

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* || Enrico Betti *in Pisa*
Eugenio Beltrami *in Pavia* || Felice Casorati *in Pavia.*

SERIE II - TOMO XI

(dal luglio 1882 all'aprile 1883).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XI.^o (SERIE II.^a)

	Pag.
Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa. — <i>Vito Volterra</i>	1
Sur l'intégration des équations différentielles du problème de N corps. — <i>Göran Dillner</i>	56
Ueber die Integration der Hermiteschen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung, bei denen die Unendlichkeitsstellen der Integrale von der ersten Ordnung sind. — <i>G. Mittag-Leffler</i>	65
Sulla classe di equazioni differenziali lineari considerate nella precedente Memoria del sig. Mittag-Leffler. — <i>Prof. Francesco Brioschi</i>	81
Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique. — <i>J. Veronese</i>	93
Intorno ad una congruenza di modulo primo. — <i>Carlo Maria Piuma</i>	237
An extension of a theorem of Legendre's. — <i>John C. Malet</i>	246
Sulla risolvente di Lagrange per le equazioni di grado primo risolvibili per radicali. — <i>Luigi Bianchi</i>	255

Indice.

	Pag.
Sui gruppi $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione. — <i>G. Veronese</i>	284
Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria. — <i>Prof. Francesco Brioschi</i>	291
Osservazioni e aggiunte alla Nota: "Sopra la funzione potenziale in uno spazio di n dimensioni." — <i>A. Tonelli</i>	305
An extension of a theorem of Legendre's. — <i>John C. Malet</i>	312
Errata-Corrige	316

Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa.

(Nota di VITO VOLTERRA, allievo della R. Scuola Normale in Pisa.)

Nella presente Nota viene risolto il problema della determinazione di funzioni di variabile complessa definite, sotto certe condizioni al contorno, in campi finiti. Queste soluzioni portano alla integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$ con date condizioni ai limiti, come è da prevedersi a causa del legame che passa fra i due problemi. È da notare come le formule trovate risolvono altrettante questioni di fisica relative alla distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti.

I.

È facile dimostrare che è sempre possibile costruire nell'interno di un circolo una ed una sola funzione di variabile complessa la quale verifichi le seguenti condizioni:

1.° si mantenga finita in ogni campo situato internamente al cerchio in questione e in tutti i punti interni al cerchio sia monodroma e continua;

2.° al contorno la sua parte reale (oppure la sua parte immaginaria) assuma valori dati arbitrariamente, colla condizione che anche al contorno essa si mantenga sempre finita e continua, esclusi al più un numero finito di punti o un gruppo infinito di punti di prima specie; sarà per conseguenza necessario che i valori dati al contorno costituiscano una funzione finita e continua dell'arco del contorno, esclusi al più i punti singolari in questione;

3.° in questi punti singolari la funzione di variabile complessa possa essere discontinua e in vicinanza di essi possa anche crescere indefinitamente, colla

condizione peraltro che in un intorno sufficientemente piccolo del punto d'infinito la parte reale (oppure la parte immaginaria) moltiplicata per una potenza, inferiore all'unità, della distanza dal punto d'infinito si mantenga sempre inferiore ad un numero finito; per conseguenza i valori dati al contorno dovranno costituire una funzione dell'arco, che diviene infinita soltanto in un numero finito di punti di ordine inferiore all'unità diminuita di un numero positivo.

4.° in un punto qualunque del campo la sua parte immaginaria (oppure la sua parte reale) assuma un dato valore arbitrario.

Ammetteremo come proprietà note le seguenti: Se la funzione $f(\theta)$ definita fra 0 e 2π , è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, la funzione:

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

in cui r e α sono le coordinate polari di un punto del piano, è finita continua e verifica l'equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$ in ogni punto interno al cerchio di raggio R che ha il centro all'origine ed è continua nel punto del contorno di questo cerchio di coordinate R e θ_0 se la $f(\theta_0)$ è continua nel punto θ_0 .

Supposta l'esistenza di una funzione u finita e continua e che verifica la equazione $\Delta^2 u = 0$ in tutti i punti interni ad un cerchio, che diviene infinita di ordine inferiore ad un numero minore di 1 soltanto avvicinandosi ad un numero finito di punti del contorno ed è discontinua in un gruppo di punti di prima specie del contorno, mentre in tutti gli altri è finita e continua e assume dati valori, questa funzione è unica.

Ciò premesso sia la funzione $f(\theta)$ definita fra 0 e 2π , infinita al più in un numero finito di punti di un ordine inferiore a $\mu < 1$ e discontinua al più in un gruppo di punti di prima specie.

Consideriamo la funzione

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

e determiniamo il modo con cui si comporta avvicinandosi ad un punto di infinito (R, α_1) del contorno.

È evidentemente possibile determinare il numero $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ e minore anche del

minimo arco che separa due punti di infinito in modo che :

$$\left[\int_0^{\alpha_1 - \varepsilon} + \int_{\alpha_1 + \varepsilon}^{2\pi} \right] \left(f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta \right)$$

si mantenga inferiore in valore assoluto ad un numero finito M positivo per

$$\alpha_1 + \frac{\varepsilon}{2} > \alpha > \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora la funzione

$$\rho^{-\mu} \cos \mu \omega = F(r, \alpha)$$

in cui ρ e ω sono le coordinate polari riferite al punto (R, α_1) come origine e al raggio che passa per questo punto come asse polare, è finita continua e verifica l'equazione $\Delta^2 F = 0$ in tutti i punti del cerchio in questione e del contorno di esso, escluso il punto (R, α_1) in cui diviene infinita di ordine μ . Per θ entro l'intervallo $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$

$$\frac{f(\theta)}{F(R, \theta)}$$

non supera in valore assoluto un numero finito positivo N ; quindi in valore assoluto si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_1 - \varepsilon}^{\alpha_1 + \varepsilon} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta = \\ & = \int_{\alpha_1 - \varepsilon}^{\alpha_1 + \varepsilon} \frac{f(\theta)}{F(R, \theta)} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta < \\ & < N \int_{\alpha_1 - \varepsilon}^{\alpha_1 + \varepsilon} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta. \end{aligned}$$

Ora esiste evidentemente un numero finito positivo P tale che in valore assoluto si ha:

$$\left[\int_0^{\alpha_1 - \varepsilon} + \int_{\alpha_1 + \varepsilon}^{2\pi} \right] \left(F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta \right) < P.$$

Quindi se $\alpha_1 + \frac{\varepsilon}{2} > \alpha > \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2}$, in valore assoluto abbiamo:

$$u(r, \alpha) < \frac{M}{2\pi} + \frac{NP}{2\pi} + \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

Ma per i lemmi enunciati deve aversi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta = F(r, \alpha)$$

per conseguenza in valore assoluto:

$$u(r, \alpha) < \frac{M}{2\pi} + \frac{NP}{2\pi} + NF(r, \alpha)$$

il che prova che nel punto (R, α_1) la $u(r, \alpha)$ è infinita di ordine non superiore a μ . Ciò dimostra evidentemente il teorema enunciato da principio.

Questo teorema si estende facilmente in molti casi a quei campi i quali ammettono una rappresentazione conforme nell'interno del cerchio.

II.

Per uno qualunque di tali campi è pure una condizione caratteristica di una funzione di variabile complessa finita monodroma e continua in ogni punto interno al campo e al contorno pure sempre finita e continua (esclusi al più un numero finito di punti nei quali essa diviene infinita, di un ordine inferiore ad $\frac{1}{2}$ meno un numero positivo, rispetto alla inversa delle distanze dal punto d'infinito stesso, ed esclusi pure al più un gruppo di punti di prima specie nei quali essa può essere discontinua) la conoscenza in una porzione del contorno della sua parte reale e nella rimanente della sua parte immaginaria (*).

(*) Da un esempio che dà il signor SCHWARZ: *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, G. di BORCHARDT, t. 74, pag. 237, si vede subito che può costruirsi in un cerchio una funzione di variabile complessa non costante che in un dato punto abbia per la parte immaginaria un dato valore e abbia la parte reale nulla lungo tutto il contorno, purchè in un punto di questo la funzione divenga infinita di 1° ordine. La funzione $\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} e^{-i\frac{\theta}{2}}$ ci offre l'esempio d'una funzione che ha in una porzione del contorno del circolo di raggio 1 la parte reale nulla, nella porzione rimanente nulla la parte immaginaria e diventa infinita soltanto nel punto $z = 1$ di ordine $\frac{1}{2}$, mentre in tutti i punti interni si mantiene monodroma finita e continua.

Supponiamo infatti che in tutti i punti interni ad un dato campo (che si può rappresentare conformemente in un circolo) le due funzioni di variabile complessa

$$w = u + iv, \quad w_1 = u_1 + iv_1$$

siano finite monodrome e continue.

Ammettiamo che la u e la u_1 in una porzione del contorno (esclusi al più un numero finito o un gruppo di prima specie di punti) siano finite e continue ed assumano gli stessi valori; nella porzione rimanente del contorno la v e la v_1 (esclusi sempre un numero finito di punti o un gruppo di prima specie) siano finite continue e prendano gli stessi valori.

Ammettiamo che se le w e w_1 divengono infinite lo siano in un numero finito di punti del contorno e moltiplicate per le distanze dai punti d'infinito elevate alla potenza $\frac{1}{2} - \mu$ ($\mu > 0$) rimangano sempre finite e inferiori ad un numero dato.

Consideriamo la funzione:

$$w_2 = (w - w_1)^2 = (u - u_1)^2 - (v - v_1)^2 + 2i(u - u_1)(v - v_1)$$

essa sarà finita monodroma e continua in tutti i punti nell'interno del campo; al contorno la sua parte immaginaria sarà (esclusi al più un numero finito o un gruppo di prima specie di punti) finita continua ed eguale a zero; inoltre diventerà infinita al più in un numero finito di punti del contorno di un ordine, rispetto alle inverse delle distanze da questi punti, inferiore all'unità diminuita di un numero positivo. Ne segue che w_2 non potrà essere che costante in tutto il campo e quindi come si vede subito eguale allo zero. Dunque in tutti i punti del campo sarà

$$w = w_1.$$

Si vede facilmente che questa stessa proprietà sarebbe verificata qualunque fosse il campo (anche moltepliciamente connesso) e comunque fossero le funzioni date al contorno, purchè si avesse che i moduli di w e w_1 si mantenessero in tutto il campo sempre inferiori ad un numero finito e si avesse che la u e la u_1 si comportassero egualmente coll'avvicinarsi a tutti i punti di una porzione del contorno, e la v e la v_1 si comportassero pure egualmente avvicinandosi alla porzione rimanente del contorno.

III.

Ammissa l'esistenza di una funzione $w = u + iv$ della variabile complessa z avente il modulo sempre inferiore ad un numero finito monodromo e continuo in tutti i punti di un campo semplicemente connesso S che supporremo per semplicità avere il contorno s costituito da un numero finito di pezzi di curve analitiche (*) e ammesso che la w possieda la derivata prima finita e generalmente continua anche al contorno di S , cerchiamo di determinare la w conoscendo in un pezzo A del contorno la u e nel pezzo B rimanente la v .

Eseguiamo perciò la rappresentazione conforme del campo S sopra il quarto di piano $\zeta = \xi + i\eta$ dalla parte delle ξ e η positive in modo che, Ω essendo l'origine degli assi ξ e η , al pezzo del contorno A corrisponda l'asse $\eta + \infty \Omega$ e al pezzo B l'asse $\Omega \xi + \infty$. Questa rappresentazione conforme si eseguisca mediante la funzione di variabile complessa

$$\zeta = \zeta(z)$$

che è in tutti i punti del campo delle z monodroma finita e continua e di cui l'inversa

$$z = z(\zeta)$$

è pure in tutti i punti del quarto di piano monodroma finita e continua e al contorno possiede una derivata finita e generalmente continua.

Della funzione

$$w[z(\zeta)]$$

definita come funzione monodroma finita e continua in tutti i punti del quarto di piano ζ e che ammette al contorno una derivata finita e generalmente continua si conosce il valore della parte reale

$$u[s(\eta)]$$

lungo l'asse delle η , e il valore della parte immaginaria

$$v[s(\xi)]$$

(*) Vedi SCHWARZ: *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen*. Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, October 1870.

lungo l'asse delle ξ ; conosciamo quindi al contorno, lungo l'asse delle η :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\eta}$$

e lungo l'asse delle ξ :

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{d\xi}.$$

Ma $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$i \frac{dw}{d\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + i \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

quindi conosciamo di questa funzione il valore della parte reale lungo il contorno del quarto di piano, dato come funzione generalmente continua dell'arco del contorno stesso. Poichè ora si sa eseguire la rappresentazione conforme del quarto di piano nel circolo, potremo determinare il valore di $i \frac{dw}{d\zeta}$ in ogni punto del quarto di piano a meno di una costante additiva. Il valore di questa costante dovrà scegliersi in modo che $i \frac{dw}{d\zeta}$ si annulli nel punto $\zeta = \infty$ perchè abbiamo supposto che la w sia sempre finita. Determinato così il $\frac{dw}{d\zeta}$ si otterrà con una quadratura il $w(\zeta)$ e quindi la funzione richiesta $w[\zeta(z)]$.

IV.

Applichiamo questo metodo al caso in cui il campo S sia un circolo di raggio 1. Per potere applicare il metodo generale che è stato indicato, alle funzioni date u e v dovremo imporre le seguenti condizioni:

1.° che esista una funzione di variabile complessa che verifica alle condizioni volute al contorno e nell'interno del cerchio;

2.° che le due funzioni date al contorno siano continue ed ammettano rispetto all'arco del contorno una derivata finita e generalmente continua.

Risolveremo il problema sotto queste due ipotesi; però trovata la formula risolutiva determineremo direttamente le proprietà della funzione di variabile complessa che risulta senza fare alcuna ipotesi sopra i valori dati di u e di v e così verranno a togliersi la maggior parte delle condizioni imposte alle u e alle v stesse.

La formula che dà la rappresentazione conforme del circolo di raggio 1 situato nel piano delle z sul mezzo piano situato dalla parte delle Y positive nel piano delle Z è

$$z = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0}$$

in cui Z_0 e Z'_0 sono valori complessi coniugati e avendosi

$$Z_0 = X_0 + iY_0$$

è

$$Y_0 > 0 \quad (*).$$

La rappresentazione conforme del mezzo piano delle Z sul quarto di piano delle ζ situato dalla parte delle ξ e η positive viene data da

$$\zeta = \sqrt{Z},$$

quindi si ha:

$$\zeta = \sqrt{\frac{z Z'_0 - Z_0}{z - 1}}$$

per la rappresentazione conforme del circolo sul quarto di piano.

Sia $\theta = AB$ l'arco del circolo nei punti del quale è conosciuta la u , prendiamo per asse delle x la congiungente il centro col punto estremo A , (l'arco AB essendo contato in senso positivo); siano ρ e ω le coordinate polari di un punto del piano del circolo quando si prenda per origine il centro del circolo e l'asse x per asse polare. Pel modo col quale deve farsi nel nostro caso la rappresentazione conforme del circolo sul quarto di piano, le $Z_0 = e^{i\lambda}$ e $Z'_0 = e^{-i\lambda}$ si determineranno mediante la relazione: .

$$e^{i\theta} Z'_0 - Z_0 = 0,$$

donde:

$$Z_0 = e^{i\frac{\theta}{2}} \quad Z'_0 = e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Se ne deduce che al punto del contorno del circolo $z = e^{i\omega}$ corrisponde il valore di ζ :

$$\sqrt{\frac{\text{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}}$$

(*) Vedi CHRISTOFFEL: *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie*. Annali di Matematica, serie II, t. 1, pag. 94.

quindi per $z = e^{i\omega}$ e $\omega < \theta$ si ha:

$$\xi = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}}$$

per $z = e^{i\omega}$ e $\omega > \theta$ si ha:

$$\xi = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}, \quad \eta = 0.$$

Di qui si deduce inversamente che per $\zeta = i\eta$,

$$z = e^{i\left(2 \operatorname{arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}}\right)},$$

e per $\zeta = \xi$,

$$z = e^{i\left(2 \operatorname{arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2}\right)}.$$

Della $w(z)$, conosciamo $u(\omega)$ per $\omega < \theta$ e $v(\omega)$ per $\omega > \theta$ quindi della $w[z(\zeta)]$ conosciamo lungo l'asse η la parte reale

$$u\left(2 \operatorname{arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}}\right)$$

e lungo l'asse ξ il coefficiente della parte immaginaria

$$v\left(2 \operatorname{arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2}\right),$$

quindi lungo l'asse delle η :

$$\frac{dw}{d\eta} = -4u'\left(2 \operatorname{arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}}\right) \frac{\eta \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \left(\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

e lungo l'asse delle ξ

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{du}{d\eta} = 4v' \left(2 \operatorname{arco\,tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2} \right) \frac{\xi \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2 \right)^2}.$$

Poniamo

$$i \frac{dw}{d\zeta} = w_1(\zeta)$$

e consideriamo la funzione

$$w_1[\zeta(z)].$$

Il valore della parte reale u_1 di questa funzione al contorno del circolo sarà:
per $\omega < \theta$

$$u_1(\omega) = -4u'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta - \omega}{2} \right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}}$$

e per $\omega > \theta$

$$u_1(\omega) = -4v'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}};$$

quindi essendo z un punto interno al circolo:

$$w_1[\zeta(z)] = -\frac{2}{\pi} \int_0^\theta u'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta - \omega}{2} \right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_\theta^{2\pi} v'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega + C$$

in cui C è una costante (*), e poichè per $z=1$ si ha $\zeta=\infty$, così:

(*) SCHWARZ: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für die Fläche eines Kreises. XV Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, s. 123.

$$C = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta u'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{i\omega} + 1}{e^{i\omega} - 1} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} v'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\omega} + 1}{e^{i\omega} - 1} d\omega,$$

onde:

$$i \frac{dw}{d\zeta} = w_1[\zeta(z)] = -\frac{2}{\pi} \int_0^\theta u'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} - \frac{e^{i\omega} + 1}{e^{i\omega} - 1} \right) d\omega -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} v'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \left(\frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} - \frac{e^{i\omega} + 1}{e^{i\omega} - 1} \right) d\omega.$$

Ma si ha:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{4}}}{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)^3}},$$

quindi:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\theta u'(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}} e^{i\frac{\theta}{4}} \left(\frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} - \frac{e^{i\omega} + 1}{e^{i\omega} - 1} \right) \frac{1}{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)^3}} d\omega -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} v'(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}} e^{i\frac{\theta}{4}} \left(\frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} - \frac{e^{i\omega} + 1}{e^{i\omega} - 1} \right) \frac{1}{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)^3}} d\omega$$

e integrando:

$$w = \frac{i}{\pi} \int_0^\theta u'(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}}{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v'(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}}{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}} d\omega + C_1$$

in cui C_1 è una costante. Eseguendo una integrazione per parti si trova, C_2 essendo una costante,

$$w = -\frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_0^\theta u(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega +$$

$$+\frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega + C_1 + C_2.$$

V.

In ordine a quello che abbiamo detto sopra, studiamo, senza occuparci del modo con cui siamo giunti a determinarla, le proprietà della funzione della variabile complessa z :

$$w(z) = - \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}} d\omega + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_\theta^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}} d\omega \end{aligned} \right\} (1)$$

in cui $f(\omega)$ e $f_1(\omega)$ sono funzioni reali della variabile reale ω , finite e atte alla integrazione. Per valore della espressione $\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}$, fisseremo quello definito dalla relazione

$$\left[\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)} \right]_{z=e^{i\alpha}} = + 2 \sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{4}\right)}. \quad (\theta > \alpha > 0).$$

Si riconosce subito che la w è una funzione finita monodroma e continua in tutti i punti interni al cerchio di raggio 1, e che almeno quando la u e la v sono continue ed hanno la derivata finita e atta alla integrazione, verifica certamente alla condizione di mantenersi finita anche avvicinandosi ai punti del contorno.

Per vedere le proprietà della funzione w quando la z si avvicina al contorno del circolo ci serviremo di un teorema del sig. DU BOIS-REYMOND (*) relativo agli integrali definiti che sono atti a rappresentare analiticamente una funzione (**).

Chiamiamo rispettivamente con $R(A)$ e $I(A)$ la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria del numero complesso A . Avremo ponendo:

$$z = r e^{i\alpha} \quad (r < 1)$$

(*) Vedi: DU BOIS-REYMOND, vol. 79, BORCHARDT'S JOURNAL, e prof. ULISSE DINI: *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche di una funzione di variabile reale*, pag. 41.

(**) Faccio notare che il metodo che verrà ora adoperato potrebbe servire utilmente anche in altre analoghe verificazioni di proprietà ai limiti di funzioni note.

che:

$$R\left(\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\right) = \frac{(r-1)\cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{r^2 + 1 - 2r\cos(\alpha - \omega)},$$

quindi:

$$R\left[\int_{\alpha}^{\omega_1} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}} d\omega\right] = \frac{1}{\sqrt{r}} \arctan \frac{2\sqrt{r}\sin\left(\frac{\omega_1 - \alpha}{2}\right)}{r - 1}.$$

Ne segue che supponendo

$$\omega_1 > \alpha \quad \text{e} \quad \omega_0 < \alpha$$

si ottiene:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\alpha}^{\omega_1} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}} d\omega\right] = \lim_{r=1} R\left[\int_{\omega_0}^{\alpha} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}} d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\omega_2}^{\omega_3} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}} d\omega\right] = 0$$

se ω_2 e ω_3 sono ambedue maggiori oppure ambedue minori di α .

Inoltre si ha che

$$\frac{(r-1)\cos\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{r^2 + 1 - 2r\cos(\omega - \alpha)}$$

si mantiene sempre negativo finchè si ha in valore assoluto

$$\omega - \alpha < \pi.$$

Di qui si deduce immediatamente supponendo $\theta > \alpha > 0$ e supponendo inoltre che nel punto α la $u(\omega)$ non abbia discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_0^{\theta} \frac{f(\omega)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}}} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}} d\omega\right] = -\frac{\pi}{2} \frac{f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)}{\sqrt{\sin\frac{\theta - \alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}.$$

Di più si ha in valore assoluto

$$I \left[\int_0^\theta \frac{f(\omega)}{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}} d\omega \right] < M_0 \log(1 - r) + M,$$

essendo M e M_0 numeri finiti, e:

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{4}\right)}} = 2 \sqrt{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}},$$

quindi avremo per

$$\theta > \alpha > 0$$

che:

$$\lim_{r=1} R \left[-\frac{1}{2\pi} \sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)} \int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = \frac{f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)}{2}.$$

Analogamente si trova supponendo $2\pi > \alpha > \theta$:

$$\lim_{r=1} R \left[\int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = 0,$$

$$I \left[\int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} \right] < M_1$$

in valore assoluto, M_1 essendo un numero finito, e poichè in questo caso

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{4}\right)}} = -2i \sqrt{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

così sarà:

$$\lim_{r=1} I \left[-\frac{1}{2\pi} \sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)} \int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = 0$$

per $2\pi > \alpha > \theta$.

Se $\theta > \alpha > 0$ si ha:

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta}^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\text{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \text{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = 0$$

$$I \left[\int_{\theta}^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\text{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \text{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] < M_2$$

in valore assoluto, M_2 essendo un numero finito; quindi:

$$\lim_{r=1} R \left[-\frac{1}{2\pi} \sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)} \int_{\theta}^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\text{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \text{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = 0.$$

Se $2\pi > \alpha > \theta$ e α non è un punto di discontinuità di seconda specie della $v(\omega)$ si trova:

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta}^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\text{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \text{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = -\frac{\pi}{2} \frac{f_1(\alpha + 0) + f_1(\alpha - 0)}{\sqrt{\text{sen} \frac{\alpha - \theta}{2} \text{sen} \frac{\alpha}{2}}}$$

$$I \left[\int_{\theta}^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\text{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \text{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] < M_3 \log(1 - r) + M_4$$

in valore assoluto, M_3 e M_4 essendo finiti, e siccome

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{4}\right)}} = -2i \sqrt{\text{sen} \left(\frac{\alpha - \theta}{2}\right) \text{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

così sarà:

$$\lim_{r=1} I \left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)} \int_{\theta}^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\text{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \text{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega \right] = \frac{f_1(\alpha + 0) + f_1(\alpha - 0)}{2}.$$

La $w(z)$ data dalla (1) è dunque una funzione che in ogni porzione tutta

interna al circolo che si considera si mantiene sempre finita monodroma e continua; avvicinandosi ai punti (R, α) dell'arco θ del contorno nei quali la $f(\omega)$ non ha discontinuità di seconda specie (gli estremi esclusi) secondo i raggi vettori che vanno ai punti stessi, la parte reale della funzione $w(z)$ tende verso la media dei valori del limite a destra e di quello a sinistra dei valori della $u(\omega)$ nel punto α ; avvicinandosi ai punti (R, α_1) della porzione rimanente del contorno nei quali non si hanno discontinuità per la $f_1(\omega)$ (gli estremi esclusi), sempre nella direzione dei raggi, il coefficiente, della parte immaginaria di $w(z)$ tende verso la media del limite a destra e di quello a sinistra dei valori della $f_1(\omega)$ nel punto α_1 .

Si riconosce dunque così il modo di comportarsi della $w(z)$ in tutti i punti del contorno, esclusi quelli in cui la $f(\omega)$ o la $f_1(\omega)$ hanno discontinuità di seconda specie e gli estremi dell'arco θ .

Si noti ora, come può verificarsi applicando le considerazioni precedenti, che in tutti i punti dell'intervallo (λ, μ) interno all'altro (λ_1, μ_1) ($\theta > \mu_1 > \lambda_1 > 0$) in cui la $f(\omega)$ si mantiene sempre continua, la parte reale della $w(z)$, avvicinandosi la z ai punti del contorno lungo la normale, tende con continuità ed in egual grado verso i valori della $f(\omega)$. Se ne conclude che la parte reale della $w(z)$ è continua assolutamente nei punti $e^{i\alpha}$ ($\mu > \alpha > \lambda$) del contorno. Una analoga proprietà si ha per la parte immaginaria della $w(z)$. Si ha dunque che, quando la $f(\omega)$ e la $\varphi(\omega)$ sono continue ed ammettono la derivata, può dirsi che la $w(z)$ data dalla (1) è l'unica funzione che si mantenga finita e abbia la parte reale e la parte immaginaria che prendano al contorno con continuità, rispettivamente i valori $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$, l'una fra 0 e θ , l'altra fra θ e 2π .

VI.

Consideriamo ora la funzione:

$$w_1(z) = \left. \begin{aligned} & -\frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}} d\omega - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}}{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}} d\omega + Ci \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

in cui $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ sono funzioni reali dell'argomento reale ω finite e atte alla integrazione, e C è una costante reale. I valori dei radicali saranno fissati per mezzo della stessa relazione che ha servito allo stesso scopo nel paragrafo precedente.

La $w_1(z)$ è sempre finita monodroma e continua in ogni punto interno al cerchio di raggio 1.

Poichè si ha identicamente:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}}{\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega} - e^{i\theta}}{e^{i\omega} - 1}}} d\omega =$$

$$= \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\omega \varphi(\omega) d\omega \right) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\sin \frac{\omega - \theta}{2} \sin \frac{\omega}{2}}} d\omega + i \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) d\omega,$$

si vede che la parte reale della $w_1(z)$ coll'avvicinarsi della $z = r e^{i\alpha}$ ad un punto del contorno $(1, \alpha_1)$, $\theta > \alpha_1 > 0$ [la $f(\omega)$ non avendo discontinuità di seconda specie nel punto α_1] tende verso

$$\frac{f(\alpha_1 + 0) + f(\alpha_1 - 0)}{2}.$$

Ora, il campo di variabilità della z può evidentemente essere esteso oltre il cerchio di raggio 1 senza che la funzione

$$w_2(z) = - \frac{\sqrt{(z - e^{i\theta})(z - 1)}}{2\pi} \int_0^\theta f(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\theta}{4}\right)}}{(z - e^{i\omega}) \sqrt{\sin \frac{\theta - \omega}{2} \sin \frac{\omega}{2}}} d\omega$$

cessi di mantenersi finita monodroma e continua in tutti i punti interni al campo, purchè seguiti ad essere un pezzo del contorno di esso l'arco $(0, \theta)$ del cerchio di raggio 1; si ha quindi, poichè la $w_2(z)$ è reale nei punti dell'arco $(\theta, 2\pi)$ del cerchio di raggio 1, che per $2\pi > \alpha > \theta$

$$\left(\frac{\partial R[w_2(z)]}{\partial r} \right)_{r=1} = 0.$$

Ma per $r < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_3(z)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega}-1}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega}-1}{e^{i\omega}-1}}} d\omega \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} i \frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\omega-\theta) \sin \frac{1}{2}\omega} \frac{e^{i\left(\alpha + \frac{\theta}{4} + \frac{\omega}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}} d\omega \end{aligned}$$

e si ha, essendo $2\pi > \alpha > \theta$, [la $\varphi(\omega)$ non avendo discontinuità di seconda specie nel punto α]

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} R \left[\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\omega-\theta) \sin \frac{1}{2}\omega} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}} d\omega \right] &= \\ &= -\frac{\pi}{2} [\varphi(\alpha+0) + \varphi(\alpha-0)] \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\theta) \sin \frac{1}{2}\alpha}; \\ I \left[\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\omega-\theta) \sin \frac{1}{2}\omega} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}} d\omega \right] &< P \log(1-r) + Q \end{aligned}$$

in valore assoluto, P e Q essendo numeri finiti, e finalmente:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{4}\right)}}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}} = \frac{1}{-2i \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\theta) \sin \frac{1}{2}\alpha}},$$

per conseguenza essendo $2\pi > \alpha > \theta$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial r} \{R[w(z)]\} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial r} \{R[w_3(z)]\} = \frac{\varphi(\alpha+0) + \varphi(\alpha-0)}{2}.$$

Si ha dunque, come facilmente si poteva prevedere, che la formula (2) ci dà una soluzione del problema di determinare una funzione di variabile complessa finita monodroma e continua in tutti i punti interni ad un cerchio, di cui è noto il valore della parte reale in una porzione del contorno e nell'altra è noto il valore della derivata rispetto alla normale al contorno della parte reale.

Col separare la parte reale dalla parte immaginaria nella (2) si ottiene la soluzione del problema di determinare una funzione U di due variabili reali finita monodroma e continua in tutti i punti interni ad un cerchio, che verifica l'equazione differenziale:

$$\Delta^2 U = 0,$$

quando si conosca in una porzione del contorno il valore della funzione e nella porzione rimanente il valore della sua derivata rispetto alla normale al contorno.

Col fare nella (2) $\theta = 2\pi$ si trovano le note formule della teoria della integrazione della equazione $\Delta^2 U = 0$ (*).

VII.

La formula trovata (1) ci fornisce immediatamente per analogia la soluzione di un problema più generale di quello risoluto.

Suppongasi che di una funzione della variabile complessa z , definita come funzione finita monodroma e continua in tutti i punti di un circolo di raggio 1 si conosca il valore della parte reale u data come funzione dell'arco ω del contorno dal punto 0 al punto θ_1 , il valore del coefficiente v della parte immaginaria dal punto θ_1 al punto θ_2 , quello della parte reale dal punto θ_2 al punto θ_3 , ecc. Finalmente quello del coefficiente della parte immaginaria dal punto θ_{2k-1} al punto 2π ; si tratta di determinare la funzione di variabile complessa.

Consideriamo la funzione:

$$w(z) = -\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \prod_s (z - e^{i\theta_s})}^{k-1} \left\{ \int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} u_p(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_s \theta_s\right)}}{(z^k - e^{ik\omega}) \sqrt{\prod_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} d\omega - \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} v_p(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_s \theta_s\right)}}{(z^k - e^{ik\omega}) \sqrt{-\prod_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} d\omega \right\} \quad (3)$$

(*) Vedi SCHWARZ, terza opera citata.

in cui $\theta_0 = 0$, $\theta_{2k} = 2\pi$, $u_p(\omega)$ è una funzione definita fra θ_{2p} e θ_{2p+1} atta alla integrazione e $v_p(\omega)$ è una funzione definita fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} pure atta alla integrazione. Per valore della espressione $\sqrt[2k]{(-1)^k \prod_1 (z - e^{i\theta_s})}$ fisseremo quello definito dalla relazione

$$\left[\sqrt[2k]{(-1)^k \prod_1 (z - e^{i\theta_s})} \right]_{z=e^{i\alpha}} = + 2^k \sqrt[2k]{\prod_1 \text{sen} \left(\frac{\theta_s - \alpha}{2} \right)} e^{i \left(\frac{k}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sum_1^{2k} \theta_s \right)} \quad (\theta_1 > \alpha > 0).$$

La $w(z)$ è una funzione di z monodroma finita e continua in ogni porzione tutta interna al circolo di raggio 1; vediamo come si comporta al contorno:

Si ha analogamente a quanto venne trovato precedentemente supponendo $z = r e^{i\alpha}$ ($r < 1$)

$$R \left[\int_{\alpha}^{\theta'} \frac{e^{\frac{i k}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{i k \omega}} d\omega \right] = \frac{1}{k} r^{-\frac{k}{2}} \text{arco tang} \left[\frac{2 r^{\frac{k}{2}} \text{sen} \frac{k}{2}(\theta' - \alpha)}{r^k - 1} \right]$$

e quindi se $\theta' > \alpha > \theta''$

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\alpha}^{\theta'} \frac{e^{\frac{i k}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{i k \omega}} d\omega \right] = \lim_{r=1} R \left[\int_{\theta''}^{\alpha} \frac{e^{\frac{i k}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{i k \omega}} d\omega \right] = -\frac{\pi}{2k}$$

e per conseguenza se θ''' e θ^{iv} sono ambedue minori o ambedue maggiori di α

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta'''}^{\theta^{iv}} \frac{e^{\frac{i k}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{i k \omega}} d\omega \right] = 0.$$

Di più è da osservare che

$$R \left[\frac{e^{\frac{i k}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{i k \omega}} \right] = \frac{(r^k - 1) \cos \frac{k}{2}(\omega - \alpha)}{r^{2k} + 1 - 2r \cos k(\omega - \alpha)},$$

espressione che in valore assoluto, se $\omega - \alpha < \frac{\pi}{k}$, è sempre negativa.

Ciò premesso si ha subito, poichè:

$$\prod_1^{2k} \text{sen} \left(\frac{\theta_s - \omega}{2} \right) > 0$$

per ω compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1} , che:

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)}{\sqrt{\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \omega}{2} \right)}} \frac{e^{\frac{i}{2}k(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = -\frac{\pi}{2k} \frac{u_p(\alpha + 0) + u_p(\alpha - 0)}{\sqrt{\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \alpha}{2} \right)}}$$

se il punto α è compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1} (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $u_p(\omega)$, mentre

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)}{\sqrt{\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \omega}{2} \right)}} \frac{e^{\frac{i}{2}k(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = 0$$

se il punto α non è compreso nell'intervallo $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ nè coincide cogli estremi di questo.

Si ha inoltre in valore assoluto:

$$I \left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)}{\sqrt{\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \omega}{2} \right)}} \frac{e^{\frac{i}{2}k(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] < S_\alpha \log(1-r) + T_\alpha$$

S_α e T_α essendo numeri positivi finiti per tutti i valori di α diversi da θ_{2p} e θ_{2p+1} qualunque sia il valore di r .

Ora se α è compreso in un intervallo della forma $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$, si ha

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(-1)^k \frac{2k}{1} \Pi (z - e^{i\theta_s})}}{e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha + \frac{1}{4} \sum_1^{2k} \theta_s\right)}} = 2^k \sqrt{\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \alpha}{2} \right)},$$

mentre se α è compreso in un intervallo della forma $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ si ha invece

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(-1)^k \frac{2k}{1} \Pi (z - e^{i\theta_s})}}{e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha + \frac{1}{4} \sum_1^{2k} \theta_s\right)}} = -i 2^k \sqrt{-\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \alpha}{2} \right)}.$$

Ne segue che:

$$\lim_{r=1} R \left[-\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \frac{2k}{1} \Pi (z - e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)}{\sqrt{\frac{2k}{1} \Pi \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_s - \omega}{2} \right)}} \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4} \sum_1^{2k} \theta_s\right)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = \frac{u_p(\alpha + 0) + u_p(\alpha - 0)}{2}$$

se α è compreso nell'intervallo $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la $u_p(\omega)$;

$$\lim_{r=1} R \left[-\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k} (z - e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)}{\sqrt{\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4} \sum_1^{2k} \theta_s\right)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = 0$$

se α è un punto dell'intervallo $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$ $q \geq p$; e

$$\lim_{r=1} I \left[-\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k} (z - e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2q+1}} \frac{u_p(\omega)}{\sqrt{\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4} \sum_1^{2k} \theta_s\right)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = 0$$

se α è un punto dell'intervallo $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ ($q \geq p$, esclusi i punti θ_{2p} e θ_{2p+1}). Analogamente si trova poichè:

$$-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right) > 0,$$

per ω compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} , che:

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{v_p(\omega)}{\sqrt{-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{\frac{ik}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = -\frac{\pi}{2k} \frac{v_p(\alpha + 0) + v_p(\alpha - 0)}{\sqrt{-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \alpha}{2}\right)}}$$

se α è compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $v_p(\omega)$, mentre

$$\lim_{r=1} R \left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{v_p(\omega)}{\sqrt{-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{\frac{ik}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = 0$$

se α è un punto esterno all'intervallo $(\theta_{2p+1}, \theta_{2p+2})$ e non coincide cogli estremi di questo. Di più si ha in valore assoluto

$$I \left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{v_p(\omega)}{\sqrt{-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{\frac{ik}{2}(\omega + \alpha)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] < S'_\alpha \log(1-r) + T'_\alpha$$

S'_α e T'_α essendo numeri finiti positivi per qualunque valore di r , essendo α

differente da θ_{2p+1} e θ_{2p+2} . Ne segue che:

$$\lim_{r=1} I \left[\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \prod_s (z - e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{r_p(\omega)}{\sqrt{-\prod_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_s \theta_s\right)}}{z^k - e^{ki\omega}} d\omega \right] =$$

$$= \frac{v_p(\alpha + 0) + v_p(\alpha - 0)}{2}$$

se il punto α è compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1} (questi due valori esclusi) e $v_p(\omega)$ non ha discontinuità di seconda specie nel punto α ;

$$\lim_{r=1} I \left[\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \prod_s (z - e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{v_p(\omega)}{\sqrt{-\prod_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_s \theta_s\right)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = 0$$

per α compreso in un intervallo $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ $q \geq p$;

$$\lim_{r=1} H \left[\frac{k}{\pi 2^k} \sqrt{(-1)^k \prod_s (z - e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2r+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{v_p(\omega)}{\sqrt{-\prod_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{k}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_s \theta_s\right)}}{z^k - e^{ik\omega}} d\omega \right] = 0$$

per α compreso in un intervallo $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$ il punto α essendo però differente dagli estremi.

Abbiamo dunque che la $w(z)$ gode della proprietà che avvicinandosi il punto z lungo la normale al contorno ad un punto di questo appartenente ad un arco $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ (gli estremi esclusi) tale che la funzione $u_p(\omega)$ in quel punto non abbia discontinuità di seconda specie, la parte reale della $w(z)$ tende con continuità verso la media del limite a destra e del limite a sinistra dei valori della $u_p(\omega)$ in quel punto, mentre avvicinandosi il punto z , sempre lungo la normale al contorno, ad un punto di questo appartenente all'arco $(\theta_{2p+1}, \theta_{2p+2})$ (gli estremi esclusi) tale che la $v_p(\omega)$ non abbia in quel punto discontinuità di seconda specie, il coefficiente della parte immaginaria della $w(z)$ tende con continuità verso la media del limite a destra e del limite a sinistra dei valori della $v_p(\omega)$ in quel punto.

VIII.

Dalle formole trovate si possono dedurre subito le soluzioni dei problemi analoghi a quelli ora risolti per il cerchio, nel caso generale di aree piane semplicemente connesse di cui si conosce la rappresentazione conforme nel cerchio. Alla conoscenza di questa rappresentazione può sostituirsi, come è noto, quella di una funzione reale, monodroma e continua che si annulla al contorno, in un punto interno qualunque diviene infinita di ordine logaritmico rispetto alle distanze da questo punto, mentre in tutti gli altri si mantiene finita, e verifica di più l'equazione $\Delta^2 = 0$ (*). La determinazione di questa funzione corrisponde a quella della funzione di GREEN (**), per un punto qualunque del campo.

Se per un dato campo S nel piano $\zeta = \xi + i\eta$, la funzione di GREEN di un certo punto P corrispondente al valore ζ_0 di ζ è $u(\xi\eta)$, e

$$u_1(\xi\eta) = u(\xi\eta) - \frac{1}{2} \log [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2]$$

e $u_1(\xi\eta) + iv_1(\xi\eta)$ è una funzione monodroma finita e continua della ζ in tutti i punti interni del campo che si ottiene aggiungendo al contorno σ di S una linea situata tutta internamente a questo campo che non taglia sè stessa ed unisce P con un punto di σ , si otterranno subito per il campo S le soluzioni dei problemi analoghi a quelli risolti nel caso del cerchio sostituendo nelle formole (1), (2), (3) in luogo di z

$$F(\zeta) = e^{u_1(\xi\eta) + iv_1(\xi\eta)}$$

e $v_1[\xi(\sigma), \eta(\sigma)]$ invece di ω , intendendo con $\xi(\sigma)$ e $\eta(\sigma)$ i valori di ξ e η nel punto σ del contorno di S .

IX.

Con un metodo analogo a quello adoperato per risolvere il primo problema propostoci potrebbe risolversi il seguente:

(*) Vedi RIEMANN: *Dissertazione inaugurale*. Annali di Matematica, serie I, t. 2, pag. 353 e la seconda Memoria già citata di SCHWARZ, pag. 787.

(**) Vedi C. NEUMANN: *Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$.
Giornale di BORCHARDT, t. 59.

Determinare una funzione $w = u + iv$ della variabile complessa z , monodroma finita e continua in tutti i punti di un cerchio di raggio 1 (il contorno incluso) e che nei punti dell'arco (θ_p, θ_{p+1}) del contorno verifichi alla condizione

$$A_p u'(\theta) + B_p v'(\theta) = F(\theta), \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

supponendo la circonferenza del cerchio divisa in n parti, essendo A_p e B_p numeri reali variabili con p soltanto e $F(\theta)$ una funzione reale finita, continua, avente la derivata finita e continua.

Eseguiamo perciò la rappresentazione conforme (il che può sempre farsi quando si supponga $n > 2$) del cerchio nel piano z , entro un poligono chiuso ad un solo strato e semplicemente connesso nel piano ξ in modo che all'arco (θ_p, θ_{p+1}) corrisponda un lato del poligono avente per equazione

$$A_p \xi + B_p \eta = \cos t \quad (*)$$

Sia

$$z = z(\xi)$$

la funzione che dà questa rappresentazione conforme; poniamo:

$$w[z(\xi)] = w_1(\xi) = u_1 + i v_1.$$

L'arco θ del contorno del cerchio può considerarsi come una funzione del corrispondente contorno s del poligono; determiniamo il valore di

$$\frac{dF[\theta(s)]}{ds}$$

per i valori s_p di s corrispondenti ai punti del lato p^{esimo} del poligono (gli estremi esclusi).

