction du champ, le couple est (§ 130 : $\frac{nSI}{10} H \sin \varphi$.

Or il est clair que θ et φ sont complémentaires ; on retrouve donc la formule donnée plus haut.

156. **Électrodynamomètre.** — Le champ uniforme dans lequel tourne le cadre peut être produit par le passage d'un courant dans une autre bobine. Nous avons vu qu'une bobine, comme celle d'un galvanomètre, produit un champ qui peut être considéré comme uniforme dans un certain espace. Installons dans cet espace une bobine mobile autour d'un axe. Ce qui revient au même, disposons autour de la bobine mobile de la figure 71 un cadre fixe donnant, par le passage du courant I' , un champ : $H = GI'$, dirigé comme l'indique la figure.

Le couple qui s'exerce sur la bobine mobile est :

$$IHnS \cos \theta = II' . GnS \cos \theta ;$$

il est proportionnel au produit des intensités des deux courants qui parcourent la bobine fixe et la bobine mobile. Imaginons que dans sa position d'équilibre, quand il ne passe pas de courant, le plan des spires de la bobine mobile soit parallèle au champ créé par la bobine fixe ; supposons l'angle θ petit ($\cos \theta = 1$ sensiblement ; appelons $C\theta$, comme plus haut, le couple qui résulte de la torsion θ des fils qui suspendent la bobine mobile.

Lançons les courants I et I' , on a :

$$C\theta = II'GnS ;$$

θ mesure le produit II' .

Mais nous pouvons mettre les deux bobines *en série*, c'est-à-dire les intercaler sur le même circuit :

$$I = I' ; \quad \text{d'où :} \quad I^2 = \frac{C}{GnS} \theta.$$

La déviation θ mesure le carré de l'intensité du courant.

Cet appareil ainsi employé a dans certains cas un grand avantage sur le galvanomètre : le sens de la déviation est indépendant du sens du courant. En effet, si on renverse le courant, on change à la fois le sens du champ créé par la bobine fixe et le signe des faces de la bobine mobile : le déplacement tend donc à se faire dans un sens invariable.

Supposons que la bobine fixe soit symétrique de manière que le champ, au centre de cette bobine, soit normal au plan des spires. Pour $\theta = 0$, le plan des spires de la bobine fixe et celui des spires de la bobine mobile sont rectangulaires. Quand on fait passer les courants, le déplacement se fait de manière que les plans tendent à devenir parallèles, et dans un sens tel que les spires des deux bobines soient parcourues par des courants de même sens. C'est ce qu'on vérifiera très aisément en appliquant les règles données.

SENSIBILITÉ DES ÉLECTRODYNAMOMÈTRES.

$$S = \frac{d\theta}{dI} = \frac{2GnS}{C} I.$$

Elle croît proportionnellement à l'intensité du courant. C'est ce qui rend la mesure des courants faibles très difficile. Dans l'énoncé de la sensibilité, il est donc nécessaire de spécifier l'intensité du courant.

157. **Électrodynamomètre absolu.** — Soit un cylindre MN sur lequel est enroulée régulièrement une couche de fil isolé. Il y a m spires par centimètre. Nous savons que s'il passe dans ce fil I' ampères, le champ à l'intérieur de la bobine suffisamment loin des bases est

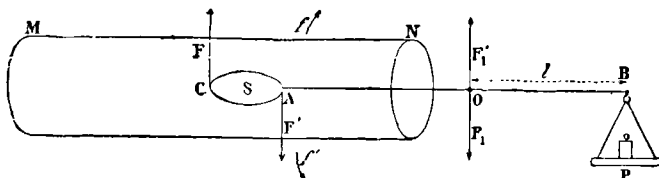


Fig. 72.

uniforme, parallèle aux génératrices du cylindre ; son intensité est donnée par la formule :

$$H = 0,4 \cdot \pi m I'.$$

Soit maintenant un circuit plan d'aire S placé parallèlement au champ. Imaginons qu'il puisse tourner autour d'un axe horizontal normal aux génératrices du cylindre (par conséquent aux lignes de force du champ) et qu'il soit parcouru par le courant I ; il est soumis à un couple dont le moment est en ergs :

$$0,4 SHI = 0,04 \cdot \pi m S I I' = 0,04 \cdot \pi m S I^2,$$

quand les bobines sont en série. Si nous parvenons à mesurer ce couple en CGS, comme la détermination du nombre m est facile, comme d'ailleurs nous pouvons mesurer en centimètres carrés l'aire du circuit S , nous pourrions calculer en ampères l'intensité du courant.

Pour mesurer le couple, supposons que le circuit S soit fixé au bout d'un fléau de balance, dont l'axe de rotation O (arête du couteau) est horizontal et normal aux génératrices du cylindre. Le poids du circuit est équilibré par le poids P , quand il ne passe pas de courant. Le couple que nous voulons évaluer peut être représenté par deux forces égales F et F' , verticales, placées à la distance CA l'une de l'autre ; le produit $CA \cdot F$ est son moment. Par le point O faisons passer deux forces égales et parallèles aux forces F et F' . Les quatre forces égales F, F', F_1, F_1' , forment deux couples. L'un FF_1 a pour

moment $\overline{CO} \cdot F$; l'autre $F'F'$, a pour moment $\overline{OA} \cdot F$. Ils tendent à faire tourner le système autour de l'axe O , le premier dans le sens de la flèche f , le second dans le sens de la flèche f' . Leur résultante est égale à un couple de moment :

$$(\overline{CO} - \overline{OA})F = \overline{CA} \cdot F,$$

qui tend à faire tourner le système dans le sens de la flèche f . Nous venons de démontrer dans un cas particulier ce théorème général : on peut transporter un couple en un point quelconque de son plan ; autrement dit, un couple est complètement défini par la *direction et la grandeur* de son axe.

Il devient dès lors très facile de mesurer le couple résultant : soit l la distance OB , p le poids en dynes qu'il faut *retrancher* du poids P pour maintenir l'équilibre, lors du passage du courant ; on a :

$$lp = 0,04 \cdot \pi m S I^2.$$

Cet appareil porte le nom d'électrodynamomètre absolu, parce qu'on peut, grâce à lui, déterminer la valeur d'un courant en ampères par des mesures de longueurs, de surfaces, et à l'aide de poids. Il sert à étalonner les ampèremètres. Bien entendu, le circuit S peut être formé d'une bobine : on y amène le courant à l'aide de deux conducteurs isolés le long du fléau, et se reliant à deux bornes extérieures au fléau par deux spirales de fil fin dont les axes coïncident avec le couteau. Ces spirales ne gênent en rien les petits mouvements du fléau.

158. Déformation d'un circuit non rigide sous l'action du champ qu'il produit. — Un circuit parcouru par un courant s'envoie dans lui-même un flux positif : les actions électromagnétiques tendent donc à produire des déformations du circuit qui augmentent la grandeur du flux. Généralement l'aire du circuit tend à croître. Une expérience célèbre d'Ampère confirme ces prévisions. Une boîte d'acajou $ABCD$ est divisée en deux compartiments par une cloison EF : elle est remplie de mercure. Le courant arrive en M , sort en N ; il passe d'une cuve à l'autre grâce au petit pont de platine $abcd$ (fig. 73).

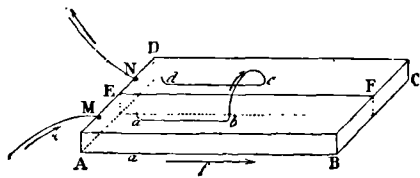


Fig. 73.

Si le mercure est bien propre, le pont est repoussé dans le sens de la flèche f : l'aire du circuit croît.

159. Actions réciproques de deux courants parallèles. — Comme application de la loi de Laplace, nous allons calculer l'action

d'un courant rectiligne indéfini AB d'intensité I sur un élément fini de courant rectiligne et parallèle A'B' d'intensité I'. Le sens des courants est indiqué par les flèches.

Le champ H que produit le courant AB, en un point quelconque de la droite A'B', est normal au plan du tableau, dirigé vers l'arrière et égal à :

$$H = \frac{0,2 \cdot I}{r},$$

en appelant r la distance $\overline{OO'}$ des deux courants.

Ce champ H produit, d'après la loi de Laplace, une force :

$$\frac{I' ds \sin \alpha}{10},$$

normale au plan passant par l'élément et le champ. Or ici :

$\alpha = \frac{\pi}{2}$; soit L la longueur

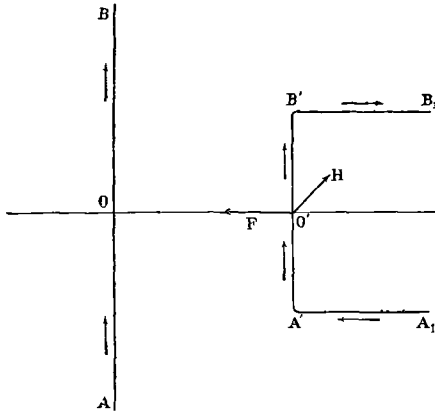


Fig. 74.

$\overline{A'B'}$. La résultante de toutes les actions est :

$$0,4 \cdot LI' \times \frac{0,2 \cdot I}{r} = 0,02 \frac{LI I'}{r}.$$

D'après la règle du bonhomme d'Ampère, cette résultante est une attraction F. Si l'on renverse le sens de l'un des courants, elle devient une répulsion. On peut dire que deux courants parallèles s'attirent s'ils sont de même sens, se repoussent s'ils sont de sens contraires.

Le courant A'B' se ferme par deux conducteurs B₁B' et A₁A' parallèles entre eux et normaux à AB.

D'après la loi de Laplace, le courant rectiligne indéfini exerce sur B₁B' des forces situées dans le plan du tableau, qui décroissent en raison inverse de la distance et qui sont dirigées vers le haut.

Il exerce sur A₁A' des forces symétriques des précédentes par rapport à OO'; elles sont dirigées vers le bas. Si le circuit n'était pas rigide, ces forces tendraient à augmenter sa surface. Quand le circuit est rigide, elles se font équilibre.

On parvient aux mêmes résultats par l'application de la première règle. Le déplacement tend à se faire de manière que le flux qui entre par la face négative soit maximum. Déplaçons le circuit A₁A'B'B₁ de manière que A'B' se rapproche du fil AB de la quantité dr . L'accroissement de surface est l'aire Ldr d'un rectangle; le flux gagné est donc :

$$LdrH = \frac{Ldr \cdot 0,2 \cdot I}{r}.$$

Le travail effectué est :

$$\frac{L dr \cdot 0,2 \cdot I}{r} \cdot 0,4 \cdot I'.$$

Donc la force, quotient du travail par le déplacement, est :

$$0,02 \cdot \frac{LI I'}{r}.$$

160. Nécessité de remplacer dans toutes les règles précédentes le flux de force par le flux d'induction. — Nous nous appuyons dans tout ce qui précède sur les variations du *flux de force magnétique*; mais il se peut que la surface qui s'appuie sur le courant et à travers laquelle nous calculons le flux et ses variations, traverse des masses magnétiques. Ce n'est plus le flux de force qu'il faut alors considérer, mais le *flux d'induction*. Comme en dehors des masses ces deux flux sont identiques, il est plus correct d'énoncer la loi générale sous la forme suivante :

Quand un circuit traversé par un courant se déplace dans un champ magnétique d'une position 1 à une position 2, le travail effectué par le champ est égal au produit de la puissance du feuillet équivalent ($0,4 \cdot I$, si l'intensité I est exprimée en ampères) par l'augmentation $\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$ du flux d'induction à travers une surface quelconque limitée à ce circuit et entraînée par lui. La force suivant une variable a quelconque est égale à :

$$\Phi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = 0,4 \cdot I \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}.$$

Voici un exemple qui montre l'importance de ces considérations : nous le retrouverons à propos des phénomènes d'induction, et nous verrons alors tout son intérêt.

Soit à calculer l'action sur une bobine d'un aimant SN symétrique par rapport à son plan équatorial; les axes de l'aimant et de la bobine coïncident. La bobine tourne sa face négative (pôle sud ou négatif de l'aimant ou du feuillet équivalent) vers la gauche.

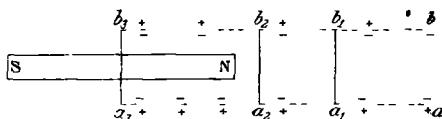


Fig. 75.

Elle est d'abord placée très loin à droite : elle est attirée par l'aimant ; on déduit cette attraction soit de l'assimilation de la bobine à un aimant, soit de la règle du flux de force.

Pour appliquer cette règle il faut choisir une surface particulière, limitée par la bobine et entraînée par elle dans son mouvement ; nous pouvons prendre d'abord un cylindre indéfini vers la droite dont les génératrices sont parallèles à l'axe de l'aimant et qui s'arrête

à la bobine. La face négative de ce cylindre est à l'intérieur ; la face positive à l'extérieur. Il devient évident, du seul fait que l'aimant est symétrique par rapport à son plan équatorial, que le flux croît à mesure que la bobine se rapproche de la position équatoriale a_3b_3 , qui est par conséquent une position d'équilibre stable ; le flux est alors maximum. En effet, les lignes de force de l'aimant coupent normalement le plan équatorial de cet aimant.

Tout se calcule alors par le flux de force, puisque la surface d'intégration ne traverse jamais de masses magnétiques.

Mais prenons pour surface d'intégration le plan même de la bobine ; pour que les règles aient un sens, nous devons retrouver les mêmes résultats. Or c'est évidemment impossible si nous utilisons le flux de force ; en particulier pour un aimant très allongé, la bobine dans la position a_3b_3 est traversée par un flux de force quasiment nul, puisque par hypothèse les masses libres sont très éloignées de tous les points de la surface d'intégration.

Considérons au contraire le flux d'induction. Soit \mathfrak{J} l'intensité d'aimantation sur la surface équatoriale de l'aimant, s l'aire de sa section droite ; le flux du vecteur $4\pi\mathfrak{J}$ à travers une spire de la bobine est $4\pi\mathfrak{J}s$. Quant au flux de force, il est dirigé en sens contraire, c'est-à-dire vers la gauche ; soit φ sa valeur absolue à travers une spire. Le flux d'induction est : $4\pi\mathfrak{J}s - \varphi$.

Il est précisément égal au flux de force à travers la surface cylindrique b_3baa_3 , d'après la propriété générale du flux d'induction.

Nous pouvons déduire de ces considérations une proposition qui nous sera utile dans la suite.

D'après la propriété générale du flux de force à travers une surface fermée, $\sum 4\pi m$ est la somme du flux \mathcal{F} à travers le cylindre b_3baa_3 vers l'extérieur, et du flux φ à travers le plan b_3a_3 vers la gauche :

$$\sum 4\pi m = \mathcal{F} + \varphi.$$

On a donc :

$$\mathcal{F} = \sum 4\pi m - \varphi = 4\pi\mathfrak{J}s - \varphi, \quad \mathfrak{J}s = \sum m.$$

Ainsi le flux d'induction à travers la section droite équatoriale de l'aimant mesure la somme des masses contenues dans l'une ou l'autre moitié de l'aimant. Nous appliquerons plus loin ce théorème.

161. Actions réciproques de deux éléments de courants. Formules diverses. — Les deux lois de Laplace (§§ 139 et 153) permettent de calculer l'action d'un élément d'un courant ds_1 sur un autre élément de courant ds_2 . Elles conduisent à des conséquences singulières. Montrons sur un cas particulier que *la force exercée par ds_1 sur ds_2 n'est ni égale, ni opposée à la force exercée par ds_2 sur ds_1 .*

Soit O et O' (fig. 76) deux points des éléments ds_1 et ds_2 ; faisons

passer des plans par OO' et par les éléments. Supposons, pour faciliter la représentation, que ces plans, qui font généralement l'angle ψ , sont normaux entre eux. Choisissons convenablement les axes des coordonnées, nous pouvons situer ds_1 dans le plan yOz , ds_2 dans le plan yOx .

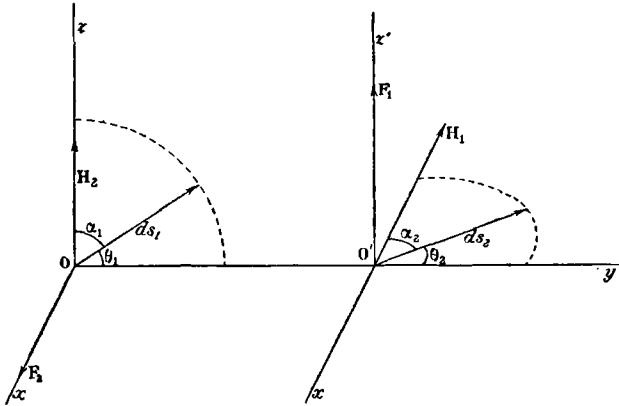


Fig. 76.

H_1 est le champ créé au point O' par ds_1 ; F_1 est la force électromagnétique qui en résulte sur ds_2 . On a :

$$H_1 = i_1 ds_1 \frac{\sin \theta_1}{r^2}, \quad F_1 = i_2 ds_2 H_1 \sin \alpha_2 = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}.$$

H_2 est le champ créé au point O par ds_2 ; F_2 est la force électromagnétique qui en résulte sur ds_1 . On a :

$$H_2 = i_2 ds_2 \frac{\sin \theta_2}{r^2}, \quad F_2 = i_1 ds_1 H_2 \sin \alpha_1 = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{r^2}.$$

F_1 et F_2 sont rectangulaires et n'ont pas la même valeur.

ds_1 peut agir sur ds_2 ($F_1 > 0$) sans que ds_2 agisse sur ds_1 ($F_2 = 0$); il suffit de faire : $\theta_1 = \pi ; 2$.

Ces résultats n'ont rien de surprenant si nous nous rappelons qu'au moins la première loi de Laplace est absolument arbitraire. Elle donne le résultat exact pour un courant fermé, *mais une infinité de lois élémentaires sont dans le même cas.*

162. Formule d'Ampère. — On peut donc se proposer de trouver une loi élémentaire d'action entre deux éléments de courants qui satisfasse à une condition imposée d'avance. Par exemple Ampère, l'illustre savant qui le premier aborda l'étude du problème, voulait que *les actions réciproques de deux éléments ds_1 , ds_2 , fussent égales, de sens opposés et dirigées suivant la droite qui joint les éléments, de*

manière que le principe de l'action et de la réaction fût satisfait pour tout système de deux éléments.

Voici la formule qui résout le problème.

Plaçons ds_1 dans le plan yOz (fig. 77). Par OO' et ds_2 menons un plan; il fait avec yOz l'angle ψ ; ψ est l'angle plan du dièdre formé

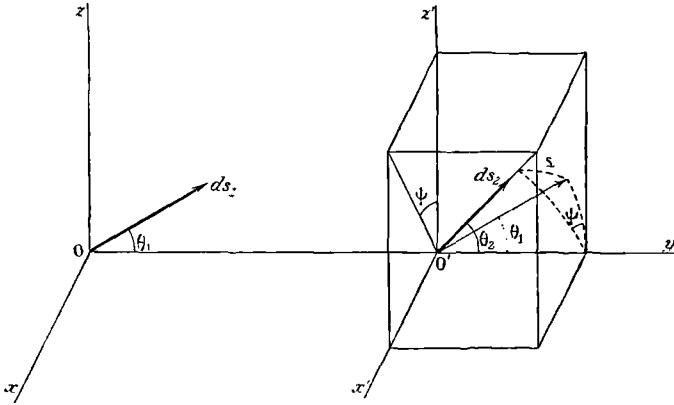


Fig. 77.

par les plans passant par OO' et par l'un ou l'autre des éléments. (Le cas particulier traité plus haut correspond à l'hypothèse: $\psi = \pi : 2$.) Soit θ_1 et θ_2 les angles des éléments avec la droite OO' .

La formule d'Ampère est :

$$d^2F = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \psi - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}.$$

Elle prend une autre forme en introduisant l'angle ε que font les deux éléments; on a :

$$\cos \varepsilon = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \psi,$$

$$d^2F = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \frac{2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2}.$$

Comme exercice nous conseillons au lecteur de reprendre le calcul (§ 159) de l'action d'un courant rectiligne indéfini sur une portion de courant rectiligne, en appliquant la formule d'Ampère.

La formule d'Ampère ne présente plus qu'un intérêt historique. C'est perdre son temps que de discuter les hypothèses sur lesquelles Ampère s'appuie pour l'établir, ou les conséquences qu'elle indique pour les actions de deux éléments dans des positions particulières. Si, cédant à un sentiment bien naturel, on veut prononcer le nom d'Ampère, il est plus à propos de rappeler qu'il a démontré le premier l'identité d'un petit circuit fermé traversé par un courant et d'un petit aimant normal à la surface limitée par le courant, identité

d'où découle immédiatement la notion de feuillet. Ce n'est donc pas faire tort à sa mémoire que de prendre pour point de départ cette notion dont il est le véritable inventeur.

163. **Énergie potentielle de deux courants en présence.** — Nous avons établi au § 68 l'expression de l'énergie potentielle de deux feuillets ; en vertu de l'hypothèse fondamentale du § 137, elle s'applique évidemment à deux circuits *fermés* parcourus par des courants.

$$W = -i_1 i_2 \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 = -i_1 i_2 \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2.$$

On peut écrire plus généralement :

$$W = -i_1 i_2 \iint \left(\frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2} \right) ds_1 ds_2,$$

φ étant une fonction de la distance seule des deux éléments, condition nécessaire et suffisante pour que φ disparaisse dans l'action de deux circuits *fermés*.

L'énergie mutuelle de deux portions *ouvertes* de circuits, d'extrémités A, B et C, D, peut donc se mettre sous la forme :

$$W = -i_1 i_2 \left[\iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 + \varphi_{AC} + \varphi_{BD} - \varphi_{AD} - \varphi_{BC} \right];$$

φ_{AC} est la valeur que prend la fonction φ relativement aux extrémités A et C ; et ainsi des autres symboles. Nous reviendrons là-dessus en traitant de l'induction électromagnétique.

Pour légitimer la formule d'Ampère, montrons qu'elle conduit à la même expression de l'énergie *pour des circuits fermés*.

Utilisant les relations démontrées au § 68, on peut écrire (en négligeant le facteur $i_1 i_2$) :

$$d^2 F = \frac{ds_1 ds_2}{r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} - 2r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} \right] = -4 \frac{ds_1 ds_2}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2}.$$

Considérons un élément ds_1 du circuit 1 (fig. 78), donnons au circuit 2 un petit déplacement de 2 en 2' ; calculons le travail effectué correspondant à ce déplacement.

La force $d^2 F$ étant considérée comme positive quand elle est attractive, le travail est en grandeur et en signe :

$$\delta dT = 4 ds_1 \int \frac{\delta r}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_2 = 8 ds_1 \int \delta \sqrt{r} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_2.$$

L'intégrale doit être étendue à tout le contour 2 ; le symbole δ représente la variation de la distance r ou d'une fonction quelconque de r pendant le déplacement. La simplicité de l'expression obtenue tient à ce que la force calculée par Ampère est précisément dirigée

suivant la droite qui joint les éléments. Son travail est par conséquent le produit de sa valeur par la variation δr de la distance.

Intégrant par parties et remarquant qu'on peut intervertir les signes δ et ∂ , on trouve :

$$\int \delta \sqrt{r} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_2 = \left[\delta \sqrt{r} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \right]_{O_2}^{O_3} - \int \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \cdot ds_2.$$

Le terme entre crochets est nul pour un circuit 2 fermé.

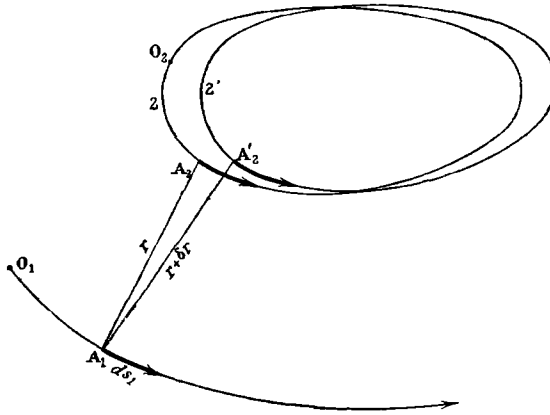


Fig. 78.

Le travail correspondant au déplacement de 2 en 2' est pour le circuit 1 fermé tout entier :

$$\delta T = -8 \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \cdot \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \cdot ds_1 ds_2.$$

Le mouvement relatif intervenant seul, les deux circuits doivent entrer de la même manière dans l'expression du travail ; on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta T &= -8 \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \cdot \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \cdot ds_1 ds_2 \\ &= -4 \iint \left[\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} + \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \delta \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \right] ds_1 ds_2, \\ \delta T &= -4 \delta \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc bien l'expression de l'énergie potentielle du § 68, puisqu'on doit avoir :

$$\delta T + \delta W = 0.$$

L'expression de l'énergie potentielle que nous venons d'obtenir n'a de sens que si le milieu indéfini dans lequel les circuits sont

plongés est homogène. Elle n'est numériquement exacte que pour le vide et les diélectriques non aimantables. Dans un milieu homogène indéfini *aimantable*, elle doit être multipliée par un facteur constant, la *perméabilité μ du milieu*. Ainsi des circuits plongés dans une dissolution de perchlorure de fer agissent l'un sur l'autre avec des forces plus grandes que dans l'air.

Si le milieu n'est pas homogène, si par exemple on introduit entre les circuits des pièces de fer de formes quelconques, il devient impossible d'exprimer *a priori* l'énergie potentielle par une formule. L'énergie reste bien égale au flux *d'induction* envoyé dans un des circuits par l'autre ; mais l'expression de ce flux dépend de la définition complète du milieu.

Nous retrouverons les mêmes questions à propos de l'induction et des écrans magnétiques.

CHAPITRE IV

DIVERSES FORMES DU TRANSPORT DE L'ÉLECTRICITÉ CONDUCTION ET CONVECTION

164. **Hypothèse fondamentale dans le cas d'un courant permanent.** — Supposons que pour une raison quelconque le potentiel ne soit plus constant à l'intérieur d'un corps conducteur : sa valeur V en chaque point est une fonction des coordonnées de ce point. Les composantes de la force électrostatique sont :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Nous admettrons, et c'est en cela que consiste la loi d'Ohm, qu'il se produit dans un conducteur homogène un courant dont les composantes u, v, w , par unité de surface, sont proportionnelles aux composantes de la force :

$$u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z};$$

ρ s'appelle la *résistivité*. Nous avons employé la lettre ρ pour désigner la densité de volume de l'électricité, mais il n'y a pas d'ambiguïté possible.

Nous n'avons pas spécifié ce que transporte ce courant u, v, w ; laissons-le encore indéterminé; admettons seulement que la *matière impondérable* transportée soit incompressible. Les quantités u, v, w , satisfont à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

ce qui revient à poser : $\Delta V = 0$. D'après l'équation générale qui donne la densité de volume de l'électricité, nous devons admettre *qu'à l'intérieur de tout conducteur parcouru par un courant permanent, il n'y a pas d'électricité libre* (§ 30).

A la surface de séparation de deux conducteurs 1 et 2 dont les

résistivités sont ρ_1 et ρ_2 , écrivons de même qu'il n'y a pas accumulation de la *matière* transportée par le courant :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0;$$

les dérivées sont prises par rapport aux variables n_1 et n_2 , mesurant les distances et comptées sur la normale à la surface de séparation, positivement vers l'intérieur de chacun des deux milieux.

L'expérience montre qu'au passage d'un conducteur à l'autre, il peut exister et se maintenir une brusque variation de potentiel E : c'est une *force électromotrice*; nous appellerons *électromoteurs* les appareils qui la produisent.

En définitive, dans l'état permanent les composantes u, v, w , de la vitesse du courant sont définies par les équations :

$$u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z}.$$

A travers une surface dS dont la normale est définie par les cosinus directeurs α, β, γ , passe dans l'unité de temps une quantité de *matière* impondérable :

$$di = (u\alpha + v\beta + w\gamma)dS :$$

i s'appelle *l'intensité du courant*.

Enfin la fonction V doit satisfaire aux relations suivantes :

- 1) $\Delta V = 0$, en tout point intérieur du conducteur,
- 2) $\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0, \\ \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_{12}, \end{aligned} \right\}$ en tout point de la surface de séparation de deux conducteurs,
- 3) $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_{12}$,
- 4) $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, en tout point de la surface de

contact d'un conducteur et d'un isolant.

Nous n'avons pas à spécifier la nature de la *matière* transportée.

On remarquera la grande analogie de ces hypothèses avec celles qui sont à la base de la Théorie de la Conductibilité calorifique (II, ch. XI).

165. Conducteurs cylindriques de faible section (fils). —

Dans un conducteur cylindrique et de faible section s , le courant a la direction même du conducteur (éq. 4 du § précédent) : les surfaces équipotentielles sont des sections droites.

Soit l la longueur comptée sur le fil à partir d'une origine quelconque; l'intensité du courant a pour expression :

$$i = -\frac{s}{\rho} \frac{dV}{dl}.$$

Ce courant ayant nécessairement une intensité constante tout le long du conducteur, $\frac{dV}{dl}$ est constant.

Soit V_1 et V_2 les potentiels en deux points A et B entre lesquels la longueur du fil est l ; on a :

$$\frac{dV}{dl} = \frac{V_2 - V_1}{l}, \quad i = \frac{s}{\rho l} (V_2 - V_1) = \frac{V_2 - V_1}{R}, \quad R = \rho \frac{l}{s};$$

$$iR = V_2 - V_1.$$

R est par définition la résistance du conducteur entre les points A et B.

La distribution des potentiels est absolument indépendante de la forme qu'on donne au circuit; le potentiel doit varier linéairement en fonction de la résistance et de manière que la différence des potentiels entre deux points quelconques soit égale au produit de l'intensité par la résistance entre ces deux points.

Nous sommes en état de faire la théorie complète de la distribution des courants dans un réseau quelconque de fils.

166. Lois de Kirchhoff. — Chaque point d'un réseau quelconque de fils est caractérisé par un potentiel, excepté les points sièges d'une force électromotrice où le potentiel subit une discontinuité mesurée par la force électromotrice.

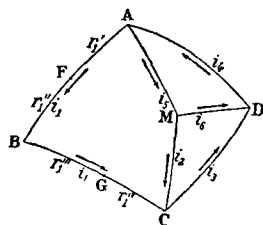


Fig. 79.

Tout point d'un fil tel que F peut être appelé *point double*, en ce sens qu'il y aboutit deux tronçons de fil AF et BF; un point tel que M est un point *multiple triple*, en ce sens qu'il y aboutit trois tronçons de fil, AM, DM, CM.

Traçons des flèches sur tous les circuits d'une manière absolument arbitraire; elles indiqueront des sens *géométriques* de circulation. Un courant i traversant AB est positif quand il est dirigé dans le sens de circulation arbitrairement choisi, dans le sens AB par conséquent.

Numérotons les parcours.

1^o *Exprimons que nulle part il n'y a accumulation de ce que transporte le courant.*

Le courant est donc constant sur tout parcours ne contenant pas de point multiple, c'est-à-dire de point triple, quadruple,

Aux points multiples la condition : $\sum i = 0$, doit être satisfaite.

Nous devons prendre positivement tous les courants qui d'après le sens de circulation choisi vont vers le point multiple considéré, négati-

tivement tous ceux qui d'après le sens de circulation choisi s'en éloignent; ou inversement. Ainsi nous écrirons :

$$i_2 + i_1 - i_3 = 0, \quad i_3 - i_6 - i_2 = 0, \quad i_4 - i_1 - i_3 = 0, \dots \quad (1)$$

Toutes ces équations ne sont pas distinctes.

REMARQUE. — On ne suppose en rien que les courants passent dans les sens de circulation choisis; mais la résolution du groupe (1) combiné avec le groupe (2) que nous allons écrire, donnera les courants i avec des signes; nous saurons alors, d'après la convention faite plus haut, comment ils sont dirigés par rapport aux sens de circulation purement conventionnels.

2° Soit un circuit simple quelconque ABC : supposons en F et en G des forces électromotrices E_F et E_G . Représentons par A, B, C, les potentiels en A, en B, en C.

Au point F il y a deux potentiels. Déplaçons-nous dans le sens de circulation; nous arrivons d'abord au potentiel F_a ($a = ante$) immédiatement avant le point F; puis brusquement nous passons au potentiel F_p ($p = post$) immédiatement après le point F. Écrivons la loi d'Ohm (§ 165).

Dans le fil AF,	$i_1 r'_1 = A - F_a;$
FB,	$i_1 r''_1 = F_p - B;$
BG,	$i_1 r'''_1 = B - G_a;$
GC,	$i_1 r''''_1 = G_p - C.$

Appelons r_1 la résistance du fil ABC entier; additionnons les équations :

$$i_1 r_1 = A - C + (F_p - F_a) + (G_p - G_a).$$

Posons : $E_F = F_p - F_a, \quad E_G = G_p - G_a;$

il vient la seconde loi de Kirchhoff :

$$i_1 r_1 = A - C + \sum E.$$

Le produit de l'intensité par la résistance est égal à la différence des potentiels au début et à la fin du fil considéré parcouru dans le sens de circulation, plus la somme des forces électromotrices. Ces forces sont comptées positivement si, parcourant le fil dans le sens de circulation, le potentiel croît brusquement; elles sont comptées négativement, quand le potentiel décroît brusquement.

3° Soit enfin un circuit fermé quelconque, ABCMDA par exemple.

Suivant ABC, on a : $i_1 r_1 = A - C + \sum E_1;$

CM, $-i_2 r_2 = C - M - \sum E_2;$

MD, $i_3 r_3 = M - D + \sum E_3;$

DA, $i_4 r_4 = D - A + \sum E_4.$

Additionnons, il vient : $\sum ir = \sum E. \quad (2)$

Les i doivent être pris positivement quand, *parcourant dans un sens unique le parcours fermé*, on se trouve justement marcher dans le sens primitivement choisi comme sens de circulation ; les i sont pris négativement dans le cas contraire. Les E sont pris positivement quand, *parcourant dans un sens unique le parcours fermé*, le potentiel croît brusquement ; ils sont pris négativement dans le cas où le potentiel décroît brusquement.

Les groupes (1) et (2) d'équations résolvent complètement le problème posé.

En particulier si on se donne, comme d'habitude, les résistances et les forces électromotrices, on peut calculer les intensités dans tous les circuits.

167. Corollaires généraux des lois de Kirchhoff.

1° Il résulte immédiatement de la forme linéaire des lois de Kirchhoff *par rapport aux intensités et aux forces électromotrices*, que la superposition de plusieurs états d'équilibre est un état d'équilibre.

En particulier, dans un circuit quelconque, avec des forces électromotrices quelconques, l'intensité dans une branche quelconque est la somme des intensités qui seraient dues aux forces électromotrices existant séparément. On suppose bien entendu qu'en supprimant ou installant une force électromotrice, on ramène la résistance du conducteur correspondant à sa valeur initiale.

Quand on superpose des états d'équilibre, on doit donc additionner *pour chaque conducteur* les intensités et les forces électromotrices ; on doit additionner *en chaque point de chaque conducteur* les potentiels qui correspondent à ces états.

2° Quand l'intensité est nulle dans un conducteur AB, sa résistance r n'intervient pas dans les équations. On ne change donc pas les intensités dans les autres conducteurs en modifiant r , *que le conducteur AB contienne ou non des forces électromotrices*. On peut donc couper le conducteur AB, ce qui revient à faire r infini.

C'est d'ailleurs évident *a priori*. Si AB contient des forces électromotrices de somme E , dire qu'il n'y passe pas de courant, c'est dire que E équilibre la différence de potentiel entre les extrémités A et B. Or cet équilibre ne dépend pas de la résistance r .

3° Quand l'intensité est nulle dans un conducteur AB qui ne contient pas de force électromotrice, le potentiel est le même en tout point du conducteur et en particulier aux extrémités A et B. On peut donc les réunir directement (ce qui revient à rendre nulle la résistance AB) sans que les courants soient modifiés dans les autres conducteurs du système.

4° Si une force électromotrice placée sur un conducteur AB n'envoie rien dans le conducteur XY, on ne change pas l'intensité du courant dans XY, pour un système quelconque de forces électromo-

trices, en modifiant n'importe comment la résistance du conducteur AB et naturellement aussi les forces électromotrices qu'il contient.

5° LOI DE RÉCIPROCITÉ. — Si une force électromotrice E placée sur la branche AB d'un système de conducteurs linéaires et agissant de A vers B, produit un courant i de X vers Y dans la branche XY, la même force électromotrice, introduite entre X et Y et agissant de X vers Y, produit le même courant i de sens AB dans le conducteur AB.'

Il serait trop long de donner la démonstration des deux derniers théorèmes.

6° Considérons deux points A et B d'un système de conducteurs, possédant actuellement des potentiels A et B. Réunissons-les par un conducteur de résistance R; les potentiels en A et B deviennent A' et B'. *Cependant l'intensité dans le conducteur AB est donnée par la*

formule :

$$i = \frac{A - B}{R + r},$$

où r est la résistance du système primitif mesurée entre les points A et B considérés comme électrodes. Cela revient à dire que la formule d'Ohm est applicable non seulement aux électromoteurs simples et possédant des pôles bien définis, mais à un réseau quelconque considéré comme un électromoteur à pôles arbitraires, dont la force électromotrice est égale à la différence des potentiels préexistants aux points choisis comme pôles.

Voici la démonstration de cet important théorème.

Relions A et B par un fil de résistance R, mais simultanément compensons la force électromotrice A — B par une force électromotrice E égale et contraire. Il ne passe rien dans AB : nous ne changeons rien à l'état préexistant.

Supprimons toutes les forces électromotrices et installons seulement sur AB une force électromotrice égale à A — B et de même sens. Nous obtenons un courant :

$$i = \frac{A - B}{R + r},$$

où r a évidemment la définition précédente.

Superposons les deux états d'équilibre; nous avons un nouvel état d'équilibre. Dans le circuit AB existent maintenant deux forces électromotrices de sens contraires et égales en valeur absolue à A — B; c'est comme s'il n'en existait aucune. Dans le premier état d'équilibre, le courant dans AB est nul; il est i dans le second : il est donc encore i dans l'état d'équilibre somme des deux états. C. Q. F. D.

168. Étude générale du pont de Wheatstone. — Nous savons à quelle condition simple doivent satisfaire (Cours de Première, § 53)

les quatre résistances r_1, r_2, r_3, r_4 , pour qu'il ne passe rien dans le pont :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}.$$

Supposons que le pont ne soit pas absolument équilibré et cherchons l'intensité du courant dans le galvanomètre.

Soit γ le courant et g la résistance dans le circuit BD,
 π le courant et p la résistance CA.

Prenons le sens BD comme sens positif de circulation et soit E la force électromotrice de la pile. Les équations de Kirchhoff sont :

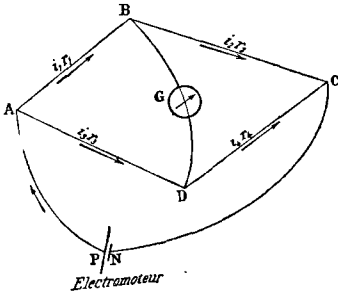


Fig. 80.

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + \gamma, & i_1 r_1 + \gamma g - i_3 r_3 &= 0, \\ i_3 + \gamma &= i_4, & i_2 r_2 - i_4 r_4 - \gamma g &= 0, \\ \pi &= i_1 + i_3, & p\pi + i_1 r_1 + i_2 r_2 &= E. \end{aligned}$$

Ces six équations du premier degré à six inconnues résolvent le problème. On trouve :

$$\gamma = \frac{E}{D} (r_2 r_3 - r_1 r_4),$$

$$D = pg(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + p(r_2 + r_4)(r_1 + r_3) + g(r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2).$$

On peut chercher la meilleure disposition pour la pile et le galvanomètre; on arrive à la règle suivante : *Si le galvanomètre est plus résistant que la pile, faire en sorte qu'il relie le point de jonction des deux plus grandes résistances qui sont alors r_1 et r_2 , au point de jonction des deux plus petites qui sont alors r_3 et r_4 .*

Quand on emploie un galvanomètre à cadre mobile dont la résistance est toujours grande, c'est ainsi qu'il faut procéder.

BOLOMÈTRE. — Un bolomètre est constitué (Cours de Mathématiques, § 181) par un fil métallique fin échauffé par la radiation dont on veut mesurer l'énergie. Il forme l'une des résistances r_1 d'un pont de Wheatstone; on mesure le courant γ , conséquence du dérèglement produit par l'échauffement. La formule précédente permet de discuter les conditions de sensibilité de l'appareil, c'est-à-dire le rapport :

$$d\gamma : dr_1.$$

169. Obtention d'un courant alternatif. — On utilise quelquefois, pour obtenir un courant alternatif lent, un appareil qui se ramène au pont de Wheatstone. Sur un conducteur circulaire dont la résistance par unité de longueur est constante, s'appuie un conducteur diamétral dont on fait varier l'azimut. Soit β la résistance AD, $R - \beta$

la résistance CD; suivant que β est $<$ ou $>$ $R : 2$, le courant dans BD passe dans un sens ou dans l'autre (fig. 81).

Soit p la résistance du circuit AC qui contient la pile, g la résistance du conducteur diamétral; soit π et γ les courants correspondants. On trouve soit directement, soit en particulierisant la formule générale du pont :

$$\gamma = E \frac{R - 2\beta}{K + 2\beta(R - \beta)}, \quad \frac{\gamma}{\pi} = \frac{R - 2\beta}{R + 2g}, \quad K = 2gp + R(p + g).$$

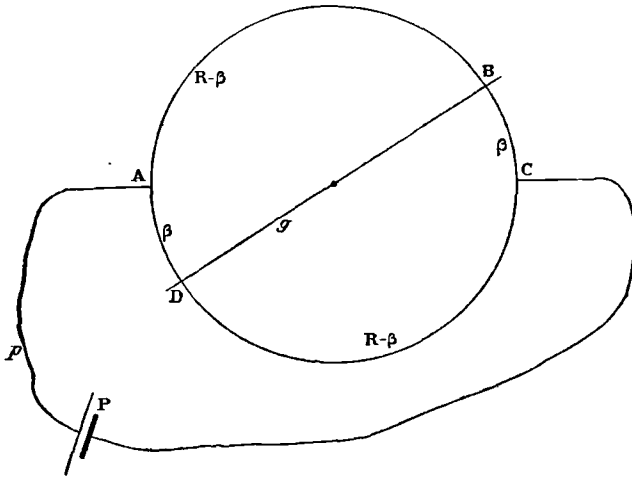


Fig. 81.

Quand on fait tourner le conducteur diamétral, la loi de variation du courant γ en fonction de β est donc assez complexe. Elle est représentée par la fig. 82; on suppose la rotation uniforme et on prend le temps pour variable. En particulier, il est bien clair que γ ne varie pas proportionnellement à β .

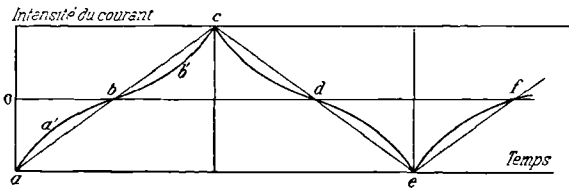


Fig. 82.

On a cru rendre la loi de variation du courant γ plus simple en mettant deux conducteurs diamétraux indépendants et de même résistance, à 90° l'un de l'autre. Mais un calcul facile donne une loi tout à fait semblable à la précédente :

$$\gamma = E \frac{R - 2\beta}{K + 2\beta(R - 2\beta)}.$$

Si pour une rotation uniforme du conducteur diamétral, on veut

une loi de variation déterminée du courant, par exemple linéaire ou sinusoïdale, force est de calculer convenablement la loi de variation de la résistance du cercle. Dans la pratique, ce cercle est formé de touches entre lesquelles sont installées les résistances.

170. Conduction dans un ou plusieurs milieux séparément homogènes. — Voici l'énoncé du problème pour l'état permanent.

1° A l'intérieur d'un milieu conducteur homogène, la condition :

$$\Delta V = 0,$$

est satisfaite. Elle exprime que la matière formant le courant se conduit comme un fluide incompressible. Les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles sont *les lignes de courant*; les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée forment *un tube de courant*. A l'intérieur d'un tube de courant, le flux est conservatif.

2° En tout point de la surface qui sépare le conducteur d'un isolant :

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0;$$

la variable ν est comptée suivant la normale. La condition exprime que le flux est tangentiel à la surface du conducteur, qu'il ne s'échappe rien dans l'isolant.

3° En tout point de la surface de séparation entre deux milieux différents, le potentiel peut varier brusquement : nous admettrons que *la variation est constante et caractérise les milieux considérés à la température considérée* (II, §§ 170 et sq.).

Il résulte de cette condition que les surfaces équipotentielles dans les milieux au contact aboutissent à des courbes communes (lignes équipotentielles) sur la surface de séparation.

Supposons tracé le faisceau de ces courbes ; leur numérotage diffère d'une quantité constante suivant qu'on les envisage comme appartenant au premier ou au second milieu. Mais leurs trajectoires orthogonales sur la surface de séparation, trajectoires qui donnent la direction du courant dans les milieux *parallèlement à cette surface*, sont communes. Donc les lignes de courant sont dans le même plan normal à la surface de séparation, des deux côtés de cette surface, puisque les composantes tangentielles du courant sont parallèles.

D'ailleurs l'écartement des lignes de niveau étant le même sur la surface de séparation, les composantes tangentielles de la force sont égales : les composantes tangentielles du courant sont en raison inverse des conductibilités.

4° Considérons dans les deux milieux les tubes de courant qui aboutissent à une même courbe fermée, tracée sur la surface de séparation et limitant une aire S . Nous savons, d'après ce qui précède, qu'ils sont dans un même plan avec la normale. Soit θ_1 et θ_2 les

angles qu'ils font avec cette normale. Écrivons que le flux se conserve. Les sections droites des deux tubes sont :

$$\sigma_1 = S \cos \theta_1, \quad \sigma_2 = S \cos \theta_2.$$

Soit i_1 et i_2 les intensités des courants dans ces tubes : la conservation du flux exige que l'on ait :

$$i_1 \sigma_1 = i_2 \sigma_2, \quad i_1 \cos \theta_1 = i_2 \cos \theta_2.$$

C'est précisément ce qu'exprime l'équation de condition (§ 164) :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0.$$

3° Il résulte du 3° la condition :

$$i_1 \rho_1 \sin \theta_1 = i_2 \rho_2 \sin \theta_2.$$

D'où la loi de réfraction des lignes de courant :

$$\rho_1 \operatorname{tg} \theta_1 = \rho_2 \operatorname{tg} \theta_2.$$

Par exemple, une feuille d'argent est en contact par un de ses bords avec une feuille de même épaisseur en platine, métal environ 13 fois moins conducteur que l'argent. Amenons et emmenons le courant par deux électrodes A et B appliquées normalement à la double feuille en A et B. Au passage de l'une à l'autre feuille, il y a un brusque changement de direction des lignes de courant, si la droite de séparation est inclinée sur la droite AB. On remarquera que la réfraction allonge le chemin dans le métal le plus conducteur et le raccourcit dans le métal le moins conducteur.

6° On donne V en certains points ou lignes qu'on appelle les électrodes ; on demande de déterminer V en tous les points.

Il est clair que la solution *directe* du problème est rarement possible. Mais on en connaît un nombre indéfini de solutions *indirectes*, chaque solution d'un cas très simple fournissant les solutions d'une infinité d'autres cas. Nous traiterons plus loin complètement quelques exemples qui expliqueront ce que nous voulons dire.

171. Résistance dans le cas d'un corps à plusieurs dimensions. — On maintient deux points du corps, ou deux groupes de points A et B pris dans ou sur le corps, à des potentiels constants V_1 et V_2 . Dans ces conditions, il passe par seconde de A à B un flux Q. Par analogie avec la loi d'Ohm, on appelle *résistance du milieu entre les électrodes A et B* le quotient :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{Q}.$$

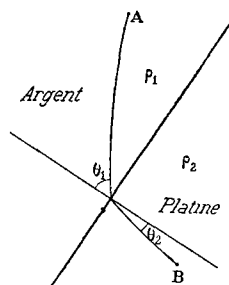


Fig. 83.

Supposons connues les surfaces équipotentiellles entre A et B; le flux total à travers l'une de ces surfaces a pour expression :

$$Q = -\frac{1}{\rho} \iint \frac{\partial V}{\partial n} dS.$$

Il est le même quelle que soit la surface équipotentielle choisie, puisqu'il est conservatif.

La détermination de R implique donc la connaissance des surfaces équipotentiellles, indispensable pour calculer le flux.

Voici un résultat important. Conservons les mêmes électrodes et changeons seulement la valeur de $V_1 - V_2$: les surfaces équipotentiellles restent les mêmes; leur numérotage seul varie. En d'autres termes, Q et $V_1 - V_2$ varient dans le même rapport.

Donc R reste constant.

La résistance d'un corps donné entre des électrodes de forme donnée, est une quantité parfaite-

ment déterminée, indépendante des potentiels auxquels les électrodes sont maintenues.

Cette résistance dépend essentiellement de la disposition des électrodes et ne peut en aucune manière caractériser le corps.

172. Cas particuliers.

CORPS LIMITÉ PAR DEUX SPHÈRES DE RAYONS R_1 ET R_2 MAINTENUES AUX POTENTIELS V_1 ET V_2 .

Les surfaces équipotentiellles sont les sphères satisfaisant à la condition :

$$V = \frac{V_1 - V_2}{r} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} - \frac{V_1 R_1 - V_2 R_2}{R_2 - R_1},$$

r désigne le rayon de la surface considérée.

$$\text{D'où facilement : } R = \frac{\rho}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Si la sphère extérieure est très grande, on peut négliger $1 : R_2$ devant $1 : R_1$. Il reste : $R = \frac{\rho}{4\pi R_1}$.

Ce résultat explique comment, même en admettant pour le sol une conductibilité notable, même en l'assimilant à un milieu indéfini, la ligne de retour des télégraphes qui est constituée par la Terre, ne

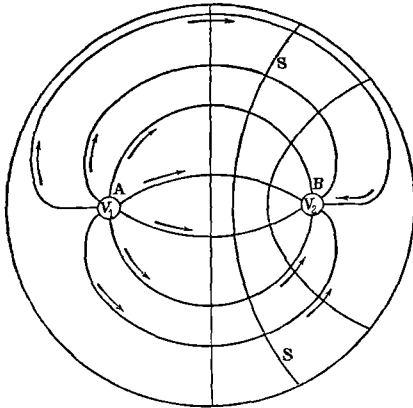


Fig. 84.

présente une résistance négligeable que si la mise à la terre peut être assimilée à une sphère de *grand* rayon.

La résistance entre deux électrodes sphériques de rayons R_1 et R_1' , à grande distance l'une de l'autre dans un milieu indéfini, est évidemment :

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right).$$

CYLINDRES CONCENTRIQUES. — Il suffit de reprendre les raisonnements du § 95. Les surfaces équipotentielles sont des cylindres concentriques; le flux par unité de longueur est A . La résistance par unité de longueur est donnée par la formule :

$$R = \rho \frac{V_1 - V_2}{A} = \frac{\rho}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1}.$$

On calcule avec cette formule la résistance d'isolement d'un câble; pour une longueur l , tout se passe comme si on avait l résistances égales en dérivation; la résistance totale est :

$$\frac{\rho}{2\pi l} \log \frac{R_2}{R_1}.$$

FIL CYLINDRIQUE ABOUTISSANT DANS UN ESPACE INDÉFINI DE LA MÊME MATIÈRE. — On rencontre ce cas dans la construction de l'ohm; un tube plein de mercure aboutit à deux masses de mercure qu'on peut considérer comme indéfinies. Il ne faudrait pas croire que la résistance se compose uniquement de celle du fil; à la sortie du tube les lignes de courant sont nécessairement très resserrées; quoique le milieu soit indéfini, il oppose près de l'orifice une résistance qui n'est pas négligeable.

Le calcul est dans une note du tome VI; voici le résultat.

Il faut ajouter au fil une correction égale à 0,81 de son rayon, à chaque extrémité libre, pour tenir compte de la résistance au voisinage de l'orifice. Par exemple, si l'ohm réalisé se compose d'un fil cylindrique de mercure d'un millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur, le diamètre de ce fil sera sensiblement 1^{mm},13 et le rayon 0^{mm},57; la correction à chaque bout sera 0,81 \times 0,57, et l'ensemble des corrections 0^{mm},9 environ. Le tube ne doit avoir que 105°,91.

173. **Distribution des courants dans une plaque.** — Dans une plaque mince, plane, également épaisse et conductrice en tous ses points, amenons au moyen d'électrodes punctiformes E_1, E_2, \dots des courants d'intensités I_1, I_2, \dots . Nous pouvons admettre que le potentiel est le même, dans l'intérieur de la plaque, en tous les points d'une normale menée à la surface. Nous sommes ramenés à déterminer les lignes équipotentielles sur la plaque et les lignes de courant qui forment un faisceau orthogonal au premier.

La matière du courant ne s'accumulant nulle part, la condition :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

doit être satisfaite en tous points de la plaque hors des électrodes. La condition étant linéaire, la solution peut être exprimée par un nombre convenable de solutions particulières.

Considérons donc une seule électrode *dans une plaque indéfinie*; la

solution :

$$2\pi V_1 = -\frac{I_1 \rho}{\delta} \log r_1 + A_1$$

convient; ρ est la résistivité, δ l'épaisseur de la plaque.

En effet, le flux total à travers un cylindre de rayon r_1 et d'épaisseur δ a pour expression :

$$-\frac{2\pi r_1 \delta}{\rho} \frac{dV}{dr_1} = I_1;$$

il est égal à l'intensité du courant amené par l'électrode E_1 . Il faut supposer que le courant s'écoule par des électrodes disposées symétriquement à l'infini.

Pour n électrodes *et une plaque indéfinie*, il faut additionner des solutions de la forme précédente :

$$MV = N - [I_1 \log r_1 + I_2 \log r_2 + \dots],$$

en posant : $M = 2\pi\delta : \rho$. On représente par N une constante et par r_1, r_2, \dots les distances du point où le potentiel est V , aux diverses électrodes. Les intensités I doivent être prises positivement si le courant entre dans la plaque, négativement s'il en sort, ou inversement. Les lignes équipotentielles satisfont aux conditions équivalentes :

$$\sum (I \log r) = \text{Constante}, \quad r_1^{I_1} r_2^{I_2} \dots r_n^{I_n} = \text{Constante}.$$

Déjà *pour une plaque indéfinie* les équations sont plus faciles à poser qu'à résoudre; pour une plaque finie le problème direct est quasiment impossible. Voici comment on procède.

On cherche une solution pour une plaque indéfinie; on utilise cette solution pour une plaque finie en profitant de *ce qu'on a le droit de faire des coupures le long de toutes les lignes de courant sans changer la forme des lignes équipotentielles*.

Les lignes de courant aboutissent nécessairement aux électrodes.

On peut aussi utiliser des électrodes non plus punctiformes, mais finies; il faut alors qu'elles touchent la plaque suivant une des lignes équipotentielles précédemment déterminées.

Il est clair que ces deux artifices multiplient le nombre des solutions, chaque cas étudié sur le plan indéfini fournissant une infinité de cas pour des plaques limitées (6°, § 170).

Enfin pour de telles plaques, la condition : $\sum I = 0$, est évidemment à satisfaire.

174. Applications.

DEUX ÉLECTRODES CIRCULAIRES CONCENTRIQUES. — La solution se déduit immédiatement du cas d'une électrode punctiforme sur une plaque indéfinie. Il suffit d'écrire que pour les rayons r et r' le potentiel a les valeurs données. On se reportera utilement à ce que nous avons dit à propos des condensateurs cylindriques (§ 95), de la résistance entre deux cylindres concentriques (§ 160), enfin de la conductibilité thermique entre deux cylindres (II, § 245).

DEUX ÉLECTRODES PUNCTIFORMES. — On a nécessairement :

$$I_1 + I_2 = 0.$$

Les lignes équipotentiellles satisfont à la condition :

$$r_1 : r_2 = \text{Constante.}$$

Les lignes de courant sont des arcs de cercle passant par les traces des électrodes. Les lignes équipotentiellles sont des cercles orthogonaux aux premiers admettant comme axe radical la perpendiculaire au milieu de la droite joignant les électrodes.

La solution est applicable à une plaque limitée par deux lignes de courant, en particulier à une plaque circulaire ayant les électrodes sur sa circonférence.

175. Anneaux de Nobili. — L'expérience montre que lorsqu'on place un assemblage d'électrodes cylindriques verticales à très petite distance d'une plaque horizontale de métal (épaisse ou mince, peu importe), limitée aux parois d'une auge électrolytique, des anneaux colorés prennent naissance sur la plaque : ce sont les anneaux ou plus généralement les courbes de Nobili. L'expérience réussit bien en prenant pour fond de l'auge une plaque de cuivre, pour électrodes des aiguilles d'acier longues et fines, et pour liquide électrolytique un mélange des acétates de cuivre et de plomb.

Voici l'explication la plus naturelle du phénomène (Voigt).

La plaque métallique étant beaucoup plus conductrice que l'électrolyte, on peut supposer son potentiel constant. Soit donc V une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue du liquide et qui ne devient infinie qu'aux points d'arrivée et de sortie du courant, où elle croît en raison inverse de la distance à ces points. Elle doit satisfaire en tout point de l'électrolyte à la condition de conservation :

$$\Delta V = 0.$$

Prenons la surface supérieure de la plaque métallique pour plan des xy ; le plan $z = 0$ est une surface de niveau. Posons pour préciser : $V = 0$ pour $z = 0$.

A la surface libre du liquide le courant se meut horizontalement ; soit h l'épaisseur du liquide ; on doit avoir simultanément (§ 170, 2°) :

$$z = h, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Enfin le courant se meut parallèlement aux parois du vase; soit v une variable comptée sur la normale en tout point de la paroi; il faut satisfaire à la condition : $\frac{\delta V}{\delta v} = 0$.

La plaque métallique étant une surface de niveau, les lignes de courant y aboutissent normalement. On peut admettre que *les lignes isochromatiques du phénomène de Nobili sont le lieu des points pour lesquels le courant normal à la plaque a une intensité donnée.*

Donc elles sont définies par la condition :

$$\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right)_{z=0} = \text{Constante.} \quad (4)$$

Considérons une surface équipotentielle δV très voisine de la surface : $z = 0$, $V = 0$.

Traçons sur cette surface les lignes topographiques de niveau $\delta z = \text{Constante}$; elles satisfont évidemment à l'équation (4). *Les lignes isochromatiques sont donc les lignes topographiques de niveau d'une surface équipotentielle très voisine de la plaque métallique (plan de référence).*

Partant de là, nous pouvons trouver les propriétés générales de ces lignes.

La surface δV aboutit normalement aux parois du vase, car il faut que le courant soit parallèle à ces parois. Si les parois sont verticales, les lignes de niveau de la surface δV qui sont des horizontales, sont nécessairement normales à la paroi; donc les lignes isochromatiques qui aboutissent à la paroi la coupent à angle droit.

Les autres courbes isochromatiques sont fermées.

Comme la surface δV présente des maximums ou des minimums là où sont les électrodes, les lignes isochromatiques entourent les électrodes.

On a voulu trouver, dans les lignes isochromatiques des figures de Nobili, des solutions particulières de l'équation :

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} = 0,$$

correspondant au problème du § 173, c'est-à-dire à la distribution des courants dans la plaque. On voit par ce qui précède que les lignes isochromatiques correspondent au contraire à certaines conditions pour les courants qui sortent *normalement* de la plaque ou qui entrent *normalement* dans la plaque.

On peut donner une théorie plus complète du phénomène en tenant compte de la polarisation, variable d'un point à l'autre de la plaque, qui résulte de l'existence de ces courants.

176. Généralisation pour des corps anisotropes. — Le lecteur a dû remarquer que la Théorie de la Conductibilité électrique est, du

point de vue analytique, absolument identique à la Théorie de la Conductibilité calorifique. Nous ne répéterons donc pas ici ce que nous avons dit au tome II, §§ 250 et suivants, au sujet de la conductibilité dans les corps anisotropes. Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir plus loin sur le phénomène de Hall et l'importance des termes rotationnels.

Hypothèses sur le mécanisme et la nature des courants.

177. Hypothèses des ions. Électrons. — Jusqu'ici nous n'avons pas spécifié de quelle nature était le courant dont nous avons étudié les lois et les propriétés; les formules dont nous nous sommes servis, sont aujourd'hui hors de contestation.

Pour aller plus loin, il faut des hypothèses. Nous choisirons celles qui semblent, dans l'état actuel de la science, avoir le plus de chances de survie.

Nous admettrons dans les corps conducteurs :

1° des corpuscules électrisés négativement, appelés *électrons*, qui peuvent se mouvoir librement d'un point à l'autre; il n'y a d'ailleurs pas contradiction entre cette liberté et l'existence d'un frottement fonction de la vitesse, par exemple proportionnel à la vitesse;

2° des molécules électrisées positivement qu'on peut regarder comme immobiles dans une première approximation (au moins dans les corps qui ne sont pas radioactifs), bien que des expériences sur la diffusion d'un métal à travers un autre amènent à penser qu'elles ont, elles aussi, quelque mobilité.

A la différence près que, dans les électrolytes, il y a mobilité du même ordre pour le substratum des charges négatives que pour celui des charges positives, le mécanisme du courant dans les métaux ne se distingue donc pas essentiellement de celui qu'on imagine dans les électrolytes. Nous verrons qu'on explique d'une manière analogue la conductibilité des gaz.

Quand aucune force électromotrice n'agit sur eux, les corpuscules mobiles négatifs ou *électrons* sont dispersés régulièrement dans la masse. Dans chaque élément de volume, pour petit qu'il soit, la charge totale est nulle; car toute accumulation locale d'électrons produirait une force électromotrice énorme dont le résultat immédiat serait la disparition de cette accumulation.

Quand une force électromotrice agit sur les électrons, ils se meuvent dans la direction opposée à celle de la force, puisque leur charge est négative. Le déplacement n'entraîne d'ailleurs aucune accumulation locale; conformément aux hypothèses du § 164, à l'intérieur de tout conducteur parcouru par un courant permanent, il n'y a pas d'électricité libre.

Les composantes u , v , w , d'un courant sont donc mesurées par les quantités d'électricité, rapportées à l'unité de surface et à l'unité de temps, qui traversent les éléments de surface perpendiculaires aux axes de coordonnées. Si l'unité de volume du corps chargé est animée d'une vitesse dont les composantes sont φ , χ , ψ , et contient la quantité e d'électricité, les composantes du courant sont :

$$e\varphi, e\chi, e\psi.$$

Il ne s'agit ici que de l'état permanent. Nous verrons plus loin que dans l'état variable il faut encore tenir compte de la déformation du milieu, dont la variation constitue le *courant de déplacement* (§§ 118 et 120).

Les corps pondérables contiennent donc une multitude de petites particules chargées négativement; dans les conducteurs, ces particules peuvent se mouvoir librement. Une charge électrique est constituée, suivant son signe, par un *excès* de particules négatives ou un *défaut* de telles particules.

178. Courants de convection. — Qu'il s'agisse des courants *permanents* dans les métaux, les électrolytes ou les gaz, on est d'accord aujourd'hui pour les assimiler à des courants de convection. On imagine toujours que l'électricité est liée à de la matière qui se déplace. *Pour les électrons, cette matière est la même dans tous les corps*, de sorte que les corps peuvent échanger leurs électrons sans qu'il en résulte pour eux une modification chimique.

Les courants permanents ne sont donc, dans ce système d'hypothèses, que des courants de *convection*. La conséquence nécessaire est qu'on puisse obtenir les effets d'un courant permanent par un déplacement effectif suffisamment rapide d'un corps *chargé d'électricité au sens ordinaire du mot*. Les expériences fondamentales de Rowland prouvent qu'il en est bien ainsi.

Imaginons une bande matérielle assez large AABB recouverte d'une couche d'électricité positive de densité σ . Animons cette bande d'une vitesse V dans le sens de sa longueur, et supposons l'électricité invariablement liée à la matière de la bande (fig. 85, à gauche).

A travers l'élément dx d'une droite invariable XX passe dans l'unité de temps une quantité d'électricité $V\sigma dx$.

Si ϵ est la densité du courant au sens défini au § 151, nous constituons une nappe plane de courant de densité : $\epsilon = V\sigma$.

Le champ créé en un point O situé en avant et assez près de la bande pour qu'elle apparaisse, vue de ce point, comme un plan indéfini est (§ 151) :

$$H = 2\pi V\sigma.$$

Il est parallèle à la bande, normal au sens du mouvement et donné par la règle du bonhomme d'Ampère disposé contre la bande paral-

lèvement au déplacement. Le courant va dans le sens du mouvement, quand la densité σ est positive. Quand la densité est négative, il va dans le sens inverse.

Évidemment une telle expérience est irréalisable. Mais rien n'empêche de faire tourner avec une vitesse constante un disque de

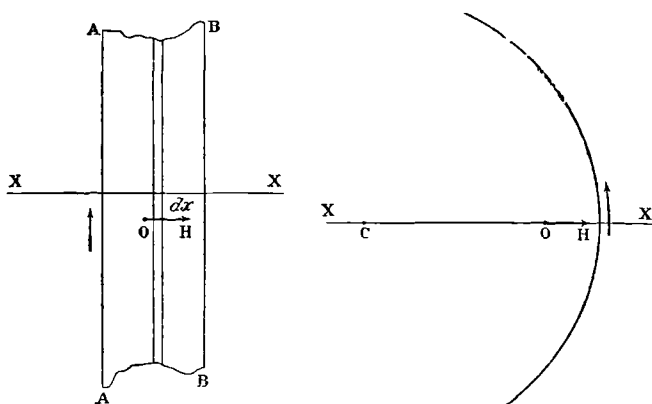


Fig. 85.

centre C recouvert d'une couche σ . Au voisinage d'un des bords, en O par exemple, et très près du disque, le champ a sensiblement la même valeur que si l'on déplaçait d'un mouvement uniforme un plan indéfini normalement à la droite XX (fig. 85, à droite).

La densité σ est mesurée par des phénomènes statiques, le champ H par des phénomènes magnétiques. Le calcul implique donc que l'on puisse passer d'un des systèmes de mesure à l'autre, ce qui revient à savoir quel nombre d'unités statiques d'électricité, définies par la formule :

$$F = \frac{qq'}{r^2}$$

(F en dynes, r en centimètres), est contenu dans une unité magnétique définie par le champ produit.

Nous verrons plus loin (§ 363) que la vitesse de la lumière en centimètres par seconde est exprimée par ce nombre; il est donc : $3 \cdot 10^{10}$.

Sans que la surface se décharge dans l'air, la force électrique $2\pi\sigma$ peut être de l'ordre de 130 unités statiques.

Pour une vitesse V de 400 mètres = 10^4 centimètres par seconde, le champ est alors :

$$H = (130 : 3 \cdot 10^{10})10^4 = 4,3 \cdot 10^{-5} = 0,19 : 4400,$$

soit 1 : 4400 de l'intensité horizontale du champ terrestre. Dans la pratique on est forcé de se tenir très loin d'une telle valeur de $2\pi\sigma$.

179. **Expériences de Rowland.** — L'appareil se compose de deux disques en ébonite, parallèles, dorés sur leur face interne et entaillés radialement pour éviter la production de courants sensibles dans la couche d'or. Ils tournent dans le méridien magnétique avec une vitesse de 125 tours par seconde. Ils sont maintenus à un même potentiel constant par une machine statique.

La convection produit une nappe de courants circulaires admettant comme axe l'axe de rotation.

Calculons le champ produit sur un point de l'axe d'un des disques à la distance r du disque. On se reportera au § 148.

Soit σ la densité de la couche, N le nombre de tours par seconde, $2\pi NR$ la vitesse linéaire à la distance R de l'axe; l'intensité électromagnétique du courant circulaire compris entre les rayons R et $R + dR$ du disque est : $2\pi NR\sigma : V$. Nous désignons ici par V la vitesse de la lumière exprimée en centimètres par seconde. Il ne peut y avoir confusion avec les notations du paragraphe précédent. Appliquons la formule du § 148; cherchons l'action au milieu de la droite qui joint le centre des disques dont l'écartement est $2r$; il vient :

$$\frac{8\pi^2 N\sigma}{V} \int_0^R \frac{R^3 dR}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8\pi^2 N\sigma}{V} \left[\frac{R^2 + 2r^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} - 2r \right].$$

Ce champ est dirigé suivant l'axe des disques, c'est-à-dire normalement à une aiguille aimantée en équilibre dans le champ terrestre, puisque les disques tournent dans le méridien magnétique.

Le système sur lequel le champ agit, est astatique. Il se compose de deux aiguilles, aussi identiques que possible, parallèles et de sens opposés, l'une centrale (il faut donc, pour loger cette aiguille, que l'axe matériel autour duquel tournent les disques, soit interrompu entre les disques), l'autre placée à un niveau notablement supérieur au bord du disque. Le système astatique est protégé contre les courants d'air par un tube fermé, contre les trépidations par une suspension convenable. Il est enfin protégé contre les actions électrostatiques par des plateaux de verre interposés entre les disques tournants, dorés sur leur face extérieure qui regarde les disques, et en communication avec le sol. Ces plateaux fonctionnent comme des écrans parfaits (§ 48).

L'expérience a bien confirmé l'existence de l'action électromagnétique des courants de convection. Les résultats numériques sont de l'ordre prévu.

180. **Expression des composantes P, Q, R, de la force électromotrice.** — Pour pousser les particules chargées, interviennent des forces électromotrices de deux espèces : les variations du potentiel électrostatique et les forces électromagnétiques.

Considérons d'abord les forces de la première espèce.

Dans les idées de Lorentz, qu'on suit généralement aujourd'hui, ces forces électromotrices produisent une déformation de l'éther, un déplacement. Comme il est quasiment impossible de distinguer ce qui est cause et ce qui est effet, on peut aussi bien considérer cette déformation de l'éther comme la cause en vertu de laquelle les particules électrisées se déplacent. D'après ce qui est exposé au § 120, les forces électromotrices de première espèce auront donc pour expression :

$$4\pi f, \quad 4\pi g, \quad 4\pi h.$$

Passons aux forces électromotrices de seconde espèce.

Quand les particules chargées (électrons) se déplacent et produisent un courant, elles sont soumises à des forces électromagnétiques déterminées par la loi de Laplace (§ 153). Nous devons dans les formules du § 154 remplacer :

$$Idx, \quad Idy, \quad Idz, \quad \text{par :} \quad e\varphi, \quad e\chi, \quad e\psi,$$

où φ , χ , ψ , représentent les composantes de la vitesse, e la quantité d'électricité qui se meut par unité de volume. Les composantes de la force électromotrice de seconde espèce sont donc par unité de masse électrique :

$$Z\chi - Y\psi, \quad X\psi - Z\varphi, \quad Y\varphi - X\chi.$$

L'expérience montre qu'elles sont généralement négligeables par rapport à celles de première espèce; elles donnent cependant lieu à un phénomène intéressant (§ 181).

Nous verrons plus loin (§ 233) que les phénomènes d'induction ajoutent une troisième espèce de forces électromotrices, mais qui n'intervient pas dans l'état permanent.

Les différences de potentiel au contact en produisent une quatrième.

En définitive la force électromotrice totale a pour composantes (dans l'état permanent et hors des surfaces de discontinuité où sont localisées les forces électromotrices de quatrième espèce) :

$$P = 4\pi f + Z\chi - Y\psi,$$

$$Q = 4\pi g + X\psi - Z\varphi,$$

$$R = 4\pi h + Y\varphi - X\chi.$$

Soit ρ_1 le frottement (proportionnel à la vitesse) subi par la particule; on a pour l'état permanent :

$$\rho_1\varphi = P, \quad \rho_1\chi = Q, \quad \rho_1\psi = R.$$

Les composantes du courant sont :

$$u = e\varphi = \frac{eP}{\rho_1}, \quad v = e\chi = \frac{eQ}{\rho_1}, \quad w = e\psi = \frac{eR}{\rho_1};$$

$\rho = \rho_1$; e mesure la *résistivité*.

La résistivité dépend à la fois de la quantité e par unité de volume et du frottement ρ_1 . *Suivant le corps*, la même force électromotrice peut fournir le même courant, soit en déplaçant lentement beaucoup d'électricité (e et ρ_1 sont grands), soit en déplaçant rapidement peu d'électricité (e et ρ_1 sont petits). Nous trouvons immédiatement une conséquence de cette remarque.

181. Phénomène de Hall. — Les équations précédentes rendent immédiatement compte du phénomène de Hall (voir II, § 256). Dans le système électromagnétique, il faut écrire :

$$P = 4\pi V^2 f + Z\chi - Y\psi,$$

et de même pour Q et R; V^2 est le carré de la vitesse de la lumière. Les composantes de l'intensité sont :

$$u = \frac{P}{\rho} = \frac{4\pi V^2 f}{\rho} + \frac{Ze\chi - Ye\psi}{e\rho} = \frac{4\pi V^2 f}{\rho} + \frac{Zv - Yw}{e\rho},$$

et de même pour v et w .

Le dernier terme correspond au phénomène de Hall qui doit être d'autant plus intense que le nombre d'électrons mobiles par unité de volume est moindre, puisqu'il faut alors qu'ils se déplacent plus rapidement pour produire un courant d'intensité donnée; l'effet électromagnétique, qui est proportionnel à la vitesse du déplacement, augmente d'autant.

Des métaux de même résistivité ρ peuvent donc présenter le phénomène de Hall à des degrés très différents.

Il ne faut pas confondre la charge e avec une charge électrostatique ordinaire; ces deux quantités n'ont aucun rapport, pas plus que la grandeur de la dissociation dans un électrolyte n'a de rapport avec sa charge électrostatique.

182. Décharge d'un conducteur. Loi de Joule. — Soit un conducteur de capacité C chargé d'une quantité M_0 d'électricité au potentiel V_0 . Mettons-le en communication métallique avec le sol dont nous admettons le potentiel nul et la capacité infinie. Négligeons les effets de la self induction sur lesquels nous aurons à revenir. Cherchons suivant quelle loi le conducteur se décharge.

Le courant passe à chaque instant sous l'influence de la différence de potentiel : $V = M : C$. Nous avons donc les relations :

$$i = -\frac{dM}{dt}, \quad iR = V = \frac{M}{C}, \quad -R \frac{dM}{dt} = \frac{M}{C}.$$

$$M = M_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad i = \frac{M_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Le courant de décharge décroît suivant une exponentielle.

TRANSFORMATION DE L'ÉNERGIE. — On a, en multipliant par :

$$idt = -dM,$$

les deux termes de l'équation : $iR = M : C$, et intégrant entre 0

et ∞ :

$$\int_0^{\infty} Ri^2 dt = - \int_{M_0}^0 \frac{M dM}{C} = \frac{M_0^2}{2C} = \frac{M_0 V_0}{2}.$$

Or $M_0 V_0 : 2$ représente (§ 94) l'énergie potentielle initiale du système; elle se retrouve dans un phénomène produit par le passage du courant. Effectivement la loi de Joule nous apprend que la quantité de chaleur dégagée dans un circuit de résistance R pendant le temps dt est précisément $Ri^2 dt$.

La loi de Joule découle de l'hypothèse que le courant transporte de l'électricité. Lorsque la quantité : $dM = idt$ passe du potentiel V au potentiel 0, les forces électriques accomplissent un travail :

$$V dM = Vidt = Ri^2 dt,$$

d'après la loi d'Ohm. Si le corps est chargé positivement, il y a défaut d'électrons; c'est une masse $-dM$ qui passe à chaque instant du potentiel 0 au potentiel V : le résultat est le même.

COURANTS DE DÉPLACEMENT. — Ce qui précède paraît clair, il est pourtant facile et nécessaire de comprendre à quel point la simple décharge d'un corps est un problème complexe.

Si, comme le fait implicitement le raisonnement qui précède, nous ne supposons pas le courant *conservatif* dans tout l'espace, il y a contradiction avec la règle générale de l'Électromagnétisme (§§ 143 et 144).

Cette règle dit en effet que le travail effectué par les forces électromagnétiques, sur un pôle unité qui parcourt un contour fermé MNPQ, est égal à 4π fois le flux du vecteur u, v, w , à travers une surface quelconque menée par le contour (fig. 86).

Nous admettons de plus qu'un courant variable agit à chaque instant comme un courant constant de même intensité.

Or si le diélectrique n'est pas traversé par l'équivalent d'un courant quand le corps se décharge, le flux du vecteur u, v, w , est identiquement nul à travers la surface S' et ne l'est pas à tra-

vers la surface S . D'où contradiction.

C'est ainsi que s'imposent les courants de déplacement. Lorsque le corps se décharge en un courant dirigé suivant AB , la déformation

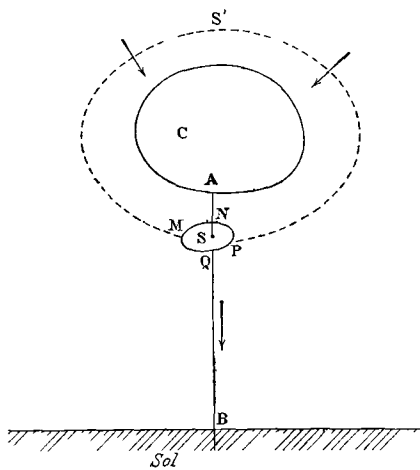


Fig. 86.

du diélectrique cesse; d'où un courant à travers S' dans le sens des flèches.

D'après Lorentz, cette déformation est constituée par une déformation de l'éther et un déplacement des ions à l'intérieur des molécules (§ 120).

Les opérations sont inverses lorsque le corps se charge.

Charge et décharge des condensateurs. Télégraphie sous-marine.

183. Propagation dans un conducteur qui a de la capacité.

— Un câble se compose d'une armature intérieure métallique, d'une gaine cylindrique en un diélectrique *que nous supposons d'abord parfait*, et d'une armature extérieure, constituée dans la pratique par une masse liquide dont nous supposons le potentiel invariable, nul pour simplifier l'écriture.

Nous demandons comment se propage le potentiel dans l'armature intérieure de rayon R_1 .

Soit x la distance au point origine; V est une fonction de x et du temps t .

Soit s la section droite du câble; l'accroissement de la quantité d'électricité dans le volume sdx et dans le temps dt est, d'après la loi d'Ohm (§§ 20, 21 et 164) :

$$\frac{s}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dt dx.$$

Elle est répartie sur la surface latérale du conducteur et augmente le potentiel de :

$$C \frac{\partial V}{\partial t} dt dx,$$

où C est la capacité par unité de longueur. Nous reviendrons tout à l'heure sur la valeur de C . On a donc l'équation :

$$\frac{\pi R_1^2}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C \rho_1 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

ρ_1 est la résistance par unité de longueur. Toutes les quantités doivent être exprimées dans le même système. Si nous mesurons C en unités statiques, il faut (§ 178) diviser par le carré de la vitesse de la lumière exprimée en centimètres par seconde. Posons :

$$C : 9 \cdot 10^{20} = C_1,$$

$$\text{il vient :} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_1 \rho_1 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1)$$

Dans l'état statique, la capacité par unité de longueur d'un condensateur cylindrique est (§ 95) :

$$C = K : 2 \log \frac{R_2}{R_1},$$

où R_2 est le rayon extérieur du cylindre annulaire rempli par le diélectrique, et K le pouvoir inducteur spécifique. Mais s'il passe un courant variable dans l'âme du câble, la formule devient douteuse, à moins que le potentiel ne varie linéairement sur une grande longueur, ou, ce qui revient au même, que $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ soit toujours petit par rapport à $\frac{1}{R_1} \frac{\partial V}{\partial x}$.

Avant d'aller plus loin une remarque s'impose.

Le raisonnement précédent ne tient pas compte des courants de déplacement dont nous avons montré la nécessité au § 182. Le courant n'est donc pas conservatif.

Parce qu'il s'agit de variations de potentiel relativement lentes, nous avons effectivement le droit de scinder le problème en deux et de traiter l'une des parties indépendamment de l'autre. Mais nous retrouverons le problème en Électrooptique pour les variations rapides de potentiel; nous serons alors forcés de tenir compte des conditions imposées par les courants de déplacement.

184. Comparaison de différents câbles; loi de similitude.

— Exprimons x en fonction de la longueur totale l du câble :

$$x_1 = x : l.$$

Employons l'unité de temps : $\tau = C_1 \rho_1 l^2$.

Pour fixer les idées sur l'ordre de grandeur de cette unité, voici les constantes du câble transatlantique français.

La capacité est de 0,43 microfarads par mille marin (1852 mètres); la longueur étant 2584 milles, la capacité totale est :

$$C_1 l = 0,43 \times 2584 \times 10^{-6} = 1111 \cdot 10^{-6} \text{ farads.}$$

La résistance est 2^o,93 par mille marin; la résistance totale est :

$$\rho_1 l = 2,93 \times 2584 = 7571 \text{ ohms.}$$

L'unité de temps τ est donc pour ce câble :

$$\tau = 1111 \times 7571 \times 10^{-6} = 8^s,41.$$

Soit t_1 le temps évalué avec cette nouvelle unité : $t = t_1 \tau$.

L'équation (4) devient : $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = \frac{\partial V}{\partial t_1}$.

Il n'intervient plus que des coefficients numériques.

C'est sur ce résultat que repose la loi de similitude, généralement assez mal comprise, dont voici l'énoncé correct.

Imposons à l'une des extrémités du câble une loi de variation :

$$V_0 = f_0(t_1),$$

du potentiel par rapport au temps mesuré avec l'unité τ . En un point caractérisé par une certaine valeur de x_1 (c'est-à-dire en un point situé à la moitié, au tiers, au quart, ... de ce câble), le potentiel varie suivant la loi :

$$V = f(t_1);$$

la loi de similitude consiste à dire que la fonction f est indépendante du câble considéré (Lord Kelvin).

Remarquons que, dans la comparaison de deux câbles différents, nous devons employer deux unités de temps différentes, non seulement pour étudier le potentiel V , mais encore pour imposer à une extrémité le potentiel V_0 . C'est à cette condition que la loi de similitude se vérifie, que nous pouvons dire, par exemple, que le temps nécessaire pour obtenir un certain phénomène dans un câble de longueur 2 (toutes choses égales d'ailleurs) est quatre fois plus grand que pour le câble de longueur 1. Cela implique que les phénomènes imposés à l'extrémité du câble de longueur 2, soient quatre fois plus lents.

Pour préciser, supposons que l'opération consiste à mettre pendant un certain temps l'extrémité des câbles supposés isolés (§ 188) en contact avec le pôle d'une pile, puis à l'isoler de nouveau. Opérons sur des câbles de longueur 1, 2, 3, ... Il faut que les contacts durent 1, 4, 9, ... secondes, pour qu'à la moitié des câbles, par exemple, les maximums du courant se produisent au bout des temps 1, 4, 9, ... secondes. Si les contacts sont du même nombre de secondes pour tous les câbles, le temps nécessaire pour obtenir un certain phénomène en un point pour lequel x_1 est donné, croît moins vite que le carré de la longueur.

Mêmes remarques en ce qui concerne la comparaison de câbles qui diffèrent par les capacités C_1 et les résistances ρ_1 par unité de longueur.

185. Solutions particulières. — Nous avons déjà rencontré l'équation (1) au § 59 du tome I et au § 244 du tome II. Son intégrale générale peut s'exprimer de plusieurs manières au moyen de séries infinies de termes contenant une constante arbitraire et multipliés par une constante arbitraire.

On vérifiera, par exemple, que l'expression (déjà donnée § 59, tome I) :

$$V = V_0 e^{-\omega x_1} \sin(2\omega^2 t_1 - \omega x_1) \quad (2)$$

est une solution particulière. On l'utilisera pour étudier les phéno-

mènes dus à des variations périodiques de potentiel, obéissant à une loi sinusoïdale, imposées à l'une des extrémités du câble.

L'équation (1) étant linéaire, on peut additionner un nombre quelconque de solutions (2), de manière à obtenir une loi conforme à l'énoncé d'une expérience déterminée.

On vérifiera de même que l'expression :

$$V = V_0 e^{-\omega^2 t_1} \sin \omega x_1, \quad (3)$$

est une solution particulière.

Soit un câble fini et de longueur l ; imposons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} V &= 0, & \text{pour } t_1 &= 0, & \text{quel que soit } x_1; \\ V &= 1, & \text{pour } x_1 &= 0, & \text{quel que soit } t_1; \\ V &= 0, & \text{pour } x_1 &= 1, & \text{quel que soit } t_1. \end{aligned}$$

La fonction :

$$V = 1 - x_1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 t_1} \sin n\pi x_1,$$

est la solution particulière cherchée. Elle satisfait à l'équation (1), puisqu'elle est composée de termes de la forme (3); elle satisfait évidemment aux deux dernières conditions; enfin on démontre la relation identique (I, §§ 164 et 165) :

$$0 = 1 - x_1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x_1,$$

x_1 variant de 0 à 1.

La loi de similitude est évidemment vérifiée.

Le potentiel tend vers une distribution linéaire, quand le temps croît indéfiniment. Le courant i tend vers une valeur limite I conforme à la loi d'Ohm, égale par conséquent au quotient de la force électromotrice par la résistance. On a :

$$\frac{i}{I} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n^2 \pi^2 t_1} \cos n\pi x_1.$$

Pour l'extrémité de la ligne ($x_1 = 1$), on a :

$$\frac{i}{I} = 1 - 2(u - u^4 + u^9 - u^{16} + \dots),$$

en posant : $e^{-\pi^2 t_1} = u, \quad t = -\frac{\tau}{\pi^2} \log u.$

La série est très convergente et permet le calcul de i .

La loi de variation du courant est représentée par une courbe analogue à l'une des courbes V de la figure 88.

On démontre que l'intensité est inférieure à un centième de la

valeur limite, quand le temps est inférieur à $0,04 \cdot \tau$, soit $0^s,33$ pour le câble transatlantique français.

La valeur limite n'est atteinte à un centième près que pour un temps égal à $0,54 \cdot \tau$, soit $4^s,54$ pour le câble français.

186. Autre solution particulière. — Certaines solutions particulières prennent la forme d'une intégrale définie relativement facile à discuter.

On vérifiera par exemple que la fonction :

$$V = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz, \quad z = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{C_1 \rho_1}{t}}, \quad (4)$$

est une solution particulière de l'équation (1). Posons :

$$x = lx_1, \quad t = t_1 \cdot C_1 \rho_1 l^2; \quad \text{il vient : } z = \frac{x_1}{2\sqrt{t_1}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= \frac{dV}{dz} \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \frac{\partial V}{\partial t_1} &= \frac{dV}{dz} \frac{\partial z}{\partial t_1}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} &= \frac{d^2 V}{dz^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2, & \frac{\partial z}{\partial t_1} &= -2z \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 = -\frac{z}{2t_1}. \end{aligned}$$

Pour qu'une fonction V de la variable z reliée à x_1 et à t_1 par la relation : $z = x_1 : 2\sqrt{t_1}$, satisfasse à l'équation (1), il faut donc qu'elle satisfasse à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + 2z \frac{dV}{dz} = 0.$$

On vérifie immédiatement qu'il en est ainsi pour l'intégrale définie (4); on a, d'après les règles de différentiation par rapport à la limite qui est ici la variable :

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{4z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}.$$

Si l'on prend t_1 constant et x_1 variable, l'équation (4) représente les potentiels pour un temps déterminé tout le long du fil *supposé indéfini*. Si l'on prend t_1 variable et x_1 constant, elle donne les potentiels en un point du fil pour tous les temps.

Examinons à quelle expérience particulière correspond la solution (4).

Pour $z = 0$, c'est-à-dire à l'origine des coordonnées pour tous les temps, et pour un temps infini en tous les points du fil, on a : $V = 1$. Pour un temps nul, quel que soit x_1 , on a : $z = \infty$; mais :

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

donc le potentiel est nul, pour un temps nul, quel que soit le point considéré.

L'expérience est donc la suivante :

A l'origine des temps l'armature interne isolée est tout entière au potentiel 0; brusquement on met l'extrémité A du fil (fig. 87) au

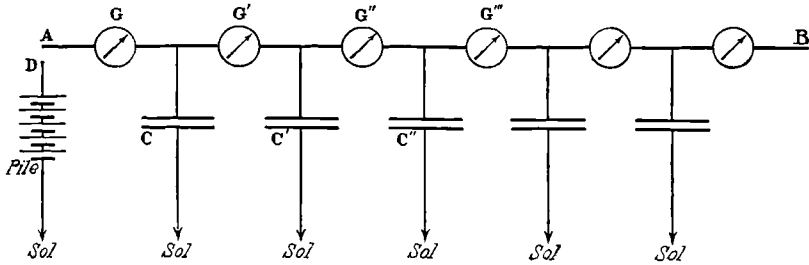


Fig. 87.

potentiel 1 et on l'y maintient indéfiniment. L'équation (4) donne la valeur du potentiel pour tous les temps et pour tous les points à la condition que le fil soit assez long.

En chaque point le potentiel, sensiblement nul pendant un certain temps, croît d'abord vite, puis lentement, et tend vers une limite naturellement égale à l'unité. Sa loi de variation est représentée par l'une des courbes V de la figure 88.

EXPRESSION DU COURANT. — Elle est par définition :

$$i = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_1} \frac{dV}{dz} \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$i = \frac{2}{\rho_1 \sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\rho_1 t \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t_1}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4t_1}\right).$$

Pour $t_1 = 0$, $t_1 = \infty$, le courant est nul.

Le courant est maximum pour : $t_1 = x_1^2 : 2$.

La valeur du maximum est par suite en raison inverse de x_1 .

Ainsi pour chaque point x_1 le courant est d'abord nul, croît, passe par un maximum, décroît et s'annule. La grandeur du maximum diminue à mesure que x_1 est plus grand.

Il n'existe donc, tant pour le potentiel que pour l'intensité du courant, rien d'analogue à une vitesse de propagation, puisqu'il y a une déformation de l'onde en même temps qu'une propagation.

Par exemple, c'est brusquement qu'à l'extrémité A le potentiel passe de la valeur initiale à la valeur finale. A mesure qu'on s'éloigne du point A, la variation devient de moins en moins rapide. A très grande distance, la vitesse de variation du potentiel devient quasi nulle.

187. **Vérification expérimentale. Lignes artificielles.** — Pour effectuer des vérifications, on remplace le câble par des condensateurs C, C', C'', \dots (fig. 87) dont une armature est au sol.

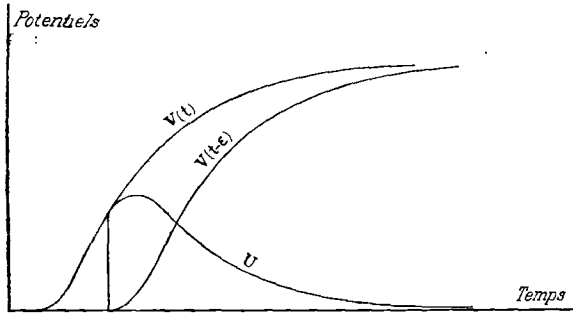


Fig. 88.

On dispose des galvanomètres G, G', G'', \dots et des boîtes de résistance sur le fil de jonction AB des autres armatures. On sépare ainsi la résistance de la ligne arti-

ficielle de sa capacité, ce qui permet de modifier ces paramètres indépendamment l'un de l'autre. L'expérience consiste à relier brusquement le point A au pôle D d'une pile dont l'autre pôle est au sol, et à étudier la marche du galvanomètre.

Supposons l'extrémité B isolée.

On comprend pourquoi la quantité $\int idt$ du courant de charge, mesurée par les déviations des divers galvanomètres jouant le rôle de balistiques, diminue à mesure qu'on s'éloigne de l'extrémité A . Le galvanomètre G est traversé par l'électricité qui doit charger *tous* les condensateurs ; le galvanomètre G' est traversé par ce qui doit charger *tous* les condensateurs *moins le premier, et ainsi de suite*.

Si la capacité de la ligne est assez grande, les déviations des galvanomètres débutent nettement les unes après les autres, à commencer bien entendu par celle du galvanomètre G . Le courant de charge n'est plus instantané ; la quantité $\int idt$ de ce courant ne peut plus être mesurée par la déviation des galvanomètres jouant le rôle de balistiques.

L'extrémité B peut être soit isolée (ce que nous admettons ci-dessus), soit mise au sol.

La première hypothèse est d'autant plus approximativement étudiée au § 186 que les capacités sont plus grandes. Le courant tend vers zéro quand l'expérience se prolonge indéfiniment.

Si l'extrémité B est mise au sol, on se trouve dans le cas du § 185 : le courant tend vers une valeur limite.

Pour les câbles transatlantiques, cette valeur limite n'est atteinte *même approximativement* qu'après des temps qui sont de l'ordre de plusieurs secondes, tandis que pour les lignes aériennes elle l'est au bout de temps qui ne dépassent pas l'ordre des millièmes de seconde.

Les appareils de réception de la télégraphie terrestre sont construits dans cette hypothèse. L'armature de l'électro fonctionne quand le courant dépasse une certaine intensité, et cesse de fonctionner quand il retombe au-dessous d'une certaine autre intensité.

Pour que le fonctionnement soit sûr, il faut que le maximum du courant dépasse beaucoup la première limite, et que son minimum tombe beaucoup au-dessous de la seconde. Après chaque signal, la ligne a largement le temps de reprendre l'état neutre.

C'est ce qu'il serait impossible d'obtenir avec un câble, sans une perte de temps inadmissible. Aussi a-t-on transformé le problème : on se propose d'obtenir, non plus un *courant d'intensité déterminée en équilibre sur la ligne*, mais une *variation de l'intensité d'un sens déterminé*, suffisamment brusque pour être perceptible. En définitive, on cherche à produire une simple *protubérance* dans la courbe représentative du courant.

Le cas particulier suivant, qui résulte immédiatement de la solution étudiée au § 186, précise la nature du problème.

188. Contact instantané. — Admettons qu'après un temps très court ε , pendant lequel on impose à l'extrémité $x=0$ le potentiel 1, on rétablisse le potentiel zéro.

Du point de vue expérimental, l'opération consiste à établir un instant le contact AD (fig. 87), puis à mettre A en communication permanente avec le sol.

Du point de vue analytique, c'est comme si on superposait à l'état calculé par la formule (4), un état défini par le potentiel -1 maintenu indéfiniment, mais ne commençant qu'au temps ε . Le potentiel résultant U est donné par la formule :

$$U = V(t) - V(t - \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = \varepsilon \frac{dV}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{z}{t}.$$

On peut aisément résoudre graphiquement le problème en additionnant les ordonnées des courbes qui représentent $V(t)$ et $-V(t-\varepsilon)$, quelle que soit d'ailleurs la valeur ε de la durée du contact. La figure 88 représente le potentiel résultant U en fonction du temps.

Le potentiel U est maximum, pour un point donné, quand la con-

$$\text{dition :} \quad \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

est satisfaite.

On trouve $z^2 = 3:2$. Exprimant cette condition avec les unités ordinaires de longueur et de temps, il vient :

$$t = \frac{x^2}{6l^2} \tau.$$

$\tau : 6$ représente *approximativement* la durée de propagation d'une onde de potentiel sur le câble caractérisé par le paramètre τ . Plus exactement $\tau : 6$ est le temps que l'onde, *se déplaçant sur un câble indéfini*, met à atteindre le point de distance $x = l$.

Connaissant la loi de variation du potentiel, on déterminera la loi du courant par l'expression :

$$i = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$i = -\frac{\varepsilon}{2\rho_1\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{t\sqrt{t_1}} \frac{[1 - 2z^2]}{l}.$$

La figure 89 représente i en fonction du temps, pour un point du câble. Le courant croît, passe par un maximum, décroît, s'annule,

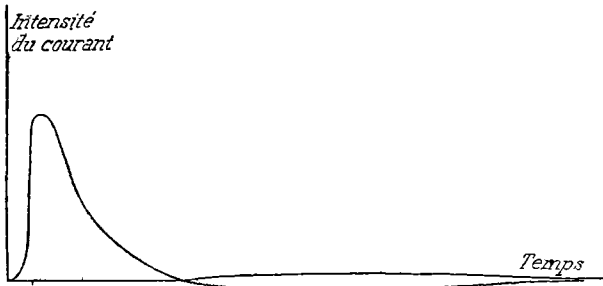


Fig. 89.

il passe par un minimum (dont la valeur est très petite comparée à celle du maximum) et tend asymptotiquement vers zéro. Le maximum et le zéro de l'intensité en un point donné correspondent aux temps :

$$\frac{x^2}{4l^2} \tau, \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{2l^2} \tau.$$

En définitive, pour un contact instantané il y a comme une onde de courant qui se propage, suivant une loi complexe, il est vrai ; on peut s'en servir pour agir sur un galvanomètre. *Seul le premier maximum est assez brusque pour donner au cadre du galvanomètre une impulsion perceptible.*

On peut sans plus de difficulté résoudre le même problème dans les hypothèses du § 185. On vérifie aisément que l'intensité de l'onde de courant résultant d'un contact instantané ε , est fournie par la série :

$$\Delta i = \varepsilon \frac{\partial i}{\partial t} = 2\varepsilon I \pi^2 (u - 4u^4 + 9u^9 - 16u^{16} + \dots)$$

Elle est représentée par une courbe analogue à la courbe U de la figure 88.

189. Télégraphie sous-marine. — On comprend maintenant la nature du problème de la télégraphie dans un câble de grande capacité. On cherche à réaliser une *brusque variation* du courant dont l'intensité absolue *lentement variable* n'entre plus en ligne de compte.

Les *points* et les *traits* de l'alphabet Morse sont remplacés par des variations brusques dans un sens ou dans l'autre.

Le problème consiste à créer dans la ligne des protubérances de courant *se maintenant aussi raides que possible* pendant la propagation. *La durée de la propagation*, relativement longue et déterminée par les constantes de la ligne, *n'intervient plus dans la rapidité des communications*, au moins comme première approximation. En effet, si les protubérances sont au départ et *se maintiennent* assez raides, il peut en exister *simultanément* sur la ligne un grand nombre qui se propagent sans se mélanger.

Imaginons un tube acoustique suffisamment long, de 300 mètres par exemple ; le son met une seconde à le parcourir. Nous pouvons cependant parler aussi vite que nous voulons : la personne qui est à l'autre bout du tube nous entend *avec un retard*, mais les paroles n'en sont pas moins distinctes. Le *rendement* du tube, c'est-à-dire le nombre de mots transmis à l'heure, est indépendant de ce retard. Cela tient à ce que les ondes sonores se déforment très peu : *plusieurs mots peuvent exister simultanément dans le tube*.

Ce qui complique le problème électrique, c'est que les ondes se déforment en se propageant. La protubérance s'allonge et occupe de plus en plus de place le long du câble. D'où une limite à la vitesse de transmission.

On a cherché à raidir la protubérance en employant les *signaux bridés*, dont le plus simple est étudié au paragraphe précédent. On les obtient avec des manipulateurs spéciaux qui fournissent une combinaison de contacts alternativement positifs et négatifs, et de durées convenablement calculées.

On préfère cependant aujourd'hui le signal alternatif le plus simple joint à l'emploi d'un condensateur.

190. Emploi d'un condensateur. Récepteur. — Il y a de grands inconvénients à ce qu'un câble ne soit pas habituellement isolé. Le sol n'est en effet au potentiel zéro que par définition ; on sait de reste qu'entre deux points de la Terre, il existe toujours une différence de potentiel *lentement variable*. Il est utile de mettre le câble à l'abri des courants permanents qui ne manquent pas de se produire quand les extrémités sont au sol.

Il est possible de transmettre des signaux avec un câble isolé.

La figure 90 montre l'installation.

Les extrémités du câble aboutissent à l'une des armatures de deux condensateurs C_1 et C_2 . L'autre armature B du condensateur C_1 (poste

transmetteur) peut être reliée soit au sol, soit au pôle positif, soit au pôle négatif d'une pile dont l'autre pôle est simultanément mis au sol.

L'autre armature K du condensateur C_2 est reliée au sol à travers le galvanomètre G servant d'appareil récepteur.

Mettons l'armature B en communication avec le pôle $+$ de la pile dont le potentiel est E. Elle ne prend pas instantanément le potentiel E; car il faut un certain temps pour que l'électricité afflue

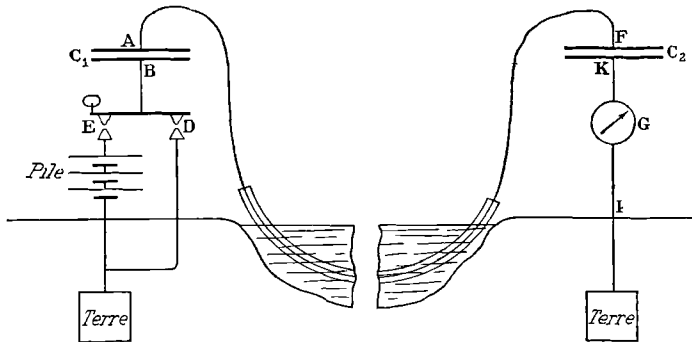


Fig. 90.

dans A qui doit à chaque instant porter une quantité d'électricité égale et de signe contraire à celle de B. Il est clair que si la ligne est primitivement au potentiel 0, elle tend vers un état d'équilibre caractérisé par le potentiel $-E$ sur A, $+E$ sur F, $-E$ sur K. Donc un courant doit traverser le galvanomètre G dans le sens KI, tout comme si les condensateurs n'existaient pas.

On conçoit qu'en faisant varier convenablement le potentiel de B, on puisse envoyer dans la ligne des *variations de potentiel* suffisamment raides pour produire à travers le galvanomètre G de *brusques variations de courant*.

L'appareil récepteur est un galvanomètre à cadre mobile. Le cadre est parfois relié à une sorte de plume traçant des signaux sur une bande de papier ordinaire. On peut fixer sur le cadre un miroir et, par la méthode de Poggendorff, photographier ses déplacements angulaires sur une bande de papier sensible. On peut encore lire directement la dépêche en regardant le spot lumineux sur une échelle transparente.

Quoi qu'il en soit, le spot (ou ce qui en tient lieu), se promène en traduisant à l'œil les *variations* de l'intensité du courant. On ne doit tenir compte ni de la position absolue du spot, ni même de la grandeur relative de ses déplacements; seules les brusques secousses dans un sens ou dans l'autre forment les signaux.

191. **Coexistence du pouvoir diélectrique et de la conductibilité ohmique.** — Rien n'empêche de supposer dans un diélectrique la coexistence du pouvoir diélectrique et de la conductibilité ohmique. Quand on fait agir une différence de potentiel sur les surfaces opposées d'une plaque d'un tel diélectrique, il y a à la fois déformation du milieu (*déplacement au sens de Maxwell*) et courant permanent.

Pour se représenter les phénomènes dans les idées de Lorentz, il faut imaginer : 1° une déformation de l'éther; 2° une polarisation diélectrique des molécules, c'est-à-dire un véritable courant à l'intérieur des molécules dans lesquelles les corpuscules se déplacent, mais sans pouvoir en sortir; 3° un courant d'électrons qui prennent des déplacements finis comme dans les métaux, ou comme les ions dans les électrolytes.

I. Chargeons un condensateur formé d'un tel diélectrique avec une pile de force électromotrice E_0 . Soit R la résistance du circuit extérieur, r celle du diélectrique, C la capacité du condensateur, E la différence de potentiel entre ses armatures à chaque instant.

Égalons d'une part la quantité d'électricité qui passe dans le temps dt dans le circuit extérieur, d'autre part la somme de celle qui charge le condensateur et de celle qui le traverse :

$$\frac{E_0 - E}{R} = C \frac{dE}{dt} + \frac{E}{r}.$$

$$E = E_0 \frac{r}{R + r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right), \quad \tau_1 = C : \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right).$$

Ainsi la différence de potentiel E entre les armatures tend non plus vers E_0 , mais vers une valeur limite légèrement inférieure. Comme r est généralement énorme vis-à-vis de R , la charge se produit pratiquement comme si le diélectrique était parfait.

Le courant de charge, d'abord nul, tend vers une valeur limite :

$$I = \frac{E_0}{R + r};$$

elle ne peut être décelée avec un galvanomètre, même très sensible, que si le diélectrique est très imparfait.

II. Supprimons la pile et abandonnons le condensateur à lui-même. Tout se passe comme s'il se déchargeait dans une résistance extérieure r (§ 182).

La différence de potentiel diminue entre les armatures suivant la

loi :

$$E_2 = E_1 e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad \tau_2 = Cr.$$

E_1 représente la valeur de E au commencement de l'expérience, valeur pratiquement égale à E_0 .

III. — Si, après un certain temps d'abandon, nous déchargeons le condensateur à travers un galvanomètre balistique, nous recueillons une quantité d'électricité pratiquement égale à :

$$CE_2 = CE_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

En effet, à moins de précautions spéciales, pour petit qu'ait été le temps de charge dans l'expérience I, E_1 a atteint sa valeur limite qui diffère extrêmement peu de E_0 . D'ailleurs la durée de décharge dans l'expérience III est aussi extrêmement courte; la perte à travers le condensateur pendant cette décharge est négligeable. Nous obtenons donc bien la formule écrite ci-dessus.

192. Mesure des grandes résistances par la perte de charge d'un condensateur. — Il résulte du paragraphe précédent une méthode de mesure des très grandes résistances.

On charge un condensateur dont le diélectrique est choisi aussi parfait que possible : la déperdition de potentiel est extrêmement petite. Si elle n'est pas négligeable, on commence par la déterminer au moyen de la formule précédente : on obtient une valeur de la résistance r .

Cette première détermination effectuée, on réunit les armatures par la résistance x à mesurer : on a donc affaire à une véritable dérivation de résistance X :

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{r} + \frac{1}{x}, \quad X = \frac{xr}{x+r},$$

qu'on détermine par une nouvelle expérience.

On mesure soit la perte de potentiel avec un électromètre, soit la perte de charge avec un galvanomètre balistique.

Pour fixer les idées, supposons que la résistance soit de 1000 mégohms et la capacité d'un microfarad; cherchons le temps nécessaire pour que le potentiel soit réduit à 1/10 de sa valeur initiale :

$$t = 1000 \log \text{nat } 10 = 1000 \times 2,3 = 2300^s = 38^m.$$

Ainsi, dès que la résistance de l'isolant est grande, le temps de la décharge devient énorme.

193. Application aux câbles sous-marins.

Commençons par préciser l'ordre de grandeur des paramètres des câbles sous-marins.

CAPACITÉ.

En unités électrostatiques et avec les logarithmes ordinaires, on a (§ 95) :

$$C = \frac{0,217 \cdot K}{\log R_2 - \log R_1}.$$

Pour exprimer la même capacité en unités électromagnétiques, il faut diviser par le carré du nombre qui exprime en CGS la vitesse de la lumière, soit (§ 183) :

$$(3 \cdot 10^{10})^2 = 9 \cdot 10^{20}.$$

Mais le *farad* est 10^{-9} CGS (§ 356); le microfarad est 10^{-15} CGS. La capacité exprimée en *microfarads* est donc :

$$C = \frac{10^{15}}{9 \cdot 10^{20}} \frac{0,217 \cdot K}{\log R_2 - \log R_1} = \frac{1}{9 \cdot 10^5} \frac{0,217 \cdot K}{\log R_2 - \log R_1}.$$

On admet généralement 4,2 pour valeur moyenne du pouvoir inducteur spécifique dans la gutta-percha; d'où la capacité par mille marin et en microfarads :

$$C = \frac{4,2 \times 0,217 \times 185\,200}{9 \times 10^5} \frac{1}{\log R_2 - \log R_1} = \frac{0,487}{\log R_2 - \log R_1}.$$

Le rapport $R_2 : R_1$ du diamètre extérieur de la matière isolante au diamètre du conducteur métallique, est généralement voisin de 3; le logarithme de 3 est 0,477. La capacité par mille marin est de l'ordre de 0,4 microfarads.

RÉSISTANCE D'ISOLEMENT.

La résistance spécifique ρ de la gutta-percha est de l'ordre de 300 millions de mégohms. La résistance en ohms d'une longueur l évaluée en centimètres est, en employant les logarithmes vulgaires (§ 172) :

$$r = \frac{\rho}{2\pi l} 2,303 \cdot \log \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho}{l} 0,366 \cdot \log \frac{R_2}{R_1}.$$

La résistance par mille est :

$$r_m = 1,976 \cdot 10^{-6} \rho \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Substituons à ρ la valeur moyenne, $300 \cdot 10^6$ mégohms; admettons le rapport $R_2 : R_1 = 3$; il vient 283 mégohms pour la résistance par mille marin. Sur un câble transatlantique dont la longueur est de 3000 milles environ, la résistance d'isolement n'est plus que de l'ordre d'un dixième de mégohm, soit 100 000 ohms. Il est bon d'ajouter que certaines gutta-percha sont beaucoup plus isolantes.

MESURE DE L'ISOLEMENT.

Soit t le temps nécessaire pour que le potentiel passe de E_1 à E_2 (§ 191, exp. II); employant les logarithmes vulgaires, exprimant la capacité en microfarads et la résistance d'isolement en mégohms, on a pour un mille de câble :

$$r = \frac{t}{C} \frac{0,434}{\log E_1 - \log E_2} = 2,32 \cdot t \frac{\log R_2 - \log R_1}{\log E_1 - \log E_2}.$$

Supposons le rapport $R_2 : R_1$ égal à 3 ; calculons le temps t , tel que le potentiel diminue de moitié ; il vient :

$$r = 3,67 \cdot t.$$

Si par exemple r est de 283 mégohms, le temps nécessaire pour que le potentiel d'une section de câble longue d'un mille, isolée, portée au potentiel 2 et abandonnée à elle-même, retombe au potentiel 1, est de :

$$283 : 3,67 = 77,1 \text{ secondes.}$$

L'expérience ne présente donc aucune difficulté technique.

VARIATION DE LA RÉSISTANCE D'ISOLEMENT.

Elle diminue beaucoup avec la température.

Elle est aussi très variable avec les conditions de la charge. Sous l'influence d'une différence de potentiel maintenue entre les armatures, la résistance *semble* diminuer de minute en minute. Cela veut dire que le câble, isolé et abandonné ensuite à lui-même, se décharge spontanément de moins en moins vite, à mesure que la durée de la charge a été plus grande. La variation *apparente* de r peut atteindre le triple de la valeur minima de r , quand la durée de charge passe de une minute à une heure.

Il faut se garder de voir immédiatement dans ce phénomène une véritable variation de la résistance. Il peut s'expliquer, en grande partie au moins, par les *résidus* dont nous parlerons au § 195. Si, par un mécanisme quelconque, la matière emmagasine de l'électricité pendant la charge, et en quantité croissante avec la durée de celle-ci ; si ensuite elle restitue lentement cette électricité pendant la décharge, le potentiel diminue moins vite qu'en l'absence du phénomène, et la matière semble beaucoup plus isolante qu'elle n'est en réalité ; cependant la résistance a pu rester invariable.

Il est plus que probable que l'étude convenablement reprise de ce phénomène montrerait des résistances non seulement variables avec la durée de charge, mais encore avec les deux potentiels E_2 et E_1 , qui servent à les mesurer. Autrement dit, *la loi de variation* des potentiels pendant la décharge doit dépendre de l'ensemble des phénomènes de charge. C'est là un cas particulier des phénomènes généraux de déformation présentés par les solides.

194. Propagation dans un câble en tenant compte de la résistance du diélectrique. — Lorsque la résistance ohmique du diélectrique n'est plus infiniment grande, l'équation du § 183 est incomplète. Il faut écrire que l'électricité n'est plus seulement employée à charger l'élément de câble ; une partie s'écoule à travers le diélectrique.

Soit ρ_2 la résistance de l'enveloppe par unité de longueur ; la quantité perdue est $V : \rho_2$. L'équation (1) devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_1 \rho_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho_1 V}{\rho_2}.$$

Nous l'avons déjà rencontrée dans la Théorie de la conduction de la chaleur (II, § 246).

195. **Résidus.** — Dans la plupart des condensateurs, après la charge, la décharge et l'isolement, on voit apparaître au bout d'un certain temps une charge de même nature qu'on appelle un *résidu*. Maxwell explique ce phénomène par un mécanisme qui, réduit à sa plus grande simplicité, se ramène au schéma suivant.

Imaginons le diélectrique formé de deux plaques de même épaisseur e et de pouvoirs inducteurs K_1 et K_2 . Le diélectrique 1 est parfait. Le diélectrique 2 est faiblement conducteur ; mais nous supposons qu'il est *extérieurement* recouvert de deux minces couches d'un diélectrique parfait, de sorte que l'électricité peut bien se déplacer dans lui, mais ne peut s'échapper.

Étudions ce qui arrive quand on maintient l'armature A au potentiel 0 et l'armature C au potentiel E (fig. 91).

Le lecteur se rappellera qu'en vertu du § 37 deux couches parallèles, indéfinies, de densités uniformes et de signes contraires

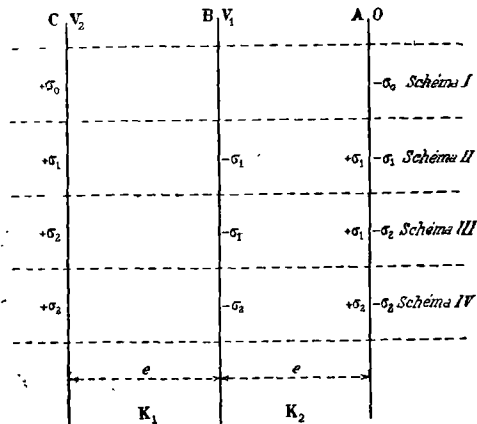


Fig. 91.

(*couche double*), produisent une discontinuité nulle sur la force ; que d'ailleurs la force est toujours nulle à l'intérieur des armatures. C'est sur ces propositions que nous nous sommes appuyés pour prouver que les couches en présence sur les armatures d'un condensateur sont égales et de signes contraires.

CHARGE. — La charge instantanée est la même que si les deux diélectriques étaient parfaits ; elle correspond à une densité $+\sigma_0$ sur C, $-\sigma_0$ sur A, 0 sur B. (Schéma I.)

Soit X_1 la force dans 1, X_2 la force dans 2, comptées dans le sens CA :

$$X_1 = \frac{V_2 - V_1}{e}, \quad X_2 = \frac{V_1}{e}, \quad V_2 = E; \quad X_1 + X_2 = \frac{E}{e}.$$

D'ailleurs la surface B n'étant recouverte d'aucune couche d'électricité, on a (§ 108) : $K_1 X_1 = K_2 X_2$;

$$\text{d'où : } X_1 = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \frac{E}{e}, \quad X_2 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \frac{E}{e};$$

$$\sigma_0 = \frac{K_1 X_1}{2\pi} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{E}{2\pi e}.$$

Mais peu à peu, sous l'influence de la force X_2 , l'électricité se déplace dans le diélectrique 2. Après un temps suffisant, il s'est formé sur les surfaces A et B deux couches réelles de densité $\pm \sigma_1$ qui, combinées aux couches $\pm \sigma_1$ des faces C et A, annulent la force à l'intérieur du diélectrique 2. (Schéma II.) Tout se passe comme si le corps 2 était conducteur. Le potentiel V_1 est nul; la densité σ_1 est :

$$\sigma_1 = \frac{K_1 X_1}{2\pi} = K_1 \frac{E}{2\pi e}.$$

Le système des deux plaques possède un pouvoir diélectrique *apparent* plus grand que le pouvoir diélectrique *réel*.

Installons un galvanomètre sur le circuit extérieur et reprenons l'expérience entière de charge. Après un courant de charge *instantané* considérable, correspondant à la densité σ_0 , nous constatons un courant décroissant suivant une loi qui dépend des hypothèses faites sur la conductibilité du diélectrique (les plus simples donnent naturellement une exponentielle), et transportant en tout, par unité de surface d'armature, la quantité :

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{K_1^2}{K_1 + K_2} \frac{E}{2\pi e}.$$

DÉCHARGE. — Après un temps suffisant pour que ce courant soit à peu près annulé, réunissons les armatures à travers un galvanomètre : elles sont brusquement ramenées au même potentiel nul. Cherchons la quantité transportée par la décharge instantanée. (Schéma III.)

Les couches $\pm \sigma_1$ distribuées sur les surfaces du diélectrique 2 n'ont pas le temps de disparaître; il faut leur associer, sur les surfaces C et A des armatures, des couches $\pm \sigma_2$ telles que le potentiel soit nul à l'intérieur des armatures C et A. Soit X_1 la force dans 1, X_2 la force dans 2. On a :

$$V_2 = 0, \quad X_1 = -\frac{V_1}{e}, \quad X_2 = \frac{V_1}{e}; \quad X_1 + X_2 = 0.$$

Les équations de continuité sont :

$$K_1 X_1 = 2\pi \sigma_2, \quad K_2 X_2 = 2\pi(\sigma_1 - \sigma_2).$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{K_1}{K_1 + K_2}, \quad \sigma_2 = \frac{K_1^2}{K_1 + K_2} \frac{E}{2\pi e}, \quad D_1 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{E}{2\pi e}.$$

Le courant de décharge instantanée est mesuré par $\sigma_1 - \sigma_2$; il est donc égal au courant de charge instantanée.

La décharge instantanée effectuée, isolons le condensateur et attendons un temps suffisant. L'équilibre est atteint lorsque la force est redevenue nulle dans le diélectrique 2. Il faut donc que la distribution soit représentée par le schéma IV, tout à fait semblable au schéma III.

Si alors nous ramenons l'armature C au potentiel 0, nous aurons une nouvelle décharge instantanée, un résidu, dont le calcul se fait exactement comme plus haut. On obtiendra donc à un schéma V non représenté, où les densités σ_3 et σ_2 joueront le même rôle que les densités σ_2 et σ_1 dans le schéma III. D'où les équations :

$$X_1 + X_2 = 0, \quad K_1 X_1 = 2\pi\sigma_3, \quad K_2 X_1 = 2\pi(\sigma_2 - \sigma_3).$$

$$\sigma_3 = \frac{K_1}{K_1 + K_2}, \quad \sigma_2 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \frac{K_1^2}{K_1 + K_2} \frac{E}{2\pi e},$$

$$D_2 = \sigma_2 - \sigma_3 = D_1 \frac{K_1}{K_1 + K_2}.$$

La décharge D_2 s'obtient en multipliant D_1 par un certain facteur.

La décharge instantanée effectuée, isolons à nouveau le condensateur, ... et ainsi de suite. Nous obtiendrons un second résidu D_3 , puis un troisième, ... Les décharges instantanées successives : D_1, D_2, D_3, \dots forment une progression géométrique dont la raison

est :

$$\alpha = \frac{K_1}{K_1 + K_2}.$$

Additionnons les décharges successives :

$$\Sigma D = \frac{D_1}{1 - \alpha} = K_1 \frac{E}{2\pi e} = \sigma_1;$$

la somme des décharges est égale à la charge totale, ce qui est évident *a priori*.

Telle est la théorie de Maxwell débarrassée d'une analyse inutile. On l'a présentée sous bien des formes, croyant inventer quelque chose de neuf. Comme nous ne savons rien *a priori* sur les lois de la conductibilité du diélectrique, ou plus exactement sur les lois de la polarisation à l'intérieur des molécules du diélectrique, nous disposons, sans craindre contradiction, d'une fonction arbitraire. Si nous admettons que le déplacement de l'électricité dans la molécule diélectrique amène un frottement proportionnel à la vitesse, nous aurons des exponentielles pour les lois de variation du potentiel pendant la charge ou pendant la formation des résidus.

L'étude des résidus a la plus grande analogie avec l'étude de la réactivité (I, § 119) ; on est même conduit dans ce dernier cas à un schéma très voisin de celui de Maxwell. Pour soumettre les résidus

à une expérience correcte, on devra calquer les méthodes qui ont servi pour les phénomènes de déformation : on devra préciser la loi complète de la charge et de la décharge, et tenir compte de l'histoire entière des *déformations électriques*. Les expériences actuelles sont loin de satisfaire à ce programme.

C'est ne rien comprendre à la théorie de Maxwell que lui prêter l'idée d'un diélectrique contenant une impureté. Maxwell n'est pas cause de la méprise par le titre donné à sa théorie : *Diélectriques composés*, puisqu'il dit explicitement *qu'il s'agit d'une nouvelle espèce de polarisation diélectrique dont seraient susceptibles les substances homogènes*.

Dans la théorie de Lorentz, il suffit de supposer que la polarisation des molécules, au lieu d'être quasiment instantanée, se fait avec une lenteur plus ou moins grande; au contraire, le déplacement dans l'éther est toujours instantané. La théorie de Lorentz implique déjà l'hypothèse que les électrons ne peuvent pas sortir de la molécule.

Les résidus ne troublent pas les phénomènes de propagation électromagnétique, du fait même que les corps de faible conductibilité se conduisent exactement comme des isolants parfaits pour des vibrations rapides. C'est le pouvoir inducteur spécifique *réel* qui intervient, et non le pouvoir *apparent*.

Ces conséquences sont parfaitement conformes à la théorie de Maxwell.

CHAPITRE V

COURANTS DANS LES GAZ

196. **Ionisation des gaz.** — Sous certaines influences, il se forme dans les gaz des centres chargés, en nombres égaux, les uns positivement, les autres négativement. Leur charge est égale en valeur absolue à celle que transporte l'atome d'hydrogène dans l'électrolyse, soit environ (II, § 219) :

$$\epsilon = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ unités électrostatiques} = 1,1 \cdot 10^{-19} \text{ coulombs.}$$

Les centres sont entourés par attraction électrostatique d'une enveloppe de molécules neutres, si la pression est suffisante et la température assez basse. Ces *agrégats* complexes s'appellent *ions*; leur formation constitue l'*ionisation*.

A mesure que la température s'élève, les molécules condensées autour du centre électrisé se détachent. L'ion *négatif* tend à devenir un *électron* (§ 177); l'ion *positif* conserve la grosseur d'une molécule.

Les ions sont caractérisés par la valeur de la charge ϵ/μ qu'ils transportent par unité de masse; s'ils ont la masse de l'atome d'hydrogène, le rapport ϵ/μ est, d'après les lois de l'électrolyse (Cours de Première, § 62) :

$$\chi = \epsilon/\mu = 9,66 \cdot 10^4 \text{ coulombs} = 2,9 \cdot 10^{14} \text{ unités électrostatiques.}$$

Généralement à *froid* et pour les ions positifs, ϵ/μ est beaucoup plus petit; la masse de l'ion positif est donc beaucoup plus grande que la masse de l'atome d'hydrogène (jusqu'à 200 fois plus grande).

Quand au contraire les molécules neutres formant l'enveloppe du centre électrisé disparaissent, la masse de l'ion diminue; le rapport ϵ/μ de sa charge (constante) à sa masse augmente. En particulier, l'ion *négatif* tend à devenir un *électron* dont la masse est environ deux mille fois plus petite que l'atome d'hydrogène :

$$\chi = \epsilon/\mu = 1,865 \cdot 10^8 \text{ coulombs.}$$

Les procédés d'ionisation sont très nombreux (solides incandescents, flammes, phosphore, rayons Röntgen, radioactivité, lumière ultraviolette, ...).

La conductibilité des gaz s'explique par l'existence séparée des

ions, c'est-à-dire par une théorie analogue à celle qui sert pour les électrolytes (II, §§ 133 et sq.). Mais comme *dans l'électrolyse des gaz* on ne trouve sur les électrodes aucun produit de décomposition, force est de compléter l'hypothèse de la conductibilité électrolytique du gaz par une hypothèse sur la conductibilité métallique. D'où la notion d'*électron*, qui, nous le verrons, explique aussi d'une manière très naturelle les phénomènes dans les tubes à vide.

197. Electrons. Conducteurs métalliques. — Les centres *néga-tifs isolés*, qu'on appelle *électrons*, et dont la masse est deux mille fois plus petite que celle de l'atome d'hydrogène, sont *identiques*, de quelque substance qu'ils proviennent et de quelque manière qu'on les ait produits (ionisation des gaz à haute température, rayons cathodiques, ...). Ils constituent comme un nouvel état de la matière. Il semble que ce soit toujours de l'électricité négative qui est associée à cet état, l'électricité positive s'attachant à la matière ordinaire.

On admet la présence d'électrons dans tous les corps *conducteurs*, même solides ; ils sont dus à la dissociation d'une molécule ordinaire en un électron et en un reste électrisé positivement. L'association de l'électron et du reste redonne la molécule ordinaire neutre.

Le nombre des électrons qui existent dans un centimètre cube de la substance, résulte de l'équilibre dynamique entre la recombinaison des électrons avec les restes positifs et la dissociation des molécules neutres.

Dans les solides conducteurs, on doit concevoir les électrons comme se mouvant librement à travers l'édifice formé par les molécules neutres et les restes positifs. Leur course n'est limitée que par les chocs contre les molécules neutres. Les restes positifs ne sont peut-être pas absolument immobiles, mais n'ont que des déplacements très lents. Les molécules neutres oscillent autour de positions invariables.

Les électrons dispersés dans la masse du métal ont leurs mouvements *coordonnés* par l'existence d'une force électromotrice ; leur écoulement vers les potentiels *croissants* constitue le courant.

La conductibilité ohmique résulte de cette hypothèse (§ 225).

La conductibilité thermique est due, elle aussi, à un échange d'électrons entre la région chaude et la région froide, les électrons chauds ayant une vitesse plus grande, et par conséquent une énergie plus grande. Nous reviendrons là-dessus plus loin (§ 226).

Les électrons, bien que se mouvant librement à l'intérieur de la substance, n'en sortent pas, à moins que leur énergie cinétique ne dépasse une certaine limite, puisqu'un travail est nécessaire pour les séparer du conducteur (§ 205).

Hypothèse de la conductibilité électrolytique des gaz. — Voici dès lors comment il faut se représenter le transport de l'électricité par les gaz.

Par un procédé quelconque on *ionise* le gaz : ses molécules se dissocient en un *électron négatif* et en un *reste positif* qui s'entourent immédiatement par attraction électrostatique de molécules neutres et constituent alors *seulement les ions*.

Les ions se déplacent sous l'influence du champ électrique avec des vitesses proportionnelles à l'intensité de ce champ. Les centres négatifs vont vers les potentiels croissants, c'est-à-dire vers l'anode ; les centres positifs vers les potentiels décroissants, c'est-à-dire vers la cathode.

Quand un ion négatif arrive sur l'anode, l'*électron* abandonne les molécules neutres qu'il avait groupées, et passe dans le métal de l'anode qu'il charge négativement. Quand un ion positif, *c'est-à-dire privé d'électron*, arrive sur la cathode, celle-ci fournit l'électron qui manque pour faire une molécule neutre ; elle se charge donc positivement. Le courant se forme, dans le circuit reliant les électrodes, par le libre déplacement des électrons à travers le métal.

Précisons les conséquences de cette hypothèse.

198. Conductibilité des gaz. Position du problème. — Entre deux plateaux parallèles P_0 et P_1 (fig. 92) on produit une ionisation du gaz.

Suivant le procédé, les ions peuvent se former dans la masse de gaz (*ionisation de volume*) ou sur certaines surfaces (*ionisation de surface*).

Dans ce qui suit, nous supposons une ionisation de volume uniforme dans l'espace et indépendante du temps. Soit q le nombre d'ions $+$ ou $-$ créés par unité de volume et par unité de temps.

Bien que les ions $+$ et $-$ apparaissent en nombres égaux, leurs causes de disparition d'un point n'étant pas les mêmes, leurs nombres par unité de volume ne sont pas nécessairement les mêmes.

Appelons n_1 le nombre des ions $+$, n_2 le nombre des ions $-$. Repérons les positions entre les plateaux par une variable x comptée sur une droite Ox ; admettons que les phénomènes sont les mêmes en tous les points d'un plan parallèle aux plateaux : n_1 et n_2 sont des fonctions de x .

Établissons entre les plateaux P_0 et P_1 une différence de potentiel $V_0 - V_1$ constante. Il naît en tout point compris entre les plateaux une force P qui est généralement une fonction de x . Dans un condensateur ordinaire P serait constant.

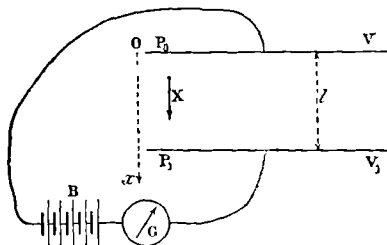


Fig. 92.

Sous l'action de la force électromotrice P , la vitesse de l'ion $+$ dans le sens Ox est k_1P ; celle de l'ion $-$ dans le sens xO est k_2P . Les coefficients k_1 et k_2 s'appellent les *mobilités*. Généralement $k_2 > k_1$: la *mobilité de l'ion négatif est plus grande que celle de l'ion positif*. Ce résultat prouve que la masse de l'agrégat négatif est généralement moindre que la masse de l'agrégat positif.

Admettre que, sous l'action d'une force P_ε , un mobile prend une vitesse *uniforme* $u = kP$, revient à admettre qu'il subit de la part du milieu environnant une force F égale et opposée à P_ε :

$$F = -P_\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{k}u.$$

Le frottement est donc proportionnel à la vitesse et en raison inverse de la mobilité. On peut encore dire que le mobile pousse le milieu environnant avec la force P_ε . Nous aurons l'occasion d'utiliser cette remarque quand nous parlerons du *vent électrique* (§ 211).

Enfin les ions $+$ et $-$ entrent en collision et se combinent. Dans l'unité de temps et par unité de volume, il disparaît de ce chef $\alpha n_1 n_2$ ions positifs et un nombre égal d'ions négatifs.

199. Équations générales (J.-J. Thomson). — Soit ε la charge portée par chaque ion : la densité cubique de l'électricité est d'après la formule de Poisson (§ 30) :

$$\frac{dP}{dx} = 4\pi(n_1 - n_2)\varepsilon. \quad (1)$$

Soit i le courant par centimètre carré du plan parallèle aux faces du condensateur. En négligeant toute diffusion autre que celle due au champ :

$$i = \varepsilon P(k_1 n_1 + k_2 n_2). \quad (2)$$

L'équation (2) exprime que le déplacement total d'électricité est proportionnel à la force électromotrice P , aux mobilités et au nombre des ions libres. On comparera ces hypothèses à celles que nous avons employées dans l'étude de la conduction des électrolytes (II, § 136).

On tire de là :

$$n_1 \varepsilon = \frac{1}{k_1 + k_2} \left(\frac{i}{P} + \frac{k_2}{4\pi} \frac{dP}{dx} \right), \quad (3')$$

$$n_2 \varepsilon = \frac{1}{k_1 + k_2} \left(\frac{i}{P} - \frac{k_1}{4\pi} \frac{dP}{dx} \right). \quad (3'')$$

La variation des nombres n_1 et n_2 résulte du transport, de la production et de la recombinaison des ions.

Un raisonnement que nous avons déjà fait maintes fois, nous apprend que l'accroissement du nombre des ions dans un volume ayant un centimètre carré de base et limité par les plans x et $x + dx$,

est :

$$-k_1 \frac{d(n_1 P)}{dx} dx,$$

puisque la vitesse est parallèle à Ox et égale à $k_1 n_1 P$. Par hypothèse, dans ce même volume apparaissent par unité de temps $q dx$ ions, et se recombinaient $\alpha n_1 n_2 dx$ ions. On a donc :

$$\frac{dn_1}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 - k_1 \frac{d}{dx} (n_1 P), \quad (4')$$

$$\frac{dn_2}{dt} = q - \alpha n_1 n_2 + k_2 \frac{d}{dx} (n_2 P). \quad (4'')$$

Si l'état permanent est atteint :

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0,$$

$$k_1 \frac{d}{dx} (n_1 P) = q - \alpha n_1 n_2, \quad (5')$$

$$-k_2 \frac{d}{dx} (n_2 P) = q - \alpha n_1 n_2. \quad (5'')$$

200. **Conséquences générales.** — Les équations générales donnent lieu à des calculs compliqués. On peut toutefois prévoir l'allure des phénomènes.

1° *Supposons très petite la force électromotrice imposée :* $V_0 - V_1$. Les ions sont peu déplacés par la force P . Alors même que les mobilités k_1 et k_2 diffèrent, n_1 et n_2 sont voisins : $n_1 = n_2$ comme première approximation. Les équations (4) donnent sensiblement :

$$q = \alpha n_1 n_2,$$

puisque nP et $d(nP) : dx$ sont négligeables. D'où :

$$i = \varepsilon \sqrt{\frac{q}{\alpha}} (k_1 + k_2) P.$$

L'intensité du courant est très sensiblement proportionnelle à la force électromotrice P , c'est-à-dire au quotient de $V_0 - V_1$ par la distance l des plateaux; l'équation (1) nous apprend en effet que P est à peu près constant quand n_1 et n_2 sont voisins (fig. 93, portion OA de la courbe). Les portions du courant dues respectivement aux ions $+$ et aux ions $-$, sont proportionnelles aux mobilités des ions.

2° *Supposons très grande la force électromotrice imposée :*

$$V_0 - V_1.$$

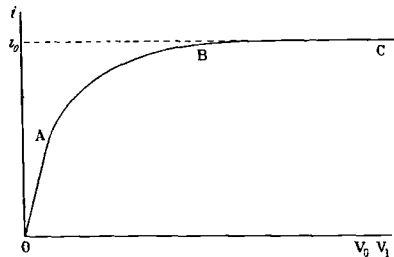


Fig. 93.

Pour grande que soit la vitesse des ions, il n'en peut arriver sur les plateaux plus qu'il ne s'en forme. Dans le prisme droit ayant pour bases un centimètre carré

d'aire des plateaux placés à la distance l , l'ionisation donne par seconde lq ions de chaque espèce. Si $V_0 - V_1$ croît indéfiniment, le courant i par centimètre carré d'armature tend vers la limite :

$$i_0 = \epsilon ql.$$

Effectivement, si on produit une ionisation constante entre les plateaux (avec des rayons Röntgen par exemple), on constate au galvanomètre G (fig. 92) un courant i dont l'intensité, d'abord proportionnelle à $V_0 - V_1$ quand la force électromotrice est petite, tend vers une limite qu'on appelle *courant de saturation*, quand $V_0 - V_1$ croît indéfiniment (fig. 93, portion BC de la courbe).

On remarquera que le courant de saturation i_0 est proportionnel à la distance l des plateaux. La *résistance apparente* du gaz est donc en raison inverse de l'épaisseur; résultat paradoxal vérifié par l'expérience.

201. Mesure des quantités d'électricité transportées. — Nous supposons dans la figure 92 que le courant est mesuré par un galvanomètre. C'est parfois possible; le plus souvent les courants sont

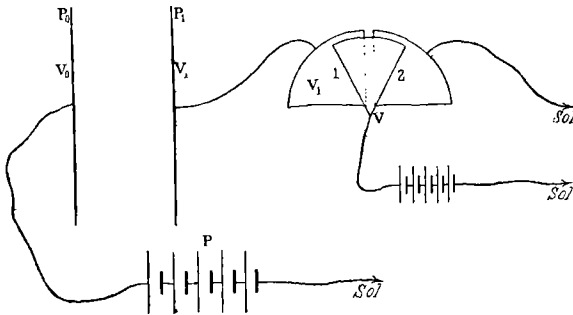


Fig. 94.

trop petits pour donner une déviation mesurable: alors on emploie l'électromètre à quadrants (fig. 94).

L'aiguille est portée à un potentiel fixe V par une pile d'un grand nombre d'éléments, dont un des pôles est au sol.

La paire de quadrants Q_2 est au sol. Soit V_1 le potentiel de l'autre paire Q_1 , nous savons (§ 102) que la déviation D est proportionnelle à : $V_1(2V - V_1)$, soit à : $2VV_1$, quand V_1 est négligeable devant V , ce qui est ici le cas.

V_1 étant proportionnel à la quantité totale amenée sur le système dont Q_1 fait partie, la déviation D est proportionnelle à cette quantité. L'appareil est d'autant plus sensible que sa capacité est plus petite.

Ceci posé, voici la marche d'une expérience. La pile P de force électromotrice E maintient le plateau P_0 au potentiel $V_0 = E$. On relie les quadrants Q_1 au plateau P_1 , les quadrants Q_2 au sol. On met un instant le système P_1Q_1 au sol, puis on l'isole. Si le gaz n'est pas

conducteur, le potentiel du plateau P_1 reste invariable, l'aiguille ne dévie pas. S'il passe un courant, le potentiel devient V_1 , l'aiguille dévie.

Comme V_1 est toujours petit, $V_0 - V_1$ reste toujours sensiblement égal à E .

La déviation D mesure $\int_0^t idt$; le courant à chaque instant est proportionnel à $dD : dt$.

AUTRE TECHNIQUE.

On peut encore maintenir le plateau P_0 au potentiel zéro, charger les deux paires de quadrants au même potentiel V_1 assez élevé, puis isoler le système des quadrants Q_1 et du plateau P_1 . On détermine alors la perte de potentiel de ce système en suivant la marche de l'aiguille de l'électromètre. Tant que les deux paires de quadrants sont au même potentiel, l'aiguille reste au zéro; elle dévie quand le potentiel du système P_1Q_1 varie. Le courant à chaque instant est encore mesuré par le quotient $dD : dt$.

MESURE DU NOMBRE TOTAL DES IONS.

La méthode permet commodément de déterminer la quantité d'ions existant à un instant donné dans un gaz. Supposons d'abord les deux plateaux au sol; isolons-les. Pendant un temps très court, élevons ou abaïssons beaucoup le potentiel de P_0 (suivant que nous voulons envoyer sur le plateau P_1 les ions positifs ou les ions négatifs), puis ramenons-le à sa valeur première. Tous les ions ont disparu d'entre les plateaux; *l'aiguille reste déviée proportionnellement à leur nombre.*

202. Recombinaison des ions. — Exerçons sur le gaz une action ionisante constante, définie par le nombre q d'ions formés par unité de temps et par unité de volume. La loi de variation du nombre des ions positifs ou négatifs ($n = n_1 = n_2$) est donnée par l'une ou l'autre des équations (4) :

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2, \quad n = N \frac{e^{2N\alpha t} - 1}{e^{2N\alpha t} + 1}, \quad N^2 = q : \alpha.$$

L'état limite est atteint pour $t = \infty$ et $n = N$. On obtient immédiatement ce résultat en posant : $\frac{dn}{dt} = 0$, dans l'équation (4).

Le gaz, une fois chargé de N ions $+$ ou $-$ par unité de volume, est abandonné à lui-même. Dans leurs collisions, les ions de signes contraires se recombinent pour former des molécules neutres. Le gaz perd peu à peu sa conductibilité.

Faisons $q = 0$ dans l'équation ci-dessus; il vient :

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha n^2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \alpha t.$$

Le temps T nécessaire pour que le nombre des ions tombe à la moitié de sa valeur est :

$$T = 1 : (\alpha N) = 1 : \sqrt{\alpha q} .$$

Voici comment on a vérifié la formule. Imaginons qu'entre les lames P_0 et P_1 d'un condensateur reliées au sol, on produise l'ionisation limite mesurée par le nombre N ; on utilise par exemple des rayons Röntgen. Au temps 0, on supprime les rayons et on isole P_0 et P_1 ; au temps t , on élève brusquement le potentiel de P_0 .

La force électromotrice entre P_0 et P_1 est suffisante pour transporter en un temps très court τ tous les ions positifs sur P_1 . Si donc après ce temps τ , on relie P_0 au sol et P_1 aux quadrants Q_1 d'un électromètre (§ 201), la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la charge de P_1 et par conséquent au nombre n d'ions positifs qui subsistaient dans le gaz au temps t , c'est-à-dire au moment de l'application de la force électromotrice.

On a vérifié que le temps T qui est de l'ordre de quelques dixièmes de seconde (0,65 pour H; 0,18 pour Cl), varie en raison inverse de \sqrt{q} ; il suffit de faire varier l'action ionisante (par exemple, d'éloigner l'ampoule productrice des rayons Röntgen : q est en raison inverse du carré de la distance).

L'expérience montre aussi que le *coefficient de recombinaison* α est proportionnel à la pression du gaz.

DÉTERMINATION DE $k_1 + k_2$.

La mesure de T conduit à une méthode de mesure de la somme $k_1 + k_2$. Nous savons que si le courant i (§ 200) est faible :

$$i = \varepsilon \sqrt{\frac{q}{\alpha}} (k_1 + k_2) P = \varepsilon \sqrt{\frac{q}{\alpha}} (k_1 + k_2) \frac{V_0 - V_1}{l} .$$

Si la force $V_0 - V_1$ est énorme, $i = i_0 = \varepsilon q l$. D'où :

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha q}} (k_1 + k_2) \frac{V_0 - V_1}{l^2} = (k_1 + k_2) T \frac{V_0 - V_1}{l^2} .$$

La mesure du courant i_0 de saturation, du courant i obtenu par une force électromotrice $V_0 - V_1$ relativement petite, et enfin la connaissance du temps T permettent d'obtenir $k_1 + k_2$.

203. Mesure des mobilités. — D'après les formules du § 199, l'intensité du courant est une fonction complexe des quatre constantes : q , α , k_1 , k_2 . Les trois dernières caractérisent le gaz; q dépend du gaz et du procédé d'ionisation.

On a mesuré k_1 et k_2 par des méthodes diverses; la suivante a le mérite de fournir une représentation concrète du phénomène (Zeleny).

Un courant de gaz passe entre deux cylindres concentriques A et B de rayons a et b , maintenus à des potentiels différents et tra-

versés suivant la tranche ab par des rayons Röntgen. Les ions produits sont entraînés :

1° par un courant gazeux, avec une vitesse u dans le sens de l'axe des tubes ;

2° par la différence de potentiel maintenue entre les cylindres, avec une vitesse v dans le sens des normales aux cylindres.

Les points de la trajectoire des ions sont définis par leur distance x à la tranche ab et par leur distance r à l'axe du tube.

La vitesse v est proportionnelle au champ P : $v = kP$.

La valeur de P en fonction de r et de $V_a - V_b = \Delta V$, est calculée au § 95. En définitive on a :

$$v = kP = \frac{k\Delta V}{r \log \frac{a}{b}}.$$

L'équation de la trajectoire de l'ion est :

$$\frac{dx}{dr} = \frac{u}{v} = \frac{ur}{k\Delta V} \log \frac{a}{b}.$$

La distance $x_0 = \overline{bd}$, à laquelle l'ion parti du point a vient toucher le cylindre intérieur, est :

$$x_0 = \log \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{k\Delta V} \int_a^b ur dr.$$

Or nous pouvons évaluer directement l'intégrale d'après la vitesse moyenne u_0 du gaz que la connaissance expérimentale du débit permet de calculer. Nous avons en effet :

$$u_0 = \frac{2}{a^2 - b^2} \int_a^b ur dr, \quad k = u_0 \frac{a^2 - b^2}{2x_0 \Delta V} \log \frac{a}{b}.$$

Cette équation détermine k , si nous connaissons le point où l'ion formé en a touche le cylindre intérieur ; les ions formés entre a et b toucheront ce cylindre en un point plus rapproché de la tranche ab . La distance x_0 définit donc le point du cylindre intérieur le plus éloigné de la tranche ab que puissent atteindre les ions.

Pour déterminer expérimentalement ce point, le cylindre intérieur est divisé en deux parties isolées par un cylindre d'ébonite : la partie B est reliée au sol, la partie C à l'une des paires de quadrants d'un électromètre. Tant que ΔV est supérieur à une certaine valeur, aucun ion n'atteint C : l'électromètre ne dévie pas. L'expérience consiste à diminuer ΔV jusqu'à ce que l'électromètre dévie.

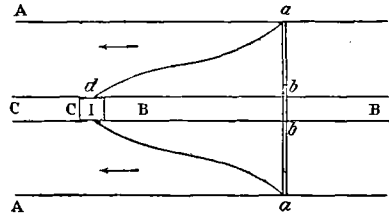


Fig. 95.

Si $V_a > V_b$ [$V_a > 0$, puisque $V_b = 0$], c'est la mobilité k_1 des ions $+$ qu'on détermine; si $V_a < V_b$ [$V_a < 0$], c'est la mobilité k_2 des ions $-$.

Voici quelques nombres; P est exprimé en volts par centimètre, k en centimètres par seconde.

Gaz	Air sec	Air humide	O sec	O humide	H sec	H humide
Ions $+$	1,36	1,37	1,36	1,29	6,70	5,30.
Ions $-$	1,87	1,51	1,80	1,52	7,95	5,60.

Les ions négatifs sont plus mobiles que les ions positifs: $k_2 > k_1$.

La mobilité diminue quand l'agrégat est plus gros; les centres électrisés condensant de la vapeur d'eau (§ 204), on s'explique que les mobilités diminuent quand le gaz est humide.

Les mobilités varient avec la nature du gaz; comme première approximation, elles sont en raison inverse de la racine carrée de la densité du gaz.

Les mobilités sont très approximativement en raison inverse de la pression.

D'ailleurs, même dans un gaz sec, les mobilités, et par conséquent la grosseur des agrégats, dépendent absolument des conditions de formation. Elles sont à peu près les mêmes, que l'ionisation soit due aux rayons Röntgen, aux rayons de l'uranium, ou aux rayons ultraviolets (§ 206). Elles sont plus petites quand l'ionisation est due à l'arc ou à un métal incandescent. Tous ces faits montrent nettement qu'il ne faut pas envisager l'ion gazeux comme quelque chose de masse définie: seule la charge est déterminée.

204. Condensation de la vapeur d'eau. — Nous avons vu (II, § 103) qu'avec des détentes caractérisées par des rapports $\rho = v_2 : v_1$, compris entre $\rho_1 = 1,25$ et $\rho_2 = 1,38$, la condensation d'un gaz *privé de poussières* se fait *en pluie*. Mais dans les circonstances ordinaires le nombre des gouttes est très petit: *il devient considérable si le gaz a été ionisé par un procédé quelconque*, par exemple traversé par des rayons Röntgen. On s'explique aisément ce résultat; *les ions, étant généralement beaucoup plus volumineux que les molécules, servent de germes plus actifs à la condensation* (II, § 101).

La détente ρ nécessaire pour capter les ions dépend naturellement de la nature de ceux-ci. Tandis qu'un nuage commence à se déposer autour des ions $-$ pour $\rho = \rho_1$, il faut des détentes supérieures à 1,31 pour que les ions $+$ agissent. Donc, bien que généralement les ions $-$ soient plus petits que les ions $+$, ils peuvent avoir une efficacité plus grande comme germe de condensation.

Il est possible de déterminer le diamètre des gouttes qui forment la pluie par la mesure de leur vitesse de chute dans le gaz (I, § 62).

Si de plus on connaissait la masse Q d'eau condensée, on pourrait calculer le nombre des gouttes et par conséquent le nombre des ions ayant servi de germes. Voici quels sont les éléments de ce calcul.

Dans le volume initial il y avait une masse Q_1 de vapeur saturée. La détente adiabatique a fait passer la température de θ_1 à θ_2 (II, § 103); mais la condensation de la masse Q a fourni LQ calories et a élevé de nouveau la température; elle est devenue θ'_2 . Puisque les gouttes sont en présence de la vapeur restante, celle-ci est saturée à cette température.

Nous devons écrire que le volume v_2 de vapeur saturée à la température θ'_2 , a la masse $Q_1 - Q$. Ces conditions fournissent deux équations, permettant de calculer Q et θ'_2 .

On a trouvé ainsi que le nombre d'ions par centimètre cube peut atteindre plusieurs millions, nombre grand en valeur absolue, mais très petit par rapport au nombre de molécules qui restent neutres.

Si on détermine (§ 201) la quantité d'électricité transportée par l'ensemble des ions dont on connaît le nombre, on aura la charge d'un ion. C'est ainsi qu'on a trouvé la valeur $\epsilon = 3,3 \cdot 10^{-10}$ unités électrostatiques, annoncée au § 196.

Divers procédés d'ionisation.

Nous avons traité ci-dessus le cas où la production des ions se fait dans toute la masse du gaz (ionisation de volume); il en est ainsi sous l'influence des rayons Röntgen ou de l'uranium. Étudions quelques cas où elle est restreinte à des surfaces ou des régions particulières.

205. Émission par les corps chauds. —

ÉMISSION DANS LE VIDE. —

Un courant fourni par une pile P permet de porter le fil AB à des températures qu'on détermine par ses variations de résistance. Le fil AB est dans un tube où l'on peut faire le vide. Il est entouré par un cylindre C en aluminium qui est mis au sol par

l'intermédiaire d'un galvanomètre. On peut porter le système $APBA$ qui est isolé, à un potentiel quelconque au moyen d'une seconde pile

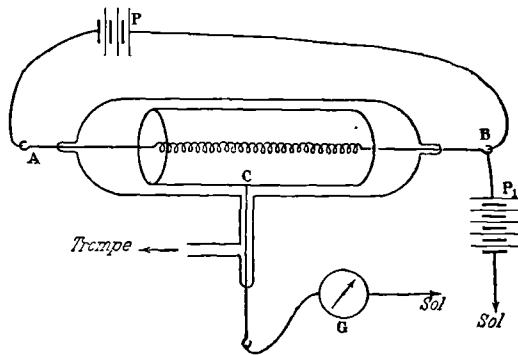


Fig. 96.

P_1 dont un des pôles est au sol. On crée ainsi un champ électrique entre le fil AB et le cylindre C. En retournant la pile P_1 , on renverse les lignes de force de ce champ.

L'expérience montre que l'espace compris entre AB et C ne devient conducteur que pour une force électrique dirigée de C vers AB. On explique ce résultat en admettant que le fil AB émet des ions *negatifs* qui ne se déplacent naturellement que vers les potentiels croissants.

Le courant n'obéit pas à la loi d'Ohm ; à chaque température il tend vers une valeur limite I (courant de saturation, § 200). Cette limite croît très vite quand la température T s'élève : elle est représentée par la formule :

$$I = a \sqrt{T} \cdot e^{\frac{b}{T}}.$$

Le courant peut prendre des valeurs considérables.

Les ions émis sont de véritables *électrons*. Nous avons admis (§ 177) que ces centres *negatifs* existent à toute température dans les métaux ; mais leurs mouvements à l'intérieur des métaux (ou ce qui revient au même, d'après la Théorie cinétique, leur pression n'a généralement pas pour effet d'en chasser une quantité notable dans le milieu environnant, car leur sortie produirait une électrisation positive du métal, et par conséquent une attraction qui deviendrait énorme et qui arrêterait l'émigration. Il se formerait à la surface une couche double ; la couche positive coïnciderait avec la surface du métal ; la couche négative serait localisée à l'extérieur, très près de la surface du métal.

Mais l'énergie des électrons augmentant avec la température, leur pression augmente aussi ; ils s'échappent plus facilement : d'où le phénomène ici étudié.

ÉMISSION DANS UN GAZ. — Les phénomènes sont plus compliqués quand le fil est chauffé dans un gaz. Au rouge il y a d'abord une émission d'ions *positifs* qui paraît liée au dégagement des gaz occlus. Ces ions sont caractérisés par un rapport χ très petit ; leur masse est par conséquent très grande vis-à-vis de celle de l'atome d'hydrogène.

Si on élève la température, l'émission contient à la fois des ions $+$ et des ions $-$. Ce n'est que si l'expérience a duré longtemps à très haute température que se produit seulement l'émission négative.

206. Ionisation par les surfaces éclairées. — Les rayons ultraviolets provoquent la décharge des corps électrisés *negativement*. Le phénomène est dû à une émission d'*électrons* par la surface éclairée (§ 197). Ceux-ci s'entourent immédiatement de molécules neutres : d'où production d'*ions négatifs* au voisinage de la surface.

L'appareil représenté par la figure 97 permet d'étudier les circonstances du phénomène.