Avremo:

$$\frac{dF[\theta(s_p)]}{ds_p} = A_p \frac{du[\theta(s_p)]}{ds_p} + B_p \frac{dv[\theta(s_p)]}{ds_p}.$$

Ora:

$$\begin{aligned} \frac{du[\theta(s_p)]}{ds_p} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s_p}, \\ \frac{dv[\theta(s_p)]}{ds_p} &= \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s_p} = \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial s_p}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial s_p} &= \frac{\pm B_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial s_p} &= \frac{\mp A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}}, \end{aligned}$$

(*) Vedi Dini: *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra*. Annali di Matematica, serie II, t. 8.

onde

$$\frac{dF[\theta(s_p)]}{ds_p} = \mp \sqrt{A_p^2 + B_p^2} \frac{\partial u_1}{\partial \eta}.$$

Si ha dunque che la parte reale della funzione di variabile complessa

$$i \frac{dw_1}{d\zeta} = w_2(\zeta)$$

al contorno del poligono (i vertici esclusi) è data da

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}} \frac{dF[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\mp 1}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(s_p)}{ds_p},$$

e nei vertici se diviene infinita è di ordine inferiore ad un numero minore di uno. Ne segue che la parte reale della funzione $w_2[\zeta(z)]$ nei punti interni all'arco (θ_p, θ_{p+1}) del contorno del circolo è:

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \frac{1}{\left(\frac{ds_p}{d\theta}\right)}$$

e se in qualche punto del contorno diviene infinita, è di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità, quindi per mezzo di note formule si può determinare in tutti i punti interni al circolo il valore di

$$w_2[\zeta(z)] = i \frac{dw}{dz} \frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)}$$

e per conseguenza mediante una quadratura quello di w .

X.

Non starò a sviluppare la soluzione del problema col metodo precedente, perchè ne darò ora un altro per mezzo del quale si risolve un problema più generale, cioè di determinare quali sono le funzioni

$$w(z) = u + iv$$

che nell'interno di un dato campo si mantengono sempre monodrome, finite e continue ed avvicinandosi ad un punto qualunque s del contorno (escluso al più un gruppo di punti di prima specie $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$) lungo la normale al con-

torno in quel punto, sono tali che

$$f(s)u + \varphi(s)v$$

tende con continuità verso un limite $\Theta(s)$. Le funzioni $f(s)$ e $\varphi(s)$ sono reali, finite e continue, colle derivate prime e seconde determinate, atte alla integrazione ed inferiori ad un numero finito in tutti i punti, escluso un numero finito di punti; ammetteremo inoltre che $f(s)$ e $\varphi(s)$ non siano mai zero contemporaneamente e se s_1 è un punto [o (s_1, s'_1) è un tratto] in cui la $\varphi(s)$ si annulla, la $\varphi(s)$ non cangi segno coll'attraversare il punto s_1 [o il tratto (s_1, s'_1)]; supporremo che la $f(s)$ non sia mai negativa.

La funzione $\Theta(s)$ è reale, finita, ed escluso un gruppo di punti di prima specie con degli intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, risulta in tutti gli intervalli rimanenti continua e con estremi oscillatorî (*) inferiori ad un numero finito.

Fra i punti $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$ esclusi in principio si intendano compresi quelli di singolarità delle funzioni $f(s)$, $\varphi(s)$ e $\Theta(s)$.

Premettiamo la dimostrazione dei seguenti teoremi: (**)

1.° Se la funzione $F(\theta)$ definita fra 0 e 2π è finita e continua nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon < \frac{\pi}{2}$) e di più nello stesso intervallo ha gli estremi oscillatorî sempre inferiori in valore assoluto ad un numero finito positivo M , mentre fra 0 e $\theta_1 - \varepsilon$, e $\theta_1 + \varepsilon$ e 2π è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, il modulo della funzione di variabile complessa

$$w = u + iv$$

definita nei punti z del cerchio di raggio R dalla formula:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

si mantiene sempre inferiore ad un numero finito in un intorno del punto (R, θ_1) .

Infatti sappiamo che la u coll'avvicinarsi di z a $Re^{i\theta}$ tende con continuità verso $F(\theta_1)$; esiste dunque un intorno del punto (R, θ_1) in cui la u si mantiene in valore assoluto inferiore ad un certo numero finito; abbiamo poi ponendo

(*) Vedi DINI: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, pag. 190 e seg.

(**) Alcuni di questi lemmi sono analoghi a teoremi dimostrati dal prof. DINI nella sua Memoria: *Sull'equazione $\Delta^2 u = 0$* . Annali di Matematica, s. II, t. 8.

$z = re^{i\alpha}$, $F(\alpha)$ essendo finito:

$$\begin{aligned} v(r, \alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [F(\theta) - F(\alpha)] \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\theta, \end{aligned}$$

Ora finchè la α è compresa nell'intervallo $\left(\theta_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \theta_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ si ha in valore assoluto:

$$\left[\int_0^{\theta_1 - \varepsilon} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^{2\pi} \right] \left\{ [F(\theta) - F(\alpha)] \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\theta \right\} < N$$

N essendo un numero positivo finito.

Abbiamo inoltre in valore assoluto per α sempre compreso fra gli stessi limiti

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} [F(\theta) - F(\alpha)] \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} = \\ &= \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} \frac{F(\theta) - F(\alpha)}{\theta - \alpha} \frac{\theta - \alpha}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)} \operatorname{sen}(\theta - \alpha) \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} d\theta < \\ &< M \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \theta)} < M \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

in cui M è un numero finito. Quindi in valore assoluto:

$$v < \frac{N}{\pi} + \frac{1}{2} M.$$

Ne segue, che il modulo di $w(z)$ in un intorno del punto $Re^{i\theta_1}$ si mantiene inferiore ad un numero finito, come volevasi dimostrare.

2.° Se la funzione $F(\theta)$, definita fra 0 e 2π , nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$ (gli estremi esclusi) è finita e continua ed ha gli estremi oscillatori inferiori ad un numero finito e nell'intervallo $(\theta_1, \theta_1 + \varepsilon)$ gode delle stesse proprietà, mentre nel punto θ_1 ha una discontinuità di prima specie avendosi

$$F(\theta_1 + 0) - F(\theta_1 - 0) = k;$$

di più negli intervalli $(0, \theta_1 - \varepsilon)$ e $(\theta_1 + \varepsilon, 2\pi)$ è atta alla integrazione, anche

ridotta ai suoi valori assoluti, la funzione della variabile complessa z

$$w = u + iv$$

definita dalla relazione

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

per tutti i valori di z nell'interno del circolo di raggio R , nel punto $Re^{i\theta_1} = z_0$ diviene infinita come la funzione $\frac{ki}{\pi} \log(z - z_0)$, cioè:

$$\rightarrow \frac{ki}{\pi} \log(z - z_0) + w(z) = w_1(z)$$

si mantiene finita in un intorno del punto (R, θ_1) .

Esiste infatti un intorno del punto θ_1 , tale che per θ compresa in questo intorno la parte reale di $w_1(Re^{i\theta})$ è sempre finita continua ed ha gli estremi oscillatori sempre inferiori in valore assoluto ad un numero positivo finito.

3.° Se la funzione $F(\theta)$ definita fra 0 e 2π è finita e continua nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ ed ammette in tutti i punti di questo intervallo una derivata $F'(\theta)$ determinata, inferiore in valore assoluto ad un numero finito e atta alla integrazione, e negli intervalli $(0, \theta_1 - \varepsilon)$ e $(\theta_1 + \varepsilon, 2\pi)$ la $F(\theta)$ è atta alla integrazione, anche ridotta ai valori assoluti, la funzione di variabile complessa:

$$w(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

definita per tutti i valori di z nell'interno del circolo di raggio R , coll'avvicinarsi di z lungo la normale al contorno al punto $Re^{i\theta_1}$ tende con continuità verso un valore determinato e finito. Se prendiamo per valori della $w(z)$ al contorno del circolo i limiti (quando esistono) verso cui tende la funzione $w(z)$ coll'avvicinarsi ai punti del contorno lungo la normale, avremo che nei punti $Re^{i\alpha}$ (pei quali $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$) la $w(z)$ avrà valori determinati e finiti e sarà continua e monodroma,

Infatti sappiamo che la u coll'avvicinarsi della z al punto $Re^{i\theta_1}$ lungo la normale tende con continuità verso $F(\theta_1)$; dimostreremo che anche la v tende verso un limite determinato e finito.

Se $z = re^{i\theta}$ si ha:

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\theta_1 - \varepsilon} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^{2\pi} + \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} \right] \left(F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} d\theta \right).$$

La funzione

$$\left(\int_0^{\theta_1 - \varepsilon} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^{2\pi} \right) \left(F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} d\theta \right)$$

è finita e continua per tutti i valori di r da 0 ad R (R incluso). Abbiamo poi:

$$2 \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} d\theta =$$

$$= [F(\theta_1 + \varepsilon) - F(\theta_1 - \varepsilon)] \log(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varepsilon) -$$

$$- \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) \log[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)] d\theta.$$

Ma

$$\frac{d}{dr} \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) \log[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)] d\theta =$$

$$= \frac{1}{r} \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} d\theta + \frac{1}{r} \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) d\theta$$

quantità che si mantiene, per tutti i valori di r compresi fra un certo valore $r' > 0$ e R , sempre inferiore ad un numero finito. Ne segue che

$$\int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta_1)} d\theta$$

coll'avvicinarsi di r a R tende verso un limite determinato e finito e quindi anche v ha un limite pure determinato e finito per $r = R$. Si vede analogamente che esiste sempre un limite determinato e finito per $v(r, \alpha)$ quando r tende verso R e $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$.

Se il limite superiore dei valori di $F'(\theta)$ nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ è M

si ha in valore assoluto:

$$\lim_{r=R} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)] d\theta -$$

$$- \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)) d\theta < 2 \frac{M}{r} (\varepsilon + \pi)(R - r).$$

Ciò prova che la funzione v è continua nei punti (R, α) e quindi anche w è continua negli stessi punti.

4.° Se oltre tutte le condizioni imposte nel teorema precedente alla $F(\theta)$, si pone che nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ essa possieda la derivata seconda determinata inferiore ad un numero finito ed atta alla integrazione, avremo che la $v(R, \alpha)$ per $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$ ammetterà una derivata determinata, finita e continua rispetto ad α .

Abbiamo infatti in valore assoluto, se $\varepsilon' < \frac{\pi}{2}$,

$$\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log \left[\frac{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha))}{4R^2} \right] d\theta < \int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log \left[\text{sen}^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right] d\theta,$$

il che prova, che

$$\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)] d\theta$$

può rendersi, qualunque sia r , inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio impiccolendo sufficientemente ε' . Si ha dunque che:

$$\lim_{r=R} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log[R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)] d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log \left[\text{sen}^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2} \right) \right] d\theta + [F(\theta_1 + \varepsilon) - F(\theta_1 - \varepsilon)] \log 4R^2;$$

e per conseguenza:

$$v(R, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi} \right] \left[F(\theta) \cot \left(\frac{\theta - \alpha}{2} \right) d\theta \right] - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log \left(\text{sen}^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} [F(\theta_1 + \varepsilon) - F(\theta_1 - \varepsilon)] \log \left(\text{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) (*).$$

(*) Questa formula prova, indipendentemente dalla dimostrazione già fatta, la seconda parte del teorema precedente.

Ora:

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) &= \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F'(\theta) \log \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) d\theta = \\ &= F'(\theta_1 + \varepsilon) \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} \log \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) d\theta - \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} \left[F''(\theta) \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta} \log \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) d\theta \right] d\theta;\end{aligned}$$

ma

$$\int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta} \log \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta - \alpha}{2} \right) \right] d\theta = \int_{\theta_1 - \varepsilon - \alpha}^{\theta - \alpha} \log \left[\operatorname{sen}^2 \frac{\lambda}{2} \right] d\lambda,$$

quindi:

$$\psi(\alpha) = F'(\theta_1 + \varepsilon) \int_{\theta_1 - \varepsilon - \alpha}^{\theta_1 + \varepsilon - \alpha} \log \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) d\lambda - \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} \left[F''(\theta) \int_{\theta_1 - \varepsilon - \alpha}^{\theta - \alpha} \log \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) d\lambda \right] d\theta,$$

il che dimostra che esiste la derivata di $\psi(\alpha)$ rispetto ad α ed è data dalla funzione continua:

$$\begin{aligned}\psi'(\alpha) &= -F'(\theta_1 + \varepsilon) \log \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_1 + \varepsilon - \alpha}{2} \right) + F'(\theta - \varepsilon) \log \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_1 - \varepsilon - \alpha}{2} \right) + \\ &\quad + \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} F''(\theta) \log \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) d\theta.\end{aligned}$$

Ne segue che $v(R, \alpha)$ possiede una derivata determinata finita e continua rispetto ad α per $\theta + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$.

Evidentemente questi teoremi si estendono ad un gran numero di campi nei quali si ha la rappresentazione conforme nel cerchio.

XI.

Ciò premesso nel caso in cui si tratti di uno di tali campi, passiamo alla risoluzione del problema enunciato. Consideriamo la funzione:

$$\psi(s) = -\operatorname{arco tang} \frac{f(s)}{\varphi(s)},$$

quando si prenda per l'arco tang $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$ il valore compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, e si assuma $\operatorname{arco tang} \frac{A}{0} = \pm \frac{\pi}{2}$ in modo che la $\psi(s)$ risulti per tutti i valori di

s finita e continua, esclusi al più un numero finito di punti corrispondenti ai punti singolari di $f(s)$ e $\varphi(s)$ in cui ha discontinuità di prima specie e fa salti inferiori in valore assoluto a π . Indicheremo tali punti con $s_1, s_2 \dots s_n$ e i salti che in essi hanno luogo con $a_1, a_2 \dots a_n$.

La $\psi(s)$ viene a possedere le derivate prime e seconde determinate e inferiori ad un numero finito in tutti i punti, esclusi quelli di singolarità.

Sarà dunque possibile determinare la $w_1(z)$ finita, monodroma e continua in tutti i punti interni al campo in questione e in tutti i punti del contorno, esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$, e tale che al contorno la parte reale prenda con continuità i valori $\psi(s)$ nei punti in cui questa funzione è continua. Avremo inoltre che nei punti del contorno, esclusi $s_1, s_2 \dots s_n$, la parte immaginaria, considerata come funzione dell'arco del contorno, possederà la derivata prima determinata, finita e continua. Nei punti $s_1, s_2 \dots s_n$ corrispondenti ai valori $z_1, z_2 \dots z_n$ di z la $w_1(z)$ diventerà infinita logaritmicamente, rispettivamente come

$$\pm \frac{ia_1}{\pi} \log(z - z_1), \quad \pm \frac{ia_2}{\pi} \log(z - z_2), \dots \quad \pm \frac{ia_n}{\pi} \log(z - z_n).$$

Consideriamo la funzione

$$w_2(z) = u_2 + iv_2 = e^{iw_1(z)};$$

essa sarà finita, diversa da zero, continua e monodroma in tutti i punti interni al campo in questione, e sarà pure finita, continua, monodroma e diversa da zero in tutti i punti del contorno, esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$. Inoltre la u_2 e la v_2 , nei punti del contorno (esclusi $s_1, s_2 \dots s_n$), considerate come funzioni dell'arco del contorno, possederanno la derivata prima finita e continua. In un

intorno di uno qualunque dei punti singolari s_p avremo che $(z - z_p)^{\pm \frac{a_p}{\pi}} w_2(z)$ si manterrà sempre inferiore ad un numero finito in valore assoluto e discosto da zero più di una certa quantità.

Indichiamo con z_s i valori della z nei punti s del contorno, e con $u_2(s)$ e $v_2(s)$ i valori di u_2 e v_2 negli stessi punti; avremo, per tutti i valori di s diversi da $s_1, s_2 \dots s_n$,

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} \varphi(s) = u_2(s)$$

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} f(s) = -v_2(s)$$

in cui i radicali debbono intendersi presi collo stesso segno di $\varphi(s)$.

Ora poichè $w_2(z)$ è finita e continua in tutti i punti del contorno (esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$) sarà $\text{mod} w_2(z_s)$ una funzione finita e continua dell'arco del contorno esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$ nei quali se diviene infinita, è di ordine non superiore in valore assoluto ad $\frac{a_1}{\pi}, \frac{a_2}{\pi} \dots \frac{a_n}{\pi}$ che hanno tutti un valore inferiore all'unità.

Potrà dunque costruirsi una funzione $w_3(z)$ la quale sia monodroma, finita e continua in tutti i punti interni al campo e coll'avvicinarsi della z ad un punto qualunque s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$ e quelli di discontinuità della $\Theta(s)$] lungo la normale al contorno, la parte reale tenda con continuità verso

$$\frac{\text{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} \Theta(s) = \chi(s).$$

Nei punti $s_1, s_2 \dots s_n$, la parte reale della $w_3(z)$, se diviene infinita sarà di ordine inferiore all'unità diminuita di un numero positivo. Inoltre poichè $\text{mod} w_2(z_s)$ considerata come funzione di s possiede la derivata prima finita e continua in tutti i punti, esclusi $s_1, s_2 \dots s_n$, e $\Theta(s)$, escluso un gruppo di punti di prima specie, possiede estremi oscillatori inferiori ad un numero finito, la parte immaginaria di $w_3(z)$ si manterrà inferiore ad un certo numero A_s coll'avvicinarsi a ciascuno dei punti s del contorno, esclusi $s_1, s_2 \dots s_n$ e i punti di singolarità della $\Theta(s)$. Tutte le funzioni della forma

$$w_3(z) + Ci,$$

in cui C è una costante arbitraria reale, godono della stessa proprietà.

Consideriamo la funzione

$$u + iv = w(z) = \frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)};$$

essa sarà monodroma, finita e continua in tutti i punti interni al campo, e il suo modulo si manterrà inferiore ad un numero finito A'_s variabile con s , avvicinandosi al punto s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$ e quelli di singolarità della $\Theta(s)$]. Ora abbiamo:

$$R[w_3(z)] = uu_2 - vv_2;$$

quindi avvicinandosi ad un punto qualunque s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2 \dots s_n$ e quelli di discontinuità della $\Theta(s)$] lungo la normale, avremo che

$$uu_2 - vv_2$$

tenderà con continuità verso $\chi(s)$. Ma u_2 e v_2 tendono con continuità verso

$u_2(s)$ e $v_2(s)$, quindi:

$$u[u_2 - u_2(s)] - v[v_2 - v_2(s)]$$

tenderà verso zero avvicinandosi al punto s del contorno lungo la normale. Ne segue che

$$uu_2(s) - vv_2(s)$$

tende con continuità verso $\chi(s)$, ossia

$$\varphi(s)u + f(s)v$$

tende con continuità verso $\Theta(s)$.

Ciò prova l'esistenza di un numero infinito di funzioni che verificano le condizioni imposte e dà il modo di trovare un numero infinito di esse. È poi evidente che quando esistono delle funzioni $w(z)$ che nei punti $s_1, s_2 \dots s_n$ divengono infinite di ordine inferiore a $\frac{\pi - a_n}{\pi}$ diminuito di un numero positivo e negli altri punti singolari divengono infinite di ordine inferiore ad 1 diminuito di un numero positivo, esse appartengono a quelle delle funzioni $w(z)$ che sono date dalla espressione trovata

$$\frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)}.$$

È facile quindi vedere quali altre condizioni vanno imposte alla w affinché resulti completamente definita.

In ultimo è da osservare che se la $\Theta(s)$ oltre essere continua possiede la derivata prima atta alla integrazione ed inferiore ad un numero finito in tutti gli intervalli che si ottengono escludendo, con intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, un gruppo di punti di prima specie, la $w(z)$ data da

$$\frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)}$$

in tutti i punti del contorno, esclusi $s_1, s_2 \dots s_n$ e i punti di singolarità della $\Theta(s)$, resulta finita e continua; e in questi punti, considerando la u e la v come funzioni di s , viene verificata la relazione:

$$u\varphi(s) + vf(s) = \Theta(s).$$

XII.

Facciamo l'applicazione al caso del cerchio di raggio 1.

Chiamiamo ω l'arco s del contorno, e poniamo $z = re^{i\alpha}$.

Avremo :

$$w_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega,$$

$$w_2(z) = e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega},$$

$$\text{mod } w_2(z) = e^{-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{r \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \alpha)} d\omega},$$

$$\chi(\alpha) = \Theta(\alpha) \frac{e^{-\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{r \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \alpha)} d\omega \right]_{r=1}}}{\sqrt{f^2(\alpha) + \varphi^2(\alpha)}},$$

e per conseguenza :

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} d\omega} \left[\int_0^{2\pi} \Theta(\beta) \frac{e^{-\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{r \operatorname{sen}(\omega - \beta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \beta)} d\omega \right]_{r=1}}}{\sqrt{f^2(\beta) + \varphi^2(\beta)}} \frac{z + e^{i\beta}}{z - e^{i\beta}} d\beta + Ci \right] \quad (4)$$

in cui C è una costante arbitraria reale.

La soluzione del problema già risolto per altra via nel § IV, si ottiene subito da questa formula prendendo la funzione $\varphi(\omega)$ eguale a 1 fra 0 e θ ed eguale a 0 fra θ e 2π ; la funzione $f(\alpha)$ eguale a 0 fra 0 e θ , eguale ad 1 fra θ e 2π . Si ottiene in questo caso che $\psi(\omega)$ è eguale a 0 fra 0 e θ ed è eguale a $-\frac{\pi}{2}$ fra θ e 2π , quindi:

$$w_1(z) = -i \log \sqrt{\frac{e^{i\theta} - z}{1 - z}} + \frac{1}{4}(2\pi - \theta),$$

$$w_2(z) = i \sqrt{\frac{e^{i\theta} - z}{1 - z}} e^{-i\frac{\theta}{4}},$$

$$w(z) = -\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - z}{e^{i\theta} - z}} e^{i\frac{\theta}{4}} \left[\int_0^\theta \Theta(\beta) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}} \frac{z + e^{i\beta}}{z - e^{i\beta}} d\beta - \int_0^{2\pi} \Theta(\beta) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta - \theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}} \frac{z + e^{i\beta}}{z - e^{i\beta}} d\beta + Ci \right].$$

Prendendo

$$C = \int_0^\theta \Theta(\beta) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}} \cot \frac{1}{2}(\Theta - \beta) d\beta - \int_0^{2\pi} \Theta(\beta) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}} \cot \frac{1}{2}(\beta - \theta) d\beta,$$

si trova:

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{(1-z)(e^{i\theta} - z)} \left[\int_0^\theta \Theta(\beta) \frac{e^{i\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta-\beta}{2}}} \frac{d\beta}{z - e^{i\beta}} - \int_0^{2\pi} \Theta(\beta) \frac{e^{i\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \operatorname{sen}\frac{\beta-\theta}{2}}} \frac{d\beta}{z - e^{i\beta}} \right].$$

Servendosi della formula (4) si potrebbe risolvere il noto problema, già risoluto con altri metodi, di determinare la rappresentazione conforme di un poligono in un circolo (*).

XIII.

Il primo dei metodi esposti (§§ III e IX) per la risoluzione dei vari problemi trattati, non può evidentemente estendersi al caso in cui si vogliono considerare dei campi molteplicemente connessi, essendo fondato sulla rappresentazione conforme dei campi stessi entro un quarto di piano o un poligono semplicemente connesso. È molto facile vedere che il secondo metodo esposto (§ XI) può invece estendersi a un gran numero di casi in cui si hanno dei campi molteplicemente connessi. Però darò ora un altro metodo mediante il quale possono risolversi alcuni problemi analoghi a quelli già risolti sulle funzioni di variabile complessa e sull'integrazione dell'equazione $\Delta^2 u = 0$, e che può applicarsi facilmente al caso di campi molteplicemente connessi.

La U e la φ siano funzioni di due variabili x e y finite, continue e aventi

(*) Vedi CHRISTOFFEL, op. cit.; H. A. SCHWARZ; *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, BORCHARDT's Journal, Bd. 70; DINI; *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra*. Annali di Matematica, s. II, t. 8.

le derivate prime e seconde pure finite e continue in tutti i punti interni ad un campo C a due dimensioni e in tutti i punti del contorno; la U e la φ verifichino inoltre l'equazioni

$$\Delta^2 U = 0 \quad \Delta^2 \varphi = 0.$$

Se r è la distanza fra il punto (x_1, y_1) interno a C e il punto (x, y) , p è la normale diretta verso l'interno del campo, si ha:

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[\frac{\partial U}{\partial p} (\log r + \varphi) - U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right] ds,$$

in cui l'integrale è esteso a tutto il contorno s del campo. Da questa formula si deduce se $A_m \geq 0$,

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left\{ \left(A_m \frac{dU}{dp} + B_m U \right) (\log r + \varphi) - \right. \\ &\quad \left. - U \left[B_m (\log r + \varphi) + A_m \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right] \right\} ds + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} \left[\frac{\partial U}{\partial p} (\log r + \varphi) - U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right] ds, \end{aligned}$$

quando si supponga diviso in una maniera qualunque il contorno totale s negli intervalli $s_1, s_2 \dots s_m \dots; s'_1, s'_2 \dots s'_n \dots$

Se dunque si può determinare la φ in modo che nella porzione s_m del contorno si abbia:

$$B_m (\log r + \varphi) + A_m \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) = 0$$

e nella porzione s'_n

$$\log r + \varphi = 0,$$

si avrà:

$$\left. \begin{aligned} U(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial U}{\partial p} + B_m U \right) (\log r + \varphi) ds - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) ds, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e quindi basterà conoscere al contorno il valore di

$$A_m \frac{\partial U}{\partial p} + B_m U$$

negli intervalli s_m e il valore di U negli intervalli s'_n per poter determinare la funzione U in un punto qualunque (x_1, y_1) interno al campo C . La funzione φ viene così a calcolarsi analogamente a quella di GREEN e a quella del chiarissimo prof. DINI (*).

È facile estendere una proprietà reciproca della funzione di GREEN (**) alle funzioni che abbiamo ora considerato. Indichi infatti r' la distanza di un punto (x_2, y_2) interno a C dal punto (x, y) ; φ' sia una funzione che rispetto al punto (x_2, y_2) goda delle stesse proprietà della φ rispetto ad (x_1, y_1) . Avremo:

$$\varphi'(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi' \right) (\log r + \varphi) ds - \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} \varphi' \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) ds,$$

$$\varphi(x_2, y_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi \right) (\log r' + \varphi') ds - \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} \varphi \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi'}{\partial p} \right) ds.$$

Ora osservando che si ha

$$\begin{aligned} & \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi' \right) \varphi ds - \sum_m \int_{s'_m} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial p} ds - \\ & - \sum_m \int_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi \right) \varphi' ds + \sum_n \int_{s'_n} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial p} ds = 0, \end{aligned}$$

nei tratti s_m si ha:

$$\begin{aligned} A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi &= -A_m \frac{\partial \log r}{\partial p} - B_m \log r, \\ A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi' &= -A_m \frac{\partial \log r'}{\partial p} - B_m \log r', \end{aligned}$$

e nei tratti s'_n si ha

$$\varphi = -\log r, \quad \varphi' = -\log r',$$

si ottiene

$$\varphi'(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_s \left(\frac{\partial \log r'}{\partial p} \log r - \frac{\partial \log r}{\partial p} \log r' \right) ds.$$

(*) Vedi DINI: *Su una funzione analoga a quella di Green*, Nota letta alla Reale Accademia dei Lincei il 6 febbraio 1876.

(**) Vedi NEUMANN, Memoria citata.

Ma è facile dimostrare che

$$\int_s \left(\frac{\partial \log r'}{\partial p} \log r - \frac{\partial \log r}{\partial p} \log r' \right) ds = 0,$$

quindi

$$\varphi'(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2) (*).$$

XIV.

Se $U + iV$ è una funzione della variabile complessa $x + iy$ monodroma, finita e continua in tutti i punti del campo C , (il contorno incluso) si ha, ricordando che:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = - \frac{\partial V}{\partial s},$$

e integrando per parti:

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial p} (\log r + \varphi) ds = \int_s V \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) ds,$$

quindi:

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_s \left[V \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right] ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s_m} \frac{1}{A_m} \int_{s_m} \left\{ (A_m V + B_m U) \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - \right. \\ &\quad \left. - U \left[B_m \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + A_m \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right] \right\} ds + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{s_n} \int_{s_n} \left[V \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Se è possibile determinare la φ in modo che negli intervalli s_m verifichi le relazioni

$$B_m \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + A_m \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) = 0$$

(*) La funzione del prof. DINI gode al pari di quella di GREEN e delle funzioni ora considerate di una proprietà reciproca. Essa può dedursi immediatamente da un teorema dimostrato nella mia Nota: *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione del calore e delle correnti galvaniche costanti*. Nuovo Cimento, s. III, t. 11.

e negli intervalli s'_n verifichi l'altra

$$\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

si trova:

$$\left. \begin{aligned} U(x_1, y_1) = & \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int_{s_m} (A_m V + B_m U) \left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) ds - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{s'_n} U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ciò prova che basterà conoscere nei tratti s_m del contorno il valore di

$$A_m V + B_m U$$

e nei tratti s'_n il valore di U per poter determinare in tutti i punti interni al campo C il valore di U .

Quando si sia determinata la U mediante la (5) o la (6) si avrà subito la V per mezzo delle note relazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}.$$

XV.

Applichiamo le formule trovate nel § XIII al caso in cui il campo C sia lo spazio compreso fra due cerchi concentrici di raggi R e R_1 ($R > R_1$) e si voglia determinare la U conoscendone i valori sul cerchio di raggio R_1 e conoscendo i valori di $\frac{\partial U}{\partial p}$ sul cerchio di raggio R . Basterà perciò determinare una funzione φ monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde nel campo C che verifichi l'equazione $\Delta^2 \varphi = 0$, che sul cerchio di raggio R_1 sia eguale a $-\log r_1$ e sul cerchio di raggio R sia tale che $\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -\frac{\partial \log r_1}{\partial p}$, r_1 essendo la distanza da un punto interno (x_1, y_1) al punto sul contorno.

Prendiamo l'origine nel centro comune ai due cerchi e poniamo:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta & y &= \rho \sin \theta, \\ x_1 &= \rho_1 \cos \theta_1 & y_1 &= \rho_1 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

L'immagine del punto (x_1, y_1) nella trasformazione per raggi vettori reciproci

rispetto al cerchio di raggio R_1 , avrà per coordinate:

$$x_2 = \frac{R_1^2}{\rho_1} \cos \theta_1, \quad y_2 = \frac{R_1^2}{\rho_1} \sin \theta_1.$$

Sia $\varphi_1(\rho, \theta)$ la funzione del prof. DINI (*), corrispondente al punto (x_1, y_1) rispetto ai due cerchi concentrici di raggi R e $\frac{R_1^2}{R}$, e $\varphi_2(\rho, \theta)$ quella corrispondente al punto (x_2, y_2) . Poniamo:

$$\psi(\rho, \theta) = \log r_1 - \log r_2 + \varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta),$$

in cui r_1 è la distanza dal punto (x_1, y_1) al punto (x, y) e r_2 è la distanza dal punto (x_2, y_2) al punto (x, y) .

Avremo che:

$$\varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta)$$

sarà una funzione definita fra i due cerchi di raggi R e $\frac{R_1^2}{R}$, monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde, e che verifica l'equazione $\Delta^2 = 0$; si avrà inoltre:

$$\left[\frac{\partial \psi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right]_{\rho=R} = \left[\frac{\partial \psi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right]_{\rho=\frac{R_1^2}{R}} = 0.$$

Consideriamo la funzione:

$$\psi(\rho, \theta) + \psi\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) = \Theta(\rho, \theta);$$

essa sarà finita, monodroma e continua insieme alle derivate prime e seconde e verificherà l'equazione $\Delta^2 \Theta = 0$, in tutti i punti, al più esclusi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ; inoltre sarà:

$$\left[\frac{\partial \Theta(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right]_{\rho=R} = \left[\frac{\partial \Theta(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right]_{\rho=\frac{R_1^2}{R}} = 0.$$

Ora:

$$\log r_1(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \log \left(\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) \right)$$

$$\log r_2(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{R_1^4}{\rho_1^2} + \rho^2 - 2\frac{R_1^2}{\rho_1} \rho \cos(\theta - \theta_1) \right)$$

quindi:

$$\log r_1(\rho, \theta) - \log r_2(\rho, \theta) + \log r_1\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) - \log r_2\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) = \log \frac{\rho_1^2}{R_1^2}.$$

(*) Vedi l'ultima Memoria citata del prof. DINI.

Ciò prova che la $\Theta(\rho, \theta)$ si mantiene monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde anche nei punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ; quindi:

$$\Theta(\rho, \theta) = C$$

in cui C è una costante. Ma

$$\psi(\rho, \theta)_{\rho=R_1} = \psi\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right)_{\rho=R_1},$$

quindi:

$$\psi(\rho, \theta)_{\rho=R_1} = \frac{1}{2} C.$$

Si ha dunque che la funzione

$$-\log r_2 + \varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta) - \frac{1}{2} C$$

gode delle proprietà della funzione $\varphi(\rho, \theta)$ cercata.

È da avvertire che si può riconoscere facilmente che la funzione φ è anche data da

$$\varphi(\rho, \theta) = \log r_3 + \varphi'_1(\rho, \theta) + \varphi'_3(\rho, \theta)$$

in cui r_3 è la distanza fra i punti (ρ, θ) e (ρ_3, θ_3) , immagine ottenuta colla trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto alla circonferenza di raggio R del punto (ρ_1, θ_1) ; φ'_1 è la funzione di GREEN corrispondente al punto (ρ_1, θ_1) rispetto ai due cerchi di raggi R_1 e $\frac{R^2}{R_1}$; φ'_3 è la funzione di GREEN rispetto agli stessi cerchi corrispondente al punto (ρ_3, θ_1) .

Ora si ha:

$$\varphi_1(\rho, \theta) = -\frac{\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}{R + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)} \log \rho - \sum_1^{\infty} \frac{\rho^{2n} \left[\rho_1^{2n} + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n} \right] + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n} (\rho_1^{2n} + R^{2n})}{n \rho^n \rho_1^n \left[R^{2n} - \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n} \right]} \cos n(\theta - \theta_1) + C_1$$

$$\varphi_2(\rho, \theta) = -\frac{\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}{R + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)} \log \rho - \sum_1^{\infty} \frac{\rho^{2n} \left[\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^{2n} + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n} \right] + \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n} \left[\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^{2n} + R^{2n} \right]}{n \rho^n \left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^n \left[R^{2n} - \left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n} \right]} \cos n(\theta - \theta_1) + C_2$$

in cui C_1 e C_2 sono costanti. Si vede subito che

$$-\log \frac{\rho_1}{R_1} + C_1 + C_2 - \frac{1}{2} C = 0,$$

quindi:

$$\dot{\varphi}(\rho, \theta) = -\frac{1}{2} \log \left[R_1^2 + \frac{\rho_1^2 \rho^2}{R_1^2} - 2\rho_1 \rho \cos(\theta - \theta_1) \right] + \sum_1^{\infty} \frac{(\rho^{2n} - R_1^{2n})(R_1^{2n} - \rho_1^{2n})}{n \rho^n \rho_1^n (R_1^{2n} + R_1^{2n})} \cos n(\theta - \theta_1).$$

Se ne deduce, poichè le serie che qui compariscono sono derivabili termine a termine,

$$\begin{aligned} U(\rho_1, \theta_1) &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{R_1^2 (\rho_1^2 + R^2 - 2\rho_1 R \cos(\theta - \theta_1))}{R_1^4 + R^2 \rho_1^2 - 2\rho_1 R R_1^2 \cos(\theta - \theta_1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^{\infty} \frac{(R^{2n} - R_1^{2n})(R_1^{2n} - \rho_1^{2n})}{n R^n \rho_1^n (R^{2n} + R_1^{2n})} \cos n(\theta - \theta_1) \right] d\theta - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{R_1} \left[\frac{R_1^2 - \rho_1^2}{R_1^2 + \rho_1^2 - 2R_1 \rho_1 \cos(\theta - \theta_1)} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{R_1^n}{\rho_1^n} \left(\frac{R_1^{2n} - \rho_1^{2n}}{R_1^{2n} + R_1^{2n}} \right) \cos n(\theta - \theta_1) \right] d\theta \end{aligned}$$

essendo U_{R_1} i valori di U sulla circonferenza di raggio R_1 e $\frac{\partial U_R}{\partial p}$ i valori di $\frac{\partial U}{\partial p}$ sulla circonferenza di raggio R .

Applicando noti sviluppi in serie di FOURIER si trova:

$$\begin{aligned} U(\rho_1, \theta_1) &= -\frac{R}{2\pi} \left(\log \frac{R \rho_1}{R_1} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} d\theta + \\ &+ \frac{R}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{R}{\rho_1} \right)^n \left(\frac{R_1^{2n} - \rho_1^{2n}}{R_1^{2n} + R_1^{2n}} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} \cos n(\theta - \theta_1) d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{R_1} d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{R_1}{\rho_1} \right)^n \left(\frac{R_1^{2n} + \rho_1^{2n}}{R_1^{2n} + R_1^{2n}} \right) \int_0^{2\pi} U_{R_1} \cos n(\theta - \theta_1) d\theta. \end{aligned}$$

Quindi ponendo $\rho_1 e^{i\theta_1} = z_1$ si ha:

$$\begin{aligned} U + iV = W(z_1) &= \left[-\frac{R}{2\pi} \log \frac{R}{R_1} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{R_1} d\theta \right] - \\ &- \frac{R}{2\pi} \log z_1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z_1^n}{(R_1^{2n} + R_1^{2n})} \left[R_1^n \int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{-ni\theta} d\theta - \right. \\ &- \left. \frac{R^{n+1}}{n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} e^{-ni\theta} d\theta \right] + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{z_1^n} \frac{R^n R_1^n}{(R_1^{2n} + R_1^{2n})} \left[\frac{R R_1^n}{n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} e^{ni\theta} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + R^n \int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{ni\theta} d\theta \right] + Ci, \end{aligned}$$

essendo C una costante arbitraria reale.

Ciò prova che è necessario che sia verificata la relazione

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial U_R}{\partial p} d\theta = 0$$

affinchè la funzione di variabile complessa costruita resulti monodroma, come facilmente poteva riconoscersi *a priori*.

Dalle ultime due formule scritte si deduce subito, mediante una integrazione per parti, supponendo la $W(z_1)$ monodroma,

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{R_1} d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{R}{\rho_1}\right)^n \left(\frac{R_1^{2n} - \rho_1^{2n}}{R^{2n} + \rho_1^{2n}}\right) \int_0^{2\pi} V_R \operatorname{sen} n(\theta - \theta_1) d\theta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{R_1}{\rho_1}\right)^n \left(\frac{R^{2n} + \rho_1^{2n}}{R^{2n} + R_1^{2n}}\right) \int_0^{2\pi} U_{R_1} \cos n(\theta - \theta_1) d\theta, \\ W(z_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{R_1} d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_R d\theta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{z_1^n}{R^{2n} + R_1^{2n}} \left[R_1 \int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{-ni\theta} d\theta + i R^n \int_0^{2\pi} V_R e^{-ni\theta} d\theta \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{z_1^n} \frac{R^n R_1^n}{R^{2n} + R_1^{2n}} \left[R^n \int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{ni\theta} d\theta + i R_1^n \int_0^{2\pi} V_R e^{ni\theta} d\theta \right], \end{aligned} \right\}$$

essendo V_R i valori di V nei punti della circonferenza di raggio R .

L'ultima formula si può anche porre sotto la forma

$$\begin{aligned} W(z_1) &= \frac{1}{\pi i} \sum_0^{\infty} \frac{z_1^n}{R^{2n} + R_1^{2n}} \left[R_1^{2n} \int_{s_1} U \frac{dz}{z^{n+1}} + i R^{2n} \int_s V \frac{dz}{z^{n+1}} \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \sum_0^{\infty} \frac{z_1^{-n}}{R^{2n} + R_1^{2n}} \left[R^{2n} \int_{s_1} U z^{n-1} dz + i R_1^{2n} \int_s V z^{n-1} dz \right] \end{aligned}$$

in cui s e s_1 sono rispettivamente le due circonferenze di raggi R e R_1 .

Quando $A + B > 0$ si deduce subito da questa formula, l'altra

$$\begin{aligned} W(z_1) &= \frac{1}{\pi i(A+B)} \sum_1^{\infty} \frac{z_1^n}{R^{2n} + R_1^{2n}} \left[R_1^{2n} \int_{s_1} (AU + BiV) \frac{dz}{z^{n+1}} + \right. \\ &\left. + R^{2n} \int_s (BU + AiV) \frac{dz}{z^{n+1}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi i(A+B)} \sum_1^{\infty} \frac{z_1^{-n}}{R_1^{2n} + L_1^{2n}} \left[R_1^{2n} \int_{s_1} (AU + BiV) z^{n-1} dz + \right. \\
& \quad \left. + R_1^{2n} \int_s (BU + AiV) z^{n-1} dz \right],
\end{aligned}$$

la quale diviene la nota formula di LAURENT quando si prende

$$A = B = 1.$$

Si avrebbero formule analoghe a quelle già trovate nel caso in cui si conoscessero i valori della U nei punti della circonferenza di raggio R e si conoscesse nei punti della circonferenza di raggio R_1 i valori di $\frac{\partial U}{\partial \mu}$.

È facile estendere il metodo adoperato per la determinazione della funzione φ , al caso in cui si ha un campo doppiamente connesso, di cui una sola delle linee chiuse costituenti il contorno è un cerchio.

XVI.

Dalle formule ottenute si passa con facilità ad altre che risolvono i problemi analoghi a quelli ora risolti, nel caso di molti campi doppiamente connessi di cui è nota la rappresentazione conforme entro lo spazio compreso fra due cerchi concentrici. Per esempio, poichè si può, mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci, rappresentare conformemente lo spazio compreso fra due cerchi non concentrici e che non si tagliano nè si toccano in quello compreso fra due cerchi concentrici, potranno con facilità generalizzarsi le formule trovate nel caso di un campo compreso fra due cerchi situati comunque, purchè non si taglino nè si tocchino.

Quindi in molti casi potranno dirsi risolti i problemi analoghi ai precedenti, se il campo dato è compreso fra due linee di livello (*), perchè si conosce la rappresentazione conforme di questi campi, in molti casi, nello spazio compreso fra due cerchi concentrici.

Quando si tratta, per esempio, del campo compreso fra due ellissi omofocali per i quali la distanza focale è 2δ e, essendo α e β i parametri isometrici di

(*) Vedi NEUMANN, Memoria citata.

un doppio sistema di ellissi ed iperbole omofocali, α_0 e α_1 sono i parametri corrispondenti alle due ellissi contorno, si ha che la funzione

$$z = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}}{c\delta},$$

in cui il radicale va preso positivo per z_1 positivo e maggiore di δ , ci dà la rappresentazione conforme dello spazio compreso fra le due ellissi situato sul piano delle z_1 , nello spazio compreso fra due cerchi aventi il centro comune nell'origine del piano delle z , di raggi α_0 , e α_1 (*).