Une lampe à arc A est la source des rayons ultraviolets. Elle est placée dans une boîte métallique servant d'écran électrique et percée d'une fenêtre fermée par une plaque de quartz Q_1 peu absorbante pour l'ultraviolet. L'espace C_1C_2 est limité, en face de la plaque Q_1 ,

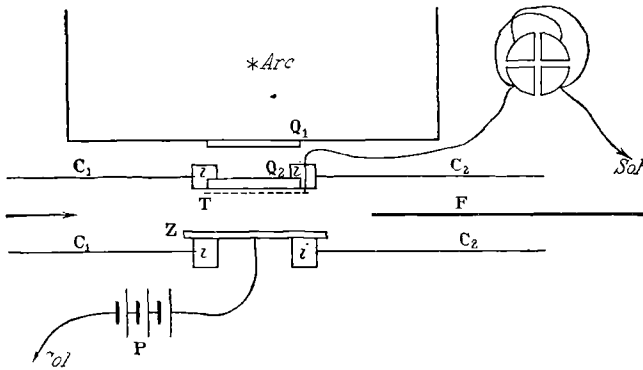


Fig. 97.

par une seconde plaque de quartz Q_2 contre laquelle est disposée une fine toile métallique T. Parallèlement et à quelque distance est la plaque métallique Z (généralement en zinc poli ou amalgamé), sur laquelle tombent les rayons ultraviolets après leur passage à travers la toile.

La plaque Z est portée à un potentiel convenable au moyen de la pile P; la toile T communique avec deux des quadrants d'un électromètre.

L'appareil est complété par des cylindres métalliques C_1 et C_2 . Les diverses pièces sont convenablement isolées les unes des autres par les isolants i .

Relions Z au pôle négatif d'une batterie de quelques dizaines d'éléments; envoyons les rayons ultraviolets. La toile T se charge négativement; la déviation de l'électromètre croît régulièrement d'un certain nombre de divisions par minute: un courant constant traverse l'espace ZT.

Au contraire, si la plaque Z est chargée positivement, la déviation reste nulle.

Il s'agit bien d'une convection au moyen de particules émises par la plaque Z. En effet, envoyons un courant d'air rapide dans le système des tubes C_1C_2 mis au sol: l'aiguille de l'électromètre s'arrête. Les particules négatives ne peuvent plus atteindre la toile métallique; elles sont toutes entraînées dans le tube C_2 avant d'avoir parcouru l'espace ZT.

La vitesse avec laquelle les particules émises se déplacent augmente avec l'intensité du champ. Effectivement on constate qu'en chargeant Z à des potentiels négatifs de plus en plus élevés, la proportion de particules atteignant la plaque sans être balayées par le courant d'air augmente : si l'on veut, le rapport entre les vitesses du spot de l'électromètre avec ou sans courant d'air se rapproche de l'unité quand le potentiel négatif de Z augmente (Rutherford).

Cherchons ce que deviennent les ions qui n'atteignent pas la toile métallique.

Relions C_2 à l'un des pôles d'une pile ; disposons axialement dans C_2 un fil F métallique et relierons-le à l'électromètre ; enfin mettons la toile métallique au sol.

Quand C_2 est chargé positivement, on ne constate rien à l'électromètre ; au contraire, l'aiguille de l'électromètre dévie quand C_2 est chargé négativement.

Donc ce sont bien des particules *chargées négativement* qui sont entraînées par le courant d'air. Dans le premier cas, elles se dirigent vers le cylindre C_2 ; dans le second cas, vers le fil F : alors seulement l'aiguille de l'électromètre dévie.

207. Mesure de la mobilité k_2 . — La méthode est très analogue à celle du § 203 ; nous la décrivons à cause de sa simplicité.

Soit l la distance \overline{ZT} de la plaque Z à la toile T, L leur longueur dans le sens du courant

d'air dont la vitesse est u . Soit V la différence de potentiel entre Z et T. La vitesse v des ions négatifs émis, et le temps t qui leur est nécessaire pour parcourir l'espace l , sont :

$$v = k_2 \frac{V}{l}, \quad t = \frac{l}{v} = \frac{l^2}{k_2 V}.$$

Sous l'influence simultanée du champ électrique et du courant d'air, les trajectoires deviennent des droites parallèles à ZA (fig. 98). On a :

$$\overline{TA} = ut = \frac{ul^2}{k_2 V}.$$

Les ions qui arrivent dans l'espace BD sont perdus pour la toile

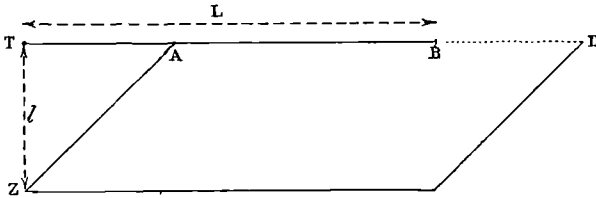


Fig. 98.

métallique; le rapport ρ du nombre des ions entraînés au nombre des ions émis est donc :

$$\rho = \frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{1}{k_2} \frac{u}{V} \frac{l^2}{L}.$$

Comme le montre l'expérience, on peut compenser un accroissement de la vitesse u du courant d'air par un accroissement de la différence de potentiel V . On a trouvé par cette méthode : $k_2 = 1,5$, centimètres par seconde, la différence de potentiel étant évaluée en volts par centimètre.

Nous reviendrons au § 222 sur l'ionisation par les surfaces éclairées pour de très faibles pressions.

208. Ionisation par les flammes. — Les gaz qui s'élèvent d'une flamme sont ionisés et par conséquent conducteurs.

L'expérience peut se faire de la manière suivante. Un tube vertical de métal de quelques centimètres de diamètre, terminé en bas par un entonnoir, est disposé au-dessus d'un brûleur Bunsen assez large pour assurer, autant que possible, l'uniformité du courant de gaz chaud. Le tube est mis à la terre.

Une tige de laiton isolée est placée dans l'axe du tube; elle est reliée à l'une des paires de quadrants d'un électromètre. Les deux paires de quadrants sont d'abord réunies et chargées à un potentiel connu. Les quadrants reliés à la tige de laiton sont ensuite isolés : la vitesse initiale de déplacement de l'aiguille mesure le courant correspondant à la force électromotrice employée pour la charge (§ 201, seconde technique).

209. Ionisation par les réactions chimiques. Ionisation par le phosphore. — De l'air sec qui a passé sur du phosphore est conducteur; il est donc ionisé. Les ions ainsi formés ont des propriétés exceptionnelles : leurs mobilités sont très petites. Elles sont de l'ordre du centième de millimètre, soit 1000 fois plus faibles que celles des ions formés par les rayons Röntgen (§ 203). Leur coefficient de recombinaison est aussi très petit.

Corrélativement, ils condensent la vapeur d'eau *simplement saturante*.

On retrouve cette même qualité d'ions extrêmement gros dans un grand nombre de gaz récemment préparés, par exemple dans les gaz oxygène et hydrogène mis en liberté par l'électrolyse de l'acide sulfurique ou de la potasse caustique en dissolution dans l'eau.

210. Ionisation par le choc des ions sur les molécules. Décharge disruptive (J.-J. Thomson). — Dans tous les cas précédents, le champ ne produit pas les ions; ils sont dus aux agents

extérieurs (rayons Röntgen, radiation de l'uranium, lumière ultraviolette, ...). Le champ fait varier seulement leur vitesse.

Il existe au contraire un groupe important de phénomènes, *décharges par l'étincelle et dans les tubes à vide*, où le champ doit nécessairement être la cause directe ou indirecte de la production des ions. Il paraît impossible d'admettre que le champ, pour grand qu'il soit, dissocie *directement* les molécules; on est donc conduit à chercher la cause de l'ionisation dans le mouvement des ions *préexistant dans le gaz*. L'expérience montre en effet leur présence constante en quantité plus ou moins grande.

Sous l'action du champ, ces ions prennent de la vitesse; *si cette vitesse atteint une valeur critique, ils sont aptes à dissocier les molécules du gaz par simple collision*: telle est l'hypothèse sur laquelle repose l'explication de la décharge. D'ailleurs la dissociation peut être due soit directement au choc, soit indirectement à des rayons Röntgen produits par le choc: il importe peu.

On peut admettre que la vitesse maxima imposée par le champ à un ion correspond au travail effectué sur l'ion dans son parcours moyen λ (II, § 215); le choc apporte en effet une perturbation énorme et peut même changer le sens du mouvement, auquel cas le champ diminue ensuite la vitesse. Si P est le champ, ε la charge, on peut donc admettre que la vitesse critique est atteinte quand le produit: $E = P\varepsilon\lambda$, atteint une certaine valeur qui dépend du gaz et du signe de l'ion.

λ est, toutes choses égales d'ailleurs, inversement proportionnel à la densité du gaz; *le champ nécessaire pour produire la décharge dans un gaz donné, sera donc proportionnel à la densité du gaz, résultat approximativement conforme à l'expérience.*

Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi: *quand on applique une différence de potentiel donnée à deux électrodes, le produit de la pression du gaz par la distance maxima des électrodes pour laquelle la décharge se produit, est constant (Paschen).*

On comprend pourquoi *le champ nécessaire à la décharge est plus intense à travers une mince couche de gaz qu'à travers une couche plus épaisse, au moins au-dessous d'une certaine épaisseur limite.* Pour que l'ionisation se produise, il faut que les ions rencontrent des molécules. Dès que l'épaisseur de la couche devient comparable au parcours moyen, la probabilité d'un choc de l'ion sur une molécule, avant qu'il atteigne l'électrode, diminue à mesure que l'épaisseur diminue.

Comme le parcours moyen augmente en raison inverse de la pression, l'épaisseur limite au-dessous de laquelle l'intensité du champ nécessaire à la décharge commence à augmenter, doit être en raison inverse de la pression.

Cette explication suppose la préexistence de quelques ions qui

servent à amorcer le phénomène; l'expérience montre qu'ils existent toujours, mais *plus ou moins* rares. Corrélativement, *la première étincelle est toujours plus irrégulière que les suivantes*, sa formation étant subordonnée à des causes accidentelles.

Les mêmes principes permettent d'expliquer les phénomènes dans les tubes à vide; mais insister serait sortir du cadre de cet ouvrage.

211. Décharge par les pointes. Vent électrique. — Au voisinage d'une pointe, le champ est très intense (§ 46); la *vitesse critique* est donc atteinte pour les ions préexistants, dès que le potentiel de la pointe atteint une valeur relativement peu élevée : *l'air est alors ionisé au voisinage immédiat de la pointe.*

Des ions formés, les uns, de signe contraire à la densité électrique sur la pointe, se précipitent dessus et concourent à la décharger; les autres, de même signe, sont repoussés dans l'espace extérieur. Par leurs chocs sur les molécules, ils impriment au gaz une vitesse : ainsi se trouve expliquée la production du *vent électrique*.

Les circonstances sont particulièrement favorables à sa formation, puisque, les ions étant tous de même signe, le gaz est entraîné dans un sens unique. Dans le cas général, la force qui agit sur le gaz est la différence des forces dues au frottement des ions de signes contraires.

Un corps électrisé mis dans le *vent électrique* perd sa charge, si elle est de signe contraire à la charge des ions repoussés; il ne la perd pas, si sa charge est de même signe, son potentiel serait-il très supérieur à celui de l'air ambiant. En effet, dans le premier cas, le corps attire les ions et les neutralise; dans le second, il les repousse.

Si deux pointes sont électrisées de signes contraires et placées l'une devant l'autre, les vents qu'elles produisent se pénètrent, en donnant naissance à des tourbillons. Dans la région commune les ions de signes contraires se neutralisent, mais en général partiellement. Un nombre plus ou moins grand peut échapper à la recombinaison.

CALCUL DE LA PRESSION p EXERCÉE SUR UN PLAN INDÉFINI PAR LE VENT D'UNE POINTE. — Soit OO' la pointe, MN le plan conducteur indéfini mis au sol. Calculons la force qui résulte, *normalement à ce plan*, des composantes suivant Ox de toutes les forces exercées sur le gaz par les ions en mouvement.

Soit P la composante suivant Ox de la force électrique AB , dS un élément d'aire découpé sur l'une des surfaces de la couche dx , n le nombre d'ions par unité de volume. Le courant total qui traverse

le plan RS est :

$$i = k\varepsilon \int PndS.$$

D'après la remarque du § 198, la résultante dF normale au

plan RS de toutes les forces qui agissent entre le gaz et les ions en mouvement dans la couche dx , est :

$$dF = dx \int PndS.$$

Les deux intégrales doivent être étendues au plan RS tout entier; elles sont identiques. On a donc :

$$dF = \frac{i}{k\varepsilon} dx. \quad (1)$$

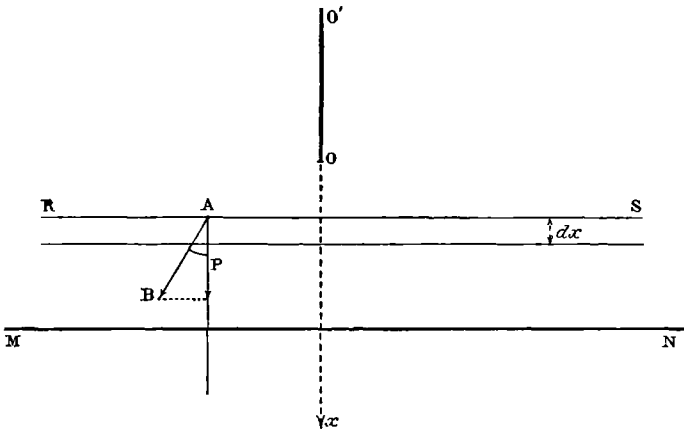


Fig. 99.

Or le courant est conservatif, i est indépendant de x ; on peut intégrer l'équation (1) :

$$F = F_0 + \frac{i}{k\varepsilon} x.$$

La constante F_0 correspond au cas où les ions possèdent une inertie appréciable au moment de leur arrêt; il en résultera sur la plaque un supplément de pression.

Il est remarquable qu'on puisse calculer la pression totale F sans connaître la forme des trajectoires des ions; toutes choses égales d'ailleurs, la pression est proportionnelle à l'intensité du courant total. La mobilité k_2 des ions négatifs étant plus grande que la mobilité k_1 des ions positifs (§ 203), la pression totale doit être moindre, à courant total égal, quand la pointe est négative: ce que l'expérience vérifie.

La loi de répartition de la pression sur le plan et la loi de répartition du courant peuvent être déterminées par l'expérience: on divise le plan en anneaux concentriques isolés les uns des autres, et on détermine simultanément la force exercée sur chaque anneau et le courant reçu par lui. Élevant en chaque point du plan MN des ordon-

nées proportionnelles à la densité du courant et à la pression, on trouve naturellement deux courbes en cloche. Conformément à la théorie, les pressions en chaque point ne sont pas proportionnelles aux densités de courant.

Particule électrisée en mouvement dans des champs donnés.

Dans les paragraphes suivants nous étudions un problème de Mécanique rationnelle, sans nous soucier de ses applications.

Une particule électrisée se meut dans un champ électrique et dans un champ magnétique superposés : on demande la forme de sa trajectoire.

Suivant les hypothèses particulières, elle peut être une parabole, un cercle, des spirales, une cycloïde ordinaire, des cycloïdes allongées ou raccourcies, des hélices à pas constant ou variable, ... Nous nous permettons de recommander cet exemple comme exercice de Mécanique rationnelle : trop souvent on les choisit de moindre intérêt mathématique et de moindre importance physique.

212. Action sur une particule électrisée d'un champ électrique et d'un champ magnétique. — Nous admettrons, conformément aux §§ 177 et 178, qu'une particule portant une charge ε et se déplaçant avec une vitesse v sur une trajectoire s produit les mêmes effets, est soumise aux mêmes actions qu'un courant dont les composantes sont :

$$\varepsilon v \frac{dx}{ds} = \varepsilon \frac{dx}{dt}, \quad \varepsilon v \frac{dy}{ds} = \varepsilon \frac{dy}{dt}, \quad \varepsilon v \frac{dz}{ds} = \varepsilon \frac{dz}{dt}.$$

Soit μ la masse de la particule. Écrivons qu'elle est soumise à un champ électrique de composantes P, Q, R, et à un champ magnétique de composantes X, Y, Z. Si le frottement est nul, les équations du mouvement sont, d'après la loi de Laplace (§§ 154 et 180) :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon P + \varepsilon \left(Z \frac{dy}{dt} - Y \frac{dz}{dt} \right), \\ \mu \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon Q + \varepsilon \left(X \frac{dz}{dt} - Z \frac{dx}{dt} \right), \\ \mu \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon R + \varepsilon \left(Y \frac{dx}{dt} - X \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

On se souviendra que les axes sont à droite (§ 22).

Multiplions la première équation (1) par $2dx$, la seconde par $2dy$, la troisième par $2dz$; additionnons et intégrons.

En vertu des relations :

$$P = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

il vient l'équation des forces vives :

$$\mu(v^2 - v_0^2) = 2\varepsilon(V_0 - V). \quad (2)$$

Toutes les fois qu'une particule traverse une surface équipotentielle électrique déterminée, sa vitesse redevient la même.

Pour aller plus loin, supposons les champs uniformes et prenons l'axe des z pour direction du champ magnétique. Les équations se simplifient et deviennent :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon P + \varepsilon Z \frac{dy}{dt}, \\ \mu \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon Q - \varepsilon Z \frac{dx}{dt}, \\ \mu \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon R. \end{aligned} \quad (3)$$

La dernière équation nous montre que l'accélération du mobile est constante, parallèlement à la force magnétique.

213. Champ magnétique nul. Champ électrique constant. —

La trajectoire de la particule est évidemment une parabole, puisque le mobile est soumis à une force constante en grandeur et en direction.

Calculons la déviation éprouvée par la trajectoire, quand elle traverse une longueur l dans un champ électrique P normal à sa vitesse initiale.

D'après le théorème sur les quantités de mouvement, la vitesse v' communiquée dans le sens normal est égale à (fig. 100) :

$$v' = \frac{l}{v} \frac{1}{\mu} P\varepsilon.$$

En effet, la force $P\varepsilon$ agit pendant le temps l/v sur la masse μ .

Au sortir de l'espace l dans lequel agit la force P , la trajectoire redevient rectiligne; mais sa direction fait avec la direction initiale un angle (généralement petit) dont la valeur en radians est :

$$\lambda' = \frac{v'}{v} = \frac{Pl}{v^2} \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

214. Champ électrique nul. Champ magnétique constant. —

La force étant toujours normale au déplacement, la vitesse v est constante. C'est ce qui résulte d'ailleurs de l'équation (2) du § 212, puisqu'ici le potentiel électrique est constant.

On peut substituer, dans les équations (3), ds à $vd t$.

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\varepsilon Z}{\mu v} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\varepsilon Z}{\mu v} \frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0. \quad (3')$$

Le rayon de courbure d'une courbe gauche est donné par la formule :

$$\frac{1}{\rho^3} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2;$$

dans le cas particulier, on a :

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{\varepsilon^2 Z^2}{\mu^2 v^2} \left[\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \right] = \frac{\varepsilon^2 Z^2}{\mu^2 v^2} \left[1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right] = \frac{\varepsilon^2 Z^2}{\mu^2 v^2} \sin^2 \theta,$$

où θ est l'angle de l'élément de courbe avec l'axe des z .

Soit v_z la composante de la vitesse parallèlement à l'axe des z . On a :

$$\frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{v_z}{v}, \quad 1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{v^2 - v_z^2}{v^2} = \sin^2 \theta;$$

θ , angle de la trajectoire avec l'axe des z , est constant d'après les équations précédentes. Il en est de même de ρ : *la trajectoire est donc une hélice enroulée autour de l'axe des z comme axe.*

Le rayon R du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, est :

$$R = \rho \sin^2 \theta = \frac{\mu}{\varepsilon Z} v \sin^2 \theta = \frac{\mu}{\varepsilon Z} \sqrt{v^2 - v_z^2}.$$

La durée de la rotation de la particule mobile est :

$$\frac{2\pi R}{\sqrt{v^2 - v_z^2}} = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon Z}.$$

Le pas de l'hélice est : $\frac{2\pi\mu}{\varepsilon Z} v_z$.

En particulier, quand la composante de la vitesse initiale suivant Oz est nulle, le pas de l'hélice est nul; les particules décrivent, dans le plan normal au champ magnétique, des cercles de rayon :

$$R = \frac{\mu v}{\varepsilon Z}.$$

215. Déviation par une force magnétique courbant les rayons perpendiculairement à leur direction sur une longueur l .

— La force est normale à la trajectoire et a pour expression $\varepsilon Z v$; elle agit pendant le temps $l : v$. Elle communique à la masse μ une vitesse v'' , normale à v et satisfaisant à la relation :

$$\mu v'' = \varepsilon Z v (l : v) = \varepsilon Z l, \quad v'' = \varepsilon Z l : \mu.$$

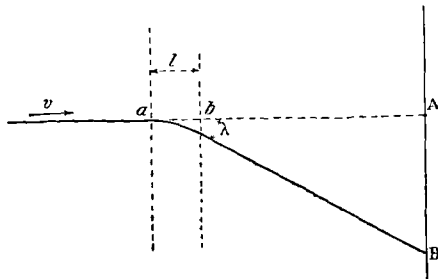


Fig. 100.

A sa sortie de l'espace l , la trajectoire fait avec sa direction à l'entrée l'angle :

$$\lambda'' = \frac{v''}{v} = \frac{Zl}{v} \frac{\epsilon}{\mu}.$$

La trajectoire redevenant rectiligne au sortir de l'espace l , on peut mesurer λ'' par la distance : $\overline{AB} = \lambda''D$, de ses traces avec ou sans le champ Z , sur un plan AB situé à une distance D de ab .

216. Superposition d'un champ électrique et d'un champ magnétique rectangulaires. — Les équations (3) du § 212 deviennent :

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \epsilon P + \epsilon Z \frac{dy}{dt}, \quad \mu \frac{d^2y}{dt^2} = -\epsilon Z \frac{dx}{dt}, \quad \mu \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \quad (3'')$$

Posons : $\epsilon Z : \mu = \omega$. Admettons qu'à l'origine des temps la particule soit à l'origine des coordonnées; les équations (3'') ont pour solution :

$$y = -\frac{P}{Z} t + B \sin \omega t, \quad x = B(1 - \cos \omega t).$$

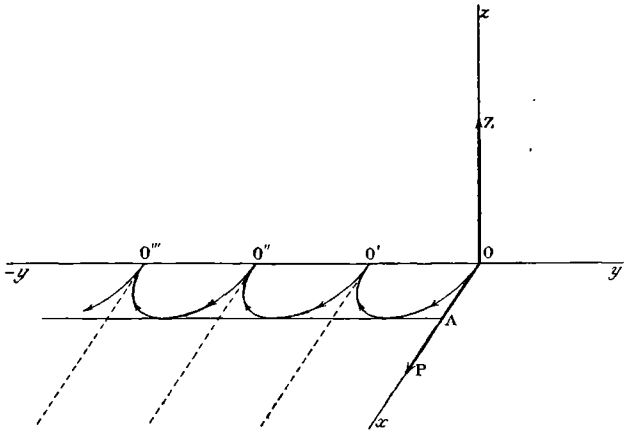


Fig. 101.

Le mouvement de la particule, dans le plan normal à la force magnétique, se compose donc d'un déplacement uniforme normale-ment au champ électrique et d'une rotation uniforme autour d'un cercle de rayon B . La durée de rotation est :

$$T = \frac{2\pi\mu}{\epsilon Z}.$$

Si le rayon B est tel qu'une rotation dure exactement le temps que la particule met, en raison de la vitesse uniforme, à avancer de

la longueur de la circonférence du cercle, soit $2\pi B$, la trajectoire est une cycloïde. On a :

$$2\pi B \frac{Z}{P} = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon Z}, \quad B = \frac{P}{Z^2} \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

La figure 101 correspond à ce cas et représente trois festons de la cycloïde. $\overline{OA} = \frac{2P}{Z^2} \frac{\mu}{\varepsilon}$, $\overline{OO'} = \frac{2\pi P}{Z^2} \frac{\mu}{\varepsilon}$.

Si la condition précédente n'est pas satisfaite, la trajectoire est une cycloïde allongée ou raccourcie.

La valeur de B dépend de la vitesse à l'origine, c'est-à-dire pour les conditions : $x=y=0$, $t=0$. Les équations deviennent alors :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{P}{Z} + \omega B, \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

La cycloïde correspond donc à une vitesse nulle à l'origine.

La composante de la vitesse parallèlement à l'axe des z est constante ; si nous ne la supposons pas nulle à l'origine des temps (auquel cas elle reste nulle), il faut joindre au mouvement précédemment étudié, un mouvement uniforme parallèle au champ magnétique.

217. Superposition d'un champ électrique et d'un champ magnétique parallèles. — Les équations sont semblables aux équations (3') (§ 214) à la différence près qu'il faut poser :

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon R.$$

On a comme trajectoire une hélice enroulée autour de l'axe Oz et dont le pas augmente avec une vitesse constante.

218. Superposition d'un champ magnétique Z uniforme et d'un champ électrique dont le potentiel est fonction de la distance r à l'axe des z . — Les lignes de force électriques sont des droites normales à l'axe des z , normales par conséquent au champ magnétique. On réalise un tel champ électrique, par exemple, entre deux cylindres métalliques concentriques (§ 95).

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon Z \frac{dy}{dt}, \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon Z \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par y , la seconde par $-x$ et additionnons. La force électrique passant par l'axe des z , son moment par rapport à cet axe est nul ; il reste :

$$\mu \frac{d}{dt} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\varepsilon Z}{2} \cdot \frac{d(r^2)}{dt}.$$

La quantité comprise entre parenthèses est au signe près le moment de la vitesse par rapport à l'axe (I, §§ 10 et 11) ; on a donc en intégrant et en appelant $d\varphi : dt$ la vitesse angulaire :

$$-\mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon Z}{2} (r^2 - a^2).$$

On suppose nulle la vitesse angulaire de la particule sur le cylindre de rayon a .

Cette relation est indépendante de la loi de variation du potentiel V en fonction de r .

L'équation générale des forces vives (2) du paragraphe 212 devient :

$$\mu v^2 = 2\varepsilon (V_0 - V),$$

en appelant V_0 le potentiel sur le cylindre de rayon a . La vitesse radiale est :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{v^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu} (V_0 - V) - \frac{\varepsilon^2 Z^2}{4\mu^2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)^2}.$$

La vitesse radiale s'annule sur un cercle de rayon r_0 tel que l'on ait :

$$\left(r_0 - \frac{a^2}{r_0} \right)^2 = \frac{8\mu}{\varepsilon} \frac{V_0 - V}{Z^2}.$$

La particule se déplace alors sur un cercle dont le plan est normal au champ magnétique et contient les lignes de force électrique.

Donc la trajectoire est une spirale qui admet comme asymptote le cercle de rayon r_0 . La forme de la spirale dépend de la loi de variation du potentiel V en fonction de r .

La figure 102 suppose que le potentiel décroît, à partir de $r = a$, quand r augmente. La vitesse croît sur la trajectoire ABC à mesure qu'on se rapproche du cercle asymptotique de rayon r_0 . En appliquant la règle du bonhomme, on vérifiera que la spirale est bien dirigée comme l'indique la figure, conformément

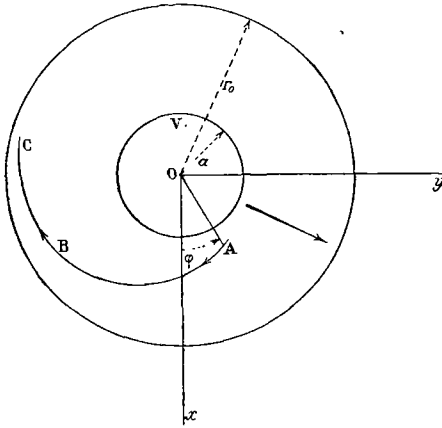


Fig. 102.

à l'équation qui fournit, pour la vitesse angulaire $d\varphi : dt$, une valeur négative pour $r > a$. Bien entendu, on suppose la particule mobile positivement électrisée ; il faudrait changer les signes dans le cas contraire.

Diverses espèces de rayons électrisés.

219. **Rayons cathodiques.** — Nous allons trouver dans l'étude des rayons cathodiques une application des problèmes abstraits résolus dans les paragraphes précédents. Nous devons en effet les considérer comme un bombardement d'électrons.

Les rayons qui émanent normalement de la cathode, dans un tube où le vide est convenablement poussé (*rayons cathodiques*), sont formés de particules électrisées *négativement* et animées de vitesses très grandes.

Pénétrant dans un espace clos, ces particules doivent y introduire une charge négative. La disposition de l'expérience est indiquée dans la figure 103. En K sont deux cylindres coaxiaux munis de fentes. Le cylindre intérieur est relié à l'aiguille d'un électromètre, le cylindre extérieur est au sol. Les rayons cathodiques limités à un mince pinceau par le tampon T, ne peuvent atteindre la fente E que s'ils sont déviés par un aimant. Tant qu'ils ne tombent pas sur la fente, l'aiguille de l'électromètre n'est pas déviée. Dès qu'avec un aimant on les amène dessus, l'électromètre indique une forte charge négative (Perrin).

La déviation n'augmente pas indéfiniment. En effet, l'espace annulaire compris entre les cylindres devient conducteur du fait des rayons cathodiques et de l'ionisation qui en résulte; il y a donc un état d'équilibre atteint quand les particules qui entrent par E apportent à chaque instant autant d'électricité qu'il s'en écoule à la terre par le cylindre K extérieur.

DÉVIATION MAGNÉTIQUE. — Le pinceau, limité par un tampon servant d'anode, est soumis à un champ magnétique uniforme, normal au plan de la figure et dirigé d'avant en arrière. *Le pinceau est dévié; en même temps il s'étale en une large luminosité* (fig. 104) que l'on peut pho-

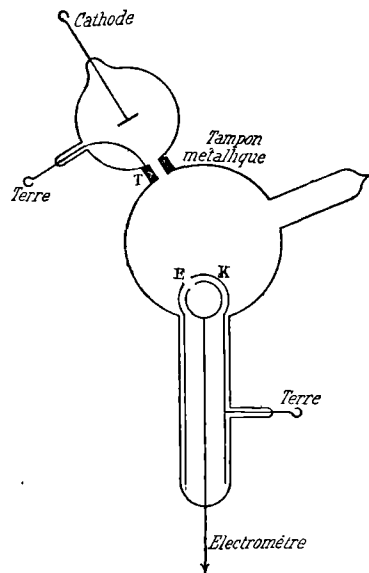


Fig. 103.

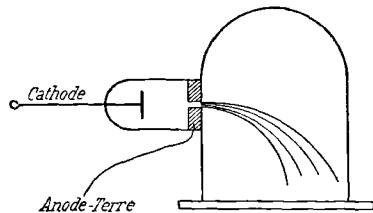


Fig. 104.

tographier; donc les rayons ne sont pas d'espèce unique : ils forment un spectre.

Pour un champ magnétique donné et pour une différence de potentiel donnée entre l'anode et la cathode, les trajectoires sont indépendantes de la nature du gaz sur lequel on a fait le vide.

DÉVIATION ÉLECTRIQUE. — Le faisceau cathodique est limité par des fentes F servant d'anodes; il passe entre des plaques P_0 et P_1 entre lesquelles on établit une différence de potentiel $\Delta V = V_0 - V_1$.

Sous l'influence des rayons cathodiques le gaz est ionisé; donc l'intervalle entre P_0 et P_1 devient conducteur; ce sont de mauvaises conditions pour montrer la déviation. Mais si on utilise un vide avancé, la conductibilité diminue rapidement, devient négligeable : la différence ΔV se maintient, et l'on constate que le faisceau est dévié du côté de la plaque positive.

La déviation angulaire λ' est proportionnelle à ΔV . D'après la théorie donnée au § 213, on la mesure par le déplacement ab de la tache fluorescente (fig. 105), qui est proportionnel à λ' .

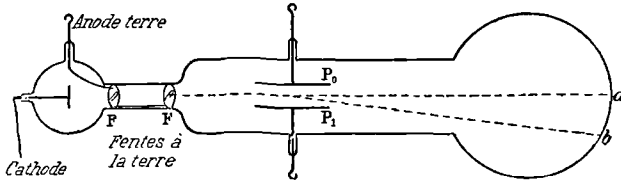


Fig. 105.

Si le vide n'est pas suffisant, il y a d'abord déviation, puis la déviation diminue jusqu'à 0. L'ionisation qui se produit peu à peu rend le gaz conducteur et tend à annuler le champ.

220. Valeurs de v et de $\varepsilon : \mu$.

Le calcul de la vitesse v et du rapport $\varepsilon : \mu$ de la charge à la masse repose sur la comparaison des déviations électriques et magnétiques imprimées au même faisceau cathodique par des champs constants.

On tire des deux formules (§ 213 et § 215) :

$$\lambda' = \frac{Fl}{v^2} \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad \lambda'' = \frac{Zl}{v} \frac{\varepsilon}{\mu},$$

les relations suivantes :

$$v = \frac{F}{Z} \frac{\lambda''}{\lambda'}, \quad \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\lambda''^2}{\lambda'} \frac{1}{l} \frac{F}{Z^2}.$$

On trouve pour v des nombres qui dépendent de la différence de potentiel entre la cathode et l'anode. Ils ne dépendent pas de la nature

du gaz sur lequel on a fait le vide. La vitesse a varié de $2 \cdot 10^9$ à $5 \cdot 10^9$ suivant les conditions expérimentales.

Rappelons que la vitesse de la lumière est $3 \cdot 10^{10}$.

Le rapport $\chi = \epsilon : \mu$ est considéré comme une constante absolue.

— La charge de l'unité de masse est voisine de $1,865 \cdot 10^8$ coulombs. La masse de la particule est donc environ 2000 fois moindre que celle de l'atome d'hydrogène.

En définitive on est amené à considérer les rayons cathodiques comme un bombardement d'électrons, absolument identiques entre eux, identiques aussi aux électrons qu'on imagine se mouvant à l'intérieur des solides conducteurs.

Le courant à l'intérieur d'un tube où le bombardement a lieu, résulte de l'émission des électrons par la cathode et de leur absorption par l'anode.

Nous avons vu plus haut (§ 219) qu'un champ magnétique donne une dispersion des rayons cathodiques. La vitesse v ne dépendant que de la différence de potentiel entre l'anode et la cathode, et la déviation ne dépendant que de v (puisque $\epsilon : \mu$ est invariable), on conclut que les faisceaux inégalement déviés correspondent à des chutes différentes de potentiel, et par conséquent ne peuvent être émis simultanément. C'est effectivement ce que l'expérience prouve. Du commencement à la fin de l'émission, la vitesse augmente d'abord, puis diminue; les faisceaux inégalement déviés sont distincts dans le temps : il y a une série d'émissions séparées se produisant sous des potentiels différents (Villard).

Les rayons cathodiques peuvent sortir de l'ampoule où ils sont produits. Ils traversent par exemple, sans être complètement arrêtés, une petite fenêtre en aluminium de 3μ d'épaisseur. Ils conservent leurs propriétés dans l'air (déviation magnétique, ...), le rendent conducteur en l'ionisant, provoquent les condensations de vapeur. Ils sont d'ailleurs très rapidement disséminés par l'air et ne persistent comme bombardement régulier, que sur un parcours de quelques centimètres (Lénard).

Quand les rayons cathodiques rencontrent un corps solide (l'anticathode par exemple), ils se diffusent sans changer de propriétés.

221. Rayons canaux (Goldstein). — Si un tube où l'on produit des rayons cathodiques est divisé en deux parties par une cathode percée d'ouvertures, on observe dans la partie opposée à l'anode des rayons qui partent des ouvertures ménagées dans la cathode. Ce sont les *rayons canaux*.

Soit par exemple T une toile métallique soudée à un anneau C et deux électrodes A et B. Si on prend C pour cathode et A pour anode, des rayons canaux partent de la toile métallique vers B (fig. 106).

On admet (§ 210) que les électrons émis par la cathode, buttant

sur les molécules du gaz qui subsiste, les dissocient et mettent en liberté des ions *positifs*. Ces ions, attirés par la cathode, peuvent la traverser si elle est percée de trous : ils forment les *rayons canaux*.

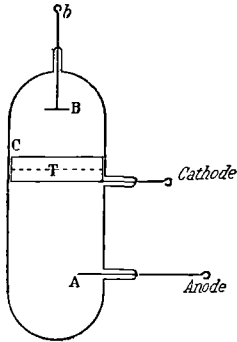


Fig. 106.

Ces rayons constitués par un bombardement de particules chargées *positivement*, sont donc déviés par un champ électrique ou magnétique en sens inverse des rayons cathodiques. Les déviations sont très petites. Les ions *positifs* sont en effet caractérisés par un rapport χ extrêmement petit, de l'ordre de celui qui convient aux ions électrolytiques et même inférieur. La charge de l'unité de masse est de l'ordre de $3 \cdot 10^3$ coulombs. On s'explique ainsi que, malgré une vitesse relativement petite, les déviations soient difficiles à mettre en évidence.

222. Émission d'électrons par un métal éclairé (Heiz, J.-J. Thomson). — Les rayons ultraviolets provoquent la décharge des corps électrisés *négativement* (§ 206). Si la charge est positive, leur influence est nulle.

Le phénomène est dû à une émission d'électrons par les métaux éclairés à l'aide d'ultraviolet. Nous savons qu'à la pression ordinaire, ces électrons donnent des *ions négatifs*. Dans le vide, les électrons subsistent ; par conséquent, les rayons ultraviolets provoquent une émission de rayons cathodiques.

Pour le prouver, il faut mesurer le rapport $\epsilon : \mu$ caractéristique de cette émission.

La méthode consiste à superposer, sur les particules émises dans le vide par le métal éclairé (disposé dans le plan zy , figure 101), l'action d'un champ électrique P et d'un champ magnétique H rectangulaires. Nous savons (§ 216) que la trajectoire des particules est une cycloïde. Si l'on parvient à déterminer la longueur OA , la for-

$$\text{mule :} \quad \chi = \frac{\epsilon}{\mu} = \frac{2P}{OA \cdot H^2},$$

donnera le rapport χ , en fonction de la force électrique P dirigée suivant l'axe des x , et de la force magnétique H dirigée suivant l'axe des y .

Voici l'application de la méthode.

Parallèlement à une plaque polie de zinc (qui se trouverait dans le plan des zy) est disposée une fine toile métallique parfaitement isolée et reliée à une paire de quadrants d'un électromètre : l'autre paire est

au sol. On envoie sur le zinc à travers la toile un faisceau intense de rayons ultraviolets.

Le zinc est relié au pôle négatif d'une pile d'un grand nombre d'éléments dont l'autre pôle est à la terre. On produit ainsi un champ électrique P dirigé normalement à la plaque de zinc, c'est-à-dire parallèlement à l'axe Ox .

Enfin on peut créer un champ magnétique H dont les lignes de force sont parallèles à l'axe Oz et par conséquent aux plans de la lame de zinc et de la toile métallique. Le système est enfermé dans une enceinte où l'on peut faire le vide : la toile est contre le fond formé d'une plaque de quartz non absorbante pour l'ultraviolet.

Ceci posé, on met au sol, puis on isole la toile métallique. On fait passer la lumière ultraviolette; la charge reçue par la toile en un temps donné est proportionnelle à la déviation de l'électromètre dans ce temps.

Si la toile est à une distance du zinc supérieure à la longueur \overline{OA} , ou si, pour une distance donnée, le champ H est trop intense, il n'y a pas de déviation : les électrons ne parviennent pas jusqu'à la toile. Mais en diminuant la valeur du champ, on augmente la hauteur des cycloïdes. Connaissant ainsi par tâtonnements la distance OA du zinc à la toile, on déduit $\epsilon : \mu$ de la formule : $\frac{\epsilon}{\mu} = \frac{2P}{\overline{OA} \cdot H^2}$, où tout est connu.

On a ainsi trouvé pour $\epsilon : \mu$ des valeurs très voisines de celles qui correspondent aux électrons (soit $1,865 \cdot 10^8$ coulombs par unité de masse).

223. Rayons X (Röntgen). — Par élimination on peut se faire une idée assez probable de la nature des rayons X. On sait qu'ils se produisent quand le bombardement cathodique vient frapper un corps solide, le verre par exemple ou l'anticathode d'un tube à vide (Cours de Mathématiques, §§ 225 et sq.).

Sans pouvoir entrer dans le détail, on comprend qu'une particule électrisée en mouvement soit entourée d'un champ magnétique dont les lignes de force sont des cercles qui ont pour axe la trajectoire de la particule. Si la particule est brusquement arrêtée, il se produit, par suite de la suppression de ce champ magnétique, une induction qui donne elle-même naissance à un nouveau champ magnétique. Ce champ se déplacera dans le diélectrique et produira comme une *pulsation transversale électromagnétique* dont la vitesse de propagation est celle de la lumière (voir tome V, Électroptique).

Les rayons formés par ces pulsations isolées, très brèves, ne doivent présenter ni réfraction, ni réflexion : ils ne doivent être déviés ni par un champ électrique ni par un champ magnétique. Ils peuvent d'ailleurs, suivant l'épaisseur de la pulsation (brusquerie de l'arrêt

de la particule électrisée), présenter des propriétés continûment variables. Ce sont bien là les phénomènes que l'expérience a montrés caractéristiques des rayons X.

224. Radioactivité (Curie). — Nous n'insisterons pas non plus sur les phénomènes de radioactivité.

Certains corps, le radium et ses sels en particulier, émettent des radiations complexes, formant principalement trois groupes α , β , γ .

Les rayons α sont identiques aux *rayons canaux*. Ils sont formés d'ions *positifs* dont la vitesse peut atteindre le dixième de celle de la lumière. Ils sont naturellement déviés par les champs électrique et magnétique. Le rapport γ est de l'ordre de celui qui convient aux ions électrolytiques : il est donc petit. Ils ont une grande puissance ionisante. Ils sont facilement absorbés par les gaz.

Les rayons β sont identiques aux *rayons cathodiques*. Leur vitesse est plus grande que celle des rayons α . Ils sont moins ionisants et moins absorbables. Ils sont naturellement déviés par les champs électrique et magnétique, mais en sens inverse des rayons α .

Les rayons γ sont assimilables aux rayons X.

Les diverses substances radioactives ne produisent pas des rayonnements de constitutions identiques. Le radium, le thorium, l'actinium possèdent les trois sortes de rayons. Le polonium émet principalement des rayons α et γ .

Émanation. — Une substance placée dans le voisinage du radium acquiert les propriétés du radium et les conserve après l'éloignement de celui-ci, pendant un temps qui peut atteindre plusieurs heures. On dit qu'il y a radioactivité induite. On admet qu'il y a une émanation extrêmement subtile, incapable de traverser un solide. On ne sait rien de sa nature.

Explication par les ions et par les électrons de phénomènes divers.

225. Expression de la conductibilité électrique d'un métal.
— Admettons qu'il existe à l'intérieur des métaux des *électrons* libres en agitation. Cherchons à expliquer la conductibilité électrique. Soit n le nombre d'électrons libres par unité de volume, m leur masse, u leur vitesse moyenne efficace. D'après la Théorie cinétique, l'énergie moyenne de translation d'une molécule (II, § 205) est proportionnelle à la température absolue; la pression p est égale aux 2 : 3 de l'énergie totale par unité de volume. De sorte que l'on a :

$$\frac{mu^2}{2} = \alpha T, \quad p = \frac{nm u^2}{3} = \frac{2}{3} n \alpha T.$$

Telle est la pression des électrons dans le métal : elle croît proportionnellement à la température absolue.

Écrivons l'expression de la conductibilité électrique. Soit P la valeur du champ dirigé suivant l'axe des x , λ le libre parcours moyen, u_m la vitesse moyenne. Entre deux chocs s'écoule un temps $\tau = \lambda : u_m$, pendant lequel l'électron est soumis à la force $P\varepsilon$, où ε est sa charge :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon P.$$

Le chemin accompli parallèlement à l'axe des x au bout du temps τ

$$\text{est : } x = \frac{\varepsilon P \tau^2}{2m} + \frac{a\tau}{m} + \frac{b}{m} = \left(\frac{\varepsilon P \tau}{2m} + \frac{a}{m} \right) \tau + \frac{b}{m}.$$

Dans le sens de la force, il est plus grand que si P était nul, de la quantité : $\frac{\varepsilon P \tau^2}{2m}$; donc l'existence de la force P produit un accroissement de vitesse moyenne égal à : $\frac{\varepsilon P \tau}{2m}$, et dirigé suivant l'axe des x .

Comme ce résultat est vrai pour tous les parcours libres, on conclut que l'effet du champ est de remplacer l'agitation symétrique dans tous les sens, c'est-à-dire ayant dans toutes les directions un mouvement moyen nul, par une agitation admettant un mouvement moyen dirigé dans la direction du champ et dont la vitesse est :

$$\frac{\varepsilon P}{2m} \frac{\lambda}{u_m}.$$

Dans l'unité de volume il y a n molécules transportant chacune la charge ε ; l'intensité du courant est donc par unité de surface normale au champ :

$$i = \frac{P}{\rho} = \frac{n\varepsilon^2 P}{2m} \frac{\lambda}{u_m}.$$

La vitesse moyenne u_m et la vitesse efficace u_e définie par la relation : $mu^2 = 2\alpha T$, ne sont pas identiques (II, § 213). Mais elles diffèrent par un coefficient constant que nous pouvons introduire dans α . Il vient en définitive pour la conductibilité électrique :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{n\varepsilon^2 \lambda u_m}{4\alpha T}.$$

La résistance croît donc proportionnellement à la température absolue, ce qu'on savait depuis longtemps pour les métaux purs. Cette théorie suppose, résultat qui ne peut être qu'une première approximation, que le nombre n d'électrons libres par unité de volume est indépendant de la température.

226. Expression de la conductibilité thermique. — Admettons que la transmission de la chaleur ne se fasse que par le choc des

électrons; c'est-à-dire que les atomes pondérables ne se heurtent pas dans leurs oscillations autour de leurs positions d'équilibre, et par conséquent ne transmettent aucune énergie les uns aux autres. Si le nombre des électrons libres est indépendant de la température, la Théorie de la Conductibilité calorifique dans les métaux est identique à la Théorie de la Conductibilité calorifique dans les gaz. Nous n'avons qu'à transcrire l'expression donnée au § 220 du tome II; il faut poser $\beta = 0$, si nous admettons que toute l'énergie des électrons est de translation. Il vient :

$$\kappa = \frac{\alpha}{3} n \lambda u_m.$$

Comme le nombre n des électrons est constant dans toute l'étendue du métal, puisqu'il ne dépend pas de la température, il en passe à travers chaque surface autant dans les deux sens. Il y a flux de chaleur et énergie transportée *sans courant électrique*.

Comparons les deux expressions données pour φ et κ . Il vient :

$$\kappa \varphi = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \right)^3 T.$$

Le rapport des deux conductibilités est pour tous les corps égal à la même constante multipliée par la température absolue.

CHAPITRE VI

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION

227. Règle générale régissant les forces électromotrices d'induction dans les circuits fermés ou ouverts que l'on déplace dans un champ magnétique. — Nous trouverons encore une loi applicable aux circuits fermés et une loi applicable aux éléments de circuit que l'on déplace dans un champ. Il ne sera pas nécessaire de démontrer pour la troisième fois que ces lois sont équivalentes, si on les applique à un circuit fermé, et qu'on ne peut déduire la seconde de la première que grâce à une hypothèse supplémentaire.

Quand un circuit fermé se déplace dans un champ, et quand le flux d'induction \mathcal{F} à travers une surface quelconque, limitée au circuit, varie, il naît dans le circuit une force électromotrice E dont la valeur absolue est donnée en volts par la relation :

$$E = 10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt};$$

t représente le temps. Cette force électromotrice est dirigée de manière que le courant qu'elle tend à produire, serait la cause de forces électromagnétiques s'opposant au déplacement.

Pour obtenir une formule par laquelle E soit donné en grandeur et en signe, choisissons un sens de circulation sur le circuit : par convention, si la force électromotrice E est positive, elle tend à pousser le courant dans le sens de circulation choisi : si elle est négative, elle tend à pousser le courant dans le sens inverse. Or supposons qu'il passe effectivement un courant dans le sens de circulation ; le déplacement tend à se faire de manière que le flux d'induction \mathcal{F} (positif, quand le bonhomme d'Ampère, traversé par le courant des pieds à la tête, voit les lignes de force aller vers sa gauche à *travers le circuit*) augmente. La force électromotrice E doit tendre à faire passer un courant gênant le déplacement ; donc elle est donnée en grandeur et en signe par la formule :

$$E = - 10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Ces conventions rentrent dans notre convention générale exposée au § 22.

En effet, pour savoir le sens du flux d'induction, nous choisissons sur le circuit un sens de circulation ; il définit, d'après la règle du bonhomme, une face négative et une face positive pour toute surface limitée par le circuit ; il définit donc ce qu'on doit appeler flux positif et flux négatif.

Le flux est positif, quand il pénètre par la face négative et sort par la face positive, c'est-à-dire quand il est dans le sens du vecteur aimantation du feuillet équivalent à un courant allant dans le sens de circulation choisi. Il revient au même de dire qu'un flux est positif quand le bonhomme d'Ampère (placé sur le circuit de manière que le sens de circulation le traverse des pieds à la tête) voit les lignes de force aller vers sa gauche à travers le circuit.

Ceci posé, la force électromotrice d'induction est dirigée dans le sens de circulation si le flux décroît pendant le déplacement : c'est précisément ce qu'exprime la formule.

Voici la seconde forme de la loi, forme applicable à un élément de circuit.

Soit (fig. 107) un élément OA de conducteur qui se déplace dans un champ H .

Plaçons le bonhomme d'Ampère les pieds en O , la tête en A , et regardant dans le sens des lignes de force. Donnons à

l'élément un petit déplacement. Il coupe un certain nombre de lignes de force, balaie donc un certain flux \mathcal{F} . La force électromotrice d'induction est en grandeur absolue :

$$E = 10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Si le déplacement se fait vers la droite du bonhomme, E est dirigée de manière à pousser un courant de ses pieds à sa tête, c'est-à-dire dans le sens OA . En effet, un courant effectivement dirigé suivant OA tendrait à se déplacer vers la gauche du bonhomme regardant dans le sens des lignes de force : donc le courant que tend à pousser la force électromotrice d'induction précédemment définie, tend bien à gêner le mouvement.

228. Application du principe de la conservation de l'énergie. — Les lois précédentes ne découlent du principe de la conservation de l'énergie que grâce à une hypothèse supplémentaire. Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas demandés d'où provient

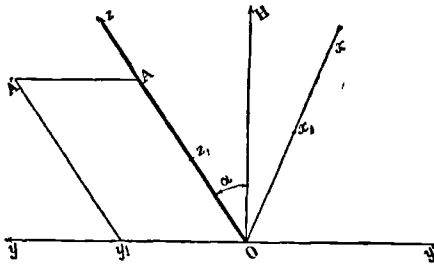


Fig. 107.

l'énergie mise en jeu, quand un circuit parcouru par un courant se déplace dans un champ magnétique. Le travail dû aux forces électromagnétiques dans le passage de la position 1, où le flux est \mathcal{F}_1 , à la position 2 où le flux est \mathcal{F}_2 , est (§ 152) :

$$0,1 \cdot I (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1),$$

en ergs : d'où provient-il ?

Le principe de la conservation de l'énergie ne nous apprend rien à cet égard : il pourrait y avoir refroidissement du circuit, modification des aimants qui produisent le champ, modification du milieu où existe le champ lui-même, ... L'expérience montre et l'on sait, depuis Faraday et Helmholtz, qu'il faut chercher toute l'énergie équivalente au travail dans les effets d'une force électromotrice, dite d'induction, qui se produit le long du circuit sur lequel agissent les forces électromagnétiques.

S'il en est ainsi, et je répète qu'aucun raisonnement ne le peut faire prévoir, rien n'est plus facile que de déterminer la grandeur de cette force électromotrice. Soit E la force électromotrice qui produit le courant actuel I , et R la résistance. On a l'équation :

$$E = RI, \quad EIt = RI^2t,$$

qui exprime que l'énergie voltaïque fournie par l'électromoteur se retrouve sous forme d'échauffement du conducteur. Nous allons écrire que cette énergie voltaïque fournit encore le travail produit par les forces électromagnétiques, travail égal à :

$$0,1 \cdot I' (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) \text{ ergs,}$$

et par conséquent (puisque l'erg vaut 10^{-7} joules) à :

$$10^{-8} I' (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) \text{ joules ;}$$

I' est l'intensité du courant dans la nouvelle hypothèse.

Nous avons donc la relation :

$$EIt = RI^2t + 10^{-8} I' (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1). \quad \text{D'où :} \quad I'R = E - 10^{-8} \frac{\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1}{t}.$$

Tout se passe donc comme s'il naissait dans le circuit qui se déplace dans le champ magnétique, une force électromotrice dont la valeur moyenne en volts est :

$$10^{-8} \frac{\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1}{t}.$$

Pour connaître la force électromotrice vraie à chaque instant, il suffit de considérer une durée Δt petite ; le flux subit pendant ce temps une variation $\Delta \mathcal{F}$: on a pour expression de la force électro-

motrice :

$$10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}.$$

Elle est indépendante du courant I' qui existe dans le circuit ;

d'après le raisonnement même qui a servi à en calculer la valeur, elle tend à produire un courant tel que le mouvement du circuit soit gêné (loi de Lenz).

Nous allons insister là-dessus.

Imaginons d'abord que les forces électromagnétiques tendent à produire le mouvement de la position initiale 1 à la position finale 2. C'est donc un travail positif \mathcal{C}_1^2 qu'effectuent les forces, une énergie *disponible* que nous pouvons utiliser à faire monter des poids, par exemple. Il faut en payer le prix quelque part. Les lois de l'induction nous disent que, pour une même quantité de corps combinés dans la pile, il y aura moins de chaleur dégagée dans le circuit ; si l'on veut, que la force électromotrice de la pile subit une diminution apparente. La force électromotrice d'induction s'oppose donc à celle de la pile, elle tend à faire passer un courant opposé au courant actuel, à diminuer par conséquent le courant actuel et le travail \mathcal{C}_1^2 produit par les forces électromagnétiques. Elle tend à gêner le mouvement actuel.

Si les forces électromagnétiques s'opposaient au mouvement du circuit, il faudrait, pour produire le déplacement, dépenser de l'énergie ; par exemple, il faudrait utiliser la chute de certains poids. C'est de l'énergie que nous perdons : elle doit se retrouver dans un excès de l'échauffement du circuit sur celui qui correspond à sa résistance et à la force électromotrice de la pile. Il naît une force électromotrice d'induction de même sens que celle de la pile : elle augmente l'intensité du courant, augmente donc les forces électromagnétiques ; elle tend à gêner le mouvement qui en est la cause.

En définitive, si le mouvement du circuit tend à se produire seul, la force électromotrice d'induction diminue l'intensité du courant ; si le mouvement du circuit est imposé contre les forces électromagnétiques, la force électromotrice d'induction augmente l'intensité du courant. Dans tous les cas, elle a pour expression en valeur absolue :

$$10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}.$$

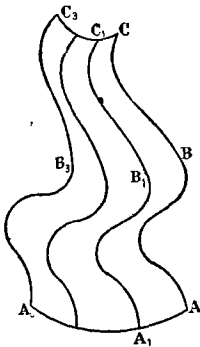


Fig. 108.

229. Conservation de l'énergie dans l'application de la loi de Laplace. — De même que la loi de Laplace précisait la distribution des forces électromagnétiques, elle nous permettra de préciser le long du circuit la distribution des forces électromotrices d'induction.

DÉFINITION. — Soit une courbe ABC quelconque (fig. 108) qui se déplace et prend une série de positions $A_1B_1C_1, \dots, A_3B_3C_3$. Les courbes $CC_1 \dots C_3$ et $AA_1 \dots A_3$ sont les trajectoires de ses extrémités. Par définition, le flux *balayé* par cette courbe

entre deux positions quelconques, 1 et 3 par exemple, est le flux qui traverse la courbe fermée $A_1C_1C_3A_3$.

Ceci posé, considérons l'élément de circuit OA dans le champ H (fig. 107); prenons-le comme axe des z . Prenons comme plan zOx le plan qui passe par OA et par la direction du champ au point O . Si le courant i va de bas en haut suivant OA , la force est dirigée suivant Oy et égale à :

$$0,1 \cdot OA \cdot iH \sin \alpha \text{ dynes.}$$

Quand l'élément OA se déplace, on peut admettre que, dans un petit déplacement, il reste sensiblement parallèle à lui-même. La trajectoire du point O est une petite droite que nous pouvons décomposer en trois composantes Ox_1 , Oz_1 , Oy_1 . Déterminons pour chacun de ces déplacements : 1° le travail, 2° le flux balayé.

Pour les déplacements Ox_1 et Oz_1 qui se font normalement à la force, le travail est nul et le flux balayé aussi.

Pour le déplacement suivant Oy , le travail est :

$$\mathcal{C} = 0,1 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{Oy_1} \cdot iH \sin \alpha \text{ ergs.}$$

Le flux balayé est :

$$\Delta \mathcal{F} = \overline{Oy_1} \cdot \overline{OA} \cdot H \sin \alpha \text{ en CGS.}$$

On a donc :

$$\mathcal{C} = 0,1 \cdot i \cdot \Delta \mathcal{F} \text{ ergs} = 10^{-8} i \cdot \Delta \mathcal{F} \text{ joules.}$$

Écrivons maintenant (c'est une hypothèse vérifiée par l'expérience) que la force électromotrice d'induction e qui naît dans cet élément a comme effet précisément de compenser le travail que les forces électromagnétiques produisent sur cet élément d'après la loi de Laplace.

$$\text{Il vient : } ei\Delta t = 10^{-8} i\Delta \mathcal{F}, \quad e = 10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}.$$

La force électromotrice est égale au flux balayé, divisé par le temps nécessaire pour produire le mouvement et multiplié par 10^{-8} .

D'après la loi de Lenz, le courant qu'elle tend à produire gêne le mouvement; donc si le mouvement se fait suivant Oy , la force électromotrice est dirigée suivant AO (c'est-à-dire de manière à diminuer le courant actuel). Si le mouvement se fait suivant Oy' , elle est dirigée suivant OA (c'est-à-dire de manière à augmenter le courant actuel). Bien entendu, peu importe le sens des composantes Ox_1 et Oz_1 du mouvement; elles n'interviennent pas.

Nous pouvons reproduire ici la remarque du § 153; il est possible de déplacer *isolément* un élément de circuit dans un champ magnétique, et de vérifier que la loi de Laplace est conforme à l'expérience.

230. Phénomènes dans un circuit qui n'est traversé par aucun courant au début de l'expérience. — Nous avons trouvé

plus haut que la force électromotrice d'induction a pour expression : $10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t}$, quelle que soit l'intensité du courant qui parcourt le circuit au début de l'expérience. On serait tenté d'en conclure immédiatement qu'elle est encore représentée par la même formule, si au début de l'expérience le courant est nul. Cependant le raisonnement basé sur l'application du principe de la conservation de l'énergie ne subsiste plus. Il ne passe aucun courant, il n'y a donc pas d'actions électromagnétiques; il n'est plus nécessaire d'invoquer des phénomènes d'induction pour satisfaire au principe de la conservation de l'énergie.

L'expérience répond que la formule est applicable, qu'il naît un courant. Le principe de la conservation de l'énergie ne s'y oppose pas.

En effet, soit :

$$e = 10^{-8} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta t},$$

la force électromotrice d'induction qui se produit pendant un déplacement, soit r la résistance du circuit; l'intensité du courant est :

$$i = \frac{e}{r} = \frac{10^{-8} \Delta \mathcal{F}}{r \Delta t};$$

L'énergie dépensée dans le circuit est :

$$ei\Delta t = 10^{-8} i\Delta \mathcal{F}.$$

D'autre part, le travail des forces électromagnétiques est pendant le même temps : $0,4 \cdot i\Delta \mathcal{F}$ ergs, soit : $10^{-8} i\Delta \mathcal{F}$ joules, c'est-à-dire équivalent. Bien entendu, comme le courant est nul au début, et que sous l'influence des forces électromotrices d'induction il y a production d'un courant et dégagement de chaleur dans le circuit, il est nécessaire que le courant créé gêne le mouvement, c'est-à-dire que l'on soit forcé de dépenser, pour produire ce mouvement, l'équivalent de l'énergie qui est rendue disponible dans le circuit par la force électromotrice d'induction.

231. Expression du flux balayé par un élément de circuit.

— Un élément δs de circuit (de composantes δx , δy , δz) se meut avec une vitesse v (de composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$). Il coupe dans son mouvement un vecteur de composantes a , b , c . On demande le flux balayé par unité de temps.

On ramène la question au problème traité au § 23.

L'aire balayée peut être représentée par un vecteur normal à l'élément de courant et au vecteur figurant sa vitesse; ses composantes sont (§ 23) :

$$\frac{dy}{dt} \delta z - \frac{dz}{dt} \delta y, \quad \frac{dz}{dt} \delta x - \frac{dx}{dt} \delta z, \quad \frac{dx}{dt} \delta y - \frac{dy}{dt} \delta x.$$

Le flux balayé par unité de temps est la projection du vecteur a, b, c , sur le vecteur dont nous venons de calculer les composantes :

$$d\mathcal{F} = a \left(\frac{dy}{dt} \delta z - \frac{dz}{dt} \delta y \right) + b \left(\frac{dz}{dt} \delta x - \frac{dx}{dt} \delta z \right) + c \left(\frac{dx}{dt} \delta y - \frac{dy}{dt} \delta x \right).$$

Nous pouvons encore écrire :

$$d\mathcal{F} = \delta x \left(b \frac{dz}{dt} - c \frac{dy}{dt} \right) + \delta y \left(c \frac{dx}{dt} - a \frac{dz}{dt} \right) + \delta z \left(a \frac{dy}{dt} - b \frac{dx}{dt} \right).$$

Nous devons compter $d\mathcal{F}$ positivement, si l'élément se déplace vers la gauche du bonhomme d'Ampère convenablement placé sur le circuit et regardant dans la direction du champ. On vérifie que l'expression précédente est correcte en signe, en n'oubliant pas que les axes sont supposés à droite (§ 22).

Ainsi plaçons l'élément suivant Oz ($\delta x = \delta y = 0$), et soit :

$$b = c = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0;$$

il reste :
$$d\mathcal{F} = a \delta z \frac{dy}{dt};$$

le flux est positif : on vérifiera sur une figure que le déplacement se fait bien vers la gauche du bonhomme.

232. Force électromotrice d'induction due aux déplacements relatifs de deux circuits sièges de courants. — Quand il s'agit de deux courants fermés, les règles précédentes s'appliquent : la force électromotrice totale induite par un des courants dans le circuit de l'autre, est égale au taux de variation par rapport au temps, du flux d'induction total envoyé dans le circuit induit par le circuit inducteur.

Mais on peut se proposer d'exprimer cette force électromotrice comme provenant de l'action de chaque élément ds du premier circuit sur chaque élément ds' du second. Le problème revient donc à exprimer de cette manière le flux envoyé par deux circuits l'un dans l'autre. Il est complètement résolu aux paragraphes 64 et suivants, au moyen du potentiel vecteur et en vertu de l'assimilation à un feuillet d'un circuit traversé par un courant.

Le flux envoyé par l'un des circuits dans l'autre est, en grandeur et en signe :

$$M = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds'.$$

ds, ds' sont comptés positivement dans un sens choisi de circulation.

Le signe de M dépend des sens de circulation choisis.

Le flux envoyé dans le circuit s' par le circuit s traversé par le courant i est : iM . Il est de même signe que M , si i est positif (c'est-à-dire dirigé dans le sens de circulation choisi sur s), le signe du flux étant déterminé par la règle ordinaire, d'après le sens choisi sur s' .

M s'appelle le *coefficient d'induction mutuelle*.

$$\begin{array}{l} \text{La force électromotrice d'induction dans } s' \text{ est : } - \frac{d(Mi)}{dt} ; \\ \text{---} \quad \quad \quad \text{---} \quad \quad \quad s \text{ est : } - \frac{d(Mi')}{dt} . \end{array}$$

Cette expression englobe les variations simultanées de position des circuits et d'intensité des courants.

Mais tant s'en faut que cette généralisation aille d'elle-même. Nous devons la justifier plus loin (§§ 244 et sq.), l'assimilation que nous avons faite entre les courants et les feuillets n'ayant de sens que si le courant est constant.

S'il s'agit de deux circuits *non fermés*, la façon même dont l'intégrale M est obtenue jette un doute sur la légitimité de son application. Soient A, B, et C, D, les extrémités des circuits; pour n'introduire aucune hypothèse, il faut remplacer M par :

$$M + \varphi_{AC} - \varphi_{AD} + \varphi_{BD} - \varphi_{BC},$$

où φ est une fonction de la distance seule des extrémités des circuits ouverts considérés (§ 163); cette condition est nécessaire et suffisante pour que φ disparaisse dans l'action de deux circuits fermés.

On remarquera d'ailleurs que *la fonction φ disparaît pourvu qu'un des circuits soit fermé.* En effet, faisons coïncider les points A et B; on a :

$$\varphi_{AC} - \varphi_{AD} + \varphi_{AD} - \varphi_{AC} = 0.$$

Ce résultat était à prévoir d'après la remarque qui termine le § 229. Supposons les conducteurs immobiles.

Nous savons qu'on peut exprimer (§ 64) la force électromotrice d'induction au moyen d'un vecteur dit *potentiel vecteur*, dont nous représentons les composantes par F, G, H.

En effet, soit a , b , c , les composantes du vecteur induction; le flux de ce vecteur à travers un circuit fermé est égal à la circulation du vecteur F, G, H, le long de ce circuit, à la condition que l'on ait :

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y},$$

ou en notation abrégée :

$$(a, b, c) = \text{curl}(F, G, H).$$

La force électromotrice d'induction a pour composantes en un point d'un circuit s' dont les coordonnées sont x' , y' , z' :

$$-\frac{\partial F}{\partial t}, \quad -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Cela veut dire que la force électromotrice appliquée à l'élément ds' de composantes dx' , dy' , dz' , est la projection de la dérivée par rapport au temps du potentiel vecteur sur l'élément, soit :

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial t} dx' + \frac{\partial G}{\partial t} dy' + \frac{\partial H}{\partial t} dz'\right) = -\frac{\partial}{\partial t} (Fdx' + Gdy' + Hdz').$$

La force électromotrice totale le long du circuit s' est le taux de variation par rapport au temps, changé de signe, de la circulation du vecteur F , G , H ; soit :

$$\int_{s'} (Fdx' + Gdy' + Hdz').$$

Nous avons montré (§ 66) que si le champ magnétique est dû à un courant, les composantes F , G , H , sont :

$$F = i \int \frac{dx}{r}, \quad G = i \int \frac{dy}{r}, \quad H = i \int \frac{dz}{r};$$

x , y , z , désignent les coordonnées du circuit inducteur.

L'expression se généralise pour des courants distribués comme on voudra dans l'espace; les composantes du potentiel vecteur sont alors :

$$F = \iiint \frac{u d\omega}{r}, \quad G = \iiint \frac{v d\omega}{r}, \quad H = \iiint \frac{w d\omega}{r},$$

où u , v , w , sont les composantes du courant à travers l'unité de surface; $d\omega$ est l'élément de volume. L'intégration est étendue à l'espace entier; r est la distance de l'élément de volume $d\omega$ à l'élément de circuit ds' considéré.

233. Expression complète de la force électromotrice P, Q, R. — Il faut distinguer quatre sortes de forces électromotrices (§ 180) :

1° Les *forces électromotrices électrostatiques* dues aux charges libres dont les composantes sont :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z},$$

où V est le potentiel électrostatique ordinaire.

2° Les *forces électromagnétiques* donnant lieu au phénomène de Hall. Elles sont généralement si petites qu'on peut les négliger.

3° Les *forces électromotrices d'induction* dues à la variation du flux d'induction; quand le flux augmente, il tend à passer un courant en sens inverse de la circulation dont le sens positif correspond au flux positif. Nous devons donc prendre pour composantes de la force électromotrice d'induction :

$$-\frac{\partial F}{\partial t}, \quad -\frac{\partial G}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

4° Les forces électromotrices de non homogénéité (comme dans les piles) dont les composantes sont :

$$E_1, E_2, E_3.$$

En définitive, nous avons pour la force électromotrice dans un conducteur au repos, en négligeant les forces électromotrices de deuxième espèce :

$$P = E_1 - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$Q = E_2 - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t},$$

$$R = E_3 - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Quand le conducteur se meut, il faut introduire dans les équations l'expression du flux balayé changé de signe. D'après le § 231, il vient :

$$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} + E_1 - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$Q = a \frac{dz}{dt} - c \frac{dx}{dt} + E_2 - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial t},$$

$$R = b \frac{dx}{dt} - a \frac{dy}{dt} + E_3 - \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial t}.$$

234. Définition de l'henry. — La force électromotrice évaluée en volts est donnée par une expression contenant le facteur 10^{-8} . Quand la force électromotrice est due à la variation de l'intensité d'un courant évalué en ampères, elle contiendra donc le facteur 10^{-9} . On est conduit à évaluer les coefficients d'induction mutuelle et de self induction au moyen d'une unité pratique, l'henry, dont la valeur est 10^9 CGS.

D'après leur forme, les coefficients d'induction (§ 232) ont les dimensions d'une longueur. Prendre l'henry comme unité revient, dans l'évaluation de ces coefficients, à choisir 10^9 centimètres, soit 10^4 kilomètres pour unité de longueur. C'est justement le quart de la longueur d'un méridien terrestre, d'où le nom de *quadrant* qu'on donne quelquefois à cette unité.

L'henry est le coefficient de self induction d'un circuit où la force électromotrice induite est un volt, quand le courant varie d'un ampère par seconde (§ 244).

Quantités d'électricité induites.

235. Quantité d'électricité mise en jeu dans le passage d'un circuit fermé d'une position 1 à une position 2. — Supposons que la résistance du circuit fermé reste constante pendant le passage

de la position 1 à la position 2, ou plus généralement quand le flux d'induction qui le traverse passe de la valeur \mathcal{F}_1 à la valeur \mathcal{F}_2 , quand il varie par conséquent de : $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1$.

A chaque instant la force électromotrice d'induction est (en volts) :

$$e = 10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

D'où :

$$q = \int idt = \int_r^e dt = \frac{10^{-8}}{r} \int \frac{d\mathcal{F}}{dt} dt = \frac{10^{-8}}{r} \Delta\mathcal{F};$$

q est la quantité totale d'électricité qui parcourt le circuit, s'il ne contient pas d'électromoteur ; c'est la quantité *ajoutée* à celle qui le parcourt sous l'influence de l'électromoteur qu'il contient.

Si : $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 = 0$, si le flux est le même au commencement et à la fin de l'opération, on a : $q = 0$. Cela veut dire, non pas que la quantité transportée par le courant induit est nulle à chaque instant, mais que pendant l'opération il passe, somme toute, autant d'électricité dans un sens que dans l'autre.

236. Mesure de petites quantités d'électricité. Galvanomètre balistique. — La vérification et l'application des lois précédentes exigent que l'on sache mesurer de petites quantités d'électricité ; nous allons décrire l'emploi du galvanomètre comme balistique.

Faisons passer dans un galvanomètre un courant i variable et de très faible durée t , de l'ordre du dixième ou du centième de seconde.

Par définition, la quantité transportée par ce courant est : $q = \int_0^t idt$.

A chaque instant le couple qui agit sur l'aiguille *encore non déviée* du galvanomètre est GMi , où G est la constante du galvanomètre (§ 450), M le moment magnétique de l'aiguille : la durée t est en effet si petite que l'aiguille n'a pas changé sensiblement de position, quand déjà le courant a cessé de passer ; *mais elle a pris de la vitesse*.

Pour bien comprendre le phénomène, imaginons un pendule sur lequel nous donnons un coup de marteau.

L'impulsion angulaire est donc :

$$\mathcal{J} = \int_0^t GMidt = GMq.$$

Nous avons montré (I, § 22) que si un corps, mobile autour d'un axe et soumis à un couple $C\theta$ proportionnel à l'angle d'écart θ avec la position d'équilibre, subit une impulsion \mathcal{J} , il atteint l'élongation (les frottements étant considérés comme négligeables) :

$$\theta = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{IC}} = \frac{2\pi\mathcal{J}}{TC},$$

où T est la durée d'oscillation du corps mobile.

Soit H le champ directeur de l'aiguille, on a pour le galvanomètre : $C = MH$. L'élongation de l'aiguille sera donc :

$$\theta = \frac{2\pi GMq}{TMH}, \quad q = \frac{HT}{2\pi G} \theta.$$

Cette formule n'est guère applicable, car il est très difficile de mesurer séparément H et G .

237. Etalonnage du galvanomètre balistique. — On peut aller plus loin. Faisons passer dans le galvanomètre un courant *constant* d'intensité i_0 connue en ampères; déterminons la déviation α . On a d'après la théorie du galvanomètre (Cours de Première, § 29) :

$$i_0 = \frac{H}{G} \alpha, \quad \text{d'où : } q = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{i_0}{\alpha} \cdot \theta,$$

formule aussi simple qu'importante.

Pour qu'un galvanomètre permette de déterminer *en coulombs* la quantité d'électricité transportée par un courant instantané, il suffit de connaître la durée d'oscillation T en secondes, la déviation α (*mesurée en unités quelconques*) donnée par un courant i_0 constant connu en ampères, et l'élongation θ (*mesurée en ces mêmes unités*) donnée par le courant instantané. On prend naturellement comme unités en lesquelles on mesure α et θ , les divisions de l'échelle sur laquelle on lit les déviations par la méthode de Pogendorff.

On peut se rendre compte immédiatement de la sensibilité de l'appareil. Soit $T = 10^s$: admettons qu'un courant constant donne sur l'échelle une déviation d'un millimètre par microampère, soit par millionième (10^{-6}) d'ampère. Une quantité égale à 10^{-6} coulombs donnera une élongation :

$$\theta = 10^{-6} \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1 \text{ mm}}{10^{-6}} = 0 \text{ mm}, 63.$$

Or ce millionième d'ampère dégagerait $0^c, 116$ d'hydrogène en 277 heures, soit 1^c en 100 jours.

AUTRES PROCÉDÉS D'ÉTALONNAGE. — 1° On peut étalonner un galvanomètre balistique à l'aide d'une capacité et d'une force électromotrice connues. Par exemple, on charge un microfarad à l'aide de dix éléments Daniell, et l'on envoie les dix microcoulombs emmagasinés dans le galvanomètre. La méthode est très rapide quand on possède un condensateur convenablement étalonné; il suffit de construire des étalons de force électromotrice, ce qui ne présente pas de grandes difficultés.

Réciproquement, le galvanomètre balistique permet la comparaison rapide de deux capacités. Il suffit de les charger successivement avec la même pile et de les décharger dans le galvanomètre. Elles sont entre elles comme les déviations obtenues.

2° On peut encore étalonner le galvanomètre en s'appuyant sur la méthode du § 242. On remplace l'aimant par un solénoïde. Mesurant en ampères le courant i qui le parcourt, connaissant le nombre m de spires de fil par centimètre, déterminant enfin sa section droite s , on a ce qu'il faut pour calculer le flux total d'induction \mathcal{F} à travers une spire d'une bobine d'épreuve :

$$\mathcal{F} = 0,4\pi im s.$$

Si n est le nombre de spires de la bobine d'épreuve (§ 242), le flux à travers cette bobine est :

$$n\mathcal{F} = 0,4\pi imns.$$

On procédera soit en supprimant brusquement le courant i , soit en l'inversant.

Cette troisième méthode d'étalonnage est la plus pratique.

238. Balistique à cadre mobile. Conditions de sensibilité. —

Avec de légères modifications, la théorie précédente est applicable au galvanomètre à cadre mobile (§ 155).

H désignant l'intensité du champ créé par les aimants fixes, nS désignant la surface totale de la bobine, on trouve immédiatement :

$$\mathcal{J} = nSHq, \quad \theta = 2\pi \frac{nSH}{TC} q. \quad (1)$$

La première méthode d'étalonnage est encore applicable. Faisons passer un courant i_0 ; la déviation α est donnée par la formule (§ 155) :

$$i_0 = \frac{C}{nSH} \alpha;$$

substituant dans (1), il vient comme pour le galvanomètre à aiguille mobile :

$$q = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{i_0}{\alpha} \cdot \theta. \quad (2)$$

Les deux autres méthodes sont naturellement applicables.

CONDITIONS DE SENSIBILITÉ. — Qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre type d'appareils, on diminue évidemment la sensibilité en augmentant le moment d'inertie de la partie mobile, toutes choses égales d'ailleurs. Pour transformer un galvanomètre ordinaire en balistique, on doit le plus souvent augmenter cette inertie; mais c'est non pas pour augmenter la sensibilité, mais pour rendre les lectures possibles, en augmentant la durée d'oscillation.

La sensibilité est diminuée, comme il résulte immédiatement de la formule (2); en effet, le moment d'inertie n'intervient pas dans le rapport $i_0 : \alpha$.

Toutes choses égales d'ailleurs, la sensibilité d'un galvanomètre employé comme balistique varie dans le même sens que sa sensibilité employé comme galvanomètre ordinaire; cela résulte encore de la

formule (2). Il y a donc avantage à diminuer le champ directeur, si l'aiguille est mobile; le couple de torsion, si le cadre est mobile.

A la vérité, quand on diminue le champ directeur H , la durée d'oscillation augmente comme $1/\sqrt{H}$. Mais le rapport i_0/α diminue comme H . En définitive, le coefficient de θ diminue comme \sqrt{H} : donc la sensibilité augmente.

Il est avantageux de construire les galvanomètres balistiques à cadre mobile avec des cadres de grandes dimensions; l'inertie est ainsi obtenue par de la matière rationnellement utilisée à augmenter la sensibilité.

On emploie quelquefois l'aimant mobile comme miroir: on diminue ainsi le plus possible l'inertie de la partie mobile.

239. Galvanomètre balistique avec amortissement. — Dans les expériences de précision, le galvanomètre, employé pour mesurer des quantités d'électricité, oscille sans amortissement appréciable. Tandis que pour hâter les mesures, on cherche à rendre les ampèremètres *apériodiques*, c'est-à-dire à faire en sorte que l'aiguille arrive le plus vite possible à sa position d'équilibre, on cherche au contraire à diminuer l'amortissement des galvanomètres *balistiques*.

Mais les appareils sans amortissement sont d'un emploi très délicat; avant chaque mesure il faut arrêter l'aiguille, soit par de petits déplacements systématiques d'aimants, soit en envoyant de faibles courants dans une bobine auxiliaire: il faut un certain doigté pour réussir ces opérations.

Dans la pratique industrielle on préfère les appareils à fort amortissement, même comme balistiques: ils sont généralement du type à cadre mobile.

Si la partie mobile a un amortissement petit mais non négligeable, dû à un *frottement proportionnel à la vitesse*, la formule devient (I, § 23):

$$\theta = \frac{2\pi\delta}{TC} e^{-\lambda\frac{T}{4}},$$

$$q = \frac{T}{2\pi} \frac{i_0}{\alpha} e^{\lambda\frac{T}{4}} \cdot \theta = \frac{T}{2\pi} \frac{i_0}{\alpha} \left(1 + \frac{\lambda T}{4}\right) \theta = \frac{T}{2\pi} \frac{i_0}{\alpha} \left(1 + \frac{\delta}{4}\right) \theta.$$

Nous aurions pu l'écrire tout de suite. En effet, δ représente la diminution relative pour une oscillation complète; $\delta/4$ est la diminution relative pour un quart de période.

On utilise parfois le galvanomètre avec l'amortissement critique. On a alors (I, § 23):

$$\theta = \frac{\delta}{e\sqrt{CI}}, \quad q = \frac{T}{2\pi} \frac{i_0}{\alpha} e\theta.$$

T serait la période d'oscillation si l'amortissement était supprimé.

Pratiquement c'est la période en circuit ouvert. Si les pièces métalliques produisent un amortissement non négligeable, même en circuit ouvert, la période est T' ; la formule donnée tome I, § 18, permet de calculer T connaissant T' .

e est la base des logarithmes népériens : $e = 2,718$.

Employé avec l'amortissement critique, l'appareil est e fois moins sensible qu'avec l'amortissement nul.

Quelle que soit la disposition utilisée, tant que l'amortissement est dû à un frottement proportionnel à la vitesse, l'angle de première impulsion mesure q en valeur relative.

Il en est ainsi quand le frottement est dû à l'air et aux courants d'induction; nous reviendrons plus loin sur cette dernière cause d'amortissement (§ 247).

240. Indication des galvanomètres pour les courants alternatifs ou généralement pour des courants alternativement de sens contraires. Application au galvanomètre balistique.

— Contrairement à la théorie élémentaire, l'expérience prouve que le galvanomètre, soit à aiguille, soit à cadre mobiles, employé comme balistique, est un appareil très imparfait pour indiquer si la quantité d'électricité totale transportée par une décharge est nulle. Sous l'influence d'un courant alternatif, le spot ne reste généralement pas au zéro.

Nous donnerons une théorie plus complète du galvanomètre à aiguille mobile, en admettant que le moment magnétique de l'aiguille comprend une partie constante M , et une partie induite variable, proportionnelle à chaque instant à la composante parallèle à l'aiguille de la force magnétique due au courant. Nous montrerons ensuite que la même théorie vaut pour le galvanomètre à cadre mobile.

Soit θ l'angle de l'aiguille avec le plan des spires au temps t ; soit θ_0 l'angle θ quand l'aiguille est en équilibre, aucun courant ne traversant le cadre; soit H le champ terrestre : il fait évidemment l'angle θ_0 avec le plan des spires.

Le couple de rappel à la position θ_0 est : $MH \sin(\theta - \theta_0)$.

Le couple qui tend à mettre l'aiguille en croix avec le cadre sous l'action d'un courant i est : $GM \cdot i \cos \theta$, où G est la constante du cadre.

Enfin *par hypothèse* le champ Gi , normal au cadre, crée dans l'aimant un moment magnétique supplémentaire proportionnel à $i \sin \theta$, d'où résulte un couple qu'on peut représenter par :

$$\gamma i \sin \theta \cdot i \cos \theta = \gamma i^2 \sin \theta \cos \theta.$$

On peut encore dire que le moment magnétique de l'aimant est devenu :

$$M' = M + \frac{\gamma}{G} i \sin \theta.$$

Si nous négligeons l'amortissement, l'équation différentielle du mouvement est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + MH \sin(\theta - \theta_0) = GMi \cos \theta + \gamma i^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (1)$$

1° Cherchons la position d'équilibre pour un courant alternatif dont l'intensité efficace est I_{eff} .

Multiplions par dt et intégrons pour une période :

$$MH \sin(\theta - \theta_0) = \frac{GM \cos \theta}{T} \int_0^T i dt + \gamma \frac{\sin \theta \cos \theta}{T} \int_0^T i^2 dt,$$

$$MH \sin(\theta - \theta_0) = I_{eff}^2 \cdot \sin \theta \cos \theta.$$

L'expérience montre que généralement le second membre de l'équation n'est pas nul.

2° L'équation (1) indique qu'il est généralement possible de trouver une déviation initiale θ_0 telle qu'on puisse faire passer dans le galvanomètre un courant constant i_0 , sans que l'aiguille dévie.

Écrivons en effet que l'aiguille est immobile dans la situation initiale $\theta = \theta_0$, il vient pour déterminer θ_0 :

$$GM' - GM + \gamma i_0 \sin \theta_0 = 0.$$

On peut toujours satisfaire à cette équation *pourvu que i_0 soit assez grand*.

3° Enfin faisons passer une décharge dans le galvanomètre ; soit :

$$q = \int_0^\infty i dt, \quad \rho = \int_0^\infty i^2 dt.$$

Écrivons que l'aiguille reste immobile. Multiplions l'équation (1) par dt et intégrons entre 0 et ∞ . Il vient, puisque $\theta = \theta_0$ identiquement :

$$GMq + \gamma \rho \sin \theta_0 = 0.$$

Donc il existe une déviation initiale θ_0 , telle qu'une décharge *de forme donnée*, c'est-à-dire définie par les deux quantités q et ρ , ne produise pas de déviation. Il est en effet facile de faire en sorte que des charges relativement énormes traversent la bobine d'un galvanomètre sans produire aucune déviation de l'aiguille.

La théorie précédente s'applique exactement aux galvanomètres à cadre mobile. Le courant qui traverse le cadre, induit une aimantation transversale dans l'aimant producteur du champ H . Cette aimantation crée un champ h normal au plan de l'aimant et par conséquent au champ H . On peut représenter le champ h par une expression proportionnelle à $i \cos \theta$; le couple qui en résulte sur le cadre est de la forme : $\gamma i^2 \cos \theta \sin \theta$. L'équation différentielle du mouvement du cadre est encore :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C \sin(\theta - \theta_0) = HnSi \cos \theta + \gamma i^2 \sin \theta \cos \theta ;$$

C est la constante de torsion du fil de suspension, nS est la surface totale de la bobine.

241. Application des lois de l'induction à l'étude des champs. — Il résulte du § 235 une méthode pour la détermination de l'intensité H d'un champ. Plaçons normalement aux lignes de force du champ une bobine dont l'aire totale (somme des aires des différentes spires) est S ; le flux est HS . Enlevons brusquement la bobine et amenons-la en un lieu où l'intensité du champ est nulle; la quantité d'électricité induite dans le circuit de résistance r dont font partie la bobine et le galvanomètre balistique, est :

$$q = \frac{10^{-8}}{r} \cdot HS \text{ coulombs.}$$

La mesure de la première élongation fournit q en valeur relative.

Au lieu d'enlever la bobine, on peut la faire tourner de 180° autour d'un axe quelconque passant par les spires; le flux varie de HS à $-HS$; la quantité d'électricité induite est : $\frac{10^{-8}}{r} 2HS$.

La méthode n'est évidemment applicable que si le produit HS est assez grand ou la résistance r assez petite.

242. Application à l'étude d'un aimant. — Les phénomènes d'induction permettent une mesure directe des flux d'induction.

Plaçons dans une quelconque des sections droites d'un aimant permanent que nous supposerons d'abord prismatique, une bobine B (fig. 109), sorte de bague juste assez grande pour glisser sur l'aimant à frottement doux. Rejoignons les extrémités de ses fils à un galvanomètre balistique étalonné. Enlevons-la brusquement et transportons-la assez loin de l'aimant pour que le flux \mathcal{F}_2 qui la traverse alors, soit négligeable. Mesurons la première élongation de l'aiguille du galvanomètre : nous connaissons la quantité d'électricité mise en jeu.

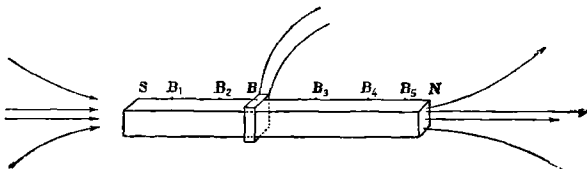


Fig. 109.

Elle est égale en coulombs à : $\frac{10^{-8}}{r} (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1)$,

où r est la résistance totale du circuit.

Puisque \mathcal{F}_2 est nul, nous savons donc mesurer le flux total \mathcal{F}_1 qui traversait la bobine dans sa première position. Soit n le nombre de ses spires : le flux à travers la section droite de l'aimant est $\mathcal{F}_1 : n$.

D'après la règle fondamentale qui régit les phénomènes d'induc-

tion, $\mathcal{F}_1 : n$ mesure le flux d'induction qui traverse la section droite du barreau. Nous pouvons aussi bien dire, d'après les propriétés du flux d'induction (qui est conservatif), que $\mathcal{F}_1 : n$ mesure le flux d'induction à travers une surface quelconque limitée à l'une des spires; par exemple, le flux de force qui traverse la surface en pointillé (fig. 110) tout entière extérieure à l'aimant.

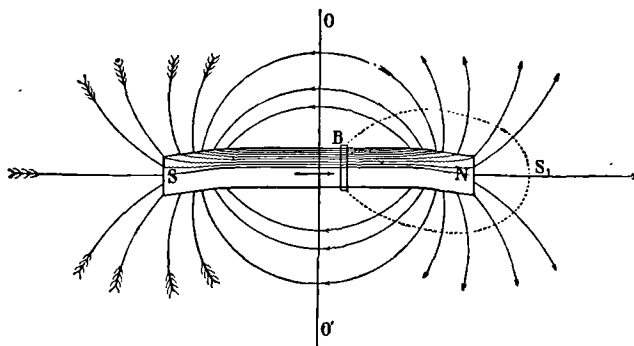


Fig. 110.

Montrons le parallélisme des phénomènes d'attraction étudiés au § 160 et des phénomènes d'induction.

Recommençons plusieurs fois l'expérience précédente en plaçant au début la bague B dans les positions B_1, B_2, \dots . L'expérience montre que le flux \mathcal{F}_2 , mesuré par la quantité d'électricité induite, a une certaine valeur tout près de l'extrémité S de l'aimant, quand la bague est d'abord en B_1 par exemple; cette valeur croît rapidement, quand la bague s'éloigne de S; elle devient presque indépendante de la position de la bague, passe par un maximum quand la bague est au milieu de l'aimant, décroît ensuite et prend vers l'extrémité nord sa valeur initiale. L'aimant est censé homogène et régulièrement aimanté.

Reportons-nous à la fig. 110, qui donne l'ensemble des lignes de force extérieures, continuées à l'intérieur de l'aimant par les lignes que nous pouvons appeler lignes d'induction. Les résultats précédents apparaissent immédiatement, puisque nous savons que dans les tubes formés extérieurement par les lignes de force, intérieurement par les lignes d'induction, le flux (de force ou d'induction) mesuré dans tous les cas et de la même manière par les phénomènes d'induction, se conserve et circule comme le ferait un liquide incompressible.

Il est évident en effet que vers S et vers N, et généralement dans des positions symétriques par rapport à OO' , le flux d'induction est le même, qu'il croît quand on se rapproche de OO' et qu'il est maximum dans la section OO' .

Dans la position médiane de la bague, pourvu toutefois que l'aimant soit assez long, la force magnétique est négligeable.

Il en résulte d'abord que nous y obtiendrons des résultats indépendants de la section droite de la bobine d'épreuve, et, si elle ne glisse pas à frottement doux, indépendants de son inclinaison sur l'aimant. En effet la force magnétique étant négligeable, le flux qui traverse l'espace compris entre la bobine d'épreuve et l'aimant, l'est aussi. La quantité d'électricité induite ne dépend, au voisinage de la position médiane, que du nombre n de spires de la bobine.

Le vecteur induction est sensiblement égal à $4\pi\mathfrak{J}$, où \mathfrak{J} est l'intensité d'aimantation moyenne. La quantité d'électricité induite donne donc une mesure de cette intensité. D'ailleurs nous avons montré, au § 160, que le flux d'induction à travers la section droite équatoriale de l'aimant mesure la somme des masses contenues dans l'une ou l'autre moitié de l'aimant : on a $\mathfrak{J}s = \Sigma m$, où s est l'aire de la section droite.

Le flux d'induction à travers une spire de la bobine d'épreuve est donc :

$$4\pi\mathfrak{J}s = 4\pi\Sigma m.$$

On tire de là une méthode de détermination de la position des pôles d'un aimant prismatique dont on connaît le moment magnétique, et qui possède un axe et un plan de symétrie (§ 129). En effet :

- 1° on sait sur quelle ligne doivent se trouver les pôles ;
- 2° on peut mesurer par l'expérience précédente la quantité Σm ;
- 3° on a par définition : $M = l\Sigma m$.

D'où la valeur de l , c'est-à-dire de la distance des pôles.

Ils sont sur l'axe de symétrie à une distance $l/2$ de part et d'autre du plan de symétrie.

Nous avons raisonné sur un aimant prismatique ; mais l'expérience d'induction est possible même avec un aimant recourbé. Elle mesure le flux d'induction à travers une section quelconque (§ 318).

On peut remplacer l'aimant par un solénoïde (§ 237).

Coefficients d'induction mutuelle et de self induction.

243. Position de la question. — Les phénomènes d'induction que nous venons d'étudier se présentent comme les réciproques des phénomènes électromagnétiques.

Nous imaginons le déplacement relatif d'un circuit (ouvert ou fermé) et d'un champ donné, dû à des courants constants ou à des aimants permanents. Ces déplacements entraînent des travaux ; l'existence des phénomènes d'induction prouve qu'il faut chercher l'équivalent de ces travaux dans la production d'une force électromotrice qui tend à faire varier l'intensité des courants traversant les circuits.

Il est évident qu'une réciprocité analogue n'existe pas *de plano* dans le cas suivant.

Soient deux circuits fermés et indépendants 1 et 2, placés l'un à côté de l'autre : faisons passer un courant dans le circuit 1 ; il se produit de ce chef à travers le circuit 2 un certain flux de force que nous pouvons représenter par $M_{12}i_1$. *A priori*, aucun travail ne résulte de l'établissement de ce flux à travers le circuit 2. Il ne serait donc pas contradictoire de supposer que cette variation de flux qui résulte, non plus d'un déplacement relatif d'un circuit et d'un champ, dans des conditions où ce déplacement implique un travail, mais simplement de la production d'un champ sans travail électromagnétique, ne produisit aucun phénomène d'induction.

Soit encore un circuit qui n'est d'abord le siège d'aucun courant. Fermons-le sur une force électromotrice ; un courant s'installe, et simultanément le circuit s'envoie dans lui-même un flux que nous pouvons représenter par L_1i_1 . Ici encore il ne serait pas contradictoire de supposer que cette variation de flux, qui ne semble correspondre à aucun travail, n'entraînât pas de phénomènes d'induction.

On peut conclure de même chaque fois que la variation du champ provient, non d'un déplacement, mais d'une véritable création sur place.

L'expérience répond que les lois précédentes sont encore applicables en grandeur et en signe. Une conclusion s'impose dès lors : il existe une forme particulière d'énergie que nous n'avons pas encore rencontrée et qui intervient dans ces phénomènes. Un conducteur traversé par un courant, crée dans le milieu qui l'entoure une déformation magnétique qui est certainement le siège d'une énergie particulière : il s'agit d'en trouver la forme.

244. Énergie correspondant à l'existence d'un système de courants fermés. — Tout s'explique si nous admettons qu'un système de courants fermés i_1, i_2, i_3, \dots représente, du fait de son existence même, une quantité d'énergie donnée par la formule :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \dots + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum L i^2 + \sum M_{ij} i_i i_j. \end{aligned}$$

Les paramètres L_1, L_2, \dots sont appelés coefficients de self induction : ils ne dépendent que de la forme du circuit auquel ils correspondent. Les paramètres M_{12}, M_{13}, \dots sont appelés coefficients d'induction mutuelle ; ils ne dépendent que de la forme des deux circuits auxquels ils correspondent.

Puisque la règle générale de l'induction s'applique, $L_1 i_1$ doit être le flux que le circuit fermé 1 s'envoie dans lui-même quand il est par-

couru par le courant i_1 ; $M_{12}i_1$ est le flux envoyé dans le circuit 2 par le circuit 1 parcouru par le courant i_1 .

Nous retrouvons les quantités déjà définies au § 232.

Il résulte de la forme même des quantités M (§ 68) que l'on a :

$$M_{ij} = M_{ji}.$$

S'il n'existe que deux circuits fermés, on démontre la relation :

$$L_1L_2 - M_{12}^2 \geq 0. \quad (1)$$

Si le coefficient de self induction d'un circuit est nul, son coefficient d'induction mutuelle sur un autre circuit est certainement nul.

On peut s'arranger de manière à réaliser très exactement la condition limite (1) : il suffit par exemple d'enrouler deux fils sur le même cylindre, de manière que les spires des deux enroulements soient mélangées le plus régulièrement possible. Les bobines ont même longueur l , même section droite moyenne s . On a (§ 250) :

$$M_{12} = 4\pi n_1 n_2 l s; \quad L_1 = 4\pi n_1^2 l s, \quad L_2 = 4\pi n_2^2 l s;$$

et par conséquent : $M_{12}^2 = L_1 L_2$.

Reste à préciser sous quelle forme l'énergie W est emmagasinée.

Nous avons montré au § 112 que l'énergie d'un système de conducteurs plongé dans un diélectrique de pouvoir K , peut être considérée comme localisée dans le diélectrique et a pour expression :

$$W_E = \frac{K}{8\pi} \iiint F^2 dv; \quad (1)$$

F est l'intensité du champ électrique, dv l'élément de volume; l'intégrale est étendue à tout l'espace.

Nous prouverons plus loin (§ 306) qu'un milieu de perméabilité constante μ est, du fait de son aimantation, le siège d'une énergie tout à fait analogue à la précédente :

$$W_M = \frac{\mu}{8\pi} \iiint H^2 dv; \quad (2)$$

H est l'intensité du champ magnétique.

Or un système de courants crée dans tout l'espace un champ magnétique. Si l'expression (2) est générale, il faut que l'établissement des courants exige une certaine dépense d'énergie qui a pour équivalent la *déformation magnétique* du milieu, et qui est restituée lors de la suppression des courants.

Resterait à prouver qu'on a identiquement :

$$W = W_M. \quad (3)$$

La démonstration analytique de ce théorème (Maxwell, II, §§ 634 et 635) ne présente aucune difficulté particulière; nous ne jugeons pas nécessaire de la donner. La méthode suivant laquelle nous arri-

verons plus loin à l'expression (2), explique très suffisamment la nature du problème (§ 306).

Il résulte de l'égalité (3) une méthode de calcul des coefficients L et M.

Soit par exemple un circuit unique, siège d'un courant i . Si nous connaissons en tous les points de l'espace le champ H, nous pouvons calculer l'intégrale triple W_M . La valeur du coefficient de self induction L est alors donnée par l'équation :

$$\frac{1}{2} Li^2 = W_M.$$

Considérons les deux enroulements dont il est parlé plus haut. Quand ils sont le siège des courants i_1 et i_2 , le champ à l'intérieur est sensiblement constant et égal à :

$$H = 4\pi(n_1i_1 + n_2i_2);$$

à l'extérieur il est sensiblement nul. On a donc, pour $\mu = 1$:

$$W_M = \frac{H^2ls}{8\pi} = 2\pi ls(n_1i_1 + n_2i_2)^2 = \frac{L_1i_1^2}{2} + M_{12}i_1i_2 + \frac{L_2i_2^2}{2}.$$

L'identification des deux dernières expressions redonne bien les valeurs de L_1 , L_2 , M_{12} , écrites plus haut. Nous reviendrons là-dessus au § 250.

Les coefficients L et M n'existent, ce qui précède n'a de sens, que si le milieu n'est pas à *hystérésis*; c'est-à-dire si l'énergie emmagasinée par lui a une valeur parfaitement déterminée en fonction du champ actuel.

Quand le milieu est doué d'hystérésis, il faut encore dépenser de l'énergie pour l'aimanter; l'intensité du courant magnétisant croissant de i à $i + di$, le milieu en absorbe une quantité qu'on peut encore mettre sous la forme : $Lidi$. Mais L n'est plus une constante; L dépend de tous les champs antérieurs et par conséquent de toutes les valeurs antérieures de l'intensité.

245. Circuit unique. — Je vais montrer, pour un circuit et pour un nombre quelconque de circuits, que le principe de la conservation de l'énergie est satisfait par le système des hypothèses précédentes.

On ferme brusquement un circuit de résistance r sur une force électromotrice constante E; cherchons l'équation d'établissement du courant. Le flux positif que le circuit s'envoie dans lui-même, est à chaque instant égal à Li . La force électromotrice effective est :

$$E - \frac{d}{dt}(Li) = E - L \frac{di}{dt},$$

si le circuit ne se déforme pas. L'équation d'établissement est donc :

$$ri = E - L \frac{di}{dt}, \quad (1) \quad i = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{rt}{L}} \right); \quad (2)$$

nous supprimons, pour la rapidité de l'écriture, le coefficient 10^{-9} qui multiplie L .

Posons : $\tau = L : r ; \quad I = E : r ;$

il vient :
$$i = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

La loi d'établissement est représentée en OABC (fig. 111).

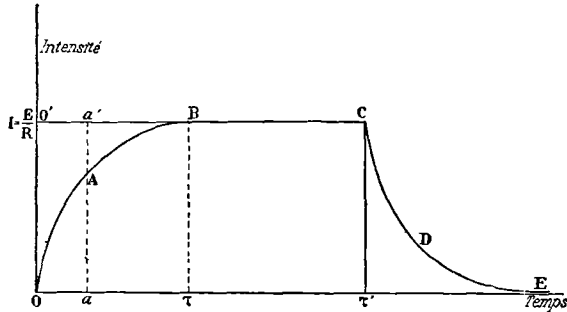


Fig. 111.

La constante $\tau = L : r$ s'appelle *constante de temps*. C'est le temps nécessaire pour que le courant arrive aux 632/1000 de sa valeur limite.

En effet écrivons $t = \tau$, il vient :

$$\frac{i}{I} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} = \frac{1,718}{2,718} = 0,632.$$

Par exemple, un relais a comme constantes :

$$r = 400 \text{ ohms}, \quad L = 4 \text{ henrys} :$$

il fonctionne avec une intensité de 0,5 milliampères.

Sa constante de temps est : $\tau = 4 : 400 = 0,01$.

On réduit τ soit en augmentant la résistance, soit en diminuant la self. Ainsi τ est plus grand quand l'armature de l'électro est en contact; la self d'un récepteur Morse passe en effet de 6 à 11 henrys suivant que l'armature est éloignée ou rapprochée.

Il ne s'agit évidemment ici que d'ordres de grandeur. Du reste, les électros ayant un noyau de fer et l'hystérésis n'étant pas négligeable, en toute rigueur, le coefficient L n'existe pas (§ 244).

L'étude de la self et des moyens de la diminuer a une importance capitale en Télégraphie, quand il s'agit d'augmenter la rapidité des signaux.

1° Calculons la quantité d'électricité transportée par le courant i .

Multiplicons les deux membres de l'équation (1) par dt et intégrons :

$$\int_0^t i dt = It - \frac{Li}{r}.$$

Il manque une quantité d'électricité $Li : r$. Conformément à la règle du § 233, elle est égale au quotient de la variation du flux par la résistance. Si t est assez long, $i = I$; il manque la quantité $LI : r$.

2° Calculons les énergies mises en jeu.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par idt et intégrons :

$$\int_0^t ri^2 dt = \int_0^t E i dt - \frac{Li^2}{2}.$$

Or le premier membre représente l'énergie perdue sous forme de chaleur par l'effet Joule. Le premier terme du second membre est l'énergie fournie pendant le même temps par la pile. Le principe de la conservation de l'énergie est satisfait, si nous admettons, conformément à l'hypothèse du § 244, que le terme $Li^2 : 2$ représente l'énergie emmagasinée dans le milieu qui entoure le circuit.

Si t est assez grand, $i = I$; l'énergie emmagasinée est : $LI^2 : 2$.

Supposons qu'il soit pratiquement possible de supprimer brusquement la force électromotrice et de la remplacer par une résistance égale. Le courant ne sera pas supprimé instantanément; il diminuera suivant l'équation (figure 111, courbe CDE) :

$$ri = -L \frac{di}{dt}, \quad i = I e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

L'énergie $\frac{LI^2}{2}$ est récupérée sous forme d'effet Joule. On trouve en effet :

$$\int_0^\infty i^2 r dt = \frac{LI^2}{2}.$$

246. Nombre quelconque de circuits fermés. — Pour un nombre quelconque de circuits fermés, le système des équations différentielles devient :

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} + \dots &= E_1, \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt} + \dots &= E_2, \\ \vdots & \end{aligned}$$

Opérons comme nous l'avons fait précédemment :

1° QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ TRANSPORTÉE. — Multiplions la première équation par dt , intégrons et divisons tout par r_1 . Posons :

$$E_1 : r_1 = I_1 ;$$

il vient : $q_1 = \int_0^t i_1 dt = I_1 t - \frac{1}{r_1} (L_1 i_1 + M_{12} i_2 + \dots),$

équation dont l'interprétation est conforme aux hypothèses générales.

2° ÉNERGIE MISE EN JEU. — Multiplions la première équation par $i_1 dt$, la seconde par $i_2 dt, \dots$ et additionnons. Il vient :

$$dW + (r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \dots) dt = (E_1 i_1 + E_2 i_2 + \dots) dt.$$

L'énergie dépensée par les piles en un temps quelconque se retrouve dans l'effet Joule et dans l'accroissement de la quantité W , énergie emmagasinée dans le système de courants, d'après l'hypothèse générale du § 244.

247. Amortissement d'une bobine fermée qui oscille dans un champ magnétique uniforme. Application au galvanomètre à cadre mobile. — Nous supposons que dans la position d'équilibre le plan des spires est parallèle au champ. Cela revient à poser $\theta_0 = 0$, dans les notations du § 240. La bobine oscille sous l'influence soit d'une suspension bifilaire, soit de fils servant d'axe de rotation, comme dans le galvanomètre à cadre mobile : le couple qui résulte de la torsion de ces appareils de suspension est $C\theta$, tant que l'angle θ est petit.

On a pour équation du mouvement du système mobile dont le moment d'inertie est I :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta + C' = 0.$$

Le couple C' provient du courant qui parcourt la bobine. Soit i ce courant, H le champ uniforme, S la surface totale de la bobine ; le couple auquel est soumis la bobine est :

$$HSi \cos \theta = HSi,$$

si les déplacements sont petits.

Pour évaluer i , appliquons l'équation générale de l'induction :

$$ri = - \frac{d\mathcal{F}}{dt} - L \frac{di}{dt} + E,$$

s'il existe une pile de force électromotrice E dans le circuit de la bobine. L'expérience montre que le second terme du second membre est absolument négligeable devant le premier ; \mathcal{F} est le flux du champ H dans la bobine :

$$\mathcal{F} = HS \sin \theta, \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = HS \cos \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Le couple C' a donc pour expression :

$$C' = - HSi = - \frac{H^2 S^2}{r} \frac{d\theta}{dt} - \frac{HSE}{r}.$$

L'équation du mouvement est :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{H^2 S^2}{r} \frac{d\theta}{dt} + C\theta - \frac{HSE}{r} = 0.$$

Nous l'avons déjà étudiée aux §§ 18 et 19 du tome I ; il faut poser dans les solutions : $f = \frac{H^2 S^2}{r}$.

On fait disparaître le terme constant par un changement de variable. Cela signifie qu'à *résistance égale les phénomènes sont les mêmes, qu'il existe ou non une pile dans le circuit* ; la présence de la pile change seulement l'azimut que le système tend asymptotiquement à occuper, et autour duquel il oscille, quand le phénomène est périodique.

Pour augmenter le frottement f , il suffit de diminuer la résistance r .

Tant que r est assez grand, le mouvement est périodique : les oscillations décroissent en progression géométrique. Weber démontra qu'il en est bien ainsi et en conclut que les forces électromotrices d'induction sont proportionnelles aux vitesses. Si r devient assez petit, le mouvement est apériodique.

Le passage de l'un des types de mouvement à l'autre se fait pour : $f = 2\sqrt{CI}$; la résistance correspondante, appelée résistance

critique, est :

$$r_c = \frac{H^2 S^2}{2\sqrt{CI}}.$$

Pour la déterminer, on peut étudier pour diverses résistances la manière dont le spot revient au zéro et déterminer celle pour laquelle le mouvement cesse d'être périodique. Mais la résistance r_c est ainsi toujours connue par excès.

On peut aussi la calculer. En circuit ouvert l'amortissement est faible ; la durée d'oscillation est très approximativement :

$$T = 2\pi\sqrt{I : C}.$$

Fermons le cadre sur une résistance telle que la résistance totale du circuit soit r ; soit alors T' la durée d'oscillation, δ l'amortissement. On a, d'après le § 18 du tome I :

$$\delta = \lambda T' = f T' : 2I = H^2 S^2 T' : 2rI ; \quad r = T' H^2 S^2 : 2\delta I ;$$

$$r_c = r \frac{T}{T'} \frac{\delta}{2\pi} = r \frac{\delta}{2\pi},$$

très approximativement, puisque T diffère très peu de T' .

Ce que nous venons de dire d'un cadre s'applique à toute pièce métallique mobile dans un champ ; les petites oscillations s'amortissent en progression géométrique parce que le frottement est toujours proportionnel à la vitesse. Suivant la valeur du champ et de la résistance intérieure, le phénomène est périodique ou apériodique. On trouvera au § 101 du Cours de Première un exemple de ces phénomènes.

Dans les variations de flux par déplacements, seuls les mouvements relatifs interviennent. Le principe de l'action et de la réaction nous

permet de conclure immédiatement : *quand un aimant oscille à l'intérieur d'une bobine, ou généralement d'une pièce métallique conductrice, il induit dans cette pièce des courants qui produisent sur lui un frottement électromagnétique proportionnel à la vitesse.*

L'amplitude de ses oscillations diminue en progression géométrique.

L'équation de son mouvement est encore du type :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Si, sans changer la forme des pièces métalliques, on diminue leur résistance dans un certain rapport, le coefficient f croît dans le même rapport.

Pour rendre apériodique un galvanomètre à aiguille mobile, il faut donc que l'aiguille se déplace dans une cavité limitée par un métal très bon conducteur, du cuivre rouge par exemple.

248. Décharge d'un condensateur à travers un circuit possédant de la self induction.

— Nous avons déjà traité la décharge d'un condensateur dans le cas où le circuit réunissant les armatures n'a pas de self induction (§ 182). La force électromotrice produisant le courant est alors la différence de potentiel entre les armatures, c'est-à-dire le quotient de la charge M par la capacité C . On a :

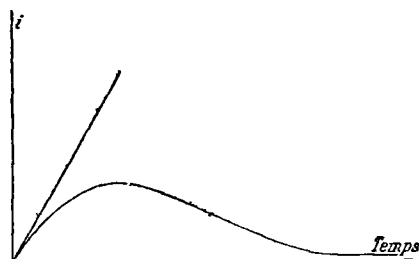


Fig. 112.

$$Ri = \frac{M}{C}.$$

En tenant compte de la self induction, il vient :

$$Ri = \frac{M}{C} - L \frac{di}{dt},$$

avec la condition : $i = - \frac{dM}{dt}$. L'équation à intégrer est donc :

$$L \frac{d^2M}{dt^2} + R \frac{dM}{dt} + \frac{M}{C} = 0.$$

Nous avons déjà discuté cette équation au § 18 du tome I. On sait que la forme de l'intégrale dépend du signe de la quantité :

$$R^2C - 4L = \Delta.$$

1° Si $\Delta > 0$, si, pour une capacité donnée, R est grand ou L petit, M est a périodique et de la forme :

$$M = e^{-\lambda t} [Ae^{-Kt} + Be^{Kt}] ;$$

$i = -\frac{dM}{dt}$, est évidemment de la même forme : elle est nulle pour $t=0$ et $t=\infty$. La tangente à l'origine ($t=0$) à la courbe représentant i en fonction du temps, a pour coefficient angulaire :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2M}{dt^2} ;$$

il s'obtient en faisant dans l'équation différentielle : $\frac{dM}{dt} = 0$.

Il est égal à :

$$\frac{M_0}{LC} .$$

La courbe a donc la forme représentée par la figure 112.

2° Si $\Delta < 0$, si la self induction est assez grande ou la résistance assez petite, le phénomène est périodique. Les oscillations sont isochrones et leur période est :

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{L^2 C}{4L - R^2 C}} .$$

Quand la résistance est très petite, l'expression se simplifie; on a :

$$T = 2\pi \sqrt{CL} .$$

On obtient des courants dirigés tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; la décharge est *oscillante*. L'amplitude des oscillations décroît en progression géométrique.

249. Expériences. — Les expériences directes prouvent qu'effectivement la décharge d'un condensateur est oscillante. La méthode consiste à photographier l'étincelle étalée au moyen d'un miroir tournant. Suivant la période de l'oscillation, la rotation du miroir doit être plus ou moins rapide. On a dû la pousser jusqu'à 500 tours par seconde quand la fréquence atteint 5 millions. L'aspect de l'étincelle présente une alternance qui prouve sa nature oscillatoire.

On trouve ainsi une période *parfaitement définie*, même pour des fréquences énormes; *mais alors l'amortissement est considérable*. Nous aurons l'occasion de revenir plus longuement sur ces expériences en Électroptique.

250. Calcul des coefficients M et L pour des circuits fermés. — Le calcul des coefficients d'induction mutuelle et de self induction est généralement très difficile. On n'en détermine la valeur *approchée* par un calcul simple que dans le cas de deux solénoïdes coaxiaux. Nous supposons le solénoïde 2 moins long et de moindre

diamètre que le solénoïde 1, et placé dans 1 de manière qu'en tous ses points le champ de 1 puisse être considéré comme uniforme.

Soient n_1 et n_2 les nombres de spires par centimètre, l_1 et l_2 les longueurs des bobines, s_1 et s_2 les aires des sections droites. Pour le courant unité, le champ créé par la première bobine en tout point intérieur suffisamment éloigné des extrémités, est $4\pi n_1$ en unités CGS. Le flux total à travers la seconde bobine est donc :

$$M = 4\pi n_1 n_2 l_2 s_2.$$

Il est clair que le raisonnement ne vaut plus rien si on échange les bobines. On trouverait : $M' = 4\pi n_1 n_2 l_1 s_1$, et l'on sait, d'après le § 68, que M a la même valeur, quel que soit le circuit considéré comme inducteur. On voit d'ailleurs immédiatement pourquoi M' est trop grand : dans M' on évalue le flux envoyé par 2 dans 1 comme si le champ produit par 2 était uniforme en tous les points de 1, ce qui est évidemment erroné.

Si les bobines sont extrêmement voisines l'une de l'autre et de même longueur, les deux valeurs deviennent identiques. On peut admettre que les coefficients de self induction sont donnés par

$$L_1 = 4\pi n_1^2 l_1 s_1, \quad L_2 = 4\pi n_2^2 l_2 s_2.$$

On met quelquefois le coefficient L sous une autre forme. Soit λ la longueur totale du fil enroulé, r le rayon du solénoïde ; on a :

$$\lambda = 2\pi r n l, \quad L = \lambda^2 : l.$$

Il faut observer que les coefficients M ne dépendent généralement pas du diamètre des conducteurs, pourvu que les circuits considérés soient suffisamment éloignés l'un de l'autre. Le flux envoyé par l'un dans l'autre est très sensiblement le même, quels que soient le diamètre des fils et la distribution que l'on suppose au courant à l'intérieur des conducteurs.

Il n'en est plus ainsi pour les coefficients L : le flux envoyé par le courant lui-même à l'intérieur de son propre contour dépend essentiellement du diamètre des conducteurs et de la loi de distribution.

On pourrait même aboutir à des expressions absurdes, si on procédait sans précaution dans les calculs. En effet, dans le voisinage d'un conducteur, la force électromagnétique est de la forme $1/r$, où r mesure la distance du point considéré à l'axe du conducteur. Elle tend donc vers l'infini quand r tend vers 0, si en même temps l'intensité totale du courant ne tend pas elle-même plus rapidement vers 0. D'où la nécessité de fixer une loi de distribution.

Malgré l'importance de la question, le cadre de cet ouvrage nous défend des calculs trop compliqués : nous énoncerons seulement quelques résultats.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur la question au tome V de cet ouvrage (Électrooptique).

CONDUCTEURS CYLINDRIQUES PARALLÈLES. — Soient a et a' les rayons de deux conducteurs cylindriques parallèles, soit d la distance de leurs axes; soit μ la perméabilité magnétique de la matière qui les constitue, μ_0 la perméabilité du milieu environnant. Si les courants ne sont pas trop rapidement variables, on peut admettre que la densité du courant est uniforme dans toute la section droite des conducteurs. Le coefficient de self induction par unité de longueur est :

$$L = 2 \left(\frac{\mu}{2} + \mu_0 \log \frac{d^2}{aa'} \right).$$

Quand il s'agit de fils de cuivre dans l'air, on pose : $\mu = \mu_0 = 1$.

Pour des fils de fer on a bien toujours $\mu_0 = 1$, mais la valeur de μ est très différente de l'unité. Elle est d'ailleurs toujours incertaine, puisqu'elle varie dans une large mesure avec l'intensité des courants. D'ailleurs tant s'en faut que l'hypothèse d'une densité uniforme soit admissible pour des variations un peu rapides.

En Télégraphie et pour les fils de fer, on applique la formule précédente avec la valeur numérique $\mu = 150$. D'où la formule pratique en logarithmes népériens :

$$L = 150 + 2 \log \frac{d^2}{aa'}.$$

Exemple numérique. — Ligne télégraphique aérienne à double fil de fer de 4 millimètres de diamètre ($2a = 2a' = 4^{\text{mm}}$) et d'écartement $d = 2^{\text{m}}$. On trouve :

$$L = 178, \text{ par unité de longueur, soit par centimètre.}$$

D'où, par kilomètre et en *henrys* (§ 234) :

$$L = 1,78 \cdot 10^7 \cdot 10^{-9} = 1,78 \cdot 10^{-2} = 0,0178 \text{ henrys.}$$

A moins que les fils ne soient très rapprochés, le premier terme de L a seul de l'importance.

CONDUCTEUR CYLINDRIQUE UNIQUE. — Le cas le plus important pour les applications ultérieures est celui des oscillations rapides. Le courant est alors absolument superficiel. Soit l la longueur du conducteur, a son rayon, on trouve comme coefficient de self induction :

$$L = 2l \left(\log \frac{2l}{a} - 1 \right).$$

251. Généralisation pour des circuits ouverts. Équations de Kirchhoff. — Généralisons les résultats précédents pour des circuits *ouverts*. Nous admettons qu'un conducteur est caractérisé par un certain paramètre L , que nous appelons encore coefficient de self induction et qui ne dépend que de sa forme, son diamètre et sa longueur. Les réactions de deux conducteurs l'un sur l'autre sont caractérisées par un paramètre M , que nous appelons coefficient d'induction mutuelle et qui ne dépend que de ces deux conducteurs.

Nous aurons dès lors des lois tout à fait analogues aux lois de Kirchhoff. Soit 1, 2, 3, ... des circuits *ouverts* en nombre quelconque, de résistances r_1, r_2, \dots et traversés par des courants i_1, i_2, \dots généralement fonctions du temps. Soit E_1, E_2, \dots la somme des forces électromotrices de nature quelconque qu'ils renferment. Nous écrirons pour le circuit 1 :

$$i_1 r_1 = E_1 + A_1 - B_1 - \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + \sum M_{1j} i_j),$$

et des équations analogues pour les autres circuits.

A et B sont les potentiels aux points terminaux des circuits.

Nous écrirons de plus : $\sum i = 0$, aux points multiples.

La forme des quantités L et M est imposée par tout ce qui précède. On a (§ 232) :

$$M_{ij} = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_i ds_j + \varphi(A_i, A_j) + \varphi(B_i, B_j) - \varphi(A_i, B_j) - \varphi(A_j, B_i),$$

φ représente une fonction de la distance des extrémités des circuits ; L_i est ce que devient M_{ij} , lorsque deux circuits i et j d'abord voisins se confondent en un seul.

Nous retrouvons donc cette fonction φ inconnue (§§ 163 et 232) ; mais elle n'est pas gênante.

Remarquons d'abord que si l'un des circuits est à peu près fermé, tout se passe approximativement comme s'il l'était rigoureusement, car on doit admettre la continuité de la fonction φ , quelle que puisse être sa forme.

Il y a mieux : nous allons démontrer que la fonction φ disparaît dans tous les cas où il s'agit de circuits immobiles, linéaires, pour lesquels on doit poser : $\sum i = 0$, aux points multiples (Brillouin).

Considérons en effet l'extrémité A_i du circuit 1 et groupons tous les termes φ qui correspondent à un point multiple P du réseau de conducteurs considéré. En ce point multiple aboutissent par exemple les trois conducteurs i, j, k . La valeur $\varphi(A_i, P)$ de la fonction φ sera donc multipliée, dans l'équation de Kirchhoff généralisée, par la somme :

$\frac{d}{dt} (i_i + i_j + i_k)$, qui est nulle par hypothèse. Le raisonnement s'applique à tous les sommets du réseau, *y compris les extrémités du circuit 1 lui-même*, la fonction φ disparaît identiquement.

Nous avons dit (§ 232) que la fonction φ n'est probablement pas déterminable, parce qu'elle entre seulement dans l'action isolée d'un courant ouvert sur un autre courant ouvert, ce que les théories modernes considèrent comme une fiction. Il n'en est pas moins nécessaire de l'explicitier ici, puisque nous raisonnons *en apparence* dans l'hypothèse opposée ; force était de démontrer que φ disparaît : ce qui revient à dire que *malgré l'apparence* nous considérons effec-

tivement les actions de circuits fermés sur des portions de circuits, auquel cas φ n'intervient pas.

252. Comparaison des coefficients de self induction. —

Montons l'appareil comme un pont de Wheatstone (fig. 80) : plaçons sur les branches 1 et 3 les résistances dont les self inductions sont à comparer.

Équilibrons pour l'état permanent; on a (Cours de Première, § 53) :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2}. \quad (1)$$

Cherchons à quelle condition le pont est équilibré pour l'état variable, c'est-à-dire à quelle condition l'aiguille du galvanomètre reste au zéro au moment où l'on ferme et où l'on ouvre le circuit AC contenant la pile.

S'il ne passe jamais rien dans le galvanomètre, les forces électromotrices sur les circuits AB et AD d'une part, BC et DC de l'autre, doivent être à chaque instant respectivement égales. D'où les conditions :

$$i_2 r_2 = i_4 r_4, \quad (2)$$

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = i_3 r_3 + L_3 \frac{di_3}{dt},$$

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = i_4. \quad (3)$$

Toutes ces équations sont satisfaites si l'on a :

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_3}{r_3}. \quad (4)$$

En effet en vertu de (1), puis de (3), l'équation (2) devient :

$$i_2 r_1 = i_4 r_3, \quad i_1 r_1 = i_3 r_3.$$

Nous pouvons équilibrer le pont pour l'état permanent d'une infinité de manières; il s'agit de trouver par tâtonnements un équilibre qui vaille aussi pour l'état variable.

D'après (4), il faut modifier après chaque tâtonnement malheureux le rapport des résistances des branches qui contiennent les self inductions non négligeables.

ÉTALON VARIABLE DE SELF INDUCTION. — A l'intérieur d'une bobine circulaire fixe pivote autour d'un axe diamétral une seconde bobine en série avec la première. L'angle des spires varie donc de $\theta = 0$ à $\theta = 180^\circ$. La self induction est maxima quand les bobines sont parallèles et parcourues dans le même sens par le courant, $\theta = 0$; elle est minima quand les bobines sont parallèles et parcourues en sens contraires, $\theta = 180^\circ$.

Une graduation indique la self induction en henrys en fonction de l'angle θ .

La comparaison de deux self inductions est alors très aisée par

l'intermédiaire de l'étalon variable. On installe sur les branches 1 et 3 l'une des self inductions et l'étalon variable ; on équilibre le pont pour l'état permanent ; puis, sans toucher aux résistances, on équilibre pour l'état variable en modifiant la self induction variable.

COMMUTATEUR. — Quand le pont n'est pas équilibré, le galvanomètre reçoit une décharge dans un sens, quand on ferme le circuit de la pile ; dans le sens contraire, quand on l'ouvre. Il est avantageux de remplacer ces impulsions par une déviation continue : la sensibilité et la commodité des mesures sont considérablement accrues.

On emploie pour ce but un commutateur tournant à contacts glissants facile à imaginer ; il ouvre et ferme alternativement le circuit de la pile ; il raccorde le galvanomètre au pont pendant les périodes variables, et le met en court circuit en dehors de ces périodes. Les connexions du galvanomètre sont alternées à chaque raccordement, de manière que les décharges passent dans le même sens.

C'est pour éviter les effets de l'induction dans la comparaison des résistances par le pont de Wheatstone : 1° que par un enroulement convenable on supprime la self des bobines des boîtes de résistance (Cours de Première, fig. 43) ; 2° qu'à l'aide d'une clef spéciale, on commence par fermer le circuit de la pile avant de fermer la diagonale sur laquelle se trouve le galvanomètre : il ne passe ainsi rien dans le galvanomètre pendant l'état variable.

Si le pont est réglé pour l'état permanent, l'aiguille reste au zéro même si les self inductions ne sont pas nulles.

253. Comparaison de deux coefficients d'induction mutuelle. — La figure 113 indique le montage de l'appareil. Soit à

comparer les inductions mutuelles des systèmes 1 et 2 formés chacun de deux bobines. Une bobine du système 1 et une bobine du système 2 sont mises en série avec une pile P. Sur le circuit des autres bobines mises en série, on installe une dérivation contenant un galvanomètre. L'expérience consiste à fermer ou à ouvrir le circuit de la pile ; le courant y varie de 0 à I ou de I à 0.

On modifie le rapport des résistances r_1 et r_2 jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre reste au repos pendant l'état variable.

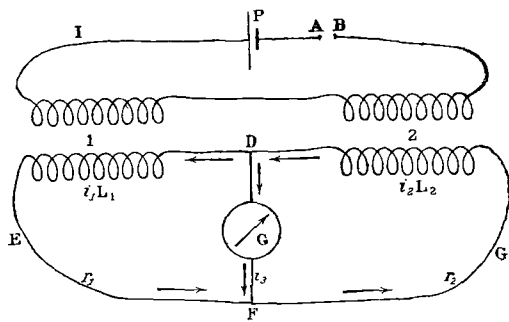


Fig. 113.

Écrivons les équations de Kirchhoff; appelons F et D les potentiels en F et en D.

$$\text{Circuit DEF : } D - F = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_1 \frac{dI}{dt}.$$

$$\text{Circuit FGD : } F - D = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_2 \frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

$$\text{Circuit DF : } D - F = r_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt}.$$

Il faut s'arranger de manière que : $\int i_3 dt = 0$.

Or pendant que le courant dans le circuit inducteur varie de 0 à I ou de I à 0, les courants i_1 , i_2 , i_3 varient de 0 à 0. On a donc :

$$\int \frac{di}{dt} dt = 0,$$

pour les circuits 1, 2 et 3. La condition à satisfaire se traduit par les équations :

$$\int (D - F) dt = r_1 \int i_1 dt + M_1 I = 0, \quad (2)$$

$$\int (F - D) dt = r_2 \int i_2 dt + M_2 I = 0.$$

D'ailleurs on a à chaque instant, en raison des sens de circulation choisis : $i_2 = i_3 + i_1$; d'où : $\int i_1 dt = \int i_2 dt$.

Divisant les équations (2) membre à membre, il reste :

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2}, \quad (3)$$

condition indépendante des coefficients de self induction dans les divers circuits.

254. Comparaison d'un coefficient de self induction et d'un coefficient d'induction mutuelle. — On veut comparer le coefficient L de self induction d'une bobine à son coefficient M d'induction mutuelle sur une autre bobine. Le montage se fait comme l'indique la figure 114. L'expérience consiste à équilibrer le pont pour l'état permanent et pour l'état variable.

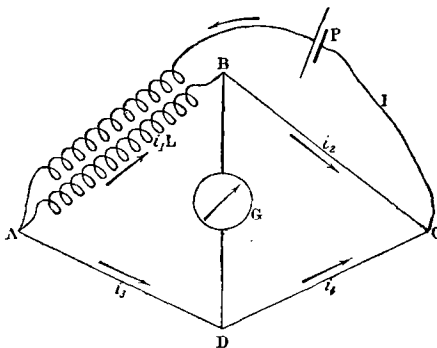


Fig. 114.

Le montage se fait comme l'indique la figure 114. L'expérience consiste à équilibrer le pont pour l'état permanent et pour l'état variable.

L'équilibre pour l'état permanent donne la condition :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2}. \quad (1)$$

Écrivons qu'il ne passe rien dans le galvanomètre *pendant l'état variable*; écrivons donc que les potentiels en B et D sont toujours égaux. On a à chaque instant :

$$\begin{aligned} i_2 r_2 &= i_4 r_4, \\ r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - M \frac{dI}{dt} &= i_3 r_3. \end{aligned} \quad (4)$$

La condition identique : $I = i_1 + i_3$, permet d'écrire :

$$r_1 i_1 + (L - M) \frac{di_1}{dt} = r_3 i_3 + M \frac{di_3}{dt}.$$

Enfin on a identiquement :

$$i_1 = i_2, \quad i_3 = i_4. \quad (3)$$

Il vient aisément :

$$\frac{L - M}{r_1} = \frac{M}{r_3}, \quad \frac{L}{M} = 1 + \frac{r_1}{r_3} = 1 + \frac{r_2}{r_4}.$$

On fera les tâtonnements comme il est dit au § 252. Nous avons introduit le coefficient M avec le signe — ; il faut en effet établir les connexions entre la pile et la bobine qui se trouve sur son circuit, de manière que l'effet de l'induction mutuelle diminue l'effet de la self induction.

Comparons au § 252 ; l'induction mutuelle produit le même effet que si la self induction du circuit 1 passait de L à L — M et celle du circuit 3 de 0 à M.

255. Comparaison d'une self induction et d'une capacité.

— Le montage est indiqué dans la figure 115 ; il s'agit toujours d'équilibrer un pont de Wheatstone pour l'état permanent et pour l'état variable.

On a la condition :

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{r_4}{r_2}; \quad (1)$$

à laquelle il faut joindre les équations :

$$\begin{aligned} i_1 r_1 &= i_3 r_3 + L \frac{di_3}{dt}, \\ i_2 r_2 &= i_4 r_4. \end{aligned} \quad (2)$$

L'équation qui exprime l'incompressibilité de l'électricité

est encore : $i_3 = i_4$,

pour le point D. Au point B, il faut tenir compte de la présence du condensateur, dont la charge q à chaque instant est le produit par la capacité de la différence de potentiel $r_2 i_2$, entre les points B et C.

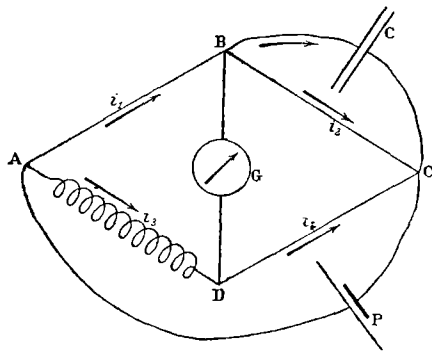


Fig. 115.

Soit i le courant de charge du condensateur, on a :

$$i_1 = i + i_2, \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d}{dt} (i_2 r_2) = Cr_2 \frac{di_2}{dt},$$

$$i_1 = i_2 + Cr_2 \frac{di_2}{dt}.$$

On vérifiera sans peine que ces équations sont satisfaites par la condition :

$$L = Cr_2 r_3 = Cr_1 r_4.$$

256. **Comparaison de deux capacités.** — L'analogie des techniques nous amène à parler ici de la comparaison de deux capacités.

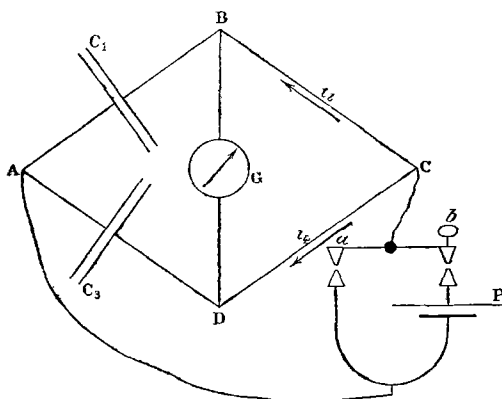


Fig. 116.

1° La figure 116 représente un premier montage. On ajuste les résistances r_2 et r_1 , de manière qu'il n'y ait aucune déviation du galvanomètre, ni à la charge, ni à la décharge obtenues à l'aide de la clef représentée en ab . Il faut donc que le potentiel B soit constamment égal au potentiel D. Les courants i_2 et i_4 satisfont à chaque instant à la condition :

$$i_2 r_2 = i_4 r_4.$$

Toute l'électricité qui passe dans les conducteurs CB et CD devant rester dans les condensateurs, et ceux-ci étant chargés par la même différence de potentiel, on a, une fois le réglage obtenu :

$$\frac{i_2}{i_4} = \frac{C_1}{C_3} = \frac{r_4}{r_2}, \quad C_1 r_2 = C_3 r_4.$$

2° La figure 117 représente un second montage. On ajuste encore les résistances de manière qu'il ne passe rien dans le galvanomètre. Les potentiels B et D doivent être égaux ainsi que les courants i_3 et i_4 . Posons : $i_3 = i_4 = i$.

Le condensateur C_1 est chargé par la différence de potentiel :

$$A - D = ir_3.$$

Le condensateur C_2 est chargé par la différence de potentiel :

$$D - C = ir_4.$$

Or ils doivent contenir la même quantité d'électricité, puisque rien ne passe dans le galvanomètre. On a donc, une fois le réglage obtenu :

$$C_1(A - D) = C_2(D - C),$$

$$C_1 r_3 = C_2 r_4.$$

3° Nous avons indiqué au § 237 la méthode de comparaison par le galvanomètre balistique.

4° Avec un commutateur convenable (§ 252), on peut employer un galvanomètre ordinaire. On décharge n fois par seconde le condensateur dans le galvanomètre. On peut utiliser un diapason comme commutateur.

5° Nous avons exposé aux §§ 191 et 192 la méthode de comparaison par perte de charge ; elle implique que les résistances soient connues.

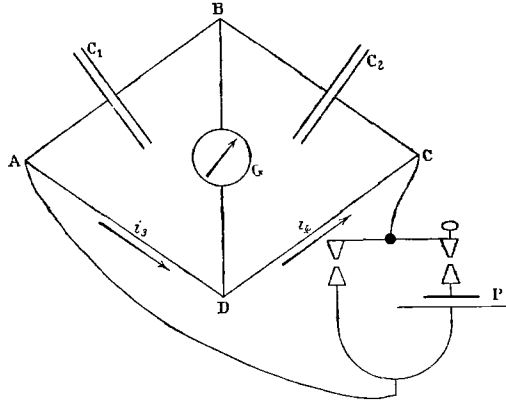


Fig. 117.

257. **Lois des courants dérivés dans le régime variable. Shunt des galvanomètres balistiques.** — Supposons qu'entre les points A et B d'un réseau le courant se bifurque dans deux branches 1 et 2, où il n'existe aucune force électromotrice. Admettons que le reste du circuit soit trop éloigné pour induire une force électromotrice sensible dans la bifurcation considérée. Les équations de Kirchhoff seront :

$$r_1 i_1 = A - B - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt},$$

$$r_2 i_2 = A - B - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt},$$

$$r_1 i_1 + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt}. \quad (1)$$

Supposons qu'au début et à la fin de l'expérience, c'est-à-dire aux temps t_0 et t_1 , les intensités soient nulles.

Multiplicons (1) par dt et intégrons entre t_0 et t_1 .

Appelons : $q_1 = \int_{t_0}^{t_1} i_1 dt$, et : $q_2 = \int_{t_0}^{t_1} i_2 dt$, ce qui passe en

totalité dans les circuits 1 et 2. Il vient :

$$r_1 q_1 + (L_1 - M) \Delta i_1 = r_2 q_2 + (L_2 - M) \Delta i_2.$$

Dans l'hypothèse où le courant est le même (nul par exemple) aux temps t_0 et t_1 , il reste : $r_1 q_1 = r_2 q_2$.

Les quantités se séparent entre les deux circuits, comme s'il n'y avait pas de phénomènes d'induction. Ce résultat est très important, puisqu'il légitime l'emploi des shunts avec le galvanomètre balistique, sous les réserves du § 240.

Car, si la répartition des quantités se fait *en somme* comme en l'absence des forces électromotrices induites, il n'en est pas de même à chaque instant.

Pour faciliter la discussion, supposons L_2 très petit; M l'est par conséquent encore davantage (§ 244).

L'équation (1) se réduit à :

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2.$$

Tant que i_1 croît, c'est-à-dire au début de l'expérience, le rapport $i_2 : i_1$ est plus grand que dans l'état permanent. Le circuit 1, où la self induction n'est pas négligeable, a donc pendant l'établissement des courants une résistance apparente plus grande. Au contraire, quand i_1 décroît, $i_2 : i_1$ a une valeur plus petite que dans l'état permanent.

On démontre aisément ces résultats avec un galvanomètre *différentiel*, c'est-à-dire dont l'aiguille ne dévie pas, quand les intensités de deux courants passant dans deux systèmes de bobine sont dans un certain rapport, généralement égal à l'unité. On intercale les deux systèmes de bobines sur les deux branches de la dérivation dont les self inductions sont rendues très différentes. On règle les résistances de manière que *dans l'état permanent* l'aiguille reste au repos. Elle est déviée *dans un sens* pendant l'établissement des courants, *en sens contraire* pendant qu'ils décroissent jusqu'à zéro.

258. Vibrateurs électromagnétiques. Sonneries. — On présente aux débutants la théorie de la sonnerie électrique d'une manière très incomplète, faute par eux de connaître les notions nécessaires. Il faut montrer que l'inertie électrique joue dans le fonctionnement de l'appareil un rôle au moins aussi important que l'inertie mécanique.

Reportons-nous à la figure 84 du Cours de Première.

Admettons que le courant atteigne instantanément sa valeur limite : l'attraction F sur l'armature est donc une fonction bien déterminée de la distance : $x = a + b \sin \omega t$, d'un point de l'armature au point correspondant des extrémités polaires. Le travail dépensé est donc : $\int_{x_0}^{x_0} F dx$, en appelant x_0 la distance pour laquelle le ressort ED cesse de toucher le vibrateur MBC. Cette intégrale est

évidemment nulle; car dans l'aller et le retour du vibreur on retrouvera, pour chaque x déterminé, deux fois la même attraction F avec des déplacements dx s'effectuant en sens contraires. L'intégrale est composée d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires. On ne fournit donc aucune énergie au vibreur, rien qui compense les frottements : son mouvement indéfini est impossible.

Il en va tout différemment si l'on tient compte de la self induction. Quand le vibreur s'éloigne de l'armature, vient toucher le ressort DE et, *malgré l'attraction de l'armature*, poursuit son chemin en vertu de la vitesse acquise, le courant n'arrive pas instantanément à sa valeur limite. Pour un x déterminé l'attraction est donc moindre, quand le vibreur s'éloigne (l'attraction produisant un travail négatif), que quand il s'approche (l'attraction produisant un travail positif). En définitive, le travail fourni au vibreur n'est pas nul, grâce à la self induction de l'électroaimant.

Une théorie complète devrait tenir compte des variations de la self pendant le déplacement de l'armature (§ 245), et de l'hystérésis.

CHAPITRE VII

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURANTS ALTERNATIFS

259. Définitions et notations. — Nous étudierons principalement dans ce Chapitre les propriétés des courants alternatifs *sinusoïdaux*. Tout courant périodique peut être considéré comme la superposition de tels courants. Cela ne veut pas dire qu'un courant périodique quelconque produise, nécessairement et dans tous les cas, un effet égal à la somme des effets dus séparément aux courants sinusoïdaux en lesquels il peut être décomposé. L'équivalence exige que les équations où interviennent les courants, soient linéaires. Cette condition est souvent réalisée, ce qui légitime l'importance attachée aux courants sinusoïdaux.

On appelle *force électromotrice appliquée* e_a à un circuit fermé ou à une portion de circuit, la résultante de toutes les forces électromotrices imposées de l'extérieur à ce circuit fermé ou à cette portion de circuit. Nous poserons :

$$e_a = E_a \sin(\omega t - \varphi).$$

C'est généralement la donnée du problème, *au moins quand il s'agit d'un circuit fermé* (§ 267).

Par exemple, des bobines 1, 2, 3, ... sont mises en série et forment un circuit fermé. Elles tournent avec la *même* vitesse *constante* dans des champs H_1, H_2, H_3, \dots . Il résulte de là des forces électromotrices sinusoïdales e_1, e_2, e_3, \dots , décalées les unes par rapport aux autres (§ 267). La force électromotrice e_a sinusoïdale résultante des forces e_1, e_2, e_3, \dots (voir § 260) est par définition la force électromotrice appliquée.

Coupons le circuit précédent ; soient A et B les extrémités du fil. Branchons-les sur un secteur alternatif, de manière à imposer entre A et B la force électromotrice :

$$e = E \sin(\omega t - \beta).$$

Nous appelons maintenant force électromotrice appliquée au circuit ouvert AB, la résultante des forces électromotrices : e et e_1, e_2, e_3, \dots

A ces forces électromotrices imposées de l'extérieur s'ajoutent les forces électromotrices qui proviennent de la réaction du fil.

On appelle *force électromotrice de self induction ou de capacité* et on désigne par les symboles :

$$e_s = E_s \sin(\omega t - \gamma), \quad e_c = E_c \sin(\omega t - \psi),$$

la somme des forces électromotrices aux divers points du circuit qui résultent des phénomènes de self induction ou de l'existence de capacités.

On appelle enfin *force électromotrice effective* la résultante de toutes les forces électromotrices ; elle est mesurée par le produit *ri*. On a :

$$ri = e_a + e_s + e_c.$$

L désigne le coefficient de self ; C la capacité ; $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la période ; la fréquence $1 : T$ est le nombre de périodes à la seconde.

La *réactance* est la quantité : $k = L\omega - \frac{1}{C\omega}$.

L'*impédance ou résistance apparente* est la quantité : $\check{Y} = \sqrt{r^2 + k^2}$.

260. Formules usuelles. Règle de Fresnel. — Dans l'étude des courants alternatifs on utilise fréquemment les résultats suivants qu'il sera facile de vérifier.

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t + \alpha) dt = \frac{T}{\pi} \cos \alpha. \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{T}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cos \omega t dt = 0. \quad \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{T}{4}.$$

$$- \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \cos(\omega t + \alpha) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t + \alpha) \cos \omega t dt = \frac{T}{4} \sin \alpha.$$

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \sin(\omega t + \alpha) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \omega t \cos(\omega t + \alpha) dt = \frac{T}{4} \cos \alpha.$$

On remarquera que toutes ces intégrales, la première exceptée, ont la même valeur entre les limites 0 et $T : 2$ et entre les limites $T : 2$ et T .

RÈGLE DE FRESNEL. — On a souvent à additionner des mouvements vibratoires de même période, présentant des différences de phases. Soit par exemple à faire la somme des quantités :

$$a = A \sin(\omega t - \alpha), \quad b = B \sin(\omega t - \beta), \quad c = C \sin(\omega t - \gamma), \dots$$

On doit avoir identiquement :

$$A \sin(\omega t - \alpha) + B \sin(\omega t - \beta) + \dots = R \sin(\omega t - \rho).$$

On développe et l'on écrit que les coefficients de $\sin \omega t$ et de $\cos \omega t$ sont égaux; d'où les équations de condition :

$$A \sin \alpha + B \sin \beta + \dots = R \sin \rho,$$

$$A \cos \alpha + B \cos \beta + \dots = R \cos \rho.$$

Élevons au carré ces équations et ajoutons-les :

$$R^2 = \sum A^2 + 2 \sum AB \cos (\alpha - \beta).$$

Divisons-les membre à membre :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sum A \sin \alpha}{\sum A \cos \alpha}.$$

Ces équations fournissent les valeurs de R et de ρ .

On peut donner à ce calcul une interprétation géométrique connue sous le nom de *règle de Fresnel*. A partir d'une demi-droite de référence quelconque OX , décrivons dans le sens de la flèche f (arbitrairement choisi) des angles égaux à α, β, \dots supposés positifs. S'ils sont négatifs, on les décrira en sens inverse de la flèche f .

Portons dans la direction $(O, +\alpha)$ définie par l'angle α , une longueur proportionnelle à A , si A est positif; portons-la en sens inverse, dans la direction $(O, -\alpha)$, si A est négatif.

Nous définirons ainsi des vecteurs OA, OB, \dots qui représentent en grandeur et en signe les groupes de quantités $A, \alpha; B, \beta; \dots$

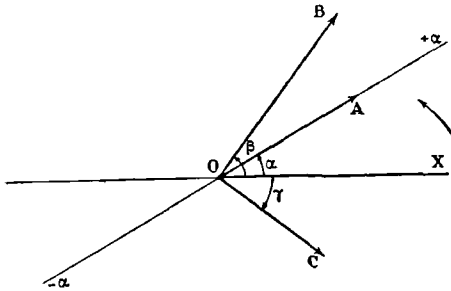


Fig. 118.

Composons ces vecteurs; le vecteur résultant détermine les quantités R, ρ .

Cela résulte immédiatement des équations de condition que les quantités R et ρ doivent satisfaire.

Nous supposons dans ce qui précède que les mouvements sont donnés par des

sinus. Admettons que l'un d'eux se présente sous la forme :

$$A \cos (\omega t - \alpha).$$

Nous avons identiquement :

$$\cos (\omega t - \alpha) = \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\omega t - \alpha) \right] = -\sin \left(\omega t - \alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

On construira donc le vecteur en cosinus comme un vecteur en sinus, puis on le fera tourner de $\pi : 2$ dans le sens des angles négatifs; opération qui revient à le faire tourner de $\pi : 2$ dans le sens positif et à le retourner bout pour bout, conformément à la formule.

Enfin soit un mouvement :

$$a = A \sin(\omega t - \alpha);$$

représentons la vitesse :

$$\frac{da}{dt} = A\omega \cos(\omega t - \alpha).$$

Il résulte immédiatement de la règle précédente que la quantité : $\frac{da}{dt}$, est représentée par le vecteur figuratif de a , multiplié par ω et tourné de $\pi : 2$ dans le sens des angles négatifs.

Voici un corollaire de la Règle de Fresnel fréquemment utilisé en Électricité et Optique. Des vecteurs tous égaux, symétriquement disposés autour du point O, ont une résultante nulle. Il résulte de là que les deux sommes suivantes sont nulles.

$$\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

$$\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

261. Valeurs efficaces des quantités. — Voici comment s'introduisent les quantités *efficaces*.

On impose une différence de potentiel alternative e aux deux extrémités d'un circuit de résistance r , et dans lequel passe un courant i . Cherchons la puissance moyenne absorbée W .

Nous admettons comme applicables aux courants variables les formules démontrées pour les courants constants.

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt.$$

Posons : $e = E \sin \omega t, \quad i = I \sin(\omega t - \varphi);$

il vient : $W = \frac{1}{2} EI \cos \varphi.$

On appelle *valeur efficace* d'une quantité la $\sqrt{\text{du carré moyen}}$ de cette quantité. On a :

$$E_{e,f} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} = \frac{E}{\sqrt{2}}, \quad i_{e,f} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I}{\sqrt{2}};$$

$$W = E_{e,f} i_{e,f} \cos \varphi,$$

formule très importante qui donne l'énergie dépensée en fonction de la force électromotrice appliquée efficace, de l'intensité efficace et de la différence de phase φ entre l'intensité et la force électromotrice appliquée; cette différence s'appelle *décalage*.

On admet que la chaleur dégagée dans un circuit de résistance r est à chaque instant $ri^2 dt$, que le courant i soit constant ou variable.

Un courant alternatif sinusoïdal d'intensité maxima I dégage donc la même quantité de chaleur qu'un courant continu d'intensité :

$$i_{\text{eff}} = 0,71 \cdot I.$$

Si par exemple une lampe à incandescence est faite pour un courant continu de $0^{\text{a}},6$, elle donnera la même intensité lumineuse pour un courant alternatif dont l'intensité passe d'une valeur nulle à :

$$\pm 0^{\text{a}},6 \times 1,41 = \pm 0^{\text{a}},85.$$

De même si elle est construite pour 120 volts continus, on doit appliquer à ses bornes une force électromotrice alternative efficace de 120 volts, c'est-à-dire une force électromotrice variant de 0 à ± 169 volts.

262. Force électromotrice sinusoïdale appliquée à un circuit présentant de la self induction. — Posons :

$$e_a = E_a \sin \omega t, \quad i = I \sin (\omega t - \varphi).$$

L'équation différentielle *linéaire* à satisfaire est :

$$e_a = ri + L \frac{di}{dt}.$$

La solution algébrique est immédiate. Résolvons le problème géométriquement pour familiariser le lecteur avec les procédés graphiques. Les quantités r et L étant positives, nous avons à composer un système de deux vecteurs : $A = rI$, $B = L\omega I$, rectangulaires entre eux et disposés comme l'indique la figure 119. Le vecteur A doit faire un angle φ (inconnu) avec E_a ; les vecteurs A et B admettent comme résultante ce vecteur E_a .

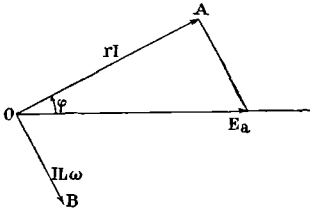


Fig. 119.

Il est clair que le système A, B , est disposé par rapport à E_a comme l'indique la figure. On a :

$$r^2 I^2 + I^2 L^2 \omega^2 = E_a^2, \quad I = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} = \frac{E_a}{\mathfrak{J}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{IL\omega}{rI} = \frac{L\omega}{r} = \frac{k}{r}.$$

L'angle φ est certainement compris entre 0 et $\pi : 2$; le courant induit est *en retard* sur la force électromotrice appliquée : ses zéros et ses maximums se produisent un certain temps, inférieur à un quart de période, après ceux de cette force électromotrice.

La quantité $k = L\omega$ joue le rôle d'une sorte de résistance ; d'où le nom de *réactance* qu'on lui a donné. L'intensité maxima I se déduit de la force électromotrice maxima E_a à l'aide d'une formule analogue

à celle qui exprime la loi d'Ohm ; l'impédance : $\mathcal{Z} = \sqrt{r^2 + k^2}$, y remplace la résistance.

La réactance et l'impédance sont fonction de la fréquence ou de la période.

Nous récrivons les formules très souvent employées :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{k}{r}, & \sin \varphi &= \frac{k}{\mathcal{Z}}, & \cos \varphi &= \frac{r}{\mathcal{Z}}. \\ E_a \sin \varphi &= Ik, & E_a \cos \varphi &= Ir, & I &= \frac{E_a}{\mathcal{Z}}. \end{aligned}$$

263. Répulsion de deux bobines, l'une 2 fermée, l'autre 1 parcourue par un courant alternatif. —

Considérons comme positifs dans les deux bobines les courants qui passent dans le sens des flèches F . Soit M le coefficient d'induction mutuelle : c'est par définition le flux envoyé positivement (sens de la flèche f) dans la bobine 2, quand le courant unité traverse la bobine 1, ou dans la bobine 1 quand le courant unité traverse la bobine 2.

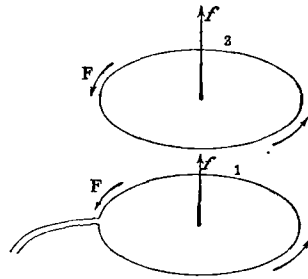


Fig. 120.

La force électromotrice appliquée à la bobine 2 est égale à la variation du flux envoyé par la bobine 1 ; en grandeur et en signe, elle est représentée par :

$$e_a = -M \frac{di_1}{dt}.$$



En effet, quand i_1 est positif et croît, il naît une force électromotrice qui produirait un courant de sens contraire dans la bobine 2 : $e_a < 0$. Comme M est positif, il faut bien le signe — dans la formule.

La force électromagnétique pour un déplacement dx est égale à : $F = \frac{\partial M}{\partial x} i_1 i_2$. Cette formule est conforme à la règle générale (§ 152) ; montrons que le signe est convenable.

Soit des courants de même signe : il y a attraction.

Supposons que x mesure la distance des circuits.

La force F attractive doit être négative, puisque, sur la droite le long de laquelle les distances sont comptées, elle est dirigée dans le sens des x décroissants. Il revient au même de dire que $F dx$, qui représente le travail des actions électromagnétiques, doit être positif pour un rapprochement, c'est-à-dire pour une variation dx négative.

Mais dans un rapprochement, M qui est positif, croît : la formule est donc bien conforme aux faits.

Soit : $i_1 = I_1 \sin \omega t$; on a : $e_a = -MI_1 \omega \cos \omega t$.