Quindi se si conosce, di una funzione di variabile complessa $W(z_1)$ definita come monodroma, finita e continua in tutti i punti del campo (il contorno incluso) compreso fra le due ellissi α_0 e α_1 , il valore della parte reale U nei punti dell'ellisse α_0 , e il valore della parte immaginaria V nei punti dell'ellisse α_1 , si potrà determinare completamente la funzione $W(z)$ in tutti i punti interni al campo e si avrà:

$$\begin{aligned} W(z_1) = & \frac{1}{\pi i} \sum_0^{\infty} \frac{(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2})^n}{(e^{2n\alpha_0} + e^{2n\alpha_1})} \left[e^{2n\alpha_0} \int_{\alpha_0} U \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2} (z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2})^n} + \right. \\ & \left. + i e^{2n\alpha_1} \int_{\alpha_1} V \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2} (z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2})^n} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi i} \sum_1^{\infty} \frac{(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2})^{-n}}{(e^{2n\alpha_0} + e^{2n\alpha_1})} \left[e^{2n\alpha_1} \int_{\alpha_0} U (z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2})^n \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2}} + \right. \\ & \left. + i e^{2n\alpha_0} \int_{\alpha_1} V (z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2})^n \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2}} \right], \end{aligned}$$

z_1 essendo un punto interno al campo compreso fra le due ellissi omofocali α_0 e α_1 .

XVII.

Nel caso in cui si tratti di un campo compreso fra due cerchi concentrici, accenneremo all'applicazione di un metodo (**), per mezzo del quale si possono

(*) Vedi DINI: *Sopra le funzioni di una variabile complessa*. Annali di Matematica, s. II, t. 4.

(**) Vedi NEUMANN: *Das Dirichlet'sche Princip...*, e DINI: *Sopra una funzione analoga a quella di Green*.

risolvere direttamente alcuni problemi simili a quelli già risolti, e determinare alcune delle funzioni analoghe a quelle di GREEN e del chiar. prof. DINI.

Supponiamo che la funzione

$$w(z) = u + iv$$

definita in tutti i punti interni al campo compreso fra i due cerchi di raggi R' e R aventi il centro all'origine, sia monodroma, finita e continua. Per un noto teorema di LAURENT, avremo, se $\rho e^{i\omega}$ è un punto compreso fra i due cerchi:

$$u = a_0 + \sum_1^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (\alpha_n \cos n\omega + \beta_n \sin n\omega)$$

$$v = b_0 + \sum_1^{\infty} \rho^n (a_n \sin n\omega - b_n \cos n\omega) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (-\alpha_n \sin n\omega + \beta_n \cos n\omega),$$

$$(m = 1, 2 \dots q_1) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} &= \sum_1^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) \rho^{n-m} (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) + \\ &+ \sum_1^{\infty} n(n+1) \dots (n+m-1) \frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}} (\alpha_n \cos n\omega + \beta_n \sin n\omega), \end{aligned} \right.$$

$$(m = 1, 2 \dots q_2) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} &= \sum_1^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) \rho^{n-m} (a_n \sin n\omega - b_n \cos n\omega) + \\ &+ \sum_1^{\infty} n(n+1) \dots (n+m-1) \frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}} (-\alpha_n \sin n\omega + \beta_n \cos n\omega), \end{aligned} \right.$$

in cui $a_n, b_n, \alpha_n, \beta_n$ sono costanti reali.

Supponiamo che tutte le serie scritte si mantengano convergenti in egual grado in tutti i punti dello spazio compreso fra i due cerchi (il contorno incluso), e supponiamo di conoscere su ciascuna delle due circonferenze i valori di una espressione lineare in u, v e nelle derivate successive di queste quantità rispetto alla normale, cioè si abbia al contorno del circolo di raggio R ,

$$M_0 u + N_0 v + \sum_1^{q_1} M_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} + \sum_1^{q_2} N_m \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} = f(\omega),$$

e al contorno del circolo di raggio R' ,

$$M'_0 u + N'_0 v + \sum_1^{q_1} M'_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} + \sum_1^{q_2} N'_m \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} = \varphi(\omega)$$

in cui M_m, N_m, M'_m, N'_m sono costanti note, e $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ sono funzioni note.

Dovremo avere per le ipotesi fatte:

$$\left. \begin{aligned} M_0 a_0 + N_0 b_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega \\ M'_0 a_0 + N'_0 b_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) d\omega \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} l_n a_n + \lambda_n \alpha_n - m_n b_n + \mu_n \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos n\omega d\omega \\ m_n a_n - \mu_n \alpha_n + l_n b_n + \lambda_n \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin n\omega d\omega \\ l'_n a_n + \lambda'_n \alpha_n - m'_n b_n + \mu'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \cos n\omega d\omega \\ m'_n a_n - \mu'_n \alpha_n + l'_n b_n + \lambda'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \sin n\omega d\omega \end{aligned} \right\}$$

in cui:

$$l_n = M_0 R^n + \sum_1^{q_1} M_m n(n-1)\dots(n-m+1) R^{n-m}$$

$$\lambda_n = \frac{M_0}{R^n} + \sum_1^{q_1} M_m n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R^{n+m}}$$

$$m_n = N_0 R^n + \sum_1^{q_2} N_m n(n-1)\dots(n-m+1) R^{n-m}$$

$$\mu_n = \frac{N_0}{R^n} + \sum_1^{q_2} N_m n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R^{n+m}}$$

$$l'_n = M'_0 R'^n + \sum_1^{q_3} M'_m n(n-1)\dots(n-m+1) R'^{n-m}$$

$$\lambda'_n = \frac{M'_0}{R'^n} + \sum_1^{q_3} M'_m n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R'^{n+m}}$$

$$m'_n = N'_0 R'^n + \sum_1^{q_4} N'_m n(n-1)\dots(n-m+1) R'^{n-m}$$

$$\mu'_n = \frac{N'_0}{R'^n} + \sum_1^{q_4} N'_m n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R'^{n+m}}$$

Si ha dunque il modo, conoscendo la $f(\omega)$ e la $\varphi(\omega)$ di determinare le $a_0, b_0, a_n, \alpha_n, b_n, \beta_n$ e quindi di conoscere le espressioni in serie di u e v purchè queste serie risultino convergenti in egual grado anche nei punti del contorno, il determinante

$$\begin{vmatrix} l_n, & \lambda_n, & -m_n, & \mu_n \\ m_n, & -\mu_n, & l_n, & \lambda_n \\ l'_n, & \lambda'_n, & m'_n, & \mu_n \\ m'_n, & -\mu'_n, & l'_n, & \lambda'_n \end{vmatrix}$$

si mantenga diverso da zero per tutti i valori di n , e inoltre sia

$$\begin{vmatrix} M_0, & N_0 \\ M'_0, & N'_0 \end{vmatrix}$$

pure diverso da zero.

Quando sono verificate queste condizioni si ha che la soluzione del problema è unica.

Allorchè si avesse che il primo determinante scritto, per qualche valore di n , oppure il secondo determinante, si annullasse, allora evidentemente si avrebbe che il problema dato ammetterebbe un numero infinito di soluzioni oppure non ne ammetterebbe alcuna.

XVIII.

Se la u è una funzione monodroma, finita e continua, avente le derivate prime e seconde determinate, finite e continue nell'interno ed al contorno di un campo compreso fra due cerchi concentrici di raggi R e R' , di più la u verifica l'equazione $\Delta^2 u = 0$, si ha:

$$u = a + a' \log \rho + \sum_1^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (a_n \cos n\omega + \beta_n \sin n\omega)$$

$$(m = 1, 2, \dots, q) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} = \pi(m-1) \frac{(-1)^{m-1} a'}{\rho^{m-1}} + \\ + \sum_1^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \rho^{n-m} (a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega) + \\ + \sum_1^{\infty} n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}} (a_n \cos n\omega + \beta_n \sin n\omega), \end{array} \right.$$

$\rho e^{i\omega}$ essendo un punto compreso fra i due cerchi.

Supponendo che queste serie siano convergenti in egual grado in tutto lo spazio compreso fra i due cerchi (il contorno incluso) e posto al contorno del circolo di raggio R

$$M_0 u + \sum_1^q M_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} = f(\omega)$$

e al contorno del circolo di raggio R' :

$$M'_0 u + \sum_1^q M'_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} = \varphi(\omega),$$

si trovano le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} M_0 a + \left(M_0 \log R + \sum_1^q \pi (m-1) \frac{(-1)^{m-1}}{R^{m-1}} M_m \right) a' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega \\ M'_0 a + \left(M'_0 \log R' + \sum_1^q \pi (m-1) \frac{(-1)^{m-1}}{R'^{m-1}} M'_m \right) a' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) d\omega \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} l_n a_n + \lambda_n \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos n\omega d\omega \\ l'_n a_n + \lambda'_n \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \cos n\omega d\omega \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} l_n b_n + \lambda_n \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin n\omega d\omega \\ l'_n b_n + \lambda'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \sin n\omega d\omega \end{aligned} \right\}$$

in cui

$$l_n = M_0 R^n + \sum_1^q n(n-1)\dots(n-m+1) R^{n-m} M_m$$

$$\lambda_n = \frac{M_0}{R^n} + \sum_1^q n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R^{n+m}} M_m$$

$$l'_n = M'_0 R'^n + \sum_1^q n(n-1)\dots(n-m+1) R'^{n-m} M'_m$$

$$\lambda'_n = \frac{M'_0}{R'^n} + \sum_1^q n(n+1)\dots(n+m-1) \frac{(-1)^m}{R'^{n+m}} M'_m.$$

Per conseguenza quando i determinanti

$$\left| \begin{array}{l} M_0, \quad M_0 \log R + \sum_1^q \pi(m-1) \frac{(-1)^{m-1}}{R^{m-1}} M_m \\ M'_0, \quad M'_0 \log R' + \sum_1^q \pi(m-1) \frac{(-1)^{m-1}}{R'^{m-1}} M'_m \end{array} \right|,$$

$$\left| \begin{array}{l} l_n, \quad \lambda_n \\ l'_n, \quad \lambda'_n \end{array} \right|$$

sono sempre differenti da zero si può determinare in un modo solo la u , purchè la serie che risulta sia convergente in egual grado nel campo compreso fra i due cerchi (il contorno incluso). Affinchè la u risulti la parte reale di una funzione monodroma bisogna evidentemente che si abbia:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{f(\omega)}{M_0} - \frac{\varphi(\omega)}{M'_0} \right) d\omega = 0.$$

XIX.

I metodi indicati nei due paragrafi precedenti rendono necessario di verificare la convergenza in egual grado di serie i cui termini sono funzioni di due variabili e che verificano l'equazione $\Delta^2 = 0$. In molti casi perciò potrà riescire utile applicare il seguente teorema:

Se $f_1(s), f_2(s) \dots f_n(s) \dots$ sono funzioni dell'arco s del contorno di un campo C (connesso o no), se la serie

$$\sum_1^\infty f_n(s)$$

è convergente in egual grado per tutti i valori di s , e se è possibile determinare le funzioni $u_1, u_2 \dots u_n \dots$ definite in tutto il campo C finite, continue (il contorno incluso), che assumono al contorno rispettivamente i valori $f_1(s), f_2(s) \dots f_n(s) \dots$ e che soddisfanno l'equazione $\Delta^2 = 0$, saranno verificate le seguenti proprietà:

1.° la serie

$$\sum_1^\infty u_n = V$$

sarà convergente in egual grado entro tutto il campo C ,

2.° si potranno eseguire le derivazioni successive per serie della funzione V in tutti i punti interni a C ed in direzioni qualunque,

3.° la funzione V verificherà l'equazione $\Delta^2 V = 0$ in tutti i punti interni al campo C .

Infatti dovranno esistere due valori s_1 e s_2 di s per cui si ha

$$\sum_p^m f_n(s_1) < \sum_p^m u_n(x, y) < \sum_p^m f_n(s_2),$$

qualunque sia il punto (x, y) interno a C . Ma si può prendere p così grande che si abbia, qualunque sia s e qualunque sia $m > p$, in valore assoluto

$$\sum_p^m f_n(s) < \sigma$$

in cui σ è un numero piccolo ad arbitrio. Avremo quindi in valore assoluto:

$$\sum_p^m u_n(x, y) < \sigma,$$

per tutti i punti (x, y) interni a C . Ciò prova che la serie

$$\sum_1^\infty u_n = V$$

è convergente in egual grado in tutto il campo C .

Preso a considerare un cerchio qualunque c di raggio R , situato tutto internamente a C , e chiamando $u_{n,c}$ e V_c i valori di u_n e V al contorno di esso, avremo in un punto qualunque interno ad esso di coordinate polari r e α riferite al centro del cerchio preso come origine:

$$u_n(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{n,c} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta,$$

quindi per quanto è stato ora dimostrato:

$$\begin{aligned} V(r, \alpha) &= \sum_1^\infty u_n(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_1^\infty \int_0^{2\pi} u_{n,c} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_c \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\theta. \end{aligned}$$

Ne segue, indicando con $\left(\frac{\partial^n}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n}\right)_{r,\alpha}$ la derivata di una funzione nel

punto (r, α) di C presa rispetto alle direzioni $a_1, a_2 \dots a_n$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^n V}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n} \right)_{r, \alpha} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_c \frac{\partial^n}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n} \left(\frac{R^2 + r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} \right) d\theta = \\ &= \sum_1^\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{n,c} \frac{\partial^n}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} \right) d\theta = \sum_1^\infty \left(\frac{\partial^n u_n}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n} \right)_{r, \alpha} \end{aligned}$$

Ciò evidentemente dimostra la seconda e la terza parte del teorema enunciato.

XX.

Può applicarsi il metodo del § XVIII per determinare la funzione φ analoga a quella di GREEN, volendo adoperare la formola (5) (vedi § XIII) nel caso in cui il campo nel quale è definita la U sia quello compreso fra i due cerchi concentrici di raggi R e R' ($R > R'$) e sia s_1 il contorno del circolo di raggio R , s_2 il contorno del circolo di raggio R' .

Ponendo l'origine delle coordinate nel centro comune dei due cerchi, prendendo le coordinate polari ρ e θ , e ricordando che si ha, se r rappresenta la distanza fra i punti (ρ, θ) e (ρ_1, θ_1) :

$$\log r = \log \rho - \sum_1^\infty \frac{\rho_1^n}{n \rho^n} \cos n(\theta - \theta_1)$$

per $\rho > \rho_1$, e

$$\log r = \log \rho_1 - \sum_1^\infty \frac{\rho^n}{n \rho_1^n} \cos n(\theta - \theta_1)$$

per $\rho < \rho_1$, si trova che la φ vien data dalla serie,

$$a + a' \log \rho + \sum_1^\infty a_n \frac{\rho^n}{R^n} \cos n(\theta - \theta_1) + \sum_1^\infty a_n \frac{R'^n}{\rho^n} \cos n(\theta - \theta_1);$$

i cui coefficienti vengono determinati dalle relazioni

$$\left. \begin{aligned} B_1 a + \left(B_1 \log R - \frac{A_1}{R} \right) a' &= B_1 \log R - \frac{A_1}{R} \\ B_2 a + \left(B_2 \log R' + \frac{A_2}{R'} \right) a' &= B_2 \log \rho_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{B_1}{n} - \frac{A_1}{R} \right) a_n + \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R} \right) \frac{R'^n}{R^n} a_n &= \frac{\rho_1^n}{n R^n} \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R} \right) \\ \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'} \right) \frac{R'^n}{R^n} a_n + \left(\frac{B_2}{n} - \frac{A_2}{R'} \right) a_n &= \frac{R'^n}{n \rho_1^n} \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'} \right) \end{aligned} \right\}$$

in cui le B e le A hanno lo stesso significato che venne loro attribuito nel § XIII, quando i determinanti

$$B_1 \left(B_2 \log R' + \frac{A_2}{R'} \right) - B_2 \left(B_1 \log R - \frac{A_1}{R} \right),$$

$$\left(\frac{B_1}{n} - \frac{A_1}{R} \right) \left(\frac{B_2}{n} - \frac{A_2}{R'} \right) - \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R} \right) \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'} \right) \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}$$

si mantengono sempre diversi da zero.

Infatti in questo caso si vede che la serie che dà il valore di φ risulta convergente in egual grado anche per ρ eguale a R e a R' .

Pisa, 15 gennaio 1882.

ERRATA-CORRIGE.

Pag. 6,	2 ^a	linea, invece di:	finito monodromo e continuo	leggi:	finito, monodroma e continua
" 16,	7 ^a	" "	discontinuità	"	discontinuità di seconda specie
" ivi,	21 ^a	" "	derivata	"	derivata finita e atta alla integrazione
" 26,	ultima	" "	$\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$	"	$\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n \dots$
" 27,	14 ^a	" "	$\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$	"	$\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n \dots$
" 54,	3 ^a	" "	$U_{n,c}$	"	$u_{n,c}$

Sur l'intégration des équations différentielles du problème des N corps. (*)

(Mémoire par GÖRAN DILLNER.)

Formules préliminaires.

1. **P**osons une fonction entière et rationnelle de degré ν , à coefficients indéterminés g_0, \dots, g_ν , et à racines simples c_1, \dots, c_ν ,

$$\varphi(X) = g_0 + g_1 X + \dots + g_\nu X^\nu = g_\nu (X - c_1) \cdots (X - c_\nu), \quad (1)$$

et soit $\psi(X)$ une fonction entière et rationnelle dont le degré est inférieur à celui de $\varphi(X)$; posons ensuite le produit à μ facteurs,

$$\Pi(X) = (X - X_1)^{M_1} \cdots (X - X_\mu)^{M_\mu}; \quad (2)$$

alors, d'après ma Note, insérée dans les Comptes-rendus de l'Académie des sciences de Paris, du 31 janvier 1881, ou d'après les formules du n.° 12 de mon Mémoire, qui se trouve dans le tome 18 des Actes de l'Académie des sciences de Stockholm, on aura l'*identité* suivante, la différentiation étant faite par rapport à X_1, \dots, X_μ comme seules variables,

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} M_\rho \frac{\psi(X_\rho) dX_\rho}{\varphi(X_\rho)} = \frac{\psi(c_1)}{\varphi'(c_1)} d \log \frac{G \Pi(c_1)}{P(c_1)} + \dots + \frac{\psi(c_\nu)}{\varphi'(c_\nu)} d \log \frac{G \Pi(c_\nu)}{P(c_\nu)}, \quad (3)$$

où M_1, \dots, M_μ sont des constantes, et où G et $P(X)$ désignent des quantités indépendantes de X_1, \dots, X_μ .

Cela étant, posons un produit rationnel à des zéros *constants* b_1, \dots, b_m , d'ordres positifs respectifs β_1, \dots, β_m , et qui soit d'un degré supérieur à celui

(*) Ce Mémoire, écrit en suédois, a été présenté à l'Académie des sciences de Stockholm, et paraîtra dans les Comptes-rendus de cette Académie.

de $\psi(X)$ mais non supérieur à celui de $\varphi(X)$,

$$P(X) = (X - b_1)^{\beta_1} \dots (X - b_m)^{\beta_m}, \tag{4}$$

et soient M_1, \dots, M_μ des entiers positifs satisfaisant à l'égalité,

$$M_1 + \dots + M_\mu = \nu; \tag{5}$$

ces conditions établies, nous posons en employant (1), (2) et (4) l'équation algébrique suivante, les coefficients g_0, g_1, \dots , dans (1) étant supposés variables,

$$G\Pi(X) = P(X) - \varphi(X), \tag{6}$$

où G est le coefficient de la plus haute puissance de X du membre droit; de cette équation on tire les deux systèmes suivants d'équations,

$$P(X_\rho) = \varphi(X_\rho) \quad (\rho = 1, 2, \dots, \mu), \tag{7}$$

et, d'après (1),

$$G\Pi(c_\rho) = P(c_\rho) \quad (\rho = 1, 2, \dots, \nu). \tag{8}$$

Puisque la fonction $P(X)$ dans (4) est indépendante de X_1, \dots, X_μ , l'identité (3) se changera, à l'aide des équations (7) et (8), en l'équation différentielle suivante,

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu} M_\rho \frac{\psi(X_\rho) dX_\rho}{P(X_\rho)} = 0, \tag{9}$$

équation qui par suite est satisfaite par les racines X_1, \dots, X_μ , d'ordres respectifs M_1, \dots, M_μ , de l'équation (6).

Remarque I. D'après la remarque 1 du n.º 12 de mon Mémoire cité ci-dessus, l'équation différentielle (9) subsiste aussi dans le cas que deux ou plusieurs des racines c_1, c_2, \dots dans (1) sont égales.

) *Remarque II.* En accord de la Note citée ci-dessus, la condition que dans (9) le degré de $P(X)$ soit plus élevé que celui de $\psi(X)$ garantit la possibilité qu'une des racines de $\varphi(X)$ puisse s'agrandir indéfiniment. On pourra aussi déduire l'équation (9) de l'équation (12) de la Note citée, pour $n=1$. À cet effet, on multipliera cette équation par $(-a)$ et fera ensuite croître a indéfiniment; alors, sous les conditions établies ci-dessus, la limite du membre droit s'annulera, et le résultat de différentiation de l'équation ainsi obtenue s'accorde parfaitement à l'équation (9).

2. A cause des racines égales de l'équation (6), les équations suivantes, au nombre de $M_1 + \dots + M_\mu = \nu$ doivent être satisfaites,

$$\left. \begin{aligned} \Pi(X_\rho) = 0, & \quad \left[\begin{array}{l} X = X_\rho \\ \frac{d\Pi(X)}{dX} = 0, \dots, \end{array} \right\} \\ X = X_\rho & \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d^{M_\rho-1}\Pi(X)}{dX^{M_\rho-1}} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} (\rho = 1, 2, \dots, \mu). \quad (10)$$

Mais, en supposant $g_\nu = \text{const.}$, le nombre des coefficients variables $g_0, \dots, g_{\nu-1}$ dans l'équation (6) est aussi ν ; donc nous concluons qu'il n'y a aucune dépendance entre les variables X_1, \dots, X_μ de l'équation différentielle (9).

Donc, nous pouvons énoncer, en accord de la Note et du Mémoire cités, comme une propriété fondamentale des fonctions algébriques: que seulement des différentielles à coefficients algébriques peuvent satisfaire à une équation de la forme (9), les variables étant généralement dépendantes ou indépendantes suivant que ces coefficients sont irrationnels ou rationnels.

Premier système d'équations différentielles fondamentales.

3. Dans mon Mémoire sur le problème des N corps, inséré dans les Actes de la Société royale des sciences d'Upsala pour 1877 (*), j'ai établi dans les formules (48) et (49) un système d'équations de cette forme,

$$\left. \begin{aligned} \sum_N m_r m_s \left\{ \left(\frac{dx_{rs}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy_{rs}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz_{rs}}{dt} \right)^2 + \sigma \int \frac{d(x_{rs}^2 - y_{rs}^2 - z_{rs}^2)}{R_{rs}^3} \right\} &= \text{const.}, \\ \sum_N m_r m_s \left\{ \left(\frac{dy_{rs}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz_{rs}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx_{rs}}{dt} \right)^2 + \sigma \int \frac{d(y_{rs}^2 - z_{rs}^2 - x_{rs}^2)}{R_{rs}^3} \right\} &= \text{const.}, \\ \sum_N m_r m_s \left\{ \left(\frac{dz_{rs}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx_{rs}}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy_{rs}}{dt} \right)^2 + \sigma \int \frac{d(z_{rs}^2 - x_{rs}^2 - y_{rs}^2)}{R_{rs}^3} \right\} &= \text{const.}, \end{aligned} \right\} (11)$$

(*) Cf. le Mémoire intéressant de Mr. E. BETTI, *Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra loro*, Mémoire qui est inséré dans les Annali di Matematica pour 1877.

où x_{rs}, y_{rs}, z_{rs} sont les coordonnées, projetées sur trois directions rectangulaires fixes, du vecteur α_{rs} qui va du corps à masse m_r au corps à masse m_s , tandis que les indices rs sont combinés de cette manière: 12, 13, ..., 1 $\overline{N-1}$, 23, 24, ..., 2 \overline{N} ; ...; $\overline{N-1}$ \overline{N} , combinaison qui donne $\frac{1}{2}N(N-1)$ termes dont la somme est marquée par la lettre N sous le signe de sommation, et où enfin

$$\sigma = m_1 + \dots + m_N, \quad (12)$$

et

$$R_{rs}^2 = x_{rs}^2 + y_{rs}^2 + z_{rs}^2. \quad (13)$$

On obtiendra, en ajoutant à chacune des équations (11) leur somme, multipliée par (-1) , et différentiant les résultats; les équations différentielles suivantes,

$$\left. \begin{aligned} \sum_N m_r m_s \left\{ d \left(\frac{dx_{rs}}{dt} \right)^2 + \sigma \frac{d(x_{rs})^2}{R_{rs}^3} \right\} &= 0, \\ \sum_N m_r m_s \left\{ d \left(\frac{dy_{rs}}{dt} \right)^2 + \sigma \frac{d(y_{rs})^2}{R_{rs}^3} \right\} &= 0, \\ \sum_N m_r m_s \left\{ d \left(\frac{dz_{rs}}{dt} \right)^2 + \sigma \frac{d(z_{rs})^2}{R_{rs}^3} \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

que nous appellerons le *premier système d'équations différentielles fondamentales*.

Différentielles les plus générales qui satisfont au premier système d'équations différentielles fondamentales.

4. Le nombre μ des termes et les entiers positifs M_1, \dots, M_μ de l'équation (9) étant tout arbitraires, nous pouvons poser

$$\mu = \frac{1}{2}N(N-1) \quad (15)$$

et identifier M_1, \dots, M_μ aux produits de masses $m_r m_s$ ($rs = 12, \dots, \overline{N-1}$ \overline{N}), exprimés en nombres entiers; donc, en vertu du énoncé du n.º 2, la forme la plus générale des μ différentielles de la première équation fondamentale (14)

doit être la suivante,

$$d\left(\frac{dx_{rs}}{dt}\right)^2 + \sigma \frac{d(x_{rs})^2}{R_{rs}^2} = \frac{\psi(X_{rs})dX_{rs}}{P(X_{rs})} \quad (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (16)$$

équations qui n'imposent pas aux termes de la première équation (14) d'autres conditions que *d'être des différentielles les plus générales qui puissent satisfaire à cette équation sans lier entre elles les μ variables X_{rs} d'aucune dépendance.*

5. Si l'on désigne par P_1, P_2 et ψ_1, ψ_2 des fonctions de forme identique respectivement à celle des fonctions P et ψ dans (16) mais dépendantes d'autres constantes, on trouvera de la même manière, comme correspondants aux deux dernières équations fondamentales (14), les deux systèmes suivants d'équations,

$$d\left(\frac{dy_{rs}}{dt}\right)^2 + \sigma \frac{d(y_{rs})^2}{R_{rs}^2} = \frac{\psi_1(Y_{rs})dY_{rs}}{P_1(Y_{rs})} \quad (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (17)$$

et

$$d\left(\frac{dz_{rs}}{dt}\right)^2 + \sigma \frac{d(z_{rs})^2}{R_{rs}^2} = \frac{\psi_2(Z_{rs})dZ_{rs}}{P_2(Z_{rs})} \quad (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (18)$$

équations qui donc n'imposent pas aux termes des deux dernières équations (14) d'autres conditions que *d'être des différentielles les plus générales qui puissent satisfaire à ces équations sans lier entre elles les μ variables Y_{rs} ou les μ variables Z_{rs} d'aucune dépendance.*

6. Les intégrales des membres droits des équations (16), (17) et (18) sont de forme algébrique logarithmique connue. Si l'on désigne ces intégrales de cette manière,

$$\left. \begin{aligned} J(X_{rs}) &= \int \frac{\psi(X_{rs})dX_{rs}}{P(X_{rs})} + K_{rs} \\ J_1(Y_{rs}) &= \int \frac{\psi_1(Y_{rs})dY_{rs}}{P_1(Y_{rs})} + K'_{rs} \\ J_2(Z_{rs}) &= \int \frac{\psi_2(Z_{rs})dZ_{rs}}{P_2(Z_{rs})} + K''_{rs} \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (19)$$

où $K_{rs}, K'_{rs}, K''_{rs}$ sont les constantes d'intégration, on pourra écrire les systèmes (16), (17) et (18) sous cette forme intégrée,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d x_{rs}}{dt}\right)^2 + \sigma \int \frac{d(x_{rs})^2}{R_{rs}^3} &= J(X_{rs}) \\ \left(\frac{d y_{rs}}{dt}\right)^2 + \sigma \int \frac{d(y_{rs})^2}{R_{rs}^3} &= J_1(Y_{rs}) \\ \left(\frac{d z_{rs}}{dt}\right)^2 + \sigma \int \frac{d(z_{rs})^2}{R_{rs}^3} &= J_2(Z_{rs}) \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (20)$$

systèmes où les variables X_{rs} , Y_{rs} , Z_{rs} sont indéterminées.

Si l'on pose d'une manière usitée,

$$V_{rs}^2 = \left(\frac{d x_{rs}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d y_{rs}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d z_{rs}}{dt}\right)^2, \quad (21)$$

on obtiendra, en ajoutant les équations (20), le système suivant de μ intégrales,

$$V_{rs}^2 = \frac{2\sigma}{R_{rs}} + J(X_{rs}) + J_1(Y_{rs}) + J_2(Z_{rs}) \quad (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (22)$$

système correspondant à l'intégrale connue des *forces vives* (*).

Second système d'équations différentielles fondamentales.

7. En designant par λ_{rs} , λ'_{rs} et λ''_{rs} des longitudes, définies par les équations,

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \lambda_{rs} &= \frac{y_{rs}}{x_{rs}} = a_{rs} \\ \text{tang } \lambda'_{rs} &= \frac{z_{rs}}{y_{rs}} = b_{rs} \\ \text{tang } \lambda''_{rs} &= \frac{x_{rs}}{z_{rs}} = c_{rs} \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (23)$$

et en différentiant celles-ci, on obtiendra les résultats,

$$\left. \begin{aligned} x_{rs}^2 \frac{d a_{rs}}{dt} &= x_{rs} \frac{d y_{rs}}{dt} - y_{rs} \frac{d x_{rs}}{dt} \\ y_{rs}^2 \frac{d b_{rs}}{dt} &= y_{rs} \frac{d z_{rs}}{dt} - z_{rs} \frac{d y_{rs}}{dt} \\ z_{rs}^2 \frac{d c_{rs}}{dt} &= z_{rs} \frac{d x_{rs}}{dt} - x_{rs} \frac{d z_{rs}}{dt} \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (24)$$

(*) Cfr. la formule (50) de mon Mémoire sur le problème des N corps.

résultats qui, portés dans les équations des aires (36) de mon Mémoire sur le problème des N corps, et différenciés, donnent le système suivant d'équations,

$$\left. \begin{aligned} \sum_N m_r m_s d\left(x_{rs}^2 \frac{da_{rs}}{dt}\right) &= 0, \\ \sum_N m_r m_s d\left(y_{rs}^2 \frac{db_{rs}}{dt}\right) &= 0, \\ \sum_N m_r m_s d\left(z_{rs}^2 \frac{dc_{rs}}{dt}\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

que nous appellerons le *second système d'équations différentielles fondamentales*.

**Différentielles les plus générales qui satisfont au second système
d'équations différentielles fondamentales.**

8. Si l'on désigne par f, f_1, f_2 et χ, χ_1, χ_2 des fonctions de forme identique respectivement à celle des fonctions P et ψ dans (16) mais dépendantes d'autres constantes, on trouvera de la même manière que dans les équations (16), (17) et (18) les trois systèmes suivants, chacun d'eux contenant μ équations,

$$\left. \begin{aligned} d\left(x_{rs}^2 \frac{da_{rs}}{dt}\right) &= \frac{\chi(A_{rs}) dA_{rs}}{f(A_{rs})} \\ d\left(y_{rs}^2 \frac{db_{rs}}{dt}\right) &= \frac{\chi_1(B_{rs}) dB_{rs}}{f_1(B_{rs})} \\ d\left(z_{rs}^2 \frac{dc_{rs}}{dt}\right) &= \frac{\chi_2(C_{rs}) dC_{rs}}{f_2(C_{rs})} \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (26)$$

équations, qui donc n'imposent pas aux termes des trois équations fondamentales (25) d'autres conditions que d'être des différentielles les plus générales qui puissent satisfaire à ces équations sans lier entre elles les μ variables A_{rs} ou les μ variables B_{rs} ou les μ variables C_{rs} d'aucune dépendance.

9. Les intégrales des membres droits des équations (26) étant de forme algébrique logarithmique connue, nous les représentons, comme dans (19), de cette manière,

$$\left. \begin{aligned} i(A_{rs}) &= \int \frac{\chi(A_{rs}) dA_{rs}}{f(A_{rs})} + k_{rs} \\ i_1(B_{rs}) &= \int \frac{\chi_1(B_{rs}) dB_{rs}}{f_1(B_{rs})} + k'_{rs} \\ i_2(C_{rs}) &= \int \frac{\chi_2(C_{rs}) dC_{rs}}{f_2(C_{rs})} + k''_{rs} \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (27)$$

où les quantités k_{rs} , k'_{rs} , k''_{rs} sont les constantes d'intégration; et alors nous pouvons écrire les trois systèmes (26) sous cette forme intégrée,

$$\left. \begin{aligned} x_{rs}^2 \frac{d a_{rs}}{d t} &= i(A_{rs}) \\ y_{rs}^2 \frac{d b_{rs}}{d t} &= i_1(B_{rs}) \\ z_{rs}^2 \frac{d c_{rs}}{d t} &= i_2(C_{rs}) \end{aligned} \right\} (rs = 12, \dots, \overline{N-1}N), \quad (28)$$

systèmes où les variables A_{rs} , B_{rs} , C_{rs} sont indéterminées.

Remarque. Les lieux des N corps étant complètement déterminés par les $(N-1)$ vecteurs $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{1N}$ ou par leurs coordonnées, le corps dont la masse est m_1 étant quelconque, il s'ensuit que des $\mu = \frac{1}{2}N(N-1)$ intégrales, contenues dans chacun des trois systèmes (20) et dans chacun des trois systèmes (28), il n'y aura que $(N-1)$ à coordonnées indépendantes, c'est-à-dire en somme $6(N-1)$ intégrales indépendantes, les autres intégrales devant être déterminées par les relations, entre les coordonnées, qui sont données par la formule (2) de mon Mémoire sur les problème des N corps, $\alpha_{rs} = \alpha_{rp} + \alpha_{ps}$.

Transformation des équations du mouvement.

10. A l'aide des équations (12) et (13) de mon Mémoire sur le problème des N corps, les équations du mouvement, exprimées en les coordonnées x_{rs} , y_{rs} , z_{rs} seulement, prendront la forme suivante,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^{s=N} m_r m_s \left\{ \frac{d^2 x_{rs}}{d t^2} + \sigma \frac{x_{rs}}{R_{rs}^3} \right\} &= 0 \\ \sum_{s=1}^{s=N} m_r m_s \left\{ \frac{d^2 y_{rs}}{d t^2} + \sigma \frac{y_{rs}}{R_{rs}^3} \right\} &= 0 \\ \sum_{s=1}^{s=N} m_r m_s \left\{ \frac{d^2 z_{rs}}{d t^2} + \sigma \frac{z_{rs}}{R_{rs}^3} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} (r = 1, 2, \dots, N). \quad (29)$$

En employant les systèmes (16), (17), (18) et (19), les équations (29) se transformeront en le système suivant de $3N$ équations, les termes à l'indice rr

étant nuls,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^{s=N} m_r m_s \frac{dJ(X_{rs})}{dx_{rs}} &= 0 \\ \sum_{s=1}^{s=N} m_r m_s \frac{dJ_1(Y_{rs})}{dy_{rs}} &= 0 \\ \sum_{s=1}^{s=N} m_r m_s \frac{dJ_2(Z_{rs})}{dz_{rs}} &= 0 \end{aligned} \right\} (r = 1, 2, \dots, N), \quad (30)$$

équations qui donc expriment les *seules* liaisons qui existent entre les μ variables X_{rs} , entre les μ variables Y_{rs} et entre les μ variables Z_{rs} .

Padoue, le 30 mai 1882.

Ueber die Integration der Hermiteschen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung, bei denen die Unendlichkeitsstellen der Integrale von der ersten Ordnung sind.

(Von G. MITTAG-LEFFLER, in Stockholm.)

(Uebersetzung einer in Schwedischer Sprache in Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, tom. XII erschienenen Abhandlung.)

Wie bekannt hat HERMITE die Differentialgleichung

$$y'' - [h + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x]y = 0,$$

in der h eine arbiträre Constante, n einen positive ganze Zahl, vollständig integrirt (*). Diese differentialgleichung wird dadurch characterisirt, dass der doppeltperiodische Coefficient

$$h + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

keine andere Unendlichkeitsstellen als $x = iK'$ und hiermit congruente hat und dass der allgemeine Integral eine Function rationalen Characters ist oder mit anderen Worten eine Function die sich in jedem endlichem Bereich wie eine rationale Function verhält.

In Uebereinstimmung hiermit will ich die Benennung Hermitesche Differentialgleichung der n -ten Ordnung einer linearen, homogenen Differentialgleichung der genannten Ordnung geben, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen der Veränderlichen x sind, welche die beiden Fundamentalperioden $2K$ und $2iK'$ besitzen und unendlich werden immer und nur in $x = iK'$

(*) HERMITE: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 15 octobre 1877 sqq. Die Abhandlung ist noch nicht beendigt.

Annali di Matematica, tomo XI.

und hiermit congruenten Stellen, und deren allgemeiner Integral eine Function rationalen Characters der Veränderlichen x ist.

Nach der Untersuchung des Herrn FUCHS (*) ist eine solche Hermite'sche Differentialgleichung der n -ten Ordnung immer von der Form

$$y^{(n)} + \varphi_2(x)y^{(n-2)} + \dots + \varphi_n(x)y = 0,$$

wo

$$\varphi_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn}^2 x$$

$$\varphi_3(x) = \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 x + \beta_2 D_x \operatorname{sn}^2 x$$

$$\varphi_4(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \operatorname{sn}^2 x + \gamma_2 D_x \operatorname{sn}^2 x + \gamma_3 D_x^2 \operatorname{sn}^2 x$$

.....
.....

und $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 \beta_2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$ gewisse besonderen Bedingungen unterworfenen Constanten sind.

Schon vor paar Jahren war es mir gelungen sowohl die verschiedenen Typen einer Hermiteschen Differentialgleichung gegebener Ordnung darzustellen, wie auch jeden solchen Typus vollständig zu integriren, wenn die Unendlichkeitsstellen des allgemeinen Integrals solche der ersten Ordnung sind. HERMITE hat dargelegt (***) dass dieses Resultat dadurch Bedeutung erhält, weil keine andere Classe von homogenen, linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung integrirt worden sind, als die mit Constanten Coefficienten. Es ist mir doch nachher möglich geworden diese Trage viel weiter zu bringen, und bin ich jetzt im Stande theils alle verschiedenen Typen einer Hermiteschen Differentialgleichung darzustellen, welche einer gegebenen, beliebigen Ordnungszahl der Unendlichkeitsstellen des allgemeinen Integrals entsprechen, theils auch jeden solchen Typus vollständig zu integriren. Was mich am meisten bei der Lösung dieses allgemeineren Problems aufgehalten hat ist der Umstand, dass zwischen den Constanten $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 \beta_2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$ eine grosse Anzahl Bedingungsgleichungen erhalten wird, unter denen doch nicht Alle von einander unabhängig sind, und die Schwierigkeit eine nothwendige und genügende Anzahl Gleichungen auszuwählen, aus welchen dann die Uebrigen abgeleitet werden können.

Wohl habe ich auch früher (***) eine Methode dargestellt, welche die voll-

(*) Comptes rendus, etc., 22 mars 1880, p. 648.

(**) Comptes rendus, etc., 5 avril 1880, p. 764.

(***) Comptes rendus, etc., 2 février 1880.

ständige Integration der noch viel allgemeineren Gruppe von Differentialgleichungen ermöglicht, die jede lineare und homogene Differentialgleichung umfasst, deren allgemeiner Integral eine Function rationalen Characters von der unabhängigen Veränderlichen ist, aber die Form, unter der Integrale hierbei erscheinen, kommt mir zu allgemein vor, um in besonderen Fällen, anders als ausnahmsweise, sich für ein durchgreifendes Studium der Eigenschaften der Integrale zu eignen. Die Integrale der Hermiteschen Differentialgleichungen dagegen werden doppelperiodische Functionen zweiter Ordnung oder gewisse Abarten solcher Functionen.

Sowohl die Darstellung der verschiedenen Typen einer Differentialgleichung gegebener Ordnung wie auch die Integration jedes solchen Typus können, wie ich bei Gelegenheit darlegen werde, auf einige einfache Functionentheoretische Betrachtungen zurückgebracht werden. Auf diesem Wege habe ich auch die Hermite'schen Differentialgleichungen dritten und vierten Grades dargestellt und integrirt, welche der grosse Mathematiker mir die Ehre gemacht hat in seiner Abhandlung: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, zu veröffentlichen (*). Diese Gleichungen und ihre Integrale können doch auch durch eine einfache Rechnung dargestellt werden, deren allgemeinen Gang ich hier andeuten will.

Laut dem von mir in Comptes rendus am 16 Februar 1880 bewiesenen Theoreme (**), welches ein Complement zu dem bemerkenswerthen Satze des Herrn PICARD ist, hat die Hermitesche Differentialgleichung wenigstens ein Integral, das eine doppelperiodische Function zweiter Ordnung ist. Hat jetzt der allgemeine Integral Unendlichkeitsstellen von nur erster Ordnung, muss also die Hermitesche Differentialgleichung nothwendig wenigstens ein Integral von der Form

$$f(x) = \chi(x) C^\lambda$$

(*) Comptes rendus, etc., 22 mars, 5 avril 1880.

(**) Dieses Theorem lautet: „Wenn eine lineare und homogene Differentialgleichung mit doppelperiodischen Coefficienten

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$$

einen eindeutigen Integral besitzt, so hat sie auch immer ein Integral $y = \psi(x)$ welcher nicht nur eindeutig sondern auch so beschaffen ist, dass

$$\psi(x + 2K) = \mu \psi(x); \quad \psi(x + 2iK) = \nu \psi(x)$$

wo μ und ν gewisse Constanten sind. In der genannten Abhandlung in Comptes rendus ist die für die Gültigkeit des Theorems nothwendige Bedingung, dass die Differentialgleichung ein eindeutigen Integral besitzen muss, nicht deutlich genug hervorgehoben.

besitzen, in welcher $\chi(x)$ dieselbe Bedeutung hat wie bei HERMITE, nämlich

$$\chi(x) = \frac{H'(0)H(x + \omega)}{\Theta(\omega)\Theta(x)} C^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}(x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}}$$

Die Constanten $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 \beta_2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$ in der Hermiteschen Differentialgleichung deren allgemeiner Integral Unendlichkeitsstellen von nur erster Ordnung besitzt, müssen also nothwendig von der Art sein, dass die Gleichung

$$f^{(n)}(x) + \varphi_2(x)f^{(n-2)}(x) + \dots + \varphi_n(x) = 0$$

identisch erfüllt wird für wenigstens ein Werthpaar $\lambda, \text{sn } \omega$. Dieses findet aber statt, wenn die doppelperiodische Function zweiter Ordnung:

$$f^{(n)}(x) + \varphi_2(x)f^{(n-2)}(x) + \dots + \varphi_n(x)$$

keine Unendlichkeitsstellen hat. Damit wieder dieses eintreffe, ist erforderlich, dass ein System von $n + 1$ gegebenen Gleichungen erfüllt wird. Zwischen den Constanten $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 \beta_2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$ bestehen also $n - 1$ Relationen, die beiden Uebrigen bestimmen λ und $\text{sn } \omega$.

Innerhalb einer gewissen Umgebung von $x = iK'$ hat man

$$f(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \lambda + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3 + \dots$$

wenn

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(\lambda^2 - \Omega) \\ a_2 &= \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\Omega\lambda}{2} - \frac{\Omega_1}{3} \\ a_3 &= \frac{\lambda^4}{24} - \frac{\Omega\lambda^2}{4} - \frac{\Omega_1\lambda}{3} - \frac{\Omega_2}{8} \\ &\dots \end{aligned}$$

und

$$k^2 \text{sn}^2(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + b_0 + b_2 \varepsilon^2 + b_4 \varepsilon^4 + \dots$$

wo

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1 + k^2}{3} \\ b_2 &= \frac{1 - k^2 + k^4}{15} \\ b_4 &= \frac{2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6}{189} \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Grössen Ω Ω_1 $\Omega_2 \dots$ haben hier dieselbe Bedeutung wie bei HERMITE, nämlich:

$$\begin{aligned} \Omega &= k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{1+k^2}{3} \\ \Omega_1 &= k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega \\ \Omega_2 &= k^4 \operatorname{sn}^4 \omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3} \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45} \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Hermitesche Differentialgleichung dritter Ordnung hat die Form

$$y''' + (\alpha_0 + \alpha_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x) y' + (\beta_0 + \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x + \beta_2 D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x) y = 0.$$

Entwickelt man jetzt die Function

$$f'''(x) + (\alpha_0 + \alpha_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x) f'(x) + (\beta_0 + \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x + \beta_2 D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x) f(x)$$

innerhalb einer Umgebung der Stelle $x = iK'$ in einer Potenzreihe, welche nach den Potenzen von $x - iK' = \varepsilon$ fortschreitet, und bringt man die Coefficienten der verschiedenen negativen Potenzen von ε gleich Null, erhält man vier Gleichungen, welche die nothwendige und genügende Bedingung enthalten, die erfüllt sein muss, wenn die genannte Differentialgleichung einen Integral besitzen soll, dessen sämtliche Unendlichkeitsstellen von der ersten Ordnung sind.

Diese vier Gleichungen sind

$$\begin{aligned} 6 + \alpha_1 + 2\beta_2 &= 0 \\ 2\beta_2 \lambda - \beta_1 &= 0 \\ (\alpha_1 - 2\beta_2) a_1 + \beta_1 \lambda + \alpha_0 - \alpha_1 b_0 &= 0 \\ 2(\alpha_1 - \beta_2) a_2 + \beta_1 a_1 + \beta_0 + \beta_1 b_0 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 6 + \alpha_1 + 2\beta_1 &= 0 \\ 2\beta_2 \lambda - \beta_1 &= 9 \\ 3\lambda^2 + (3 + \alpha_1) k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \alpha_0 - (1 + k^2) &= 0 \\ \lambda[\lambda^2 + 3k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \alpha_0 - 3(1 + k^2)] - (2 + \alpha_1) k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + \beta_0 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man jetzt zwei Relationen zwischen den Constanten $\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1 \beta_2$ und noch zwei Gleichungen, durch welche λ und $\operatorname{sn} \omega$

bestimmt werden. Es kann jetzt nachgewiesen werden, dass wenn man die Constanten noch der Bedingung unterwirft, dass die beiden letztgenannten Gleichungen von drei Paar Werthe λ und $\text{sn } \omega$ erfüllt werden, die verschiedenen Typen der Hermiteschen Differentialgleichung dritter Ordnung erhalten werden, deren allgemeiner Integral Unendlichkeitsstellen von nur erster Ordnung besitzt. Durch eine leicht ausführbare Discussion der oben angeführten vier Gleichungen findet man, dass in zwei verschiedenen Fällen drei Werthpaare λ , $\text{sn } \omega$ denselben genügen. Es giebt also zwei verschiedene Typen der in der Frage stehenden Hermiteschen Differentialgleichungen. Der eine, welcher früher von PICARD gefunden ist (*), ist

$$y''' + (\alpha_0 - 6k^2 \text{sn}^2 x)y' + \beta_0 y = 0,$$

wobei die drei Werthpaare λ und $\text{sn } \omega$ aus den Gleichungen

$$3(\lambda^2 - k^2 \text{sn}^2 \omega) + \alpha_0 - (1 + k^2) = 0$$

$$2\lambda^3 - 2\lambda[3k^2 \text{sn}^2 \omega - (1 + k^2)] - 4k^2 \text{sn } \omega \text{cn } \omega \text{dn } \omega - \beta_0 = 0$$

oder aus folgenden mit diesen aequivalenten

$$8\beta_0 k^2 \text{sn } \omega \text{cn } \omega \text{dn } \omega + M k^2 \text{sn}^2 \omega + N = 0$$

$$2[6k^2 \text{sn}^2 \omega + \alpha_0 - 4(1 + k^2)]\lambda + 3(4k^2 \text{sn } \omega \text{cn } \omega \text{dn } \omega + \beta_0) = 0,$$

abgeleitet werden, worin

$$M = \frac{4}{3} [\alpha_0^2 - 4(1 + k^2)\alpha_0 + 12k^2]$$

$$N = -\frac{4}{27} [16 - 24\alpha_0 + 9\alpha_0^2 - \alpha_0^3 + 3(16 - 16\alpha_0 + 3\alpha_0^2)k^2 + 24(2 - \alpha_0)k^4 + 16k^6] + \beta_0^2.$$

Diese beiden Gleichungen können auch durch folgende drei mit ihnen gleichbedeutenden ersetzt werden

$$\wp \lambda^3 + \mathfrak{M} \lambda^2 + \mathfrak{N} \lambda + \mathfrak{P} = 0$$

$$k^2 \text{sn}^2 \omega = \lambda^2 + \frac{\alpha_0}{3} - \frac{1 + k^2}{3}$$

$$k^2 \text{sn } \omega \text{cn } \omega \text{dn } \omega = -\left[\lambda^3 + \left(\frac{\alpha_0}{2} - (1 + k^2) \right) \lambda + \frac{\beta_0}{4} \right]$$

(*) Comptes rendus, etc., 19 janvier 1880.

wenn

$$\mathfrak{L} = \frac{\beta_0}{2}$$

$$\mathfrak{M} = -\left(\frac{\alpha_0^2}{12} - \frac{1+k^2}{3}\alpha_0 + k^2\right)$$

$$\mathfrak{N} = \frac{\beta_0}{2}\left(\frac{\alpha_0}{2} - (1+k^2)\right)$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\beta_1^2}{16} - \frac{\alpha_0^2}{27} + \frac{2}{9}(1+k^2)\alpha_0^2 - \frac{1+3k^2+k^4}{3}\alpha_0 + \frac{4+21k^2+21k^4+4k^6}{27}.$$

Die zweite Differentialgleichung ist

$$y''' + (\alpha_0 - 3k^2 \operatorname{sn}^2 x)y' + (\beta_0 + \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x - 3k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)y = 0$$

wo

$$3(\alpha_0 - 1 - k^2) + \beta_1^2 = 0.$$

Hierbei erhält man die drei Werthpaare λ , $\operatorname{sn} \omega$ aus den beiden Gleichungen

$$3\lambda + \beta_1 = 0$$

$$k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + 3\lambda k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \beta_0 - 2\lambda(1+k^2) - 2\lambda^3 = 0.$$

Die Hermitesche Differentialgleichung der vierten Ordnung hat die Form

$$y^{IV} + (\alpha_0 + \alpha_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x)y'' + (\beta_0 + \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x + \beta_2 D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x)y' + (\gamma_0 + \gamma_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x + \gamma_2 D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x + \gamma_3 D_x^2 k^2 \operatorname{sn}^2 x)y = 0.$$

Man gewinnt hier fünf Gleichungen, welche die nothwendige und genügende Bedingung dafür enthalten, dass eine solche Differentialgleichung ein Integral von der Form $f(x)$ besitzt.

Diese Gleichungen sind

$$3\gamma_3 + \beta_2 + \alpha_1 + 12 = 0$$

$$6\gamma_3 \lambda - (2\gamma_2 + \beta_1) = 0$$

$$2(3\gamma_3 - \beta_2)a_1 - 2\gamma_2 \lambda + 2\alpha_0 + 2\alpha_1 b_0 + \gamma_1 = 0$$

$$2(3\gamma_3 - 2\beta_2 + \alpha_1)a_2 - (2\gamma_2 - \beta_1)a_1 + \gamma_1 \lambda - \beta_0 - \beta_1 b_0 = 0$$

$$6(\gamma_3 - \beta_2 + \alpha_1)a_3 - 2(\gamma_2 - \beta_1)a_2 + \gamma_1 a_1 + \gamma_0 + \gamma_1 b_0 + 2(\gamma_3 - \beta_2 + \alpha_1)b_2 = 0.$$

Hier hat man also drei Relationen zwischen den Constanten $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und zwei Relationen, durch welche λ und $\operatorname{sn} \omega$ bestimmt werden. Es kann nachgewiesen werden, dass, wenn man die Constanten $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ noch

der Bedingung unterwirft, dass vier Werthpaare λ , $\text{sn } k$ den beiden letztgenannten Relationen genügen sollen, sämtliche Typen der Hermiteschen Differentialgleichung vierter Ordnung erhalten werden, deren allgemeiner Integral Unendlichkeitsstellen von nur erster Ordnung hat. Eine leicht ausführbare Discussion unserer fünf Gleichungen zeigt, dass vier verschiedene Typen erhalten werden.

Sie sind

A.

$$y^{iv} + (\alpha_0 - 12k^2 \text{sn}^2 x)y'' + \beta_0 y' + (\gamma_0 + \gamma_1 k^2 \text{sn}^2 x)y = 0,$$

wo

$$2\alpha_0 - 8(1 + k^2) + \gamma_1 = 0.$$

Die vier Werthpaare λ und $\text{sn } \omega$ werden aus den beiden Gleichungen

$$4\lambda^3 - (12\Omega + \gamma_1)\lambda - 8\Omega_1 + \beta_0 = 0$$

$$90\lambda^4 - (540\Omega + 15\gamma_1)\lambda^2 - 720\Omega_1\lambda - 270\Omega_2 + 15\gamma_1\Omega -$$

$$- 30\gamma_0 - 10(1 + k^2)\gamma_1 + 48(1 - k^2 + k^4) = 0$$

erhalten (*).

Diese Gleichungen können durch die beiden hiermit äquivalenten (**)

$$L_0 k^4 \text{sn}^4 \omega + L_1 k^2 \text{sn } \omega \text{cn } \omega \text{dn } \omega + L_2 k^2 \text{sn}^2 \omega + L_3 = 0$$

$$\varrho\lambda + \varrho_1 = 0$$

ersetzt werden, wo

$$L_0 = - \left[\frac{5}{16} \gamma_1^2 - 3(1 + k^2)\gamma_1 - 9\gamma_0 \right]^2 + \frac{27}{4} \beta_0^2 \gamma_1$$

$$L_1 = - \beta_0 \left[\frac{1}{16} \gamma_1^3 - 9 \left(\frac{1}{3} (1 + k^2)\gamma_1 + \gamma_0 - 4(1 - k^2 + k^4) \right) \gamma_1 - \frac{27}{4} \beta_0^2 \right]$$

$$L_2 = \frac{1}{512} \gamma_1^5 + \frac{11}{128} (1 + k^2) \gamma_1^4 + \left[\frac{1}{16} \gamma_0 - \frac{45 + 57k^2 + 45k^4}{24} \right] \gamma_1^3 -$$

$$- \frac{1}{2} (1 + k^2) \left[\frac{19}{2} \gamma_0 - 18 - 3k^2 - 18k^4 \right] \gamma_1^2 -$$

(*) Die letztere dieser beiden Gleichungen ist in Hermite's Abhandlung in « Comptes rendus, etc., 5 Avril 1880 » durch einen Rechenfehler entstellt.

(**) Die mühsamen Eliminationen in diesem und den beiden folgenden Fällen sind durch einen meiner Eleven, Herrn E. A. STENBERG, Studirender an der Universität zu Helsingfors, ausgeführt.

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{3}{2} \gamma_0^2 - (30 + 78k^2 + 30k^4) \gamma_0 + 72(1 - 4k^2 + k^4) k^2 \right] \gamma_1 + \\
 & + 54(1 + k^2) \gamma_0^2 - 72(2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6) \gamma_0 - \\
 & - \left[\frac{9}{128} \gamma_1^2 + \frac{45}{8} (1 + k^2) \gamma_1 + 27 \left(\frac{1}{8} \gamma_0 + 1 - k^2 + k^4 \right) \right] \beta_0^2 \\
 L_3 = & - \frac{1}{512} (1 + k^2) \gamma_1^5 - \frac{1}{256} [\gamma_0 - 3(1 - k^2)^2] \gamma_1^4 + \\
 & + \frac{1}{16} (1 + k^2) (\gamma_0 + 12k^2) \gamma_1^3 + \frac{1}{8} (\gamma_0 + 12k^2) [\gamma_0 - 3(1 - k^2)^2] \gamma_1^2 - \\
 & - \frac{1}{2} (1 + k^2) (\gamma_0 + 12k^2)^2 \gamma_1 - (\gamma_0 + 12k^2)^3 + 3(1 + k^2)^2 (\gamma_0 + 12k^2)^2 - \\
 & - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{64} \gamma_1^3 - \frac{15}{16} (1 + k^2) \gamma_1^2 - \frac{9}{4} (\gamma_0 + 12k^2) \gamma_1 - 9(1 + k^2) (\gamma_0 + 12k^2) \right] \beta_0^2 + \\
 & + \frac{27}{256} \beta_0^4
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E} = & k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega \left[108 \left(\frac{7}{48} \gamma_1^2 - (1 + k^2) \gamma_1 - 3\gamma_0 - 6(1 - k^2 + k^4) \right) k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \right. \\
 & + \frac{243}{8} \beta_0^2 - \frac{5}{16} \gamma_1^3 - \frac{9}{4} (1 + k^2) \gamma_1^2 + 108k^2 \gamma_1 + 9\gamma_0 \gamma_1 + \\
 & \left. + 108(1 + k^2) \gamma_0 - 216(1 - 3k^2 - 3k^4 + k^6) \right] + \\
 & + \beta_0 \left[243k^6 \operatorname{sn}^6 \omega + 81 \left(\frac{\gamma_1^4}{4} - 3(1 + k^2) \right) k^4 \operatorname{sn}^4 \omega + \right. \\
 & + 3 \left(\frac{\gamma_1^2}{32} - 6(1 + k^2) \gamma_1 - 9(4 - 13k^2 + 4k^4) - \frac{9}{2} \gamma_0 \right) k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{\gamma_1^3}{128} + \\
 & + \frac{3}{32} (1 + k^2) \gamma_1^2 + \frac{9}{4} (1 + 4k^2 + k^4) \gamma_1 + \frac{3}{8} \gamma_0 \gamma_1 + \frac{9}{2} (1 + k^2) \gamma_0 + \\
 & \left. + \frac{27}{64} \beta_0^2 + 54k^2 (1 + k^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_1 = & 27 \left[3\gamma_0 - \frac{13}{48} \gamma_1^2 + (1 + k^2) \gamma_1 + 24(1 - k^2 + k^4) \right] k^6 \operatorname{sn}^6 \omega + \\
 & + \left[\frac{35}{64} \gamma_1^3 + \frac{81}{16} (1 + k^2) \gamma_1^2 - 27(2 + k^2 + 2k^4) \gamma_1 - \left(\frac{27}{4} \gamma_1 + 81(1 + k^2) \right) \gamma_0 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -108(4 + 3k^2 + 3k^4 + 4k^6) \Big] k^4 \operatorname{sn}^4 \omega - \\
& - \left[27\beta_0 k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + \frac{9}{16} \beta_0^2 \right] \left[9k^4 \operatorname{sn}^4 \omega - \left(\frac{\gamma_1^4}{2} + 6(1 + k^2) \right) k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \right. \\
& + \gamma_0 + \frac{1 + k^2}{2} \gamma_1 - 3(1 - k^2)^2 \Big] - \\
& - \left[\frac{\gamma_1^4}{128} + \frac{19}{32} (1 + k^2) \gamma_1^3 - \frac{3}{16} (15 - 14k^2 + 15k^4) \gamma_1^2 - \right. \\
& - 9(3 + 5k^2 + 5k^4 + 3k^6) \gamma_1 - \\
& - 9\gamma_0^2 + \left(\frac{11}{16} \gamma_1^2 - \frac{21}{2} (1 + k^2) \gamma_1 - 9(7 + 2k^2 + 7k^4) \right) \gamma_0 + \\
& + 216(1 - 4k^2 + 2k^4 - 4k^6 + k^8) \Big] k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \\
& + \frac{1 + k^2}{128} \gamma_1^4 + \frac{3}{64} (1 + 6k^2 + k^4) \gamma_1^3 - \frac{3}{16} (3 + 5k^2 + 5k^4 + 3k^6) \gamma_1^2 - \\
& - 9(1 + 6k^2 + k^4) k^2 \gamma_1 - \left(\frac{\gamma_1^4}{4} + 3(1 + k^2) \right) \gamma_0^2 + \\
& + \left(\frac{\gamma_1^3}{64} + \frac{1 + k^2}{16} \gamma_1^2 - \frac{3}{4} (1 + 10k^2 + k^4) \gamma_1 + 9(1 - 5k^2 - 5k^4 + k^6) \right) \gamma_0 + \\
& + 108k^2(1 - k^2 - k^4 + k^6).
\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen sind auch mit den drei folgenden gleichbedeutend:

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
k^2 \operatorname{sn}^2 \omega = & \frac{1}{9\beta_0 \lambda + \frac{2}{3} \gamma_1^2 - 8(1 + k^2) \gamma_1 - 24\gamma_0 + 24(1 - k^2 + k^4)} \left[9\beta_0 \lambda^3 + \right. \\
& + \left(\frac{\gamma_1^2}{24} - 2(1 + k^2) \gamma_1 - 6\gamma_0 + 24(1 - k^2 + k^4) \right) \lambda^2 - \\
& - \left(\frac{11}{4} \gamma_1 - 3(1 + k^2) \right) \beta_0 \lambda + \frac{27}{8} \beta_0^2 + \frac{2}{3} (1 + k^2) \gamma_1^2 + \\
& \left. + \left(\frac{4}{3} \gamma_0 - 8(1 + k^4) \right) \gamma_1 - 8(1 + k^2) \gamma_0 + 24(1 - k^2 - k^4 + k^6) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega = & \frac{1}{9\beta_0 \lambda + \frac{2}{3} \gamma_1^2 - 8(1 + k^2) \gamma_1 - 24\gamma_0 + 24(1 - k^2 + k^4)} \left[-9\beta_0 \lambda^4 + \right. \\
& \left. + \left(\frac{13}{48} \gamma_1^2 - (1 + k^2) \gamma_1 - 3\gamma_0 - 24(1 - k^2 + k^4) \right) \lambda^3 + 3\beta_0 \gamma_1 \lambda^2 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\gamma_1^3}{12} - \frac{1+k^2}{3} \gamma_1^2 - [\gamma_0 + 5(1-k^2+k^4)] \gamma_1 + \frac{63}{16} \beta_0^2 + \right. \\
 & \left. + 12(2-3k^2-3k^4=2k^6) \lambda + \right. \\
 & \left. + \frac{\beta_0 \gamma_1^2}{12} - \left((1+k^2) \gamma_1 + 3\gamma_0 - 3(1-k^2+k^4) \right) \beta_0 \right]
 \end{aligned}$$

wenn

$$A_0 = \left(\frac{5}{16} \gamma_1^2 - 3(1+k^2) \gamma_1 - 9\gamma_0 \right)^2 - \frac{27}{4} \beta_0^2 \gamma_1$$

$$A_1 = \beta_0 \left(-\frac{\gamma_1^3}{16} + 3(1+k^2) \gamma_1^2 + 9[\gamma_0 - 4(1-k^2+k^4)] \gamma_1 + \frac{27}{4} \beta_0^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{\gamma_1^5}{32} + \frac{5}{8} (1+k^2) \gamma_1^4 + \frac{15\gamma_0 - (33+47k^2+33k^4)}{8} \gamma_1^3 + \\
 & + \left[\frac{279}{128} \beta_0^2 - 20(1+k^2) \gamma_0 + \frac{18+15k^2+15k^4+18k^6}{2} \right] \gamma_1^2 + \\
 & + \left[-30\gamma_0^2 + 42(1-k^2+k^4) \gamma_0 - \frac{9}{8} (1+k^2) \beta_0^2 + 72(k^2-4k^4+k^6) \right] \gamma_1 + \\
 & + 72(2-3k^2-3k^4+2k^6) \gamma_0 - 27 \left(\frac{\gamma_0}{8} - (1-k^2+k^4) \right) \beta_0^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 = & \beta_0 \left[\frac{\gamma_1^4}{16} - \frac{7}{4} (1+k^2) \gamma_1^3 - \frac{1}{4} (21\gamma_0 - 57 + 9k^2 - 57k^4) \gamma_1^2 + \right. \\
 & + \left(24(1+k^2) \gamma_0 - \frac{81}{16} \beta_0^2 - 36(1-k^2-k^4+k^6) \right) \gamma_1 + 36\gamma_0^2 - \\
 & \left. - 36(1-k^2+k^4) \gamma_0 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 = & \left(-\frac{\beta_0^2}{32} + 2k^2(1+k^2) \right) \gamma_1^3 + \left(4(1+3k^2+k^4) \gamma_0 + \right. \\
 & \left. + \frac{9}{8} (1+k^2) \beta_0^2 - 24(k^2+k^6) \right) \gamma_1^2 + \\
 & + \left[16(1+k^2) \gamma_0^2 - 24(2+k^2+k^4+2k^6) \gamma_0 + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{27}{8} \gamma_0 - \frac{81}{8} (1-k^2+k^4) \right) \beta_0^2 + 72(k^2+k^6) \right] \gamma_1 + \\
 & + \left(\frac{27}{16} \beta_0^2 + 4(2-3k^2-3k^4+2k^6) \right)^2 + 16\gamma_0^3 - 96(1-k^2+k^4) \gamma_0^2 + \\
 & + 144(1-k^2+k^4)^2 \gamma_0 - 64(1-k^2+k^4)^3.
 \end{aligned}$$

B.

$$y^{IV} + (\alpha_0 - 8k^2 \operatorname{sn}^2 x)y'' + (\beta_0 + \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x - 8k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)y' + (\gamma_0 + \gamma_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x - \beta_1 k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)y = 0$$

wo

$$4\gamma_1 = \beta_1^2; \quad \beta_1^3 + 8[\alpha_0 - 2(1 + k^2)]\beta_1 + 16\beta_0 = 0.$$

Man erhält die vier Wertpaare λ , $\operatorname{sn} \omega$ aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 48(\lambda^2 - \Omega) + 12\beta_1\lambda + 24\alpha_0 + 3\beta_1^2 - 64(1 + k^2) &= 0 \\ 120\lambda^4 - 720\Omega\lambda^2 - 960\Omega_1\lambda - 360\Omega_2 - 60\beta_1(\lambda^3 - 3\Omega\lambda - 2\Omega_1) - \\ - 15\beta_1^2(\lambda^2 - \Omega) - 120\gamma_0 - 10(1 + k^2)\beta_1^2 + 64(1 - k^2 + k^4) &= 0 \end{aligned}$$

oder aus den beiden mit diesen äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} M_0 k^4 \operatorname{sn}^4 \omega + M_1 k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + M_2 k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + M_3 &= 0 \\ \mathfrak{M}\lambda + \mathfrak{M}_1 &= 0 \end{aligned}$$

wo

$$M_0 = \frac{7}{256}\beta_1^4 - \frac{1}{2}(1 + k^2)\beta_1^2 + \frac{5}{2}\beta_0\beta_1 - 16\gamma_0$$

$$\begin{aligned} M_1 = -\frac{1}{256}\beta_1^5 + \frac{1}{4}(1 + k^2)\beta_1^3 - \frac{1}{4}\beta_0\beta_1^2 + 4[\gamma_0 - (1 - k^2)^2]\beta_1 + \\ + 8(1 + k^2)\beta_0 + 12\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = -\frac{1}{2048}\beta_1^6 - \frac{3}{64}(1 + k^2)\beta_1^4 - \frac{7}{128}\beta_0\beta_1^3 - \frac{1}{8}(\gamma_0 - 9 + 10k^2 - 9k^4)\beta_1^2 - \\ - \frac{13}{4}(1 + k^2)\beta_0\beta_1 - \frac{11}{8}\beta_0^2 + 8(1 + k^2)[\gamma_0 - (1 - k^2)^2] - \\ - 8[\gamma_0 + (1 + k^2)^2]\frac{\beta_0}{\beta_1} + 8(1 + k^2)\frac{\beta_0^2}{\beta_1^2} + 8\frac{\beta_0^3}{\beta_1^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 = \frac{1}{2048}(1 + k^2)\beta_1^6 + \frac{1}{256}(\gamma_0 + 3 + 10k^2 + 3k^4)\beta_1^4 + \frac{7}{128}(1 + k^2)\beta_0\beta_1^3 + \\ + \frac{1}{128}\beta_0^2\beta_1^2 + \frac{1}{8}(3\gamma_0 + 5 + 22k^2 + 5k^4)\beta_0\beta_1 - [\gamma_0 - (1 - k^2)^2]^2 + \\ + \frac{5}{4}(1 + k^2)\beta_0^2 + \left[\frac{5}{8}\beta_0^2 + 4(1 + k^2)[\gamma_0 - (1 - k^2)^2]\right]\frac{\beta_0}{\beta_1} + \\ + 2(\gamma_0 - 3 - 2k^2 - 3k^4)\frac{\beta_0^2}{\beta_1^2} - 4(1 + k^2)\frac{\beta_0^3}{\beta_1^3} - \frac{\beta_0^4}{\beta_1^4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \beta_0 - \frac{1+k^2}{2} \beta_1 - \frac{5}{64} \beta_1^3 \\ \mathfrak{M}_1 &= -8k^4 \operatorname{sn}^4 \omega + \beta_1 k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + \\ &+ \left(\frac{7}{16} \beta_1^2 - 4 \frac{\beta_0}{\beta_1} + 4(1+k^2) \right) k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \frac{\beta_0^2}{\beta_1^2} + \\ &+ \frac{5}{16} \beta_0 \beta_1 + 2(1+k^2) \frac{\beta_0}{\beta_1} - \frac{1+k^2}{8} \beta_1^2 - \gamma_0 + (1-k^2)^2. \end{aligned}$$

Statt diesen beiden Gleichungen in λ und $\operatorname{sn} \omega$ können auch folgende drei aufgestellt werden

$$B_0 \lambda^4 + B_1 \lambda^3 + B_2 \lambda^2 + B_3 \lambda + B_4 = 0$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 \omega = \lambda^2 + \frac{\beta_1}{4} \lambda + \frac{\beta_1^2}{16} + \frac{\alpha_0}{2} - (1+k^2)$$

$$\begin{aligned} k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega &= \frac{1}{8\lambda - \beta_1} \left[-8\lambda^4 - 2\beta_1 \lambda^3 - \right. \\ &- \left(\frac{9}{16} \beta_1^2 + 6\alpha_0 - 16(1+k^2) \right) \lambda^2 + \frac{\beta_1^3}{32} \lambda - \frac{\beta_1^4}{256} - \\ &\left. - \frac{\alpha_0 \beta_1^2}{8} + \frac{1+k^2}{4} \beta_1^2 - \frac{3}{4} \alpha_0^2 + 4(1+k^2) \alpha_0 - \gamma_0 - 4(1+3k^2+k^4) \right] \end{aligned}$$

wo

$$B_0 = \frac{33}{256} \beta_1^4 + \left(\frac{\alpha_0}{4} - 2(1+k^2) \right) \beta_1^2 + 16\gamma_0$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{15}{256} \beta_1^5 + \left(\frac{7}{8} \alpha_0 - 2(1+k^2) \right) \beta_1^3 + \\ &+ [3\alpha_0^2 - 16(1+k^2)\alpha_0 + 4\gamma_0 + 16(1+3k^2+k^4)] \beta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{27}{2048} \beta_1^6 + \frac{3}{32} (3\alpha_0 - 7(1+k^2)) \beta_1^4 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{51}{16} \alpha_0^2 - 15(1+k^2)\alpha_0 + \frac{9}{4} \gamma_0 + 15 + 37k^2 + 15k^4 \right) \beta_1^2 + \\ &+ \alpha_0^3 - 8(1+k^2)\alpha_0^2 + 4[3\gamma_0 + 4(1+3k^2+k^4)] \alpha_0 - \\ &- 32(1+k^2)\gamma_0 - 64k^2(1+k^2) \end{aligned}$$

$$B_3 = \frac{3}{4096} \beta_1^7 + \frac{1}{64} \left(\frac{5}{2} \alpha_0 - 7(1+k^2) \right) \beta_1^5 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{33}{32} \alpha_0^2 - \frac{11}{2} (1+k^2) \alpha_0 - \frac{\gamma_0}{8} + 7 + 15k^2 + 7k^5 \right) \beta_1^3 + \\ + 2 \left[\alpha_0^3 - 8(1+k^2) \alpha_0^2 + 4(5 + 11k^2 + 5k^4) \alpha_0 - 8(2 + 7k^2 + 7k^4 + 2k^6) \right] \beta_1$$

$$B_4 = - \frac{15}{65536} \beta_1^8 - \frac{1}{512} \left(\frac{5}{2} \alpha_0 - 7(1+k^2) \right) \beta_1^6 - \\ - \frac{1}{32} \left[\frac{13}{16} \alpha_0^2 - 5(1+k^2) \alpha_0 - \frac{\gamma_0}{4} + 7 + 15k^2 + 7k^4 \right] \beta_1^4 + \\ + \left(\frac{\alpha_0^3}{16} - \frac{3}{8} (1+k^2) \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_0}{2} + 1 + 3k^2 + k^4 \right) \alpha_0 - \frac{1+k^2}{2} \gamma_0 - k^3(1+k^2) \right) \beta_1^2 + \\ + \left(\frac{3}{4} \alpha_0^2 - 4(1+k^2) \alpha_0 + \gamma_0 + 4(1 + 3k^2 + k^4) \right)^2.$$

C.

$$y^{IV} + (\alpha_0 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 x) y'' + (\beta_0 - 12k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x) y' + (\gamma_0 + \gamma_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x) y = 0$$

wo

$$\gamma_1^2 + 2[\alpha_0 - 4(1+k^2)]\gamma_1 - 12\gamma_0 = 0.$$

Hier erhält man die vier Werthpaare λ , $\operatorname{sn} \omega$ aus den beiden Gleichungen

$$6(\lambda^2 - \Omega) + 2\alpha_0 + \gamma_1 - 4(1+k^2) = 0$$

$$2\lambda^3 - (6\Omega - \gamma_1)\lambda - 4\Omega_1 - \beta_0 = 0$$

oder aus den beiden mit diesen gleichbedeutenden Gleichungen

$$N_0 k^4 \operatorname{sn}^4 \omega + N_1 k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + N_2 k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + N_3 = 0$$

$$\Re \lambda + \Re_1 = 0$$

in welchen

$$N_0 = 2\gamma_1$$

$$N_1 = 2\beta_0$$

$$N_2 = \frac{\alpha_0^2 - \gamma_1^2}{3} - \frac{4}{3} (1+k^2) (\alpha_0 + \gamma_1) + 4k^2$$

$$N_3 = \frac{\alpha_0^3}{27} - \frac{\alpha_0^2 \gamma_1}{18} - \frac{1+k^2}{3} \alpha_0^2 + \frac{2}{9} (1+k^2) [\gamma_1 + 4(1+k^2)] \alpha_0 + \\ + \frac{1}{54} [\gamma_1 + 6(1+k^2)] \gamma_1^2 + \frac{\beta_0^2}{4} - \frac{16}{27} (1+k^2)^3$$

$$\mathfrak{R} = 2k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + 2 \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{1}{2} \gamma_1$$

$$\mathfrak{R}_1 = 2k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + \frac{\beta_0}{2}.$$

Statt diesen beiden können auch folgende drei Gleichungen aufgestellt werden:

$$\mathfrak{C}_0 \lambda^4 + \mathfrak{C}_1 \lambda^3 + \mathfrak{C}_2 \lambda^2 + \mathfrak{C}_3 \lambda + \mathfrak{C}_4 = 0$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 \omega = \lambda^2 + \frac{\alpha_0}{3} + \frac{\gamma_1}{6} - \frac{1+k^2}{3}$$

$$k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega = - \left[\lambda^3 + \left(\frac{\alpha_0}{2} - (1+k^2) \right) \lambda + \frac{\beta_0}{4} \right]$$

wenn

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{\gamma_1}{2}$$

$$\mathfrak{C}_1 = -\frac{\beta_0}{2}$$

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{\alpha_0^2}{12} - \frac{1+k^2}{3} \alpha_0 + \frac{\gamma_1^2}{12} + \frac{\alpha_0 \gamma_1}{3} - \frac{2(1+k^2)}{3} \gamma_1 + k^2$$

$$\mathfrak{C}_3 = -\frac{\beta_0}{2} \left(\frac{\alpha_0}{2} - (1+k^2) \right)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_4 = & -\frac{\beta_0^2}{16} + \frac{1}{27} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_1}{2} \right)^3 - \frac{2(1+k^2)}{9} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_1}{2} \right)^2 + \\ & + \frac{1+3k^2+k^4}{3} \left(\alpha_0 + \frac{\gamma_1}{2} \right) - \frac{4+21k^2+21k^4+4k^6}{27}. \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned} y^{IV} + (\alpha_0 - 4k^2 \operatorname{sn}^2 x) y'' + (\beta_0 + \beta_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x - 8k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x) y' + \\ + (\gamma_0 + \gamma_1 k^2 \operatorname{sn}^2 x + \beta_1 k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - 8k^4 \operatorname{sn}^4 x) y = 0 \end{aligned}$$

wo

$$8[\alpha_0 - 4(1+k^2)] + 4\gamma_1 + \beta_1^2 = 0$$

$$4\beta_0 + \beta_1[\gamma_1 - 4(1+k^2)] = 0.$$

Man erhält die vier Werthpaare λ , $\operatorname{sn} \omega$ aus den Gleichungen

$$4\lambda + \beta_1 = 0$$

$$90\lambda^4 - 15(\lambda^2 - \Omega)[3\gamma_1 - 8(1 + k^2)] - 360\Omega\lambda^2 - 360\Omega_1\lambda - \\ - 90\Omega_2 - 90\gamma_0 - 30(1 + k^2)\gamma_1 + 16(11 + 4k^2 + 11k^4) = 0$$

oder aus folgenden

$$4\lambda + \beta_1 = 0$$

$$k^4 \operatorname{sn}^4 \omega - \beta_1 k^2 \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega + \left[\frac{\beta_1^2}{4} - \frac{\gamma_1}{2} + \frac{2(1 + k^2)}{3} \right] k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \\ - \frac{\beta_1^4}{256} + \frac{\beta_1^2 \gamma_1}{32} + \gamma_0 + \frac{1 + k^2}{6} (3\gamma_1 - \beta_1^2) - \frac{23 + 10k^2 + 23k^4}{9} = 0.$$

Sulla classe di equazioni differenziali lineari considerate nella precedente Memoria del sig. Mittag-Leffler.

(Nota di F. BRIOSCHI, in Milano.)

1.° Posto:

$$v = \sqrt{x - \xi} \cdot e^{\frac{1}{2}Z(x)} \tag{1}$$

nella quale:

$$Z(x) = \int \frac{2\mu(x - \xi) - \sqrt{\varphi(\xi)}}{(x - \xi)\sqrt{\varphi(x)}}$$

e:

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

si ottiene tosto la:

$$v' \sqrt{\varphi(x)} = A_1 v$$

essendo:

$$A_1 = \mu + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(\xi)}}{x - \xi}.$$

Sia ora:

$$\frac{x - e_1}{e_3 - e_1} = k^2 \operatorname{sn}^2 u; \quad \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1} = k^2$$

risulterà, come è noto, che:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{e_3 - e_1}}$$

e quindi:

$$\frac{dv}{du} = \frac{A_1 v}{\sqrt{e_3 - e_1}}$$

ed in generale:

$$\frac{d^r v}{d u^r} = \frac{A_r v}{(e_3 - e_1)^{\frac{r}{2}}} \quad (2)$$

indicando con A_r la espressione:

$$A_r = A_1 A_{r-1} + A'_{r-1} \sqrt{\varphi(x)}.$$

La equazione differenziale lineare dell'ordine ennesimo considerata nella Memoria precedente si trasforma quindi nella seguente:

$$A_n + p_2 A_{n-2} + p_3 A_{n-3} + \dots + p_{n-1} A_1 + p_n = 0 \quad (3)$$

ed in questa i coefficienti p_2, p_3, \dots, p_n sono funzioni intere e razionali di x e di $\sqrt{\varphi(x)}$ della forma seguente:

$$p_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad p_3 = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \sqrt{\varphi(x)} \dots$$

$$p_r = k_0 + k_1 x + k_2 \sqrt{\varphi(x)} + k_3 x^2 + k_4 x \sqrt{\varphi(x)} + \dots + k_{r-1} x^{\frac{r}{2}} \quad (r \text{ pari})$$

$$p_r = k_0 + k_1 x + k_2 \sqrt{\varphi(x)} + k_3 x^2 + k_4 x \sqrt{\varphi(x)} + \dots + k_{r-1} x^{\frac{r-3}{2}} \sqrt{\varphi(x)} \quad (r \text{ dispari}).$$

2.° Le espressioni A_1, A_2, A_3, \dots furono già da me considerate in una Nota del luglio 1880 pubblicata in questi Annali (tomo 10, pag. 74), nella quale ho dimostrato che una qualsivoglia di esse A_r può esprimersi come segue:

$$A_r = P_r A_1 + Q_r \quad (4)$$

essendo P_r, Q_r due polinomi in x dei gradi $\frac{r-1}{2}, \frac{r-3}{2}$ se r è dispari; e dei gradi $\frac{r-2}{2}, \frac{r}{2}$ se r è pari.

I valori dei polinomi P_r, Q_r si ponno dedurre da quelli di P_{r-1}, Q_{r-1} e loro derivate rispetto ad x , nel modo seguente. Pongasi per brevità:

$$\left. \begin{aligned} a &= 3(\xi - \mu^2), & b &= 2\mu^3 - 6\mu\xi - 2\sqrt{\varphi(\xi)} \\ c &= a^2 - 6b\mu - 3g_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dalle quali eliminando le ξ, μ si ottiene la:

$$27b^2 - 16ac + 12ab\mu - 36c\mu^2 - 12g_2a + 108g_3 = 0 \quad (6)$$

già data nella Nota citata più sopra [equazione (6)]. Ora essendo:

$$\sqrt{\varphi(x)} = pA_1 - q; \quad A_1 \sqrt{\varphi(x)} = qA_1 + r$$

nelle quali:

$$p = 2\left(x - \mu^2 - \frac{1}{3}a\right); \quad q = 2\mu x + \frac{1}{3}a\mu + \frac{1}{2}b$$

$$r = 2x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{18}a^2 + \frac{1}{6}c$$

e:

$$pr + q^2 = \varphi(x)$$

si ottengono le:

$$P_r = 2\mu P_{r-1} + Q_{r-1} + qP'_{r-1} + pQ'_{r-1}$$

$$Q_r = \left(2x + \frac{1}{3}a\right)P_{r-1} + rP'_{r-1} - qQ'_{r-1}$$

e siccome:

$$P_2 = 2\mu, \quad Q_2 = 2x + \frac{1}{3}a$$

si avranno di seguito i valori di P_3, Q_3, P_4, Q_4 , ecc.

Analogamente posto:

$$A_r \sqrt{\varphi(x)} = L_r A_1 + M_r \tag{7}$$

i polinomi L_r, M_r saranno dei gradi $\frac{r+1}{2}, \frac{r+3}{2}$ se r è dispari, ed il primo del grado $\frac{r+2}{2}$, il secondo del grado $\frac{r}{2}$, se r è pari. Essi potranno evidentemente esprimersi in funzione di P_r, Q_r nel modo seguente:

$$L_r = qP_r + pQ_r, \quad M_r = rP_r - qQ_r.$$

Così essendo per r dispari:

$$P_r = \Pi(r)x^{\frac{r-1}{2}} - \frac{1}{2 \cdot 3} \Pi(r)ax^{\frac{r-3}{2}} + \dots, \quad Q_r = -\frac{1}{2 \cdot 3} \Pi(r)bx^{\frac{r-3}{2}} + \dots$$

si avranno le:

$$L_r = 2\Pi(r)\mu x^{\frac{r+1}{2}} + \dots, \quad M_r = 2\Pi(r)x^{\frac{r+3}{2}} + \dots$$

e per r pari:

$$P_r = \Pi(r)\mu x^{\frac{r-2}{2}} + \frac{1}{3 \cdot 4} \Pi(r)bx^{\frac{r-4}{2}} + \dots, \quad Q_r = \Pi(r)x^{\frac{r}{2}} + \frac{1}{2 \cdot 3} \Pi(r)ax^{\frac{r-2}{2}} + \dots$$

ed in conseguenza:

$$L_r = 2\Pi(r)x^{\frac{r+2}{2}} - \frac{1}{3} \Pi(r)ax^{\frac{r}{2}} + \dots, \quad M_r = -\frac{1}{3} \Pi(r)bx^{\frac{r}{2}} + \dots$$

nelle quali $\Pi(r) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r$.

3.° La equazione (3) per le relazioni (4) (7) riducesi quindi alla:

$$\Phi A_1 + \Psi = 0$$

essendo Φ , Ψ polinomi in x , entrambi del grado $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari, ed il primo del grado $\frac{n-2}{2}$, l'altro del grado $\frac{n}{2}$ se n è pari. Ora perchè la equazione superiore sia identicamente soddisfatta dovranno essere eguali a zero i coefficienti delle potenze di x in ciascuno dei polinomi Φ , Ψ ; si avranno cioè tanto nel caso di n dispari, quanto in quello di n pari, un numero $n+1$ di relazioni fra i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \dots$ in numero $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ e le indeterminate ξ, μ .

Se n dispari, le equazioni che si ottengono eguagliando a zero i coefficienti di $x^{\frac{n-1}{2}}$ di Φ e di Ψ , sono le seguenti:

$$\Pi(n) + \Pi(n-2)\alpha_1 + 2\Pi(n-3)\beta_2 + \Pi(n-4)\gamma_3 + \dots + 4\lambda_{n-3} + \mu_{n-2} + 2\nu_{n-1} = 0$$

$$\Pi(n-3)\beta_1 + 2\Pi(n-4)\gamma_2 + \Pi(n-5)\delta_3 + \dots + 2\lambda_{n-4} + 2\mu_{n-3} + \nu_{n-2} - 2\nu_{n-1}\mu = 0.$$

Supponiamo che i coefficienti $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \dots, \nu_{n-1}$ sieno numeri interi, ed indicando con $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-2}$, $n-2$ numeri interi, pongasi:

$$\alpha_1 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_{n-2} - (n-1)n$$

$$\beta_2 = -\frac{n-2}{2}\rho_1, \quad \gamma_3 = -(n-3)(n-2)\rho_2, \quad \delta_4 = -\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}\rho_3 \dots$$

$$\dots \mu_{n-2} = -\Pi(n-2)\rho_{n-3}, \quad \nu_{n-1} = -\frac{1}{2}\Pi(n-2)\rho_{n-2}$$

la prima delle equazioni superiori sarà soddisfatta e la seconda diventa la

$$\Pi(n-3)\beta_1 + 2\Pi(n-4)\gamma_2 + \Pi(n-5)\delta_3 + \dots + 2\lambda_{n-4} + 2\mu_{n-3} + \nu_{n-2} = -\Pi(n-2)\rho_{n-2}\mu$$

da cui per $n=3, 5, 7, \dots$ si avranno le:

$$\beta_1 = -\rho_1\mu; \quad 2\beta_1 + 2\gamma_2 + \delta_3 = -6\rho_3\mu;$$

$$24\beta_1 + 12\gamma_2 + 2\delta_3 + 2\epsilon_4 + \varphi_5 = -120\rho_5\mu$$

e così di seguito.