D'après le paragraphe précédent, i_2 est de la forme :

$$i_2 = -I_2 \cos(\omega t - \varphi),$$

où I_2 est une constante positive et φ un angle compris entre 0 et $\pi : 2$. Donc F est de la forme :

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x} I_1 I_2 \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi).$$

La force moyenne a pour expression :

$$\frac{1}{T} \int_0^T F dt = -\frac{\partial M}{\partial x} \frac{I_1 I_2}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = -\frac{\partial M}{\partial x} \frac{I_1 I_2}{2} \sin \varphi.$$

x représentant la distance entre les circuits, $\frac{\partial M}{\partial x} < 0$; donc la force moyenne est positive, puisque $\sin \varphi > 0$: elle est dirigée vers les x croissants; c'est une *répulsion*.

Cette répulsion est facile à mettre en évidence, en introduisant un faisceau de fils de fer dans l'axe des deux bobines; on augmente ainsi la valeur du coefficient M , sans modifier l'allure du phénomène.

L'expérience réussit très bien en disposant verticalement un faisceau de fils de fer entouré sur moitié de sa hauteur d'un enroulement servant de bobine inductrice 1. Des anneaux d'aluminium jouent le rôle de bobine induite 2; ils sont maintenus *soulevés* quand on envoie un courant alternatif dans l'enroulement.

On peut démontrer l'existence d'une répulsion sans aucun calcul. Soit $O_1 A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ la sinusoïde qui représente le courant inducteur i_1 en fonction du temps. Le courant induit i_2 serait représenté (à un facteur constant près) par la sinusoïde pointillée $A_2 B_2 C_2 \dots$, *s'il n'y avait pas décalage entre la force électromotrice appliquée et le courant induit*. En effet, quand le courant i_1 croît à partir de 0, sa variation et par conséquent la variation du flux envoyé dans la bobine induite sont maxima : le courant i_2 est maximum et dirigé en sens inverse de i_1 . Quand i_1 est maximum, i_2 est nul. Quand i_1 décroît, i_2 croît; et ainsi de suite.

Comme le décalage est une *retard* compris entre 0 et $\pi : 2$, le courant induit est représenté, à un facteur constant près, par la sinusoïde pleine $A_2 B_2 C_2 \dots$ déplacée de $B_2 B_2$ vers les temps positifs. Ombrons verticalement les aires des deux sinusoïdes pour lesquelles les courants i_1 et i_2 sont de sens contraires (et par conséquent se repoussent) : ombrons horizontalement les aires pour lesquelles les courants sont de même sens (et par conséquent s'attirent).

Il est évident que les répulsions l'emportent sur les attractions.

Si le décalage était une *avance*, le résultat serait inverse.

RÈGLE GÉNÉRALE. — *Les déplacements tendent toujours à se faire de manière que les courants induits soient minimums.* Cette règle n'est au fond qu'une conséquence du principe que *les changements de position tendent à augmenter le flux positif à l'intérieur d'un circuit.* Effectivement, le flux qui résulte des courants d'induction est en somme négatif : donc il tend vers un minimum.

Une bobine fermée pouvant tourner à l'intérieur d'une bobine fixe parcourue par un courant alternatif, tend à se mettre en croix avec cette bobine. L'axe de rotation est, par exemple, parallèle aux spires des deux bobines. On a construit sur ce principe des indicateurs de courant alternatif.

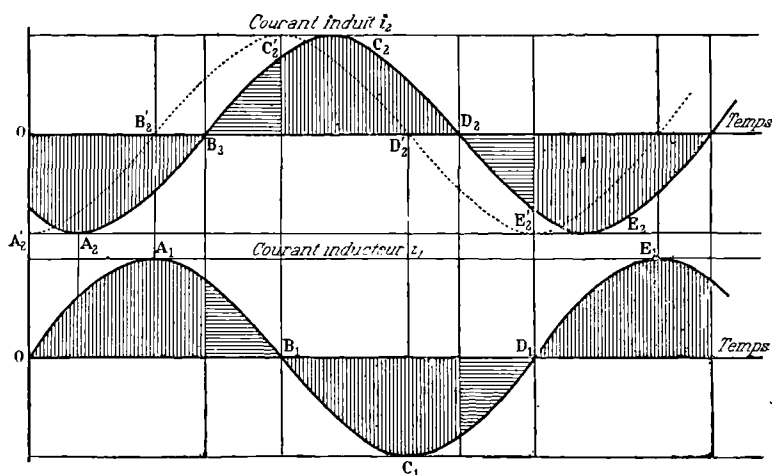


Fig. 121.

Un disque métallique posé à plat au-dessus du faisceau de fils de fer aimanté par un courant alternatif est non seulement repoussé, mais encore rejeté latéralement, dès qu'il cesse d'être parfaitement centré. Il tend à se placer dans l'équateur de l'électro.

Lorsque deux disques métalliques sont mis simultanément dans le champ d'un électro-aimant à courant alternatif, ils jouent le rôle d'écran l'un par rapport à l'autre : donc ils s'attirent mutuellement, de manière à augmenter ce rôle, et sont tous deux repoussés par l'électro.

Un disque monté sur pivot et placé *dissymétriquement* par rapport à un électro à courant alternatif, est mis en rotation continue. Il peut être placé *symétriquement*, pourvu que la dissymétrie soit obtenue par un disque métallique servant d'écran et interposé *dissymétriquement*.

Toutes ces expériences, et beaucoup d'autres reposant sur le même principe, sont dues à Elihu Thomson.

264. **Bobine tournant dans un champ uniforme H. Champ résultant du champ H et du champ du courant induit.** — Soit

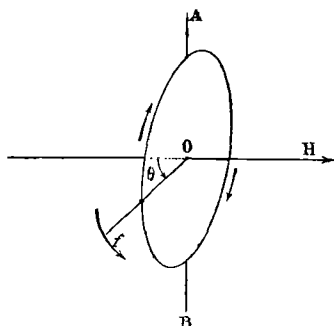


Fig. 122.

une bobine de surface totale S , tournant d'un mouvement uniforme et dans le sens de la flèche f , autour d'un axe AB parallèle à ses spires et normal au champ H . La période, c'est-à-dire la durée d'un tour complet, est :

$$T = 2\pi : \omega ;$$

on a donc : $\theta = \omega t$. Le flux à chaque instant est : $SH \sin \theta$; la force électromotrice appliquée est :

$$SH \frac{d \sin \theta}{dt} = SH \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = SH \omega \cos \theta.$$

Elle est maxima pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Le courant induit est alternatif sinusoïdal. Son maximum est en retard sur le maximum de la force électromotrice de l'angle :

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{k}{r} = \text{arctg } \frac{L\omega}{r}.$$

Le décalage a ici une interprétation géométrique évidente (fig. 123) : le cadre est parcouru par l'intensité maxima, non pas quand ses spires sont parallèles au champ et que la force électromotrice appliquée est maxima, mais quand il a dépassé ces positions de l'angle φ , angle que nous savons compris entre 0 et $\pi : 2$.

La loi de Lenz donne immédiatement le sens du champ créé par le courant induit. Il doit s'opposer au mouvement. Le feuillet équivalent au courant doit avoir sa face positive du côté par où arrivent les lignes de force du champ H , quand le flux augmente.

Représentons le plan horizontal passant par le point O ; NOM est

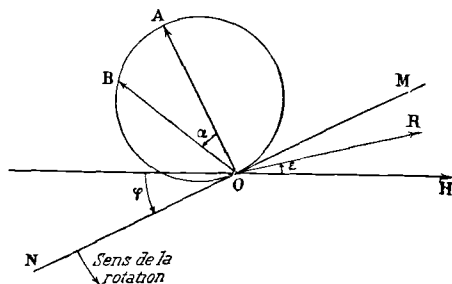


Fig. 123.

la direction du cadre quand le courant est maximum ; elle fait l'angle φ avec le champ.

Le vecteur OA , normal à MN , est en grandeur et direction le champ créé par ce courant. Quand, à partir de cette position, le cadre tourne de l'angle α , le champ, toujours normal au cadre, vient en OB . Il est sinusoïdal en fonction du temps et par conséquent de l'angle θ ; il est

représenté en grandeur par le vecteur OB qui part du point O et aboutit à la circonférence menée sur OA comme diamètre.

Quand le cadre a tourné de π à partir de NOM, le courant y circule en sens contraire ; mais comme le cadre a tourné de π dans l'espace, le champ a encore la direction OA.

En définitive, il se superpose à chaque instant au champ uniforme H un champ variable représenté par un vecteur qui tourne d'un mouvement uniforme. L'origine de ce vecteur est au point O ; son extrémité décrit la circonférence menée sur OA comme diamètre. Il fait deux fois le parcours angulaire (OM, OA, ON), pendant que le cadre fait un tour.

Cherchons le champ moyen équivalent à ce champ variable ; il est évidemment dirigé suivant OA. Pendant le temps dt , l'angle de OB avec OA étant α , le champ est : $OB = \overline{OA} \cos \alpha$; sa composante suivant OA est $\overline{OA} \cos^2 \alpha$. Le champ moyen est donc :

$$\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \overline{OA} \cos^2 \alpha dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \overline{OA} \cos^2 \omega t dt = \frac{\overline{OA}}{2}.$$

Soit I l'intensité maxima du courant induit, G la constante du cadre, c'est-à-dire le champ qu'il crée en son centre pour le courant unité : $OA = GI$. Le champ moyen dû au courant d'induction est dirigé suivant une direction faisant avec le champ H un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ en sens inverse du mouvement ; sa valeur moyenne est : $\frac{GI}{2}$.

La valeur de I se tire immédiatement des résultats du § 262. On a :

$$I = \frac{E_a}{\mathcal{J}} = \frac{SH\omega}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}},$$

où r est la résistance du circuit de la bobine, L son coefficient de self induction.

265. Application à la détermination d'une résistance en valeur absolue. — Imaginons une petite aiguille aimantée suspendue au centre du cadre. Quand le cadre est immobile, elle prend la direction OH ; quand le cadre tourne, elle tourne d'un petit angle ε , parce que le champ résulte alors du champ H et du champ :

$$H' = \frac{GI}{2} = \frac{GSH\omega}{2\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} = \frac{GSH\omega}{2\mathcal{J}},$$

que nous venons de calculer. Évaluons l'angle ε .

Soit R le champ résultant :

$$R \cos \varepsilon = H - H' \sin \varphi, \quad R \sin \varepsilon = H' \cos \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{H' \cos \varphi}{H - H' \sin \varphi}.$$

D'ailleurs :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{k}{\beta}, \quad \cos \varphi = \frac{r}{\beta};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{GS\omega r}{2\beta^2 - GS\omega k}.$$

On remarquera que ε est indépendant de H ; ce qui est évident *a priori*, puisque la direction OA est indépendante de H et que H' est proportionnel à H . Le coefficient de self induction n'intervient que comme correction ¹; si on le suppose nul ou négligeable, on a :

$$\varphi = 0, \quad k = 0, \quad \beta = r, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{GS\omega}{2r}.$$

La connaissance des quantités G , S , L , ne dépend que de mesures de longueurs; on peut les faire en valeur absolue; ω implique une mesure de temps; ε est une mesure d'angle et se ramène à la mesure de deux longueurs en unités quelconques. Il ne reste donc dans la formule que la résistance qu'on ne connaît pas *a priori* en valeur absolue. L'expérience permet donc de la déterminer. C'est une des méthodes fondamentales de mesure de la résistance en valeur absolue.

Voici quelques détails sur les expériences ².

La bobine est divisée en deux enroulements parallèles, de 30 centimètres de diamètre moyen, et portant ensemble 300 tours de fil. La formule du § 148 donne pour valeur approchée de G :

$$G = 2\pi \times 300 : 15 = 1,25 \cdot 10^2,$$

$$S = \pi \times 300 \times 225 = 2,12 \cdot 10^5.$$

Elle tourne avec une vitesse de l'ordre de 5 tours à la seconde. D'où la valeur approchée de ω :

$$\omega = 2\pi : T = 30.$$

La partie supérieure de l'axe vertical est creuse et donne passage à un tube fixe de laiton terminé par une boîte de laiton dont le centre est au centre de la bobine. L'aimant oscille dans cette boîte qui le protège des courants d'air. Il est supporté par une tige rigide de laiton³, à l'extrémité supérieure de laquelle est fixé le miroir (au-dessus des bobines), et qui est elle-même supportée par un fil de cocon. Le champ H est le champ terrestre.

¹ Nous négligeons dans le calcul le champ produit par l'aimant lui-même; il est fixe quand l'aimant a pris sa position d'équilibre, et modifie d'une fraction très petite le champ H en grandeur et direction.

² Nous arrondirons les nombres. Il importe au lecteur de savoir comment une méthode peut réussir, et non pas de connaître les dimensions *exactes* des appareils employés. S'il veut recommencer les expériences, il consultera les mémoires. Il est regrettable que les Traités classiques relatant les expériences historiques indiquent souvent ces détails *sans intérêt pédagogique*, au lieu de calculer des ordres de grandeur.

Admettons pour la bobine une résistance de 5 ohms, soit $5 \cdot 10^9$ CGS; la déviation est :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1,25 \times 2,12 \times 3 \times 10^8}{2 \times 5 \times 10^9} = 0,08, \quad \varepsilon = 4^{\circ}35',$$

soit environ un déplacement du spot de 320 millimètres sur une échelle à deux mètres.

En fait, avec des dimensions analogues et une vitesse plus grande, on atteignait près de 7° de déviation.

Une fois la résistance de la bobine connue en valeur absolue, on réalise, au pont de Wheatstone et par comparaison avec la bobine servant d'étalon, une résistance valant précisément un ohm.

L'ohm ainsi trouvé est la résistance d'une colonne de mercure pur à 0° de 1 millimètre carré de section et de $106^{\circ},25$ environ de longueur. Comme ce nombre est toujours revisable, on a préféré définir l'ohm légal (conférence de 1884) comme la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 106 centimètres de longueur. On appelle ohm international (congrès de Chicago) la résistance à 0° d'une masse de mercure de $14^{\text{gr}},452$, mise sous forme d'un cylindre de section transversale constante et d'une longueur de $106^{\circ},3$.

266. Force électromotrice sinusoïdale appliquée à un circuit ayant de la self induction et de la capacité. — Tandis qu'un condensateur, interposé sur un circuit, empêche l'existence d'un courant permanent, il n'empêche pas l'existence d'un courant alternatif. Ses armatures, toujours chargées de quantités égales et de signes contraires, se chargent et se déchargent alternativement.

Cherchons la manière dont il réagit sur la force électromotrice appliquée (fig. 124).



Fig. 124.

La force électromotrice e_a sinusoïdale est maintenue entre les extrémités A et B d'un circuit; elle représente, si l'on veut, la force électromotrice totale appliquée à ce circuit. On a les conditions :

$$r_1 i = V_A - V_a + e_{1a}, \quad r_2 i = V_b - V_B + e_{2b}.$$

C'est le même courant de part et d'autre du condensateur, puisque les armatures sont toujours chargées de quantités égales et de signes contraires. Additionnons les équations :

$$r i = (V_A - V_B) - (V_a - V_b) + e_s.$$

Soit C la capacité du condensateur, M sa charge; on a :

$V_a - V_b = M : C$, avec la condition : $dM = idt$. Enfin par définition : $V_A - V_B = e_a$. L'équation devient :

$$ri = e_a + e_s - \frac{M}{C} = e_a - L \frac{di}{dt} - \frac{M}{C}.$$

Or : $i = I \sin(\omega t - \varphi)$.

On tire de là :

$$M = -\frac{I}{\omega} \cos(\omega t - \varphi), \quad \frac{di}{dt} = I\omega \cos(\omega t - \varphi).$$

D'où identiquement : $M = -\frac{1}{\omega^2} \frac{di}{dt}$.

On peut donc écrire l'équation sous la forme :

$$e_a = ri + \left(L - \frac{1}{C\omega^2} \right) \frac{di}{dt}.$$

Elle devient identique à l'équation précédemment étudiée (§ 262), si l'on pose :

$$k = L\omega - \frac{1}{C\omega}.$$

Pour résoudre le problème géométriquement, il faut que le vecteur rI et le vecteur $I k$ porté à 90° du premier dans le sens des angles négatifs, aient pour résultante le vecteur E_a .

Autrement dit, la résultante des trois vecteurs rI , $I L \omega$ porté à 90° de rI dans le sens des angles négatifs, $\frac{I}{C\omega}$ porté à 90° en sens inverse, doit être le vecteur E_a .

L'angle : $\varphi = \text{arc tg } \frac{k}{r}$, n'est plus nécessairement compris entre

0 et $\pi : 2$; il peut varier de $-\pi : 2$ à $\pi : 2$; suivant le signe de k .

Si $k > 0$, si la self l'emporte,

$$0 < \varphi < \pi : 2;$$

le courant est en *retard* sur la force électromotrice appliquée.

Si $k < 0$, si la capacité l'emporte,

$$0 > \varphi > -\pi : 2;$$

le courant est en *avance* sur la force électromotrice appliquée.

Enfin si $k = 0$, les vecteurs de la self et de la capacité s'équilibrent; on a simplement : $e_a = ri$.

Réunir directement les armatures du condensateur en supprimant le diélectrique, revient à rapprocher les armatures jusqu'au contact

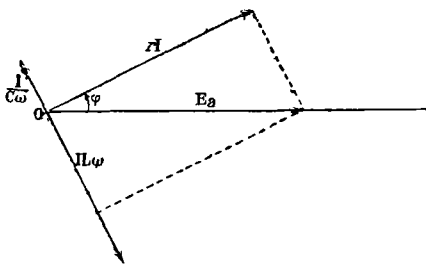


Fig. 125.

et à poser $C = \infty$. C'est bien conforme aux formules, puisqu'alors le terme $1 : C\omega$ disparaît. C'est aussi conforme à la définition de la capacité ; quand il n'y a pas de condensateur en un point d'un circuit, le passage en ce point d'une quantité quelconque d'électricité ne crée aucune force électromotrice ; $V_a - V_b$ reste nul, quelle que soit la charge M ; d'où la condition $C = \infty$.

Couper le conducteur en un point, c'est introduire une capacité infiniment petite :

$$C = 0 ; 1 : C\omega = \infty, I = 0.$$

Dans la pratique, il n'est pas facile de donner à C de grandes valeurs ; pour avoir $k = 0$, il faut prendre L assez grand. La compensation entre la capacité et la self dépend de ω , c'est-à-dire de la fréquence : réalisée pour une fréquence, elle ne l'est pas pour une autre.

Voici une expérience intéressante. On prend comme bobine de self induction un enroulement dans lequel on peut enfoncer plus ou moins un faisceau de fils de fer, de manière à modifier la réactance. Une lampe à incandescence est mise sur le circuit. Si la capacité (formée de feuilles minces d'étain entre des feuilles de papier paraffiné) est convenablement choisie, *l'éclat de la lampe passe par un maximum quand on enfonce progressivement le faisceau de fils.*

267. Remarque sur les forces électromotrices le long d'un circuit. — Nous admettons que le courant est le même :

$$i = I \sin \omega t,$$

tout le long d'un circuit ABCDE.

Il résulte de cette hypothèse des conséquences qu'il est indispensable de mettre en évidence. Nous parviendrons ainsi à préciser ce qu'on doit entendre par forces électromotrices appliquées.

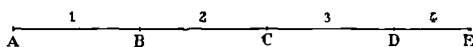


Fig. 126.

Les forces électromotrices appliquées respectivement le long des segments AB, BC, ... de résistances r_1, r_2, \dots et de réactances k_1, k_2, \dots , sont :

$$e_1 = E_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad e_2 = E_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \dots$$

La force électromotrice totale entre A et E est :

$$e = E \sin(\omega t + \varphi).$$

D'après les propositions précédemment démontrées, nous devons avoir, en considérant isolément les divers segments :

$$I = \frac{E_1}{J_1} = \frac{E_2}{J_2} = \dots ; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{k_2}{r_2}, \quad \dots \quad (4)$$

La considération du fil entier donne :

$$e = e_1 + e_2 + \dots = E \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

$$I = \frac{E}{\mathfrak{J}} = \frac{E}{\sqrt{(\sum r_1)^2 + (\sum k_1)^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sum k_1}{\sum r_1}. \quad (3)$$

Montrons que ces relations ne sont pas contradictoires. L'équation (2) donne les conditions :

$$E \sin \varphi = \sum E_1 \sin \varphi_1, \quad E \cos \varphi = \sum E_1 \cos \varphi_1,$$

$$E^2 = (\sum E_1 \sin \varphi_1)^2 + (\sum E_1 \cos \varphi_1)^2, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sum E_1 \sin \varphi_1}{\sum E_1 \cos \varphi_1}.$$

Remplaçant $\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \dots, \cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, E_1, E_2, \dots$ par leurs valeurs tirées des équations (1), on retrouve les équations (3).

On a en effet (§ 262) :

$$E_1 \sin \varphi_1 = Ik_1, \quad E_1 \cos \varphi_1 = Ir_1.$$

Ceci posé, il est évident que *par force électromotrice appliquée* sur un circuit ouvert tel que BC, il ne faut pas entendre *seulement* les forces électromotrices d'induction imposées de l'extérieur à cette portion de circuit.

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer, disposées en séries sur le même circuit, des bobines analogues à celles du § 264, tournant dans un champ uniforme avec la même vitesse angulaire, mais décalées les unes par rapport aux autres. *Nous sommes libres d'imposer des décalages arbitraires*, tandis que, d'après les équations (1), les forces électromotrices appliquées ont par rapport au courant, et par conséquent les unes par rapport aux autres, des décalages déterminés par les valeurs des paramètres $k_1, k_2, \dots, r_1, r_2, \dots$ caractérisant les segments du circuit.

Il est bien évident d'ailleurs que les diverses portions du circuit réagissent les unes sur les autres.

Pour résoudre la difficulté, il suffit d'appliquer les équations générales de Kirchoff (§ 251), et de faire intervenir les potentiels électrostatiques aux extrémités des segments considérés. La force électromotrice appliquée au segment BC est égale à la somme de la force électromotrice totale d'induction imposée de l'extérieur, *et de la différence de potentiel électrostatique, différence alternative B — C, provenant de la réaction du reste du circuit*. Ces différences disparaissent quand on applique les équations à un circuit fermé : c'est pourquoi nous avons pu dire, au § 259, que *la force électromotrice appliquée est généralement une des données du problème, au moins pour les circuits fermés*.

268. **Conducteur équivalent à une dérivation.** — Un conducteur équivalent à une dérivation à travers les branches de laquelle passent des courants :

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t - \varphi_1), \quad i_2 = I_2 \sin(\omega t - \varphi_2), \dots,$$

est celui qui transmet le même courant total : $i = \sum i_n$, sous la même différence de potentiel appliquée aux points entre lesquels existe la dérivation : $e = E \sin \omega t$.

Cherchons ses caractéristiques r et k . On a identiquement :

$$i = I \sin(\omega t - \varphi) = \sum I_1 \sin(\omega t - \varphi_1).$$

$$I \sin \varphi = \sum I_1 \sin \varphi_1, \quad I \cos \varphi = \sum I_1 \cos \varphi_1.$$

Or on a :

$$I_1 = \frac{E}{\mathfrak{J}_1}; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{k_1}{\mathfrak{J}_1}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{r_1}{\mathfrak{J}_1};$$

$$I = \frac{E}{\mathfrak{J}}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{k}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{k}{\mathfrak{J}}, \quad \cos \varphi = \frac{r}{\mathfrak{J}}.$$

D'où les équations qui résolvent le problème :

$$\frac{k}{\mathfrak{J}^2} = \sum \frac{k_1}{\mathfrak{J}_1^2} = B, \quad \frac{r}{\mathfrak{J}^2} = \sum \frac{r_1}{\mathfrak{J}_1^2} = A.$$

$$Ar + Bk = 1, \quad Br - Ak = 0,$$

$$r = \frac{A}{A^2 + B^2}, \quad k = \frac{B}{A^2 + B^2}, \quad \mathfrak{J}^2 = \frac{1}{A^2 + B^2}.$$

En particulier, l'impédance équivalente à une dérivation formée de deux circuits est :

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}}.$$

On peut rendre \mathfrak{J} très grand pour une fréquence donnée en prenant des résistances assez petites et en annulant $k_1 + k_2$ pour cette fréquence, tout en maintenant séparément grands k_1^2 et k_2^2 . On met sur une des branches une self et sur l'autre un condensateur. On crée ainsi une sorte de *soupage* qui laisse passer tous les courants alternatifs, sauf celui de la fréquence choisie.

269. **Décalage des courants qui passent dans une dérivation formée de deux branches.** — Entre A et B existe une certaine force électromotrice appliquée e_a , qui est la même pour les deux branches (fig. 127).

Soit φ_1 et φ_2 les décalages des courants i_1 et i_2 par rapport à cette force électromotrice.

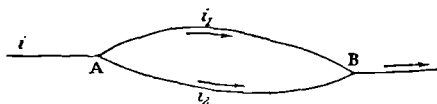


Fig. 127.

On a :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_1}{r_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{k_2}{r_2},$$

où k_1 et k_2 caractérisent les branches 1 et 2.

Posons : $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, il vient :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k_2 r_1 - k_1 r_2}{k_1 k_2 + r_1 r_2}.$$

Donc on peut décaler les courants 1 et 2 l'un par rapport à l'autre. Supposons que les branches ne contiennent que des forces électromotrices de self induction, et soient L_1 et L_2 les coefficients. Les quantités k_1 et k_2 sont positives; par conséquent φ_1 et φ_2 sont des *retards* compris entre 0 et $\pi : 2$. Pour que ψ s'approche beaucoup de $\pi : 2$, il faut d'une part diminuer L_1 et augmenter r_1 ; d'autre part, prendre L_2 grand et r_2 petit : φ_1 est alors sensiblement nul et φ_2 voisin de $\pi : 2$. Nous verrons une curieuse application de ce résultat dans la production des champs tournants (§ 343).

270. Partage du courant entre les deux branches d'une dérivation. — On a d'après le § 262 :

$$I_1 = \frac{E_a}{\mathfrak{J}_1}, \quad I_2 = \frac{E_a}{\mathfrak{J}_2}; \quad \text{d'où : } I_1 \mathfrak{J}_1 = I_2 \mathfrak{J}_2,$$

équation qui redonne la condition connue : $i_1 r_1 = i_2 r_2$, dans le cas où k_1 et k_2 sont nuls. Elle fournit immédiatement le rapport de grandeur des intensités maxima.

Cherchons les relations entre I , I_1 et I_2 . On a à chaque instant : $i = i_1 + i_2$, puisqu'il n'y a pas accumulation d'électricité aux points A et B. Il ne faut pas en conclure la relation : $I = I_1 + I_2$, parce que les courants i , i_1 et i_2 ne sont pas nécessairement synchrones.

Exprimons que la force électromotrice appliquée e_a est la même pour les deux circuits :

$$e_a = r_1 i_1 + \frac{k_1}{\omega} \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + \frac{k_2}{\omega} \frac{di_2}{dt}.$$

Posons : $i_2 = i - i_1$; il vient :

$$(r_1 + r_2) i_1 + \frac{1}{\omega} (k_1 + k_2) \frac{di_1}{dt} = r_2 i + \frac{k_2}{\omega} \frac{di}{dt},$$

$$r_1 + r_2) i_2 + \frac{1}{\omega} (k_1 + k_2) \frac{di_2}{dt} = r_1 i + \frac{k_1}{\omega} \frac{di}{dt}.$$

Posons :

$$i = I \sin \omega t; \quad i_1 = I_1 \sin (\omega t - \eta_1), \quad i_2 = I_2 \sin (\omega t - \eta_2).$$

Identifions; il vient :

$$I_1 [(r_1 + r_2) \cos \eta_1 + (k_1 + k_2) \sin \eta_1] = r_2 I,$$

$$I_1 [(r_1 + r_2) \sin \eta_1 - (k_1 + k_2) \cos \eta_1] = -k_2 I;$$

et deux autres équations analogues pour I_2 et η_2 . Additionnant les carrés, il vient :

$$I_1 = \frac{\delta_2 I}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}}, \quad I_2 = \frac{\delta_1 I}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}}.$$

Divisant membre à membre :

$$\operatorname{tg} \eta_1 = \frac{k_1 r_2 - k_2 r_1}{(k_1 + k_2) k_2 + r_2 (r_1 + r_2)}, \quad \operatorname{tg} \eta_2 = \frac{k_2 r_1 - k_1 r_2}{(k_1 + k_2) k_1 + r_1 (r_1 + r_2)},$$

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1 = \eta_2 - \eta_1.$$

Les quantités η_1 et η_2 sont nécessairement de signes contraires, si k_1 et k_2 sont positifs. Elles s'annulent pour la même condition :

$$\frac{k_1}{r_1} = \frac{k_2}{r_2}.$$

271. Application. Condensateur transformateur. — Supposons que l'on ait : $C_1 = 0$, $L_2 = 0$, et que r_2 soit négligeable : $r_2 = 0$. Écrivons pour simplifier l'écriture : $L_1 = L$, $C_2 = C$, $r_1 = r$. Il vient :

$$k_1 = L\omega, \quad k_2 = -\frac{1}{C\omega};$$

$$I_1^2 = \frac{I^2}{r^2 C^2 \omega^2 + (1 - LC\omega^2)^2}.$$

On peut s'arranger de manière que I_1 soit plus grand que I .

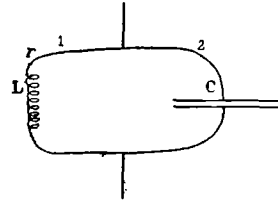


Fig. 128.

Cherchons le minimum du dénominateur en fonction de C ; il vient :

$$C = \frac{L}{\omega^2 L^2 + r^2}, \quad I_1^2 = I^2 \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{r^2}\right).$$

Le courant I_1 est alors certainement plus grand que I .

272. Mesure des intensités efficaces. Emploi de l'électrodynamomètre (bobines en série). — D'après la définition, l'intensité efficace est mesurée par la quantité :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I}{\sqrt{2}}.$$

Si on met sur un circuit, où passe un courant alternatif, un électrodynamomètre dont les bobines sont en série, l'indication de l'appareil est proportionnelle à chaque instant à i^2 et sa valeur moyenne à :

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

Soit δ cette indication; on a donc à un facteur près : $I_{\text{eff}} = \sqrt{\delta}$. Pour un courant continu d'intensité constante I' , l'indication est :

$$\delta = I'^2, \quad \text{d'où : } I' = \sqrt{\delta} = I_{\text{eff}}.$$

Donc on peut étalonner l'appareil avec un courant continu ; pour la même indication, l'intensité efficace du courant alternatif et l'intensité du courant continu seront du même nombre d'ampères.

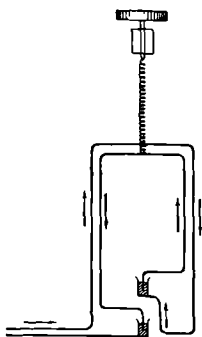


Fig. 129.

Pour mettre les deux bobines en série, il faut des contacts à mercure. La bobine mobile, suspendue par un ressort à boudin qui équilibre les actions électromagnétiques, se termine dans deux godets pleins de mercure. Le ressort à boudin est tenu par une tête qu'on peut faire tourner d'un nombre connu de degrés. L'expérience consiste à maintenir, par une torsion convenable, la bobine mobile dans un azimut invariable, quand il passe un courant et quand les plans des spires des deux bobines sont rectangulaires. L'appareil n'est pratique qu'avec des courants très intenses. Pour que le ressort ne cède pas sous le poids du cadre

mobile, celui-ci est en majeure partie supporté par un fil axial dont on peut négliger la torsion.

273. Mesure des intensités efficaces par les ampèremètres à dilatation. — Voici le principe de ces appareils sur les détails de

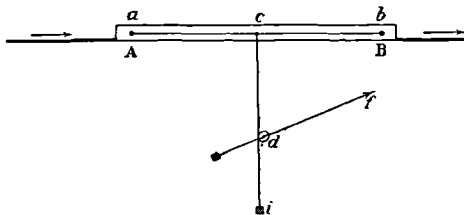


Fig. 130.

construction desquels nous n'insisterons pas (fig. 130).

Le courant traverse une pièce métallique AB qui porte normalement deux tiges métalliques *a* et *b*.

Entre ces tiges est tendu un fil fin *ab* qui forme une dérivation sans réactance. Une partie du courant traverse le fil, l'échauffe,

l'allonge. Au point *c* est attaché un autre fil fin qui passe sur la poulie *d* et est tendu par le poids *i*. Une aiguille solidaire de la poulie *d* se déplace sur une graduation. Les déplacements de l'extrémité *f* sont fonction des déplacements du point *c*, et par suite des allongements du fil *ab*.

Faisons passer dans le fil un courant continu *I*, puis un courant alternatif : $i = I \sin \omega t$. Les échauffements sont mesurés par I^2 dans le premier cas, par :

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = I_{\text{eff}}^2,$$

dans le second. Si on dresse une table donnant les déplacements de *f*

en fonction de I' , on pourra s'en servir pour déterminer les intensités efficaces des courants alternatifs.

L'inconvénient de ces appareils est d'exiger de fréquents rééquilibrages qui, du reste, ne présentent aucune difficulté.

274. Électrodynamomètre employé pour la mesure des intensités efficaces (bobine mobile en dérivation). — Si on

veut éviter l'emploi du mercure (§ 272), il faut suspendre la bobine mobile soit par un bifilaire, soit par un unifilaire double comme dans les galvanomètres à cadre mobile. Ces suspensions ne pouvant supporter des courants intenses, on met la bobine mobile en dérivation. La théorie de l'appareil se complique.

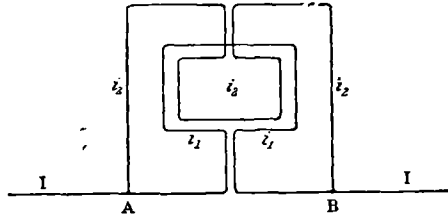


Fig. 131.

L'indication est proportionnelle à (§§ 260 et 269) :

$$\delta = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = \frac{I_1 I_2}{2} \cos \psi,$$

où I_1 et I_2 sont les intensités maxima dans les bobines et ψ le décalage relatif des courants qui les traversent.

Le problème consiste à chercher la relation entre I et δ .

Appelons e_a la force électromotrice appliquée entre les points A et B, et posons :

$$e_a = E_a \sin \omega t, \quad i = I \sin (\omega t - \varphi), \\ i_1 = I_1 \sin (\omega t - \varphi_1), \quad i_2 = I_2 \sin (\omega t - \varphi_2).$$

La condition : $i = i_1 + i_2$, donne :

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2, \\ I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2.$$

Additionnant les carrés et remarquant que $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos \psi = I_1^2 + I_2^2 + 4\delta. \quad (1)$$

D'ailleurs on a :

$$\cos \psi = \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{r_1 r_2 + k_1 k_2}{j_1 j_2}, \quad I_1 j_1 = I_2 j_2.$$

On tire de là :

$$I_1 I_2 \cos \psi = \frac{r_1 r_2 + k_1 k_2}{j_1 j_2} \frac{j_1}{j_2} I_1^2 = \frac{r_1 r_2 + k_1 k_2}{j_2^2} I_1^2.$$

$$\text{D'où : } I_1^2 = 2\delta \frac{j_2^2}{r_1 r_2 + k_1 k_2}, \quad I_2^2 = 2\delta \frac{j_1^2}{r_1 r_2 + k_1 k_2}.$$

Substituant dans (4), il vient :

$$I^2 = 2\delta \frac{(r_1 + r_2)^2 + (k_1 + k_2)^2}{r_1 r_2 + k_1 k_2}.$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{I^2}{2}} = \sqrt{\delta} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{k_1 + k_2}{r_1 + r_2}\right)^2}{1 + \frac{k_1 k_2}{r_1 r_2}}} = \sqrt{\delta} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \gamma.$$

Envoyons un courant I' continu produisant la même déviation. Les courants dérivés I'_1 et I'_2 ont pour valeurs :

$$I'_1 = I' \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad I'_2 = I' \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

L'indication de l'appareil est :

$$I'_1 I'_2 = I'^2 \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \delta, \quad I' = \sqrt{\delta} \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}.$$

L'intensité du courant continu est donc égale à l'intensité efficace du courant alternatif qui donne la même indication, au coefficient γ près caractéristique de l'appareil et fonction de la fréquence.

Ce coefficient est égal à l'unité, si : $\frac{k_1}{r_1} = \frac{k_2}{r_2}$. On cherche à le rendre aussi voisin de 1 que possible; dans la pratique, il n'en diffère que de 1 % environ.

275. Mesure des volts efficaces entre deux points d'un circuit. — On peut employer en dérivation soit un ampèremètre à dilatation, soit un électrodynamomètre.

Comme ici la résistance du circuit dérivé doit être considérable pour ne pas modifier la force électromotrice à mesurer, il faut supprimer la barre AB de la figure 130 représentant l'ampèremètre à dilatation, et mettre en série avec le fil *ab* une résistance suffisante, autant que possible non inductive.

Les bobines de l'électrodynamomètre peuvent être en série, ce qui simplifie l'interprétation des résultats.

Soit E la valeur maxima de la force électromotrice appliquée aux points A et B, l'intensité maxima du courant i_2 dans la dérivation est : $I_2 = \frac{E}{\delta_2}$. Elle est donc proportionnelle à E pour une fréquence donnée. Pour que l'indication de l'appareil soit indépendante de la fréquence, il faut que k_2 soit voisin de 0; mais r_2 étant toujours grand, l'importance de k_2 est faible.

On peut employer un électromètre sous sa forme la plus simple,

c'est-à-dire un condensateur dont l'une des armatures est mobile. L'indication est proportionnelle à :

$$\delta = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt,$$

où e est la différence de potentiel à chaque instant : $\sqrt{\delta}$ mesure les volts efficaces. L'appareil s'étalonne avec des forces électromotrices constantes (piles).

Il ne faut pas croire que l'électromètre, formant une dérivation de résistance infinie pour les courants continus, ne modifie pas la force électromotrice à mesurer. La théorie exposée au § 266 montre au contraire qu'il faut considérer la dérivation sur laquelle se trouve l'électromètre, comme de résistance sensiblement nulle et de capacité égale à celle du condensateur qui constitue l'électromètre.

Pour que l'intensité i_2 soit faible dans la dérivation, il faut que : $\delta_2 = \sqrt{r_2^2 + k_2^2}$, soit grand; puisque r_2 est petit, il faut que k_2 soit grand et par conséquent C petit. L'électromètre doit être un condensateur de très petite capacité, si l'on veut que la force électromotrice à mesurer ne soit pas trop modifiée.

276. Puissance absorbée entre deux points d'un circuit. — La différence de potentiel maintenue *entre les extrémités* d'un circuit, et le courant qui le traverse, sont :

$$e = E \sin \omega t, \quad i = I \sin (\omega t - \varphi).$$

Nous avons montré que la puissance absorbée est (§ 261) :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = \frac{1}{2} EI \cos \varphi = E_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi.$$

On appelle quelquefois *watts apparents* le produit $E_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, par opposition aux *watts réels* égaux à W ; $\cos \varphi$ est le *facteur de puissance*.

Il résulte du décalage du courant sur la force électromotrice que, pendant la période T , un appareil quelconque utilisant des courants alternatifs est successivement *récepteur et producteur d'énergie*. Il absorbe de l'énergie quand e et i sont de même signe; il en restitue quand e et i sont de signes contraires.

Dans un cas extrême, e et i sont toujours de même signe ($\varphi = 0$); l'appareil absorbe toujours de l'énergie.

Dans l'autre cas extrême, e et i sont toujours de signes contraires ($\varphi = \pi$); l'appareil restitue toujours de l'énergie.

Dans le cas moyen, e et i sont moitié du temps de même signe et moitié du temps de signes contraires ($\varphi = \pi : 2$); malgré le passage du courant, l'appareil n'absorbe ni ne restitue d'énergie. Ce cas est impossible à réaliser, car l'effet Joule existe toujours et impose une absorption d'énergie dès qu'il y a passage d'un courant.

La mesure séparée des ampères et des volts efficaces ne fournit pas

la valeur de l'énergie absorbée; dans certains cas, les watts apparents peuvent différer de 90 % des watts réels. On a cherché à obtenir par une seule lecture la mesure de W ; nous allons montrer que la solution n'est pas impossible, quoique pratiquement elle soit assez mauvaise.

REMARQUE. — Calculons pour un circuit quelconque, l'intégrale :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e_a i dt = \frac{E_a I}{2} \cos \varphi,$$

où e_a est la force électromotrice appliquée au circuit, c'est-à-dire la résultante de la différence de potentiel maintenue aux extrémités et des forces électromotrices d'induction aux différents points du circuit, exception faite, bien entendu, pour les forces de réaction (self induction et capacité).

On a :

$$E_a = \mathfrak{J} I, \quad \cos \varphi = r : \mathfrak{J}; \quad \text{d'où: } W = \frac{r I^2}{2}. \quad \text{Ce résultat était}$$

facile à prévoir : l'énergie absorbée dans le circuit se réduit évidemment à l'effet Joule ; un ampèremètre suffit pour la mesurer.

Le problème que nous étudions est tout différent ; il s'agit de mesurer les travaux absorbés par les forces électromotrices d'induction qui sont appliquées le long du circuit, quand on connaît la différence de potentiel maintenue aux bornes de l'appareil.

Il résulte de là qu'il n'existe aucune relation a priori entre E , I et $\cos \varphi$. Le décalage φ n'est plus seulement fonction de la réactance du circuit et de sa résistance ; il dépend des forces électromotrices d'induction appliquées le long du circuit.

Par exemple, nous nous proposons d'étudier l'énergie absorbée dans un moteur. Du fait que ce moteur fonctionne, il naît une force électromotrice alternative qui modifie la phase du courant par rapport à la différence de potentiel appliquée aux bornes.

277. Électrodynamomètre employé comme wattmètre. — Voici le montage le plus simple ; il a seulement l'inconvénient de mesurer à la fois l'énergie dépensée dans l'appareil quelconque à étudier et dans l'électrodynamomètre (fig. 132).

Soit à déterminer l'énergie dépensée entre les points A et B d'un circuit, qui comprend la bobine fixe (petit nombre de spires de gros fil) du dynamomètre. Mettons en dérivation la bobine à fil fin avec des résistances convenables non inductives (lampes à incandescence, bobines enroulées comme celles des boîtes de résistances, résistances liquides). Soit e la force électromotrice appliquée entre A et B.

L'énergie absorbée est :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i_1 dt = \frac{E I_1}{2} \cos \varphi$$

L'indication de l'appareil est, à un facteur constant près :

$$\delta = \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt = \frac{I_1 I_2}{2} \cos \psi.$$

ψ est la différence de phase entre les courants qui traversent les bobines 1 et 2.

Si la réactance k_2 du circuit à fil fin est petite, le décalage du cou-

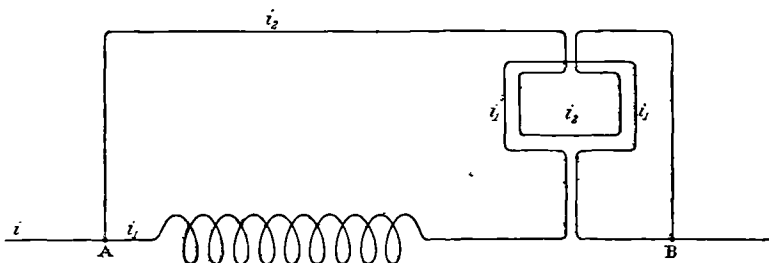


Fig. 132.

rant i_2 sur la différence de potentiel imposée entre A et B, est négligeable. On a :

$$I_2 = \frac{E}{r_2}, \quad \psi = \varphi; \quad \delta r_2 = \frac{EI_1}{2} \cos \varphi = W.$$

Si la réactance k_2 du circuit n'est pas très petite, on ne peut plus poser $\psi = \varphi$. On a seulement : $W = \delta r_2 \gamma'$, où γ' est un coefficient voisin de l'unité.

Pour des courants continus, on aurait :

$$W = r_1 I_1^2; \quad \delta = I_1' I_2', \quad I_1' r_1 = I_2' r_2; \quad W = \delta r_2.$$

Donc si l'appareil est étalonné avec des courants continus, la lecture faite pour des courants sinusoïdaux donne l'énergie absorbée, au facteur γ' près : $\gamma' = 1$, si $k_2 = 0$.

On s'efforce de rendre γ' très voisin de 1, c'est-à-dire de diminuer la réactance de la bobine mobile.

278. Mesure de la puissance. Méthode des trois voltmètres.

— Il est préférable d'opérer avec des voltmètres ou des ampèremètres dont les indications aient une interprétation bien déterminée.

Voici deux méthodes pour servir de types.

Soit à mesurer

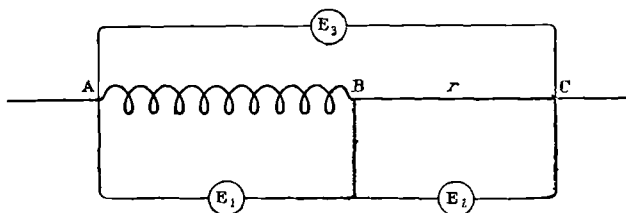


Fig. 133.

l'absorption d'énergie entre les points A et B d'un circuit. On suppose avoir à sa disposition une seconde portion du circuit BC de résistance r et sans réactance appréciable. Trois voltmètres donnent les volts efficaces entre les points A et B, B et C, C et A.

Les trois voltmètres donnent des indications $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, qui sont à des facteurs constants près :

$$\delta_1 = \frac{1}{T} \int_0^T e_1^2 dt, \quad \delta_2 = \frac{1}{T} \int_0^T e_2^2 dt, \quad \delta_3 = \frac{1}{T} \int_0^T e_3^2 dt.$$

On veut mesurer la quantité :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e_1 i dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{e_1 e_2}{r} dt;$$

on a en effet : $e_2 = ri$, puisque la résistance r est sans self induction. Le courant i est le même dans tout le circuit ABC, à la condition que les voltmètres aient des capacités assez petites, s'ils sont de la nature des électromètres, des résistances assez grandes, si ce sont des ampèremètres à dilatation.

On a à chaque instant : $e_3 = e_1 + e_2$.

$$e_3^2 = (e_1 + e_2)^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 e_2, \quad W = \frac{\delta_3 - \delta_1 - \delta_2}{2r}.$$

L'inconvénient de cette méthode est d'exiger trois appareils étalonnés, si le courant alternatif n'est pas assez régulier pour qu'on fasse les mesures les unes après les autres.

Pour que les mesures ne soient pas trop illusoires, il faut disposer d'une force électromotrice $e_1 + e_2$ sensiblement double de la force électromotrice e_1 véritablement utilisée. Enfin si $\cos \varphi$ est très petit, la détermination est illusoire ; en effet, W est petit et donné par la différence de nombres séparément grands sur lesquels l'erreur absolue peut être de l'ordre de la quantité à mesurer.

279. Mesure de la puissance. Méthode des trois électrodynamomètres. — La dérivation ACB est supposée non inductive : sa résistance est r (fig. 134). On veut mesurer la quantité :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i_1 dt;$$

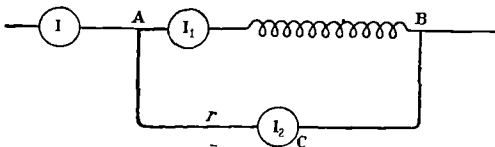


Fig. 134.

e est la force électromotrice entre les points A et B. Puisque la résistance r du circuit ACB est non inductive, on a :

$$e = r i_2.$$

D'ailleurs : $i = i_1 + i_2$.

Les trois ampèremètres donnent des indications qui sont, à des facteurs constants près :

$$\delta_1 = \frac{1}{T} \int_0^T i_1^2 dt, \quad \delta_2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_2^2 dt, \quad \delta = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T r i_1 i_2 dt = \frac{r}{2T} \int_0^T (i^2 - i_1^2 - i_2^2) dt = \frac{r}{2} (\delta - \delta_1 - \delta_2).$$

Pour que le résultat ne soit pas illusoire, il faut disposer d'une intensité i sensiblement double de l'intensité i_1 utilisée; $\cos \varphi$ ne doit pas être trop petit pour la raison indiquée plus haut. Enfin si le courant n'est pas très régulier, il faut faire les lectures simultanément et posséder trois appareils.

Étude des courants non sinusoïdaux.

Les alternateurs industriels ne fournissent pas des courants parfaitement sinusoïdaux; nous sommes donc amenés à étudier la forme de ces courants et à chercher en quoi les conclusions des paragraphes précédents doivent être modifiées par le fait qu'elle n'est pas sinusoïdale. Nous indiquerons très brièvement les méthodes employées.

280. Interprétation des résultats pour les courants non sinusoïdaux. — Il est évident que chaque fois que dans les résultats de ce Chapitre intervient l'hypothèse que le courant est sinusoïdal, ils ne subsistent plus pour des courants qui ne le sont pas. Bien des résultats sont au contraire indépendants de cette hypothèse.

Par exemple, la quantité de chaleur laissée dans un circuit est égale à : $\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$, quelle que soit la forme du courant. Les ampèremètres et voltmètres à dilatation donnent donc les ampères et les volts efficaces pour un courant périodique quelconque.

L'indication d'un électrodynamomètre dont les bobines sont en série est aussi indépendante de la forme du courant. Mais si les bobines sont en dérivation, le coefficient de correction γ que nous avons calculé, n'a de sens que pour les courants sinusoïdaux.

L'expression de l'énergie est toujours : $W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt$, quelles que soient les formes de e et de i ; mais on n'a : $W = E_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi$, que si les courants sont sinusoïdaux. Tandis que la méthode de l'électrodynamomètre employé comme wattmètre suppose le courant sinusoïdal, les méthodes des trois voltmètres et des trois ampèremètres laissent indéterminée la forme du courant.

Quand le courant n'est pas sinusoïdal, on peut le considérer comme composé d'une somme de courants sinusoïdaux, harmoniques de la

tonique dont le nombre de vibrations est, par définition, la fréquence. Comme les équations différentielles sont linéaires, chacun des harmoniques se conduit comme s'il était seul. On peut par plusieurs procédés atténuer ou exagérer les effets de l'un d'eux, ce qui revient à créer de véritables résonateurs.

281. Résonateurs pour courants alternatifs. — Soient entre deux points d'un circuit AB des résistances non inductives (lampes à incandescence).

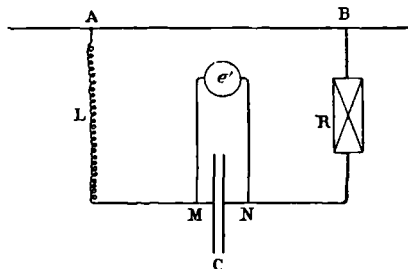


Fig. 135.

Les forces électromotrices appliquées aux extrémités du circuit AB, et les intensités des divers harmoniques sont donc proportionnelles; il suffit, pour analyser les unes, d'analyser les autres.

Mettons en dérivation un circuit L, C, R; soit : $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la période de la tonique; la période du $n^{\text{ième}}$ harmonique est :

$$\frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}.$$

Le courant dans le circuit dérivé est :

$$i = \sum i_n = \sum \frac{e_n}{\sqrt{R^2 + \left(Ln\omega - \frac{1}{Cn\omega}\right)^2}} \sin(n\omega t - \varphi_n).$$

Il y a résonance pour l'harmonique n , si δ_n est le plus petit possible, si par conséquent on a : $CLn^2\omega^2 = 1$. Quand cette condition est satisfaite, seul l'harmonique n subsiste en pratique : son intensité maxima est :

$$I_n = \frac{E_n}{R}.$$

La force électromotrice maxima E'_n entre les armatures M et N du condensateur est alors donnée par la condition :

$$E'_n = I_n \times \text{réactance du circuit MN} = \frac{I_n}{Cn\omega} = I_n Ln\omega = \frac{E_n}{R} Ln\omega.$$

On la mesure avec un électromètre.

L'expérience consiste à faire varier la capacité du condensateur jusqu'à ce qu'on obtienne une indication notable à l'électromètre; la relation : $CLn^2\omega^2 = 1$, est alors satisfaite pour un certain harmonique dont il est facile de connaître le numéro d'ordre, puisqu'on connaît la fréquence. Généralement on peut obtenir la résonance pour plusieurs valeurs entières de n , $n = 1, 2, 3, \dots$. On prouve ainsi l'existence de plusieurs harmoniques, et on peut, au moins approximativement, en évaluer l'importance.

282. **Mesure de la fréquence.** — Si on dispose de l'alternateur qui produit les courants, on déduit immédiatement de sa construction et du nombre de tours qu'il fait par seconde, le nombre de périodes et par conséquent la fréquence.

Quand on ne peut atteindre l'alternateur, on mesure la fréquence en envoyant le courant dans un électroaimant mobile devant un jeu de languettes d'acier parallèles, fixées par une de leurs extrémités et accordées chacune pour un son connu. L'électro fait vibrer presque uniquement la languette dont le son propre a la fréquence du courant alternatif.

Une série de languettes sont disposées les unes à côté des autres, accordées pour des fréquences variant d'une unité. L'expérience consiste à déterminer par tâtonnements la languette qu'excite le mieux l'électroaimant.

La fréquence varie généralement de 50 à 120; on la détermine à $1/2$ unité près; elle est donc connue à $1/150$ près environ.

On peut encore faire vibrer, au moyen d'un électro, un fil de fer fin qu'on tend plus ou moins ou dont on fait varier la longueur, jusqu'à obtenir l'amplitude maxima. Le fil étant attiré deux fois par période, la fréquence du courant est moitié du nombre des vibrations du fil par seconde. Connaissant le poids du fil par mètre et sa tension, on a ce qu'il faut pour calculer ce nombre (I, § 160).

283. **Étude complète d'un courant alternatif.** — Toutes les méthodes anciennes disparaissent devant les oscillographes. Ce sont des galvanomètres dont la partie mobile, convenablement amortie, a une durée d'oscillation extrêmement courte, une période inférieure à 0,001 et même à 0,0001 de seconde. Elle obéit instantanément aux variations du courant et en inscrit la forme, tout comme un galvanomètre ordinaire convenablement amorti inscrit la forme d'un courant dont la période est de l'ordre de quelques dizaines de seconde. La difficulté est de concilier une période extrêmement courte et une sensibilité suffisante; on réduit autant que possible l'inertie de la partie mobile, de manière qu'une force minime lui donne une accélération angulaire considérable. L'amortissement est généralement obtenu par l'emploi d'un bain d'huile où est immergée la partie mobile.

Dans un des modèles les plus employés, schématiquement représenté (fig. 136), le cadre, mobile entre les pièces polaires d'un fort aimant permanent, est simplement constitué par deux fils ab , cd très fins et très

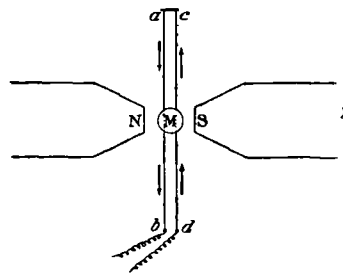


Fig. 136.

rapprochés, fortement tendus et parcourus en sens inverses par le courant à étudier. Les fils sont normaux aux lignes de force, et leur plan est parallèle à ces lignes. Le champ tend donc à les déformer en sens inverses. En admettant un courant dans le sens des flèches, cd tend à se courber vers l'arrière, ab vers l'avant du plan du tableau. Un très petit miroir M (dont l'aire est de l'ordre du millimètre carré) est collé sur le système en son milieu. Il tourne proportionnellement à l'intensité du courant.

Des lentilles convenables font converger sur le miroir un faisceau lumineux intense émis par un trou fortement éclairé. D'autres lentilles projettent sur un

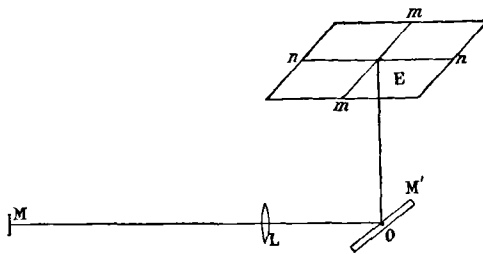


Fig. 137.

écran l'image de ce trou, par réflexion sur un miroir M' (fig. 137) dont nous allons dire le rôle. L'écran peut être une plaque photographique.

Il s'agit d'étudier, en fonction du temps, l'intensité du courant, c'est-à-dire le déplacement de

l'image du trou, déplacement que nous pouvons supposer horizontal.

Recevons le faisceau réfléchi sur un miroir plan M' tournant autour d'un axe O horizontal, et plaçons la plaque photographique ou l'écran E dans un plan horizontal. Si le miroir M' est immobile, l'image du point lumineux se déplace suivant une parallèle à mm ; si le courant est constant et le miroir M' mobile, l'image se déplace suivant une parallèle à nn . Il s'agit de donner au miroir M' une vitesse angulaire constante au moment où il renvoie la lumière sur l'écran; peu importe sa vitesse quand sa position est telle que la lumière réfléchie ne tombe pas sur l'écran.

Je n'insiste pas sur les procédés mécaniques qui permettent de résoudre ce problème. On emploie une came appropriée donnant un mouvement de va-et-vient au miroir et mue par un moteur (synchrone, dans le cas de l'étude d'un courant alternatif). Un dispositif obturateur masque le faisceau pendant le mouvement de retour du miroir.

L'appareil permet de photographier des courbes uniques (décharges de bobines de Ruhmkorff, par exemple) ou des phénomènes périodiques.

284. Applications des oscillographes. Étude de l'arc. — Les oscillographes, avec les perfectionnements qu'ils ont reçus (Blondel), finiront par détrôner les autres appareils, même dans l'industrie.

On les construit ordinairement doubles; on peut enregistrer simul-

tanément l'intensité du courant, qui passe dans un appareil placé sur un circuit, et la force électromotrice appliquée aux bornes de l'appareil.

Pour avoir l'intensité, on place l'un des galvanomètres sur une dérivation prise entre deux points du circuit séparés par une résistance *non inductive*; pour avoir la force électromotrice, on place l'autre galvanomètre sur une dérivation prise entre les bornes mêmes de l'appareil (voir § 304).

Si les courants sont sinusoïdaux, ce qu'on s'efforce d'obtenir, les graphiques donnent le courant et la force électromotrice maxima, ainsi que le décalage; la puissance est donc connue.

On ne construit plus un alternateur sans vérifier la forme des courants qu'il débite.

Comme application intéressante des oscillographes, nous dirons quelques mots de l'arc électrique.

L'expérience prouve que la force électromotrice e aux bornes d'un arc à *courant continu silencieux*, est liée à la longueur l de l'arc et à l'ampérage I par la formule :

$$e = a + bl + \frac{c + dl}{I}.$$

La puissance absorbée par l'arc varie donc linéairement en fonction de l'intensité du courant et de la longueur de l'arc.

$$W = eI = (a + bl)I + c + dl.$$

Ces expressions ne ressemblent guère à celles que l'on déduirait de l'hypothèse d'une résistivité bien déterminée de la matière formant l'arc (loi de Joule). Aussi a-t-on imaginé l'existence d'une force contre-électromotrice.

Il paraît nécessaire d'abandonner cette hypothèse (Blondel).

Tout d'abord l'analogie voudrait que les expériences des §§ 67 et 68 du Cours de Première réussissent avec l'arc. On interrompt le circuit d'un arc alimenté par un courant constant, et on réunit immédiatement les charbons à un galvanomètre. *La force contre-électromotrice ne pouvant cesser instantanément*, l'aiguille du galvanomètre doit être déviée. A la vérité, l'expérience est plus délicate avec l'arc, parce qu'il se refroidit et que sa résistance devient vite énorme. Il faut donc interrompre le circuit de l'arc *périodiquement, à des intervalles très rapprochés et pendant des temps très courts*, et le relier automatiquement aux bornes du galvanomètre : on obtient ce résultat avec un commutateur tournant facile à imaginer.

L'expérience prouve que *s'il existe une force contre-électromotrice, elle est de l'ordre du dixième de volt*, et non pas égale à 20 ou 30 volts comme on l'a cru longtemps.

On trouve une autre sorte de preuve en s'adressant à l'arc alimenté par des courants alternatifs et en utilisant l'oscillographe double. On

détermine simultanément la courbe des intensités et celle des forces électromotrices aux bornes. S'il existe une force contre-électromotrice, *comme par nature elle est en retard sur le courant qui la crée ou la détruit*, il doit y avoir décalage de l'intensité par rapport à la différence de potentiel aux bornes : les deux courbes des graphiques ne passent pas simultanément par leurs zéros.

Or elles y passent simultanément.

En définitive, l'arc se conduit comme une résistance ; s'il existe une force électromotrice, elle est de l'ordre des forces électromotrices thermoélectriques et n'est pas supérieure à une fraction de volt.



CHAPITRE VIII

MAGNÉTISME INDUIT. CIRCUITS MAGNÉTIQUES

285. **Position de la question. Susceptibilité et perméabilité magnétiques.** — Jusqu'ici nous n'avons supposé aucune relation nécessaire entre le vecteur \mathfrak{J} , *intensité d'aimantation*, et le vecteur H , *champ magnétique*, au même point.

Le vecteur \mathfrak{B} , *induction magnétique*, est défini comme la résultante des vecteurs $4\pi\mathfrak{J}$ et H ; il jouit de la propriété fondamentale que son flux est conservatif, *quelles que soient d'ailleurs les hypothèses faites sur la distribution de l'aimantation et la position relative des vecteurs \mathfrak{J} et H .*

Parfois nous nous sommes donnés arbitrairement la distribution du magnétisme (solénoïdes et feuillets). Quand nous utilisons des aimants *réels*, du magnétisme desquels nous étions bien obligés d'accepter la distribution, *ordinairement inconnue du reste*, nous avons toujours considéré leur aimantation comme rigide, leur moment magnétique comme invariable. Cette hypothèse légitime seule la méthode de Gauss (§ 134) ; le moment de l'aimant qu'on étudie est supposé indépendant du champ dans lequel il se trouve.

Nous savons déjà qu'il n'est généralement pas exact de considérer la distribution du vecteur \mathfrak{J} comme indépendante du champ. Dans le cas seulement d'un champ faible et d'une pièce aimantée en acier trempé sec (ce que d'ailleurs nous avons toujours supposé), l'aimantation est fixe, à peu près indépendante du champ : *les aimants sont dits permanents.*

Cependant nous avons dû (§ 240), pour expliquer certains résultats obtenus avec le galvanomètre dans la mesure des courants variables, imaginer que l'aimantation de l'aiguille n'est pas absolument rigide, mais qu'elle peut varier avec l'intensité du courant à mesurer.

Nous supposerons maintenant que la pièce aimantée est en fer ou en fonte douce et que les champs sont intenses ; nous devons considérer \mathfrak{J} comme une fonction plus ou moins bien définie de H .

On dit que *l'aimantation est induite.*

Il se présente un premier cas limite, celui où l'on peut admettre que le vecteur \mathfrak{J} est toujours parallèle et proportionnel à H ; on pose : $\mathfrak{J} = kH$; k est un paramètre constant, appelé *susceptibilité magnétique*. L'hypothèse est admissible pour les corps très faiblement magnétiques.

k est généralement positif, c'est-à-dire que les vecteurs \mathfrak{J} et H , supposés parallèles, sont de même sens.

k peut être négatif, les vecteurs sont de sens contraires; le corps est *diamagnétique*. Les corps diamagnétiques l'étant toujours faiblement, les vecteurs \mathfrak{J} et H y sont parallèles et proportionnels.

Plus généralement les vecteurs \mathfrak{J} et H ne sont ni proportionnels ni même parallèles entre eux. Pour ne pas compliquer inutilement une question déjà suffisamment difficile, nous supposons qu'on s'arrange toujours de manière que les vecteurs \mathfrak{J} et H soient sensiblement parallèles et de direction invariable par rapport au corps aimanté.

Le problème du magnétisme induit revient à déterminer la loi de variation de la susceptibilité k , définie par l'équation : $\mathfrak{J} = kH$, lorsque H varie d'une manière quelconque en grandeur (sa direction restant sensiblement invariable, suivant l'hypothèse restrictive que nous avons posée).

Le vecteur induction est par définition la résultante des vecteurs $4\pi\mathfrak{J}$ et H . Puisque nous nous limitons au cas où ils sont parallèles, nous avons :

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{J},$$

et d'après la définition de la susceptibilité magnétique :

$$\mathfrak{B} = (1 + 4\pi k)H = \mu H;$$

μ est généralement une fonction de H qu'on appelle *perméabilité magnétique*. La perméabilité est constante dans le cas seulement où k est constant.

286. Magnétisme induit quand on peut admettre que la susceptibilité est constante. — Nous retrouvons ici mot pour mot tout ce que nous avons dit aux §§ 62 et sq. sur la polarisation des diélectriques. Le vecteur induction est :

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{J} = (1 + 4\pi k)H = \mu H.$$

Comme son flux est toujours conservatif, il doit en être de même du flux de l'un ou l'autre vecteur H ou \mathfrak{J} qui lui sont proportionnels. En

particulier, on a : $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = -\rho = 0$;

la densité de volume du magnétisme induit est nulle, le magnétisme induit réside seulement à la surface.

La force X qui tend à déplacer une petite sphère de volume v dans la direction x est donnée par la formule (§ 115) :

$$X = \frac{3v}{8\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{\partial (H^2)}{\partial x}.$$

Explicitons k :

$$\mu - 1 = 4\pi k, \quad \mu + 2 = 3 + 4\pi k = 3,$$

k étant toujours très petit quand on peut le considérer comme constant. Il vient :

$$X = \frac{vk}{2} \cdot \frac{\partial (H^2)}{\partial x}.$$

Si la sphère est magnétique ($k > 0$), X est dirigée vers les champs croissants ; si elle est diamagnétique ($k < 0$), X est dirigée vers les champs décroissants. Les corps magnétiques marchent donc vers les points où la force est maximum, les corps diamagnétiques vers les points où elle est minimum. Dans un champ uniforme, il n'y a pas de déplacement, et conséquemment, pas d'orientation pour une aiguille faiblement magnétique ou diamagnétique.

Supposons maintenant un champ variable produit par des masses égales et de signes contraires, soit pratiquement le champ produit par les pôles de noms contraires de deux aimants identiques. Nous savons qu'une petite aiguille magnétique (§ 117) s'oriente suivant la ligne des pôles ; une aiguille diamagnétique se met en croix. D'où les noms *paramagnétique* et *diamagnétique* donnés aux substances pour lesquelles $k > 0$ et $k < 0$.

Ces résultats sont facilement vérifiables par l'expérience, à la condition qu'on réalise des champs puissants : nous verrons plus loin comment on procède (§ 312).

287. Orientation d'une aiguille magnétique parallèlement aux lignes de force du champ quand la susceptibilité supposée constante n'est pas très petite. — Nous admettons dans ce qui précède que le magnétisme induit dans une partie de l'aiguille ne modifie que d'une manière insignifiante le champ dans les autres parties.

Soit maintenant k assez grand pour que la réaction ne soit pas négligeable : une aiguille cylindrique placée dans un champ uniforme s'oriente alors parallèlement aux lignes de force. Il nous suffit de montrer que, pour cette orientation, le champ créé par le magnétisme induit des diverses parties de l'aiguille, est de même sens que le champ extérieur H et tend à l'augmenter le plus possible. Raisonnons sur de petites balles sphériques ; les résultats seront encore valables dans le cas de petits fragments de cylindre.

La figure 138 montre l'aiguille orientée perpendiculairement aux

lignes de force; chaque petite sphère est aimantée comme il est indiqué. Il résulte de la forme du champ d'un petit aimant, que le champ créé par l'une des balles en un point quelconque d'une autre balle est contraire au champ H et tend à le diminuer.

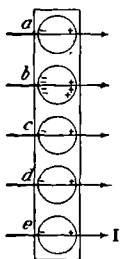


Fig. 138.

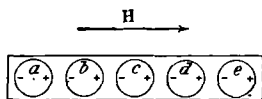


Fig. 139.

La figure 139 montre l'aiguille orientée parallèlement aux lignes de force. L'aimantation de chaque balle produit bien dans cette balle un champ démagnétisant, conformément à la théorie du § 114; mais elle produit dans toutes les autres

un champ parallèle au champ H et de même sens. La rotation de l'aiguille dans le champ uniforme de la position I à la position II produit donc le même effet que si les diverses parties de l'aiguille se déplaçaient vers des champs d'intensité croissante. Donc la position II est bien d'équilibre stable.

Telle est la théorie de la production des spectres magnétiques. Les limailles tendent à s'orienter dans le sens des lignes de force.

288. Cas général d'une susceptibilité variable avec l'intensité du champ magnétisant : méthode du magnétomètre.

— Nous avons dit l'essentiel sur cette méthode aux §§ 89 et sq. du Cours de Première. L'expérience consiste à placer dans un solénoïde le barreau *supposé suffisamment long*, et à le faire agir sur l'aiguille d'un magnétomètre. Le champ du solénoïde est équilibré, là où se trouve l'aiguille du magnétomètre, par une bobine traversée par le même courant. On mesure simultanément le champ H dans le solénoïde (déduit des constantes du solénoïde et du courant qui le traverse) et la déviation du magnétomètre, déviation proportionnelle au moment magnétique M du barreau.

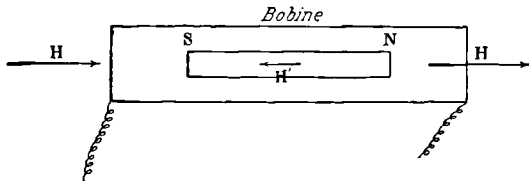


Fig. 140.

L'expérience donne donc directement la relation entre le moment magnétique M du barreau et le champ magnétisant H . Comme on peut poser très sensiblement : $M = \mathfrak{J}V$, où V est le volume du barreau *supposé suffisamment long*, les courbes représentent aussi bien la relation entre l'intensité d'aimantation \mathfrak{J} et le champ magnétisant.

Enfin si le champ *démagnétisant* H' , sur lequel nous allons revenir, est assez faible, on peut poser : $\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{J}$,

relation qui pour le fer se réduit pratiquement à :

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J},$$

tant que le champ H ne dépasse pas une centaine de gauss. L'expérience donne donc la relation entre l'induction et le champ magnétisant.

Rappelons les résultats généraux ; nous reviendrons plus loin sur les détails.

A partir des plus petits champs, \mathfrak{J} croît d'abord très lentement quand le champ croît, puis de plus en plus vite, puis lentement, et tend vers une limite \mathfrak{J}_m : alors le métal est dit saturé.

Comme $\mathfrak{J} = kH$, ce dernier résultat prouve que pour des champs H croissant indéfiniment, k tend vers 0, de manière que le produit kH tende vers la limite \mathfrak{J}_m (fig. 141).

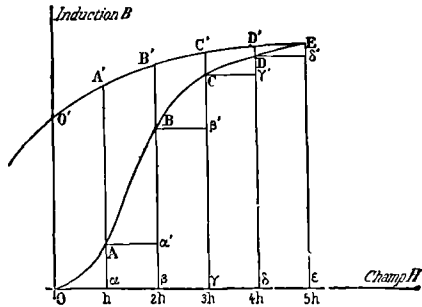


Fig. 141.

\mathfrak{B} , d'abord très sensiblement égal à $4\pi\mathfrak{J}$, tend en définitive vers H , quand H croît indéfiniment.

Pour un cycle donné d'opérations, répété un nombre suffisant de fois, par exemple pour des variations continues de H entre deux limites $\pm H_0$, la courbe \mathfrak{J}, H , se ferme ; mais les courbes d'aller et de retour ne se superposent pas : il y a *hystérésis* (fig. 142).

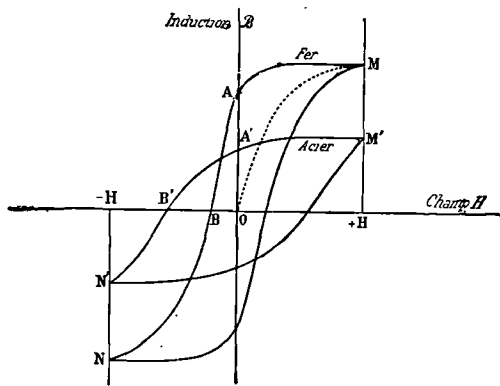


Fig. 142.

L'inconvénient de la méthode très simple que nous venons de rappeler, est l'existence du magnétisme libre et du champ *démagnétisant* qui en résulte¹.

Quand on aimante un barreau, même allongé, par un champ H qu'on fait croître de 0 jusqu'à H_0 , puis qu'on ramène à 0, le champ à l'intérieur du barreau part de 0, mais ne revient pas à 0. Le

¹ Il faut cependant observer que l'emploi du magnétomètre n'est possible que s'il existe du magnétisme libre. Sinon, le champ extérieur est nul : on ne peut opérer que par la méthode balistique ou la méthode d'arrachement.

magnétisme rémanent produit un champ H' inverse de H (fig. 140).

Le fait est général; le magnétisme libre intervient toujours pour créer un champ H' , généralement inverse de H , quelquefois de même sens; cela dépend du point du cycle où l'on se trouve.

Comme il est impossible de calculer ce champ (d'ailleurs variable d'un bout à l'autre du barreau, maximum aux extrémités, minimum au milieu), les résultats sont plus ou moins faussés suivant la longueur.

Pour certaines formes simples du corps aimanté, on sait calculer le champ démagnétisant en fonction de l'aimantation. Il en est ainsi pour un ellipsoïde de révolution dont l'axe est parallèle au champ, et pour une sphère. Dans ce dernier cas, nous avons montré (§§ 43 et 114)

que H' est égal à $\frac{4\pi}{3} J$. On a donc :

$$J = k(H - H') = k\left(H - \frac{4\pi}{3} J\right); \quad \text{d'où} \quad J = \frac{kH}{1 + \frac{4\pi k}{3}}.$$

Ainsi, tandis qu'avec un champ démagnétisant nul, le moment magnétique serait : $M = JV = kHV$, le champ démagnétisant le

réduit à : $M = kHV : \left(1 + \frac{4\pi k}{3}\right)$.

Le facteur de réduction est énorme pour peu que k soit de l'ordre de 10 ou de 100. Pour 10, il est 1 : 43; pour 100, il est 1 : 420.

La méthode du magnétomètre est commode, mais les difficultés d'interprétation sont parfois grandes.

289. Emploi d'un tore. — Pour faire des expériences absolument correctes, il est préférable d'opérer dans des conditions où il

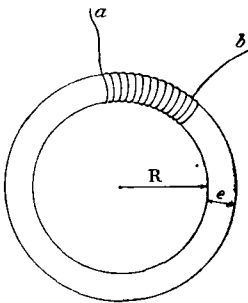


Fig. 143.

n'apparaît pas de magnétisme libre, de réaliser ce qu'on appelle un *circuit magnétique fermé*. Le plus simple consiste en un tore de rayon R suffisamment grand par rapport à l'épaisseur e (fig. 143). On enroule dessus une ou plusieurs couches parfaitement régulières de fil isolé. Soit n le nombre total de spires par centimètre de la circonférence moyenne de rayon $R + \frac{e}{2}$. Quand on fait

passer un courant de i ampères dans le fil, le champ créé est :

$$H = 0,4 \cdot \pi ni \text{ gauss :}$$

pour qu'on puisse le considérer comme constant dans toute la section du tore, il est nécessaire que e soit une petite fraction de R . En d'autres termes, les fils sont évidemment plus serrés à l'intérieur de

l'enroulement qu'à l'extérieur; il faut que la différence soit assez petite. A cette condition on peut calculer le champ dans le tore par la formule du solénoïde cylindrique.

Soit S la section du tore, H le champ, \mathfrak{J} l'intensité d'aimantation; le flux d'induction total à travers la section S est :

$$S(H + 4\pi\mathfrak{J}) = S\mu H = S\mathfrak{B}.$$

Pour le mesurer, on entoure l'anneau et sa couverture de fil isolé de m spires de fil isolé formant une bobine ab . Ces fils sont plus ou moins écartés l'un de l'autre et du tore, peu importe. Le flux total à travers cette bobine est $mS\mathfrak{B}$. Relions à un galvanomètre balistique : soit r la résistance du circuit tout entier; la quantité q d'électricité qui passe dans le galvanomètre quand le champ H varie de H_0 à H_1 , est :

$$\begin{aligned} q &= \frac{mS}{r} (\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1) = \frac{mS}{r} [H_2 - H_1 + 4\pi(k_2H_2 - k_1H_1)] \\ &= \frac{mS}{r} (\mu_2H_2 - \mu_1H_1). \end{aligned}$$

L'expérience consiste donc à faire varier H par bonds successifs et à déterminer par le galvanomètre balistique les variations correspondantes du flux d'induction.