Se n pari, il coefficiente di $x^{\frac{n}{2}}$ in Ψ eguagliato a zero dà:

$$\Pi(n) + \Pi(n-2)\alpha_1 + 2\Pi(n-3)\beta_2 + \Pi(n-4)\gamma_3 + \dots + 2\lambda_{n-3} + 2\mu_{n-2} + \nu_{n-1} = 0$$

alla quale soddisfaasi ponendo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{n-2} - (n-1)n \\ \beta_2 &= -\frac{n-2}{2}\rho_1, \quad \gamma_3 = -(n-3)(n-2)\rho_2, \quad \delta_4 = -\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}\rho_3 \dots \\ \dots \mu_{n-2} &= -\frac{1}{2}\Pi(n-2)\rho_{n-3}, \quad \nu_{n-1} = -\Pi(n-2)\rho_{n-2} \end{aligned}$$

e per questa la equazione che ottiensi eguagliando a zero il coefficiente di $x^{\frac{n-2}{2}}$ in Φ diventa la:

$$\Pi(n-3)\beta_1 + 2\Pi(n-4)\gamma_2 + \Pi(n-5)\delta_3 + \dots + 4\lambda_{n-4} + \mu_{n-3} + 2\nu_{n-2} = -\Pi(n-2)\rho_{n-2}\mu$$

e quindi $n=4, 6, 8, \dots$

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\gamma_2 &= -2\rho_2\mu; & 6\beta_1 + 4\gamma_2 + \delta_3 + 2\varepsilon_4 &= -24\rho_1\mu \\ 120\beta_1 + 48\gamma_2 + 6\delta_3 + 4\varepsilon_4 + \varphi_5 + 2\psi_6 &= -720\rho_6\mu. \end{aligned}$$

Oltre a questa equazione si avranno $n-1$ relazioni fra i coefficienti non numerici $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \dots$ in numero $\frac{n(n-1)}{2}$ e le ξ, μ .

4.° Sia $n=3$. La equazione (3) è in questo caso la seguente:

$$A_3 + [\alpha_0 + (\rho_1 - 6)x]A_1 + \beta_0 + \beta_1x - \frac{1}{2}\rho_1\sqrt{\varphi(x)} = 0$$

e si ha la:

$$\beta_1 = -\rho_1\mu.$$

Le altre due relazioni sono:

$$(\rho_1 - 3)a - 3\beta_1\mu + 3\alpha_0 = 0$$

$$(\rho_1 - 4)b - \frac{2}{3}\beta_1a + 4\beta_0 = 0$$

nelle quali le a, b sono le funzioni di ξ, μ indicate sopra. La condizione che almeno una delle indeterminate ξ, μ debba avere tre valori, non può evidentemente essere soddisfatta che supponendo $\rho_1=0$ oppure $\rho_1=3$.

Nel primo caso si hanno le:

$$\beta_1 = 0, \quad a = \alpha_0; \quad b = \beta_0$$

nel secondo:

$$\mu = -\frac{\beta_1}{3}, \quad \beta_1^2 + 3\alpha_0 = 0, \quad b + \frac{2}{3}\beta_1a - 4\beta_0 = 0$$

e quindi tanto nell'uno che nell'altro caso due fra le tre costanti $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ rimangono indeterminate.

Sia $n = 4$; si avrà la equazione:

$$A_1 + [\alpha_0 + (\rho_1 + \rho_2 - 12)x] A_2 + (\beta_0 + \beta_1 x - \rho_1 \sqrt{\varphi}) A_1 + \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 \sqrt{\varphi} - 2\rho_2 x^2 = 0$$

e la:

$$\beta_1 + 2\gamma_2 = -2\rho_2\mu.$$

Le altre tre relazioni sono le seguenti:

$$(\rho_1 - \rho_2)a + 6\gamma_2\mu - 3(\gamma_1 + 2\alpha_0) = 0$$

$$(\rho_1 - 4)b + \frac{1}{3}(2\gamma_2 - \beta_1)a + 2\gamma_1\mu - 2\beta_0 = 0$$

$$(3\rho_1 + \rho_2 - 18)c + 3(\gamma_2 - \beta_1)b + 3\gamma_1a + 3\rho_2g_2 - 18\gamma_0 = 0.$$

La condizione per le ξ , μ , che l'una almeno di esse abbia quattro valori, conduce facilmente ai seguenti valori di ρ_1 , ρ_2 :

$$1^a \quad \rho_1 = \rho_2 = 0$$

$$2^a \quad \rho_1 = \rho_2 = 4$$

$$3^a \quad \rho_1 = 4, \quad \rho_2 = 0$$

$$4^a \quad \rho_1 = 6, \quad \rho_2 = 0.$$

Ora 1.° Se $\rho_1 = \rho_2 = 0$, la prima delle tre relazioni dà tosto $\gamma_2 = 0$ e quindi $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = -2\alpha_0$. Le altre due equazioni diventano:

$$b + \alpha_0\mu + \beta_0 = 0$$

$$c + \frac{1}{3}\alpha_0a + \gamma_0 =$$

2.° Se $\rho_1 = \rho_2 = 4$, la seconda delle relazioni superiori dà $\gamma_2 = \frac{1}{2}\beta_1$, quindi:

$$\mu = -\frac{\beta_1}{4}$$

il qual valore sostituito nella prima e seconda, conduce alle due relazioni fra i coefficienti:

$$8\alpha_0 + 4\gamma_1 + \beta_1^2 = 0$$

$$4\beta_0 + \beta_1\gamma_1 = 0$$

e si avrà per determinare i quattro valori di ξ la equazione

$$c + \frac{3}{4}\beta_1b - \frac{3}{2}\gamma_1a - 6g_2 + 9\gamma_0 = 0.$$

3.° Se $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = 0$ si ha $\gamma_2 = -\frac{1}{2}\beta_1$ e sostituendo il valore di a dedotto dalla prima relazione nella seconda si otterranno fra i coefficienti le due

relazioni:

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} \beta_1^2, \quad 16 \beta_0 + 8 \alpha_0 \beta_1 + \beta_1^3 = 0$$

e le due equazioni che danno i quattro valori di ξ , μ saranno le:

$$a - \frac{3}{4} \beta_1 \mu - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \beta_1^2 + 2 \alpha_0 \right) = 0$$

$$c + \frac{3}{4} \beta_1 b - \frac{1}{8} \beta_1^2 a + 3 \gamma_0 = 0.$$

4.° Se $\rho_1 = 6$, $\rho_2 = 0$ si ha ancora $\gamma_2 = -\frac{1}{2} \beta_1$ e sostituendo i valori di a e di b desunti dalle prime due relazioni nella terza, si hanno fra i coefficienti le:

$$\beta_1 (\beta_1^2 - 8 \gamma_1) = 0, \quad (\gamma_1 + 2 \alpha_0) (\beta_1^2 - 2 \gamma_1) + 6 \beta_0 \beta_1 + 24 \gamma_0 = 0$$

e le due equazioni:

$$a - \frac{1}{2} \beta_1 \mu - \frac{1}{2} (\gamma_1 + 2 \alpha_0) = 0$$

$$b - \frac{1}{3} \beta_1 a + \gamma_1 \mu - \beta_0 = 0.$$

La prima delle due relazioni fra i coefficienti può essere soddisfatta da $\gamma_1 = \frac{1}{8} \beta_1^2$, ma in questa ipotesi le due equazioni superiori conducono ad una equazione in μ del terzo grado; quindi dovranno essere:

$$\beta_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad a - \frac{1}{2} (\gamma_1 + 2 \alpha_0) = 0$$

$$12 \gamma_0 - 2 \alpha_0 \gamma_1 - \gamma_1^2 = 0, \quad b + \gamma_1 \mu - \beta_0 = 0$$

e tre coefficienti rimangono indeterminati in questa come nelle altre.

Le equazioni del terzo e del quarto grado trovate sopra e le corrispondenti relazioni fra i coefficienti sono note pei lavori dei sig.ⁱ PICARD, HERMITE, MITTAG-LEFFLER.

Se $n = 5$ si ha la equazione:

$$A_5 + [\alpha_0 + (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - 20)x] A_3 + \left(\beta_0 + \beta_1 - \frac{3}{2} \rho_1 \sqrt{\varphi} \right) A_2 + \\ + (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 \sqrt{\varphi} - 6 \rho_2 x^2) A_1 + \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 \sqrt{\varphi} + \delta_3 x^2 - 6 \rho_3 x \sqrt{\varphi} = 0$$

colle 5 relazioni

$$2 \beta_1 + 2 \gamma_2 + \delta_3 = -6 \rho_3 \mu$$

$$(\rho_2 - \rho_3)a + \delta_3 \mu - (\gamma_1 + 2\delta_2 + 6\alpha_0) = 0$$

$$(\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3)b + \frac{1}{3}(2\gamma_2 - \delta_3)a - 4\delta_2 \mu + 2(\delta_1 + 2\beta_0) = 0$$

$$(2\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - 10)(c + 3g_2) - \frac{1}{2}(2\beta_1 - 4\gamma_2 + \delta_3)b + (\gamma_1 - 2\delta_2)a - 6\delta_1 \mu - 18g_2 + 6\gamma_0 = 0$$

$$(2\rho_1 + \rho_3 - 16)e - \frac{1}{6}(6\beta_1 - 6\gamma_2 + \delta_3)c + 2(\gamma_1 - \delta_2)b - 2\delta_1 a + \delta_3 g_2 + 12\delta_0 = 0$$

nell'ultima delle quali $e = ab - 3c\mu$.

Si hanno così pei valori di ρ_1, ρ_2, ρ_3 le sei seguenti combinazioni:

$$1^a \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0 \quad 3^a \quad \rho_1 = 5, \rho_2 = \rho_3 = 0 \quad 5^a \quad \rho_1 = \frac{20}{3}, \rho_2 = \frac{10}{3}, \rho_3 = 0$$

$$2^a \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 5 \quad 4^a \quad \rho_1 = 8, \rho_2 = \rho_3 = 0 \quad 6^a \quad \rho_1 = 8, \rho_2 = 4, \rho_3 = 0.$$

Nel primo caso si dimostra subito per le prime tre relazioni superiori dover essere:

$$\delta_3 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = -6\alpha_0, \quad \delta_1 = -2\beta_0$$

e le due equazioni saranno le:

$$c + \frac{3}{5}\alpha_0 a - \frac{6}{5}\beta_0 \mu + \frac{24}{5}g_2 - \frac{3}{5}\gamma_0 = 0$$

$$e + \frac{3}{4}\alpha_0 b - \frac{1}{4}\beta_0 a - \frac{3}{4}\delta_0 = 0$$

rimanendo indeterminati i quattro coefficienti $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$.

Nel secondo caso dovendo evidentemente essere $2\gamma_2 - \delta_3 = 0$ $2\beta_1 - 4\gamma_2 + \delta_3 = 0$ si hanno le:

$$\gamma_2 = \beta_1, \quad \delta_3 = 2\beta_1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\gamma_1$$

per le quali:

$$\mu = -\frac{\beta_1}{5}.$$

Sostituendo questi valori nella seconda, terza, e quarta delle relazioni superiori si ottengono le altre tre relazioni fra i coefficienti, e cioè:

$$15\alpha_0 + 5\gamma_1 + \beta_1^2 = 0$$

$$10\beta_0 + 5\delta_1 + \beta_1\gamma_1 = 0$$

$$5\gamma_0 + \beta_1\delta_1 - 15g_2 = 0$$

e la equazione:

$$e + \frac{1}{3}\beta_1 c - \gamma_1 b + 2\delta_1 a - 2\beta_1 g_2 - 12\delta_0 = 0$$

la quale conduce ai cinque valori di ξ . Le costanti indeterminate sono in questo caso $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \delta_0$.

Nel terzo caso dovendo essere $\delta_3=0$ si hanno le $\gamma_2=-\beta_1$ e $\gamma_1+2\delta_2+6\alpha_0=0$, ed eliminando b dalla terza e dalla quarta relazione, si ottengono le tre seguenti:

$$\delta_1 = \frac{2}{5}\gamma_2\delta_2 \quad \gamma_1 - 2\delta_2 = \frac{2}{5}\gamma_2^2 \quad \gamma_2(\delta_1 + 2\beta_0) + 15g_2 + 5\gamma_0 = 0$$

od in fine si avranno fra i coefficienti le sei relazioni:

$$\begin{aligned} \delta_3 = 0, \quad \gamma_2 = -\beta_1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{5}\beta_1^2 - 3\alpha_0, \quad \delta_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\beta_1^2 + 3\alpha_0\right) \\ \delta_1 = \frac{1}{5}\beta_1\left(\frac{1}{5}\beta_1^2 + 3\alpha_0\right), \quad 5\gamma_0 + 15g_2 - \frac{1}{25}\beta_1^4 - \frac{3}{5}\alpha_0\beta_1^2 - 2\beta_0\beta_1 = 0 \end{aligned}$$

rimanendo indeterminate le $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \delta_0$. Le equazioni che danno i valori delle ξ, μ sono le:

$$\begin{aligned} b - \frac{2}{15}\beta_1 a + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}\beta_1^2 + 3\alpha_0\right)\mu + \frac{2}{25}\beta_1\left(\frac{1}{5}\beta_1^2 + 3\alpha_0\right) + \frac{4}{5}\beta_0 = 0 \\ e + \frac{1}{3}\beta_1 c - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\beta_1^2 - \alpha_0\right)b + \frac{1}{15}\beta_1\left(\frac{1}{5}\beta_1^2 + 3\alpha_0\right)a - 2\delta_0 = 0. \end{aligned}$$

Nel quarto caso saranno ancora $\delta_3=0, \gamma_2=-\beta_1$ e dalle altre relazioni si ottengono le

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{1}{2}\beta_1^2, \quad \gamma_1 = -(\beta_1^2 + 6\alpha_0), \quad \delta_1 = -\frac{1}{2}\beta_1(\beta_1^2 + 3\alpha_0) \\ 12\delta_0 + 2\gamma_0\beta_1 + 2\beta_0(\beta_1^2 + 3\alpha_0) - \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1^2 + 3\alpha_0)^2 = 0 \end{aligned}$$

e le due equazioni:

$$\begin{aligned} b - \frac{1}{12}\beta_1 a - \frac{1}{4}\beta_1^2\mu - \frac{1}{8}\beta_1(\beta_1^2 + 3\alpha_0) + \frac{1}{2}\beta_0 = 0 \\ c - \frac{1}{2}\beta_1 b - \frac{1}{3}(\beta_1^2 + 3\alpha_0)a + \frac{1}{2}\beta_1(\beta_1^2 + 3\alpha_0)\mu + \gamma_0 = 0. \end{aligned}$$

Le quattro costanti indeterminate sono le $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0$.

Nel quinto caso si hanno dapprima le $\gamma_2=0, \delta_3=-2\beta_1$; poi dalle relazioni seconda, terza, e quarta le:

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{1}{10}\beta_1^2, \quad \delta_1 = \frac{1}{10}\beta_1\left(\gamma_1 - \frac{1}{5}\beta_1^2\right) \\ 10\beta_0 + 3\alpha_0\beta_1 + \beta_1\gamma_1 = 0 \\ 20\gamma_0 - 60g_2 + 6\alpha_0\left(\gamma_1 - \frac{1}{5}\beta_1^2\right) + \gamma_1^2 - \frac{1}{25}\beta_1^4 = 0 \end{aligned}$$

e le due equazioni:

$$a - \frac{3}{5}\beta_1\mu - \frac{1}{10}\left(\gamma_1 + \frac{1}{5}\beta_1^2 + 6\alpha_0\right) = 0$$

$$e + \frac{1}{4}\beta_1c - \frac{3}{4}\left(\gamma_1 - \frac{1}{10}\beta_1^2\right)b + \frac{3}{40}\beta_1\left(\gamma_1 - \frac{1}{5}\beta_1^2\right)a + \frac{3}{4}\beta_1g_2 - \frac{9}{2}\delta_0 = 0$$

colle quattro costanti indeterminate $\alpha_0, \beta_1, \gamma_1, \delta_0$.

Infine nell'ultimo caso si trovano le sei relazioni fra i coefficienti:

$$\gamma_2 = \beta_1, \quad \delta_3 = -4\beta_1, \quad \gamma_1 = \beta_1^2, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\beta_1^2$$

$$4\beta_0 + 2\delta_1 + \beta_1^3 + 3\alpha_0\beta_1 = 0$$

$$12\delta_0 - 2\gamma_0\beta_1 - \beta_1^2\delta_1 - 3\alpha_0\delta_1 = 0$$

e le due equazioni saranno le:

$$a - \beta_1\mu - \frac{1}{2}(\beta_1^2 + 3\alpha_0) = 0$$

$$c + \frac{3}{2}\beta_1b - 3\delta_1\mu - 6g_2 + 3\gamma_0 = 0$$

rimanendo indeterminate le quattro costanti $\alpha_0, \beta_1, \delta_1, \gamma_0$.

5.° La calcolazione delle equazioni in μ od in ξ , che forma lo scopo della precedente Memoria del sig. MITTAG-LEFFLER per le equazioni differenziali lineari del terzo e del quarto ordine, si ottiene molto facilmente quando il problema si presenti sotto l'aspetto algebrico qui indicato. La equazione in μ è in generale il risultato della eliminazione delle a, b, c dalla terza delle relazioni (5), dalla equazione identica (6) e dalle due equazioni trovate per le varie combinazioni di valori delle ρ_1, ρ_2, \dots .

Consideriamo, per esempio, per $n=5$ il caso ultimo in cui $\rho_1=8, \rho_2=4, \rho_3=0$. Ricavando dalle due equazioni corrispondenti i valori di a , e di c e sostituendoli nella (6) si ottiene la:

$$27b^2 = Lb + M$$

nella quale:

$$L = -6[11\beta_1\mu^2 + (5\beta_1^2 + 3\alpha_0)\mu + 2\beta_1(\beta_1^2 + 3\alpha_0)]$$

$$M = 12\left[9\delta_1\mu^3 + (4\beta_1\delta_1 - 9\gamma_0 + 18g_2)\mu^2 - (4\beta_1\gamma_0 + 3\beta_1\delta_1 - 9\beta_1g_2)\mu + \frac{9}{2}(\beta_1^2 + 3\alpha_0)g_2 - 2(\beta_1^2 + 3\alpha_0)\gamma_0 - 9g_3\right].$$

D'altra parte pel valore di c si ha che:

$$Pb = Q$$

posto:

$$P = \frac{3}{2}(4\mu - \beta_1), \quad Q = \beta_1^2 \mu^2 + (\beta_1^3 + 3\alpha_0 \beta_1 + 3\delta_1)\mu + \frac{1}{4}(\beta_1^2 + 3\alpha_0)^2 - 9g_2 + 3\gamma_0$$

si avrà quindi dalla eliminazione di b :

$$(LQ + MP)P - 27Q^2 = 0$$

che è appunto una equazione in μ del quinto grado. La prima delle equazioni superiori dà quindi tosto, richiamando il valore (5) di a , la:

$$\xi = \mu^2 + \frac{1}{3}\beta_1 \mu + \frac{1}{6}(\beta_1^2 + 3\alpha_0)$$

dalla quale si ottengono i cinque valori corrispondenti di ξ .

6.° Le espressioni che abbiamo più sopra indicate colle lettere P_r, Q_r, L_r, M_r come le p, q, r hanno una proprietà che risulta subito dal modo di loro formazione ed è la seguente. Se nelle espressioni stesse alle quantità $\mu, \sqrt{\varphi(\xi)}$ si sostituiscono le $-\mu, -\sqrt{\varphi(\xi)}$, si ha che tutte mantengono lo stesso valore, ma le p, r non mutano anche segno, mentre q diventa $-q$; inoltre per r pari P_r, M_r mutano segno e non lo mutano Q_r, L_r e reciprocamente per n dispari. Quindi una espressione della forma, per n pari:

$$E_1 = A_{n-1} + p_1 A_{n-3} + p_2 A_{n-5} + \dots + p_{\frac{n-1}{2}} A_3 + p_{\frac{n-2}{2}} A_1$$

o l'altra, per n dispari:

$$D_1 = A_{n-1} + p_1 A_{n-3} + p_2 A_{n-5} + \dots + p_{\frac{n-3}{2}} A_2 + p_{\frac{n-1}{2}}$$

nelle quali pel momento supporremo p_1, p_2, \dots costanti; daranno origine ad altre due E_2, D_2 mutando i segni di $\mu, \sqrt{\varphi(\xi)}$; e si avranno le:

$$\begin{aligned} E_1 &= \Phi A_1 + \Psi & D_1 &= \Phi A_1 + \Psi \\ E_2 &= \Phi B_1 - \Psi & D_2 &= -\Phi B_1 + \Psi \end{aligned}$$

essendo B_1 il valore di A_1 nel quale siasi introdotto quel mutamento di segni.

Moltiplicando queste quattro equazioni per $2(x - \xi) = p$, ed osservando essere:

$$2A_1(x - \xi) = q + \sqrt{\varphi(x)}, \quad 2B_1(x - \xi) = -q + \sqrt{\varphi(x)}$$

si hanno le:

$$\begin{aligned} 2E_0(x - \xi) &= H + \Phi \sqrt{\varphi(x)}; & 2D_1(x - \xi) &= H + \Phi \sqrt{\varphi(x)} \\ 2E_2(x - \xi) &= -H + \Phi \sqrt{\varphi(x)}; & 2D_2(x - \xi) &= H - \Phi \sqrt{\varphi(x)} \end{aligned}$$

nelle quali $H = q\Phi + p\Psi$, e quindi per n pari H sarà del grado $\frac{n}{2}$ e Φ del grado $\frac{n-2}{2}$, e per n dispari H del grado $\frac{n+1}{2}$ e Φ del grado $\frac{n-3}{2}$. Si avrà così che i secondi membri delle equazioni:

$$4E_1E_2(x-\xi)^2 = -H^2 + \Phi^2\varphi(x); \quad 4D_1D_2(x-\xi)^2 = H^2 - \Phi^2\varphi(x)$$

saranno polinomi del grado $n+1$, tanto per n pari, quanto per n dispari.

Si indichi ora con v_1 l'integrale (1) e con v_2 quello che ottiene mutando i segni delle μ , $\sqrt{\varphi(\xi)}$. Se poniamo:

$$\begin{array}{l} \rho y_1 = E_1 v_1 \\ \rho y_2 = E_2 v_2 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{l} \rho y_1 = D_1 v_1 \\ \rho y_2 = D_2 v_2 \end{array}$$

essendo ρ un coefficiente numerico a determinarsi; siccome $v_1 v_2 = x - \xi$ si hanno le:

$$\begin{array}{ll} 4\rho^2 y_1 y_2 (x-\xi) = -H^2 + \Phi^2\varphi(x) & \text{per } n \text{ pari} \\ 4\rho^2 y_1 y_2 (x-\xi) = H^2 - \Phi^2\varphi(x) & \text{per } n \text{ dispari} \end{array}$$

ed osservando che i secondi membri di queste equazioni sono divisibili per $x - \xi$, si potrà porre il prodotto $y_1 y_2 = F(x)$, essendo $F(x)$ un polinomio in x del grado n .

Notisi infine che posto:

$$K = (A_{n-2} + p_1 A_{n-4} + \dots + p_{\frac{n-4}{2}} A_2 + p_{\frac{n-2}{2}}) \sqrt{\varphi(x)}$$

si hanno per la indicata proprietà della L_r, M_r , che se n pari:

$$K_1 = RA_1 + S, \quad K_2 = RB_1 - S$$

essendo R, S polinomi dei gradi $\frac{n}{2}$ ed $\frac{n-2}{2}$. E quindi sussisteranno per queste espressioni proprietà analoghe a quelle dimostrate sopra, le quali trovano una applicazione nella integrazione dell'equazione differenziale di LAMÉ e di altre più generali.

3 luglio 1882.

Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n=3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique. ⁽¹⁾

(Par J. VERONESE, à Padoue.)

PRÉAMBULE.

L'Académie royale de Belgique pour le concours de 1879 et pour celui de 1881 avait proposé, comme question à résoudre, la généralisation des propriétés de l'hexagramme mystique.

L'énoncé de la question pour 1881 était le suivant: *Étendre, autant que possible, les théories des points et des droites de STEINER, KIRKMAN, CAYLEY, SALMON, HESSE, BAUER aux propriétés qui sont pour les courbes supérieures, pour les surfaces et pour les courbes gauches les analogues des théorèmes de PASCAL et de BRIANCHON.*

(¹) Dopo aver preso cognizione di questo importante lavoro, siamo lieti che l'egregio Autore abbia aderito ad affidarne la pubblicazione alla direzione degli *Annali*. Noi ci asteniamo dall'indagare le cause per le quali un lavoro così originale non abbia trovato maggior favore presso la Commissione dell'Accademia Reale delle Scienze di Bruxelles, e d'altronde ad esse si accenna sufficientemente nel preambolo; non possiamo però dissimulare anche in questa occasione una nostra antica convinzione, che le Accademie provvedono male all'incremento delle scienze, sia col proporre temi troppo speciali, sia col costringere gli Autori a seguire un indirizzo ed un piano stabilito *a priori* nella soluzione dei medesimi.

F. BRIOSCHI.

(Voir, pour ces derniers, les travaux de MM. CREMONA, P. SERRET et FOLIE) (*).

Sur l'invitation en quelque sorte de M. FOLIE, membre de l'Académie de Belgique, je me suis présenté au second concours avec un Mémoire de 150 pages environs qui portait pour devise:

« *Les groupes de l'Hexagrammum mysticum donnent une expression géométrique particulière bien simple et élégante des groupes des substitutions de six lettres.* »

Cette devise était reproduite dans un billet cacheté renfermant mon nom et mon adresse (**).

L'Académie royale de Belgique dans le mois de décembre 1881 a adopté les conclusions de Monsieur le rapporteur FOLIE, auxquelles s'étaient ralliés les deux autres Commissaires, CATALAN et DE TILLY.

Je reproduis le rapport entier de M. FOLIE, accompagné de mes commentaires, afin que le lecteur puisse mieux le comprendre et voir de quelle façon on a jugé mon travail.

« La question proposée, accompagnée surtout du renvoi aux travaux de

(*) Je remarque, dans l'intérêt du lecteur, que dans l'hexagramme il n'existe pas de points ou de droites qui soient désignés sous le nom de HESSE ou de BAUER, comme le ferait croire la rédaction même de la question.

(**) Comme j'avais envoyé à M. FOLIE un exemplaire de mon Mémoire sur l'hexagramme mystique de 1877, il m'écrivit aussitôt la lettre suivante:

Monsieur,

J'ai parcouru avec beaucoup d'intérêt les brochures que vous m'avez fait l'honneur de m'envoyer et, en particulier, votre Mémoire sur l'hexagramme mystique, dans lequel se trouve résolue la première partie de la question que j'avais posée à l'Académie de Bruxelles pour 1879.

J'ai insisté, *en conséquence*, pour que la seconde partie de la question restât au programme de concours pour 1881. La Classe des sciences, dans sa séance d'hier, a adopté ma proposition et m'a chargé de la rédaction de la nouvelle question.

Je m'empresse de vous en informer et de vous envoyer cette rédaction, persuadé que, par vos travaux antérieurs, vous êtes fort à même de la résoudre.

En même temps je vous adresse deux brochures dont j'ai fait des tirés à part et qui *pourront* en partie vous servir de guide.

Agréé, etc.

Liège, 4 janvier 1880.

FOLIE.

Je remarque que M. FOLIE ne dit pas vous *devront*, mais vous *pourront* servir de guide.

» MM. CREMONA et P. SERRET ainsi qu'aux miens, ne nous semble guère susceptible d'un sens amphibologique.

» Dans nos fondements d'une géométrie supérieure cartésienne, nous avons fait voir que si le théorème de PASCAL s'énonce sous cette forme:

» *Les côtés opposés de deux trilatères conjugués inscrits à une conique se coupent en trois points situés en ligne droite*, le théorème analogue s'énoncera, pour les courbes du 3^{me} ordre:

» *Les côtés opposés de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du 3^{me} ordre se coupent en quatre points situés en ligne droite*, et, pour les surfaces du 3^{me} ordre:

» *Les faces opposées de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^{me} ordre se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan*.

» Ces extensions du théorème de PASCAL, jointes à celles que nous en avons données pour d'autres courbes planes ou gauches, indiquaient bien clairement le sens de la question de concours. Or le titre seul du Mémoire envoyé en réponse à la question montre que ce n'est pas dans ce sens que l'Auteur a voulu l'entendre.

» Et cependant il n'ignorait pas que ce sens était bien le véritable; la preuve en est qu'il a recherché l'extension proposée pour le cas des courbes gauches du 3^{me} ordre, parce que sa théorie s'appliquait à ce cas, tandis qu'il a laissé de côté les extensions aux courbes planes et aux surfaces d'un ordre supérieur au second, par la raison contraire.

» Toute sa théorie, en effet, repose sur le 2^d ordre, et ne peut en général s'étendre au delà que dans un espace à plus de trois dimensions, ce qui ne rentre nullement dans la question proposée (*).

(*) J'ai étendu les groupes de l'hexagramme à 6 points d'une cubique gauche au moyen du théorème de CHASLES et CREMONA directement de la figure même de l'hexagramme par le principe de projection; mais cette méthode n'a rien de commun avec celle dont je me suis servi dans presque tout mon travail.

J'ai appliqué l'extension aux courbes et aux surfaces supérieures, car je l'ai fait pour toute configuration de n points du plan et de l'espace linéaire à trois dimensions, et, par conséquent aussi, pour toute courbe et surface de ces espaces.

Il n'est pas vrai que ma théorie ne puisse s'étendre que dans un espace à plus de trois dimensions. M. FOLIE n'a pas même fait attention au passage « Bien qu'il soit déjà très intéressant, etc. » de ma préface, duquel résulte très clairement que je me sers en général des espaces à n dimensions comme moyen et non pas comme but, pour étudier les figures de l'espace ordinaire et du plan. Pourtant celle-ci est une des idées fondamentales de mon travail.

» Celle-ci est-elle susceptible d'une solution générale?

» Evidemment non; et les termes mêmes de la question, « étendre autant que possible », prouvent que l'Académie ne demandait pas une solution de l'espèce.

» Mais ce qu'elle voulait, c'est qu'on étendit, dans les limites du possible, aux courbes et aux surfaces d'ordre supérieur les conséquences, déduites par les géomètres modernes, de la propriété de l'hexagramme mystique.

» Or, cette extensions peut se faire, au moins dans des cas particuliers; nous signalerons, par exemple, les points d'inflexion d'une courbe plane du 3^{me} ordre comme l'un d'entre eux; et nous ne doutons nullement qu'il en existe de semblables dans les courbes d'un ordre supérieur.

» Pour les surfaces du 3^{me} ordre, nous pensons même que l'extension demandée est susceptible de la plus grande généralité (*).

» Tel était donc le point de vue auquel on devait d'abord se placer pour traiter la question proposée (**).

» Après cela, rien n'aurait empêché de l'étudier à d'autres points de vue et, en particulier, à celui d'où l'Auteur du Mémoire l'a examiné, quoique son interprétation soit peut-être, entre toutes, celle qui est la moins susceptible de généralisation (***) .

(*) Il est impossible, comme je le démontrerais dans une note de ma préface, de faire l'extension demandée au moyen des 9 points d'inflexion d'une courbe du 3^{me} ordre par des quadrilatères conjugués inscrits à la courbe, tandis que pour les surfaces du 3^{me} ordre on obtient l'extension donnée par CREMONA (*Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1877). Les plans, auxquels donnent lieu les couples des tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^{me} ordre, qu'on obtient en considérant les 27 droites de la surface, ne sont autres que les plans de PLÜCKER du Mémoire de CREMONA.

(**) Je demande pourquoi M. FOLIE n'a pas dit ici que je devais aussi me placer aux points de vue de MM. CREMONA et P. SERRET. La preuve que je n'étais pas obligé de suivre ses extensions, je la vois aussi dans la lettre, où il me dit: mes mémoires vous *pourront* et non pas vous *devront* servir de guide.

(***) Donc M. FOLIE convient qu'on pouvait se placer à mon point de vue pour étudier la question; il convient aussi, plus loin, que mon travail a des mérites très réels pour les aperçus nouveaux, pour les interprétations intéressantes et enfin pour la méthode féconde qu'il expose; mais pourquoi donc dit-il à la fin de son rapport que j'ai écrit mon travail à propos de la question proposée et non en réponse à cette question? S'il n'y a pas de doute sur le mérite du travail, et si l'on peut se placer à mon point de vue pour traiter la question, comment peut-on dire après cela que je n'ai pas traité la question? M. FOLIE devait dire franchement: le travail soumis à notre examen résout la question, mais à un autre point

» Aussi n'a-t-il guère réussi qu'à reproduire, d'une manière originale, les résultats que M. VERONESE a obtenus, par une voie élémentaire, dans un Mémoire dont le travail actuel est un commentaire fort intéressant (*).

» Ce travail est assurément l'œuvre d'un géomètre distingué, qui nous semble avoir particulièrement étudié les maîtres italiens et avoir un peu négligé l'étude des courbes supérieures auxquelles la question se rapportait sur-tout (**).

» Outre les théorèmes déjà connus, il renferme un grand nombre d'idées neuves et originales, et même, comme nous l'avons dit plus haut, quelques unes des généralisations demandées; mais il ne semble pas avoir été écrit dans le but de saisir, dans toute son étendue, le problème proposé (***).

» Nous croyons superflu de faire, de son travail, une analyse détaillée qui ne serait, à peu de chose près, que la reproduction de celle que l'Auteur a exposée sous forme de préface, ou de présenter des observations de détail, qui ne seraient pas de nature à éclaircir la Classe sur la valeur du Mémoire. Il en est une cependant que nous ferons dans l'intérêt du lecteur: c'est qu'il s'y rencontre certaines dénominations proposées par BATTAGLINI, et qui ont le tort de créer une homonymie regrettable. Celle d'*involution*, par exemple, qui est prise dans un sens tout à fait différent de celui que PONCELET, DE JONQUIÈRES, HESSE, CLEBSCH, CAYLEY, SALMON, etc., ont attribué à cette

de vue, qui n'est pas le nôtre, et par conséquent, il ne mérite pas le prix. Cela du reste résulte très clairement de tout son rapport.

À l'égard de ma méthode je dirai seulement qu'elle ne se laisse peut-être pas généraliser car elle est déjà très générale. Dans ma préface j'ai dit: « La méthode que je suis est très générale et peut s'appliquer à l'étude d'une configuration quelconque. »

(*) Certes je suis parti de mes résultats, mais cela ne signifie point que je les ai reproduits; par la table même des matières on peut se convaincre que les résultats de mon travail actuel sont presque tous nouveaux et qu'ils ne sont pas une reproduction, si originale qu'on la suppose, de ceux de mon Mémoire sur l'hexagramme mystique, de 1877.

(**) Il n'ignorait pas que j'avais l'intention de prendre part au concours et il savait bien que l'unique concurrent c'était moi, puisqu'il n'y en avait pas d'autres. Mais M. FOLIE se trompe lorsqu'il dit qu'il résulte de mon travail que j'ai étudié particulièrement les maîtres italiens, car je me suis servi seulement de mon Mémoire sur l'hexagramme mystique, de 1877, des travaux de MM. P. SERRET, JORDAN pour la théorie des substitutions et de ceux de M. KLEIN sur la théorie des complexes linéaires des droites, deux à deux en involution.

(***) Le lecteur pourra voir, par la table des matières, que je traite la question de fond en comble et que si au commencement j'ai l'air d'y être étranger, c'est parce que j'ai d'abord exposé les théories générales qui devaient me conduire aux extensions demandées.

» expression, dans le sens de l'homographie cyclique des géomètres allemands (*).

» En résumé, nous nous trouvons en présence d'un travail remarquable, qui mérite certainement d'être accueilli dans les Mémoires de l'Académie, à cause des aperçus nouveaux, des interprétations intéressantes, de la méthode féconde enfin qu'il expose.

» Il a le défaut seulement, d'avoir été écrit non pas en *réponse* à la question proposée, mais à *propos* de cette question.

» Si le but de l'Académie n'avait été que de provoquer un travail original, celui-ci mériterait le prix.

» Mais nous ne devons pas oublier qu'un des buts de la question posée par la Classe était d'engager les jeunes géomètres dans la voie qui a été ouverte, dans nos Mémoires mêmes, par l'extension des théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure aux courbes et aux surfaces d'un ordre élevé, et de provoquer, dans cette voie, des recherches qui complètent celles de l'école des géomètres belges, selon l'expression de CHASLES.

» Or nous venons de le voir, l'Auteur n'a presque rien tenté dans cette voie; il s'est borné à suivre la sienne propre (**).

(*) Avant tout je ferai observer que si M. FOLIE ne voulait pas donner une analyse détaillée de mon travail, il devait au moins dire en quoi consiste ma méthode et quels sont les résultats principaux que j'ai obtenus, pour démontrer ensuite que je n'ai pas résolu la question; tandis que cela ne ressort pas le moins du monde de ce rapport. C'est pourtant ainsi qu'en agissent tous les rapporteurs d'Académie, qui indiquent en peu de mots la méthode suivie par l'Auteur pour pouvoir en conclure si le Mémoire mérite ou non le prix. En effet, on lit dans l'Annuaire même de l'Académie royale de Belgique de 1881 à l'article 21 sur les publications: « Les rapports des commissaires, qui devront présenter un aperçu de ce que ces mémoires contiennent de plus remarquable, peuvent être imprimés dans les Bulletins. » Mais on voit facilement d'après les notes précédentes et d'après ce que dit ici M. FOLIE qu'il lui était impossible de faire un tel aperçu. Ce qu'il dit, en effet, sur l'*involution* est tout à fait contraire à la vérité, car je ne me suis jamais servi dans mon travail d'aucune dénomination proposée par BATTAGLINI. J'ai étendu l'idée de l'involution aux espaces à plus de trois dimensions, prise dans le sens commun (Collinéation ou homologie en involution, lorsque le rapport anharmonique de l'homologie est égal à -1 .) et non dans le sens de BATTAGLINI (Voir, en effet, le théor. I de mon Mémoire ci-après). Mais ce n'est pas tout. Le n.º 4 de mon travail a pour titre *Homographies cycliques*. Ce titre seul suffit pour démontrer que dans mon Mémoire l'idée de l'involution et celle des homographies cycliques sont bien distinctes.

Si M. FOLIE s'est trompé ainsi dès le début de mon travail, il est facile de comprendre ou d'admettre qu'il n'a pu être en harmonie avec le reste.

(**) Mais cela n'entre nullement dans le programme du concours. Du reste je demande pourquoi il n'a pas dit que les autres buts de l'Académie étaient de faire compléter les

» La question reste donc entière.

» Notre intention formelle est de proposer ultérieurement à la Classe de la maintenir au programme du concours.

» Nous ne pouvons, dans ces conditions, déclarer que le travail soumis à notre examen mérite le prix.

» Nous ne voulons pas non plus proposer une mention honorable pour l'Auteur, récompense qui ne nous semblerait pas proportionnée aux mérites très réels de son travail.

» En conséquence, nous avons l'honneur de proposer à la Classe d'ordonner que le Mémoire soit imprimé, si l'Auteur veut y consentir, dans les volumes in 4°, et d'adresser à celui-ci des félicitations et des remerciements bien mérités. »

N'est-il pas étrange que dans un rapport qui juge mon Mémoire digne d'être accueilli parmi les mémoires de l'Académie mais non conforme au concours, on ne donne aucune idée de ce qu'il contient? N'est-il pas étrange qu'on ne dise rien pour informer le lecteur des résultats obtenus? N'est-il pas étrange que lorsque le rapport parle de mon travail on se trompe toujours?

Une chose seule résulte très clairement du rapport: le prix n'a pas été accordé au Mémoire parce qu'on n'y a pas tenu compte des travaux géométriques de M. FOLIE, suivant que le pensait l'auteur du programme.

Ce n'est pas pour la perte du prix mais dans l'espérance d'une sentence plus juste, que j'en appelle du jugement de M. FOLIE et de l'Académie royale de Belgique à celui de tous ceux qui s'occupent des sciences mathématiques.

De même que je ne puis accepter la décision de l'Académie belge, de même je ne puis consentir à l'impression de mon travail dans les mémoires de l'Académie et, par conséquent, je ne peux pas accepter en l'état de cause les félicitations et les remerciements qu'elle veut bien m'adresser.

J'ai demandé l'hospitalité aux *Annali di Matematica* dirigés par Monsieur le Sénateur et professeur BRIOSCHI, et je remercie l'illustre directeur de me l'avoir accordée.

recherches des écoles italienne et française (à la première desquelles appartiennent aussi mon travail sur l'hexagramme, de 1877, et ceux de MM. CREMONA, BELLAVITIS et CAPORALI) puisque dans le programme du concours il a cité en premier lieu les travaux de MM. CREMONA et P. SERRET.

Que les gens compétents et impartiaux lisent entièrement mon Mémoire et qu'ils relisent ensuite le rapport de M. FOLIE avec mes commentaires. J'ose espérer qu'ils partageront ma conviction :

1.° que j'ai été jugé très légèrement par qui n'a pas lu ou n'a pas compris mon travail;

2.° que la voie que j'ai suivie est précisément celle qui, dans l'état actuel des connaissances géométriques, se présentait comme la plus féconde en résultats nouveaux et intéressants, et la plus propre à une véritable généralisation de l'hexagramme de PASCAL, sinon selon la pensée et le désir de l'auteur du programme, au moins selon l'esprit et l'état de la science;

3.° qu'on ne peut m'imputer à reproche si une telle voie est neuve et originale, au lieu d'être celle que M. FOLIE prétend avoir découverte et indiquée aux géomètres de l'avenir.

À propos de cette dernière voie je me bornerai à la déclaration suivante :

J'ai lu et j'ai examiné les *Fondements d'une géométrie supérieure Cartésienne* et les autres mémoires de M. FOLIE pour les utiliser dans la solution de la question proposée; mais j'ai dû bientôt me convaincre que par cette voie je n'aboutirais à aucune conclusion sérieuse. Les *Fondements* de M. FOLIE ne contiennent aucune nouveauté de méthodes, de théories ou de théorèmes; tout ce qu'il a exposé avec une grande pompe de phrases, est évidemment contenu dans les œuvres de PONCELET (*), et se réduit à des cas particuliers de théorèmes déjà donnés par GERGONNE (***) et par PONCELET (***), développés par DE JON-

(*) *Analyse des transversales*, etc. Journal de CRELLE, vol. 8, 1831. *Traité des propriétés projectives*. II Ed., 1866.

La théorie de l'involution donnée par les m points d'intersection d'une transversale quelconque avec les courbes ou les surfaces d'un faisceau $A + \lambda B = 0$, était déjà connue par PONCELET même en 1830, quoiqu'il l'ait publiée seulement dans la 2^e édition de son traité en 1866, tandis que DE JONQUIÈRES avait publié son Mémoire sur l'involution dans ce même journal en 1859.

(**) *Annales de mathématique*, tome 17.

(***) *Traité des propriétés projectives*. Pour l'extension du théorème de DESARGUES voir les n.°s 253, 258, 259, 266, 278, et pour l'extension du théorème de PASCAL voir en outre les n.°s 154, 227, 296, 297.

L'*heureuse analyse* de M. FOLIE, comme il l'appelle dans ses *Fondements*, se base toujours sur des équations de la forme $A + \lambda B = 0$, où A et B sont deux courbes ou deux surfaces réductibles ou irréductibles du m^{me} ordre.

Il y a aussi dans ses *Fondements* des contradictions dont je donne ici quelques exemples, Pour la généralisation de l'idée de l'involution quadratique, dans une note de sa préface. pag. 2, il dit :

QUIÈRES et par d'autres géomètres toujours avant qu'il leur arrivât la grande fortune d'être retrouvés et retouchés par le mathématicien de Liège.

Padoue, juillet 1882.

« Depuis que ce travail (ses Fondements) a été écrit nous avons trouvé dans la nouvelle édition du *Traité des propriétés projectives* de PONCELET (t. 2, pag. 240 et suiv.) cette extension de l'idée de l'involution, qui ne paraît pas avoir été remarquée des géomètres, malgré sa haute importance (1870) » tandis que, après avoir donné la première généralisation du théorème de DESARGUES (pag. 15), il dit :

« On voit clairement par là pourquoi l'involution de six points, la seule connue jusqu'à ce jour, etc. »

Et à pag. 31 :

« Nous ne pouvons pas mettre les équations générales des courbes d'un ordre supérieur au cinquième sous la forme

$$\delta_0 \dots \delta_{n-1} = k \delta'_0 \dots \delta'_{n-1}$$

» qui nous a conduit à appliquer l'extension que nous avons donnée à l'idée de l'involution.

« Par quoi faudra-t-il remplacer l'involution dans ces courbes ? C'est là un problème qui mérite certainement de faire l'objet des efforts des géomètres et sur lequel nous appelons leur attention. »

Il paraît que M. FOLIE n'a pas même lu l'endroit du traité de PONCELET qu'il cite, car PONCELET a étendu l'involution aux faisceaux de courbes ou de surfaces d'un ordre quelconque.

Voici maintenant quelques exemples de l'art de phraser de M. FOLIE. Aux pages 3, 4, il dit :

« On nous répondra peut-être avec POINSON que c'est une heureuse analyse qui nous a conduit à ces résultats ; nous faisons si peu difficulté de le reconnaître que nous sommes étonné que DESCARTES lui-même, lorsqu'il a fait cette découverte splendide qui renfermait en germe toute l'analyse moderne, ou les géomètres qui lui ont succédé, n'aient presque fait aucun usage de l'idée qui nous sert de point de départ. »

Cette heureuse analyse, comme nous venons de le voir, est basée sur des équations de la forme $A + \lambda B = 0$ déjà connues.

« Le titre même de notre travail indique suffisamment que nous n'avons voulu que poser les bases d'une méthode qui conduit aux plus belles propriétés de la géométrie supérieure.

« Déduire les corollaires de nos théorèmes serait une entreprise qui exigerait peut-être des années de travail.

« C'est là un champ que nous ne faisons que défricher et sur lequel ceux qui voudront poursuivre ces recherches sont certains de faire une ample moisson de découvertes. »

Et à la fin du premier livre (pag. 78) nous lisons :

« Nous avons, dans le livre qui précède, étendu au moyen d'une analyse fort simple les théorèmes fondamentaux de la haute géométrie aux courbes supérieures planes, pour lesquelles la plupart de ces théorèmes n'avaient pas encore été découverts, malgré la profondeur et la pénétration des géomètres. »

MÉMOIRE ⁽¹⁾

PRÉFACE.

La question à laquelle j'essaie de répondre par le présent travail est très vaste et semble tout d'abord très difficile. Le problème peut être envisagé sous beaucoup de manières différentes. Jusqu'ici on a proposé déjà bien des analogies au théorème de PASCAL; mais remarquons qu'en général pour déterminer ces propriétés, que l'on considère comme de même nature, on est obligé de ne prendre en considération dans l'Hexagramme mystique qu'un ordre de propriétés et non pas l'ensemble; citons à l'appui les théorèmes de CHASLES et de M. P. SERRET sur les surfaces du 2^d degré et ceux considérés par M. FOLIE pour les courbes et pour les surfaces d'ordre supérieur dans ses fondements et ailleurs ⁽²⁾.

Les groupes des droites de PASCAL, des points de STEINER, des 6 figures Π , des points de KIRKMAN, des droites de CAYLEY, etc., et des systèmes infinis $[Zz]_m$ de 60 droites z et de 60 points Z (où m est un nombre entier positif quelconque). Pour $m = 1$ le système $[Zz]_m$ devient le système de PASCAL-KIRKMAN ⁽³⁾ dépendant uniquement de ce que l'on peut permuter de toutes les manières possibles les 6 points fondamentaux de la conique.

(1) Ce Mémoire est identique à celui que j'ai envoyé à l'Académie royale de Belgique, sauf quelques corrections de forme, qui du reste ne changent en rien le sens. Je joins maintenant à certains points du travail des notes complémentaires en renvois, distinguées par des numéros des notes primitives indiquées par des astérisques.

(2) Je dois avertir que mon intention n'était pas d'affirmer que les théorèmes indiqués par M. FOLIE sont de lui.

(3) A., *Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum*. (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1877). Théorèmes XII, XLIX.

Ainsi en permutant les 6 points on obtient en tout 720 permutations correspondant 12 à 12 aux 60 hexagones, qu'on peut former avec les 6 points, ou bien aux 60 droites de PASCAL.

- On voit donc, que la théorie des groupes de l'Hexagramme n'est qu'une expression géométrique particulière de la théorie des substitutions de six lettres.

C'est là l'idée fondamentale qui nous guidera dans tout notre travail. Or, en examinant à ce point de vue les propriétés que l'on considère comme analogues du théorème de PASCAL, j'avoue n'avoir pu trouver de groupes analogues à ceux de l'Hexagramme. Cette difficulté insurmontable résulte de ce que les éléments fondamentaux, sur les courbes et sur les surfaces, donnés par ces propriétés ne sont pas arbitraires, comme le sont les 6 points sur la conique, et qu'en effectuant des permutations de ces éléments les propriétés ne subsistent plus (*).

Je donne quelques exemples:

Il y a pour les surfaces du 2^d degré un théorème que l'on peut considérer plus que tout autre comme l'analogue du théorème de PASCAL; c'est celui qui est relatif aux 6 génératrices d'un hyperboloïde, appartenant trois à trois aux deux systèmes de génératrices. Ces 6 droites se rencontrent deux à deux en 9 points, avec lesquels on peut former trois hexagones, dont les côtés sont les 6 droites elles-mêmes, et dont les diagonales se rencontrent respectivement en trois points. Ces trois points sont à une ligne droite g . Les plans tangents aux sommets opposés pour chacun des trois hexagones se coupent en trois droites d'un plan. Les trois plans, qui en résultent, se coupent suivant une droite. Cette droite est la polaire de la droite g par rapport à l'hyperboloïde (**). Ce dernier théorème peut être considéré comme l'analogue du théorème de STEINER

(*) Je remarque que M. P. SERRET lui-même ne considère pas ses deux théorèmes sur dix points quelconques d'une surface du 2^d degré comme les analogues du théorème de PASCAL. Le premier de ces théorèmes, relatif à deux pentaèdres qu'on obtient en séparant les dix points en deux groupes de 5 points, est analogue au théorème que deux triangles, dont les sommets sont 6 points d'une conique, sont conjugués par rapport à une autre conique Σ . On obtient en tout 10 telles coniques, qui ont été étudiées par M. BAUER en relation avec les droites de PASCAL, et avec les points de KIRKMAN, etc. Pour les 176 surfaces du 2^d degré Σ , qu'on obtient en séparant de toutes les manières possibles les 10 points fondamentaux d'une surface du 2^d degré en deux pentaèdres, le problème, qui se présente le premier, c'est celui de leurs intersections; problème qui n'est ni linéaire, ni à première vue élégant et qui offre peu d'intérêt. L'élégance et la beauté de l'hexagramme dépendent de ce que l'on peut l'étudier au moyen de constructions purement linéaires.

(**) PLÜCKER: *System der Geometrie des Raumes*, Nr. 87-93.

pour l'hexagramme mystique (*), mais il y a cette grande différence que, pour la conique, on a 60 hexagones, ou bien 60 droites de PASCAL et 20 points de STEINER, tandis que, avec les 6 génératrices de l'hyperboloïde, ou d'une surface quelconque du 2^d degré, on obtient seulement deux groupes de trois hexagones et un seul couple de droites, qui correspondent à un couple de deux points conjugués de STEINER. On voit donc qu'il est impossible d'étendre les groupes qu'on peut former avec 6 points d'une conique à 6 telles génératrices d'un hyperboloïde (†).

(*) C'est au moyen de ce théorème que HESSE a démontré que les 10 points de STEINER sont conjugués deux à deux par rapport à la conique fondamentale.

(†) M. FOLIE dans ses *Fondements* à la pag. 5 donne les définitions suivantes:

« Nous appellerons *polygones conjugués de n côtés inscrits à une courbe du n^m ordre*, n deux polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre avec la courbe. »

Ces deux polygones sont, selon PONCELET, deux courbes du n^m ordre, qui déterminent un faisceau de courbes du n^m ordre auquel appartient évidemment la courbe à laquelle sont inscrits les deux polygones. (*Traité des prop. proj.*, n.^{os} 253 et suivants.)

« De même nous appellerons *polygones conjugués de n + 1 côté inscrits à une courbe du n^m ordre* deux polygones tels, que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre, un seul excepté, avec la courbe; les *côtés opposés* dans ces deux polygones seront ceux qui n'auront pas de point commun sur la courbe. »

De même je remarque que ces deux polygones peuvent être considérés comme deux courbes du (n + 1)^m ordre, qui déterminent un faisceau de courbes du même ordre, où n(n + 1) des (n + 1)² points fondamentaux du faisceau sont situés sur la courbe du n^m ordre, à laquelle sont inscrits les deux polygones; donc les n + 1 points fondamentaux restants, où se rencontrent les côtés opposés, sont situés sur une droite.

Pour n = 2 on obtient deux trilatères conjugués inscrits à une conique, qui déterminent sur la conique 6 points tout à fait arbitraires. En permutant ces 6 points on obtient 60 couples de ces trilatères qui donnent lieu aux 60 droites de PASCAL, desquelles dépendent *uniquement* les groupes de l'hexagramme.

Pour la courbe du 3^me ordre (n = 3) on obtient deux quadrilatères qui déterminent sur la courbe 12 points situés 3 à 3 sur leurs côtés; les 4 points d'intersection de leurs côtés opposés sont situés sur une ligne droite g. En permutant les 12 points on n'obtient pas en général d'autres couples de ces quadrilatères, et, par conséquent, il est *impossible* dans ce cas de faire l'extension demandée.

Mais M. FOLIE dit dans son rapport qu'on peut la faire au moyen des 9 points d'inflexion de la courbe.

Par le corollaire III (pag. 13) de ses *Fondements*, on peut construire des quadrilatères conjugués inscrits à la courbe du 3^me ordre, si l'on a un système de deux trilatères conjugués inscrits à la même courbe.

Soient en effet 0, 1, 2; 0', 1', 2', les points de rencontre de la courbe avec deux sécantes s, s'. Les transversales 00' ≡ t₀, 11' ≡ t₁, 22' ≡ t₂ rencontrent la courbe encore en trois points situés sur une ligne droite u₀. Il est clair que ss'u₀, t₀t₁t₂ donnent deux trilatères conjugués. Si l'on considère maintenant les transversales 01' ≡ T₂, 12' ≡ T₀, 20' ≡ T₁, ces

Cependant, pour la cubique gauche, on a la propriété donnée par CHASLES et complétée par CREMONA, par laquelle on peut faire cette extension. Si 1234567

transversales déterminent une autre droite U_0 par leurs intersections ultérieures avec la courbe. Les quadrilatères

$$U_0 t_0 t_1 t_2, \quad u_0 T_0 T_1 T_2$$

sont évidemment inscrits à la courbe et les intersections de leurs côtés opposés $U_0, u_0; t_0, T_0; t_1, T_1; t_2, T_2$; sont situées sur une droite g .

Dans le cas des 9 points d'inflexion situés 3 à 3 sur 12 droites L , on peut former avec eux 4 trilatères inscrits deux à deux à la courbe. Il n'y a aucune autre droite qui passe par deux des 9 points, car les 12 droites L représentent précisément les 36 droites qui joignent deux à deux les 9 points. Ces 12 droites se rencontrent dans les 12 sommets des trilatères. Elles n'ont en dehors de ces points et des 9 points d'inflexion aucun autre point commun. Or il n'est pas difficile de voir qu'on ne peut pas former avec ces droites, au moyen de la construction susdite pour $n = 3$, des quadrilatères conjugués inscrits à la courbe, qui donnent de nouvelles droites g de la figure. Il est donc impossible dans ce cas de faire l'extension demandée.

M. FOULÉ dit, dans son rapport, que pour les surfaces du 3^{me} ordre l'extension demandée est susceptible de la plus grande généralité.

On a pour ces surfaces le théorème suivant :

« Les faces opposées de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^{me} ordre F^3 se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan. »

Considérons en effet les 12 droites

$$c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{35}, c_{36}, c_{45}, c_{46}$$

d'après les indications ordinaires. (Voir par ex. CREMONA, *Teoria delle superficie* et REYE, *Geometrie der Lage*, II Abt.) Avec ces 12 droites on peut former deux tétraèdres conjugués à F^3 , savoir :

$$\begin{array}{ccc} c_{16}, & c_{23}, & c_{45} & c_{14} & c_{25} & c_{36} \\ c_{14}, & c_{26}, & c_{35} & c_{15} & c_{23} & c_{46} \\ c_{13}, & c_{25}, & c_{46} & c_{16} & c_{24} & c_{35} \\ c_{15}, & c_{24}, & c_{36} & c_{13} & c_{26} & c_{45} \end{array}$$

dont les faces sont évidemment des plans tritangents de F^3 et dont les faces opposées se coupent en 4 droites p d'un plan P . Si l'on considère en effet l'hexagone

$$c_{16} c_{23} c_{46} c_{25} c_{14} c_{35}$$

les faces opposées $c_{16} c_{23}, c_{25} c_{14}, c_{23} c_{46}, c_{14} c_{35}, c_{46} c_{25}, c_{35} c_{16}$ se coupent suivant trois droites p d'un plan P . (BRISCHI, *Annali di matematica*, 1855.) Mais les faces qui sont opposées pour l'hexagone le sont aussi pour les tétraèdres; donc les deux faces opposées restantes se coupent suivant une droite du même plan P .

Si l'on considère les 12 droites c , qui correspondent d'une certaine manière aux 6 points fondamentaux de l'hexagramme, il est clair qu'on ne peut pas obtenir d'autres couples de tétraèdres conjugués inscrits à F^3 , et, par conséquent, aucun autre plan P . Cependant en

sont 7 points d'une cubique gauche, les trois points

12·457

23·576

34·761

où 12, 23, 34 rencontrent les plans 457, 576, 761 sont situés sur un plan E passant par le point 7 (*). CREMONA a démontré que, si le point 7 se déplace sur la courbe, le plan E passe toujours par une sécante p de la cubique (**). Cette droite correspond à l'hexagone 12, 23, 34, 45, 56, 61. On obtient donc en tout 60 sécantes p de la courbe en permutant de toutes les manières possibles les six points fondamentaux. Mais les théorèmes de CHASLES et de CREMONA s'obtenant par projection du théorème de PASCAL même, on peut par projection aussi obtenir les groupes formés par les 60 sécantes p .

À la fin de ce travail je donnerai quelques théorèmes sur ces groupes. Mais ce que je viens de dire est une application toute spéciale et, ajoutons-le aussi, trop facile. Développer les résultats peu intéressants qu'elle fournit ne serait point répondre à la question, par suite de laquelle nous avons à étendre les groupes de l'hexagramme aux courbes et aux surfaces.

Pour y arriver j'ai dû laisser de côté les propriétés connues considérées comme analogues, et partant de la théorie des substitutions j'ai développé dans ce travail une méthode générale, qui me donne des analogies nouvelles et cela assez élégamment.

J'ai fait observer dès le principe que les groupes de l'hexagramme ne sont qu'une expression géométrique particulière de la théorie des groupes de 6

considérant 15 des 27 droites, qui n'appartiennent pas à un double-six on obtient des arrangements analogues à ceux de l'hexagramme, c'est à dire qu'on obtient la figure étudiée par CREMONA. Les triangles des deux tétraèdres, que nous avons considérés plus haut, sont désignés dans le Mémoire de CREMONA par les symboles III I, III II; IV I, IV II; V I, V II; VI I, VI II, où I, II, III, IV, V, VI sont les indices romains relatifs aux 6 figures Π , ou bien aux pentaèdres de la figure dans l'espace. CREMONA appelle les droites p , où se coupent les faces des deux tétraèdres, droites de PASCAL et les plans P , où elles sont situées 4 à 4, plans de PLÜCKER; il en étudie d'abord les propriétés pour une surface F^3 avec un point double et ensuite pour une surface du 3^me ordre quelconque.

Cette figure a été également étudiée par M. CAPORALI, qui a donné aussi une autre extension des groupes de l'hexagramme pour les 16 points et pour les 16 plans singuliers de la surface de KUMMER. (Atti R. Acc. dei Lincei, 1878.)

(*) CHASLES, *Aperçu historique*, pag. 403.

1. (***) *Sur les lignes gauches de 3^me ordre*. CRELLE, 58.

lettres. Représentons, en effet, les 6 points d'une conique par 6 valeurs $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ d'un paramètre. Si l'on permute ces 6 valeurs de toutes les manières possibles, on obtient, en partant d'une figure géométrique quelconque qui dépend uniquement des 6 points fondamentaux, en général 720 figures de même espèce, ou bien seulement un nombre m diviseur de 720. Si cette figure est la conique fondamentale, les 720 coniques correspondantes coïncident avec elle, c'est à dire que *la conique fondamentale se transforme en elle-même*.

Donnons maintenant aux 6 valeurs x_1, x_2, \dots, x_6 une autre signification géométrique, par exemple supposons qu'elles soient les coordonnées homogènes d'un point de l'espace linéaire à 5 dimensions R_5 ; en les permutant on obtient 720 permutations qui nous donnent, *en général*, 720 points correspondant 12 à 12 aux 60 droites de PASCAL. Ces 720 points forment précisément les groupes analogues à ceux de l'hexagramme, car les deux figures ont la même base algébrique, les groupes des substitutions des 6 lettres.

Il y a encore bien d'autres manières d'étendre ces groupes. On trouve, en effet, dans R_5 aussi des sous-groupes spéciaux de 720 points, par exemple un groupe de 120 points, dont les coordonnées sont les différentes racines 6^{mes} de l'unité, correspondant deux à deux aux 60 droites de PASCAL.

Cependant l'extension la plus intéressante dans R_5 est la suivante. Avec les 6 points fondamentaux de la conique on peut former 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$. Ces 15 triangles déterminent deux à deux les 60 droites de PASCAL, qui peuvent être représentées par le symbole $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 relatifs aux indices romains I, II, ..., VI des 6 figures II) (*). Nous verrons dans le chapitre II qu'ils déterminent aussi trois à trois les 20 points de STEINER et les 60 points de KIRKMAN, qui peuvent être représentés respectivement par les symboles $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$, $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$. Les 6 figures II peuvent être représentées par cinq triangles $\Delta_{\alpha\beta}$; par exemple la figure I par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$. Une quelconque de ces figures est formée par 10 droites de PASCAL et les dix points correspondants de KIRKMAN qui sont pôles et polaires par rapport à une conique II.

Or dans l'espace R_5 aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ correspondent 15 surfaces du 2^d degré à 4 dimensions (**), qui représentent géométriquement les mêmes groupes de 48 substitutions que les triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme.

De même aux 60 droites de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ correspondent 60 surfaces du

(*) A. l. c., pag. 28.

(**) Voir nomenclature, Nr. 1.

4^{me} ordre à 3 dimensions, aux 20 points de STEINER correspondent 20 surfaces du 6^{me} ordre à 2 dimensions, aux 60 points de KIRKMAN 60 surfaces du 8^{me} ordre à 2 dimensions et aux 6 figures II 6 configurations II. Je fais observer que ces groupes II sont représentés dans la théorie des substitutions de 6 lettres par les 6 fonctions remarquables à 6 valeurs trouvées par J. SERRET (*).

Ces groupes de points, de droites, de plans, de courbes et de surfaces dans R_5 ont des propriétés très simples et très intéressantes.

Les six points fondamentaux de la conique dans l'hexagramme, peuvent être représentés par les 6 sommets de la pyramide fondamentale dans R_5 . En effet au sommet $(x_1, 0, 0, 0, 0, 0)$ correspond le point x_1 de la conique. Mais la conique elle-même a des représentants dans notre espace. Il suffit de remarquer que la conique se transforme en elle-même en permutant les 6 paramètres x_1, \dots, x_6 des 6 points; donc toute configuration ou toute courbe, surface à 2, 3, 4 dimensions dans R_5 , qui passe ou non par les 6 sommets de la pyramide fondamentale et qui se transforme en elle-même par les permutations des 6 quantités x_1, \dots, x_6 correspond évidemment à la conique.

L'étude des substitutions et des propriétés géométriques, qui en résultent, nous donne donc pour ces configurations, ces courbes, ces surfaces à 2, 3, 4 dimensions, les analogies directes de l'hexagramme, la réponse à la question proposée.

Bien qu'il soit déjà très intéressant de déterminer de telles propriétés dans un espace d'un nombre de dimensions quelconque, *il est bon d'utiliser ces théories pour l'espace à trois dimensions et pour le plan. J'arriverai à ce résultat par l'emploi du principe de projection* (1).

Étant donnée une configuration dans l'espace à $n+1$ dimensions R_{n+1} , nous obtiendrons par projection univoque, sur l'espace ordinaire et sur le plan, des configurations que j'appelle de même classe.

Nous projetterons toutes les figures analogues à celle de l'hexagramme, déterminées dans R_5 , comme il a été dit, sur l'espace à trois dimensions et sur le plan; nous obtiendrons ainsi dans ces espaces les analogies cherchées.

Ces théories m'ont conduit nécessairement à donner tout d'abord des théo-

(*) Journal de LIOUVILLE, 1850.

(1) Je tiens à constater actuellement que j'ai développé ce principe dans mon Mémoire publié récemment dans le 19^{me} volume des Math. Annalen intitulé: *Behandlung der project. Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*. Le travail présent est une vaste application du théorème que j'ai donné dans ce Mémoire sur les configurations générales, pag. 176-178.

rèmes généraux pour l'interprétation géométrique des groupes des substitutions de n lettres dans l'espace linéaire à $n - 1$ dimensions, et à faire ensuite des applications à une configuration quelconque de l'espace à 3 dimensions et du plan.

J'indiquerai en terminant les résultats principaux que j'ai obtenus, en supposant que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ soient les coordonnées d'une droite de l'espace à trois dimensions en prenant comme figure fondamentale les 6 complexes linéaires deux à deux en involution de KLEIN (*). On a alors pour les coordonnées d'une droite la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

une droite quelconque donne lieu en général à un groupe de 720 droites, un point à un groupe de 360 points, auquel se relie un groupe de 360 plans. Je mets cette figure en correspondance directe avec l'hexagramme lui-même et nous aurons dès lors pour cette figure de nouveaux théorèmes.

Je ne considère jamais en elle-même la figure corrélatrice d'une figure donnée. Les propriétés analogues au théorème de BRIANCHON se déduiraient des propriétés de l'hexagramme par le principe de réciprocité. Il y a pourtant des cas où je considère aussi deux figures corrélatrices, mais comme formant ensemble une seule figure.

À cet égard je suppose connu mon Mémoire sur l'hexagramme de 1877, en outre je fais appel aux propriétés principales de la théorie des substitutions; et, dans la seconde interprétation géométrique, à la théorie des complexes de droites.

La méthode que je suis est très générale et peut s'appliquer à l'étude d'une configuration quelconque.

Je crois que mon travail a aussi une certaine importance algébrique; cette méthode donne de la vie à la théorie des groupes des substitutions en les rendant plus visibles, pour ainsi dire, plus plastiques (1).

On pourrait encore étendre les groupes en question à toute courbe ou surface unicursale. L'application directe de la théorie des transformations de CREMONA, l'application à la représentation sur le plan pour les surfaces donnent des analogies nouvelles. Mais ces analogies, comme on le voit facilement, n'ont ni l'élégance, ni l'importance de celles que nous donnons ici.

(*) Math. Annalen, vol. 2. *Ueber die Liniencomplexe 1^{er} und 2^{er} Grades.*

(1) KLEIN a été le premier à utiliser la géométrie pour la représentation des résolvantes des équations algébriques et pour la résolution des équations. Math. Annalen, vol. 4. *Ueber die Resolventenbildung*, etc., et vol. 12. *Eine neue Auflösung der Gleichungen 5^{er} Grades*, etc.

Je donne aussi à la fin un théorème analogue à celui de PASCAL pour 8 points quelconques de la courbe rationnelle du 4^{me} ordre dans l'espace à 4 dimensions.

Pour terminer, je dois avertir que la dernière partie n'est pas complètement rédigée, faute de temps. Les résultats sont donnés, mais les démonstrations sont incomplètes. Au besoin, lors de la publication de ce travail, je développerai ce qui peut y manquer (¹).

(¹) Aujourd'hui je publie en effet les démonstrations complètes en renvois sans altérer le texte.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉ SUR L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA THÉORIE
DES SUBSTITUTIONS DE n LETTRES.

§ 1.

Étude de la correspondance projective entre deux espaces à $n - 1$ dimensions
dans un espace à $n - 1$ dimensions.

NOTATIONS.

1. Je conserve dans le présent travail les dénominations de point, droite, plan dans le sens ordinaire et je désigne ces éléments par les symboles R_0, R_1, R_2 . J'appelle simplement espaces à 3, 4, ..., $n - 1$ dimensions les espaces linéaires à 3, 4, ..., $n - 1$ dimensions et je les désigne par les symboles R_3, R_4, \dots, R_{n-1} . Je dis que deux espaces sont corrélatifs dans l'espace R_{n-1} , lorsque la somme de leurs indices est égale à $n - 2$. Ainsi l'espace R_m a pour corrélatif l'espace R_{n-m-2} . Si $n = 2t$ l'espace R_{t-1} est corrélatif de soi-même.

Deux espaces quelconques $R_m R_{m'}$ se coupent suivant un espace R_a , où $a = m + m' - n + 1$ (1).

J'appelle *courbe C^m du m^{me} ordre* toute figure géométrique dans l'espace R_{n-1} , qui est rencontrée par un espace quelconque R_{n-2} en m points. De même j'appelle *surface à 2, 3, ..., $n - 2$ dimensions et du m^{me} ordre* toute figure géométrique qui est coupée par un espace R_{n-2} respectivement suivant une courbe ou suivant une surface à 2, 3, ..., $n - 3$ dimensions et du même ordre.

Étant donné maintenant un point R_0 et un espace R_{n-2} , qui ne passe pas par R_0 , projetons par R_0 une courbe ou bien une surface quelconque à 2, 3, ..., $n - 3$ dimensions et d'ordre m située dans l'espace R_{n-2} . Nous obtenons autour du point R_0 , comme sommet, un *cône-point* à 2, 3, ..., $n - 2$ dimensions et du même ordre; en effet ce cône est coupé par un espace R_{n-2} quelconque suivant une courbe du même ordre ou suivant une surface à 2, 3, ..., $n - 3$ dimensions et du m^{me} ordre.

(1) Voir A., Math. Annalen, I. c. Einleitung.

Si l'on veut projeter une figure de l'espace R_{n-1} par un espace R_m , il suffit de faire passer par l'espace R_m et les points, les droites, etc., et les espaces R_{n-m-3} de la figure des espaces R_{m+1} , R_{m+2} , etc., R_{n-2} . Si l'on coupe ces espaces par un espace R_{n-m-2} quelconque, qui n'ait aucun point commun avec l'espace R_m , on obtient sur R_{n-m-2} la projection de la figure donnée faite par R_m . Evidemment, l'espace sur lequel on projette et l'espace projetant doivent être deux espaces corrélatifs. Ainsi, pour projeter par exemple une figure de R_{n-1} sur un plan R_2 , il faut la projeter par un espace R_{n-4} ; ou bien, si nous voulons la projection sur un espace à 3 dimensions R_3 , il faut la projeter par un espace quelconque R_{n-5} , qui n'ait avec R_3 aucun point commun.

Le principe de projection nous sera très utile pour étudier les configurations dans l'espace à 3 dimensions et dans le plan. Personne ne s'est encore occupé de ce principe, mais il y a là une méthode féconde pour étudier non seulement des configurations de points, de droites, de plans, mais aussi de courbes et de surfaces dans l'espace à 3 dimensions. L'étude devient beaucoup plus facile si l'on cherche une configuration, une courbe, ou bien une surface à deux dimensions dans R_{n-1} dont la configuration, la courbe ou la surface donnée dans R_3 soit une projection univoque (1).

HOMOGRAPHIES.

2. Nous allons maintenant considérer deux espaces S_{n-1} , S'_{n-1} projectifs situés dans l'espace R_{n-1} . Si nous désignons par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ les coordonnées homogènes d'un point de S_{n-1} et par x'_1, x'_2, \dots, x'_n les coordonnées du point correspondant de S'_{n-1} on a

$$\rho x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Les points doubles sont donnés par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

Ce déterminant est du n^{me} degré en ρ , il y a donc en général n points doubles.

(1) Voir A., Math. Annalen, l. c. Ce travail a été publié à la fin de l'année dernière, tandis que j'ai envoyé le présent Mémoire à l'Académie de Bruxelles au mois de juillet précédent.

(*) Les quantités a_{ik} sont quelconques.

Les n points doubles forment une pyramide à n sommets; si nous prenons cette pyramide comme fondamentale, les formules (1) deviennent

$$\rho x'_i = a_i x_i. \quad (3)$$

Il existe dans l'espace R_{n-1} des homographies spéciales, tout aussi bien que dans l'espace à 3 dimensions, et qui dépendent évidemment du déterminant (2). Cependant je m'occuperai seulement des homographies, que j'appelle *collinéations*, et qui peuvent être toujours représentées par des formules analogues aux formules (3).

Soient $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(n)}$ les n points doubles, qui déterminent la pyramide fondamentale. On voit que cette pyramide a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes R_1 , $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ faces planes R_2 , etc., n faces à $n-2$ dimensions, que nous désignons respectivement par les symboles $A_1^{(1,2)}$, $A_2^{(1,2,3)}$, etc., $A_{n-2}^{(1,2,3,\dots,(n-1))} \equiv A_{n-2}^{(n)}$, où les indices supérieurs indiquent les sommets de la pyramide, par lesquels passe l'arête ou la face considérée. Nous voyons à l'inspection de ces symboles que deux faces sont corrélatives lorsque les indices supérieurs, pris ensemble, contiennent tous les n indices 1, 2, ..., n . Par ex. le point A_0^n et l'espace $A_{n-2}^{(1,2,3,\dots,(n-1))}$ sont corrélatifs.

En général les espaces projectifs S_{n-1} , S'_{n-1} ont dans la face $A_{n-2}^{(1)}$ seulement les $n-1$ points doubles $A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(n)}$; s'ils en ont encore un, tous les points de $A_{n-2}^{(1)}$ correspondront à eux-mêmes. Dans ce cas deux points $P_0 P'_0$ correspondants quelconques sont situés sur une droite, qui passe par le point $A_0^{(1)}$; en d'autres termes on obtient une *homologie* à $n-1$ dimensions, ou bien une *collinéation de première espèce*. Je dis que le point $A_0^{(1)}$ et l'espace $A_{n-2}^{(1)}$ sont le *centre et l'espace d'homologie*, ou bien les deux *espaces fondamentaux* de la collinéation.

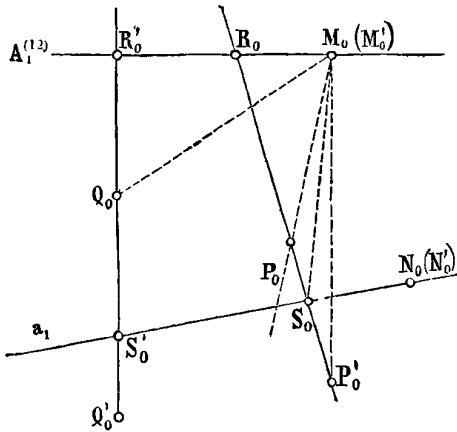
On voit aussi facilement que les points $A_0^{(1)} P_0 P'_0$ et le point d'intersection de la droite, qui les joint, avec l'espace $A_{n-2}^{(1)}$ donnent un rapport anharmonique constant quels que soient les points $P_0 P'_0$. J'appelle ce rapport anharmonique la *caractéristique* de la collinéation.

Si la caractéristique est égal à -1 , alors les points $P_0 P'_0$ sont divisés harmoniquement par $A_0^{(1)}$ et $A_{n-2}^{(1)}$. On a dans ce cas une *involution de première espèce*. Si la caractéristique est égale à une racine primitive m^{me} de l'unité, chaque point $P_0 (Q'_0)$, considéré comme appartenant aux deux espaces S_{n-1} , S'_{n-1} , donne un *cycle projectif* de m points, qu'on obtient en déterminant suc-

cessivement les points correspondants de $P_0(Q_0)$ (*). Je dis alors qu'on a une *collinéation cyclique du m^{me} ordre*.

3. Considérons maintenant les deux espaces $A_1^{(12)}, A_{n-3}^{(12)}$. En général les deux espaces S_{n-1}, S'_{n-1} ont dans $A_1^{(12)}, A_{n-3}^{(12)}$ les points doubles $A_0^{(1)} A_0^{(2)}; A_0^{(3)}, \dots A_0^{(n)}$; mais s'ils en ont encore un dans $A_1^{(12)}$ et $A_{n-3}^{(12)}$ tous les points de ces espaces seront des points doubles de S_{n-1}, S'_{n-1} . Deux points correspondants quelconques $P_0 P_0'$ sont situés, dans ce cas, sur une droite, qui coupe les deux espaces $A_1^{(12)}, A_{n-3}^{(12)}$. Deux plans correspondants $E_2 E_2'$, passant respectivement par les points $P_0 P_0'$, rencontrent l'espace $A_{n-3}^{(12)}$ en un point.

Je dis qu'on a dans ce cas une *collinéation de 2^e espèce* pour laquelle les espaces $A_1^{(12)}, A_{n-2}^{(12)}$ sont les deux espaces fondamentaux. On voit aussi que le rapport anharmonique de deux points correspondants $P_0 P_0'$ et des deux points d'intersection $R_0 S_0$ de la droite $P_0 P_0'$ avec $A_1^{(12)}, A_{n-3}^{(12)}$ est constant. En effet, soient $P_0 P_0', Q_0 Q_0'$ deux couples de points correspondants. Les deux droites



$P_0 P_0', Q_0 Q_0'$ déterminent un espace à trois dimensions, qui passe par la droite $A_1^{(12)}$ et qui coupe l'espace $A_{n-3}^{(12)}$ suivant une droite a_1 , sur laquelle sont situés les points $S_0 S_0'$, d'intersection des droites $P_0 P_0', Q_0 Q_0'$ avec $A_{n-3}^{(12)}$. Soit donné en outre un point $M_0(M_0')$ de la droite $A_1^{(12)}$ comme sommet; projetons par M_0 les points $P_0 P_0'$, et considérons le plan E_2 des trois points $P_0 Q_0 M_0$. Ce plan rencontrera $A_{n-3}^{(12)}$ en un point $N_0(N_0')$, qui sera situé sur la droite a_1 , puisque le plan E_2 appartient aussi à l'espace à

trois dimensions déterminé par les droites $P_0 P_0', Q_0 Q_0'$. Le plan correspondant E_2' passe par $N_0 M_0$ et P_0' et doit couper la droite $Q_0 Q_0'$ au point Q_0' . Si nous projetons maintenant du point N_0 les quatre droites $M_0 R_0, M_0 P_0, M_0 P_0', M_0 S_0$, on obtient quatre plans, qui passent par la droite $N_0 M_0$ et qui

(*) Pour les cycles projectifs de m points dans l'espace à trois dimensions voir BATTAGLINI: *Sulle involuzioni di diversi ordini*, R. Acc. di Napoli, vol. 1, 2, 7. KLEIN et LIE Math. Annalen, vol. 4. *Ueber diejenigen Ebenencurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren Transformationen in sich übergehen*. A.: *Sopra alcune notevoli configurazioni*, ecc. Atti della R. Accademia dei Lincei, 1881.

coupent la droite $Q_0 Q'_0$ aux points $R'_0 Q_0 Q'_0 S'_0$; d'où

$$(P_0 P'_0 S_0 R_0) = (Q_0 Q'_0 S'_0 R'_0)$$

c. q. f. d.

Ce rapport anharmonique est la *caractéristique* de la collinéation. Si elle est égale à -1 on a une *involution* de 2^e espèce.

En général j'appelle *espace fondamental* d'une homographie un espace dont tous les points se correspondent à eux-mêmes.

Si l'on continue comme précédemment on obtient des collinéations de 3^{me}, 4^{me}, ... espèce. Si $n = 2t$, ou bien $n = 2t + 1$ on voit que, tout au plus, on a des collinéations de t^{me} espèce. Donc :

Théorème I. Si $n = 2t$ ou $n = 2t + 1$ il y a dans l'espace à $n - 1$ dimensions R_{n-1} des collinéations de 1^{re}, 2^e, 3^{me}, ... t^{me} espèce, dans lesquelles se correspondent à eux-mêmes tous les points de deux espaces fondamentaux correspondants, respectivement $A_0, A_{n-2}; A_1, A_{n-3}; \dots; A_{t-1}, A_{t-1}$; ou bien A_{t-1}, A_t . Deux points correspondants quelconques $P_0 P'_0$ sont situés sur une droite, qui rencontre les deux espaces fondamentaux en deux points $B_0 S_0$. Les points $R_0 S_0$ donnent avec $P_0 P'_0$ un rapport anharmonique constant, la caractéristique de la collinéation.

Si la caractéristique est égale à -1 on a des involutions de 1^{re}, 2^e, 3^{me}, ... t^{me} espèce. Si elle est égale à une racine m^{me} primitive de l'unité on a des collinéations cycliques de 1^{re}, 2^e, ... t^{me} espèce et du m^{me} ordre (1).

HOMOGRAPHIES CYCLIQUES (2).

4. Comme nous aurons besoin plus loin de ces homographies, je vais en donner les propriétés principales.

Nous avons trouvé pour la correspondance homographique générale les formules

$$\rho x'_i = a_i x_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

(1) Pour $n = 4$ on obtient deux collinéations dans l'espace à trois dimensions; pour la première les deux espaces fondamentaux sont un point et un plan; pour la seconde ce sont deux droites quelconques. Si la caractéristique est égale à -1 on obtient des collinéations ou homologies en involution. (*Involutorische Collinéation* ou bien simplement *Involution*. Voir par ex. FIEDLER *Darstell. Geom.* et REYE: *Geom. der Lage*, II Abth.) C'est donc dans ce sens que je me suis servi du mot « involution » et non dans le sens de BATTAGLINI, car j'appelle les *involutions* de BATTAGLINI, comme nous le verrons mieux plus loin, *cycles projectifs*, si l'on considère ces involutions en elles-mêmes, et *collinéations cycliques* lorsqu'il s'agit d'une collinéation ou homologie pour laquelle la caractéristique est égale à une racine m^{me} de l'unité.

(2) On voit par ce numéro même que je n'ai pas non plus appelé involutions les Homographies cycliques, comme le veut faire croire M. FOLIE dans son rapport.

Si nous opérons successivement cette transformation à un point quelconque y_i , nous obtenons un groupe de points

$$y_i, \quad a_i y_i, \quad a_i^2 y_i, \dots, \quad a_i^m y_i, \dots \quad (2)$$

que nous appelons un *groupe projectif* de points dans l'espace R_{n-1} . Il est clair qu'on passe du point y_i au point $a_i^m y_i$ par les formules

$$\rho x'_i = a_i^m x_i \quad (3)$$

on voit donc que *les points* $y_i, a_i^m y_i, a_i^{2m} y_i, \dots$, *forment aussi un groupe projectif.*

Si l'on suppose que les constantes a_i sont toutes positives, les points du groupe (1), qui sont en nombre infini, déterminent une *courbe transcendante* W . On obtient cette courbe en éliminant m et ρ , de manière qu'on a

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log \frac{a_2}{a_n}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_n}{a_1}} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_1}{a_2}} = 1, \quad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_3}{a_n}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log \frac{a_n}{a_2}} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_2}{a_3}} = 1, \text{ etc.} \quad (4)$$

En supposant $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ et puisque on a

$$\log \frac{a_2}{a_3} + \log \frac{a_3}{a_1} + \log \frac{a_1}{a_2} = 0,$$

nous pouvons écrire

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log \frac{a_2}{a_n}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_n}{a_1}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_2}{a_n} + \log \frac{a_n}{a_1}}, \quad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_3}{a_n}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log \frac{a_n}{a_2}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_3}{a_n} + \log \frac{a_n}{a_2}}, \text{ etc.} \quad (5)$$

La courbe W peut donc être donnée par l'intersection de $n-2$ cônes à $n-1$ dimensions dont les sommets sont $n-2$ espaces A_{n-1} de la pyramide fondamentale. Cette courbe sera algébrique lorsque les logarithmes des rapports des coefficients a seront proportionnels à des nombres rationnels quelconques. Comme les courbes W planes et de l'espace à trois dimensions, les courbes W des espaces à plus de trois dimensions ont la propriété de se transformer en elles-mêmes par des transformations infiniment petites (*).

En effet, en posant

$$a_n = x_n = 1 \quad y_i = 1, \text{ etc.}$$

en différenciant les équations (5) on a:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{x_2 \log a_2}{x_1 \log a_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \frac{x_3 \log a_3}{x_2 \log a_2}, \dots, \quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}} = \frac{x_{n-1} \log a_{n-1}}{x_{n-2} \log a_{n-2}}. \quad (6)$$

(*) Voir KLEIN, LIE et A.: *Sopra alcune configurazioni*, l. c.

Si nous posons

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 + x'_1 \log a_1 dm \\ x_2 &= x'_2 + x'_2 \log a_2 dm \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x'_{n-1} + x'_{n-1} \log a_{n-1} dm \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où dm est une quantité infiniment petite, et si nous différencions nous obtenons les équations (6). Mais les formules (6) nous donnent une transformation linéaire infiniment petite; donc, en opérant sur les courbes W une telle transformation, elles se transforment en elles-mêmes. En la répétant on pourra passer d'un point P_0 de la courbe W à un quelconque de ses points Q_0 ; on obtiendra ainsi une transformation de la forme

$$\rho x_i = a_i^m x_i. \quad (8)$$

Nous voyons que dans toutes les homographies données par les transformations d'une courbe W en elle-même, la pyramide fondamentale est toujours la pyramide des points doubles. Les tangentes p_0, q_0 en P_0, Q_0 à la courbe sont deux droites correspondantes dans l'homographie (8). On a donc:

Théorème II. Un groupe projectif de points, détermine une courbe transcendante W , qui dans certains cas peut être aussi algébrique. Les tangentes d'une courbe W quelconque rencontrent quatre faces quelconques à $n-2$ dimensions de la pyramide des points doubles, donnée par le groupe projectif, en quatre points d'un rapport anharmonique constant.