Comme l'enroulement d'un anneau est une opération compliquée, on emploie le plus souvent d'autres formes de circuits magnétiques fermés; nous reviendrons là-dessus plus loin.

290. Aimantation d'un fer doux qui n'a jamais été aimanté. — Supposons que le cylindre de fer n'ait jamais été aimanté.

Faisons croître le courant dans la bobine magnétisante, et par conséquent le champ H , par intervalles brusques et réguliers $h, 2h, 3h, \dots ph = H$ (fig. 141). L'élongation de l'aiguille du galvanomètre balistique nous permet de déterminer la variation du flux, quand le champ passe de jh à $(j+1)h$, et par conséquent de construire par points la courbe $OABCDE$ donnant les inductions en fonction des champs.

Par exemple, nous faisons passer brusquement le champ magnétisant de 0 à h ; l'induction croît de 0 à $A\alpha$; le flux dans la petite bobine et l'élongation de l'aiguille du galvanomètre sont proportionnels à $A\alpha$.

Nous ramenons l'aiguille au repos. Nous faisons brusquement passer le champ de h à $2h$; l'induction croît de $A\alpha$ à $B\beta$. La variation de l'induction est $B\alpha'$, et l'élongation du galvanomètre est proportionnelle à $B\alpha'$.

Nous ramenons l'aiguille au repos. Nous faisons passer brusquement le champ de $2h$ à $3h\dots$ et ainsi de suite.

Cette courbe tracée, il est facile de calculer pour chaque point la valeur de la perméabilité magnétique μ en fonction de H .

On remarquera, et c'est un sérieux inconvénient de la méthode balistique, que les erreurs s'accumulent. Une erreur sur la détermination du point A, par exemple, influe sur la position des points suivants B, C, ... ; si les erreurs sont toutes de même sens, l'erreur sur les points extrêmes peut être énorme.

Voici comme exemple les résultats pour un échantillon de fer très doux.

H	\mathfrak{B}	μ
2	5 000	2 500
4	9 000	2 250
5	10 000	2 000
6,5	11 000	1 692
12	13 000	1 083
17	14 000	833
28,5	15 000	526
52	16 000	308
105	17 000	161
200	18 000	90
300	19 000	63 ;

Enfin, pour de grandes valeurs du champ, de l'ordre de 20 000 (on les obtient avec d'autres procédés que des bobines), la valeur de μ tombe jusqu'à près de 2.

Les résultats de ces expériences sont fondamentaux. Lorsque les champs sont faibles, l'introduction de barreaux de fer doux dans les bobines augmente considérablement (dans le rapport de 1 à 2 500 pour l'échantillon pris comme exemple) le flux mesuré par les phénomènes d'induction. Au contraire, pour des champs très intenses, le fer se conduit à peu près comme de l'air. La susceptibilité magnétique k devient très petite et tend vers zéro, la perméabilité μ tend vers l'unité. Il résulte de là que le gain de flux n'est pas du tout proportionnel à l'augmentation du courant dans la bobine magnétisante. Avec les fers ordinaires, on ne cherche pas à donner à \mathfrak{B} une valeur supérieure à 16 000 gauss ; on va même beaucoup moins loin dans les transformateurs : on reste au voisinage d'une induction de 4 000 gauss.

Remarque. — La courbe de première aimantation, où l'on porte les inductions en ordonnées et les champs en abscisses, ne tend pas rigoureusement vers une asymptote *horizontale*. En effet, le vecteur induction a pour expression $H(1 + 4\pi k)$; pour des champs intenses, la courbe tend vers l'asymptote :

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi \mathfrak{J}_m,$$

dans laquelle \mathfrak{J}_m désigne l'intensité d'aimantation maximum.

Pour les champs faibles, on a toujours le droit de poser :

$$\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J}.$$

291. Détails de la courbe d'aimantation.

DÉBUT. — La courbe d'aimantation présente entre A et B un point d'inflexion (fig. 141).

Pour des champs faibles, compris par exemple entre 0 et 2 gauss, k est relié à H par une formule linéaire : $k = a + bH$.

On a trouvé pour un échantillon de fer doux : $k = 6 + 5H$.

La courbe d'induction a donc la forme parabolique :

$$\mathfrak{B} = H(1 + 4\pi a) + 4\pi bH^2,$$

mais il en est seulement ainsi pour des champs faibles.

SATURATION MAGNÉTIQUE. — Il est hors de doute que \mathfrak{J} tend vers un maximum \mathfrak{J}_m . On a pu poursuivre les expériences jusqu'à 20 000 gauss ; on a trouvé pour un échantillon de fer doux que μ était alors réduit à 1,85. Or $\mu = 1 + 4\pi k$ par définition ; on avait alors $k = 0,07$.

Pratiquement, \mathfrak{J} reste constant à partir d'un champ de quelques milliers d'unités ; l'induction continue à croître, mais proportionnellement au champ, suivant la formule :

$$\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{J}_m.$$

ORDRES DE GRANDEUR. — Le tableau suivant donne les susceptibilités et perméabilités maximums pour différents corps. Quand on parle de métaux, *il ne s'agit que de l'échantillon étudié* ; les moindres modifications physiques peuvent agir considérablement sur les propriétés magnétiques.

Fer pur	H = 1,64	$k = 437$	$\mu = 5490$
Fil de fer doux	2,6	245	3080
Le même étiré	11	53	670
Fonte	3,3	167	2100
Fil de nickel ($\mathfrak{J}_m = 500$).	9,5	23,5	296
— cobalt ($\mathfrak{J}_m = 1300$).	25	13,8	174
Chlorure ferreux en dissolution concentrée.		0,000044	
Bismuth.		— 0,000015.	

292. Circuit magnétique. — Donnons une autre forme à la relation $\mathfrak{B} = \mu H$. Supposons un anneau de fer entouré de fil isolé régulièrement espacé. C'est l'appareil précédemment décrit (§ 289).

On a identiquement :

$$H = \frac{\mathfrak{B}}{\mu} ; \quad \text{d'où : } Hl = \mathfrak{B}s \frac{l}{\mu s},$$

où s est la section du cylindre de fer.

\mathcal{F} est le flux d'induction total \mathcal{F} . Le champ H a pour expression :

$$H = 0,4 \cdot \pi \cdot nI = 1,257 \cdot nI,$$

où n est le nombre de spires par centimètre et I le courant en ampères.

On a donc :
$$1,257 \cdot nl \cdot I = \mathcal{F} \frac{l}{\mu s}.$$

Or nl est le nombre total des spires N .

On a enfin :
$$1,257 \cdot NI = \mathcal{F} \frac{l}{\mu s};$$

le produit NI s'appelle *ampères tours* ;

le produit $1,257 \cdot NI$ s'appelle *force magnétomotrice* ;

\mathcal{F} est le flux d'induction total ;

$\frac{l}{\mu s}$ est la *réductance*.

On peut donc énoncer les résultats précédents en écrivant :

$$\text{force magnétomotrice} = \text{flux d'induction} \times \text{réductance},$$

règle absolument analogue à la loi d'Ohm :

$$\text{force électromotrice} = \text{flux d'électricité} \times \text{résistance}.$$

L'analogie se poursuit dans les expressions de la réductance et de la résistance : l'une et l'autre sont proportionnelles à la longueur et en raison inverse de la section.

293. Généralisation. — Cette formule ne nous apprend rien de nouveau et n'a pas d'intérêt dans le cas précédent : elle devient industriellement capitale dans les cas suivants où elle n'est plus rigoureuse.

1° ENROULEMENT IRRÉGULIER. — Supposons que le fil ne soit pas régulièrement espacé, qu'il ne soit enroulé par exemple que sur une portion de l'anneau : l'expérience apprend, comme le veut la formule généralisée par analogie avec la loi d'Ohm, que le flux total \mathcal{F} est à *peu près* indépendant de la répartition des spires sur le contour de l'anneau, de même que le courant est indépendant de la distribution des forces électromotrices le long du circuit. Il suffit, pour calculer le flux \mathcal{F} , de compter le nombre N des spires, sans s'occuper de leur répartition, et de mesurer le courant I qui les parcourt.

2° ENTREFER. — Supposons que l'anneau de fer soit interrompu entre deux de ses sections droites par une couche d'air de longueur l' , ce qu'on appelle un *entrefer*. La formule, généralisée par analogie avec la loi d'Ohm, permet encore de calculer le flux total ; on a :

$$1,257 NI = \mathcal{F} \sum \frac{l}{\mu s} = \frac{\mathcal{F}}{s} \left(\frac{l}{\mu} + l' \right), \text{ puisque } \mu = 1 \text{ pour l'air.}$$

Soit un anneau fabriqué avec le fer étudié au § 290, de $l^m = 100^{\text{cm}}$ de longueur, coupé par un entrefer de $l^{\text{mm}} = 0^{\text{cm}}, 1$.

On exige une induction : $\frac{\mathcal{F}}{s} = 16\,000$; on a, d'après le tableau :
 $\mu = 300$.

Sans entrefer : $\frac{l}{\mu} = 0,33$. Avec l'entrefer : $\frac{l}{\mu} + l' = 0,43$.

La réluctance a augmenté d'un tiers de sa valeur.

Pour obtenir $\mathcal{B} = 16\,000$, il faut un courant :

$\frac{16\,000}{1,257 \cdot N} 0,33$, sans entrefer; $\frac{16\,000}{1,257 \cdot N} 0,43$, avec l'entrefer.

3° CIRCUITS DÉRIVÉS. — La formule se généralise encore pour le cas des circuits magnétiques dérivés.

Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ sont les réluctances des branches de la dérivation, sur lesquelles on ne suppose appliquée aucune force magnétomotrice, la réluctance équivalente à la dérivation est donnée par la formule :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \sum \frac{1}{\mathcal{R}_i}.$$

Quel que soit l'intérêt de ces considérations, il ne faut pas oublier qu'elles ne sont pas rigoureuses.

D'abord on ne sait trop comment calculer la réluctance d'un corps dès qu'on s'écarte de la forme cylindrique : on se heurte à des difficultés encore plus grandes que dans le calcul de la résistance ohmique (§ 181), puisque la perméabilité dépend du flux, tandis que la résistivité n'en dépend pas.

Par exemple, on ne peut, autrement que par des formules empiriques, tenir compte des angles vifs et des changements brusques d'épaisseur.

D'ailleurs l'air est perméable; des dérivations tendent à se faire à travers lui.

On s'efforcera donc toujours de distribuer la force magnétomotrice, et par conséquent les spires, de manière que, le fer étant supposé remplacé par de l'air, les lignes de force aient alors précisément la forme que doivent avoir les lignes d'induction dans le fer. C'est en vue de ce résultat que les meilleurs constructeurs étudient leurs enroulements.

Malgré son imperfection théorique, ou plus exactement son inexistence théorique, l'assimilation des circuits magnétiques aux circuits électriques a rendu les plus grands services. Nous allons en faire des applications aux diverses méthodes qui permettent la mesure industrielle des perméabilités.

294. **Mesure des perméabilités : méthode balistique.** — La méthode du tore (§ 289) présente le grave inconvénient d'exiger un enroulement nouveau pour chaque éprouvette à essayer. Or, dans l'industrie, on ne peut utiliser une fonte pour la carcasse d'une dynamo ou d'un alternateur, une tôle pour la construction d'un transformateur, sans connaître leurs perméabilités. D'où la nécessité de méthodes rapides et cependant suffisamment correctes.

Voici ce que devient la méthode balistique.

Les éprouvettes à essayer sont prises sous forme de barreaux droits cylindriques D_1 et D_2 (fig. 144), entrant à frottement doux dans une

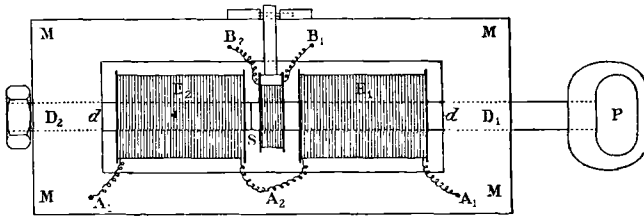


Fig. 144.

masse considérable MM de fonte très douce. Elles s'ajustent exactement l'une contre l'autre suivant la section S. On admet qu'elles sont ainsi mises en *court circuit magnétique*; en d'autres termes, que la réluctance du circuit total formé par les éprouvettes et le cadre est égale à la réluctance des éprouvettes seules.

Deux enroulements E_1 et E_2 produisent NI ampères tours, soit une force magnétomotrice égale à : $E = 4,257 NI$. Enfin une petite bobine est enfilée dans l'éprouvette D_1 ; elle est attachée à un bras flexible; elle tend à quitter brusquement sa position actuelle, quand en tirant sur la poignée P, on arrache l'éprouvette D_1 . Elle sert à mesurer l'induction totale au moyen de l'élongation de l'aiguille d'un galvanomètre balistique.

Soit S la section droite des éprouvettes, l la longueur dd extérieure au cadre; la réluctance est $l : \mu S$. Le flux d'induction total est

$$\text{donc : } 4,257 NI : (l : \mu S) = 4,257 \cdot \frac{\mu S NI}{l}.$$

Soit r la résistance du circuit de la bobine témoin, n le nombre des spires, q la quantité induite dans le galvanomètre; on a :

$$q = 10^{-8} \cdot \frac{\Delta \mathcal{F}}{r} = 10^{-8} \times 4,257 \times \frac{\mu S NI}{lr}.$$

295. **Mesure de la perméabilité : méthode d'arrachement.** — Supposons deux morceaux de fer ou d'acier ABCD, ABC'D', parfaitement polis et appliqués l'un sur l'autre suivant le plan AB.

Soit \mathfrak{J} l'intensité d'aimantation dans le plan AB : elle est par hypothèse dirigée perpendiculairement à ce plan. Tout se passe comme si nous avions en présence deux couches de magnétisme de densité :

$$\pm \sigma = \pm \mathfrak{J}.$$

La force d'arrachement ou force portante est égale à l'action que ces couches exercent l'une sur l'autre. Or nous savons que la force exercée sur l'unité de pôle par un plan indéfini couvert d'une couche σ , est égale à $2\pi\sigma$ et indépendante de la distance (§ 36) ; soit S l'aire de la surface AB. La force portante est donc :

$$2\pi\sigma \cdot \sigma S = 2\pi\sigma^2 S = 2\pi\mathfrak{J}^2 S.$$

L'expression précédente de la force portante qui est généralement indiquée, n'est cependant pas complète. En effet la force qui agit sur la couche négative, par exemple, est due à la couche positive en regard, et aussi au champ extérieur H. Ce champ, supposé normal à la couche, produit une force totale $H\sigma S$ qui s'ajoute à la force précédemment calculée.

Dans le cas d'un circuit magnétique fermé, il n'existe pas de magnétisme libre. Le champ H se réduit au champ magnétisant, toujours numériquement faible vis-à-vis de l'induction qu'il produit.

La force portante a pour expression :

$$F = 2\pi\mathfrak{J}^2 S + H\mathfrak{J}S = \frac{S}{8\pi} (\mathfrak{B}^2 - H^2).$$

H^2 est toujours extrêmement petit devant \mathfrak{B}^2 quand il s'agit du fer. On a donc très approximativement :

$$F = \frac{\mathfrak{B}^2 S}{8\pi}.$$

La figure 146 représente un schéma de l'appareil industriel. Un cadre massif MM forme, avec l'éprouvette cylindrique à essayer D, un circuit magnétique fermé. L'éprouvette est parfaitement dressée suivant la section S de contact avec le cadre. L'enroulement E produit une force magnétomotrice : $0,4\pi NI = 1,257 NI$; la réluctance du circuit est $l : \mu S$, puisqu'on néglige la réluctance du cadre ; l est la longueur dd de l'éprouvette comprise hors du cadre.

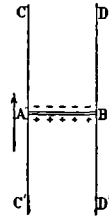


Fig. 145.

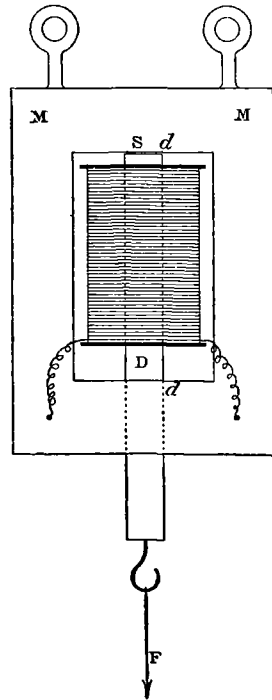


Fig. 146.

On a donc pour le flux total d'induction :

$$\mathfrak{B}S = 0,4 \cdot \pi \frac{NI\mu S}{l}, \quad \mathfrak{B} = 0,4 \cdot \pi \frac{NI}{l} \mu,$$

formule évidente dans le cas d'un enroulement régulier, puisque alors $0,4\pi NI : l$ est égal au champ H magnétisant.

On mesure la force d'arrachement F avec des poids ou avec des ressorts ; de la connaissance de F on déduit l'induction \mathfrak{B} et par conséquent la perméabilité μ . On peut construire la courbe cyclique (\mathfrak{B}, H) point par point, en recommençant dans chaque expérience le cycle complet des variations de H et produisant l'arrachement pour des valeurs de H différentes d'une expérience à l'autre.

296. Mesure de la perméabilité, méthode du champ. — Le principe de cette méthode, peu précise mais intéressante, consiste à former un circuit magnétique à l'aide de l'éprouvette à essayer D et d'un cadre massif de fonte douce M , *en maintenant quelque part un entrefer étroit dans lequel on mesure le champ* (fig. 147). Un enroulement E , traversé par un courant, produit une force magnétomotrice connue. Le champ H dans l'entrefer dépend évidemment de la somme des réluctances du cadre, de l'entrefer *et de l'éprouvette* ; il est donc possible de déduire la réluctance de l'éprouvette de la mesure du champ.

Les appareils industriels diffèrent suivant la méthode utilisée pour cette mesure.

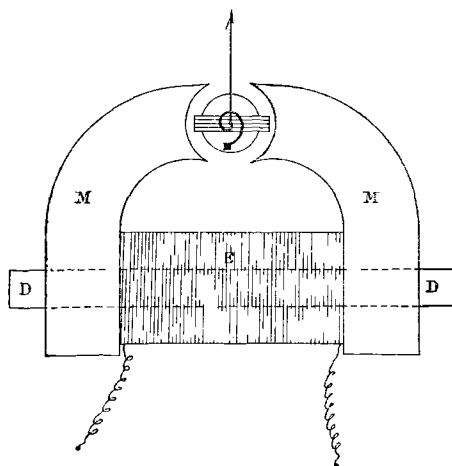


Fig. 147.

1° On place dans l'entrefer une bobine parcourue par un courant connu. On réalise ainsi un galvanomètre à cadre mobile, mais on renverse sa destination ; le courant est ici connu : c'est le champ H qu'on détermine. L'appareil est représenté schématiquement dans la figure 147.

2° On place dans l'entrefer un aimant de moment M ; on réalise ainsi un véritable magnétomètre. On ramène l'aimant à être toujours normal au champ à l'aide d'un ressort étalonné qui mesure le couple MH .

3° On peut déterminer H par la méthode balistique et une petite bobine qu'on enlève brusquement.

4° On emploie quelquefois des spirales de bismuth. La résistance du bismuth augmente à peu près linéairement quand on le place dans un champ magnétique H ; quand l'intensité du champ varie de 1000 gauss, l'augmentation de résistivité du bismuth pur est environ de 5%. Le fil de bismuth, convenablement isolé à la soie, est contourné en une double spirale (pour annuler les effets de l'induction) et placé dans l'entrefer. Les variations de résistance sont mesurées au pont de Wheatstone.

297. **Effet de la température sur l'aimantation.** — La figure 148 représente la forme des courbes d'aimantation *isothermes* pour le fer. L'allure est la même à toute température; mais l'isotherme T_1 est au-dessous de l'isotherme T_2 ($T_1 < T_2$) pour des champs faibles; elle passe au-dessus pour des champs intenses. A partir d'une *température critique*, qui pour les fers et aciers varie de 600 à 900°, l'aimantation devient quasiment nulle; ces métaux se comportent comme les corps faiblement magnétiques ordinaires. Pour le fer aussi pur que possible, la température critique est voisine de 750°. La diminution des propriétés magnétiques, faible à basse température, est extrêmement rapide au voisinage de la température critique; elle est principalement localisée dans un intervalle d'une cinquantaine de degrés.

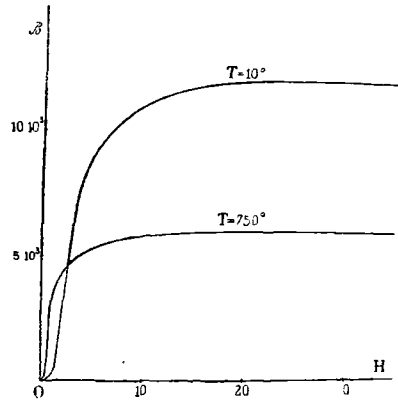


Fig. 148.

En particulier, l'influence des variations de la température ambiante sur l'aimantation est négligeable.

Si l'on représente les perméabilités en fonction des températures pour des champs invariables, on obtient des courbes singulières, mais faciles à interpréter grâce aux courbes d'aimantation isothermes.

A la température critique, μ est voisin de 1, quel que soit le champ. Pour des champs intenses, μ décroît continûment.

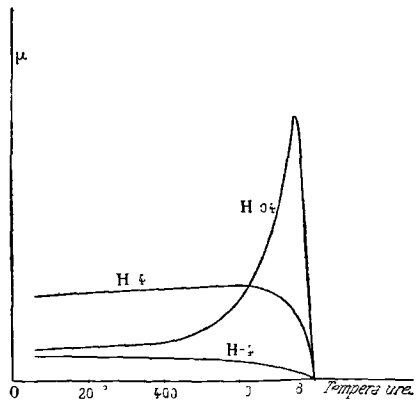


Fig. 149.

Pour des champs faibles, μ croît d'abord quand la température s'élève, passe par un maximum et décroît ensuite d'autant plus rapidement que le champ est plus faible.

Si la température et le champ varient simultanément, on décrit des cycles d'aimantation extrêmement complexes. Peu à peu ces cycles se fixent, il y a *accommodation*. Mais la forme du cycle fixé dépend des lois auxquelles obéissent les deux variables.

On a étudié l'aimantation du fer pur au-dessus de la température critique que nous savons voisine de 750° . L'aimantation très petite continue à décroître jusqu'à 860° . A cette température la courbe se modifie. Vers 1280° , l'aimantation croît brusquement et se remet ensuite à décroître quand la température s'élève. Il existerait donc pour le fer trois températures de transformation 750° , 860° et 1280° . D'autres phénomènes prouvent un changement d'état à ces températures; par exemple, la courbe des vitesses de refroidissement y possède des points singuliers. La détermination des températures critiques des fers et aciers industriels présente une certaine importance pratique.

Le moment d'un aimant permanent diminue généralement quand la température s'élève. Soumis depuis longtemps aux variations de la température ambiante, il finit par être une fonction bien déterminée de la température; circonstance qui permet les corrections dans la mesure de l'intensité horizontale du champ terrestre par la méthode des oscillations.

HYSTÉRÉSIS

298. Hystérésis. — L'hystérésis consiste dans la non-superposition des courbes d'aimantation et de désaimantation. Une expérience de cours facile à réaliser prouve cette non-superposition.

Employons la méthode d'arrachement; plaçons l'armature d'un électro au contact; faisons croître le champ magnétisant jusqu'à la valeur H_1 et chargeons l'armature de poids, mais de manière que l'arrachement ne se produise pas.

Nous pourrions faire décroître le champ de la valeur H_1 jusqu'à la valeur H_0 avant que l'arrachement se produise.

Ceci fait, repartons du champ nul et faisons croître H jusqu'à H_0 : l'armature chargée ne sera plus maintenue au contact par la force portante de l'électro. Nous pourrions même pousser le champ jusqu'à des valeurs très supérieures à H_0 , avant que la force d'attraction soit suffisante pour maintenir l'armature accolée.

Donc l'attraction est plus petite *pour le même champ magnétisant* H_0 , quand nous obtenons ce champ par valeurs croissantes, que lorsque nous l'obtenons par valeurs décroissantes.

299. **Énergie dissipée dans l'aimantation du fait de l'hystérésis.** — Une certaine quantité d'énergie est dissipée dans l'aimantation du fait de l'hystérésis. Pour la calculer, nous allons reprendre le raisonnement du § 245, par lequel nous avons montré que l'établissement d'un courant correspond à une perte apparente d'énergie.

Soit un solénoïde fermé tel que celui du § 289. Il est enroulé sur un tore en fil de fer fin, de manière à supprimer les courants de Foucault. L'équation régissant l'établissement du courant sous l'action d'une force électromotrice E, est :

$$ri = E - \frac{d\mathcal{F}}{dt},$$

\mathcal{F} est le flux total d'induction.

Soit S l'aire de la section droite, l la longueur moyenne du solénoïde, n le nombre de spires par centimètre, \mathcal{B} l'induction magnétique :

$$\mathcal{F} = n l S \mathcal{B}.$$

D'où l'équation :
$$ri = E - n l S \frac{d\mathcal{B}}{dt}.$$

Multiplions par $i dt$ et intégrons :

$$\int_0^n ri^2 dt = \int_0^n E i dt - n l S \int_0^n i d\mathcal{B}.$$

Or le champ H est à chaque instant $4\pi ni$; lS est le volume V du tore. L'équation précédente devient donc :

$$\int_0^n E i dt = \int_0^n ri^2 dt + \frac{V}{4\pi} \int_0^H H d\mathcal{B}.$$

Le premier membre représente l'énergie voltaïque dépensée. Elle se retrouve : 1° dans l'effet Joule (premier terme du second membre); 2° dans la variation de l'induction. L'énergie *absorbée par le fer pour ses changements d'aimantation* est donc par unité de volume :

$$W = \frac{1}{4\pi} \int H d\mathcal{B} = \frac{1}{8\pi} \int d(H^2) + \int H d\mathcal{B}. \quad (1)$$

Si le fer reste voisin de la saturation, $d\mathcal{B} = 0$ quelles que soient les valeurs de H, $\int H d\mathcal{B} = 0$; W se réduit au premier terme, ce qui est bien conforme à l'idée qu'on doit se faire du phénomène.

On peut généraliser cette expression. Si A, B, C, sont les composantes de l'aimantation, a , b , c , les composantes de l'induction, X, Y, Z, les composantes du champ, l'énergie absorbée par les variations d'aimantation est :

$$\int (X da + Y db + Z dc) = \frac{1}{8\pi} \int d(H^2) + \int (X dA + Y dB + Z dC).$$

Ces formules ne supposent aucune relation nécessaire entre les composantes de l'aimantation et celles de la force magnétique.

300. Cycles fermés. — La perte d'énergie par aimantation est industriellement importante.

Dans les dynamos, les alternateurs, ... le cycle des opérations est toujours fermé : périodiquement les noyaux sont aimantés dans un sens, puis dans le sens inverse. Pour chaque période l'énergie dissipée est représentée, au facteur $1:4\pi$ près, par l'aire comprise dans la courbe construite (à une échelle convenable) dans le plan (H, \mathfrak{B}) et limitant le cycle fermé des opérations. Si l'hystérésis n'existait pas, cette aire serait nulle ; le travail d'aimantation serait restitué pendant la désaimantation.

L'existence de l'hystérésis entraîne une *dissipation* d'énergie qui se retrouve à l'état de chaleur.

On peut donner plusieurs formes équivalentes à son expression.

On a identiquement : $\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{J}$.

D'où : $\int Hd\mathfrak{B} = \int HdH + 4\pi \int Hd\mathfrak{J}$.

Pour un cycle fermé, la première intégrale est nulle :

$$W = \int Hd\mathfrak{J} \quad (2)$$

De même : $\int Hd\mathfrak{B} = \int \mathfrak{B}d\mathfrak{B} - 4\pi \int \mathfrak{J}d\mathfrak{B}$

$$W = \int \mathfrak{J}d\mathfrak{B} \quad (3)$$

Les trois expressions (1), (2), (3) ne sont équivalentes que pour un cycle fermé.

Dans ce cas, l'énergie dissipée a également pour mesure l'aire limitée par les courbes (H, \mathfrak{B}) , (H, \mathfrak{J}) et $(\mathfrak{J}, \mathfrak{B})$.

Comme nous le verrons plus loin (§ 304), l'expérience montre que, dans les conditions ordinaires de fréquence, l'énergie dissipée *par cycle d'aimantation* (ou, si l'on veut, l'aire comprise dans la courbe fermée H, \mathfrak{B}) est sensiblement indépendante de la fréquence.

Il résulte de là que l'énergie dissipée *par seconde* est proportionnelle à la fréquence ; pour que les noyaux feuilletés ne chauffent pas d'une manière exagérée, il faut donc que l'aire du cycle soit d'autant plus petite que la fréquence est plus grande. Pour des fréquences élevées (100 périodes par seconde), on ne doit pas dépasser pour le fer des inductions de l'ordre de 3000 à 4000. Au delà, l'échauffement devient dangereux. C'est pourquoi on tend à limiter la fréquence à 25 dans toutes les applications du courant alternatif autres que l'éclairage.

301. Formule de Steinmetz. — Il est important d'avoir une idée de l'ordre de grandeur des quantités d'énergie dissipées dans

l'aimantation du fait de l'hystérésis. La formule de Steinmetz est remarquable comme ne contenant qu'un seul paramètre, caractéristique de la nature du métal.

L'énergie W dissipée dans un cycle d'opérations, par un volume V de métal, est donnée par la formule :

$$W = \eta V \left(\frac{\Delta \mathfrak{B}}{2} \right)^{1,6}, \text{ ergs centimètres cubes.}$$

$\Delta \mathfrak{B}$ est la variation de l'induction entre sa valeur minima et sa valeur maxima. Si l'induction varie entre des valeurs égales et de signes contraires $\pm \mathfrak{B}$, la formule devient :

$$W = \eta V \mathfrak{B}^{1,6}, \text{ ergs centimètres cubes.}$$

Voici des nombres fixant l'ordre de grandeur du coefficient η :

Fer d'excellente qualité	$\eta = 0,0009$
Fer ordinaire	$\eta = 0,0080$
Acier trempé	$\eta = 0,0260$.

Soit par exemple une bonne tôle de fer pour laquelle $\eta = 0,003$. Soit $\mathfrak{B} = \pm 10000$. On a :

$$\mathfrak{B}^{1,6} = 2,51 \cdot 10^6, \quad \eta \mathfrak{B}^{1,6} = 7530 \text{ ergs centimètres cubes.}$$

Soit 50 périodes par seconde; l'énergie dissipée par centimètre cube est : $376000 \text{ ergs} = 0.0376 \text{ joules.}$

Admettons 7,8 pour densité du fer; l'énergie dissipée par kilog, par seconde et dans les conditions précisées, sera :

$$\frac{1000}{7,8} \cdot 0,0376 = 4,8 \text{ joules.}$$

On compte en moyenne une puissance de 4,5 watts par kilogramme de fer, pour une fréquence 100 et une induction de ± 4000 gauss : cette perte correspond à la valeur $\eta = 0,002$.

Il y a avantage à choisir des fontes ou fers pour lesquels le coefficient η est petit. On a rencontré dans ce choix de grandes difficultés, surtout avec les tôles. Le recuit vers 800° augmente les dimensions des cellules de *ferrite*, ce qui réduit le coefficient η . Mais le refroidissement doit être lent; s'il est rapide, les grains de ferrite se brisent et l'hystérésis augmente. Malheureusement certains aciers doux, surtout laminés, sont après refroidissement lent dans un état particulièrement instable; le recuit entre 100 et 200° suffit pour diminuer les dimensions des grains de ferrite : les tôles *vieillissent*. Tel transformateur, qui d'abord ne chauffait pas, acquiert peu à peu à l'usage une hystérésis énorme, cause d'échauffements inacceptables. On rajeunit les tôles en les chauffant à 800° , mais elles vieillissent à nouveau par la suite.

L'acier au silicium-aluminium ne présenterait pas ces inconvénients.

302. **Hystérésimètres.** — Considérons la barre *indéfinie* de fer doux AB (fig. 150) non aimantée au début de l'expérience. Un aimant NS, d'abord très éloigné de la barre, en est rapproché par un déplacement le long de la droite OP normale à la barre : celle-ci s'aimante. Parvenu dans la position où il est représenté, l'aimant exerce sur la barre une force attractive dirigée suivant PO ; *mais il ne tend à la déplacer ni dans le sens AB, ni dans le sens BA, alors même qu'il y existe de l'hystérésis.* C'est évident par raison de symétrie.

Il en serait de même dans la position NS de l'aimant, quelles que

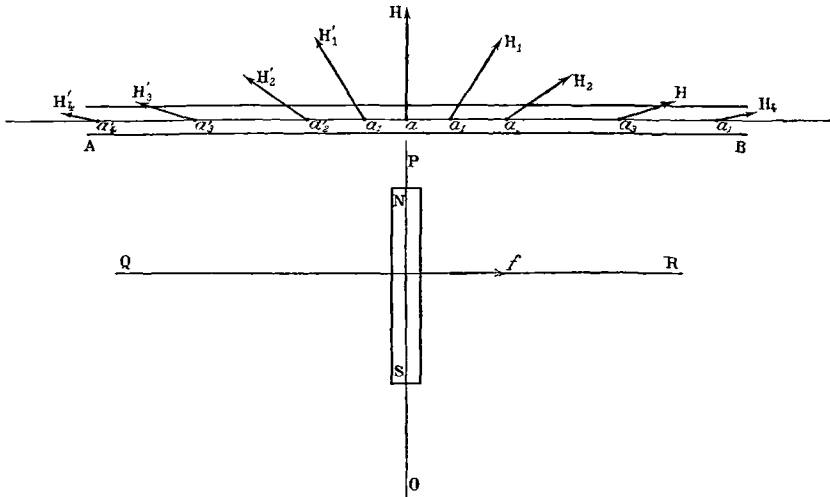


Fig. 150.

soient ses positions antérieures, si l'aimantation de la barre était une fonction bien déterminée du champ actuel ; c'est-à-dire si les champs extérieurs et les aimantations se correspondaient d'une manière nécessaire et déterminable une fois pour toutes. En effet, les champs H dus à l'aimant sont symétriques par rapport à OP. Dans l'hypothèse énoncée, il en est de même des aimantations ; tout est symétrique par rapport à OP : la composante normale à OP de l'action entre l'aimant et la barre est donc nécessairement nulle.

Supposons maintenant que l'aimant soit amené dans la position NS par un déplacement *parallèle à la barre*, dirigé dans le sens de la flèche *f* ; je dis qu'il résulte de l'existence de l'hystérésis une action entre l'aimant et la barre, dont une composante est dirigée suivant AB, c'est-à-dire dans le sens même du mouvement. *L'aimant entraîne tangentiellement la barre, si elle est libre de se déplacer dans sa propre direction.*

En effet, aux points a'_1, a'_2, \dots , le champ décroît ; l'aimantation est

donc respectivement plus grande en ces points qu'aux points symétriques a_1, a_2, \dots , où le champ a la même valeur, mais croît.

Les phénomènes d'hystérésis ne dépendant pas de la vitesse avec laquelle le champ varie, la force d'entraînement est indépendante de la vitesse du déplacement de l'aimant; elle reste la même si on l'arrête brusquement.

L'action tangentielle dépend de l'hystérésis, s'annule avec elle et varie dans le même sens. Cela veut dire qu'elle est plus grande pour un fer dont les courbes d'hystérésis laissent entre leurs branches aller et retour une aire plus grande. *C'est tout ce qu'on peut dire* : le phénomène est si compliqué, qu'il est impossible *a priori* de tirer de l'expérience quoi que ce soit de plus précis. Effectivement en chacun des points de la barre le champ varie non seulement en grandeur, mais en direction; nous sommes dans le cas complexe que nous avons écarté comme quasiment inextricable au § 285.

On obtient des phénomènes analogues en déplaçant un aimant en fer à cheval parallèlement à la barre; ou encore, et nous arrivons à la disposition industrielle de l'expérience, *en faisant tourner un aimant en fer à cheval autour d'un axe vertical, sous un anneau de fer mobile dans un plan horizontal autour du même axe*. Le plan moyen de l'aimant passe par un diamètre de l'anneau. Un ressort spiral ou à boudin mesure le couple d'entraînement. Les diverses parties de l'anneau (généralement en tôle découpée) sont successivement aimantées, dans un sens, puis dans le sens inverse, pendant la rotation de l'aimant (Blondel).

Le couple d'entraînement est indépendant de la vitesse de rotation de l'aimant, conformément à ce que nous verrons sur l'indépendance de l'hystérésis et de la vitesse des opérations. Mais les tôles du commerce étant fort peu homogènes, le couple d'entraînement dépend de l'azimut. Il vaut mieux maintenir une rotation continue (1 ou 2 tours par seconde) et *obtenir le couple moyen*.

Il est bon de déterminer les couples pour des rotations dans les deux sens et de prendre la moyenne.

Pour tirer de l'expérience une indication industrielle, on utilise une série d'anneaux *témoins* faits avec des tôles *étudiées par des méthodes théoriquement interprétables*. On détermine les couples d'entraînement pour ces anneaux, puis pour un anneau fait avec la tôle à essayer. On calcule l'aire d'hystérésis de celle-ci par interpolation. Les épaisseurs de tôle doivent être les mêmes dans tous les essais.

303. Emploi de fer divisé dans les appareils d'induction.

— Le noyau de fer d'un appareil d'induction joue deux rôles :

- 1° celui de corps facilement perméable aux lignes de force ;
- 2° celui de corps conducteur pour les courants électriques.

Si donc on ne prend aucune précaution, il se produira à l'intérieur

des noyaux des courants induits dits de Foucault, qui échaufferont le fer et seront la cause d'une perte d'énergie.

Par exemple, dans le noyau de la bobine de Ruhmkorff prendront naissance, par raison de symétrie, des courants de Foucault concentriques à l'axe commun des deux bobines. Pour les supprimer on divise le fer : on remplace la masse compacte par un faisceau de fils. Sans modifier beaucoup la perméabilité de l'ensemble (puisque les lignes d'induction sont parallèles aux génératrices du cylindre et par conséquent aux fils), on augmente beaucoup la résistance électrique, puisque les courants de Foucault doivent passer, d'un fil à l'autre, à travers la petite couche d'oxyde qui les sépare.

Le noyau de l'anneau Gramme est, pendant sa rotation, soumis à des champs variables, et par conséquent des courants de Foucault y prennent naissance. Il est facile de les supprimer : il suffit de feuilletter le fer parallèlement aux lignes de force, de constituer le noyau de l'anneau par l'empilement de disques de fer normaux à l'axe de rotation. Les courants induits ne peuvent se produire dans ces disques, puisque le flux qui les traverse est toujours sensiblement nul. Le flux d'induction au contraire, qui leur est parallèle, est parfaitement bien transmis par eux. Quant aux courants qui seraient inclinés sur les disques, ils ne pourront passer d'un disque à l'autre, à cause de la résistance de la petite couche d'oxyde qui recouvre toujours le fer.

Dans tous les cas, il est possible de trouver un sectionnement du noyau qui supprime à peu près complètement les courants de Foucault sans gêner le passage du flux d'induction.

304. Variations cycliques rapides. Rôle des courants de Foucault. — Dans tout ce qui précède nous n'avons étudié les phénomènes d'hystérésis que du point de vue statique. Il importe de savoir dans quelle mesure ils dépendent du temps.

L'aimantation dépend non seulement de la valeur actuelle du champ magnétisant, mais de ses valeurs antérieures : c'est en cela même que consiste l'hystérésis. Le temps peut parfaitement n'avoir aucune influence ; les courbes peuvent rester les mêmes, quelle que soit la vitesse de variation du champ,

$$dH : dt.$$

C'est à l'expérience de décider.

Soit un anneau de fil de fer servant de noyau à un enroulement régulier de résistance r . On envoie dedans un courant alternatif autant que possible sinusoïdal, et l'on mesure simultanément par un procédé quelconque (par exemple, au moyen d'un oscillographe, § 284), l'intensité i du courant et la différence de potentiel e aux bornes de l'enroulement (Hopkinson, Maurain).

Si \mathcal{F} est le flux total à travers l'enroulement, la différence de potentiel e est reliée à l'intensité du courant par l'équation :

$$e = ri + \frac{d\mathcal{F}}{dt},$$

qui ne suppose rien quant à la relation entre \mathcal{F} et i .

Connaissant e et i en fonction du temps, on peut déterminer $d\mathcal{F} : dt$, puis \mathcal{F} par intégration.

Le flux \mathcal{F} provient à la fois de la self induction de l'enroulement, de l'aimantation du noyau et de l'existence des courants de Foucault induits dedans, qui réagissent contre leur cause.

Si le fer était supprimé, \mathcal{F} serait simplement égal à Li , L étant le coefficient de self induction de l'enroulement : la courbe (\mathcal{F} , i) (\mathcal{F} en ordonnées, i en abscisses), serait une ellipse évanouissante, c'est-à-dire un morceau de droite.

Si le fer était remplacé par du cuivre rouge, le flux \mathcal{F} serait dû à

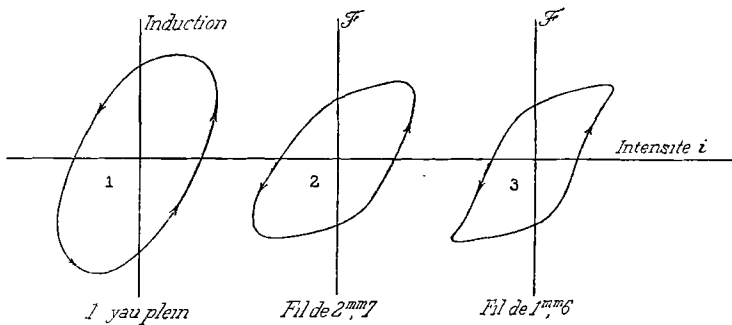


Fig. 151.

la self induction de la bobine et aussi au flux envoyé dans la bobine par les courants induits dans le cuivre. Le flux serait sinusoïdal tout comme le courant i , mais décalé *en arrière* par rapport au courant. La courbe (\mathcal{F} , i) serait une ellipse analogue à la courbe 1 de la figure 151 et parcourue dans le sens des flèches.

Enfin si on rétablit le noyau de fer, si les courants d'induction sont supprimés par une division convenable du fer *et si la courbe d'hystérésis ne dépend pas de la période des variations cycliques du champ*, la courbe (\mathcal{F} , i) doit être identique aux courbes statiques d'hystérésis (fig. 142).

Effectivement, pour une fréquence donnée du courant, on trouve avec le noyau en fer plein, avec le noyau en fil de fer de 2^{mm},7 de diamètre et en fil de 1^{mm},6, les courbes représentées dans la figure 151. La première est presque une ellipse ; la dernière est presque identique aux courbes statiques.

L'intensité des courants de Foucault augmente avec la fréquence ;

il résulte de là que, pour un noyau déterminé, la courbe (\mathcal{F}, i) se rapproche de l'ellipse, si on augmente la fréquence; elle se rapproche de la courbe statique, si on diminue la fréquence.

L'aire des courbes fermées (\mathcal{F}, i) représente la somme de l'énergie dissipée dans l'aimantation et dans l'effet Joule relatif aux courants de Foucault. Elle diminue, quand la fréquence augmente, pour les noyaux les plus compacts; elle est indépendante de la fréquence pour les noyaux divisés. Les courants induits exercent donc sur l'intérieur des noyaux compacts une action protectrice augmentant avec la fréquence. Dans les noyaux divisés, l'influence des courants induits est quasiment nulle; l'énergie dissipée est indépendante de la fréquence.

Toutefois il existe un très léger retard de l'aimantation sur le champ, retard prouvé par la forme arrondie qu'ont toujours les extrémités des cycles (courbe 3, fig. 151) : il est de l'ordre du millième de seconde. Ainsi le mot *hystérésis*, qui signifie *retard*, est fort mal choisi, puisque le phénomène est quasiment indépendant de la vitesse des variations du champ.

305. Trainage magnétique. — Plaçons dans un solénoïde un barreau de fer doux et excitions un champ faible, inférieur à 1 CGS.

Il existe un retard *réel* dans l'établissement de l'aimantation; il faut un certain temps pour que l'aimantation prenne la valeur limite qui correspond à un champ H d'intensité donnée, arrivant à cette valeur H suivant une loi donnée. L'expérience montre que ce retard se chiffre par secondes et minutes et ne peut être confondu avec les retards apparents ou réels déjà signalés : il dépend d'une foule de circonstances encore fort mal définies. Il intervient, d'ailleurs, assez faiblement sur la forme des courbes d'hystérésis pour les champs forts; les cycles fermés *correspondant à des champs faibles* n'ont pas exactement la même forme quand on les parcourt lentement ou rapidement.

Comme pour les champs très faibles, l'hystérésis proprement dite est quasiment nulle; la courbe qui relie le champ à l'aimantation est une droite dont l'inclinaison varie avec la rapidité des opérations.

306. Énergie magnétique. — Dans le cas où l'induction est reliée au champ par la relation : $\mathcal{B} = \mu H$, où μ est une constante, l'énergie W calculée au § 299 prend la forme :

$$W = \frac{\mu}{4\pi} \int H dH = \frac{\mu}{8\pi} \int d(H^2) = \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

L'expression de l'énergie totale emmagasinée dans un milieu du fait de son aimantation devient :

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \iiint (X^2 + Y^2 + Z^2) dv = \frac{\mu}{8\pi} \iiint H^2 dv. \quad (1)$$

Un corps dont la perméabilité est constante, qui par conséquent ne possède pas d'hystérésis, absorbe toujours de l'énergie pour s'aimanter et en restitue toujours en se désaimantant.

On remarquera l'analogie de cette expression et de l'expression de l'énergie emmagasinée dans un milieu du fait de sa déformation diélectrique (§ 112).

La formule (1) n'a pas de sens appliquée au fer : elle est cependant fondamentale, comme nous le verrons en Electroptique, parce qu'elle convient aux milieux peu magnétiques et par conséquent à l'éther.

Nous avons déjà démontré (§ 244) que l'énergie correspondant à l'existence d'un système de courants est exprimée par cette formule.

307. Un corps aimanté est-il une réserve d'énergie? — On est tenté de se représenter un corps aimanté comme nécessairement une réserve d'énergie; une distinction s'impose. Avant tout, il faut remarquer qu'à cause de l'hystérésis, un corps ne saurait être une réserve définie d'énergie. Reposons donc le problème. Plaçons-nous au point E du cycle et cherchons à ramener à zéro l'aimantation; faut-il toujours fournir de l'énergie ou recevra-t-on de l'énergie?

D'une manière générale il faut fournir de l'énergie; on décrira, par exemple, le parcours EFGO pour lequel $\int Hd\mathcal{B}$ est positif. Suivant EFG, H et $d\mathcal{B}$ sont négatifs (aire EGP); suivant GO, $H < 0$, $d\mathcal{B} > 0$; l'aire OGP correspond à une énergie restituée, mais inférieure à l'énergie absorbée EGP.

Si on a l'habitude de voir dans l'aimantation une réserve nécessaire d'énergie, c'est qu'on envisage le cas où il y a du magnétisme libre, cas des circuits magnétiques non fermés, précisément exclus de ce raisonnement. Soit une courte barre de fer aimantée; supposons-la infiniment flexible. Elle tendra à se courber et cédera de l'énergie; mais une fois transformée en circuit magnétique fermé, il faudra dépenser de l'énergie pour la désaimanter.

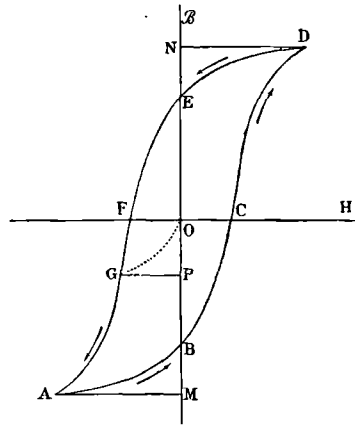


Fig. 152.

L'observation qu'un circuit fermé se désaimante sous l'influence des chocs ne prouve rien, car l'énergie des vibrations intervient, si peu importante qu'elle paraisse à première vue.

Cette distinction des circuits ouverts et fermés est importante.

Il est clair que ces remarques ne s'appliquent pas aux corps dénués d'hystérésis (§ 306).

308. Écrans magnétiques. — La tendance des lignes de force à passer par le milieu le plus perméable fournit le moyen de protéger un espace contre un champ extérieur. Plaçons par exemple, entre les armatures N et S d'un électro ou d'un aimant, un cylindre de fer ; cette disposition est réalisée dans le galvanomètre à cadre mobile ou dans les dynamos à tambour. Les lignes de force se concentrent dans la masse du cylindre ; le champ est considérablement réduit, presque annulé, à l'intérieur de l'espace O (fig. 153) qu'il délimite.

On protège ainsi des galvanomètres contre le champ dû à des aimants voisins ou à des courants vagabonds, si fréquents depuis l'introduction des tramways électriques.

Les propriétés de ces écrans ont des conséquences paradoxales qu'il est bon de mettre en évidence.

Supposons que dans l'espace O limité par le cylindre de fer, placé normalement aux lignes de force d'un champ uniforme H, se trouve un fil rectiligne traversé par un courant i et parallèle aux génératrices du cylindre.

Si le cylindre n'existait pas, le courant subirait une force F normale à sa direction et aux lignes de force, et égale par unité de longueur à $0,1 \cdot Hi$.

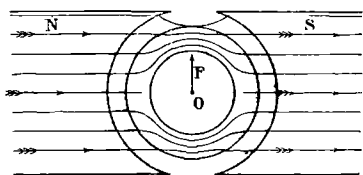


Fig. 153.

Dès que nous disposons le cylindre, cette force est sensiblement annulée. Cependant si nous établissons un lien rigide entre le cylindre et le fil, les lois générales de l'électrodynamique nous apprennent que le système tend encore à se déplacer avec cette même force $0,1 \cdot Hi$. Il semble donc, et c'est là qu'est le paradoxe, que cette

force existe ou n'existe pas suivant que nous établissons ou n'établissons pas de lien rigide entre le cylindre et le fil.

La contradiction apparente se lève en remarquant que, dans un champ uniforme, le cylindre de fer n'est sollicité par aucune force. Si au contraire un courant existe dans l'espace O, son champ se superpose au champ extérieur ; il se produit donc une dissymétrie dans le champ total et dans l'aimantation du cylindre. D'où résulte une force qui tend à déplacer ce cylindre perpendiculairement au champ H. La force agissant entre le champ H et le courant a diminué ; la force agissant sur le cylindre a augmenté d'autant.

Même paradoxe pour les phénomènes d'induction. Déplaçons le fil seul sans toucher au cylindre : la force électromotrice induite est

beaucoup plus petite quand le cylindre existe que quand il n'existe pas. Lisons le fil au cylindre et produisons le même déplacement : la force électromotrice induite est identiquement la même avec ou sans le cylindre.

Effectivement dans le premier cas nous déplaçons le fil dans un champ quasi nul. Dans le second, quand nous déplaçons le cylindre, les lignes d'induction dont le flux est conservatif, doivent toujours se retrouver en même nombre. Donc, puisqu'elles sont n fois moins denses dans l'espace O , elles doivent le traverser n fois plus vite. Le nombre de lignes balayé par le fil dans son déplacement est donc le même avec ou sans le cylindre, pourvu qu'il soit lié au cylindre.

Nous verrons plus loin l'importance de ces considérations quand nous parlerons des machines où les tiges conductrices sont noyées dans un milieu magnétique (cage d'écureuil d'un moteur à champ tournant, par exemple, § 346).

ÉLECTROAIMANTS ET AIMANTS

309. **Électroaimants.** — On appelle *électroaimants* tous les appareils dans lesquels on utilise l'aimantation du fer doux sous l'influence d'un champ magnétisant. Ils sont généralement formés d'un circuit magnétique ayant une aussi petite réluctance que possible et comprenant un *entrefer*. On appelle *armature* de l'électroaimant une pièce, généralement en fer doux, qui permet de supprimer l'entrefer et de rendre continu le circuit magnétique de fer.

On utilise les électroaimants, comme d'ailleurs les aimants permanents : 1° simplement pour porter leur armature; 2° pour produire des champs plus ou moins intenses et plus ou moins uniformes; 3° pour attirer leur armature.

Nous allons examiner successivement ces différents cas.

310. **Force portante.** — Nous avons donné au § 295 l'expression exacte de la force portante : $F = 2\pi\mathfrak{J}^2S + H\mathfrak{J}S$.

On a généralement : $\mathfrak{B} = H + 4\pi\mathfrak{J}$. Or on utilise les électros dans des conditions où la valeur numérique de $4\pi\mathfrak{J}$ est considérable par rapport à celle de H . Poser $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J}$ revient à négliger 1 devant $4\pi k$, ou à retrancher 1 de la valeur exacte de μ . On peut

donc poser :

$$F = \frac{\mathfrak{B}^2 S}{8\pi},$$

où \mathfrak{B} est l'induction. Évaluée non plus en dynes, mais en grammes,

la force portante est :

$$\frac{\mathfrak{B}^2 S}{8\pi \cdot 981}.$$

Le calcul donne :

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{B} = 1\,000 & F = 41 \text{ gr. par cent. carré.} \\ \mathfrak{B} = 2\,000 & 41 \times 2^2 = 164 \text{ gr. par cent. carré.} \\ \dots & \dots \\ \mathfrak{B} = 15\,000 & 41 \times 15^2 = 9\,225 \text{ gr. par cent. carré} \end{array}$$

et ainsi de suite.

Dans la pratique on emploie des électroaimants (fig. 154) très ramassés, afin que la réluctance soit faible : il suffit d'avoir, entre l'armature EF à laquelle est accroché le poids, et le reste du circuit magnétique, juste assez de place pour loger le fil nécessaire à obtenir un nombre suffisant d'ampères tours.

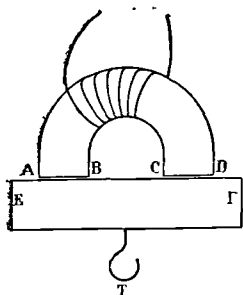


Fig. 154.

Soit à supporter une tonne. Il n'est pas avantageux de dépasser une induction $\mathfrak{B} = 16\,000$, pour laquelle la force portante par centimètre carré est voisine de 10 kilogrammes : cette force s'exerce à travers les deux surfaces de contact AB, CD, dont les aires sont respectivement s ; il faut avoir : $2s \times 10 = 1\,000$, d'où :

$s = 50$ centimètres carrés. Il suffit que la pièce

de fer supposée cylindrique qui forme l'électro, ait 8 centimètres de diamètre.

311. Remarques sur la force portante.

REMARQUE I. — Si le flux d'induction n'est pas uniforme, la force portante est mesurée par l'intégrale :

$$F = \frac{1}{8\pi} \iint \mathfrak{B}^2 dS.$$

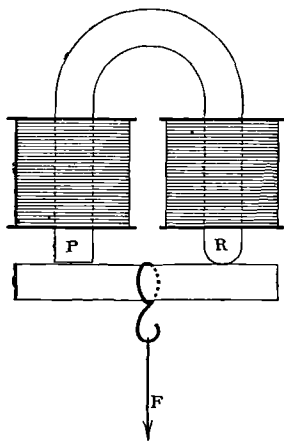


Fig. 155.

Quand des quantités sont assujetties à avoir une somme constante, la somme de leurs carrés est minimum quand elles sont égales. Si donc le flux d'induction est assujetti à être constant, il y a avantage, pour augmenter la force portante, à le répartir inégalement.

On s'explique ainsi des expériences paradoxales qui se ramènent toutes à la suivante. Soit (fig. 155) un électro dont un des pôles est légèrement arrondi. Il a comme armature un barreau de section carrée portant un crochet auquel on peut suspendre des poids. L'expérience montre que

l'arrachement commence toujours par le côté plat. L'explication est

simple; le flux est le même des deux côtés, mais il est plus uniformément réparti du côté plat que du côté rond.

Il ne faut pas conclure de là qu'on ait avantage à arrondir les pôles de l'électro; on augmente ainsi la réluctance. Le pôle rond est plus fort que le pôle plat; mais il est généralement moins fort que le serait le pôle plat *si les deux pôles étaient plats*. En d'autres termes, l'augmentation de réluctance et la diminution concomitante du flux produisent une diminution de force portante plus grande sur le côté plat que sur le côté rond.

Il résulte de ce qui précède que la méthode de mesure de la perméabilité par arrachement (§ 295) donne ordinairement des résultats *faux par excès*. En effet, il est difficile de réaliser sur les surfaces de contact une distribution uniforme du flux.

REMARQUE II. — On sait depuis cent cinquante ans que des aimants permanents géométriquement semblables, et dont les points homologues ont même aimantation, ont une force portante proportionnelle à la puissance 2 : 3 de leur poids ou de leurs volumes :

$$F = p P^2, \quad F : P = p : \sqrt{P};$$

p est un coefficient caractéristique de l'aimantation.

Cette règle résulte immédiatement de ce que les forces portantes sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles aux surfaces de contact qui croissent comme le carré des dimensions homologues, et par conséquent comme la puissance 2 : 3 du volume ou du poids.

La même règle s'applique aux électroaimants géométriquement semblables, possédant les mêmes aimantations, par exemple aimantés à saturation. Les ampères tours doivent être en raison inverse des dimensions homologues : la réluctance est en effet proportionnelle à la longueur et en raison inverse de la surface.

On s'explique aisément comment de petits aimants ou de petits électros peuvent porter une charge égale à plusieurs centaines de fois leur propre poids, *pourvu qu'ils soient très petits*. Le rapport $F : P$ tend vers l'infini pour $P = 0$.

Pour les aimants permanents en fer à cheval, le coefficient p est de l'ordre de 20, quand on exprime le poids en kilogrammes. Un aimant d'un kilogramme porte donc 20 kilogrammes; un aimant de 1 000 : 8 = 125 grammes porte 20 000 : 4 = 5 000 grammes; un aimant de 15 grammes porte 1 250 grammes, et ainsi de suite.

On a construit un petit électro de 85 grammes portant 600 fois son propre poids, soit 51 kilogrammes.

312. Production de champs intenses (fig. 156). — On emploie un circuit ABCDE terminé par deux pièces G et H plus ou moins coniques. D'après la propriété générale des lignes d'induction (définies par les phénomènes d'induction) de circuler plus facilement

dans le fer que dans l'air, on conçoit que le flux, créé par les ampères tours dans le circuit ABCD, se continue en majeure partie dans les pièces coniques. Assurément il divergera et s'épanouira dans l'air, parce que la perméabilité de l'air qui est voisine de l'unité, devient de plus en plus comparable à celle du fer, à mesure que le flux d'induction est plus dense.

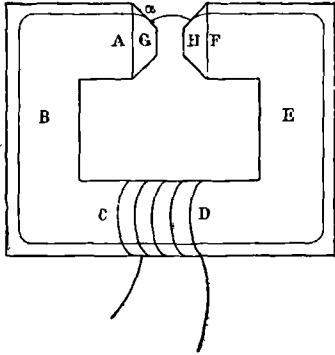


Fig. 156.

En définitive, il pourra exister entre les plans parallèles G et H un champ considérable. Il est évidemment d'autant plus grand, toutes choses égales d'ailleurs, que les aires en regard sont plus petites et plus rapprochées. On obtient couramment à l'aide de ces électros des champs supérieurs à 10 000 unités, soit 50 000 fois plus grands que la composante horizontale du champ terrestre.

On peut aller jusqu'à 40 000 unités dans des espaces de l'ordre du centimètre cube.

313. Production de champs d'intensité moyenne dans les applications industrielles. — Généralement on veut faire tourner une bobine dans le champ, ce qui explique la forme que nous donnons à l'entrefer du circuit magnétique (fig. 157) ABCDEF. Généralement aussi cet entrefer serait si considérable, que la réluctance du circuit deviendrait énorme.

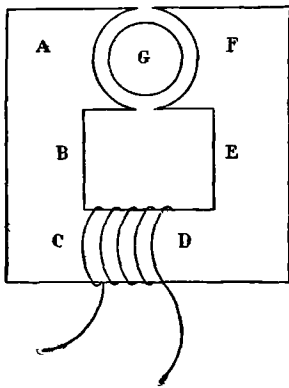


Fig. 157.

On lève la difficulté en plaçant en G une masse de fer et en ne laissant que juste la place pour la rotation de la bobine.

Si c'est un anneau Gramme qui forme la pièce mobile, on enroule le fil de cet anneau, non plus sur un tore en bois, mais sur un tore en fer. Le tore lui-même est entraîné dans le mouvement de rotation, mais les phénomènes sont à peu près les mêmes que s'il était immobile. On gagne à cette disposition que l'entrefer est considérablement réduit : les lignes

d'induction passent dans l'anneau. Le champ n'est plus uniforme ; il a précisément la forme que nous étudierons au § 319.

Bien entendu, on ne donnera à la partie BCDE du circuit magnétique que juste les dimensions nécessaires pour loger le fil de la

bobine magnétisante. En *ramassant* l'électro, on diminue la réluctance (donc le courant et le travail d'aimantation), le poids de l'appareil et enfin la quantité de fer ou de fonte douce utilisée.

314. Déplacements des aimants. Action des électroaimants sur leurs armatures. — Toutes ces actions se ramènent à une loi très simple et très générale.

Les corps se déplacent toujours de manière que le circuit magnétique ait le moins de réluctance possible.

Cette règle admet trois corollaires qui correspondent aux trois facteurs de la réluctance : l , s et μ . (§ 293).

1° les lignes de force tendent à se raccourcir comme si elles étaient tendues ;

2° elles tendent à s'écarter comme si elles se repoussaient ;

3° elles tendent à traverser le milieu le plus perméable.

ACTION DES AIMANTS LES UNS SUR LES AUTRES. — Tout se passe comme si : 1° les parties nord se repoussaient ; 2° les parties sud se repoussaient ; 3° les parties nord attireaient les parties sud. Cela résulte immédiatement des lois générales précédentes. Les lignes de force qui émanent d'un pôle nord vont aboutir à un pôle sud fig. 158. Elles tendent à se raccourcir, d'où attraction.

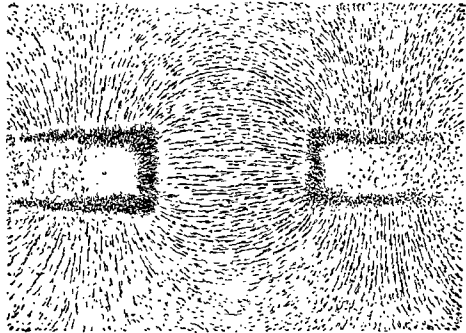


Fig. 158.

Présentons au contraire un pôle nord devant un autre pôle nord ; les lignes de force divergent des deux pôles pour s'absorber dans les pôles sud : or elles tendent à s'espacer le plus possible, d'où répulsion (fig. 159).

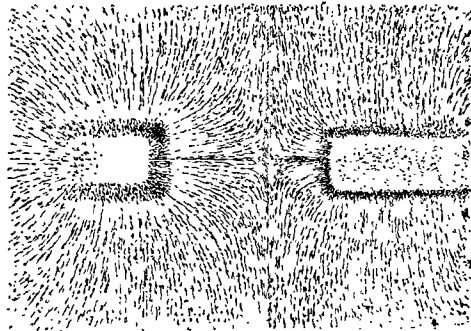


Fig. 159.

ACTION DES ÉLECTROAIMANTS SUR LEURS ARMATURES.

— Les phénomènes sont plus intéressants, parce que l'aimantation n'est plus invariable et indépendante de la position des corps comme dans le cas précédent.

Un électro attire généralement son armature, puisque l'armature, en s'appliquant sur l'électro, diminue généralement l'entrefer et par conséquent la réluctance du circuit magnétique. Mais il ne faut pas croire qu'il y ait toujours attraction : il y a répulsion pour des formes particulières d'électros et d'armatures.

Supposons un électro tel que celui de la figure 156, et plaçons un clou avec sa tête au point α : il prendra la direction de la ligne de force qui émane du point α . C'est en effet pour cette direction qu'il diminue le plus possible la réluctance du circuit magnétique. Si nous cherchons à l'appuyer contre la pièce GA en poussant son extrémité libre, il revient à sa position d'équilibre comme lancé par un ressort.

Soit un électro dont le noyau est formé d'un tube de fer d'une dizaine de centimètres de longueur. Rien d'abord de particulier : il attire de petits morceaux de fer placés devant ses pôles. Prenons un bout de fer de 2 ou 3 centimètres de longueur et introduisons-le dans le tube : il est repoussé. C'est qu'en effet le circuit magnétique extérieur au tube de fer est formé d'air, et sa réluctance est considérable. Le tube de fer, en s'allongeant par la répulsion du bout de fer introduit, diminue cette réluctance.

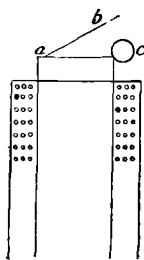


Fig. 160.

Soit un électroaimant dont le noyau est formé par un cylindre circulaire de fer dont les bases sont des sections droites.

Posons à plat sur une des bases un disque de fer mince ab d'un diamètre un peu plus petit. Le disque ne reste pas à plat, il se soulève et tend à améliorer le circuit magnétique (fig. 160). Plaçons de même une petite balle ronde c : elle se met en porte à faux sur le pourtour de la base de l'électro.

On pourrait multiplier indéfiniment les exemples de ces répulsions qui s'expliquent par la règle générale.

315. Construction des électroaimants servant dans les appareils télégraphiques, sonneries, etc. — Les règles générales s'appliquent à la construction des électros, pour petits qu'ils soient et peu important qu'il paraisse au premier

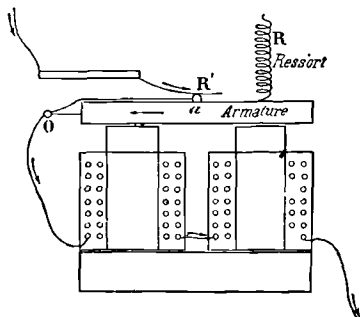


Fig. 161.

abord d'utiliser au mieux le fer et le cuivre, pour des appareils devant fournir un travail minime.

On cherche à donner une réluctance aussi petite que possible : le circuit formé par l'électro et son armature est donc à peu près fermé.

Quelquefois l'électro a la forme dite en fer à cheval (fig. 161 et 162). Les ampères tours peuvent être répartis d'une manière quelconque sur le circuit magnétique ; ou bien les deux jambes sont entourées chacune d'une bobine, ou bien le fil ne se trouve qu'autour d'une seule jambe.

L'électro peut être *blindé* (fig. 163) ; il se compose alors d'une

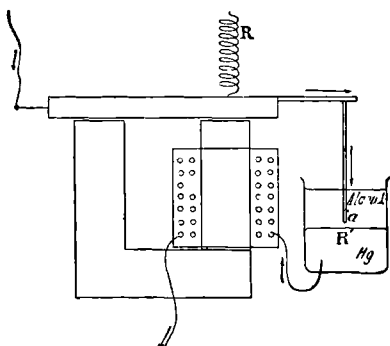


Fig. 162.

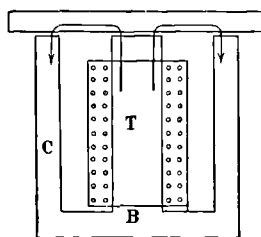


Fig. 163.

tige intérieure **T** et d'un cylindre annulaire **C**, réunis par un disque **B** : le tout en fer.

316. **Électroaimants polarisés.** — On emploie souvent des électros ayant un aimant comme armature ou comme noyau.

1° Si l'armature est un aimant, on peut obtenir, suivant le sens du courant dans les bobines, des forces de sens contraires. Cette propriété est utilisée dans la télégraphie en duplex. On peut envoyer deux dépêches à la fois dans le même sens à travers des appareils possédant des électros les uns à armature polarisée, les autres à armature ordinaire. Les derniers n'obéissent que pour un sens convenable du courant.

On emploie encore des armatures polarisées dans les trembleuses devant fonctionner avec un courant alternatif : bien entendu, ce courant doit avoir sensiblement la période de la trembleuse vibrant isolément (§ 336).

2° Il est parfois avantageux d'employer des *noyaux polarisés* pour produire un *déclenchement* avec un courant de très faible intensité. Imaginons l'armature maintenue au contact par le magnétisme permanent et tirée par un ressort qui n'équilibre pas complètement l'attraction magnétique ; le moindre courant qui diminue l'aimantation, fait lâcher prise. Le courant supprimé, il faut bien entendu ramener mécaniquement l'armature au contact, pour que l'opération puisse recommencer.

Cette disposition se rencontre dans le télégraphe de Hughes.

3° On peut enfin augmenter l'action magnétique d'un faible courant

au moyen de noyaux polarisés. Cela tient à la forme de la courbe d'aimantation et de la loi d'attraction. L'attraction est généralement proportionnelle au carré de l'aimantation \mathfrak{J}^2 ; sa variation est donc proportionnelle à $d(\mathfrak{J}^2) = 2\mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{J}$. Pour un même $d\mathfrak{J}$, elle varie donc proportionnellement à \mathfrak{J} . D'autre part, la variation $d\mathfrak{J}$ d'aimantation d'un noyau polarisé pour un même courant dépend de la valeur actuelle de l'aimantation. Par exemple, si le noyau n'est pas aimanté, nous savons, d'après la forme de la courbe d'aimantation, qu'un petit courant produit une très petite variation $\Delta\mathfrak{J}$ (fig. 141). De même si le noyau est aimanté presque à saturation. Il y a donc une valeur de \mathfrak{J} , pour laquelle $\Delta\mathfrak{J}$ sera maximum. Ces deux raisons expliquent l'avantage d'un noyau convenablement polarisé, ni trop peu, ni trop.

317. **Bobines à plongeurs.** — Une des principales difficultés d'emploi des électroaimants consiste dans l'étroitesse de leur champ d'action. Dès que l'armature s'écarte de quelques millimètres des pôles, l'action tombe à une très petite fraction de sa valeur au contact.

On a cherché à corriger ce défaut par de nombreuses combinaisons mécaniques; on a proposé l'emploi de leviers courbes appuyés sur d'autres leviers courbes, de parallélogrammes articulés, d'expansions polaires de profils spéciaux, généralement coniques, d'armatures rotatives de formes circulaires excentrées. Le lecteur pourra aiguïser son ingéniosité à retrouver les dispositifs convenant à des problèmes déterminés.

Un des meilleurs moyens d'étendre le champ d'action des attractions magnétiques consiste dans l'emploi des bobines à plongeurs, c'est-à-dire de solénoïdes dans lesquels pénètrent des masses cylindriques ou coniques de fer doux.

Il serait très difficile de traiter le problème théoriquement; il faudrait calculer le magnétisme libre en chaque point du fer, et l'action sur ce magnétisme du champ du solénoïde. Résumons les résultats expérimentaux.

CYLINDRES. — Utilisons d'abord un cylindre de fer doux infini, pratiquement un cylindre ayant plus de deux fois la longueur de la bobine (fig. 164); approchons-le de la bobine en le déplaçant dans le sens de la flèche. Portons en ordonnée la force de succion bb' , et en abscisse la position B ou b de l'extrémité du cylindre.

Nous obtenons la courbe en trait plein. La succion devient sensible quand l'extrémité B arrive au voisinage de l'extrémité D de la bobine; elle croît lentement, passe par un maximum M quand l'extrémité du cylindre coïncide avec l'extrémité de la bobine. Elle décroît rapidement et devient quasi nulle pour la position N du bout B.

Quand la longueur du cylindre est de plus en plus petite, les positions M et N du maximum de la succion et de son retour à zéro se

déplacent vers la gauche, le commencement de la courbe restant toujours sensiblement au même point.

Quand les longueurs du cylindre et de la bobine sont égales, le maximum M_1 est quasiment au milieu de la bobine; le retour à zéro a lieu pour le point N_1 qui coïncide avec l'extrémité E.

Enfin, quand le cylindre est très court, les points DM_2N_2 sont extrê-

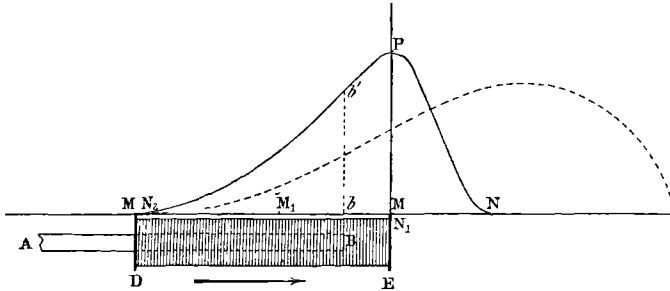


Fig. 164.

mement voisins. Cela signifie que l'action n'est sensible qu'au voisinage de l'extrémité D, et devient nulle aussitôt que le petit cylindre se trouve dans le champ sensiblement uniforme de la bobine.

L'emploi de plongeurs étend donc considérablement le champ d'action d'un solénoïde.

CÔNES. — Avec les plongeurs coniques *présentés par la pointe*, on obtient une courbe (pointillée sur la figure) moins abrupte qu'avec les plongeurs cylindriques. Pour des plongeurs assez longs, le maximum de succion a lieu quand l'extrémité pointue du plongeur dépasse notablement l'extrémité E du solénoïde.

On parvient avec les plongeurs coniques à graduer davantage l'effort; on réalise une distribution plus symétrique de la succion.

318. Comparaison entre les aimants permanents et les électroaimants. — Voici d'abord une expérience fondamentale.

Prenons un *aimant permanent* en fer à cheval dont les branches soient assez longues (fig. 165). Enfilons dessus une bobine reliée à un galvanomètre balistique et déterminons l'impulsion sur le système mobile, quand on arrache l'armature ou qu'on la remet au contact. L'expérience prouve que *l'élongation maxima de l'aiguille du galvanomètre est nulle si la bobine occupe la position B_1* ; elle croît à mesure que la position de la bobine B s'approche des extrémités de l'aimant.

Le premier résultat *prouve que l'existence de l'armature ne modifie pas le flux d'induction total qui traverse la section médiane de l'aimant permanent*. Les résultats suivants démontrent que *l'armature*

modifie la manière dont le flux d'induction invariable s'épanouit dans l'air (Comparer avec la théorie du téléphone, § 111 du Cours de Première).

Les résultats sont tout différents avec un électroaimant de même forme. Maintenons invariable le courant magnétisant et arrachons l'armature : la bobine témoin placée en B_4 accuse une diminution du flux d'induction. En effet, la réluctance a augmenté; les mêmes ampères tours produisent un flux d'induction moindre.

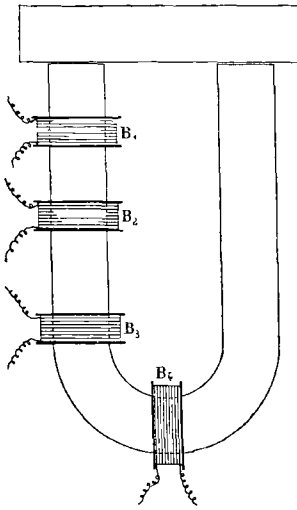


Fig. 165.

L'armature d'un électroaimant rassemble les lignes d'induction et en augmente le nombre; l'armature d'un aimant permanent les rassemble sans augmenter leur nombre.

Nous avons utilisé l'augmentation du champ qui résulte du rassemblement des lignes de force par une armature, dans l'emploi d'un cylindre de fer doux entre les branches de l'aimant du galvanomètre à cadre mobile (Cours de Première, § 39).

Voici une curieuse conséquence de la différence entre l'électroaimant et l'aimant permanent. Supposons deux appareils de même forme : on règle le courant magnétisant de l'électro de manière qu'au contact les forces portantes soient les mêmes pour l'électro et l'aimant permanent; on vérifie que l'aimant attire son armature plus que l'électroaimant (toutes choses restant égales d'ailleurs), si les armatures ne sont pas au contact.