Théorème III. Deux courbes quelconques W se rencontrent seulement aux sommets de la pyramide fondamentale, par où elles passent.

Une courbe W a toutes ses singularités sur les sommets, arêtes, etc., de la pyramide fondamentale.

Théorème IV. Une droite R_1 ou un plan R_2 , etc., donne lieu à une surface engendrée par une droite, ou par un plan, etc., qui relativement à ses droites, plans, etc., a des propriétés analogues à celles des courbes W relativement à leurs points.

5. Si nous supposons dans les formules (7) du numéro précédent $a_i^m = 1$ ou bien $a_i = \sqrt[m]{1}$, le point $a_i^m y_i$ du groupe projectif tombe sur le point y_i même, c'est à dire que nous avons un cycle projectif de m points.

Les formules (8) deviendront

$$\rho x'_i = e^{\frac{2\mu i \pi}{m} \sqrt[m]{-1}} \quad \text{ou bien} \quad \rho x'_i = r^{\mu} x_i$$

où $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ et r est une racine primitive m^{me} de l'unité.

Si l'on multiplie les coordonnées d'un point quelconque, par ex. y_1, y_2, \dots, y_n , par n des racines m^{mes} de l'unité de toutes les manières possibles, on obtient m^{n-1} points qui forment un groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$.

Considérons les deux points de ce groupe, dont les coordonnées sont

$$r^{p_1} y_1, \quad r^{p_2} y_2, \dots, \quad r^{p_s} y_s, \quad r^{p_{s+1}} y_{s+1}, \dots, \quad r^{p_{n-1}} y_{n-1}, \quad y_n \quad (1)$$

$$r^{p_1+q_1} y_1, \quad r^{p_2+q_2} y_2, \dots, \quad r^{p_s+q_s} y_s, \quad r^{p_{s+1}+q_{s+1}} y_{s+1}, \dots, \quad r^{p_{n-1}+q_{n-1}} y_{n-1}, \quad y_n. \quad (2)$$

On voit facilement qu'ils sont situés sur une droite, qui rencontre les deux faces

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s \equiv A_{s-1} = 0; \quad x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_n \equiv A_{n-s-1} = 0$$

de la pyramide fondamentale. On voit aussi qu'on peut passer du point (1) au point (2) en multipliant les s premières coordonnées de (1) par r^{q_1} et les $n-s$ dernières par r^{q_2} .

Si maintenant nous faisons la même chose avec le point (2) nous obtenons le point

$$r^{p_1+2q_1} y_1, \dots, \quad r^{p_s+2q_s} y_s, \quad r^{p_{s+1}+2q_{s+1}} y_{s+1}, \dots, \quad y_n \quad (3)$$

et en continuant à faire la même opération avec le point (3) et ainsi de suite, il est clair, qu'on obtient un *cycle projectif* de m points situés sur une même droite. Donc:

Théorème V. Si l'on multiplie par ex. les s premières coordonnées d'un point quelconque du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ successivement par une puissance r^{q_1} d'une racine primitive m^{me} de l'unité, et les $n-1$ autres par une autre puissance r^{q_2} , on obtient m points d'un cycle projectif, situés sur une droite. Cette droite rencontre les deux faces

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s \equiv A_{s-1} = 0, \quad x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_n \equiv A_{n-s-1} = 0$$

de la pyramide fondamentale. D'après le théorème I les m points forment un cycle de m^{me} ordre et de s^{me} espèce.

Théorème VI. Pour chaque couple de faces opposées A_{s-1}, A_{n-s-1} de la pyramide fondamentale le groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ se décompose en m^{n-2} cycles projectifs de s^{me} espèce et d'ordre m , situés respectivement sur autant de droites, qui coupent les deux faces A_{s-1}, A_{n-s-1} .

Si $n=2t$, ou bien $n=2t+1$, on a tout au plus des cycles projectifs de t^{me} espèce, situés sur des lignes droites.

6. Considérons maintenant les deux points

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \dots, \quad y_{n-1}, \quad y_n \quad (1)$$

$$r y_1, \quad r^2 y_2, \quad r^3 y_3, \dots, \quad r^{n-1} y_{n-1}, \quad y_n. \quad (2)$$

On passe du point (1) au point (2) en multipliant les coordonnées de (1) respectivement par $r, r^2, \dots, r^{n-1}, 1$. Si nous multiplions par ces mêmes quantités les coordonnées de (2), nous obtenons le point

$$r^2 y_1, \quad r^4 y_2, \dots, \quad r^{n-2} y_{n-1}, \quad y_n. \quad (3)$$

En continuant ainsi on obtient m points d'un cycle projectif, mais qui ne sont pas situés sur une droite. Le m^{me} point sera

$$r^{m-1} y_1, \dots, \quad r y_{n-1}, \quad y_n. \quad (m)$$

Ces m points sont situés sur une courbe W . Il n'est pas difficile de voir, d'après le n.º 4, que cette courbe est algébrique. Je dis que *ce cycle est du m^{me} ordre et de la $(t+1)^{\text{me}}$ espèce*, lorsque $n=2t$ ou $n=2t+1$. Donc:

Théorème VII. Les m points du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$, qu'on déduit d'un point quelconque de $(y_i)_{m^{n-1}}$ en multipliant ses coordonnées respectivement par $r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, 1$ forment un cycle projectif de la $(t+1)^{\text{me}}$ espèce et du m^{me} ordre ($n=2t$ ou $=2t+1$), qui est situé sur une courbe algébrique W .

Si $n=m$ il est facile, par ce qui précède, de démontrer le théorème suivant:

Théorème VIII. Les n points d'un cycle projectif de $(t+1)^{\text{me}}$ espèce et d'ordre n sont situés sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre ().*

7. Si au lieu de considérer un point y_i on considère la surface du 2^{d} degré à $n-2$ dimensions

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \quad (1)$$

et si l'on multiplie $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ de toutes les manières possibles par n racines m^{es} de l'unité, on obtient aussi un groupe de m^{n-1} surfaces du 2^{d} degré à $n-2$ dimensions $(S)_{m^{n-1}}$. Or, avec ses m^{n-1} surfaces on peut former, d'une manière analogue à celle des numéros précédents, des cycles projectifs de m surfaces et respectivement de la 1^{ere} , 2^{e} , etc. $(t+1)^{\text{me}}$ espèce et d'ordre m .

Si nous considérons deux surfaces d'un cycle projectif de s^{me} espèce, par ex.:

$$r^{p_1} x_1^2 + \dots + r^{p_s} x_s^2 + r^{p_{s+1}} x_{s+1}^2 + \dots + r^{p_{n-1}} x_{n-1}^2 + x_n^2 = 0$$

$$r^{p_1+q_1} x_1^2 + \dots + r^{p_s+q_s} x_s^2 + r^{p_{s+1}+q_{s+1}} x_{s+1}^2 + \dots + r^{p_{n-1}+q_{n-1}} x_{n-1}^2 + x_n^2 = 0$$

on déduit:

Toutes les surfaces d'un cycle projectif de s^{me} espèce, où $s < t+1$, se touchent suivant deux surfaces du 2^{d} degré respectivement à $s-2$ et à $n-s-2$

(*) La courbe d'ordre $n-1$ est la courbe la plus simple qui puisse exister dans l'espace R_{n-1} , sans être située dans un espace de dimensions moindre.

Voir maintenant mon travail des Math. Annalen, I. c.

dimensions, situées dans deux faces opposées A_{s-1} , A_{n-s-1} de la pyramide fondamentale.

Si l'on considère un cycle projectif de $(t+1)^{me}$ espèce, par ex. celui qui est déterminé par les deux surfaces

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 &= 0 \\ r x_1^2 + r^2 x_2^2 + \dots + r^{n-1} x_{n-1}^2 + x_n^2 &= 0; \end{aligned}$$

on voit que les m surfaces du cycle rencontrent les arêtes de la pyramide fondamentale en des points différents.

Nous avons aussi les théorèmes suivants:

Théorème IX. Un cycle projectif de m points du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ de s^{me} espèce a le même cycle polaire par rapport aux surfaces du 2^d degré de m^{n-2} cycles du groupe $(S)_{m^{n-1}}$ de s^{me} espèce. Si le cycle du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ est de la $(t+1)^{me}$ espèce, la courbe W qu'il détermine, a la même polaire réciproque par rapport à m^{n-1} cycles de surfaces du 2^d degré et de $(t+1)^{me}$ espèce.

Théorème X. Le groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ a par rapport à toutes les m^{n-1} surfaces du groupe $(S)_{m^{n-1}}$ le même groupe polaire de m^{n-1} espaces v_i à $n-2$ dimensions, qui forment aussi un groupe $(v_i)_{m^{n-1}}$.

Théorème XI. La polaire réciproque d'une surface du 2^d degré d'un cycle d'espèce quelconque par rapport à une autre surface du cycle, appartient au même cycle.

La polaire réciproque d'une surface du 2^d degré par rapport à une autre surface du groupe $(S)_{m^{n-1}}$ est une surface du même groupe ⁽¹⁾.

§ 2.

Interprétation géométrique d'une substitution quelconque, particulièrement de la forme (12) (34)... $(m-1, m)$.

8. Soient y_1, y_2, \dots, y_n les coordonnées d'un point S_0 de l'espace K_{n-1} ; si nous permutons les n indices des coordonnées de toutes les manières possibles nous obtenons $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = N$ points, qui représentent les N permutations des indices $1, 2, 3, \dots, n$. Je dis qu'ils forment un groupe $(S_0)_N$.

⁽¹⁾ Pour les systèmes polaires voir A., Math. Ann., l. c., pag. 184 et suivantes. Pour les groupes $(y_i)_{m^{n-1}}$ et $(S)_{m^{n-1}}$ lorsque $n = 3, 4$ voir A.: *Sopra alcune configurazioni*, etc.

On peut mettre une substitution quelconque sous la forme

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k & l & m & \dots & p \end{array} \right| \quad (1)$$

(k, l, m, \dots, p étant, à l'ordre près, identiques à $1, 2, \dots, n$). La substitution peut donc s'exprimer par la transformation linéaire

$$\left. \begin{array}{l} \rho x'_1 = x_k \\ \rho x'_2 = x_l \\ \vdots \\ \rho x'_n = x_p \end{array} \right\} \quad (2)$$

On voit très clairement que nous avons à faire à une homographie entre deux espaces à $n-1$ dimensions, que nous avons déjà étudiée dans le paragraphe précédent.

Les points doubles sont donnés par le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccccc} -\rho x_1, & 0, & 0, \dots & x_k, \dots & & 0 \\ 0, & -\rho x_2, & 0, \dots & x_l, \dots & 0, \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0, & 0, & 0, \dots, & 0, \dots & 0, \dots & x_p, \dots & -\rho x_n \end{array} \right| = 0. \quad (3)$$

Les points doubles de cette homographie restent invariables par la substitution (1). Donc :

Théorème XII. En opérant une substitution quelconque sur les indices des coordonnées d'un point y_i , on obtient en général n points qui restent invariables.

9. Nous avons trouvé (n.° 3) certaines espèces de collinéations et d'homographies (n.° 4) que nous rencontrons ici comme des cas spéciaux d'une substitution quelconque.

a) *Considérons d'abord la substitution (12).*

En opérant cette substitution sur un point

$$\begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & y_3, \dots, & y_n \\ \cdot y_2, & y_1, & y_3, \dots, & y_n \end{array}$$

on obtient le point

Dans ce cas nous avons donc une involution de première espèce; c'est à dire que les deux points sont situés sur une droite, qui passe par le point des coordonnées

$$1, \quad -1, \quad 0, \quad 0, \dots \quad 0 \equiv P_0^{(12)}$$

tandis que l'espace fondamental de l'involution est

$$x_1 - x_2 \equiv \Pi_{n-2}^{(12)} = 0.$$

Or, comme la pyramide fondamentale a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes, il est clair, que nous avons $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$, situés respectivement sur ces droites et un égal nombre d'espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$. Il y a encore un autre groupe de $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{'(ik)}$, qui sont situés respectivement sur les arêtes de la pyramide fondamentale, dont les coordonnées sont de la forme

$$0, \quad 0, \dots \quad 1, \quad 0, \dots \quad 1, \quad 0, \dots \quad 0.$$

Par exemple les points $P_0^{(12)}$ et $P_0^{'(12)}$ sont situés sur l'arête $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$ et divisent harmoniquement le segment $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$. Il y a aussi un autre groupe de $\frac{n(n-1)}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{'(ik)}$, dont les équations sont de la forme

$$x_i + x_k = 0.$$

L'espace $\Pi_{n-2}^{(12)}$ contient tous les points $P_0^{(ik)}$, excepté ceux qui ont dans leurs indice supérieur seulement l'indice 1 ou l'indice 2; c'est à dire qu'il contient $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ points $P_0^{(ik)}$. En outre, il passe par tous les points $P_0^{(ik)}$ qui n'ont ni l'indice 1, ni l'indice 2 ou ni l'un, ni l'autre. Il passe donc par $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$. La même chose a lieu pour les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ par rapport aux points $P_0^{(ik)}$ et $P_0^{'(ik)}$.

Si l'on considère la surface à $n-2$ dimensions du 2^d degré

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \equiv S_{n-2}^2 = 0 \tag{1}$$

on voit facilement que les points $P_0^{(ik)}$ et $P_0^{'(ik)}$ ont pour espaces polaires, par rapport à la surface (1), les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ et $\Pi_{n-2}^{'(ik)}$; c'est à dire que la figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0^{'(ik)}$ et par les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$, $\Pi_{n-2}^{'(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface (1). Donc:

Théorème XIII. Sur chaque arête de la pyramide fondamentale, par ex. $A_0^{(i)} A_0^{(k)} \equiv A_1^{(ik)}$ il y a deux points $P_0^{(ik)}$, $P_0^{\prime(ik)}$, dont les coordonnées sont respectivement $0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0$; $0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$, et qui divisent harmoniquement le segment $A_0^{(i)} A_0^{(k)}$. Il y a aussi pour chaque face à $n-3$ dimensions de la pyramide fondamentale, par exemple $A_{n-2}^{(i)} A_{n-2}^{(k)} \equiv A_{n-3}^{(ik)}$ deux espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$, $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$, dont les équations sont de la forme

$$x_i \mp x_k = 0$$

qui passent par $A_{n-3}^{(ik)}$ et qui divisent harmoniquement les deux faces $A_{n-2}^{(i)}$, $A_{n-2}^{(k)}$. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{(k)}$ passent par le point « unité » (le point qui a toutes les coordonnées égales à l'unité).

Un espace quelconque $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ contient $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ points $P_0^{(ik)}$ et $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ points $P_0^{\prime(ik)}$. De même un espace $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$ contient $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ points $P_0^{\prime(ik)}$ et $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$.

Théorème XIV. La figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0^{\prime(ik)}$ et par les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$, $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions $\Sigma x_i^2 \equiv S_{n-2}^2 = 0$.

Théorème XV. Les $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = N$ points qu'on obtient en permutant de toutes les manières possibles les indices $1, 2, 3, \dots, n$ des coordonnées d'un point S_0 dans l'espace R_{n-1} , et qui forment un groupe $(S_0)_N$, sont situés deux à deux sur $3 \cdot 4 \dots n = \frac{N}{2}$ droites, qui passent par un quelconque des points $P_0^{(ik)}$. Les deux points sur une de ces droites sont divisés harmoniquement par $P_0^{\prime(ik)}$ et par l'espace $\Pi_{n-2}^{(ik)}$.

b) Voyons maintenant une substitution de la forme (12) (34).

Du point $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \dots, y_n$ on passe au point

$$y_2, \quad y_1, \quad y_4, \quad y_3, \quad y_5, \dots, y_n.$$

Pour cette substitution tous les points de la droite $P_0^{(12)} P_0^{(34)}$ et tous les points de l'espace à $n-3$ dimensions $\Pi_{n-2}^{(12)}$, $\Pi_{n-2}^{(34)}$ restent fixes. En effet, chaque point de la droite $P_0^{(12)} P_0^{(34)}$ a ses coordonnées de la forme

$$1, \quad -1, \quad \lambda, \quad -\lambda, \quad 0, \quad 0, \dots, \quad 0$$

où λ est un paramètre. Cela a lieu aussi pour chaque point de l'espace $\Pi_{n-2}^{(12)} \Pi_{n-2}^{(34)}$,

qui est donné par les deux équations

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0$$

c'est à dire que nous avons une *involution de 2^e espèce* (n.^o 3). Les N points du groupe $(S_0)_N$ sont donc situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites, qui rencontrent la droite $P_0^{(12)} P_0^{(34)} \equiv P_1^{(12)(34)}$ et l'espace $\Pi_{n-2}^{(12)} \Pi_{n-2}^{(34)} \equiv \Pi_{n-3}^{(12)(34)}$. Or le nombre des droites P_1 , qui passent par le point $P_0^{(12)}$ est $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, il y en a en tout $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$; donc:

Théorème XVI. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$ déterminent $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$ droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ (où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre indices différents de la série 1, 2, ... n), qui contiennent les deux points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\gamma\delta)}$. De même les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ déterminent $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$ espaces $\Pi_{n-3}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, où se rencontrent les deux espaces $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)}, \Pi_{n-2}^{(\gamma\delta)}$.

Théorème XVII. Les N points du groupe $(S_0)_N$ sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites qui coupent une des droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et l'espace correspondant $\Pi_{n-3}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Les deux points sur une des $\frac{N}{2}$ droites sont divisés harmoniquement par la droite P_1 et par l'espace Π_{n-3} .

c) Il est évident que l'on peut faire des considérations analogues pour la substitution (12) (34) (56); passons néanmoins immédiatement à la substitution de la forme

$$(12)(34)\dots(m-1, m)$$

où m est naturellement un nombre pair plus petit ou égal à n , si n est pair.

Du point

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{m-1}, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$$

on passe au point

$$y_2, y_1, y_4, y_3, \dots, y_m, y_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_n.$$

On peut facilement vérifier, que les points de l'espace déterminé par les points $P_0^{(12)}, P_0^{(34)}, \dots, P_0^{(m-1, m)}$, que je désigne par le symbole $P_{\frac{n}{2}-1}^{(12)(34)\dots(m-1, m)}$, se transfor-

ment en eux-mêmes, ainsi que les points de l'espace, où se rencontre les $\frac{m}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{(12)}, \dots, \Pi_{n-2}^{(m-1, m)}$. Pour trouver le nombre des plans $P_2^{(12)(34)(56)}$, il suffit de séparer les indices 1234 des restants 5, 6, ..., n .

Or, avec ceux-ci on peut former $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ combinaisons de deux indices, et si nous les combinons avec (12) (34) nous obtenons $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ plans P_2 , qui ont la droite $P_1^{(12)(34)}$ commune. Si l'on fait la même chose pour toutes les $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$ droites P_1 , on trouve que le nombre de plans P_2 est précisément $\frac{n(n-1)\dots(n-5)}{2^4 \cdot 3}$. En continuant ainsi on arrive à cette déduction,

que le nombre des espaces $P_{\frac{m}{2}-1}$ et des espaces $\Pi_{n-\frac{m}{2}-1}$ est

$$\frac{n(n-1)(n-m+1)}{2^{\frac{m}{2}+1} \cdot 3 \cdot 4 \dots \frac{m}{2}}$$

si $n = m = 2t$ il en résulte que le nombre des espaces P_{t-1}, Π_{t-1} est

$$\frac{t(t+1)(t+2)\dots(2t-1)}{2^{t-1}}$$

Donc:

Théorème XVIII. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$ déterminent

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m!}{2}}$$

espaces $P_{\frac{m}{2}-1}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$, ($\alpha, \beta, \dots, \nu$ sont m indices de la série 123... n) qui passent par les points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\gamma\delta)}, \dots, P_0^{(\mu\nu)}$. On a un égal nombre d'espaces $\Pi_{n-\frac{m}{2}-1}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$, déterminés par l'intersection des $\frac{m}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)} \dots \Pi_{n-2}^{(\mu\nu)}$, et qui sont les polaires des premiers par rapport à la surface $S_{n-2}^2 = 0$.

Si $n = 2t$ on a $\frac{t(t+1)\dots(2t-1)}{2^{t-1}}$ espaces $P_{t-1}^{(\alpha\beta)\dots(\tau\zeta)}$ ($\alpha, \beta, \dots, \tau, \zeta$ sont identiques à l'ordre près aux indices 1, 2, ..., n) et un égal nombre d'espaces $\Pi_{t-1}^{(\alpha\beta)\dots(\tau\zeta)}$.

Nous voyons que les espaces

$$\begin{aligned} x_\alpha - x_\beta &\equiv \Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)} = 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_\tau - x_\zeta &\equiv \Pi_{n-2}^{(\tau\zeta)} = 0 \end{aligned}$$

passent par les points $P'_0^{(\alpha\beta)} P'_0^{(\gamma\delta)} \dots P'_0^{(\tau\zeta)}$, donc:

Théorème XIX. Les espaces $\Pi_{i-1}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\tau\zeta)}$ sont déterminés par les points $P'_0^{(\alpha\beta)}, P'_0^{(\gamma\delta)}, \dots, P'_0^{(\tau\zeta)}$.

Théorème XX. Les N points du groupe $(S_0)_N$ sont situés, deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites qui rencontrent deux espaces correspondants quelconques $P_{\frac{m}{2}-1}, \Pi_{\frac{m}{2}-1}$. Les deux points d'une de ces droites sont divisés harmoniquement par les deux espaces.

De ce qui précède on tire aussi la déduction suivante:

Théorème XXI. Les points $P_0^{(ik)}$ sont situés dans l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ et, en conséquence, 3 à 3 sur les $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ droites d'intersection de cet espace avec les faces planes de la pyramide fondamentale; 6 à 6 sur $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ plans et 10 à 10 sur $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ espaces à trois dimensions, etc.

Les 6 points d'un tel plan sont les sommets d'un quadrilatère et les 10 points d'un tel espace à trois dimensions sont les sommets d'un pentaèdre.

Les points $P_0^{(ik)}$ et $P_0^{(ik)}$ d'une quelconque des faces planes de la pyramide fondamentale sont les sommets d'un quadrilatère, et ceux d'une quelconque des faces à trois dimensions forment trois tétraèdres d'un système desmique (*). Il y a donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ de ces quadrilatères et $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ de ces systèmes desmiques.

§ 3.

Substitutions cycliques.

10. a) Nous considérons d'abord une substitution cyclique de tous les n indices, par exemple

$$(123\dots n).$$

(*) Voir A.: *Sopra alcune notevoli configurazioni*, etc. I. c.

Du point $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ on obtient les $n-1$ autres points

$$\left. \begin{array}{c} y_2 y_3 y_4 \dots y_1 \\ \vdots \\ y_1 y_1 y_2 \dots y_{n-1} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Or, ces points forment un cycle projectif (n.º 5) ou, en d'autres termes, la substitution $(1234\dots n)$ donne une homographie cyclique d'ordre n . En effet, les points doubles de l'homographie donnée par la substitution $(123\dots n)$ sont évidemment les n points

$$\left. \begin{array}{ccccc} 1, & 1, & 1, \dots, & 1, & 1 \\ r_n, & r_n^2, & r_n^3, \dots, & r_n^{n-1}, & 1 \\ r_n^2, & r_n^4, & r_n^6, \dots, & r_n^{n-2}, & 1 \\ \vdots & & & & \\ r_n^{n-1}, & r_n^{n-2}, & r_n^{n-3}, \dots, & r_n, & 1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

où r_n est une racine n^{me} primitive de l'unité. Nous voyons qu'il y a dans chaque ligne verticale et dans chaque ligne horizontale de (2) toutes les racines n^{mes} de l'unité. Mais les n points (2) d'après le numéro 5 forment un cycle projectif de n points par rapport à la pyramide fondamentale, situé sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre; donc les faces à $n-2$ dimensions de la pyramide déterminée par les n points (2), peuvent être écrites sous la forme

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ r_n x_1 + r_n^2 x_2 + r_n^3 x_3 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ r_n^{n-1} x_1 + r_n^{n-2} x_2 + r_n^{n-3} x_3 + \dots + x_n = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

On voit aussi que le cycle (2) est polaire du cycle (3) par rapport à la surface S_{n-2}^2 (n.º 7). Si nous calculons les coordonnées des n points (1) par rapport à la pyramide (3), nous voyons qu'elles sont précisément de la forme

$$\begin{array}{ccc} y'_1, & y'_2, \dots, & y'_n \\ r_n y'_1, & r_n^2 y'_2, \dots, & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ r_n^{n-1} y'_1, & r_n^{n-2} y'_2, \dots, & y'_n \end{array}$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc:

Théorème XXII. Les points doubles de l'homographie donnée par une substitution cyclique de tous les n indices par ex. (1234... n) forment un cycle projectif de n points par rapport à la pyramide fondamentale, cycle qui est situé sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Théorème XXIII. Les n points qu'on obtient en partant d'un point S_0 et opérant sur ce point la substitution cyclique (123... n) forment aussi un cycle projectif par rapport à la pyramide des points doubles. Ces points sont situés sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment $\frac{N}{n}$ cycles projectifs, qui correspondent à la substitution (123... n).

Or, les points de la forme (2), qui ont pour coordonnées les différentes puissances d'une racine primitive n^{me} de l'unité (mod n) sont en tout $\frac{N}{n}$. J'appelle (r_n) le groupe qu'ils forment.

Dans le groupe total des substitutions de n lettres il y en a $\frac{N}{n}$ de cycliques, qui contiennent tous les n indices.

On sait que la μ^{me} puissance d'une substitution S cyclique de l'ordre n est aussi une substitution cyclique si μ est premier avec n . Si n est premier il est clair que toutes les puissances de S sont des substitutions cycliques. Si n n'est pas premier, supposons que C représente la quantité des nombres premiers avec n .

Dans le premier cas on voit que les $\frac{N}{n}$ substitutions cycliques du groupe total déterminent $\frac{N}{n^2}$ homographies cycliques; dans le second cas elles en déterminent $\frac{N}{nC}$.

Théorème XXIV. Les $\frac{N}{n}$ substitutions cycliques du groupe total des substitutions de n lettres donnent lieu à $\frac{N}{n^2}$ homographies cycliques, si n est premier, et $\frac{N}{nC}$ si n n'est pas premier. Les points doubles de ces homographies sont $n-1$ points du groupe (r_n) et le point unité. Ces points forment un cycle projectif d'ordre n par rapport à la pyramide fondamentale, situé sur une courbe rationnelle W du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Théorème XXV. Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment de $\frac{N}{n}$ ou de

$\frac{N}{nC}$ manières différentes $\frac{N}{n}$ cycles projectifs de n points, chaque cycle étant situé sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

b) Nous allons maintenant nous occuper des substitutions cycliques, qui contiennent moins de n indices, par exemple :

$$(1, 2, 3, \dots, s) \quad \text{où } s < n.$$

Du point

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \dots, \quad y_s, \quad y_{s+1}, \dots, \quad y_n$$

on obtient les points

$$\left. \begin{array}{cccccc} y_2, & y_3, & y_4, \dots, & y_1, & y_{s+1}, \dots, & y_n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ y_s, & y_1, & y_2, \dots, & y_{s-1}, & y_{s+1}, \dots, & y_n. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Si nous projetons les s points (1) par la face A_{n-s-1}

$$x_{s+1} = 0, \quad x_{s+2} = 0, \dots \quad x_n = 0$$

de la pyramide fondamentale sur la face opposée A_{s-1} , on obtient sur celle-ci un cycle projectif de s points. On a donc une homographie (*) cyclique d'ordre s autour de l'espace A_{n-s-1} . Les espaces doubles de cette homographie sont les espaces R_{n-1} qui passent par A_{n-s-1} et par les s points suivants

$$\left. \begin{array}{cccccc} 1, & 1, & 1, \dots & 1, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ r_s, & r_s^2, & r_s^3, \dots & r_s^{s-1}, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ r_s^2, & r_s^4, & r_s^5, \dots & r_s^{s-2}, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ r_s^{s-1}, & r_s^{s-2}, & r_s^{s-3}, \dots & r_s^s, & 1, & 0, \dots, & 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Les $s-1$ derniers points de (2) sont situés sur l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ et sur l'espace A_{s-1} . On obtient donc dans cet espace une homographie cyclique d'ordre s .

Théorème XXVI. Une substitution cyclique de $s < n$ indices donne une homographie cyclique d'ordre s autour d'une des faces A_{n-s-1} de la pyramide fondamentale. Les s espaces doubles R_{n-s} de cette homographie passent par

(*) De même que dans l'espace R_2 on peut avoir autour d'une droite des faisceaux de plans projectifs, de même dans l'espace R_{n-1} on peut avoir autour d'un espace, par ex. R_{n-s-1} des systèmes projectifs $s-1$ fois infinis.

A_{n-s-1} ; par le point unité et respectivement par $s-1$ points, situés dans la face A_{s-1} opposée à A_{n-s-1} , dont les s coordonnées, désignées par les indices de la substitution, sont les différentes racines s^{mes} de l'unité.

Par ce qui précède, en posant $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = S$, on a :

Théorème XXVII. Autour d'une face A_{n-s-1} quelconque de la pyramide fondamentale on a $\frac{S}{s^2}$, si s est un nombre premier, ou bien $\frac{S}{sC}$, homographies cycliques d'ordre s , où C indique la quantité des nombres premiers avec s , et plus petits que s .

§ 4.

Théorèmes généraux sur les groupes qu'on obtient en permutant moins de n indices.

11. Du numéro précédent *b*) nous concluons qu'il y a $(n-2)$ espèces d'homographies cycliques, respectivement de l'ordre $n, n-1$, etc. 3. Or il est clair que dans toute la figure il y a $\frac{n(n-1) \cdots (n-s)}{2 \cdot 3 \cdots s}$ points, dont les s coordonnées sont les différentes racines s^{mes} de l'unité et dont les autres $n-s$ sont égales à zéro. Je dis que ces points forment un groupe (r_s) . On voit facilement, quelle que soit s ($s \leq n$), que les points de (r_s) sont situés dans l'espace unité

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad (1)$$

donc :

Théorème XXVIII. Tous les points des $n-2$ groupes r_s sont situés dans l'espace unité $\Sigma x_i = 0$.

12. Si l'on permute seulement s coordonnées d'un point S_0 , par exemple les s premières, on obtient $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = S$ autres points, qui forment un groupe $(S_0)_s$ spécial. Je dis que ces S points sont situés sur un espace R_{s-1} . Il suffit de démontrer ce théorème pour $s = n-1$, et nous pourrons le démontrer ensuite pour s quelconque.

En effet, faisons passer par le point

$$y_1, \quad y_2, \dots, \quad y_n$$

et par l'espace R_{n-3} , où se rencontrent les deux espaces $\Sigma x_i = 0, x_n = 0$, un

espace R_{n-2} , dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} - \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}}{y_n} x_n = 0. \quad (1)$$

On voit que si l'on permute toutes les $n-1$ coordonnées y_1, y_2, \dots, y_{n-1} on obtient $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1$ points situés dans l'espace (1). Les espaces $\Sigma x_i = 0$ et $x_n = 0$ passent par les points du groupe (r_{n-1}) , qui ont la dernière coordonnée nulle; ces points seront donc aussi situés en (1).

Les $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) = \frac{N}{n}$ points $(S_0)_N$ situés dans l'espace (1) forment un groupe de points qui dépend des substitutions de $n-1$ indices; ils seront donc situés $\frac{N}{n(n-1)}$ à $\frac{N}{n(n-1)}$ sur $n-1$ espaces R_{n-3} , qui passeront par l'intersection de l'espace unité et de $x_n = 0$ avec une autre face quelconque $x_k = 0$ de la pyramide fondamentale. Le groupe de $\frac{N}{n(n-1)}$ points dans un tel espace R_{n-3} dépend aussi des permutations de $n-2$ indices. Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment donc $n(n-1)$ groupes de $\frac{N}{n(n-1)}$ points, situés respectivement dans $n(n-1)$ espaces R_{n-3} , qui passent par l'intersection de deux faces $x_n = 0$ $x_k = 0$ avec l'espace $\Sigma x_i = 0$.

La loi est évidente, donc:

Théorème XXIX. Si l'on permute s coordonnées d'un point S_0 , par exemple les s premières, les $\frac{N}{(s+1)(s+2)\dots n}$ points, qui en résultent et qui appartiennent au groupe total $(S_0)_N$, sont situés sur un espace R_{s-1} . Cet espace passe par l'intersection de l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ et les $n-s$ faces

$$x_{s+1} = 0, \quad x_{s+2} = 0, \dots \quad x_n = 0$$

de la pyramide fondamentale.

Les $\frac{N}{(s+1)(s+2)\dots n}$ points forment un groupe $(S_0)_s$ qui dépend des permutations de s indices et auquel s'appliquent les théorèmes donnés pour $s = n$.

Théorème XXX. Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment $(s+1)(s+2)\dots n$ groupes $(S_0)_s$ situés respectivement sur $(s+1)(s+2)\dots n$ espaces R_{s-1} , et qui passent par l'espace R_{s-2} , donné par

$$\Sigma x_i = 0, \quad x_{s+1} = 0, \quad x_{s+2} = 0, \dots \quad x_n = 0.$$

En tout on peut former $(s+1)(s+2)\dots n \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{1\cdot 2\dots s}$ de ces groupes avec les N points de $(S_0)_N$.

Corollaire I. Les N points de $(S_0)_N$ forment $4\cdot 5\dots n$ groupes $(S_0)_6$ de 6 points situés respectivement sur $4\cdot 5\dots n$ plans R_2 , passant par la droite où se rencontrent les espaces

$$\Sigma x_i = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \dots \quad x_n = 0.$$

En tout on peut former avec N points $(S_0)_N$ $4\cdot 5\dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-3)}{2\cdot 3}$ de ces groupes.

Corollaire II. Les N points de $(S_0)_N$ forment $5\cdot 6\dots n$ groupes $(S_0)_{24}$ de 24 points situés respectivement sur $5\cdot 6\dots n$ espaces R_3 , qui passent par le plan, où se rencontrent les espaces

$$\Sigma x_i = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \dots, \quad x_n = 0.$$

On a en tout $5\cdot 6\dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}$ de ces groupes.

§ 5

Représentation des groupes de substitutions.

13. On sait, par la théorie des substitutions, qu'un groupe quelconque des substitutions de n lettres peut être toujours représenté par une fonction et vice-versa (*). Soit F une fonction qui représente un groupe A des substitutions des n lettres x_1, x_2, \dots, x_n d'ordre m . En posant

$$F = 0 \tag{1}$$

on a une surface, qui représente géométriquement seulement le groupe A , ou bien un groupe B de l'ordre m' , qui contient A . Le second cas arrive toujours lorsqu'il y a des substitutions T , qui opérées sur la fonction F la changent de signe sans changer pourtant sa valeur absolue. Si ces substitutions n'existent pas, la surface (1) représente seulement le groupe A ; si elles existent, il faudra ajouter à F une fonction F' symétrique des n lettres x_1, \dots, x_n à une seule

(*) JORDAN: *Théorie des substitutions*, § 5, pag. 50; ce théorème est dû à CAUCHY.

valeur. Dans ce cas

$$F + F' = 0 \quad (2)$$

représentera le seul groupe A .

Si nous considérons maintenant m fonctions semblables, c'est à dire m fonctions qui représentent le même groupe A de substitutions, en les égalant à zéro et en considérant l'intersection des surfaces, représentées par ces équations, nous obtiendrons une surface à $n - m - 1$ dimensions, qui représentera le même groupe A .

Cette surface pourra se réduire à une courbe, ou bien à un certain nombre de points. Donc:

Théorème XXXI. Chaque groupe de substitutions peut être représenté par une surface à $n - 2, n - 3, \dots, 2$ dimensions, ou par une courbe, ou bien aussi par un certain nombre de points.

Si nous considérons m fonctions, qui ne sont pas semblables, correspondant à m groupes $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$, et si nous représentons géométriquement ces m groupes par des surfaces à $n - 2$ dimensions; leur intersection représentera un groupe résultant de la fonction, qui est le produit des m fonctions données, plus une fonction symétrique à une seule valeur, s'il en est besoin.

On a aussi:

Théorème XXXII. Pour chaque groupe A de substitutions d'ordre p on obtient d'un point S_0 un groupe de p points $(S_0)'_p$. Avec tous les N points du groupe total $(S_0)_N$ on peut former au moyen du groupe A , $\frac{N}{p}$ groupes $(S_0)_p^m$ ($m = 1, 2, \dots, \frac{N}{p}$).

Le groupe des $\frac{N}{2}$ substitutions paires nous donne deux groupes $(S_0)_{\frac{N}{2}}^1, (S_0)_{\frac{N}{2}}^2$, très intéressants. Si nous opérons sur un point quelconque d'un de ces deux groupes une substitution impaire, on obtient un point du second groupe. Si cette substitution est de la forme $(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)$, où le nombre des transpositions est impair et en outre si ces transpositions contiennent des lettres différentes, nous obtenons par exemple au moyen du point S_0 de $(S_0)_{\frac{N}{2}}^1$ un point S'_0 du groupe $(S_0)_{\frac{N}{2}}^2$. Les deux points S_0, S'_0 sont alors situés sur une droite qui coupe l'espace $P^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$ et l'espace correspondant $\Pi^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$, c'est à dire les espaces fondamentaux de l'involution donnée par la substitution $(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)$. Si la substitution est de la forme $(\alpha\beta)$ les deux points S_0, S'_0 .

sont situés sur une droite passant par le point $P_0^{(\alpha\beta)}$, et les points S_0, S'_0 sont divisés harmoniquement par le point $P_0^{(\alpha\beta)}$ et par l'espace $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)}$; $P_0^{(\gamma\delta)}$ et $\Pi_{n-2}^{(\gamma\delta)}$ étant le centre et l'espace de l'involution donnée par la substitution $(\alpha\beta)$, donc :

Théorème XXXIII. Pour le groupe des $\frac{N}{2}$ substitutions paires le groupe $(S_0)_N$, qui provient d'un point quelconque S_0 , se décompose en deux pyramides de $\frac{N}{2}$ sommets $(S_0)_{\frac{N}{2}}^1$; $(S_0)_{\frac{N}{2}}^2$. Ces deux pyramides sont homologues de $\frac{n(n-1)}{2}$ manières différentes, les $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$ et les espaces correspondants $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ étant centres et espaces d'homologie.

Deux sommets des deux pyramides, situés sur une droite passant par $P_0^{(ik)}$, sont divisés harmoniquement par ce point et par l'espace correspondant $\Pi_{n-2}^{(ik)}$. Si l'on applique à un point quelconque d'une des deux pyramides une substitution impaire on obtient un point de l'autre.

14. Nous étudierons maintenant les surfaces à $n-2$ dimensions qui représentent le groupe total.

La surface la plus simple à $n-2$ dimensions qui représente le groupe total est l'espace unité

$$\sum x_i = 0. \quad (1)$$

Nous avons ensuite les surfaces

$$\sum x_i^2 = 0, \quad \sum x_i x_k = 0. \quad (2)$$

Il est clair que chaque surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions qui représente le groupe total appartient au faisceau

$$\sum x_i^2 + \lambda \sum x_i x_k = 0, \quad (3)$$

Si nous déterminons la surface de (3) qui passe par un point quelconque S_0 on voit qu'elle passera aussi par tous les points du groupe $(S_0)_N$. En outre, il est clair que les surfaces du faisceau (3) se touchent suivant une surface du 2^d degré à $n-3$ dimensions S_{n-3}^2 , située dans l'espace unité. Donc :

Théorème XXXIV. Un groupe quelconque $(S_0)_N$ de N points est situé sur une surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions S_{n-3}^2 du faisceau

$$\sum x_i^2 + \lambda \sum x_i x_k = 0.$$

Toutes les surfaces du faisceau se touchent suivant une surface du 2^d degré à $n-3$ dimensions S_{n-3}^2 , située dans l'espace

$$\sum x_i = 0.$$

Ces surfaces ont le même cône tangent à $n-2$ dimensions, qui a pour sommet le point unité; elles passent par tous les points de tout groupe (r_s) , où s varie de 3 à n .

Si l'on considère les surfaces à $n-2$ dimensions

$$\Sigma x_i^2 = 0, \quad \Sigma x_i^2 x_k = 0, \quad \Sigma x_i x_k x_l = 0$$

on voit que chaque surface du 3^{me} ordre à $n-2$ dimensions, qui représente le groupe total, appartient au système doublement infini

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i^2 x_k + \mu \Sigma x_i x_k x_l = 0.$$

Si nous voulons trouver quel système forme toutes les surfaces à $n-2$ dimensions et d'ordre p (où $p \leq n$), qui représentent le groupe total, pour déterminer les dimensions de la variété (Mannfaltigkeit) qu'elles constituent, il faudra représenter le nombre p de toutes les manières possibles par la somme de n nombres entiers $0, 1, 2, \dots, p$. Or, un cas encore plus général a été traité par BRIOCHI (*). Ce nombre C_p , dont le calcul se simplifie dans le cas actuel, nous donne par conséquent les dimensions de la variété, que nous cherchons. Nous avons donc la variété

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_{C_p} f_{C_p} = 0 \quad (5)$$

où on a par exemple si p est $< n$

$$f_1 = \Sigma x_i^p, \quad f_2 = \Sigma x_i^{p-1} x_2, \dots, \quad f_{C_p} = \Sigma x_1 x_2 \dots x_p$$

si p est $= n$ le dernier terme sera $f_{C_p} = x_1 x_2 \dots x_n$

si p est $> n$ " " " " $f_{C_p} = x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\nu$

où

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \nu = p.$$

Donc:

Théorème XXXV. $C_p - 1$ groupes $(S'_0)_N, \dots, (S_0^{C_p-1})_N$, qui correspondent à $C_p - 1$ points quelconques de l'espace R_{n-1} , sont à une surface de la variété

(*) Voir FÀA DI BRUNO: *Théorie de Formes binaires*, pag. 153. Il donne le Lemme suivant: Le nombre de manières dont un nombre p peut être formé par la somme de r nombres entiers $0, 1, 2, \dots, n$ est égal au coefficient C_p du terme $x^p z^r$ dans le développement de la fonction $z = \frac{1}{(1-z)(1-xz)\dots(1-x^r z)}$.

Pour notre cas, il faut poser $r = n, n = p$. Ce coefficient C_p peut être représenté par un déterminant, pag. 155-156.

à $C_p - 1$ dimensions

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_{C_p-1} f_{C_p-1} = 0$$

où $f_1, f_2, \dots, f_{C_p-1}$ sont des surfaces de p^{me} ordre qui n'appartiennent pas à une variété de dimensions moindre, et qui représentent le groupe total.

15. Nous avons vu que si l'on permute seulement s coordonnées, on obtient d'un point S_0 un groupe $(S_0)_s$ du groupe total $(S_0)_N$. Ce groupe est situé dans un espace R_{s-1} (n.° 12) et il correspond aussi aux permutations de s indices. Donc le groupe $(S_0)_s$ sera situé aussi sur une surface du 2^d degré à $s - 2$ dimensions, qui n'est autre chose, que l'intersection de R_{s-1} avec la surface du 2^d degré à $n - 2$ dimensions, déterminée par le groupe $(S_0)_N$. Donc:

Théorème XXXVI. Les $(s + 1)(s + 2) \dots n \frac{n(n-1) \dots (n-s+1)}{2 \cdot 3 \dots s}$ groupes $(S_0)_s$ (Théor. XXX), qu'on peut former avec les N points du groupe $(S_0)_N$, sont respectivement situés en autant de surfaces du 2^d degré et à $s - 2$ dimensions.