CHAPITRE IX

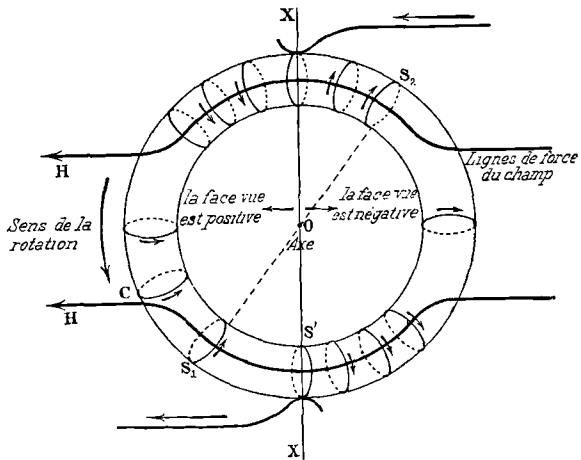
DYNAMOS. ALTERNATEURS. TRANSFORMATEURS

Il n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage de développer la partie *technique* des applications de l'Électricité. Un Cours de Licence ne peut cependant pas s'en désintéresser ; le physicien, ayant à chaque instant dans son laboratoire besoin de moteurs, de générateurs et de transformateurs, doit en posséder la théorie générale. Peu lui importe d'ailleurs les procédés les plus économiques de bobinage ou les détails de fabrication.

Dynamos et moteurs à courants continus.

319. **Calcul de la puissance d'un moteur à courant continu.** — Reprenons la théorie du moteur à courant continu donnée au § 112 du Cours de Première (fig. 166).

Remplaçons l'enroulement par des circuits séparés supposés traversés par un courant constant. Évaluons le travail effectué par les forces électromagnétiques quand une spire passe de la position 1 à la position 2, pour lesquelles les flux totaux dans la spire sont \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .



La règle générale dit que le travail effectué par les forces électro-

magnétiques est égal à : $i(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1)$, en dixièmes d'ergs, ou à : $0,4 \cdot i(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1)$, en ergs.

Quand une spire part de la verticale pour y revenir, le flux alors maximum qui était $\pm \Phi$, devient $\mp \Phi$; la variation est 2Φ . Soit i l'intensité du courant : le travail en ergs est $0,2i\Phi$.

Nous allons démontrer qu'il en est de même lorsqu'un circuit quelconque S_1 vient dans la position diamétralement opposée S_2 . Dans ces deux positions le flux est exactement le même et de même signe; il est positif pour les deux. comme on le vérifiera en considérant les feuilletts équivalents; il est d'ailleurs évident que les circuits sont également inclinés sur le champ. On serait donc tenté d'écrire que le travail est nul. Ce serait une grave erreur, parce qu'il y a une discontinuité au passage par la verticale en S' .

En effet, faisons tourner le circuit S_1 jusqu'à *un peu avant* S' , le flux reste positif, et il atteint, au voisinage de S' , la valeur Φ . Dans le passage de S_1 à S' , il a donc augmenté de φ à Φ , soit de $\Phi - \varphi$. Dépassons légèrement la position S' , le courant change brusquement de sens; le flux devient brusquement négatif et égal à $-\Phi$. En S_2 il reprend la valeur initiale φ : entre les positions S' et S_2 , il a crû de :

$$\varphi - (-\Phi) = \varphi + \Phi.$$

La variation totale est donc : $\Phi - \varphi + \varphi + \Phi = 2\Phi$.

Le travail correspondant est $0,2i\Phi$.

Soit maintenant n le nombre des circuits fermés, c'est-à-dire le nombre total des spires enroulées sur le tore. Pour chaque demi-tour et chaque spire, le travail est $0,2 \cdot i\Phi$; pour chaque tour et pour n spires, le travail est $0,4 \cdot ni\Phi$: c'est le travail total. Soit I le courant total envoyé dans l'appareil; il se sépare également entre les moitiés de l'anneau : $I = 2i$. Le travail total par tour est en définitive : $0,2nI\Phi$. Le couple moyen s'obtient en divisant par 2π ; il est :

$$\frac{0,4 \cdot nI\Phi}{\pi},$$

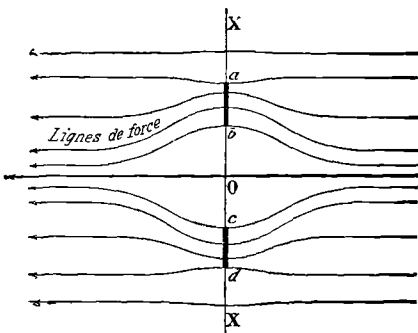


Fig. 167.

puisque par définition le couple moyen est ce par quoi il faut multiplier la rotation, évaluée en radians, pour obtenir le travail.

Il est important de remarquer que tout ce raisonnement subsiste, quel que soit le champ, pourvu que les lignes de force, toutes sensiblement parallèles au plan du tableau, soient deux à deux symétriques par rapport au

plan horizontal passant par l'axe de rotation O et admettent le plan XX normal au tableau comme plan de symétrie (fig. 167).

En particulier, le raisonnement vaut pour un champ uniforme.

Il serait généralement difficile de savoir comment se répartit à chaque instant le couple moteur entre les diverses spires : il est au contraire facile de calculer le couple moyen. Le raisonnement suppose, bien entendu, le nombre de spires assez grand pour qu'on puisse considérer l'anneau, dans toutes ses positions, comme pratiquement identique à lui-même par rapport au champ et aux balais.

320. Générateur à courant continu. — Faisons tourner l'anneau Gramme dans un champ uniforme : il joue le rôle d'électromoteur.

D'après les lois de l'induction nous savons que, de même que les actions électromagnétiques sur les deux moitiés de l'anneau produisaient des rotations de même sens et des couples égaux, de même pendant la rotation de l'anneau, elles produisent des forces électromotrices de même sens et égales en grandeur. Les deux moitiés de l'anneau se conduisent donc comme deux piles égales associées en quantité.

Il est facile de calculer leur force électromotrice.

Nous avons démontré que le travail par tour est :

$$\text{en ergs : } 0,2nI\Phi, \quad \text{en joules : } 2 \cdot 10^{-8}nI\Phi.$$

Soit E la force électromotrice de l'électromoteur qui nous fournissait alors le courant, R la résistance du circuit total. Écrivons que le travail est emprunté à l'électromoteur. Soit T la durée d'un tour. L'électromoteur fournit pendant ce temps une énergie EIT. On a donc :

$$EIT = RI^2T + 2 \cdot 10^{-8}nI\Phi.$$

$$\text{D'où :} \quad RI = E - \frac{2 \cdot 10^{-8}n\Phi}{T}.$$

Tout se passe comme s'il existait une force électromotrice :

$$e = \frac{2 \cdot 10^{-8}n\Phi}{T},$$

qui est précisément celle d'induction. Soit N le nombre de tours par seconde : $NT = 1$; $e = 10^{-8} \cdot 2\Phi \cdot nN$.

Or nous savons que cette force électromotrice est complètement indépendante de la valeur du courant I et, par conséquent, de l'existence de l'électromoteur E. Donc enfin, si on fait tourner un anneau Gramme, formé de n spires, à raison de N tours par seconde, il se produit une force électromotrice :

$$e = 10^{-8} \cdot 2\Phi \cdot nN \text{ volts.}$$

La résistance de cet électromoteur est égale à la résistance de

$n/4$ spires : en effet, les deux moitiés de l'anneau ont chacune une résistance égale à celle de $n/2$ spires, et la résistance du système en dérivation qu'elles forment, est moitié moindre.

Si ce raisonnement synthétique ne paraît pas convaincant, on procédera comme suit. Quand une spire quelconque tourne d'un demi-tour, la variation du flux est 2Φ ; quand les $n/2$ spires qui composent la moitié de l'anneau tournent d'un demi-tour, la variation du flux total qu'elles reçoivent est donc $n\Phi$. Cette variation se produit en un temps $\frac{T}{2}$; la vitesse moyenne de variation est donc :

$$\frac{2n\Phi}{T} = 2n\Phi N.$$

Voici maintenant le point délicat du raisonnement : nous avons le droit de dire que cette vitesse moyenne de variation, calculée pour un demi-tour, est la vitesse vraie de variation à un instant quelconque et pour un déplacement petit. Cela résulte de ce que tout l'appareil redevient identique à lui-même quand une spire a remplacé la voisine : la vitesse de variation du flux à travers les spires d'une moitié de l'anneau est donc constante.

Donc la force électromotrice d'induction est : $10^8 2n\Phi N$.

Bien entendu, le même raisonnement s'applique à l'autre moitié de l'anneau ; mais la force électromotrice n'est pas augmentée, puisque les deux moitiés sont reliées en quantité.

321. Remarque sur les résultats précédents. — Pour la commodité des raisonnements, on distingue généralement dans l'étude de la dynamo le rôle moteur et le rôle générateur. C'est un artifice qui peut induire à des idées fausses. Une dynamo joue toujours simultanément les deux rôles.

1° Elle produit toujours une force électromotrice ; mais suivant la valeur relative et le sens de cette force électromotrice par rapport à la force électromotrice extérieure, le courant passe dans le sens de la force électromotrice créée ou en sens contraire : corrélativement la dynamo absorbe ou produit de l'énergie mécanique. Nous venons de montrer que son rôle comme générateur se déduit immédiatement de son rôle comme moteur, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie.

Envoyons un courant dans l'induit d'une dynamo *arrêtée* ; mesurons l'intensité I_0 et la différence de potentiel E_0 aux bornes. Laissons ensuite l'induit prendre de la vitesse. L'intensité décroît, tandis que la différence de potentiel aux bornes croît : preuve de l'existence d'une force contre-électromotrice.

Si l'induit tourne à vide, il tend à prendre la vitesse pour laquelle le courant a juste l'intensité nécessaire pour que l'énergie absorbée compense les frottements et l'effet Joule.

2° Que la dynamo soit génératrice ou motrice, il s'exerce toujours des actions mécaniques entre les fils de l'induit et le champ. Dans la génératrice, il faut entraîner l'induit contre les forces magnétiques qui le retiennent; dans la motrice, ce sont les forces magnétiques qui entraînent l'induit retenu par la résistance du mécanisme qu'il doit mouvoir.

Pour une excitation donnée des électros, c'est-à-dire pour un champ donné, les effets mécaniques sont indépendants de la vitesse de rotation. Ils ne dépendent que de l'intensité du courant qui traverse l'induit. Sur une section donnée de l'enroulement, ils ne sont pas indépendants de l'azimut de la section; quand le flux magnétique devient maximum, toute action mécanique cesse, bien que le courant continue de passer avec la même intensité.

Le parallélisme est donc complet entre la dynamo motrice et la dynamo génératrice.

SENS DE ROTATION MOTEUR ET SENS DE ROTATION GÉNÉRATEUR. — *Pour un courant de sens donné dans les électros et pour un courant de sens donné dans l'induit :*

1° il existe un sens de rotation *moteur* pour lequel le courant dans l'induit tend à diminuer : l'induit fournit extérieurement de l'énergie mécanique ;

2° il existe un sens de rotation *générateur*, inverse du premier, pour lequel le courant dans l'induit tend à augmenter ; l'induit absorbe de l'énergie mécanique fournie de l'extérieur.

Pour intervertir les sens moteur et générateur, il faut soit changer les connexions, soit, ce qui revient au même, changer le sens de l'un des courants. Si l'on change simultanément les sens des deux courants, les sens de rotation moteur et générateur ne sont pas modifiés.

Nous verrons plus loin de nombreuses applications de ces remarques évidentes.

322. Courant de démarrage d'un moteur et résistance mécanique d'une dynamo au départ ou en circuit ouvert. —

Il résulte de l'existence dans un moteur d'une force électromotrice proportionnelle à la vitesse, que le courant de démarrage, c'est-à-dire celui que produit une force électromotrice donnée extérieure E dans le moteur *arrêté*, est plus considérable que le courant de régime, celui qui passe quand le moteur a pris sa vitesse normale. Il résulte encore de là que le couple de démarrage est plus grand que le couple de régime. On ne doit pas oublier qu'un moteur construit pour une force électromotrice extérieure E et une certaine vitesse, peut brûler si, pour une raison quelconque, il se trouve longtemps soumis au courant de démarrage, c'est-à-dire s'il est arrêté et soumis à la force électromotrice E .

Il résulte des mêmes faits que réciproquement le travail exigé pour faire tourner une dynamo dépend de sa vitesse et du courant qu'elle

produit. Si donc un moteur quelconque entraîne une dynamo, il faut prendre garde de ne pas couper brusquement le courant de la dynamo, si le moteur n'est pas pourvu d'un régulateur puissant de vitesse; autrement il s'emballé.

323. Torsion du champ. — La figure 167 du § 319 représenterait la symétrie du champ dans l'induit d'une dynamo, si le courant qui traverse l'induit n'avait pas une action magnétisante qui se superpose à l'action des électros inducteurs. Supposons le diamètre de commutation, ligne sur laquelle se trouvent les balais, placé à angle droit de la direction moyenne du champ des électros. Que la machine serve de moteur ou de générateur, les courants, passant symétriquement par rapport au diamètre de commutation, tendent à produire des pôles $N'S'$ qui seront juste à angle droit des pôles NS dus aux électros. Le champ résultant ne sera plus symétrique; il subira une *torsion* plus ou moins grande, suivant la puissance des électros et l'intensité du courant passant dans l'induit.

Pour placer correctement les pôles, il ne faut pas oublier que les pôles nord sont définis comme le lieu par où sortent les lignes de force, les pôles sud comme le lieu par où entrent les lignes de force.

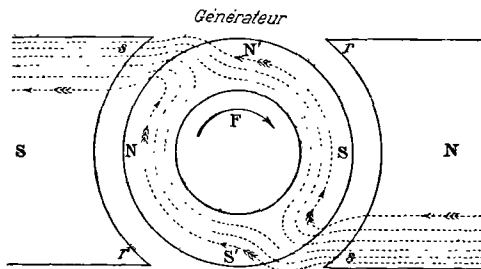


Fig. 168.

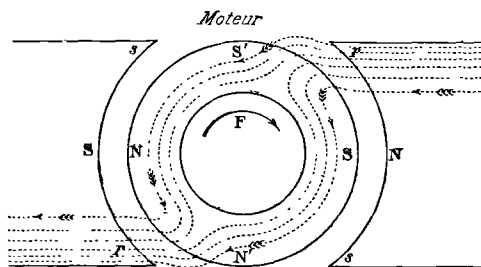


Fig. 169.

Supposons que le mouvement ait lieu toujours dans le sens de la flèche F . On vérifiera facilement, d'après le sens des courants dans l'induit, les résultats suivants :

1° Si la machine est génératrice, les lignes de force s'accablent vers les becs ss de l'électro, que nous appellerons becs de sortie. Le champ est tordu dans le sens du mouvement et de manière que les actions magnétiques gênent le mouvement; les lignes de force tendant à se raccourcir et par conséquent à se redresser. Si le diamètre de commutation est placé de manière à correspondre aux spires pour

lesquelles le champ est maximum, il doit être décalé (en avant) dans le sens du mouvement (fig. 168).

2° Si la machine est motrice, les lignes de force s'accroissent vers les becs rr de l'électro (becs de rentrée). Le champ est tordu en sens inverse du mouvement. Le diamètre de commutation, placé comme il vient d'être dit, est décalé (en arrière) en sens inverse du mouvement (fig. 169).

324. Calage des balais. — Il résulte de la distorsion du champ que les balais doivent être calés en avant de la normale au champ des électros dans les générateurs, en arrière de cette normale dans les moteurs.

Mais l'expérience montre que si l'on se bornait au décalage déterminé par la distorsion du champ, il y aurait des étincelles dangereuses au collecteur. La raison en est simple.

Les unes après les autres, les sections de l'induit sont mises en court circuit par les balais, au moment où les balais se trouvent à cheval sur deux touches consécutives t_1 et t_2 du collecteur (figure schématique 170).

La section mise en court circuit, précédemment traversée par un courant d'un certain sens, passe dans l'autre moitié de

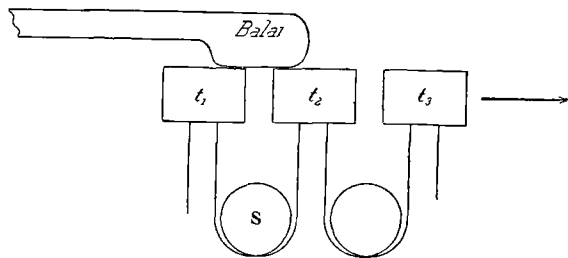


Fig. 170.

l'induit et doit être alors traversée par un courant de sens contraire.

Supposons que le passage d'une moitié de l'induit à l'autre s'effectue quand le flux à travers la section S mise en court circuit est maximum ; la force électromotrice induite dans cette section est nulle. Au moment où la touche t_2 quitte le balai, le courant de la seconde moitié de l'induit, dont la section S va faire partie, a deux voies de passage vers le balai : l'une de t_2 au balai à travers l'air directement, l'autre à travers la section S et la touche t_1 . Le premier chemin est plus résistant, mais il n'a pas de self induction ; le second l'est beaucoup moins, mais sa self oppose une force contre-électromotrice telle que le chemin par l'air est choisi : il se produit une étincelle.

Pour évaluer l'influence de la self induction, il ne faut pas oublier que le renversement du courant doit se faire dans la section S en un temps de l'ordre du millième de seconde.

Afin d'éviter cette étincelle, il faut qu'au moment même où la section S cesse d'être en court circuit, elle soit déjà soumise à une force électromotrice d'induction qui tende à y faire passer un courant de même sens que le courant qui traverse la moitié de l'induit dans

laquelle elle entre. On vérifie aisément qu'il résulte de cette condition un accroissement du décalage, en avant pour la génératrice, en arrière pour le moteur. Au moment de son passage d'une moitié à l'autre de l'induit, la section doit être sous les becs de rentrée r dans la génératrice, sous les becs de sortie s dans le moteur.

Cet accroissement de décalage dépend, pour une excitation donnée des électros, de l'intensité du courant qui traverse l'induit; il croît évidemment avec ce courant. On ne peut donc pas caler une fois pour toutes les balais; ils sont montés sur des colliers mobiles qui permettent de déterminer par tâtonnements la meilleure position à leur donner.

L'angle de calage dépend aussi de l'excitation: plus cette excitation est grande, plus il est petit.

On remarque l'inconvénient grave du décalage des balais pour les moteurs qui doivent tourner dans les deux sens. Il faut changer le calage en même temps que le sens de rotation. On ne peut lever cette difficulté qu'en utilisant des inducteurs extrêmement puissants comparativement à l'induit: les inconvénients d'un décalage nul sont alors réduits au minimum.

Les conséquences du décalage des balais sont importantes pour une autre raison.

Il est évident que si dans l'une des moitiés de l'induit d'un *générateur* se trouve une section où la force électromotrice induite est de sens contraire à celle de toutes les autres, on diminue la force électromotrice totale, et par conséquent la puissance de la machine envisagée comme électromoteur.

Il est de même évident que si dans l'une des moitiés de l'induit d'un *moteur* se trouve une section où la force électromotrice induite, loin de s'opposer au courant, tend à en augmenter l'intensité, c'est aux dépens de la puissance mécanique que fournit la machine. Le décalage n'amène pas une perte d'énergie, mais une perte de puissance. Cela vaut toujours mieux que la mise hors de service rapide du collecteur.

On préfère aujourd'hui ne pas décaler les balais, mais réagir à la fois contre la torsion du champ et la self induction dans la section de l'enroulement qui vient d'être en court circuit, soit par des pôles supplémentaires parcourus par le courant total de la machine et situés sur les lignes neutres, soit par des becs polaires non identiques à l'entrée et à la sortie.

325. Caractéristiques. — Pour étudier les génératrices, on trouve avantageux de construire les courbes donnant en fonction de l'ampérage, soit la force électromotrice totale E , soit la force électromotrice aux bornes e mesurée directement avec un voltmètre. Ces courbes s'appellent *caractéristique totale* et *caractéristique extérieure*.

Connaissant la résistance r de l'induit, on peut conclure E de e .
On a : $E = Ri$, $E = e + ri$, $e = R - r)i$;

R est la résistance totale. Si les volts et les ampères sont représentés à la même échelle, on a :

$$\operatorname{tg} \alpha = R, \text{ ou : } \operatorname{tg} \alpha = R - r,$$

suivant qu'il s'agit de la caractéristique totale ou de la caractéristique extérieure.

Quelle que soit l'échelle, $\operatorname{tg} \alpha$ est proportionnelle aux résistances.

Les caractéristiques sont construites pour une vitesse donnée.

D'ailleurs on peut généralement conclure les caractéristiques pour une vitesse des caractéristiques pour une autre vitesse, sachant que pour une excitation donnée les forces électromotrices sont proportionnelles à la vitesse.

Représentation de la puissance. — Quand les volts et les ampères sont représentés à la même échelle, il suffit de tracer les hyperboles équilatères : $Ei = \text{Constante}$, ou : $ei = \text{Constante}$, pour obtenir la puissance extérieure, par les intersections de ces hyperboles avec les caractéristiques.

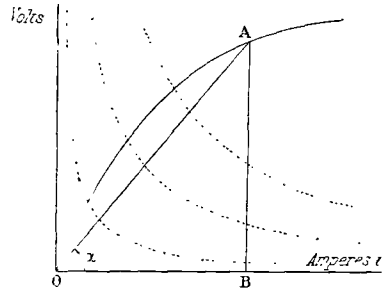


Fig. 171.

326. Différents modes d'excitation d'une génératrice. Excitation indépendante. — Quand les inducteurs sont des aimants permanents ou des électros excités par un courant indépendant, le flux est indépendant de l'intensité du courant qui passe dans l'induit, à la réaction de cet induit près. Ce mode d'excitation n'est admissible que pour des dynamos de faible puissance.

327. Excitation en série. — Le courant d'excitation est le courant tout entier que produit la machine. Il est clair que la résistance de l'enroulement d'excitation doit être faible; le fil est gros et le nombre de spires petit. La force magnétomotrice n'en a pas moins une valeur suffisante, vu l'intensité du courant.

Voici les principales propriétés de cette excitation.

La machine série employée comme moteur est destinée à tourner dans un certain sens (*sens moteur*), quel que soit le sens du courant qu'on y envoie. Car si l'on suppose ce courant interverti, il l'est à la fois dans les inducteurs et dans l'induit.

Une machine série employée comme générateur doit tourner dans un sens déterminé par les connexions (*sens générateur*). Elle peut inverser sa polarité; le sens du courant ne dépend que de la petite

aimantation résiduelle que conserve toujours l'électro. Mais si, par un procédé quelconque, on change cette aimantation, la machine donnera ensuite indéfiniment des courants de sens contraire aux premiers.

Si on la fait tourner dans le sens générateur, le courant qu'elle envoie dans les électros augmente l'aimantation résiduelle : *la machine s'amorce*, sous des conditions que nous verrons plus loin.

Si on la fait tourner dans le sens moteur, le courant qu'elle envoie dans les électros diminue l'aimantation résiduelle : *la machine ne peut s'amorcer*.

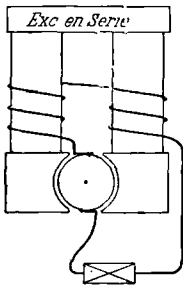


Fig. 172.

Il résulte de l'inversion des pôles un inconvénient grave quand on utilise une machine série à charger des accumulateurs. Soit en effet E sa force électromotrice pour une vitesse donnée (de régime), \mathcal{E} la force électromotrice de la batterie : on a $E > \mathcal{E}$. Mais si, pour une raison quelconque, le moteur mécanique qui conduit la machine ralentit, E diminue et peut devenir inférieure à \mathcal{E} . Le courant change de sens. Brusquement la machine change de polarité ; la force électromotrice dans

le circuit passe brusquement de $E - \mathcal{E}$ à $E + \mathcal{E}$. Le courant devient très intense, la machine peut être brûlée ; en tous cas, elle décharge les accumulateurs.

Remarquons que, malgré ce changement de sens du courant, *elle reste générateur* ; elle absorbe toujours au moteur mécanique de l'énergie qui se transforme en chaleur.

Voici une conséquence immédiate. Nous avons besoin d'une force électromotrice supérieure à la force électromotrice E que peut nous fournir la machine ; mais nous avons à notre disposition une batterie d'accumulateurs de force électromotrice \mathcal{E} . Nous pouvons les associer en série. Il suffit de faire les connexions n'importe comment et de faire ensuite tourner la machine *dans le sens générateur, inverse de celui qu'elle choisirait d'elle-même, si on l'employait comme moteur*. Elle prendra d'elle-même une polarité telle que la force électromotrice soit $E + \mathcal{E}$.

Naturellement, si nous persistons à vouloir utiliser une machine série à charger des accumulateurs, nous devons fermer le circuit de la machine sur une résistance auxiliaire R , la faire tourner avec une vitesse suffisante, introduire les accumulateurs en dérivation sur la résistance R , enfin supprimer cette résistance. Autant dire que jamais on n'emploie une machine série à charger des accumulateurs.

328. Caractéristiques. — L'expérience montre que si la résistance extérieure est trop grande, la machine ne s'amorce pas, même

si elle tourne dans le sens convenable : donc une droite OM trop redressée ne rencontre pas la caractéristique. Pour une certaine résistance *critique*, la machine s'amorce brusquement : les caractéristiques *pour une vitesse donnée* débutent par une partie presque rigoureusement rectiligne. C'est dire que pour une série de courants compris entre 0 et i_1 , la marche est instable : le moindre accroissement de résistance extérieure désamorce la machine. A mesure que la résistance extérieure décroît, l'excitation des électros augmente *et en même temps la réaction de l'induit*. Quand la saturation des électros est encore loin d'être obtenue, la caractéristique totale s'élève. Mais quand la saturation est atteinte, l'accroissement de courant ne produit plus d'accroissement du champ, le voltage devient indépendant de l'ampérage, la caractéristique tend vers une horizontale. Les réactions d'induit peuvent même l'emporter ; la caractéristique totale s'abaisse, on dit qu'elle est *plongeante*.

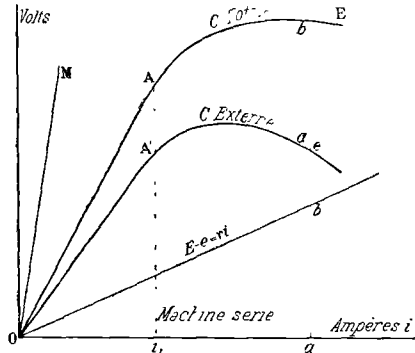


Fig. 173.

Pour obtenir la caractéristique externe, il faut retrancher ri de la caractéristique totale, ce qui est facile graphiquement. La caractéristique externe est toujours *plongeante*.

Quand on met une machine série en court circuit, si la caractéristique totale n'est pas *plongeante*, le courant atteint une intensité dangereuse : la machine brûle presque inmanquablement. Si au contraire la caractéristique est *plongeante*, la réaction d'induit peut être suffisante pour servir d'autorégulateur. Le courant ne dépasse pas une certaine limite.

On vérifiera aisément qu'on obtient la caractéristique pour une vitesse v_1 , à partir de la caractéristique pour une vitesse v_2 , en multipliant les ordonnées par $v_1 : v_2$. On déduit immédiatement de cette construction qu'il n'existe pas à proprement parler une résistance critique, puisque la résistance d'amorçage dépend de la vitesse : il existe au contraire une intensité critique indépendante de la vitesse.

329. Emploi d'une machine série comme moteur. — Le sens de rotation est complètement déterminé et indépendant du sens du courant ; il est inverse du sens de rotation de la machine employée comme génératrice. L'inconvénient de ce montage est l'impossibilité

de diminuer la puissance par diminution du courant, sans risquer de diminuer outre mesure l'excitation.

La machine tourne dans le même sens, quel que soit le sens du courant; elle fonctionne donc encore quand elle reçoit du courant alternatif. Il faut feuilletter le fer pour éviter les courants induits dans la masse, et ne pas exagérer l'induction magnétique pour ne pas perdre trop d'énergie par hystérésis. L'emploi de moteurs série actionnés par des courants alternatifs est entré dans la pratique industrielle, grâce à certains perfectionnements sur lesquels nous ne pouvons insister.

330. Excitation en dérivation (shunt). —

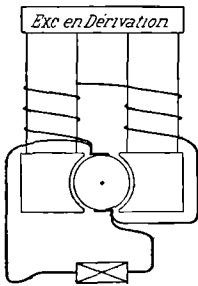


Fig. 174.

L'enroulement d'excitation est en dérivation sur les bornes. Sa résistance doit être relativement considérable; le fil est fin, le nombre de spires est grand, de manière que la force magnétomotrice reste suffisante. Ainsi on reconnaît immédiatement au diamètre des fils qui entourent les électros, si la machine est faite pour une excitation série ou une excitation shunt.

On démontrera aisément que la machine employée comme moteur est faite pour tourner dans un sens déterminé, qu'employée comme générateur, elle peut renverser sa polarité et que le sens du courant ne dépend que de l'aimantation résiduelle.

331. Charge des accumulateurs. —

La machine shunt est excellente pour la charge des accumulateurs. En effet, les forces électromotrices E et \mathcal{E} , qui se trouvent opposées sur le circuit formé par l'induit et les accumulateurs, sont au contraire concordantes par rapport à la dérivation. Que, par suite d'une diminution de vitesse, E diminue, \mathcal{E} l'emportera; le sens du courant changera dans l'induit, mais ne changera pas dans les électros. De génératrice la dynamo deviendra donc motrice, elle accélérera la marche de son moteur mécanique. La force électromotrice dans le circuit de l'induit et des accumulateurs ne passera pas brusquement de $E - \mathcal{E}$ à $E + \mathcal{E}$ par inversion des pôles de la dynamo; elle restera égale à $E - \mathcal{E}$. Que la vitesse revienne à sa valeur première, E l'emportera à nouveau, le courant reprendra son sens initial, et la machine, cessant d'être moteur, redeviendra générateur.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que le sens de rotation est le même pour la machine employée comme moteur et comme générateur. En effet, quand on passe d'un rôle à l'autre, le courant n'est interverti que dans les électros ou dans l'induit.

Quand on veut charger des accumulateurs, on les branche sur les

pôles d'une machine à travers une résistance; on fait tourner dans le sens convenable : les accumulateurs aident au démarrage dans le cas d'un moteur à gaz ou d'un moteur électrique ne démarrant pas seul. Quand la vitesse est convenable, on supprime la résistance pour donner au courant l'intensité voulue.

332. Caractéristique. — Nous n'étudions que la caractéristique externe (fig. 175).

Supposons la résistance r_1 énorme; le courant extérieur i est nul, le courant passe en entier dans la dérivation. La machine est donc amorcée, et comme l'excitation est maxima, le voltage e_0 aux bornes est lui aussi maximum. La machine joue le rôle d'une pile en circuit ouvert.

A mesure que nous diminuons la résistance (ce qui revient à chercher les points de la caractéristique qui se trouvent sur les droites OM de plus en plus horizontales), le voltage e aux bornes diminue d'abord lentement, puis de plus en plus vite. Enfin, pour une résistance critique qui correspond à une droite OM', brusquement la

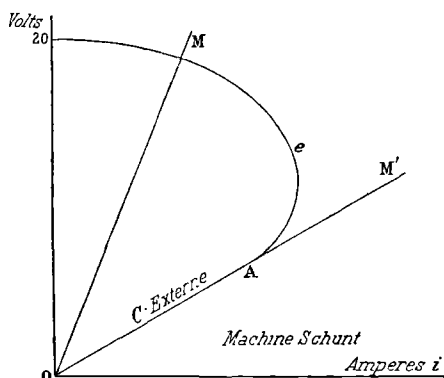


Fig. 175.

machine se désamorce : la caractéristique présente encore une partie rectiligne instable OA. Il n'y a donc aucun danger à mettre la machine en court circuit; le courant tombe immédiatement à zéro faute d'excitation.

Les caractéristiques pour différentes vitesses ne s'obtiennent pas par une dilatation des ordonnées. En effet, si nous doublons la vitesse et si, par des résistances convenables, nous maintenons le courant extérieur à une intensité invariable, il passe davantage dans la dérivation d'excitation; le flux est augmenté et le voltage plus que doublé. Il faudrait pouvoir ramener aussi l'intensité du courant dans les électros à la valeur initiale.

Dynamo shunt employée comme moteur. — Elle présente le grand avantage de prendre des puissances quelconques par réduction du courant dans l'induit, sans risquer d'avoir une excitation insuffisante.

333. Excitation compound ou composée. — La machine série et la machine shunt présentent des avantages et des inconvénients inverses, d'où la construction de machines dites *composées* (compound en anglais), dans lesquelles (fig. 176) il y a simultanément excitation

en série et excitation en dérivation. Le but qu'elles se proposent est de maintenir la force électromotrice, extérieure ou totale suivant les cas, sensiblement indépendante de la résistance extérieure, et par conséquent du courant utilisé. On conçoit l'intérêt du problème pour l'éclairage électrique, la force électromotrice ne devant pas varier avec le nombre de lampes mises en circuit.

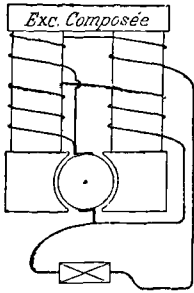


Fig. 176.

Le problème ne peut être complètement résolu que pour deux courants donnés à l'avance; on choisit généralement le courant nul et le courant maximum. Quand la résistance extérieure est infinie, l'excitation série se trouve du fait supprimée : la machine est en dérivation, la force électromotrice a la valeur E_0 ou e_0 , suivant le cas réalisé (§ 332). A mesure que la résistance extérieure décroît, le rôle de l'excitation shunt diminue, le rôle de l'excitation série augmente. On choisit les ampères tours des deux enroulements, de manière à retrouver la force électromotrice E_0 ou e_0 pour le courant maximum.

Nous avons représenté (fig. 176) un des types de l'excitation composée; dans certains cas, il est préférable de prendre l'une des extrémités de la dérivation, non sur un balai, mais à l'extrémité de l'enroulement série, les autres extrémités des enroulements série et shunt étant toujours à l'autre balai. Cette disposition revient à augmenter la résistance de l'induit par rapport à l'enroulement shunt.

334. Induit en tambour. — Dans les paragraphes précédents, nous raisonnons sur l'induit en *anneau*; mais le bobinage en *tambour* est plus avantageux. Nous indiquerons rapidement en quoi il consiste.

Nous emploierons un mode de représentation commode, dû à Silvanus Thompson.

Un courant venant vers nous est représenté par un cercle figurant la section droite du conducteur, centré d'un point figurant le fer d'une flèche. Un courant s'éloignant de nous est représenté par un cercle barré d'une croix figurant les barbes de la flèche.

Imaginons des conducteurs *rectilignes* (fig. 177), formant les génératrices d'un cylindre (tambour) tournant dans le champ d'un électro. Le lecteur vérifiera que si le tambour tourne dans le sens de la flèche, les forces électromotrices qui résultent du flux coupé par les conducteurs, tendent bien à faire passer des courants dans les sens indiqués. Nous supposons, pour abréger, qu'il n'y a pas torsion du champ par réaction d'induit.

Il reste à connecter les fils avec le collecteur : la discussion est

difficile, nous n'en dirons que quelques mots. Nous avons représenté 26 conducteurs ; le collecteur a donc 13 touches, qui sont numérotées de 1 à 13.

De la touche 1 du collecteur un fil de raccord va *en avant* du tambour au fil 1, qui est raccordé *en arrière* au fil 14 (c'est précisément pour savoir s'il faut choisir le fil 14 ou tout autre, que la discussion est difficile ; en fait, ce n'est pas le fil 14 qu'on choisit) ; ce fil est lui-même raccordé *en avant* à la touche 2 du collecteur.

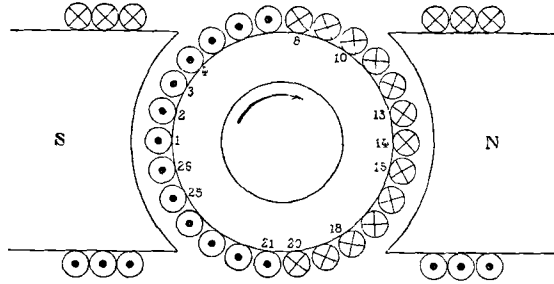


Fig. 177.

De la touche 2 du collecteur un fil de raccord va *en avant* au fil 3, qui est raccordé *en arrière* au fil 16, ... et ainsi de suite.

En définitive on a le tableau suivant :

Collecteur	Fils	Collecteur.
1	1 14	2
2	3 16	3
3	5 18	4
.	.	.
.	.	.
.	.	.
8	15 2	9
.	.	.
.	.	.
.	.	.
11	21 8	12
12	23 10	13
13	25 12	1

On remarquera que les fils voisins, 1, 14 et 15, 2 par exemple, sont raccordés à des parties opposées du collecteur, mais aussi qu'ils sont pris dans des ordres inverses. En définitive, tous les fils sont pris dans un ordre tel que les forces électromotrices sont concordantes des deux côtés du diamètre de commutation. Dans la position représentée par la figure, les balais doivent toucher d'un côté les touches 11 et 12 du collecteur, de l'autre la touche 5 ; la dissymétrie provient de ce que le nombre de touches du collecteur est impair.

L'induit en tambour utilise mieux le fil. En choisissant convenablement les fils formant chaque section de l'enroulement, on peut diminuer les étincelles au collecteur et produire le même effet que par le décalage des balais. Le bobinage présente cependant certaines difficultés techniques. En particulier il faut tenir compte de la force centrifuge, qui tend à écarter de l'axe les fils de l'induit. Sans danger dans le cas d'un induit en anneau, elle complique la construction des induits en tambour qu'il devient nécessaire de fretter.

Alternateurs.

Le lecteur trouvera au § 216 du Cours de Mathématiques la description d'un alternateur.

335. Couplage des alternateurs en série. — Cette question est importante comme permettant de préciser dans quelles conditions un alternateur joue le rôle de moteur ou le rôle de générateur.

Supposons deux alternateurs identiques, montés en série et tournant avec des vitesses telles que la fréquence soit la même. Représentons les forces électromotrices qu'ils produisent par :

$$e_1 = E' \sin(\omega t + \alpha), \quad e_2 = E' \sin(\omega t - \alpha).$$

La force électromotrice résultante est :

$$e = e_1 + e_2 = E \sin \omega t, \quad E = 2E' \cos \alpha.$$

Soit : $i = I \sin(\omega t - \varphi)$, le courant dans le circuit caractérisé par une résistance r et un coefficient de self induction L . On a :

$$I = \frac{E}{j}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}.$$

Le travail moyen fourni par chacun des alternateurs est (§ 261) :

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T e_1 i dt = \frac{EE'}{2j} \cos(\varphi + \alpha), \quad P_2 = \frac{EE'}{2j} \cos(\varphi - \alpha).$$

Développant, il vient :

$$P_1 = \frac{E'^2 \cos \alpha}{j^2} (r \cos \alpha - L\omega \sin \alpha), \quad P_2 = \frac{E'^2 \cos \alpha}{j^2} (r \cos \alpha + L\omega \sin \alpha).$$

r et $L\omega$ sont des quantités essentiellement positives ; dans la pratique, $L\omega$ est très supérieur à r (fig. 178).

Supposons qu'au début de l'expérience les alternateurs soient synchrones ($\alpha = 0$), mais que l'alternateur 2 ait une tendance à retarder par rapport à l'alternateur 1 : la phase α positive tend donc à augmenter. Les puissances développées, d'abord rigoureusement égales, cessent de l'être : c'est l'alternateur 2 qui fournit maintenant la puissance la plus grande. Les causes qui le font aller moins vite que

l'alternateur 1 sont accrues par l'excès de travail qui lui est demandé; il retardera davantage. Donc les alternateurs ne conservent pas la même phase.

L'alternateur 2 retardant toujours, $r \cos \alpha$ tend à devenir plus petit que $L\omega \sin \alpha$. Quand la condition : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{k}$ est réalisée, $\varphi + \alpha = \pi : 2$; la force électromotrice et le courant sont en quadrature dans l'alternateur 1; il ne fournit plus de travail, il n'en absorbe plus (point B de la courbe P_1 , fig. 178).

Si $\varphi + \alpha > \pi : 2$, l'alternateur 1 absorbe du travail, $P_1 < 0$; le moteur qui le conduisait doit naturellement s'accélérer, puisqu'il est maintenant conduit lui-même. L'alternateur 2, qui fournit du travail, retarde de plus en plus par rapport à l'alternateur 1. Ceci continuera

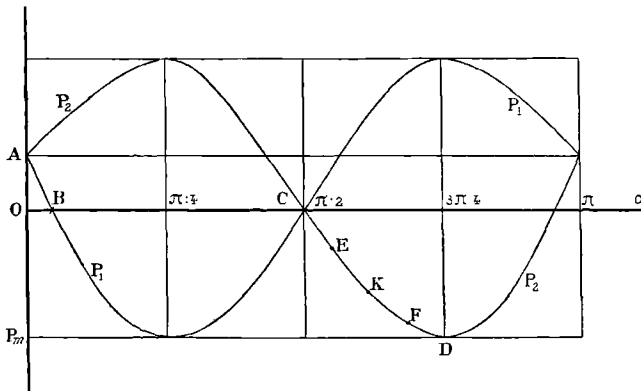


Fig. 178.

jusqu'à ce que les phases soient opposées, $\alpha = \pi : 2$. Mais alors les puissances sont toutes deux nulles, aucun courant ne passe dans le système.

α devient $> \pi : 2$; $\cos \alpha < 0$. C'est maintenant l'alternateur 2 qui absorbe de l'énergie, $P_2 < 0$. L'alternateur 1 lui en fournit, $P_1 > 0$. L'alternateur 2 tend à avancer et 1 à retarder. La position $\alpha = \pi : 2$ est donc d'équilibre stable (point C de la figure 178).

CONCLUSION. — Il est impossible de coupler des alternateurs en série pour ajouter leurs forces électromotrices. S'ils sont conduits par des moteurs (à vapeur ou autres) dont les puissances ne diffèrent pas trop, ils se mettent d'eux-mêmes en opposition de phase. Ils tournent ensuite avec la même vitesse, absolument comme s'ils étaient liés par des liaisons rigides. Les moteurs (à vapeur,...) ne fournissent plus que juste l'énergie nécessaire à compenser les frottements.

336. Moteurs synchrones monophasés. — Le problème du moteur à courant alternatif monophasé est le même que celui que

nous venons de résoudre. Tout alternateur peut servir de moteur : il résulte de ce qui précède, comme nous allons le montrer, qu'il est nécessairement synchrone avec l'alternateur producteur du courant.

Supposons qu'il soit d'abord synchrone et de même phase ; ce sera l'alternateur 2 du paragraphe précédent. Il tend naturellement à retarder puisque, loin d'être entraîné par un moteur mécanique, c'est lui qui est destiné à jouer ce rôle. Donc α croît, arrive à la valeur $\pi : 2$ et la dépasse nécessairement.

A partir de ce moment, 2 absorbe de l'énergie : il est conduit par l'alternateur 1 qui fournit de l'énergie : $P_2 < 0$, $P_1 > 0$. Le maximum de puissance que puisse absorber l'alternateur 2 a lieu pour la phase α donnée par la condition : $\frac{dP_2}{d\alpha} = 0$. Comme $L\omega$ est grand devant r , elle est voisine de $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$: soit P_m sa valeur.

De deux choses l'une, ou la puissance exigée de l'alternateur 2 (frottement compris) est supérieure à P_m , et alors le synchronisme ne peut s'établir et l'alternateur s'arrête; ou elle est inférieure : il est facile de montrer que le synchronisme s'établit de manière que la puissance absorbée par l'alternateur 2 (puissance fournie par l'alternateur 1) soit précisément celle qu'on exige de lui ; le moteur synchrone est essentiellement *autorégulateur* de vitesse.

En effet, si α est trop voisin de $\pi : 2$ (point E de la courbe), l'alternateur 2, qui n'absorbe pas la puissance qu'on lui demande, retarde : α augmente et corrélativement P_2 croît. Si α est trop voisin de $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (point F de la courbe), c'est-à-dire trop voisin de la phase pour laquelle P_2 est maximum, l'alternateur 2 absorbe trop de puissance : il avance, α diminue et corrélativement P_2 décroît. Il tend donc à se mettre juste à la phase pour laquelle la puissance absorbée égale la puissance demandée (point K de la courbe) : c'est une phase d'équilibre stable. A de petites variations près, c'est alors comme s'il était rigidement lié à l'alternateur 1.

Bien entendu, il faut qu'entre la puissance demandée et la puissance maxima il y ait un certain écart (distance verticale des points K et D), pour parer aux accroissements accidentels de résistance mécanique. Sinon l'alternateur 2 *sort de phase*, cesse d'être synchrone, se *décroche* et s'arrête.

Nous supposons dans nos calculs que les alternateurs sont identiques, que la force électromotrice maxima qu'ils produisent est la même. Il n'y aurait aucune difficulté à refaire les calculs en posant :

$$e_1 = E_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad e_2 = E_2 \sin(\omega t - \alpha).$$

Les formules sont un peu plus compliquées ; les résultats généraux sont absolument les mêmes.

Les inconvénients des moteurs synchrones apparaissent maintenant.

L'alternateur doit être mis en marche à vide, pour qu'il puisse prendre la vitesse convenable correspondant au synchronisme avec le courant : c'est évidemment une sujétion grave. S'il ne tourne pas synchrone, la puissance absorbée est nulle *en moyenne*.

Il faut du courant continu pour exciter les électros des moteurs synchrones : on l'obtiendra soit par une dynamo auxiliaire, soit par un redressement du courant alternatif.

Il est facile de vérifier par l'expérience les résultats précédents.

On construira à peu de frais un moteur synchrone, de faible puissance, il est vrai, avec un aimant permanent monté sur un pivot et tournant entre quatre ou six bobines en série, disposées suivant une circonférence, de sens d'enroulement alternés et traversées par un courant alternatif. L'aimant fera un demi-tour ou un tiers de tour par période du courant, suivant le nombre de bobines choisies. On fixera à l'aimant un disque de carton percé de deux trous aux extrémités d'un diamètre, ou de trois trous aux sommets d'un triangle équilatéral. Enfin on disposera sur l'axe de rotation une petite poulie pour faire travailler le moteur : une cordelette passe dessus ; une de ses extrémités est fixée, on tire plus ou moins sur l'autre pour faire varier le frottement.

Construisons deux appareils semblables, montons-les en série sur le courant alternatif dont nous disposons, et plaçons-les parallèlement. A travers les trous du moteur 1, nous voyons les trous du moteur 2 *immobiles*, donc les moteurs ont même période qui est, au facteur $1/2$ ou $1/3$ près, la période du courant utilisé. Mais les azimuts dans lesquels nous apparaissent les trous du moteur 2 dépendent des travaux fournis par l'un ou l'autre moteur : ces azimuts sont en effet immédiatement liés aux phases, qui dépendent de la position des aimants par rapport aux bobines. Si nous tirons sur la corde du moteur 1 par les trous duquel nous regardons, il fournira plus de travail ; cependant sa période ne changera pas. Mais son retard de phase sur le courant augmentera ; nous en serons averti *par l'avance apparente* des trous du moteur 2. Ils nous apparaîtront décalés dans le sens du mouvement.

L'expérience telle que nous venons de l'indiquer est complexe en ce sens que nous avons effectivement deux systèmes. Si nous fabriquons le courant alternatif nous-mêmes, par exemple avec une commutatrice (§ 342), il est plus simple de regarder la commutatrice à travers les trous du disque entraîné par le moteur. La position de la commutatrice nous donne la phase du courant.

Après toutes les explications précédentes, le lecteur doit comprendre à quel point sont liés les rôles moteur et générateur, quand il s'agit d'alternateurs et de moteurs synchrones. Un moteur syn-

chrone n'est jamais moteur durant la période entière, pas plus qu'un alternateur générateur ne le reste d'une manière continue. Le rôle dépend du signe de la quantité ei , produit de la force électromotrice due à l'appareil lui-même, par le courant qui le traverse. Or, sauf dans le cas exceptionnel où la différence de phase entre e et i est nulle ou égale à π , ce produit est à l'intérieur d'une période alternativement positif et négatif. L'appareil est donc toujours alternativement moteur et générateur; mais l'un ou l'autre rôle l'emporte : ce n'est qu'une question de phase.

Les appareils qui viennent de nous servir comme moteurs, sont de véritables alternateurs : si nous faisons tourner les aimants, nous récoltons du courant alternatif. Naturellement les phénomènes d'induction restent les mêmes quand les appareils servent de moteurs; mais alors la phase est telle que pendant la majeure partie de la période la force électromotrice d'induction, produite par le déplacement de l'aimant, s'oppose au passage du courant.

337. Couplage des alternateurs en quantité. — Pour que le problème ne soit pas trop compliqué, branchons l'alternateur sur un circuit où la différence de potentiel alternative constante sera représentée par : $F \sin (\omega t - \alpha)$. L'alternateur est mû par une certaine puissance mécanique : sa force électromotrice est : $e = E \sin \omega t$. Soit k et r les constantes du circuit de l'alternateur jusqu'au branchement.

La force électromotrice appliquée à ce circuit est :

$$E \sin \omega t - F \sin (\omega t - \alpha) = D \sin (\omega t - \delta).$$

Le signe — devant F est arbitraire, puisque nous imposons pour l'instant la force électromotrice alternative extérieure; on verra plus loin la raison de notre choix.

On a pour déterminer D et δ les relations :

$$E - F \cos \alpha = D \cos \delta, \quad - F \sin \alpha = D \sin \delta.$$

Le courant est donné par la formule :

$$i = I \sin (\omega t - \delta - \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{r}, \quad I = \frac{D}{\beta}.$$

La puissance dépensée par l'alternateur est (§ 261) :

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = \frac{EI}{2} \cos (\delta + \varphi) = \frac{E}{2\beta} [\cos \varphi \cdot D \cos \delta - \sin \varphi \cdot D \sin \delta].$$

$$\text{D'où : } W = \frac{E}{2\beta} [\cos \varphi (E - F \cos \alpha) + \sin \varphi \cdot F \sin \alpha].$$

Dans de bons alternateurs φ doit être très voisin de $\pi/2$; cela revient à dire que $L\omega$ est très grand devant la résistance. Il reste donc sensiblement :

$$W = \frac{EF}{2\beta} \sin \alpha.$$

Pour $\alpha = 0$, quand l'alternateur est en phase avec la différence de potentiel F de la ligne, la puissance est nulle. Elle croît rapidement avec α , passe par un maximum pour $\alpha = \pi : 2$, et diminue ensuite jusqu'à $\alpha = \pi$. Pour servir de générateur, l'alternateur doit être en avance sur la force électromotrice de la ligne, considérée comme lui étant opposée.

Agissant comme générateur, il doit être conduit par un moteur mécanique fournissant une puissance inférieure au maximum que nous venons de déterminer. Admettons-le en phase avec F , il ne fournit aucun travail, donc il s'accélère ; mais l'avance fait croître W , l'alternateur et par conséquent le moteur fournissent une puissance croissante. Par conséquent, l'accélération cesse et le moteur reste de lui-même synchrone avec le potentiel de la ligne.

Supposons que, pour une raison quelconque, la puissance du moteur mécanique diminue ; l'alternateur retarde, W change de signe. L'alternateur est maintenant conduit par l'énergie électrique venue de la ligne ; de générateur il devient moteur. D'où accélération et synchronisme. Il est important de remarquer qu'il peut aussi intervertir ses rôles, alors même que sa force électromotrice propre E serait supérieure à la force électromotrice de la ligne. Il s'agit ici d'une question de phase.

Ce que nous venons de dire prouve la possibilité d'associer des alternateurs générateurs en parallèle sur un circuit extérieur, à la condition qu'on ne leur demande pas toute leur puissance, et qu'on laisse ainsi une certaine marge aux variations accidentelles de la puissance mécanique des moteurs qui les conduisent.

La force électromotrice : $F \sin(\omega t - \alpha)$ est alors la différence alternative de potentiel entre les points de branchement. Elle s'oppose aux forces électromotrices des divers alternateurs, automatiquement mis en concordance de période. On remarquera le lien entre le problème actuel et celui du § 335. Des alternateurs en série se mettent en opposition de phases ; mais ils se trouvent de ce fait même en concordance de phases par rapport à une dérivation. Si des alternateurs de puissances différentes sont branchés sur la même ligne, ils prendront automatiquement la même période, mais pourront ne pas avoir la même phase, suivant qu'ils fournissent une puissance plus ou moins voisine de leur puissance maxima.

338. Synchronisation des alternateurs. Indicateurs de phase. — Des alternateurs mis en parallèle finissent toujours par se synchroniser ; après une période de tâtonnements, brusquement ils s'accrochent et semblent alors liés d'une manière rigide. Mais l'introduction d'un nouvel alternateur dans un groupe déjà synchronisé, introduction nécessitée par une demande supplémentaire de courant, peut avoir des inconvénients comme modifiant momentanément le

voltage efficace sur la ligne. Aussi prend-on le soin de ne faire le couplage que lorsque les alternateurs tournent avec la même vitesse (ce dont on s'aperçoit immédiatement s'ils sont placés les uns à côté des autres ; regardés à travers l'un d'eux, les autres semblent immobiles grâce à un effet de stroboscopie, Cours de Mathématiques, § 53, et possèdent la même phase, ce qui est plus délicat à réaliser.

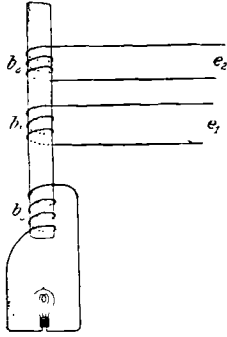


Fig. 179.

On utilise des *indicateurs de phase* (fig. 179).

Imaginons un noyau de fer entouré de trois bobines : les bobines b_1 et b_2 communiquent en dérivation avec les bornes des alternateurs e_1 et e_2 . On suppose que e_1 envoie déjà son courant sur une ligne d'utilisation ; on veut déterminer le moment convenable pour brancher e_2 . La troisième bobine entourant le noyau se ferme sur une lampe à incandescence.

Le flux envoyé dans b_3 est la résultante des flux produits par b_1 et b_2 . Quand les machines ne tournent pas avec la même vitesse, il y a une variation périodique d'éclat, dont la période croît à mesure que les vitesses s'approchent de l'égalité. Quand les vitesses sont très voisines, on voit l'éclat de la lampe passer lentement d'un maximum (accord des phases) à un minimum nul (désaccord) ; pour brancher l'alternateur e_2 sur le circuit d'utilisation, on choisit le moment où la lampe brûle du plus vif éclat.

339. Alternateurs polyphasés. — On appelle *pas* d'un alternateur (fig. 180) la distance du centre d'un pôle nord du système

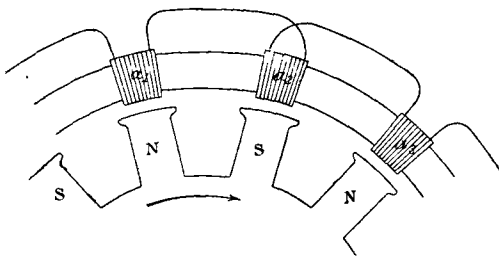


Fig. 180.

des électroaimants inducteurs au centre du pôle sud suivant.

Dans la construction d'un alternateur se posent les problèmes suivants :

1° quelle largeur faut-il donner aux pôles par rapport au pas ?

2° quelle largeur ou plus généralement quelle disposition faut-il don-

ner aux bobines ou au circuit induit ?

Il est évident que la largeur des pôles ne doit pas être trop petite : ils ne seraient pas assez puissants. Inversement si elle est trop grande, les lignes d'induction se dérivent d'un pôle au suivant, sans passer à travers les bobines induites.

Généralement on donne à la largeur des pôles la moitié du pas.

Ceci posé, imaginons, pour simplifier la figure, que les bobines induites sont enroulées sur un *anneau*. On peut négliger l'action du champ sur les portions des fils extérieures à l'anneau, et calculer les forces électromotrices en déterminant le flux coupé par les portions les plus rapprochées des pôles et normales au plan du tableau. Les bobines a_1, a_2, \dots supposées enroulées dans le même sens, sont connectées de manière que les forces électromotrices s'ajoutent. Lorsque l'inducteur se meut dans le sens de la flèche, les portions actives des bobines a_1 et a_2 balayent des champs de sens contraires : les forces électromotrices y sont donc opposées. Par exemple dans les portions actives des fils de a_1 , intérieures à l'anneau et normales au plan du tableau, la force électromotrice induite va d'avant en arrière ; elle va d'arrière en avant dans les portions actives de a_2 .

Mais il est facile de voir que les forces électromotrices alternatives, induites dans chacun des fils de a_1 , n'atteignent pas simultanément leur maximum, puisque ce maximum a lieu quand le fil passe devant le centre du pôle. Donc les forces électromotrices ne s'ajoutent pas purement et simplement ; elles ont une différence de phase et se composent suivant la règle des vecteurs. Il résulte immédiatement de là qu'il n'y a pas avantage à donner aux bobines a_1, a_2, \dots une largeur trop grande, puisque, la force électromotrice étant maximale (en négligeant les distorsions du champ) quand le fil central passe devant le centre du pôle, les forces électromotrices dans les fils extrêmes sont alors d'autant moins en concordance de phase avec la force électromotrice dans le fil central, que la largeur est plus grande.

Ce qui précède s'applique, quelle que soit la méthode d'enroulement ; il faudra toujours faire en sorte que la bobine ait *le plus possible* ses spires confondues, de manière que toutes les forces électromotrices atteignent simultanément leurs valeurs maxima.

Nous arrivons donc à cette conclusion que les pôles doivent être relativement étroits vis-à-vis du pas et qu'il en est de même pour les bobines.

Ces faits se sont imposés quand on a construit le premier alternateur. Sur l'induit beaucoup de place s'est trouvée perdue. On en a profité tout naturellement pour placer plusieurs enroulements distincts les uns à côté des autres et symétriquement ? ; la puissance de la machine se trouvait ainsi doublée ou triplée, sans augmentation sensible de son encombrement ni de son prix.

L'alternateur à plusieurs enroulements est un alternateur *polyphasé*.

On obtient avec un tel alternateur des forces électromotrices décalées les unes par rapport aux autres de $2\pi : p$, où p est le nombre des enroulements. Si l'induit a deux enroulements, il est diphasé ; s'il en a trois, il est triphasé, etc.

Au début, on a utilisé ces divers enroulements comme s'ils appartenaient à des machines entièrement distinctes, et de fait ils sont parfaitement indépendants. Depuis, on a reconnu que ce système de courants, systématiquement décalés les uns par rapport aux autres et provenant d'enroulements identiques, jouissait de propriétés précieuses et pouvait être utilisé comme un tout (§§ 343 et sq.).

340. Transmission des courants polyphasés. — Pour transmettre un courant alternatif monophasé, il faut deux fils naturellement. Pour un système diphasé, il faut quatre fils ; on pourrait ramener ce nombre à trois, mais on maintient généralement les circuits distincts. Pour un système triphasé, il en faudrait six. Nous allons montrer que trois suffisent.

Supposons les circuits d'utilisation identiques ; considérons trois des conducteurs comme fils d'aller, un pour chaque enroulement ; choisissons-les tels qu'ils soient parcourus par des courants :

$$i_1 = I \sin \omega t, \quad i_2 = I \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_3 = I \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Supposons que pour chacun des circuits nous employions la terre comme fil de retour, ou plus généralement un conducteur de résis-

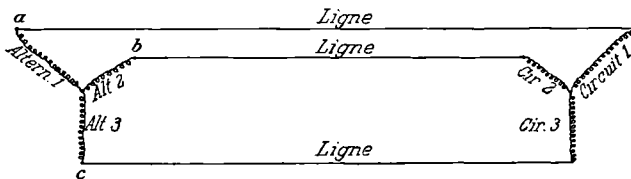


Fig. 181.

tance négligeable. Nous en avons le droit, car nous pouvons toujours relier des circuits quelconques par un de leurs points ; nous pouvons par conséquent leur donner un conducteur commun sans changer ce qui se passe dans chacun des circuits, à la seule condition que la résistance de ce conducteur soit négligeable.

Calculons l'intensité du courant : $i = i_1 + i_2 + i_3$, qui passerait dedans. On trouve : $i = 0$ (§ 260). Nous pouvons donc supprimer ce conducteur qui ne transmettrait rien. La disposition que nous obtenons est appelée *montage en étoile* (fig. 181).

Les trois enroulements des alternateurs sont reliés directement par une de leurs extrémités ; des trois autres partent trois lignes qui passent dans trois circuits d'utilisation identiques (autant que possible) et se réunissent en un point.

Considérons le système des trois points a, b, c ; en somme, nous produisons aux points a, b, c , des potentiels qui sont de la forme (à une phase constante près) :

$$e_1 = E \sin \omega t, \quad e_2 = E \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad e_3 = E \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Le système fonctionnera identiquement de la même manière, quelle que soit la méthode par laquelle nous produisons ces potentiels. Nous pouvons donc brancher les enroulements directement entre les points a, b, c : nous obtenons le montage en triangle (fig. 182).

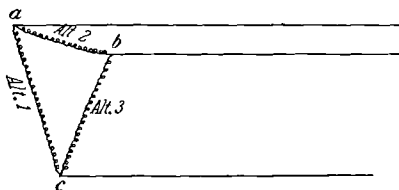


Fig. 182.

341. Transformation d'un courant continu en courant alternatif et inversement. Commutatrices. — Imaginons un conducteur circulaire ACBDA mobile autour d'un axe O et frottant sur deux balais A et B en relation avec les pôles d'une pile. Le cir-

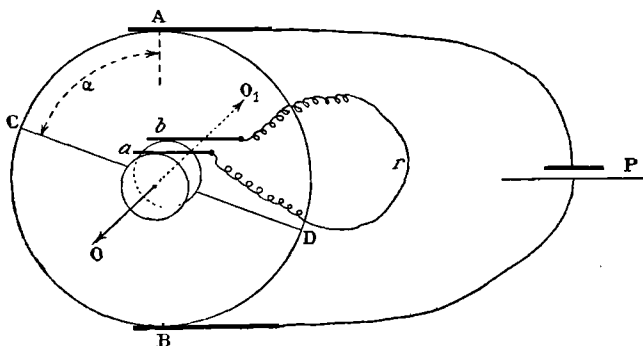


Fig. 183.

cuit APB a une résistance négligeable, de manière qu'on puisse considérer comme constante la force électromotrice E entre les points A et B (fig. 183).

Soit ρ la résistance du circuit ACBDA par unité d'angle : $\rho\alpha$ est la résistance de la partie AC, $2\pi\rho$ la résistance totale. Joignons deux points diamétralement opposés CD par un conducteur de résistance r , et faisons tourner le système mobile.

Il est évident que dans le conducteur diamétral passe un courant alternatif : les maximums correspondent aux deux positions verticales du diamètre CD, les zéros aux deux positions horizontales. Si la rotation se fait avec une vitesse constante, le courant dans le pont est très loin d'être sinusoïdal. On obtiendra donc par cette disposi-

tion un courant alternatif non sinusoïdal. Calculons la valeur du courant. On trouve aisément (§ 169) :

$$i = E \frac{\pi - 2\alpha}{\pi r + 2\alpha(\pi - \alpha)\rho}.$$

Si r est grand devant ρ , le courant est représenté par les droites abc, cde, \dots . Si r n'est pas très grand devant ρ , le courant est représenté par les courbes $aa'bb'c, \dots$ (fig. 82).

Ainsi ce système de transformation présente deux inconvénients : 1^o on s'écarte beaucoup de la forme sinusoïdale ; 2^o on s'en écarte d'autant plus que ρ est plus grand. Or, si ρ devient petit, il passe dans le cercle un courant qui est intense, comparativement à la valeur moyenne du courant alternatif utilisé dans le pont CD : d'où perte sèche d'énergie.

La réalisation pratique du système précédent est simple. On prend un anneau Gramme ordinaire, on monte sur son axe deux bagues collectrices continues reliées à deux points D et C diamétralement opposés sur l'anneau ; des balais a et b frottent sur ces bagues et servent de bornes pour le circuit extérieur CD. Les balais ordinaires du collecteur frottent en A et B et amènent le courant continu. Les électros sont supprimés ou ne sont pas excités ; on fait tourner l'anneau par un procédé quelconque.

342. Utilisation d'un anneau Gramme dont l'excitation est maintenue. — La transformation par le commutateur précédent est mauvaise ; on la rend bonne et économique en excitant les électros et en les utilisant à faire tourner l'anneau. L'appareil se trouve ainsi complètement transformé : expliquons ce résultat paradoxal.

Au § 321 nous avons insisté sur ce fait qu'une dynamo employée comme moteur produit une force contreélectromotrice qui croît à mesure que la vitesse augmente. Si la dynamo tourne à vide, la vitesse est telle que cette force électromotrice annule très sensiblement la force électromotrice imposée aux bornes. Tout se passe comme si la résistance du circuit était considérable ; le courant dans l'anneau est à peu près annulé.

Or ce qui rend inacceptable le système de commutation précédent est la perte d'énergie qui provient du courant passant dans l'anneau, quand l'excitation est supprimée. Rétablissons donc cette excitation ; il naît dans le circuit ACBDA des forces électromotrices dont la résultante F' s'oppose à la force électromotrice extérieure E .

Quand le pont est en AB, les forces électromotrices E et E' , sensiblement égales, sont dirigées dans le même sens par rapport à lui et se conduisent comme les forces électromotrices de deux piles montées en quantité. A peu près rien ne passe dans l'anneau, tandis que le courant maximum traverse le pont.

Quand le pont est normal à AB, les forces électromotrices d'induction se balancent par rapport au pont ; il n'y passe rien. Mais elles équilibrent encore sensiblement la force électromotrice extérieure ; il ne passe à peu près rien non plus dans l'anneau

Discussion analogue pour les positions intermédiaires.

Non seulement la perte d'énergie est très diminuée par le maintien de l'excitation, mais encore la forme du courant alternatif est rendue très voisine de la sinusoïde.

Il serait trop long de faire la théorie complète ; nous en avons dit assez pour faire comprendre le principe de la commutatrice.

On peut placer sur l'axe de l'induit Gramme (anneau ou tambour, peu importe) trois bagues collectrices continues, reliées avec trois points équidistants de l'enroulement. Les fractions de cet enroulement jouent le rôle de trois alternateurs montés en triangle : on obtient du courant triphasé. On obtiendrait un courant polyphasé quelconque avec un nombre suffisant de bagues.

Revenons au courant monophasé. Le maximum E de la force électromotrice e , appliquée aux bornes du circuit extérieur, égale la force électromotrice constante appliquée aux balais du collecteur. Si le circuit alternatif est sans induction et de résistance R , l'énergie qui

$$y \text{ est dépensée est : } \frac{1}{T} \int_0^T \frac{e^2}{R} dt = \frac{E^2}{2R}.$$

Elle est moitié de l'énergie qu'on aurait obtenue pendant le même temps avec le courant continu passant dans la même résistance. Nous avons dit qu'on ne perd pas la différence : le courant d'alimentation de la commutatrice n'est plus continu, il passe par des maximums sensiblement égaux à $E:R$ et par des minimums sensiblement nuls.

Champs tournants.

343. **Production d'un champ tournant.** — Supposons qu'à l'aide d'un alternateur polyphasé, *par exemple triphasé*, nous obtenions dans des circuits *identiques* les trois courants :

$$i_1 = i_0 \sin \omega t, \quad i_2 = i_0 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_3 = i_0 \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Ce système de courants s'appelle *système triphasé*. Voici ses importantes propriétés.

Envoyons ces courants dans trois bobines fixes, égales et disposées symétriquement autour de leur centre O (fig. 184), A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 . Les courants produisent des champs qui, au centre O des bobines, sont normaux à leurs plans et dirigés suivant OH_1 , OH_2 , OH_3 . Soit G

la constante des cadres : les champs sont représentés par les formules :

$$H_1 = Gi_1,$$

$$H_2 = Gi_2,$$

$$H_3 = Gi_3.$$

Si les H sont positifs, on portera les champs dans les directions OH_1 , OH_2 , OH_3 ; si les H sont négatifs, on les portera en sens inverse.

Il s'agit maintenant de calculer la résultante des trois champs. Projétons-les sur les directions normales entre elles Ox et Oy .

Suivant Ox , on a la somme des projections :

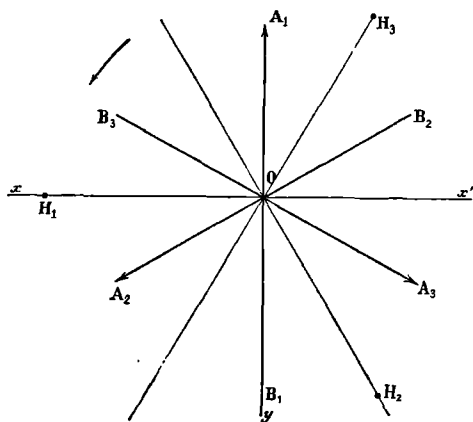


Fig. 184.

$$H_1 + H_2 \cos \widehat{H_1 O H_2} + H_3 \cos \widehat{H_1 O H_3},$$

ou, ce qui revient au même :

$$H_1 - (H_2 + H_3) \cos \widehat{H_3 O x'};$$

$$\widehat{H_3 O x'} = \frac{\pi}{3}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

la composante x est : $H_1 - \frac{1}{2} (H_2 + H_3)$.

On a suivant Oy : $(H_2 - H_3) \cos \widehat{H_2 O y}$;

$$\widehat{H_2 O y} = \frac{\pi}{6}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

la composante y est : $(H_2 - H_3) \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remplaçons les H par leurs valeurs ; il vient, grâce aux formules démontrées au § 260 :

$$x = Gi_0 \left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right] = Gi_0 \frac{3}{2} \sin \omega t.$$

$$y = Gi_0 \left[\sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{2} = -Gi_0 \frac{3}{2} \cos \omega t.$$

$$\text{On a :} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3Gi_0}{2} = H_0.$$

La grandeur du champ est constante : le champ au point O est

représenté par une droite qui tourne d'un mouvement uniforme dans le sens de la flèche.

Au temps 0, il est dirigé suivant OA_1 ($x=0, y=-H_0$). Au temps $T:2$, il est dirigé suivant Ox ($x=H_0, y=0$).

Et ainsi de suite. Nous pouvons donc produire un champ tournant à l'aide des courants triphasés.

Le raisonnement que nous venons de faire est général ; il s'applique évidemment à un nombre quelconque de phases. On emploiera autant de bobines symétriquement disposées autour de O qu'il y a de phases.

Par exemple, on obtient un champ tournant à l'aide de deux bobines à angle droit parcourues par des courants alternatifs décalés de $\pi:2$. Il est même possible de réaliser l'expérience avec du courant alternatif *monophasé*. Nous avons montré en effet, au § 269, qu'on peut choisir les bobines *mises en dérivation* de manière que les courants y soient en quadrature.

344. Aimant permanent placé dans un champ tournant H_0 .

— Soit au point O un champ constant H_0 tournant dans le sens de la flèche F et faisant un angle ωt avec l'axe des x ; ω est la vitesse angulaire. Soit un aimant de moment M tournant dans le même sens avec une vitesse angulaire ω' et faisant actuellement un angle $\omega't - \alpha$ avec l'axe des x (fig. 185).

Le couple exercé sur l'aimant est :

$$C = H_0 M \sin [(\omega - \omega')t + \alpha].$$

Le travail du champ sur l'aimant est égal à :

$$Cd(\omega't - \alpha) = C\omega'dt.$$

Le travail moyen pour une période du phénomène, c'est-à-dire pour un temps t_0 donné par la condition : $\frac{2\pi}{t_0} = \omega - \omega'$, est nul évidemment, sauf dans le cas où l'on a : $\omega = \omega'$. Il est alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T C\omega'dt = \omega H_0 M \sin \alpha;$$

résultat évident si nous remarquons que pour : $\omega = \omega'$, le couple est constant et a pour expression :

$$C = H_0 M \sin \alpha.$$

Nous retrouvons donc ici un moteur synchrone. Sa puissance varie avec α ; elle est maxima pour $\alpha = \pi:2$, et vaut alors : $\omega H_0 M$.

Nous pouvons répéter pour ce moteur ce qui est dit au § 336. A la condition qu'on exige de lui une puissance inférieure à la

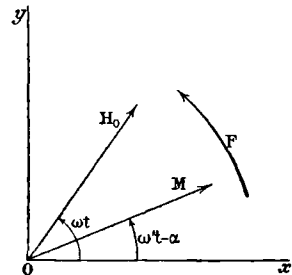


Fig. 185.

puissance maxima, l'angle α reste compris entre 0 et $\pi/2$; le moteur se maintient synchrone avec stabilité. Tout retard augmente α et par conséquent la puissance, et amène une avance; toute avance diminue α et par conséquent la puissance, et produit un retard.

345. Bobine fermée dans un champ tournant. — Soit maintenant OM la normale aux spires d'une bobine qui peut tourner autour d'un axe de rotation passant par le point O. Le flux qu'elle reçoit à chaque instant dans sa surface totale S, est égal à :

$$\mathcal{F} = H_0 S \cos [(\omega - \omega')t + \alpha].$$

La force électromotrice induite par les variations de ce flux est :

$$-\frac{d\mathcal{F}}{dt} = H_0 S (\omega - \omega') \sin [(\omega - \omega')t + \alpha].$$

L'équation différentielle du courant dans la bobine est :

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0,$$

en considérant comme positif le sens de circulation allant en sens inverse des aiguilles d'une montre pour le bonhomme dont les pieds sont en O et la tête en M.

Le courant est donné par l'équation : $i = I \sin [(\omega - \omega')t + \alpha - \varphi]$, avec les conditions :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L(\omega - \omega')}{r}, \quad I = \frac{H_0 S (\omega - \omega')}{\sqrt{r^2 + L^2(\omega - \omega')^2}}.$$

Enfin le couple à chaque instant est le même que si la bobine était un aimant de moment : $M = Si$; il est donc :

$$C = H_0 S I \cdot \sin [(\omega - \omega')t + \alpha - \varphi] \sin [(\omega - \omega')t + \alpha].$$

Le travail moyen pour une période t_0 du phénomène, définie par la condition : $\frac{2\pi}{t_0} = \omega - \omega'$, est :

$$W = \frac{\omega' H_0 S I}{2} \cos \varphi = \frac{\omega' H_0^2 S^2 r}{2} \frac{\omega - \omega'}{r^2 + L^2(\omega - \omega')^2}.$$

C'est la puissance de la bobine considérée comme moteur. Pour obtenir le couple moyen C_m , il suffit de diviser par ω' .

346. Discussion. — MOTEURS ASYNCHRONES. — Supposons ω donné; faisons varier ω' . Considérons la valeur du couple : elle est proportionnelle à :

$$\frac{\omega - \omega'}{r^2 + L^2(\omega - \omega')^2}.$$

Les vitesses angulaires ω du champ et ω' de la bobine ne peuvent devenir égales; car le mouvement relatif serait nul et les phénomènes d'induction disparaîtraient dans la bobine. La vitesse ω' diminuerait

aussitôt sous l'influence des frottements : on a donc nécessairement $\omega > \omega'$.

Le maximum de C_m a lieu pour : $\omega - \omega' = \frac{r}{L}$. Comme L est généralement grand devant r , la courbe qui donne C_m en fonction de ω' a la forme représentée fig. 186. Pour de petites valeurs de ω' , $\omega - \omega'$ étant grand, C_m est sensiblement proportionnel à : $\frac{1}{L^2 \omega - \omega'}$; ce

serait une hyperbole se confondant sensiblement avec AB au voisinage de A , et admettant comme asymptotes l'axe des vitesses et une verticale passant par C .

Pour des valeurs de ω' voisines de ω , la courbe se réduit à une droite passant par le point C .

Au démarrage, $\omega' = 0$, le couple a une valeur notable OA ; c'est un des avantages des moteurs que nous étudions. Ils sont *asynchrones* en ce sens qu'ils fonctionnent pour ω' très différent de ω .

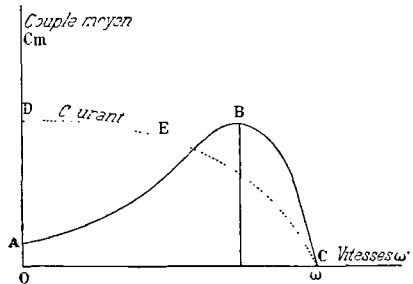


Fig. 186.

L'intensité du courant exprimée en fonction de ω' suit une tout autre loi. Elle est grande et à peu près constante pour ω' voisin de zéro. Le courant de *démarrage* est donc généralement très intense; il peut être nécessaire d'introduire des résistances dans le circuit de l'induit pour éviter de trop grands échauffements.

La puissance maxima correspond au maximum de :

$$\frac{\omega' (\omega - \omega')}{r^2 + L^2 (\omega - \omega')^2}$$

Comme cette puissance est égale au produit du couple par ω' , la courbe représentative passera par les points O et C ; elle a la forme générale de la courbe des couples, mais son maximum se produit pour des valeurs de ω' plus voisines de ω .

Le rendement peut être défini comme le quotient de la puissance W utilisée par la somme $W + w$ de cette puissance et de l'énergie perdue dans l'effet Joule. Or on a :

$$w = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} r i^2 dt = \frac{I^2 r}{2} = \frac{r H_0^2 S^2 (\omega - \omega')^2}{2 [r^2 + L^2 (\omega - \omega')^2]} ; \quad \frac{W}{W + w} = \frac{\omega'}{\omega}$$

Comme le maximum de la puissance a lieu pour ω' différent peu de ω , le rendement ne diffère pas trop de 1; la perte par effet Joule est acceptable.

Nous supposons dans ce qui précède que l'induit est une bobine

fermée : cela n'est pas nécessaire. On peut placer dans le champ tournant une masse pleine quelconque en métal bon conducteur ; la théorie reste identiquement la même.

On donne au corps conducteur mobile une forme telle que les courants induits soient le plus intenses possible pour un moindre poids de cuivre employé dans la construction. La forme dite en cage d'écureuil (fig. 187) est la plus favorable : le mobile se compose de deux bases annulaires jointes entre elles par des barres de cuivre ; le système

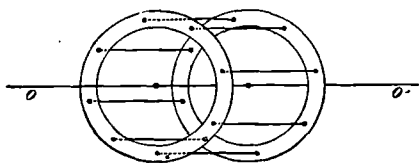


Fig. 187.

tourne autour de l'axe OO' sur lequel sont montées les poulies qui servent à l'utilisation du moteur.

Pour augmenter la grandeur du champ, on noie généralement les barreaux de la cage dans une masse de fer : la mauvaise conductibilité du fer le rend impropre au passage de courants intenses. Son rôle se borne à offrir au passage des lignes d'induction un milieu plus perméable. Nous avons expliqué au § 308 pourquoi le fer ne modifie pas la grandeur des phénomènes d'induction.

347. Moteurs industriels à champ tournant. — Le moteur que nous venons de décrire est schématique. Ce qu'on cherche à réaliser dans l'industrie, ce n'est pas en un point un champ tournant, mais sur une circonférence un champ dont la composante utile, passant par le centre de cette circonférence, se meut d'un mouvement angulaire uniforme. Ne considérant que la composante utile, on peut dire que l'industrie cherche à réaliser un champ radial tournant.

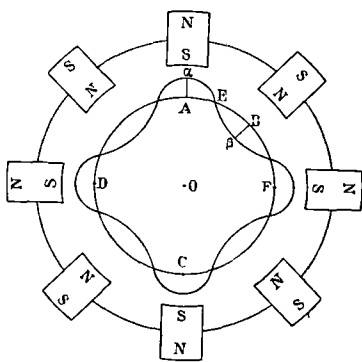


Fig. 188.

Précisons la constitution de ce champ radial sur une machine schématique (fig. 188).

Montons sur une circonférence rigide d'axe O des aimants permanents de pôles alternés. Sur la circonférence $ABCD$ concentrique,

la composante utile radiale du champ peut être représentée par une sorte de sinusoïde dont les ordonnées sont comptées sur les rayons. En A le champ est centrifuge et possède sa valeur maxima $A\alpha$; en B il est centripète et possède sa valeur maxima $B\beta$. En E le champ total est tangent à la circonférence ; la composante radiale utile est nulle.

En définitive, le champ radial est à répartition approximativement sinusoïdale.

Faisons tourner le système des aimants et supposons que la circonférence ABCD limite un corps conducteur ; il y aura entraînement de ce conducteur par la rotation du champ radial. Comme le champ radial tournant est à répartition sinusoïdale, ou plus généralement est alternativement centripète et centrifuge, les forces électromotrices induites dans le conducteur (forces électromotrices dont la direction générale est normale au plan du tableau) sont alternativement dans un sens et dans l'autre, ce qui permet aux courants induits de circuler aisément dans le conducteur. Si le champ radial était toujours de même sens, son déplacement angulaire produirait bien encore des forces électromotrices ; mais elles seraient toutes de mêmes sens : l'unique résultat serait de porter les faces opposées (antérieure et postérieure) du conducteur ABCD à des potentiels différents.

348. Champ radial. — Industriellement on cherche à réaliser un *champ radial à répartition sinusoïdale, tournant d'un mouvement uniforme*. On y parvient (assez grossièrement, il est vrai) au moyen d'électroaimants radiaux fixes, traversés par des courants alternatifs polyphasés.

Par exemple, logeons radialement sur une circonférence douze électros fixes traversés par du courant triphasé. Chaque phase traverse quatre électros à angles droits, dont les connexions sont alternées. On aura, sur une circonférence voisine des extrémités polaires, un champ radial tournant avec deux maximums et deux minimums.

En effet, le champ *radial stationnaire* produit par la première série de bobines est approximativement (à un facteur constant près) :

$$H_1 = \sin \omega t \sin 2\theta.$$

θ est l'angle fixant la position du point considéré sur la circonférence ABCD ; il est compté à partir d'un rayon aboutissant au centre d'un des électros de la première série. Si θ augmente de π , le champ redevient le même. Il change de signe quand on ajoute à θ les angles $\pi : 2$ et $3\pi : 2$. Tout ceci est bien conforme à l'hypothèse de quatre électros parcourus par le même courant alternatif et dont les connexions sont alternées.

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\varepsilon = 2\pi : 3.$$

Les champs H_2 et H_3 dus aux deux autres systèmes d'électros, traversés par des courants alternatifs décalés de ε et 2ε , et séparés du premier système par des angles ε et 2ε comptés sur la circonférence ABCD, sont :

$$H_2 = \sin (\omega t - \varepsilon) \sin (2\theta - \varepsilon), \quad H_3 = \sin (\omega t - 2\varepsilon) \sin (2\theta - 2\varepsilon).$$

Le champ radial résultant est : $H = H_1 + H_2 + H_3$. On trouvera facilement :

$$H = 1,3 \cdot \cos(\omega t - 2t).$$

C'est un champ tournant radial à répartition sinusoïdale.

Transformateurs.

349. Bobines de réaction. — Pour bien comprendre la théorie des transformateurs, il faut d'abord avoir une idée nette du rôle de la *bobine de réaction*. C'est un enroulement sur un circuit magnétique auquel on peut donner une réluctance plus ou moins grande. Par exemple, c'est une bobine dont le nombre des spires est n_1 , et dans l'âme de laquelle on peut enfoncer plus ou moins profondément un cylindre formé de fils de fer serrés les uns contre les autres.

Soit : $e_1 = E_1 \sin(\omega t - \varepsilon_1)$, la force électromotrice alternative appliquée au circuit dont fait partie la bobine. Admettons pour simplifier qu'il n'y ait pas d'hystérésis et que le flux d'induction dans le fer soit simplement proportionnel au courant : $i_1 = I_1 \sin \omega t$, qui traverse la bobine. Si \mathcal{R} est la réluctance du circuit magnétique, le flux d'induction Φ est donné par la formule (§ 292) :

$$4\pi n_1 i_1 = \Phi \mathcal{R} = \Phi_0 \mathcal{R} \sin \omega t = 4\pi n_1 I_1 \sin \omega t.$$

Nous sommes évidemment toujours libres de choisir l'origine des temps de manière que la phase du courant ou du flux d'induction soit nulle : il semblerait plus naturel de prendre une origine telle que $\varepsilon_1 = 0$; nous faisons notre choix pour simplifier les formules que nous aurons tout à l'heure à calculer.

La force contreélectromotrice qui résulte de la naissance de ce flux est :

$$n_1 \frac{d\Phi}{dt} = n_1 \omega \Phi_0 \cos \omega t.$$

Or : $\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$; on peut dire que la force contreélectromotrice envisagée comme opposée à la force électromotrice appliquée, est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au flux.

L'équation différentielle qui fournit le courant est en définitive :

$$r_1 i_1 = e_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - n_1 \frac{d\Phi}{dt} ;$$

r_1 est la résistance.

Nous pouvons admettre que la self induction du circuit (la bobine de réaction étant exceptée) est négligeable. Il reste :

$$\begin{aligned} r_1 i_1 &= e_1 - n_1 \frac{d\Phi}{dt}; \\ r_1 I_1 \sin \omega t &= E_1 \sin (\omega t - \varepsilon_1) - n_1 \omega \Phi_0 \cos \omega t, \\ r_1 I_1 \sin \omega t &= E_1 \sin (\omega t - \varepsilon_1) - \frac{4\pi n_1^2 I_1 \omega}{\mathfrak{R}} \cos \omega t. \end{aligned} \quad 1)$$

Nous tirons de là :

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = - \frac{n_1 \omega \Phi_0}{r_1 I_1} = - \frac{4\pi n_1^2 \omega}{\mathfrak{R} r_1}.$$

Comme la réluctance du circuit est très petite, $\operatorname{tg} \varepsilon_1$ est négatif et très grand; ε_1 est négatif et très voisin de $-\pi : 2$. Le premier terme du second membre de l'équation (1) peut donc s'écrire approximativement :

$$e_1 = E_1 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right);$$

la force électromotrice appliquée est donc en avance de $\pi : 2$ par rapport au flux.

Donc, et cette conclusion est fondamentale, la force contreélectromotrice est quasi synchrone de la force électromotrice appliquée : avec les conventions de signes adoptées, elle lui est presque exactement opposée et l'annule à peu près complètement. Ainsi, bien que le circuit ait conservé sa faible résistance, la réactance due au noyau de fer est si considérable, que le courant est pratiquement annulé.

On a :

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{r_1^2 + \frac{16\pi^2 n_1^4 \omega^2}{\mathfrak{R}^2}}},$$

quantité très petite dès que \mathfrak{R} est petit.

La conséquence pratique de ce qui précède est l'emploi de la réactance pour régler l'intensité d'un courant alternatif; on emploie non pas des résistances, mais des bobines de réaction dont on fait varier la réluctance comme il a été dit plus haut.

Bien entendu, les phénomènes sont compliqués par l'hystérésis; les pertes d'énergie sont plus considérables que ne l'indique le calcul précédent. Le noyau chauffe. On peut mesurer cet échauffement et calculer la perte d'énergie correspondante (§ 304).

350. Transformateurs. — Ajoutons sur la bobine de réaction un second enroulement de n_2 spires, que nous appellerons *secondaire*. Celui dont nous avons étudié le rôle est le *primaire*, aux extrémités duquel nous appliquons une force électromotrice e_1 . Nous constituons ainsi un *transformateur*. L'étude de la bobine de réaction correspond

donc à l'étude du transformateur fonctionnant à *vide*, c'est-à-dire avec le secondaire coupé ou fermé sur une résistance considérable.

Pour simplifier les calculs, admettons que la self du secondaire est négligeable *en dehors du transformateur*.

Voici quelles seront les équations du problème.

Le flux dans le noyau de fer dépend maintenant des intensités des courants primaire et secondaire :

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t - \varphi_1), \quad i_2 = I_2 \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Il est donné par la condition :

$$4\pi(n_1 i_1 + n_2 i_2) = \Phi \mathfrak{R} = \Phi_0 \mathfrak{R} \sin \omega t. \quad (1)$$

Les équations différentielles des courants sont :

$$r_1 I_1 \sin(\omega t - \varphi_1) = E_1 \sin(\omega t - \varepsilon_1) - \omega n_1 \Phi_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

$$r_2 I_2 \sin(\omega t - \varphi_2) = -\omega n_2 \Phi_0 \cos \omega t. \quad (3)$$

Les trois équations précédentes résolvent complètement le problème, en admettant que l'hystérésis n'existe pas et que le flux dans le noyau de fer est proportionnel à la force magnétomotrice.

L'équation (3) donne immédiatement :

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{\omega n_2 \Phi_0}{r_2}.$$

L'équation (1) donne :

$$4\pi n_1 I_1 \cos \varphi_1 = \Phi_0 \mathfrak{R}; \quad n_1 I_1 \sin \varphi_1 = -n_2 I_2 = -\frac{\omega n_2^2 \Phi_0}{r_2}.$$

$$\text{D'où : } \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{4\pi\omega n_2^2}{r_2 \mathfrak{R}}, \quad I_1^2 = \frac{16\pi^2 \omega^2 n_2^4 + r_2^2 \mathfrak{R}^2}{16 \cdot \pi^2 n_1^2 r_2^2} \cdot \Phi_0^2.$$

Enfin l'équation (2) donne :

$$E_1 \cos \varepsilon_1 = r_1 I_1 \cos \varphi_1 = \frac{r_1 \mathfrak{R}}{4\pi n_1} \Phi_0.$$

$$E_1 \sin \varepsilon_1 = r_1 I_1 \sin \varphi_1 - \omega n_1 \Phi_0 = -\omega \Phi_0 \cdot \frac{n_2^2 r_1 + n_1^2 r_2}{n_1 r_2},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = -\frac{4\pi\omega}{\mathfrak{R}} \left[\frac{n_2^2}{r_2} + \frac{n_1^2}{r_1} \right],$$

$$E_1^2 = \frac{r_1^2 \mathfrak{R}^2}{16\pi^2 n_1^2} \Phi_0^2 + \omega^2 \frac{(n_2^2 r_1 + n_1^2 r_2)^2}{n_1^2 r_2^2} \Phi_0^2;$$

formules qui donnent explicitement : I_1 , φ_1 , I_2 , φ_2 , E_1 , ε_1 , en fonction du flux Φ_0 .

351. Transformateur à pleine charge. — Supposons \mathfrak{R} et r_2 suffisamment petits. Il vient : $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\infty$, $\varphi_1 = -\pi : 2$; comme on a : $\varphi_2 = \pi : 2$, les deux courants i_1 et i_2 passent à peu près exactement en sens opposés, en discordance parfaite de phase.

Le courant secondaire joue donc un rôle démagnétisant : la réaction de la bobine diminue considérablement, et le courant primaire augmente d'intensité.

Si on avait exactement : $\sin \varphi_1 = -1$, il viendrait : $n_1 I_1 = n_2 I_2$; les deux courants seraient :

$$i_1 = I_1 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_1 \cos \omega t,$$

$$i_2 = I_2 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -I_2 \cos \omega t.$$

D'où : $n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$. Le flux d'induction Φ serait réduit à zéro.

Bien entendu, on approche seulement de cette limite.

On conçoit maintenant le mécanisme par lequel le transformateur règle *automatiquement* le rapport des courants qui le traversent. Si la réluctance est assez faible, la relation :

$$I_2 n_2 = I_1 n_1,$$

nous apprend qu'il se maintient dans le primaire une intensité proportionnelle à l'intensité dans le secondaire. Quand on diminue la résistance de celui-ci (en augmentant, par exemple, le nombre des lampes mises en dérivation sur deux conducteurs liés aux extrémités du secondaire), I_2 augmente, et simultanément, par suite de l'effet démagnétisant, ce courant I_1 augmente dans le même rapport, qui est le rapport des nombres de spires des deux enroulements.

352. Force électromotrice dans le circuit secondaire. —

Nous n'avons rien spécifié sur les points d'application de la force électromotrice e_1 appliquée au primaire. Admettons que ce soit précisément aux bornes du transformateur; ce qui revient à brancher *directement* ce transformateur sur un circuit où la différence de potentiel alternative est maintenue égale à e_1 . Plaçons-nous dans le cas ordinaire où il s'agit d'utiliser un faible courant à haut voltage en le transformant en un courant plus intense à bas voltage : n_1 est donc beaucoup plus grand que n_2 , par exemple 30, 50 fois plus grand. La résistance du *secondaire* dans le transformateur est généralement très faible, quelques centièmes d'ohm; mais la résistance r_2 du *circuit secondaire* est au contraire généralement grande.

Si donc \mathcal{R} est petit, r_1 pas trop grand (de l'ordre d'une dizaine d'ohms par exemple), les termes de E qui contiennent : $\frac{r_1^2 \mathcal{R}^2}{n_1^2}$ et $n_2^2 r_1$ seront négligeables; il reste en définitive :

$$E_1 = \frac{\omega n_1^2 r_2}{n_1 r_2} \Phi_0 = \omega n_1 \Phi_0 = \frac{r_2 n_1}{n_2} I_2.$$

Le produit $I_2 r_2$ mesure, si l'on veut, la force électromotrice maxima

E_2 du secondaire dont par hypothèse la self induction est négligeable hors du transformateur. Il vient en définitive :

$$\frac{E_1}{n_1} = \frac{E_2}{n_2}.$$

Un transformateur dont la réluctance est faible, maintient aux bornes du secondaire une force électromotrice alternative e_2 dont la valeur maxima E_2 est dans un rapport constant avec la force électromotrice maxima E_1 appliquée aux bornes du primaire.

353. Énergie absorbée par le transformateur. — Elle dépend non seulement de la force électromotrice appliquée e_1 et de l'intensité i_1 primaire, mais encore du décalage de ces deux quantités.

Nous avons vu que le courant primaire est en avance sur le flux ; il en est de même pour la force électromotrice appliquée. On a : $\varphi_1 < 0$, $\varepsilon_1 < 0$. Comme :

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{4\pi\omega}{\mathcal{R}} \frac{n_1^2}{r_1},$$

ε_1 est plus grand en valeur absolue que φ_1 . Le courant primaire est donc en retard sur la force électromotrice appliquée de la quantité : $\psi = \varphi_1 - \varepsilon_1$. On trouve :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{4\pi\omega n_1^2 r_2^2 \mathcal{R}}{16\pi^2 \omega^2 n_2^2 [r_2 n_1^2 + r_1 n_2^2] + r_1 r_2^2 \mathcal{R}^2}.$$

Si $r_2 = \infty$ et \mathcal{R} très petit, $\psi = \pi : 2$, le courant primaire est en quadrature avec la force électromotrice appliquée. L'énergie dépensée est faible.

Mais à mesure que r_2 devient de plus en plus petit, ψ diminue : le décalage diminue entre le courant primaire et la force électromotrice appliquée, l'énergie dépensée augmente. A partir d'une certaine charge, le décalage devient insignifiant. On s'explique ainsi l'énergie disponible dans le secondaire.

Bien entendu, il faut dans l'évaluation complète du rendement tenir compte de l'énergie perdue par l'effet Joule et par l'hystérésis.

354. Construction des transformateurs. — La bobine de Ruhmkorff (Cours de Mathématiques, § 207) est un transformateur à *circuit magnétique ouvert*. Il en est de même pour le transformateur (§ 350) obtenu en ajoutant un second enroulement à la bobine de réaction du § 349.

Les transformateurs industriels sont toujours à *circuit magnétique fermé* de manière que la réluctance soit faible. Le noyau est généralement formé de tôles découpées qui sont introduites après coup dans les enroulements. Les tôles sont placées de manière que les courants de Foucault les traversent normalement ; ils sont arrêtés au passage

de l'une à l'autre par l'inévitable petite couche d'oxyde de fer dont la conductibilité est faible.

Pour les courants polyphasés, les transformateurs contiennent autant de doubles enroulements qu'il y a de phases.

Nous avons dit au § 301 avec quel soin les tôles doivent être choisies pour que l'échauffement par hystérésis ne détériore pas rapidement l'appareil.

CHAPITRE X

UNITÉS ABSOLUES

RAPPORT DES UNITÉS MAGNÉTIQUES ET STATIQUES

355. **Système électromagnétique.** — Je rappelle qu'il n'entre dans les formules que des nombres, que les opérations arithmétiques et algébriques ne sont définies que sur des nombres; que le quotient d'une longueur par une vitesse est une *pure absurdité*, à moins que cette locution ne signifie le rapport du nombre qui exprime une longueur par le nombre qui exprime une vitesse. Nous avons déjà insisté sur ces vérités élémentaires (§ 244 du Cours de Mathématiques).

Le point de départ de la définition des unités électromagnétiques réside dans les expériences de Gauss. Par convention nous posons que le nombre qui exprime la durée d'oscillation d'un aimant dans un champ est donné par la formule (§ 131) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}.$$

M est le nombre qui exprime la mesure du moment magnétique, H le nombre qui exprime la mesure de l'intensité du champ, I le nombre qui exprime en grammes masse et centimètres la valeur du moment d'inertie.

On pose d'autre part que le nombre qui exprime la valeur du champ H' , dans le prolongement de l'axe d'un aimant et à une distance r du centre, est donné par la formule (§ 133) :

$$H' = \frac{2M}{r^3}.$$

r est évalué en centimètres.

La combinaison de ces deux formules fournit des *nombres* qui sont les mesures de M et de H, c'est-à-dire le résultat de la comparaison du moment M et de l'intensité H au moment et à l'intensité qui d'une manière implicite se trouvent *arbitrairement* choisis pour unités.

L'unité concrète de champ ainsi obtenue s'appelle *gauss*.

On appelle quelquefois *maxwell* l'unité de flux qui en dérive.

On aurait pu poser tout aussi bien les formules :

$$T = k \cdot 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}, \quad H' = k' \frac{2M}{r^3},$$

k et k' étant des nombres quelconques.

Tant que T , r , I , restent exprimés dans le système CGS, on ne sort pas de ce système. L'introduction des coefficients k et k' , choisis une fois pour toutes, n'aurait d'autre effet que de modifier la grandeur des quantités concrètes, moment et champ, que l'on prend comme unités, comme termes de comparaison des quantités de même espèce, et *qui restent toujours absolument arbitraires*.

Poser : $k = k' = 1$, c'est faire un choix particulier, ni meilleur ni pire qu'un autre en pure logique.

Le moment d'un aimant étant *numériquement* défini, la puissance d'un feuillet (moment par unité de surface) l'est comme conséquence.

On pose que l'intensité d'un courant qui produit un champ identique au champ d'un feuillet limité au même contour et de puissance convenable, est exprimée par le nombre qui mesure la puissance de ce feuillet équivalent. Cela revient à écrire, par exemple, que le nombre H , qui mesure le champ d'un courant rectiligne indéfini, en un point situé à une distance r , est fourni par l'expression :

$$H = \frac{2i}{r},$$

i exprimant l'intensité du courant avec l'unité précédemment choisie.

On pose que les produits : $Ri^2t = eit$, mesurent en ergs l'énergie dépensée dans un conducteur. On déduit de ces formules l'expression numérique des résistances et des forces électromotrices, puisque les nombres i sont maintenant déterminables. Cela revient donc à choisir les quantités concrètes qui serviront d'unités de résistance et de force électromotrice, c'est-à-dire auxquelles on comparera les résistances et les forces électromotrices : on obtient comme résultat de cette comparaison les nombres R et e .

Enfin on pose que les produits : $q = it = Ce$, mesurent une quantité d'électricité. On déduit de ces formules l'expression numérique d'une capacité, ce qui revient implicitement à choisir une certaine capacité qui servira d'unité.

Ainsi de suite pour les autres quantités : le procédé de définition des unités concrètes est toujours le même. Il résulte du choix fait *a priori* d'une formule pour exprimer le résultat des mesures.

356. Système pratique électromagnétique. — Les quantités concrètes qui se trouvent choisies pour unités du fait des hypothèses précédentes, sont très grandes ou très petites *par rapport aux quantités usuelles* : les nombres qui entrent dans les formules et qui expriment le résultat de la comparaison des quantités usuelles aux

unités, sont donc très petits ou très grands. On a préféré prendre pour unités des multiples des grandeurs qu'on vient de définir : on a ainsi constitué le *système pratique*. Tout revient à modifier certains coefficients numériques dans les formules.

On conserve les unités de champ magnétique (gauss) et de moment.

Au lieu de l'unité CGS d'intensité, on prend l'*ampère* qui est une quantité 10 fois plus petite : le nombre qui mesure un courant en ampères, est 10 fois plus grand que le nombre qui le mesure avec l'unité CGS électromagnétique.

Il résulte de là que dans toutes les formules reliant l'intensité d'un courant et l'intensité du champ produit par ce courant, s'introduit un nouveau facteur numérique. Ainsi le champ donné par un courant i (en ampères) rectiligne, indéfini, à une distance r a pour mesure non pas : $\frac{2i}{r}$, mais : $0,2 \frac{i}{r}$.

On prend pour unité de résistance l'*ohm*, qui vaut 10^9 CGS. Il est clair que le produit Ri^2t ne représente plus des ergs ; R est un nombre 10^9 plus petit que dans le système CGS ; i^2 est un nombre 10^2 fois plus grand : Ri^2t est un nombre 10^7 fois plus petit qu'il ne le faudrait pour représenter des ergs.

Pour éviter le coefficient numérique 10^7 , on a choisi une autre unité de travail, le *joule*, qui vaut 10^7 fois l'erg. Le nombre qui exprime le travail en joules est donc 10^7 fois plus petit que le nombre qui l'exprime en ergs ; donc le produit Ri^2t , où R exprime le nombre d'ohms contenu dans la résistance, i le nombre d'ampères contenu dans l'intensité, exprime le nombre de joules déposés dans le circuit.

Voulant que le nombre *eit* mesure l'énergie en joules, on a dû prendre pour unité de force électromotrice (*volt*) une force électromotrice 10^8 fois plus grande que l'unité CGS. Le nombre e s'est donc trouvé divisé par 10^8 , le produit *eit* par 10^7 .

Le *watt* ou joule par seconde (unité de puissance) vaut donc 10^7 ergs par seconde.

Le *coulomb* (unité de quantité d'électricité) doit être 10^{-1} fois l'unité CGS pour que la formule : $q=it$, subsiste sans autre coefficient numérique.

Enfin l'unité de capacité ou *farad* doit être égale à 10^{-9} unités CGS, pour que la formule : $q=Ce$, subsiste sans autre coefficient numérique. En effet, quand on passe du système électromagnétique au système pratique, q , nombre qui exprime le résultat de la comparaison avec l'unité, devient 10 fois plus grand, e devient 10^8 fois plus petit ; il faut donc que C devienne 10^9 fois plus grand, et que par conséquent l'unité (terme de comparaison) devienne 10^9 fois plus petite.

En modifiant ainsi la plupart des quantités prises pour unités, on a pu maintenir aux formules le même aspect; cependant il n'en est pas toujours ainsi. La force électromotrice d'induction par exemple est donnée en volts par l'expression $10^{-8} \cdot \frac{d\mathcal{F}}{dt}$, où \mathcal{F} est le flux de force, évalué en gauss-centimètres carrés.

Quand le flux dépend de la variation d'un courant, la formule devient :

$$10^{-9} \cdot \frac{d(Li)}{dt},$$

où L est le coefficient de self induction.

Dans ce dernier cas, on a choisi comme unité de coefficient d'induction une grandeur (*henry*) égale à 10^9 fois l'unité CGS. Le nombre qui exprime L ou M devient 10^9 fois plus petit, et l'on doit supprimer le coefficient 10^{-9} en avant de la formule pour calculer en volts la force électromotrice induite.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

L'ampère	vaut	10^{-1} CGS
Le coulomb		10^{-1} »
L'ohm		10^9 »
Le joule		10^7 ergs.
Le watt		10^7 ergs seconde.
Le farad		10^{-9} CGS
Le microfarad		10^{-15} »
L'henry		10^9 »
Le volt		10^8 »

357. Système électrostatique. — Nous irons rapidement, le procédé de définition étant toujours le même.

L'unité de masse électrique est définie par la convention que l'expression : $F = \frac{qq'}{r^2}$, mesure la force en dynes *dans le vide*; r est évalué en centimètres. Nous aurions pu prendre arbitrairement : $F = \epsilon \frac{qq'}{r}$, où ϵ est un coefficient numérique; choisir ϵ revient à choisir l'unité concrète à laquelle on compare les masses électriques; q et q' sont les nombres qui expriment le résultat de ces mesures.

Par exemple, poser arbitrairement : $F = 10^2 \frac{qq'}{r^2}$, revient à choisir une unité 10 fois plus petite que la première : en effet, q et q' deviennent des nombres 10 fois plus grands, leur produit est 100 fois grand; il faut donc le multiplier par 10^{-2} pour obtenir le nombre qui mesure en dynes la répulsion, nombre qui ne doit évidemment pas dépendre de l'unité choisie pour la masse électrique.

L'unité de potentiel est définie par la condition que Vq exprime en ergs une énergie.

L'unité d'intensité de courant est définie par la condition que l'on ait entre la quantité q et l'intensité i , la relation : $q = it$.

Et ainsi de suite, en conservant aux formules leur aspect habituel et simple.

L'intensité du courant sert de transition pour la définition des unités de moment magnétique (feuillelet équivalent) et de champ magnétique.

358. Formules de dimensions. — On ne saurait trop répéter qu'une vitesse est une vitesse, et n'est pas le quotient d'une longueur par un temps. La formule : $e = vt$, signifie que, grâce à un choix convenable de l'unité de vitesse, on obtient le nombre qui mesure une vitesse avec cette unité, par le quotient des nombres qui mesurent la longueur et le temps avec certaines unités également choisies.

Il est utile :

1° de calculer les modifications numériques introduites dans le résultat des mesures par le changement des unités fondamentales, masse, longueur, temps ;

2° de vérifier au cours de tous les calculs si les formules sont complètes par des considérations d'*homogénéité*.

Les formules dites de dimensions répondent à ce but ; malheureusement leur signification a été souvent mal comprise, et on a voulu leur faire jouer un rôle dont elles sont incapables.

De la formule : $e = vt$, que par hypothèse nous conserverons telle quelle, nous déduisons immédiatement comment est modifiée l'unité de vitesse quand nous modifions l'unité de longueur. Si cette unité devient 10 fois plus grande, la même longueur est exprimée par un nombre 10 fois plus petit : pour que la formule subsiste telle quelle, il faut que v soit exprimé par un nombre 10 fois plus petit. D'où nous concluons que pour conserver la même formule avec le même coefficient numérique, il faut choisir une unité de vitesse 10 fois plus grande.

Le raisonnement est rapide. Mais prenons la formule donnant la force : $F = M \cdot g$. Nous risquons de nous tromper, si nous n'explicitons pas la relation qui existe entre la mesure de l'accélération et la mesure de la longueur et du temps. Nous écrirons donc :

$$F = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2},$$

et raisonnerons sur cette formule. On préfère, et c'est uniquement en cela que consiste la formule de dimensions, raisonner sur des formules dépouillées de tout coefficient numérique, où l'on ne conserve par conséquent que les mesures des quantités fondamentales, affectées d'un exposant convenable.

On écrit :

vitesse $= v = LT^{-1}$, force $=$ masse \times accélération $= MLT^{-2}$, etc.

On exprime ainsi, non pas que la force est le produit d'une masse par une accélération, ce qui est absurde, encore moins que la force est le quotient du produit ML par le carré du temps, mais simplement que le changement des unités fondamentales influe sur le nombre qui exprime le résultat de la comparaison d'une force avec la force choisie comme unité, comme si la mesure de la force était donnée par la formule : $F = MLT^{-2}$.

Par exemple, que devient l'unité de force si on prend l'unité de temps 10 fois plus petite, *les formules étant conservées avec les mêmes coefficients*? Si l'unité devient 10 fois plus petite, T qui exprime le résultat de la mesure devient 10 fois plus grand, T^{-2} devient 100 fois plus petit. Donc F devient 100 fois plus petit, donc l'unité de force devient 100 fois plus grande.

Prenons une formule quelconque : $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$, par exemple. Il est clair que les changements d'unités doivent influencer de la même manière sur les deux membres de cette équation. Donc ils doivent être *homogènes* par rapport à M, L, T , au sens que nous venons de définir ci-dessus.

Le moment d'inertie a pour dimensions : $I = ML^2$; les dimensions du couple C seront donc :

$$C = ML^2T^{-2} = MLT^{-2} \cdot L = FL.$$

Le couple a les dimensions d'un travail.

Il serait notoirement absurde de dire qu'un couple est un travail : mais la formule ne signifie pas cela; elle exprime seulement que les changements des unités fondamentales influent sur le nombre qui mesure un couple comme sur le nombre qui mesure un travail.

Si l'on a bien compris ce qui précède, on ne sera plus étonné qu'une même quantité puisse avoir plusieurs formules de dimensions distinctes, ces formules ne représentant en aucune manière la nature intime des quantités physiques.

Soit, par exemple, la quantité d'électricité.

Sa mesure est donnée dans le système électrostatique par la relation : $F = \frac{qq'}{r^2}$; d'où la formule de dimensions :

$$q = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1},$$

qui permet de calculer rapidement comment le nombre qui exprime le résultat de la mesure, et par conséquent l'unité de quantité d'électricité, dépendent du choix des unités fondamentales, dans l'hypothèse que l'on conserve la formule sans en changer les coefficients.

Dans le système électromagnétique, les dimensions de la quantité d'électricité sont différentes.

D'après les relations :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MII}}, \quad H' = \frac{2M}{r^3},$$

où M désigne un moment magnétique, il est facile de voir que les dimensions d'un courant (puissance d'un feuillet, moment magnétique

divisé par une surface) sont : $i = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$.

La quantité d'électricité a donc pour dimensions :

$$q = it = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}.$$

On a simultanément :

$$q_s = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}, \quad q_m = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}, \quad q_s : q_m = LT^{-1}.$$

Cela ne veut pas dire que le rapport $q_s : q_m$ est une vitesse, mais que les formules qui permettent la mesure des quantités d'électricité sont tellement choisies dans les deux systèmes, que la modification des unités fondamentales entraîne pour le rapport des nombres qui résultent des mesures, les mêmes variations que si leur quotient devait exprimer la mesure d'une certaine vitesse concrète parfaitement déterminée.

Supposons trouvée cette vitesse (l'expérience montre que c'est la vitesse de la lumière). Changeons les unités de longueur et de temps : cette vitesse, qui s'exprime dans le système CGS par le nombre $3 \cdot 10^{10}$, s'exprimera par un autre nombre. A la condition que, pour définir les unités statiques et magnétiques, nous conservions les mêmes formules avec les mêmes coefficients numériques, ce nouveau nombre exprimera dans le nouveau système d'unités le nombre d'unités statiques de quantité d'électricité que contient une unité magnétique.

Si l'on pose : $q_s = kq_m$, k n'est pas un coefficient numérique déterminable une fois pour toutes : il dépend des unités fondamentales comme le fait une vitesse.

L'exemple suivant éclaircira ce sujet. Soit à évaluer la longueur d'une route. Elle s'exprime naturellement par la formule de dimensions $l_1 = L$. Mais convenons de prendre pour unité de longueur le chemin que parcourt en l'unité de temps un certain mobile animé d'une vitesse invariable ; nous devons poser : $l_2 = T$.

D'où $l_1 : l_2 = LT^{-1}$. Cela ne veut évidemment pas dire que le quotient de deux longueurs est une vitesse, mais simplement qu'on se sert d'une certaine vitesse concrète comme intermédiaire : c'est ici la vitesse du mobile choisi pour préciser la seconde définition.

359. Réalisation concrète des unités absolues. — La méthode de Gauss nous apprend à déterminer en valeur absolue l'intensité d'un champ (l'intensité horizontale H du champ terrestre en particulier) et le moment d'un aimant (§§ 134 et 135).

La mesure en valeur absolue de l'intensité d'un courant revient à déterminer la constante G d'un cadre dans lequel on le fait passer (ce qui se ramène à des mesures de longueur) et à la détermination en valeur absolue de l'intensité du champ créé par ce courant, ou à la comparaison de ce champ avec le champ terrestre H supposé connu en valeur absolue.

La mesure en valeur absolue d'une quantité d'électricité par le galvanomètre balistique se ramène à la mesure de la durée d'oscillation de l'aiguille de ce galvanomètre et à une mesure d'intensité (§ 237).

Reste donc à mesurer en valeur absolue une résistance ou une force électromotrice, puisque la loi d'Ohm permet de passer de l'une à l'autre, grâce à la mesure d'une intensité en valeur absolue. Le problème se pose donc ainsi : 1° soit réaliser en une matière qu'on puisse toujours retrouver semblable à elle-même (mercure pur à 0°) un fil ayant 1 ohm de résistance ; 2° soit déterminer en valeur absolue la force électromotrice d'une pile qu'on puisse toujours aisément reconstituer.

On peut, pour résoudre le premier problème, s'appuyer sur la loi de Joule et déterminer en joules la chaleur dégagée par un courant i , connu en valeur absolue, dans une certaine résistance r . La formule : $W = ri^2t$, permet de calculer r : le pont de Wheatstone permet ensuite de comparer à cette résistance le fil de mercure devant servir d'étalon. Mais W est directement mesuré, non pas en joules, mais en calories : pour passer du nombre exprimant W en calories au nombre l'exprimant en joules, il faut connaître l'équivalent mécanique de la calorie. Comme les mesures électriques sont plus précises que les mesures calorimétriques, c'est exactement la méthode inverse que l'on suit. Cette expérience est une de celles qui donnent l'équivalent mécanique, la résistance r étant supposée connue.

360. Réalisation concrète de l'ohm. — Cette méthode éliminée, voici résumées les méthodes les plus parfaites.

DÉCHARGES INDUITES. — On fait varier le flux de force \mathcal{F} à travers une bobine : on détermine la quantité d'électricité induite. Elle est donnée au signe près par la formule (en coulombs) :

$$q = 10^9 \cdot \frac{\Delta \mathcal{F}}{r},$$

où r est la résistance.

Il y a autant de méthodes que de manières de faire varier le flux : nous ne pouvons insister sur la valeur relative des techniques. Voici deux exemples :

1° On peut faire tourner de 180° une bobine de surface totale connue S dans le champ terrestre H . Le flux varie de $2HS$; on a :

$$q = 10^{-8} \frac{2HS}{r};$$

q , H , S , sont mesurables en valeur absolue comme nous l'avons dit plus haut; la formule fournit donc en valeur absolue la résistance du circuit.

2° On peut déterminer la quantité induite dans la bobine par la variation d'un courant dans un circuit voisin. L'expérience est particulièrement facile en prenant comme bobine inductrice un solénoïde. Soit n le nombre de spires par centimètre; $0,4 \cdot \pi ni$ est le champ pour le courant i . Soit S la surface totale de la bobine induite cons-

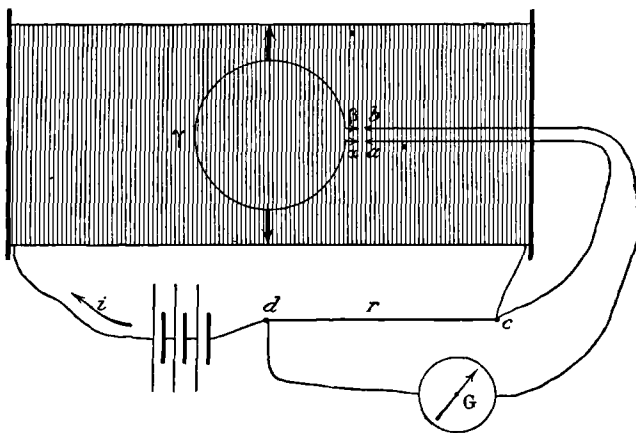


Fig. 189.

tituée par un autre solénoïde à axe parallèle au premier, plus court, placé à l'intérieur et loin des bases du premier, la variation du flux quand le courant inducteur passe de 0 à i est : $0,4 \cdot \pi niS$. La quantité induite q en coulombs est :

$$q = 10^{-9} \cdot \frac{4\pi niS}{r}.$$

CHAMP MOYEN AU CENTRE D'UN CADRE TOURNANT. — J'ai exposé complètement cette méthode aux §§ 264 et 265.

FORCES ÉLECTROMOTRICES INSTANTANÉES. — Faisons tourner une bobine de surface S au centre d'un solénoïde et autour d'un axe parallèle à la fois aux spires de la bobine et du solénoïde. Le flux est à chaque instant : $\mathcal{F} = 0,4\pi niS \cos \theta$, θ représentant l'angle des axes de la bobine et du solénoïde. La force électromotrice induite est :

$$10^{-8} \frac{d\mathcal{F}}{dt} = -10^{-9} \cdot 4\pi niS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Soit : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, la vitesse angulaire constante. La force électromotrice induite est maxima pour $\theta = \pi : 2$; sa valeur est alors :

$$E = 10^{-9} 4 \pi n i S \omega.$$

Supposons que la bobine *ordinairement ouverte* (dans la figure 189 elle est schématiquement représentée par une seule spire $\alpha\beta\gamma$) ne soit fermée sur un circuit extérieur $abcd$ qu'un instant très court au moment du maximum, c'est-à-dire au voisinage de $\theta = \pi : 2$; supposons qu'entre les extrémités a et b de ce circuit *ordinairement ouvert* existe une différence de potentiel précisément égale à E , obtenue en faisant passer le courant i dans une résistance convenable r mise en série avec le solénoïde : $E = ri$. Dans ces conditions, il ne passe aucun courant dans la bobine au moment de la fermeture, ce qu'indique un galvanomètre sensible G . La self induction de la bobine ne joue donc aucun rôle. Le réglage précédent obtenu, on a :

$$E = ri = 10^{-9} 4 \pi n i S \omega, \quad r = 10^{-9} \cdot 4 \pi n S \omega = 10^{-9} \cdot 8 \pi^2 N n S,$$

où N désigne le nombre de tours par seconde.

361. Mesure d'une force électromotrice en valeur absolue.

— Faisons tourner un aimant de moment M au centre O d'un cadre dont la constante est G , c'est-à-dire qui produit un champ Gi au point O quand il est traversé par un courant i . L'axe de rotation est parallèle aux spires de la bobine et l'axe de l'aimant perpendiculaire à l'axe de rotation. Je dis que la force électromotrice induite est $GM\omega \sin \theta$, en appelant θ l'angle des axes de l'aimant et de la bobine.

Supposons qu'il passe un ampère dans le cadre; le champ est G , le couple est $MG \sin \theta$; le travail du couple pour un angle $d\theta$ est $MG \sin \theta d\theta$. Mais d'après la loi fondamentale de l'Électromagnétisme,

il est aussi (§ 152) :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} d\theta = \frac{d\mathcal{F}}{d\theta} d\theta,$$

\mathcal{F} représentant le flux positif envoyé dans le cadre par l'aimant.

D'où :

$$MG \sin \theta = \frac{d\mathcal{F}}{d\theta}.$$

Mais d'après la loi générale de l'induction, la force électromotrice induite est (§ 227) :

$$e = - \frac{d\mathcal{F}}{dt} = - \frac{d\mathcal{F}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = - \omega \frac{d\mathcal{F}}{d\theta}.$$

D'où, au signe près : $e = MG\omega \sin \theta$.

Cette force électromotrice est maxima pour $\theta = 0$; elle vaut alors :

$$E = MG\omega.$$

Supposons que la bobine soit constamment ouverte. Comme sa capacité électrostatique est très faible, le courant qui la traverse

est quasi nul ; il existe entre ses extrémités une différence de potentiel alternative e dont le maximum est E . Supposons maintenant qu'on la ferme sur un circuit extérieur pendant un court instant au moment du maximum et qu'on oppose à la force électromotrice d'induction une force électromotrice précisément égale à E ; il ne passera aucun courant pendant la fermeture, ce qu'indiquera un galvanomètre sensible.

Réciproquement, si M est connu en valeur absolue, la mesure de G et de ω fera connaître E en valeur absolue. Si, d'autre part, un potentiomètre permet de mesurer quelle fraction de la force électromotrice E' d'une pile donnée est la force électromotrice qui compense E , on connaîtra E en valeur absolue.

On peut choisir comme cadre un solénoïde allongé ayant n spires par centimètre ; la mesure de G devient facile : $G = 4\pi n$. D'où (en CGS) : $E = 4\pi n M \omega = 8\pi^2 N n M$, où N est le nombre de tours par seconde que fait l'aimant.

On remarquera l'analogie qui existe entre cette formule et celle du paragraphe précédent : les deux problèmes sont exactement réciproques.

362. Passage des unités statiques aux unités magnétiques.

— v représente le nombre d'unités statiques contenu dans une unité magnétique de quantité d'électricité. Si la même quantité d'électricité est évaluée dans les deux systèmes, elle sera donc représentée dans le système statique par un nombre v fois plus grand que dans le système magnétique. Nous aurons :

$$q_s = v q_m.$$

Je répète une fois de plus qu'il n'intervient jamais dans les formules que des nombres.

On doit avoir par conséquent : $i_s = v i_m$.

Dans les deux systèmes, les résistances sont définies par la formule Ri^2t qui doit exprimer en ergs l'énergie dépensée :

$$r_s i_s^2 = r_m i_m^2.$$

Or les nombres i_s et i_m sont reliés par la formule :

$$i_s = v i_m; \quad \text{d'où :} \quad r_s v^2 = r_m.$$

Le nombre qui exprime une résistance dans le système statique est v^2 fois plus petit que le nombre qui l'exprime dans le système magnétique. Donc l'unité statique de résistance est v^2 fois plus grande que l'unité magnétique.

Dans les deux systèmes les forces électromotrices sont définies par la formule Eit , qui doit exprimer en ergs l'énergie dépensée :

$$E_s i_s = E_m i_m.$$

Or : $i_s = v i_m$; donc : $E_s v = E_m$.

Le nombre qui exprime une force électromotrice en unités statiques est v fois plus petit que le nombre qui l'exprime en unités magnétiques. Donc l'unité statique est v fois plus grande que l'unité magnétique.

Or nous verrons que $v = 3 \cdot 10^{10}$. D'ailleurs le volt vaut 10^8 unités CGS magnétiques.

Donc l'unité statique, qui vaut $3 \cdot 10^{10}$ CGS magnétiques, vaut 300 volts.

Dans les deux systèmes, les capacités sont définies par la formule :

$$q = CE; \quad \text{d'où} : \quad \frac{q_s}{q_m} = \frac{C_s E_s}{C_m E_m}.$$

$$\text{Or} : \quad q_s = v q_m, \quad E_s v = E_m; \quad \text{d'où} : \quad C_s = v^2 C_m.$$

Le nombre qui exprime une capacité dans le système statique est v^2 fois plus grand ($9 \cdot 10^{20}$) que le nombre qui exprime la même capacité dans le système magnétique. Donc l'unité magnétique est v^2 fois plus grande que l'unité statique.

Nous savons que le farad vaut 10^{-9} CGS, et le microfarad 10^{-15} CGS. Donc le farad vaut $9 \cdot 10^{11}$ unités statiques; le microfarad vaut $9 \cdot 10^6$ unités statiques. Le nombre qui exprime une capacité en unités statiques est 900000 fois plus grand que celui qui l'exprime en *microfarads*.

Le microfarad est la capacité d'une sphère de $9 \cdot 10^5$ centimètres de rayon = 9 kilomètres.

TABLEAU RÉCAPITULATIF

Le nombre affecté de l'indice s représente le résultat de la mesure avec l'unité statique; le nombre affecté de l'indice m représente le résultat de la mesure avec l'unité magnétique. On a :

$$v = \frac{q_s}{q_m} = \frac{i_s}{i_m} = \sqrt{\frac{r_m}{r_s}} = \frac{E_m}{E_s} = \sqrt{\frac{C_s}{C_m}} = 3 \cdot 10^{10}.$$

Il va de soi que les *grandeurs concrètes* représentant les unités sont dans des rapports inverses.

363. Détermination expérimentale du nombre v . — Le principe des méthodes est très simple.

MESURE D'UNE MÊME FORCE ÉLECTROMOTRICE DANS LES DEUX SYSTÈMES. — Soit une pile AB composée d'un très grand nombre d'éléments (fig. 490). On mesure sa force électromotrice totale E aux bornes avec un électromètre absolu E qui en donne la valeur en unités statiques. Elle est fermée sur une grande résistance R et une petite résistance R'. On mesure la force électromotrice e entre les points CD en unités magné-

tiques (par exemple, en opposant une pile de force électromotrice connue). On a d'ailleurs :

$$e : E = R' : (R + R'),$$

à la condition de pouvoir négliger la résistance de la pile AB devant la résistance R.

Connaissant E en unités statiques et e en unités magnétiques, on peut calculer le nombre ν . La seule difficulté réside dans l'emploi d'un très grand nombre d'éléments, de l'ordre de quelques centaines.

MESURE D'UNE MÊME CAPACITÉ DANS LES DEUX SYSTÈMES. — On calcule la capacité statique d'un condensateur d'après les dimensions géométriques;

on détermine expérimentalement la capacité magnétique d'après la quantité d'électricité emmagasinée pour une différence de potentiel connue en volts.

Le condensateur étudié se compose de deux plateaux de glace argentée distants de quelques millimètres; sa capacité est de l'ordre de $\frac{1}{25\,000}$ de microfarad. On ne peut en effet réaliser qu'une capacité extrêmement petite, si on veut la connaître avec quelque précision.

Pour une pile de charge de 100^v, on n'emmagasine que 0,004 microcoulombs. Mais rien n'empêche de faire 25 décharges à la seconde à l'aide d'un commutateur tournant qui élimine les courants de charge. Il passe donc 0,1 microcoulomb par seconde dans le galvanomètre, ce qui équivaut à un courant de 0,1 microampère.

Toute la difficulté réside dans l'étalonnage en valeur absolue du galvanomètre qui doit être extrêmement sensible, qui doit donner par exemple une déviation du spot d'un mètre sur une échelle à un mètre pour un courant de cet ordre.

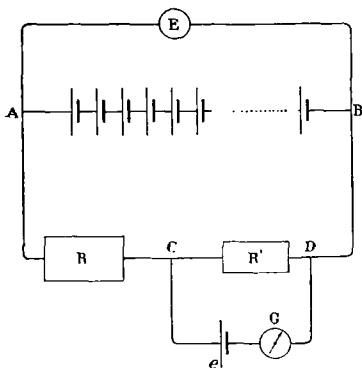


Fig. 190.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction mathématique sur les flux et les actions en raison inverse du carré de la distance.

CHAPITRE I

Des vecteurs et de leurs flux.

§	1. Opérations fondamentales sur les vecteurs	5
§	2. Travail ou circulation d'un vecteur	6
§	3. Champ de force. Intensité du champ. Actions à distance	7
§	4. Potentiel	7
§	5. Surfaces équipotentielles.	8
§	6. Expression d'une composante quelconque de la force au moyen du potentiel	9
§	7. Lignes et tubes de force.	10
§	8. Superposition de plusieurs champs de force.	10
§	9. Exemples de forces admettant un potentiel	11
§	10. Cas où le potentiel peut prendre plusieurs valeurs discontinues au même point. Généralisation de la définition du potentiel	12
§	11. Connectivité de l'espace.	13
§	12. Flux d'un vecteur à travers une surface.	14
§	13. Flux conservatif et non conservatif.	14
§	14. Comparaison entre les opérations fondamentales.	15
§	15. Exemple d'un flux conservatif. Écoulement d'un liquide incom- pressible	16
§	16. Expression du débit total en fonction de la vitesse d'écoulement . .	17
§	17. Cas d'un fluide compressible.	18
§	18. Flux de force dans le cas d'un potentiel.	18
§	19. L'intégrale d'un flux à travers une surface fermée est égale à l'inté- grale de la divergence du vecteur étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface.	19
§	20. Condition pour qu'un flux soit conservatif.	20
§	21. Cas où le vecteur admet un potentiel	21
§	22. Règle du bonhomme d'Ampère. Relation entre les faces d'une sur- face et le sens de circulation sur une courbe qui limite cette surface.	21
§	23. Expression des composantes d'un vecteur normal à deux vecteurs donnés	22
§	24. Relation entre le flux conservatif d'un vecteur φ (dont les compo- santes sont ξ, η, ζ) à travers une surface, et la circulation d'un autre vecteur F (dont les composantes sont X, Y, Z) le long de la courbe fermée qui limite cette surface	23
§	25. Exemple. Flux d'un vecteur constant	25
§	26. Importance des considérations précédentes	25

CHAPITRE II

Actions en raison inverse du carré de la distance.

27.	Définitions des agents positifs et négatifs. Densités	27
28.	Angles solides	27
29.	Flux envoyé par une masse punctiforme	28
30.	Équations de Poisson et de Laplace	29
31.	A l'intérieur d'un tube de force qui ne contient pas de masses agissantes, le flux est identique à celui d'un fluide incompressible dans un tuyau rempli	30
32.	Action sur un point extérieur d'une couche de l'agent, sphérique, uniforme, infiniment mince.	30
33.	Action sur un point intérieur d'une couche sphérique, uniforme, infiniment mince	31
34.	Réciproquement, parmi toutes les lois fonction de la distance, la loi en raison inverse du carré est la seule pour laquelle l'action de la couche uniforme, sphérique, est nulle en tout point intérieur. . .	31
35.	Action d'une sphère homogène en un point situé à l'intérieur.	32
36.	Action d'une couche circulaire de densité σ en un point A de son axe.	32
37.	Discontinuité produite par une couche de densité σ . Équation de passage.	33

Couches en équilibre sur un corps conducteur.

38.	Corps conducteurs. Condition d'équilibre. Corps isolants.	34
39.	La force en tout point de la surface est égale à $4\pi\sigma$, où σ désigne la densité de la couche au point considéré; elle est dirigée vers l'extérieur si l'agent au voisinage du point considéré est positif, vers l'intérieur dans le cas contraire.	34
40.	Pression électrostatique	35
41.	Problème général de la distribution.	36
42.	Équilibre d'une sphère conductrice en présence d'un point électrisé.	36
43.	Cas particuliers.	38
44.	Action du point sur la sphère	39
45.	Action d'un point électrisé sur un plan indéfini en communication avec le sol	40
46.	Distribution sur un ellipsoïde	41
47.	Théorie des images électriques.	41
48.	Images dans une surface plane conductrice indéfinie.	42

CHAPITRE III

Polarisation.**Polarisation rigide.**

49.	Définition de la molécule polarisée. Aimant élémentaire. Couple ou doublet électrique	44
50.	Potentiel d'un doublet en un point extérieur.	44

§	51. Intensité de polarisation ou d'aimantation. Remplacement d'une constitution discontinue par une constitution continue	43
§	52. Induction.	46
§	53. Énergie potentielle d'un volume polarisé d'une manière rigide dans un champ.	48

Solénoïdes.

§	54. Solénoïde élémentaire.	48
§	55. Aimants solénoïdaux	49

Feuillets.

§	56. Feuillet	50
§	57. Cas particuliers.	50
§	58. Énergie potentielle d'un feuillet dans un champ	51

Polarisation induite.

§	59. Hypothèses.	52
§	60. Calcul du champ p, q, r	52
§	61. Manière synthétique de présenter ces résultats	54
§	62. Équation indéfinie dans un milieu polarisé; équation de passage	55
§	63. Réfraction des lignes de force	56

Potentiel vecteur.

§	64. Potentiel vecteur	56
§	65. Expression générale des composantes F, G, H, en un point extérieur à un aimant dont on donne en tous les points les composantes de l'aimantation A, B, C	57
§	66. Cas particulier d'un feuillet	58
§	67. Flux d'induction à travers un feuillet. Énergie potentielle d'un feuillet.	59
§	68. Énergie potentielle d'un feuillet dans le champ d'un autre feuillet; formule de Neumann.	60

Attraction des corps matériels.

Constante de la gravitation.

§	69. Lemmes préliminaires.	62
§	70. Lois de Képler et hypothèse de Newton.	63
§	71. Comparaison des masses du Soleil et des planètes.	64
§	72. Constante de la gravitation.	64
§	73. Expériences de laboratoire	65

Chaleur solaire.

§	74. Position de la question	66
§	75. Constantes solaires	67
§	76. Équilibre d'un gaz sous l'influence de la gravité seule	68
§	77. Expression des énergies interne et de gravitation dans le cas d'un gaz parfait (Perry).	69
§	78. Équilibre convectif d'un gaz parfait (Lane)	70
§	79. Origine de la chaleur solaire.	72

Marées.

§ 80. Potentiel des forces d'où résultent les marées	74
§ 81. Explication des marées	77
§ 82. Remarques sur l'explication précédente.	77

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME**CHAPITRE I****Électricité statique. Distribution. Capacités.**

§ 83. Démonstration de la loi de l'inverse du carré de la distance (Coulomb)	81
§ 84. Démonstration indirecte (Cavendish)	82
§ 85. Éléments correspondants	83
§ 86. Cavités creusées dans un conducteur	84
§ 87. Cylindre de Faraday.	84
§ 88. Corps d'épreuve.	85
§ 89. Influence entre deux corps. Disposition des surfaces équipotentielles.	85

Capacités.

§ 90. Le potentiel de chaque conducteur appartenant à un système formé de p conducteurs quelconques, invariables, électrisés, est une fonction linéaire des p charges de ces conducteurs.	88
§ 91. Énergie d'un système de conducteurs	89
§ 92. Propriétés des capacités.	90
§ 93. Condensateurs	91
§ 94. Application à quelques cas particuliers. Sphères concentriques . . .	91
§ 95. Condensateur cylindrique	93
§ 96. Théorie générale des condensateurs.	93

Déplacements des corps conducteurs. Électromètres.

§ 97. Travail des forces électriques pendant le déplacement, à charges constantes, d'un système de conducteurs	95
§ 98. Travail des forces électriques pendant le déplacement, à potentiels constants, d'un système de conducteurs.	96
§ 99. Application aux condensateurs.	97
§ 100. Électromètre de Lord Kelvin.	98
§ 101. lectromètres à quadrants	100
§ 102. Électromètre donnant des indications proportionnelles à la différence des potentiels, Électromètre à feuilles d'or de Hankel	102
§ 103. Théorie générale des électromètres (Gouy)	103
§ 104. Expression générale des forces.	104
§ 105. Expériences avec la charge symétrique	105
§ 106. Électromètres à balles ou à feuilles d'or.	106

CHAPITRE II

Diélectriques.

§ 107.	Changement de l'isolant : on le suppose homogène et unique dans tout l'espace	108
§ 108.	Hypothèses fondamentales dans le cas de plusieurs diélectriques séparément homogènes.	110
§ 109.	Polarisation du diélectrique	110
§ 110.	Remplissage par un diélectrique K de l'espace compris entre deux surfaces équipotentielles d'un système en équilibre dans l'air.	110
§ 111.	Application à un condensateur plan.	111
§ 112.	Expression de l'énergie potentielle d'un système plongé dans l'air ou dans des diélectriques en nombre quelconque	112
§ 113.	Sphère diélectrique dans un champ uniforme	113
§ 114.	Sphère uniformément polarisée.	114
§ 115.	Déplacements d'une sphère diélectrique dans un champ variable	115
§ 116.	Orientation d'une aiguille diélectrique dans un champ variable	116
§ 117.	Existence d'une position d'équilibre déterminée	117
§ 118.	Courant de déplacement de Maxwell	118
§ 119.	Contradiction entre la théorie de Maxwell et l'idée de polarisation.	119
§ 120.	Courants de déplacement et de polarisation de Lorentz.	120

Action mécanique entre deux systèmes électrisés comme résultant de la déformation du milieu.

§ 121.	Rappel des notions fondamentales sur l'équilibre d'un milieu déformé.	121
§ 122.	Expression de la force qui s'exerce entre deux systèmes électrisés	122
§ 123.	Les forces électriques peuvent s'expliquer par des tensions dans le diélectrique.	124
§ 124.	Position et grandeur des tensions	124
§ 125.	Généralisation pour les corps où peut exister une polarisation rigide.	125
§ 126.	Remarques sur la théorie de Maxwell	126
§ 127.	Application à un fluide parfait	127
§ 128.	Changement de volume des solides par polarisation électrique ou magnétique	128

CHAPITRE III

Champs des aimants et des courants.

Aimants permanents.

§ 129.	Définition des pôles des aimants. Aimant dans un champ uniforme.	130
§ 130.	Moment magnétique d'un aimant	131
§ 131.	Petites oscillations d'un aimant autour de sa position d'équilibre	133
§ 132.	Remarque sur le calcul du moment magnétique. Aimants solénoïdaux.	133
§ 133.	Champ produit par un petit aimant en un point extérieur.	134
§ 134.	Méthode de Gauss pour la détermination de MH et de M : H	136
§ 135.	Unité CGS d'intensité de champ : gauss.	137
§ 136.	Résultats numériques	138

Champs des courants.

§ 137.	Champs des courants. Unité absolue : ampère.	139
§ 138.	Existence de dérivations.	140
§ 139.	Autre forme de la loi fondamentale. Loi de Laplace.	141
§ 140.	Expression analytique de la loi de Laplace	143
§ 141.	Champ d'un courant rectiligne fini ou indéfini.	144
§ 142.	Expérience de Biot et Savart.	145
§ 143.	Expression générale du travail dans le déplacement autour d'un courant de forme quelconque	146
§ 144.	Expression analytique du théorème précédent.	147
§ 145.	Étude des solénoïdes	148
§ 146.	Champ du solénoïde	148
§ 147.	Force magnétomotrice.	150
§ 148.	Champ d'un circuit circulaire plan en un point de son axe	150
§ 149.	Profil à imposer à une bobine dont les spires sont circulaires, pour obtenir le plus grand champ possible en un point de l'axe des spires, avec une longueur de fil donnée. Application au galvanomètre à aimant mobile	151
§ 150.	Sensibilité des galvanomètres	152
§ 151.	Nappes de courant	153

Action des champs sur les courants.

§ 152.	Hypothèse fondamentale.	155
§ 153.	Loi de Laplace	155
§ 154.	Expression analytique de la loi de Laplace	157
§ 155.	Cadre plan tournant dans un champ uniforme autour d'un axe passant par les spires. Galvanomètre à cadre mobile	158
§ 156.	Électrodynamomètre	159
§ 157.	Électrodynamomètre absolu	160
§ 158.	Déformation d'un circuit non rigide sous l'action du champ qu'il produit.	161
§ 159.	Actions réciproques de deux courants parallèles.	161
§ 160.	Nécessité de remplacer dans toutes les règles précédentes le flux de force par le flux d'induction	163
§ 161.	Actions réciproques de deux éléments de courants. Formules diverses.	164
§ 162.	Formule d'Ampère	165
§ 163.	Énergie potentielle de deux courants en présence	167

CHAPITRE IV**Diverses formes du transport de l'électricité.****Conduction et convection.**

§ 164.	Hypothèse fondamentale dans le cas d'un courant permanent.	170
§ 165.	Conducteurs cylindriques de faible section (fils).	171
§ 166.	Lois de Kirchhoff.	172
§ 167.	Corollaires généraux des lois de Kirchhoff	174
§ 168.	Étude générale du pont de Wheatstone.	175
§ 169.	Obtention d'un courant alternatif.	176
§ 170.	Conduction dans un ou plusieurs milieux séparément homogènes.	178

TABLE DES MATIÈRES

107

§§	171. Résistance dans le cas d'un corps à plusieurs dimensions	179
§§	172. Cas particuliers	180
§§	173. Distribution des courants dans une plaque	181
§§	174. Applications	183
§§	175. Anneaux de Nobili	183
§§	176. Généralisation pour des corps anisotropes	184

Hypothèses sur le mécanisme et la nature des courants.

§§	177. Hypothèses des ions. Électrons.	185
§§	178. Courants de convection	186
§§	179. Expériences de Rowland.	188
§§	180. Expression des composantes P, Q, R de la force électromotrice.	188
§§	181. Phénomène de Hall	190
§§	182. Décharge d'un conducteur. Loi de Joule.	190

**Charge et décharge des condensateurs.
Télégraphie sous-marine.**

§§	183. Propagation dans un conducteur qui a de la capacité.	192
§§	184. Comparaison de différents câbles; loi de similitude	193
§§	185. Solutions particulières.	194
§§	186. Autre solution particulière.	196
§§	187. Vérification expérimentale. Lignes artificielles.	198
§§	188. Contact instantané	199
§§	189. Télégraphie sous-marine	201
§§	190. Emploi d'un condensateur. Récepteur.	201
§§	191. Coexistence du pouvoir diélectrique et de la conductibilité ohmique.	203
§§	192. Mesure des grandes résistances par la perte de charge d'un condensateur.	204
§§	193. Application aux câbles sous-marins	204
§§	194. Propagation dans un câble en tenant compte de la résistance du diélectrique.	206
§§	195. Résidus	207

CHAPITRE V

Courants dans les gaz.

§§	196. Ionisation des gaz.	211
§§	197. Électrons. Conducteurs métalliques.	212
§§	198. Conductibilité des gaz. Position du problème	213
§§	199. Équations générales (J.-J. Thomson)	214
§§	200. Conséquences générales.	215
§§	201. Mesure des quantités d'électricité transportées	216
§§	202. Recombinaison des ions	217
§§	203. Mesure des mobilités	218
§§	204. Condensation de la vapeur d'eau	220

Divers procédés d'ionisation.

§§	205. Émission par les corps chauds	221
§§	206. Ionisation par les surfaces éclairées.	222
§§	207. Mesure de la mobilité k_+	224

§ 208. Ionisation par les flammes	225
§ 209. Ionisation par les réactions chimiques. Ionisation par le phosphore	225
§ 210. Ionisation par le choc des ions sur les molécules. Décharge disruptive (J.-J. Thomson)	225
§ 211. Décharge par les pointes. Vent électrique.	227

Particule électrisée en mouvement dans des champs donnés.

§ 212. Action sur une particule électrisée d'un champ électrique et d'un champ magnétique.	229
§ 213. Champ magnétique nul. Champ électrique constant	230
§ 214. Champ électrique nul. Champ magnétique constant	230
§ 215. Déviation par une force magnétique courbant les rayons perpendiculairement à leur direction sur une longueur l	231
§ 216. Superposition d'un champ électrique et d'un champ magnétique rectangulaires.	232
§ 217. Superposition d'un champ électrique et d'un champ magnétique parallèles	233
§ 218. Superposition d'un champ magnétique Z uniforme et d'un champ électrique dont le potentiel est fonction de la distance r à l'axe des z	233

Diverses espèces de rayons électrisés.

§ 219. Rayons cathodiques	235
§ 220. Valeurs de v et de $\epsilon:\mu$	236
§ 221. Rayons canaux (Goldstein).	237
§ 222. Émission d'électrons par un métal éclairé (Heiz, J.-J. Thomson)	238
§ 223. Rayons X (Röntgen).	239
§ 224. Radioactivité (Curie).	240

Explications par les ions et par les électrons de phénomènes divers.

§ 225. Expression de la conductibilité électrique d'un métal.	240
§ 226. Expression de la conductibilité thermique.	241

CHAPITRE VI

Phénomènes d'induction.

§ 227. Règle générale régissant les forces électromotrices d'induction dans les circuits fermés ou ouverts que l'on déplace dans un champ magnétique	243
§ 228. Application du principe de la conservation de l'énergie.	244
§ 229. Conservation de l'énergie dans l'application de la loi de Laplace	246
§ 230. Phénomènes dans un circuit qui n'est traversé par aucun courant au début de l'expérience	247
§ 231. Expression du flux balayé par un élément de circuit	248
§ 232. Force électromotrice d'induction due aux déplacements relatifs de deux circuits sièges de courants	249
§ 233. Expression complète de la force électromotrice P, Q, R	251
§ 234. Définition de l'henry.	252

Quantités d'électricité induites.

§ 235. Quantité d'électricité mise en jeu dans le passage d'un circuit fermé d'une position 1 à une position 2	252
§ 236. Mesure de petites quantités d'électricité. Galvanomètre balistique.	253
§ 237. Étalonnage du galvanomètre balistique	254
§ 238. Balistique à cadre mobile. Conditions de sensibilité	255
§ 239. Galvanomètre balistique avec amortissement	256
§ 240. Indication des galvanomètres pour les courants alternatifs ou généralement pour des courants alternativement de sens contraires. Application au galvanomètre balistique	257
§ 241. Application des lois de l'induction à l'étude des champs	259
§ 242. Application à l'étude d'un aimant.	259

Coefficients d'induction mutuelle et de self induction.

§ 243. Position de la question.	261
§ 244. Énergie correspondant à l'existence d'un système de courants fermés.	262
§ 245. Circuit unique	264
§ 246. Nombre quelconque de circuits fermés	266
§ 247. Amortissement d'une bobine fermée qui oscille dans un champ magnétique uniforme. Application au galvanomètre à cadre mobile.	267
§ 248. Décharge d'un condensateur à travers un circuit possédant de la self induction	269
§ 249. Expériences	270
§ 250. Calcul des coefficients M et L pour des circuits fermés.	270
§ 251. Généralisation pour des circuits ouverts. Équations de Kirchhoff	272
§ 252. Comparaison des coefficients de self induction.	274
§ 253. Comparaison de deux coefficients d'induction mutuelle.	275
§ 254. Comparaison d'un coefficient de self induction et d'un coefficient d'induction mutuelle.	276
§ 255. Comparaison d'une self induction et d'une capacité.	277
§ 256. Comparaison de deux capacités.	278
§ 257. Lois des courants dérivés dans le régime variable. Shunt des galvanomètres balistiques.	279
§ 258. Vibrateurs électromagnétiques. Sonneries.	280

CHAPITRE VII**Propriétés générales des courants alternatifs.**

§ 259. Définitions et notations	282
§ 260. Formules usuelles. Règle de Fresnel	283
§ 261. Valeurs efficaces des quantités.	285
§ 262. Force électromotrice sinusoïdale appliquée à un circuit présentant de la self induction.	286
§ 263. Répulsion de deux bobines, l'une 2 fermée, l'autre 1 parcourue par un courant alternatif	287
§ 264. Bobine tournant dans un champ uniforme H. Champ résultant du champ H et du courant induit.	290
§ 265. Application à la détermination d'une résistance en valeur absolue.	291
§ 266. Force électromotrice sinusoïdale appliquée à un circuit ayant de la self induction et de la capacité	293

267.	Remarque sur les forces électromotrices le long d'un circuit	295
268.	Conducteur équivalent à une dérivation.	297
269.	Décalage des courants qui passent dans une dérivation formée de deux branches.	297
270.	Partage du courant entre les deux branches d'une dérivation	298
271.	Application. Condensateur transformateur.	299
272.	Mesure des intensités efficaces. Emploi de l'électrodynamomètre (bobines en série)	299
273.	Mesures des intensités efficaces par les ampèremètres à dilatation. .	300
274.	Électrodynamomètre employé pour la mesure des intensités efficaces (bobine mobile en dérivation).	301
275.	Mesure des volts efficaces entre deux points d'un circuit	302
276.	Puissance absorbée entre deux points d'un circuit	303
277.	Électrodynamomètre employé comme wattmètre	304
278.	Mesure de la puissance. Méthode des trois voltmètres	305
279.	Mesure de la puissance. Méthode des trois électrodynamomètres . .	306

Étude des courants non sinusoïdaux.

280.	Interprétation des résultats pour les courants non sinusoïdaux	307
281.	Résonateurs pour courants alternatifs.	308
282.	Mesure de la fréquence	309
283.	Étude complète d'un courant alternatif	309
284.	Applications des oscillographes. Étude de l'arc	310

CHAPITRE VIII

Magnétisme induit. Circuits magnétiques.

285.	Position de la question. Susceptibilité et perméabilité magnétiques. .	313
286.	Magnétisme induit quand on peut admettre que la susceptibilité est constante	314
287.	Orientation d'une aiguille magnétique parallèlement aux lignes de force du champ quand la susceptibilité, supposée constante, n'est pas très petite.	315
288.	Cas général d'une susceptibilité variable avec l'intensité du champ magnétisant : méthode du magnétomètre	316
289.	Emploi d'un tore	318
290.	Aimantation d'un fer doux qui n'a jamais été aimanté	319
291.	Détails de la courbe d'aimantation	321
292.	Circuit magnétique	321
293.	Généralisation	322
294.	Mesure de la perméabilité : méthode balistique	324
295.	Mesure de la perméabilité : méthode d'arrachement	324
296.	Mesure de la perméabilité : méthode du champ	326
297.	Effet de la température sur l'aimantation	327

Hystérésis.

298.	Hystérésis	328
299.	Énergie dissipée dans l'aimantation du fait de l'hystérésis	329
300.	Cycles fermés	330
301.	Formule de Steinmetz.	330

302.	Hystérésimètres	332
303.	Emploi de fer divisé dans les appareils d'induction	333
304.	Variations cycliques rapides. Rôle des courants de Foucault	334
305.	Trainage magnétique	336
306.	Énergie magnétique.	336
307.	Un corps aimanté est-il une réserve d'énergie?	337
308.	Lecons magnétiques.	338

Électroaimants et aimants.

309.	Électroaimants	339
310.	Force portante	339
311.	Remarques sur la force portante	340
312.	Production de champs intenses.	341
313.	Production de champs d'intensité moyenne dans les applications industrielles.	342
314.	Déplacements des aimants. Action des électroaimants sur leurs armatures	343
315.	Construction des électroaimants servant dans les appareils télégraphiques, sonneries, etc.	344
316.	Électroaimants polarisés.	345
317.	Bobines à plongeurs.	346
318.	Comparaison entre les aimants permanents et les électroaimants	347

CHAPITRE IX

Dynamos. Alternateurs. Transformateurs.

Dynamos et moteurs à courants continus.

319.	Calcul de la puissance d'un moteur à courant continu	349
320.	Générateur à courant continu	351
321.	Remarque sur les résultats précédents	352
322.	Courant de démarrage d'un moteur et résistance mécanique d'une dynamo au départ ou en circuit ouvert	353
323.	Torsion du champ.	354
324.	Calage des balais	355
325.	Caractéristiques.	356
326.	Différents modes d'excitation d'une génératrice. Excitation indépendante.	357
327.	Excitation en série	357
328.	Caractéristique	358
329.	Emploi d'une machine série comme moteur.	359
330.	Excitation en dérivation (shunt)	360
331.	Charge des accumulateurs	360
332.	Caractéristique	361
333.	Excitation compound ou composée	361
334.	Induit en tambour.	362

Alternateurs.

335.	Couplage des alternateurs en série	364
336.	Moteurs synchrones monophasés.	365
337.	Couplage des alternateurs en quantité.	368

§ 338.	Synchronisation des alternateurs. Indicateurs de phase.	369
§ 339.	Alternateurs polyphasés.	370
§ 340.	Transmission des courants polyphasés.	372
§ 341.	Transformation d'un courant continu en courant alternatif et inversement. Commutatrices	373
§ 342.	Utilisation d'un anneau Gramme dont l'excitation est maintenue. . .	374

Champs tournants.

§ 343.	Production d'un champ tournant	375
§ 344.	Aimant permanent placé dans un champ tournant	377
§ 345.	Bobine fermée dans un champ tournant.	378
§ 346.	Discussion	378
§ 347.	Moteurs industriels à champ tournant.	380
§ 348.	Champ radial à répartition sinusoïdale	381

Transformateurs.

§ 349.	Bobines de réaction	382
§ 350.	Transformateurs.	383
§ 351.	Transformateur à pleine charge.	384
§ 352.	Force électromotrice dans le circuit secondaire	385
§ 353.	Énergie absorbée par le transformateur.	386
§ 354.	Construction des transformateurs.	386

CHAPITRE X

Unités absolues. Rapport des unités magnétiques et statiques.

§ 355.	Système électromagnétique	388
§ 356.	Système pratique électromagnétique	389
§ 357.	Système électrostatique	391
§ 358.	Formules de dimensions.	392
§ 359.	Réalisation concrète des unités absolues	395
§ 360.	Réalisation concrète de l'ohm	395
§ 361.	Mesure d'une force électromotrice en valeur absolue.	397
§ 362.	Passage des unités statiques aux unités magnétiques.	398
§ 363.	Détermination expérimentale du nombre v	399