Corollaire I. Les $4 \cdot 5 \dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ groupes $(S_0)_6$ de 6 points sont situés en autant de sections coniques.

Corollaire II. Les $5 \cdot 6 \dots n \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ groupes $(S_0)_{24}$ de 24 points sont situés respectivement en autant de surfaces de 2^d degré et à deux dimensions.

N'allons pas plus loin dans cette théorie; ce que nous en avons dit suffira pour le cas de 6 lettres que nous avons à considérer.

§ 6.

Projections sur un espace à trois dimensions et sur un plan.

16. Soient donnés n points quelconques d'un plan S_2 dans R_{n-1} , qui ne soient pas situés sur une droite, et projetons-les par un espace S_{n-4} , qui ne coupe pas S_2 . On obtient autour de l'espace S_{n-4} n espaces S_{n-3} , qui ne sont pas situés dans un même espace R_{n-2} . On pourra donc choisir d'une infinité de manières dans ces n espaces n points tels qu'ils soient situés dans l'espace R_{n-1} sans être situés dans un espace de dimensions moindre. Ces n points for-

ment une pyramide en R_{n-1} , la plus simple qui existe dans R_{n-1} ; on peut donc regarder les n points donnés du plan S_2 comme la projection des n sommets d'une infinité de pyramides en R_{n-1} . Et réciproquement, d'une telle pyramide on pourra obtenir par projection toutes les espèces de configurations de n ou bien moins de n points sur le plan (*). On voit que ce même raisonnement peut être appliqué au cas d'une configuration de n points dans l'espace à trois ou à plus de trois dimensions. Donc:

Théorème XXXVII. D'une pyramide fondamentale de n sommets de l'espace R_{n-1} on peut par projection obtenir toutes les espèces de pyramides ou polygones de n ou moins de n sommets de l'espace à trois ou à plus de trois dimensions et du plan (†).

PROJECTIONS DES GROUPES PRÉCÉDENTS SUR UN ESPACE S_3 .

17. Projétons maintenant les figures que nous avons étudiées en R_{n-1} dans les paragraphes précédents, par un espace S_{n-5} sur un espace quelconque S_3 , qui ne coupe S_{n-5} en aucun point. Si l'espace S_{n-5} est quelconque, la pyramide fondamentale sera projetée en S_3 sur une pyramide ${}_1A_0^{(1)}, {}_1A_0^{(2)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$ générale.

Si l'on projette les groupes projectifs d'un nombre infini de points ($n.^\circ 4$) on obtient en S_3 des groupes (P) analogues, mais qui ne sont plus projectifs, car pour les groupes projectifs dans l'espace à trois dimensions la pyramide fondamentale des points doubles doit se réduire à un tétraèdre. On voit donc que les groupes (P) sont une généralisation des groupes projectifs de l'espace à trois dimensions par rapport à une pyramide de n sommets. Ils sont situés sur des courbes transcendentes ou algébriques W' , qui sont les projections des courbes correspondantes dans l'espace R_{n-1} . Ces courbes W' sont aussi une généralisation des courbes W de l'espace à trois dimensions.

Le groupe $(y)_{m^{n-1}}$ sera projeté en un groupe ${}_1(y)_{m^{n-1}}$ de S_3 . Le nombre des faces A_{s-1} de la pyramide fondamentale en R_{n-1} est $\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{2 \cdot 3 \dots s}$, donc du théorème VI il résulte que:

Théorème XXXVIII. Les points ${}_1(y)_{m^{n-1}}$ ($n = 2t$ ou $n = 2t + 1$) sont situés m à m sur $m^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{2 \cdot 3 \dots s}$ droites, où $s = 1, 2, 3, \dots, t$.

(*) Nous disons que deux configurations de m points dans un espace quelconque sont de la même espèce, quand les m points ont la même disposition dans les deux configurations.

(†) Voir le théorème général sur les configurations que j'ai donné dans mon Mémoire des Math. Annalen, p. 177.

Et si l'on pose dans le théorème VI $s=1, 2$ on obtient:

Théorème XXXIX. Les m^{n-1} points du groupe ${}_1(y)_{m^{n-1}}$ sont situés m à m sur m^{n-2} droites passant par un quelconque des sommets ${}_1A_0^i$ de la pyramide dans S_3 . Ils sont situés aussi m à m sur m^{n-2} droites, qui rencontrent une quelconque des $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes de cette pyramide.

Et du théorème VII on déduit:

Il y a un certain nombre (qui ne doit pas être difficile à déterminer) de systèmes de m^{n-2} cycles de m points situés sur des courbes algébriques W' . Si m est égal à n , les courbes W' sont des courbes rationnelles de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Les courbes W dans R_{n-1} ont toutes leurs singularités sur les sommets, sur les arêtes, etc. de la pyramide fondamentale; les courbes W' auront les mêmes singularités et en outre celles qui dérivent de la projection même. Dans mon Mémoire des Math. Annalen à la page 208 j'ai démontré que, d'une courbe rationnelle de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre dans R_{n-1} on peut obtenir par projection toutes les espèces de courbes rationnelles de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre, ou d'ordre moindre, du plan et de l'espace à trois dimensions. On voit donc que l'on peut construire sur chaque courbe rationnelle du plan et de l'espace à trois dimensions des cycles de n points analogues à ceux que nous venons de trouver.

18. Des théorèmes XIII, XVI, XXI on a:

Théorème XL. Les deux groupes de $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}, P_0'^{(ik)}$ sont projetés en deux groupes de $\frac{n(n-1)}{2}$ points ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$, où les deux points ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$ divisent harmoniquement les deux sommets ${}_1A_0^{(i)}, {}_1A_0^{(k)}$. De même, les droites $P_1^{\alpha\beta(\gamma\delta)}$ donnent par projection des droites ${}_1P_1^{\alpha\beta(\gamma\delta)}$, qui passent par les points ${}_1P_0^{\alpha\beta}, {}_1P_0^{\gamma\delta}$.

Les points ${}_1P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ droites, 6 à 6 sur $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ plans. Les 6 points d'un tel plan sont les sommets d'un quadrilatère.

Les points ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$ sur une face plane de la pyramide fondamentale sont les sommets d'un quadrilatère, et ceux qui sont situés sur les 6 arêtes d'un tétraèdre de la pyramide forment un système desmique. Ils forment donc en tout $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ systèmes desmiques.

Des théorèmes XV, XVII, XXV on déduit:

Théorème XLI. En projetant un groupe quelconque $(S_0)_N$ de R_{n-1} sur S_3 on obtient un groupe de $1 \cdot 2 \cdots n = N$ points ${}_1(S_0)_N$ dans S_3 ; qui sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par un quelconque des points ${}_1P_0^{(ik)}$. Ils sont situés aussi deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites, qui coupent une quelconque des droites ${}_1P_0^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Ces N points forment de $\frac{N}{n^2}$ ou de $\frac{N}{nC}$ manières différentes $\frac{N}{n}$ cycles de n points, situés respectivement sur des courbes W^r rationnelles du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Des corollaires I et II (n.º 16) on tire:

Théorème XLII. Les N points de ${}_1(S_0)_N$ forment $4 \cdot 5 \cdots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ groupes ${}_1(S_0)_6$ de 6 points situés sur un égal nombre de coniques, dont les plans se rencontrent $4 \cdot 5 \cdots n$ à $4 \cdot 5 \cdots n$ suivant $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ droites situées respectivement sur les $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ faces de la pyramide ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$ de \tilde{S}_3 .

Théorème XLIII. Les mêmes N points forment $5 \cdot 6 \cdots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ groupes de ${}_1(S_0)_4$ de 4 points situés en autant de surfaces du 2^d degré en S_3 . Et des théorèmes XXXII, XXXIII.

Théorème XLIV. Pour chaque groupe de substitutions A d'ordre p on obtient d'un point ${}_1S_0$ un groupe de p points ${}_1(S_0)_p$. Avec tous les N points ${}_1(S_0)_N$ on peut former $\frac{N}{p}$ groupes ${}_1(S_0)_p^m$, où $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{p}$.

Théorème XLV. Le groupe ${}_1(S_0)_N$ se décompose en deux pyramides de $\frac{N}{2}$ sommets ${}_1(S_0)_{\frac{N}{2}}^1, {}_1(S_0)_{\frac{N}{2}}^2$. Les sommets de ces deux pyramides sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par un point ${}_1(P_0)^{(ik)}$ quelconque.

Or à l'aide du théorème XXXVII on a:

Théorème XLVI. Pour chaque pyramide de n ou moins de n sommets dans l'espace à trois dimensions on obtient des configurations analogues à la précédente, que nous appelons de même classe.

Si nous projetons, par ex., par un espace S_{n-5} passant par le point $P_0^{(12)}$, il est clair que la pyramide fondamentale dans R_{n-1} sera projetée en S_3 suivant

une pyramide de $n - 1$ sommets, parce que S_{n-5} et les deux points $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$ sont situés dans un espace S_{n-4} , qui rencontre S_3 en un seul point. En outre on voit aussi que les N points d'un groupe $(S_0)_N$ seront projetés en $\frac{N}{2}$ points; puisque les N points sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par le point $P_0^{(12)}$.

Si l'espace S_{n-5} est situé dans l'espace unité $\Sigma x_i = 0$, les points de cet espace seront projetés en S_3 sur le plan E_2 d'intersection de $\Sigma x_i = 0$ avec S_3 . Et du théorème XXVIII on aura que tous les points ${}_1(r_s)$ (où $s = 2, 3, \dots, n$) seront situés sur le plan E_2 .

PROJECTIONS SUR UN PLAN S_2 .

19. Nous devons projeter la figure par un espace S_{n-4} , chaque point P_0 de la figure projetée par S_{n-4} donne un espace S_{n-3} , qui rencontre S_2 en un point ${}_2P_0$, qui est la projection du premier point sur S_2 .

Je ne veux citer que les théorèmes les plus intéressants, les autres se déduisant de la même manière.

Théorème XLVII. Les n sommets de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(n)}$ dans R_{n-1} sont projetés en général par S_{n-4} sur S_2 en n sommets ${}_2A_0^{(1)}, \dots, {}_2A_0^{(n)}$ d'un polygone général. De même les points $P_0^{(ik)}, P_0'^{(ik)}$ sont projetés en deux groupes de $\frac{n(n-1)}{2}$ points ${}_2P_0^{(ik)}, {}_2(P_0)^{(ik)}$ divisant harmoniquement les deux sommets ${}_2A_0^{(i)}, {}_2A_0^{(k)}$ du polygone.

Les points ${}_2(P_0)^{(ik)}$ sont situés trois à trois sur $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ droites et forment $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ quadrilatères.

Les points ${}_2P_0^{(ik)}, {}_2P_0'^{(ik)}$ pris ensemble, forment $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ quadrilatères qui donnent lieu à $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ systèmes desmiques de quadrilatères ⁽¹⁾.

Théorème XLVIII. Les N points d'un groupe quelconque $(S_0)_N$ de R_{n-1} se projettent en N points d'un groupe ${}_2(S_0)_N$ sur le plan S_2 , qui sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par un quelconque des points ${}_2P_0^{(ik)}$.

(1) Voir A.: *Sopra alcune notevoli config.* I, c., Mem. II, Parte II,

Théorème XLIX. Les N points d'un groupe ${}_2(S_0)_N$ forment $4 \cdot 5 \cdots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ groupes ${}_2(S_0)_6$ de 6 points situés sur un égal nombre de coniques en S_2 .

Du théorème XXXVII nous obtenons :

Théorème L. Pour chaque polygone de n ou moins de n sommets du plan S_2 on obtient des configurations spéciales de même classe et desquelles résultent des théorèmes analogues aux précédents.

§ 7.

Application aux courbes et aux surfaces dans l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

20. Si nous considérons maintenant une surface F quelconque dans l'espace à trois dimensions du m^{me} ordre, nous savons qu'elle est déterminée par $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} - 1$ points. Or en posant

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} = n.$$

Ces n points, que nous désignons par ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$, sont toujours la projection des n sommets d'une infinité de pyramides fondamentales dans l'espace R_{n-1} (n.° 17). Soit donnée une de ces pyramides, par exemple $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(n)}$; alors par les substitutions de n lettres nous obtiendrons pour cette pyramide les groupes, que nous avons étudiés, dans les paragraphes précédents, par lesquels la pyramide fondamentale reste inaltérée. En projetant ses n sommets sur les n points donnés ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$ situés sur la surface F , on obtient aussi pour ces points des configurations analogues à celles que nous venons de trouver, et qui sont une simple expression géométrique des groupes des substitutions de n lettres.

La même chose a évidemment lieu pour les courbes situées dans l'espace R_3 ou bien sur le plan. Mais je remarque que en prenant sur chaque courbe ou sur chaque surface un nombre n' quelconque de points, ($n' \leq n$), on a des configurations pour les n' points de la courbe et de la surface, qui correspondent à la théorie des substitutions de n' lettres.

21. On peut regarder les n lettres x_1, x_2, \dots, x_n comme les paramètres homogènes qui déterminent une surface du m^{me} ordre, car nous savons que

toutes les surfaces dans R_3 du m^{me} ordre constituent une variété $n-1$ fois infinie et qui est représentée par l'équation

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n = 0 \quad (1)$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont n surfaces tout à fait arbitraires et qui ne dépendent pas les unes des autres.

En permutant les paramètres x_1, x_2, \dots, x_n , comme nous l'avons fait pour les n coordonnées d'un point dans l'espace R_{n-1} , on obtient d'une surface quelconque $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = N$ surfaces du m^{me} ordre, qui donnent aussi une interprétation géométrique des substitutions de n lettres.

Cela a lieu aussi évidemment pour chaque courbe du m^{me} ordre sur le plan.

Si dans la variété (1) on pose $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ on voit que la surface

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0$$

se transforme en elle-même. Elle représente donc la surface fondamentale de ces configurations.

Quoique dans ce chapitre nous n'ayons pas parlé de l'Hexagramme mystique, on s'aperçoit facilement que les propriétés que nous avons données servent de base pour traiter la question; comme nous le verrons dans les chapitres suivants. Nous montrerons ensuite, que les groupes des droites de PASCAL, des points de KIRKMAN, des six figures II, etc. donnent une expression géométrique particulière, bien simple et élégante des propriétés des groupes des substitutions de 6 lettres. Les figures que nous trouverons et qui représentent les mêmes groupes de 6 lettres nous conduiront à une extension nécessaire des groupes qui correspondent à l'Hexagramme mystique.

CHAPITRE II.

PREMIÈRE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES DES SUBSTITUTIONS
DE SIX LETTRES EN RELATION AVEC LES GROUPES DE L'HEXAGRAMME MYSTIQUE
DANS LES ESPACES À 5, 4, 3 DIMENSIONS ET DANS LE PLAN.

§ 1.

**Groupes principaux de l'Hexagramme.
Emploi d'une notation nouvelle.**

22. Pour traiter la question par rapport aux espaces à 5, 4, 3 dimensions et au plan, il faut que je donne d'abord un résumé des groupes principaux de l'hexagramme. Je les emprunte à mon travail de 1877; cependant j'aurai recours ici à une notation nouvelle plus simple et plus conforme à la théorie des substitutions de six lettres.

Soient donc donnés 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 fondamentaux d'une conique sur un plan. En joignant les 6 points deux à deux on obtient 15 droites, qu'on appelle les 15 côtés de l'hexagramme. Ces 15 côtés se rencontrent deux à deux, en dehors des 6 points fondamentaux, en 45 points P , qu'on désigne par le symbole $P_{ik,lm}$, où i, k, l, m sont quatre indices quelconques de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On peut former avec les 6 points fondamentaux 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, dont les côtés contiennent tous les 6 points.

TABLEAU DES TRIANGLES $\Delta_{\alpha\beta}$.

Δ_{12}	12·34·56	Δ_{23}	14·25·36	Δ_{35}	15·26·34
Δ_{13}	16·23·54	Δ_{24}	15·23·46	Δ_{36}	12·35·46
Δ_{14}	14·26·35	Δ_{25}	16·24·35	Δ_{45}	12·36·45
Δ_{15}	13·25·46	Δ_{26}	13·26·45	Δ_{46}	16·25·34
Δ_{16}	15·24·36	Δ_{34}	13·24·56	Δ_{56}	14·23·56.

Nous verrons plus loin quelle est la signification des deux indices $\alpha\beta$ des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$.

DROITES DE PASCAL.

23. Avec les 6 points de la conique fondamentale (ou bien avec 6 lettres) on obtient 720 permutations qui correspondent 12 à 12 aux 60 hexagones de l'hexagramme, ou bien aux 60 droites de PASCAL.

Si l'on considère, par exemple, l'hexagone 123456, ses côtés sont 12, 45, 23, 56, 34, 61, et les trois points $P_{12.45}$, $P_{23.56}$, $P_{34.61}$ sont situés sur la droite de PASCAL de l'hexagone 123456. Si l'on opère sur cet hexagone les deux substitutions cycliques inverses (123456) et (654321) on voit que la droite de PASCAL reste fixe. On peut représenter la droite de PASCAL de l'hexagone 123456 par le symbole

$$\left| \begin{array}{ccc} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \end{array} \right| \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}.$$

C'est à dire que *chacune des 60 droites de PASCAL de la figure peut être représentée par l'ensemble de deux triangles $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$.*

Mais il y a un autre triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ qui joue un rôle important pour la droite de PASCAL 123456 ou bien $\Delta_{12}\Delta_{13}$; c'est le triangle $14 \cdot 25 \cdot 36 \equiv \Delta_{23}$. Il est clair qu'on peut indiquer toute de suite cet autre triangle lorsque l'hexagone ou le symbole de la droite de PASCAL est donné. J'ai appelé Δ_{23} le triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$ (*).

En opérant la substitution (14)(25)(36) sur les triangles Δ_{12} , Δ_{23} on voit qu'ils se transforment l'un dans l'autre, c'est à dire que la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{23}$ ne change pas.

POINTS DE STEINER.

24. Si nous considérons l'hexagone 123456 et que nous laissons fixes les indices impairs 1, 3, 5, ou bien les indices pairs 2, 4, 6, en permutant de toutes les manières possibles les trois restants nous aurons les deux groupes suivants de 3 hexagones, savoir:

$$\begin{array}{cc} 123456 & 123654 \\ 143652 & 163452 \\ 163254 & 143256. \end{array}$$

(*) A., *Nuovi teoremi sull'Hex.*, n.º 7.

Les trois droites de PASCAL des trois premiers hexagones ont les symboles $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$, $\Delta_{13}\Delta_{23}$ et celles des trois autres, $\Delta_{45}\Delta_{56}$, $\Delta_{45}\Delta_{46}$, $\Delta_{46}\Delta_{56}$. Les trois premières droites se rencontrent en un point G_{123} de STEINER et les trois autres se coupent au point conjugué G_{456} . Les 20 points de STEINER se divisent en dix couples de points conjugués par rapport à la conique fondamentale (*).

Les deux points de STEINER G_{123} , G_{456} peuvent être représentés par un symbole unique, savoir

$$\begin{vmatrix} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 52 & 14 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Si nous regardons ce symbole comme un déterminant, les termes positifs de ce déterminant contiennent respectivement les indices 1, 3, 5; tandis que les termes négatifs contiennent respectivement les indices 2, 4, 6. Cependant il est intéressant de représenter les deux points de STEINER conjugués, séparément au moyen des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$; ainsi nous représentons le point G_{123} par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$ et le point conjugué par le symbole $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$. De ces symboles résulte immédiatement la détermination des droites de PASCAL qui passent par les deux points de STEINER. Nous verrons bientôt que les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ sont donnés par les 6 figures II. J'appelle les triangles $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$ les triangles des points de STEINER G_{123} , G_{456} (**). Nous voyons aussi à l'inspection de ces symboles que le triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ des trois droites de PASCAL, qui se coupent en un point de STEINER G_{123} , par exemple de la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$, est précisément fourni par le troisième triangle Δ_{23} du symbole du point considéré G_{123} . En outre, remarquons que les trois sommets du triangle par exemple Δ_{23} , sont situés respectivement sur les trois droites de PASCAL $\Delta_{45}\Delta_{46}$, $\Delta_{45}\Delta_{56}$, $\Delta_{46}\Delta_{56}$ qui passent par le point conjugué G_{456} . Donc:

Théorème LI. Les trois triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ des trois droites de PASCAL qui passent par un point de STEINER ont leurs sommets respectivement sur les trois droites de PASCAL qui passent par le point conjugué.

POINTS DE KIRKMAN.

25. Il y a une autre manière de permuter les 6 points fondamentaux de manière à ce que trois droites de PASCAL se rencontrent en un point.

(*) HESSE: *Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid*. Journal de CRELLE, vol. 24, p. 40.

(**) *Nuovi teoremi*, etc., théor. XXII, l. c.

Si l'on considère l'hexagone 123456 correspondant à la droite de PASCAL Δ_{12}, Δ_{13} , en négligeant les 6 côtés de l'hexagone il reste encore 9 côtés avec lesquels on peut former les trois hexagones

$$135264, \quad 136425, \quad 153624$$

qui correspondent aux trois droites $\Delta_{14}\Delta_{15}, \Delta_{15}\Delta_{16}, \Delta_{14}\Delta_{16}$. Ces trois droites se rencontrent en un point de KIRKMAN.

Ce point peut être aussi représenté par l'ensemble de trois triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, savoir $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$. On voit toute de suite la différence qui existe entre les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ d'un point de KIRKMAN et ceux des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ d'un point de STEINER. Dans les premiers le même indice est répété trois fois, les autres étant différents; tandis que pour les points de STEINER on a 3 indices différents, chacun répété deux fois.

On appelle le point $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$ le point de KIRKMAN correspondant à la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$.

FIGURES II.

26. Ce sont six figures formées par 10 points de KIRKMAN et par les 10 droites correspondantes de PASCAL; trois droites de PASCAL passant en chacun des dix points et trois points étant sur chacune des dix droites. Les dix points et les dix droites sont pôles et polaires par rapport à une conique.

Je donne ici un tableau des 6 figures II et j'en donnerai ensuite une nouvelle notation au moyen des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$.

TABLEAU DES 6 FIGURES II.

I.		II.		III.	
G_{123}	123456 = p_{345}	G_{123}	125634 = p_{345}	G_{123}	163254 = p_{345}
G_{145}	135264 = p_{123}	G_{245}	153246 = p_{123}	G_{356}	153462 = p_{123}
G_{156}	136425 = p_{124}	G_{246}	154623 = p_{124}	G_{345}	156243 = p_{124}
G_{146}	153624 = p_{125}	G_{256}	135426 = p_{125}	G_{346}	135642 = p_{125}
G_{126}	124365 = p_{145}	G_{126}	126543 = p_{145}	G_{234}	142563 = p_{145}
G_{136}	154236 = p_{245}	G_{236}	136254 = p_{245}	G_{134}	132456 = p_{245}
G_{124}	126534 = p_{135}	G_{125}	124356 = p_{135}	G_{236}	146352 = p_{135}
G_{134}	145326 = p_{235}	G_{235}	163524 = p_{235}	G_{136}	123546 = p_{235}
G_{125}	125643 = p_{134}	G_{124}	123465 = p_{134}	G_{235}	143625 = p_{134}
G_{135}	132546 = p_{234}	G_{234}	132546 = p_{234}	G_{135}	154326 = p_{234}

IV.		V.		VI.	
G_{456}	$125436 = p_{345}$	G_{456}	$145632 = p_{345}$	G_{456}	$165234 = p_{345}$
G_{124}	$153264 = p_{123}$	G_{125}	$135246 = p_{123}$	G_{236}	$135462 = p_{123}$
G_{234}	$156423 = p_{124}$	G_{135}	$134625 = p_{124}$	G_{126}	$136245 = p_{124}$
G_{134}	$135624 = p_{125}$	G_{235}	$153426 = p_{125}$	G_{136}	$153642 = p_{125}$
G_{345}	$124563 = p_{145}$	G_{345}	$126345 = p_{145}$	G_{156}	$142365 = p_{145}$
G_{346}	$134256 = p_{245}$	G_{356}	$156234 = p_{245}$	G_{146}	$152436 = p_{245}$
G_{145}	$126354 = p_{135}$	G_{245}	$163542 = p_{135}$	G_{356}	$146532 = p_{135}$
G_{146}	$143526 = p_{235}$	G_{256}	$165324 = p_{235}$	G_{346}	$125346 = p_{235}$
G_{245}	$123645 = p_{134}$	G_{145}	$125463 = p_{134}$	G_{256}	$145623 = p_{134}$
G_{246}	$152346 = p_{234}$	G_{156}	$132564 = p_{234}$	G_{246}	$134526 = p_{234}$

Je fais observer que les indices des droites p n'ont rien de commun avec les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 qui désignent les 6 points fondamentaux, ou bien avec ceux qui désignent les 6 indices des 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ relatifs aux 6 figures II. Ce sont seulement des indices se rapportant aux dix droites et aux dix points d'une figure II. Par exemple sur la droite p_{345} sont situés les points de KIRKMAN K_{34} , K_{35} , K_{45} et elle correspond au point K_{12} . Le point K_{12} est le pôle de la droite p_{345} par rapport à la conique II de la figure à laquelle il appartient. Le point de STEINER qui est placé à côté de chaque droite de PASCAL désigne précisément le point de STEINER situé sur la droite.

Mais les propriétés des 6 figures II résultent bien plus clairement du tableau que je vais donner en représentant les droites de PASCAL par deux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$.

TABLEAU II DES 6 FIGURES II.

I.	II.	III.
$12 \cdot 34 \cdot 56 = \Delta_{12}$	$12 \cdot 34 \cdot 56 = \Delta_{12}$	$16 \cdot 23 \cdot 54 = \Delta_{13}$
$16 \cdot 23 \cdot 54 = \Delta_{13}$	$14 \cdot 25 \cdot 36 = \Delta_{23}$	$14 \cdot 25 \cdot 36 = \Delta_{23}$
$14 \cdot 26 \cdot 35 = \Delta_{14}$	$15 \cdot 23 \cdot 46 = \Delta_{24}$	$13 \cdot 24 \cdot 56 = \Delta_{34}$
$13 \cdot 25 \cdot 46 = \Delta_{15}$	$16 \cdot 24 \cdot 35 = \Delta_{25}$	$15 \cdot 26 \cdot 34 = \Delta_{35}$
$15 \cdot 24 \cdot 36 = \Delta_{16}$	$13 \cdot 26 \cdot 45 = \Delta_{26}$	$12 \cdot 35 \cdot 46 = \Delta_{36}$
$\equiv \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{15} \Delta_{16}$	$\equiv \Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{24} \Delta_{25} \Delta_{26}$	$\equiv \Delta_{13} \Delta_{23} \Delta_{34} \Delta_{35} \Delta_{36}$

III.	IV.	V.
$14 \cdot 26 \cdot 35 = \Delta_{14}$	$13 \cdot 25 \cdot 46 = \Delta_{15}$	$15 \cdot 24 \cdot 36 = \Delta_{16}$
$15 \cdot 23 \cdot 46 = \Delta_{24}$	$16 \cdot 24 \cdot 35 = \Delta_{25}$	$13 \cdot 26 \cdot 45 = \Delta_{26}$
$13 \cdot 24 \cdot 56 = \Delta_{34}$	$15 \cdot 26 \cdot 34 = \Delta_{35}$	$12 \cdot 35 \cdot 46 = \Delta_{36}$
$12 \cdot 36 \cdot 45 = \Delta_{45}$	$12 \cdot 36 \cdot 45 = \Delta_{45}$	$16 \cdot 25 \cdot 34 = \Delta_{46}$
$16 \cdot 25 \cdot 34 = \Delta_{46}$	$14 \cdot 23 \cdot 56 = \Delta_{56}$	$14 \cdot 23 \cdot 56 = \Delta_{56}$
$\equiv \Delta_{14} \Delta_{24} \Delta_{34} \Delta_{45} \Delta_{46}$	$\equiv \Delta_{15} \Delta_{25} \Delta_{35} \Delta_{45} \Delta_{56}$	$\equiv \Delta_{16} \Delta_{26} \Delta_{36} \Delta_{46} \Delta_{56}$

On voit donc par là que les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ dépendent des indices romains des 6 figures II. En outre, on voit facilement qu'à la droite de PASCAL, par exemple $\Delta_{12}\Delta_{13}$ de la figure I, correspond le point de KIRKMAN $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$ de la même figure, que sur la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$ sont situés les points $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{15}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{16}$ et enfin que par le point de KIRKMAN $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$ passent les trois droites $\Delta_{14}\Delta_{15}$, $\Delta_{14}\Delta_{16}$, $\Delta_{15}\Delta_{16}$. Il en résulte aussi qu'il n'est pas possible avec les 5 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ d'une figure II de former le symbole d'un point de STEINER. Ce tableau démontre également que les 10 droites de PASCAL d'une figure II ne passent par aucun des sommets des 5 triangles de la figure.

Deux figures II, par ex. I et II ont le triangle Δ_{12} commun et trois figures par ex. I, II, III ont deux à deux les trois triangles Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} communs déterminant le point de STEINER G_{123} ; tandis que les trois autres IV, V, VI ont deux à deux les triangles Δ_{45} , Δ_{46} , Δ_{56} communs, qui donnent le point conjugué G_{456} .

Nous faisons observer aussi que les 6 figures II sont symétriques par rapport aux 6 points fondamentaux, c'est à dire que les 120 permutations correspondantes aux dix droites de PASCAL d'une de ces figures sont symétriques par rapport aux 6 indices 1, 2, 3, 4, 5, 6; en d'autres termes on ne peut faire correspondre les 6 figures II respectivement aux 6 points fondamentaux ⁽¹⁾.

Les 6 figures II condensent en elles-mêmes toute la théorie de l'hexagramme.

DROITES DE CAYLEY.

27. Nous avons vu que les droites $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$, $\Delta_{13}\Delta_{23}$ passent par le point G_{123} et que les droites $\Delta_{45}\Delta_{46}$, $\Delta_{45}\Delta_{56}$, $\Delta_{46}\Delta_{56}$ passent par le point conjugué G_{456} .

⁽¹⁾ M. CAPORALI dans son travail récent, *Sull' Esaedro completo*, Atti della R. Acc. di Napoli 1881, a trouvé la belle propriété qu'il existe dans l'hexagramme 6 droites qui correspondent respectivement aux 6 figures II.

Nous avons vu aussi que ces deux points de STEINER peuvent être représentés par le symbole

$$\left| \begin{array}{ccc} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 52 & 14 \end{array} \right| \quad (1)$$

où les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 qui y sont contenus, se rapportent aux 6 points fondamentaux, tandis que les indices des triangles Δ se rapportent aux 6 figures II.

Or, considérons les deux groupes des trois points de KIRKMAN correspondants aux droites de PASCAL indiquées plus haut; ce sont

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}, & \Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{26}, & \Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{36} \\ \Delta_{14}\Delta_{24}\Delta_{34}, & \Delta_{15}\Delta_{25}\Delta_{35}, & \Delta_{16}\Delta_{26}\Delta_{36}. \end{array}$$

Ces deux groupes de trois points sont situés sur deux droites c_{123} , c_{456} de CAYLEY, qui correspondent aux deux points de STEINER G_{123} , G_{456} . Les deux droites c_{123} , c_{456} ne sont pas conjuguées par rapport à la conique fondamentale (*).

D'après ce qui précède on voit qu'on peut représenter les droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} par le symbole sous forme de déterminant

$$\left| \begin{array}{ccc} \Delta_{14} & \Delta_{36} & \Delta_{25} \\ \Delta_{26} & \Delta_{15} & \Delta_{74} \\ \Delta_{35} & \Delta_{24} & \Delta_{16} \end{array} \right| \quad (2)$$

Les triangles des termes positifs de ce déterminant représentent les trois points de KIRKMAN situés sur la droite c_{123} , tandis que les termes négatifs représentent les trois points de KIRKMAN situés sur la droite c_{456} .

En outre, je remarque qu'aucun triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ du symbole (2) n'entre dans les symboles des points correspondants de STEINER G_{123} , G_{456} . Il est donc très facile, étant donnés deux points conjugués de STEINER G_{123} , G_{456} de déterminer les symboles (2) des droites de CAYLEY correspondantes.

On voit que les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ du symbole (2) et ceux du symbole (1), qui représente les deux points G_{123} , G_{456} , ne sont pas les mêmes; mais il n'est pas possible de disposer les indices dans tous les symboles (2) de ma-

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., n.º 6.

Annali di Matematica, tomo XI.

nière à ce qu'ils soient identiques aux indices des symboles correspondants (1), car cela reviendrait à faire correspondre les 6 figures II, desquelles dépendent les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, aux points fondamentaux; ce qui n'est pas possible.

DES FIGURES DÉTERMINÉES PAR DEUX FIGURES QUELCONQUES II.

SYSTÈMES $[Zz]_m$ (*).

28. Nous avons vu (n.° 26) que deux figures II, par ex. I et II, ont le triangle Δ_{12} commun. Il n'y a aucune droite de PASCAL, de ces deux figures, qui passe par un quelconque des sommets du triangle Δ_{12} . Ces figures ont les points P suivants communs, savoir

$$13.24, \quad 14.23, \quad 15.26, \quad 35.46, \quad 16.52, \quad 36.54 (**)$$

qui sont situés trois à trois sur quatre droites de PASCAL, savoir $p_{345}^{III}, p_{123}^{IV}, p_{123}^V, p_{124}^{VI}$ qui appartiennent respectivement aux quatre autres figures II. Ces droites ont les symboles $\Delta_{12}\Delta_{23}, \Delta_{14}\Delta_{24}, \Delta_{15}\Delta_{25}, \Delta_{16}\Delta_{26}$.

Il y a en outre deux quadrilatères de droites de PASCAL des deux figures, savoir

$$p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I; \quad p_{346}^{II} p_{134}^{II} p_{135}^{II} p_{145}^{II}$$

qui sont donnés par les hexagones

$$\begin{array}{cccc} 123456, & 126534, & 125643, & 124365; \\ 125634, & 123456, & 124356, & 126543 \end{array}$$

et qui se coupent deux à deux aux 12 points P situés sur les côtés du triangle Δ_{12} , les sommets exceptés, et en outre aux quatre points de STEINER $G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}$ situés sur la droite de STEINER-PLÜCKER g_{12} commune aux deux figures I, II.

Ces droites sont représentées par les symboles

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \Delta_{12}\Delta_{14}, \Delta_{12}\Delta_{15}, \Delta_{12}\Delta_{16}; \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \Delta_{12}\Delta_{24}, \Delta_{12}\Delta_{25}, \Delta_{12}\Delta_{26}. \quad (1)$$

Les deux quadrilatères ont donc six points de KIRKMAN pour sommets, savoir

$$\left. \begin{array}{cccccc} \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}, & \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{15}, & \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{16}, & \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}, & \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}, & \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{16}; \\ \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{24}, & \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{25}, & \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{26}, & \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{25}, & \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{26}, & \Delta_{12}\Delta_{25}\Delta_{26}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

(*) A., *Nuovi teoremi, etc.*, n.° 10 et suivants.

(**) A., *ib.*, n.° 5.

Ces 12 points de KIRKMAN sont situés deux à deux sur 6 droites v_{12} , qui passent respectivement par les sommets du triangle Δ_{12} divisant harmoniquement ses côtés.

Par exemple les deux couples de points

$$\Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{25}; \quad \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}, \quad \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{24}$$

sont situés sur deux droites v_{12} , qui passent par le sommet 12.34 du triangle Δ_{12} . Dans tout l'hexagramme on a 90 droites v_{12} (*).

Les trois droites v_{12}

$$\Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{25}; \quad \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{26}; \quad \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{16}, \quad \Delta_{12}\Delta_{25}\Delta_{26} \quad (3)$$

qui passent respectivement par les trois sommets du triangle Δ_{12} , se coupent en un point $Z_{12.2}^{IV}$, qui correspond à la droite p_{345}^{III} déterminée par les deux figures I et II (**). Je désigne le point $Z_{12.2}^{III}$ par le même symbole que la droite p_{345}^{III} , c'est à dire $\Delta_{13}\Delta_{23}$. En effet, nous verrons dans le paragraphe où nous traiterons des groupes des substitutions de six lettres, que les groupes de substitutions qui laissent inaltérée la droite p_{345}^{III} transforment le groupe (3) en lui-même; ou, ce qui revient au même, laissent le point $Z_{12.2}^{III}$ fixe.

J'ai démontré que les 90 droites v_{12} se rencontrent trois à trois en 60 points Z_2 qui, comme nous venons de le voir, peuvent être représentés par les mêmes symboles que les droites de PASCAL. Ces 60 points Z_2 sont situés trois à trois sur les 20 droites de CAYLEY; les trois points d'une telle droite, par exemple c_{123} , correspondent aux trois droites de PASCAL passant par le point G_{123} , donc les symboles de ces trois points sont

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \quad \Delta_{13}\Delta_{23}.$$

Les 60 points Z_2 sont aussi situés trois à trois sur 60 droites z_2 . Par ex. les trois points Z_2 qui correspondent aux trois droites de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{14}$, $\Delta_{13}\Delta_{14}$ passant par le point $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, sont situés sur un droite z_2 , qu'on peut désigner aussi par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$. Nous voyons donc par là que les points Z_2 correspondent aux droites de PASCAL et que les droites z_2 correspondent aux points de KIRKMAN; en outre la correspondance entre les points Z_2 et les droites z_2 est analogue à celle qui existe entre les droites de PASCAL et les points de KIRKMAN.

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., théor. XXII.

(**) A., ib, théor. XXIV.

· Les 60 droites z_2 passent trois à trois par les 60 points Z_2 , par ex. les trois droites $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{15}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{16}$ passent par le point Z_2 représenté par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}$. En outre elles passent trois à trois par les 20 points de STEINER. Aux trois points de KIRKMAN $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$, $\Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{26}$, $\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{36}$ (n.º 27) situés sur la droite de CAYLEY c_{123} correspondent les trois droites z_2 , qui sont représentées par les mêmes symboles et qui passent par le point de STEINER G_{123} . Donc on peut représenter aussi les points de STEINER G_{123} , G_{456} par le même symbole (2) (n.º 27) que les droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} . On voit aussi que les points Z_2 et les droites z_2 forment 6 figures Π' , analogues à celles qui sont formées par les droites de PASCAL et par les points de KIRKMAN.

J'ai aussi démontré qu'il y a une infinité de systèmes analogues $[Zz]_m$ qui découlent l'un de l'autre au moyen de certaines droites v_{12} , v_{34} , etc. et de points V_{23} , V_{45} , etc. qui correspondent deux à deux aux points P du système PASCAL-KIRKMAN (*). Quoique ces systèmes aient leurs propriétés principales communes avec le système PASCAL-KIRKMAN ils ne sont cependant pas donnés par 6 points d'une conique. D'après mon Mémoire de 1877 ou d'après celui de CREMONA (**) *on voit que notre symbolique peut être étendue aussi à tout système $[Zz]$.*

29. Les deux figures I et II déterminent aussi une autre figure analogue à celle que nous venons d'étudier, c'est à dire qu'il y a deux quadrangles de points de KIRKMAN qui correspondent aux deux quadrilatères de droites de PASCAL du numéro précédent, savoir

$$\begin{array}{cccc} \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}, & \Delta_{13}\Delta_{15}\Delta_{16}, & \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}, & \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}; \\ \Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{26}, & \Delta_{23}\Delta_{25}\Delta_{26}, & \Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{26}, & \Delta_{22}\Delta_{24}\Delta_{26} \end{array}$$

qui sont situés deux à deux sur les 4 droites de CAYLEY c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} . Ces droites passent par le point de SALMON S_{12} correspondant à la droite g_{12} des deux figures I, II. Or, dans les symboles des quatre droites c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} [(2) n.º 27] n'entre pas le triangle Δ_{12} , puisqu'il est contenu dans les symboles des points de STEINER correspondants, donc on peut représenter la droite de STEINER-PLÜCKER g_{12} et le point de SALMON S_{12} par le symbole Δ_{12} .

Il est vrai que dans la question proposée par l'Académie royale de Belgique, et à laquelle j'essaie de répondre par le présent travail, on ne demande pas

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., théor. XXIX.

(**) CREMONA, l. c.

d'étendre les groupes que j'ai trouvés dans mon Mémoire de 1877; mais par la notation même que j'ai donnée ici des 6 figures Π on voit et on verra mieux par la suite qu'elles sont très utiles sinon nécessaires.

§ 2.

Groupes des substitutions de trois lettres et interprétations géométriques.

30. Nous passons maintenant à la détermination et à l'interprétation des groupes de 6 lettres, et nous montrerons en même temps la correspondance qui existe entre ces groupes et ceux de l'hexagramme. Nous donnerons ensuite une première interprétation, d'abord dans l'espace à 5 dimensions, puis, par projection, dans l'espace à 3 dimensions et dans le plan.

Mais dans la théorie des substitutions de 6 lettres est contenue la théorie des substitutions de 3, 4 et 5 lettres; il nous faut donc étudier tout d'abord les groupes des substitutions de 3, 4 et 5 lettres.

M. J. SERRET a donné les fonctions des groupes de 4, 5 lettres, et la fonction d'un groupe remarquable de 120 substitutions de 6 lettres qui est une exception du théorème de BERTRAND que « toute fonction de n lettres, qui a n valeurs distinctes est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres » (*).

Nous déterminerons les groupes de 6 lettres en nous appuyant sur les groupes de l'hexagramme; nous verrons ainsi que les 6 fonctions de SERRET donnent précisément les groupes des 6 figures Π de l'hexagramme.

31. Les groupes qu'on peut former avec trois lettres x_1, x_2, x_3 ou bien avec trois indices 123, sont au nombre de trois seulement, savoir:

$$1, (12); \quad 1, (123), (132);$$

et le groupe total

$$1, (12), (13), (23), (123), (132).$$

Si nous considérons, donc comme dans le cas général, que x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point S_0 sur un plan on obtient 6 points, savoir:

$$x_1x_2x_3, \quad x_2x_3x_1, \quad x_3x_1x_2, \quad x_1x_3x_2, \quad x_3x_2x_1, \quad x_2x_1x_3$$

(*) SERRET. Journal de LIOUVILLE, 1850, p. 70.

qui forment deux groupes séparés de trois points et qui représentent les permutations des trois indices 123 ou bien des trois lettres $x_1 x_2 x_3$.

Le théorème XIII nous apprend que sur les côtés du triangle fondamental il y a 6 points $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(23)}; P_0'^{(12)}, P_0'^{(13)}, P_0'^{(23)}$; que $P_0^{(12)}$ et $P_0'^{(12)}$ sont situés sur le côté $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$ et divisent harmoniquement le segment $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$. Les coordonnées de ces six points sont respectivement

$$1-10, \quad 10-1, \quad 01-1; \quad 110, \quad 101, \quad 011;$$

les trois premiers points étant situés sur la droite unité

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Nous avons aussi un groupe de deux points (r_3) n.° 10

$$r_3 r_3^2 1, \quad r_3^2 r_3 1$$

où r_3 est une racine cubique de l'unité. On a donc des théorèmes XV et XXXIV:

Théorème LII. Les 6 points d'un groupe $(S_6)_6$ forment deux triangles homologues de trois manières différentes, les trois points $P_0^{(ik)}$ et les trois droites $\Pi_1^{(ik)}$, dont les équations sont de la forme

$$x_i - x_k = 0$$

étant centres et axes d'involution.

Dans ce cas, comme le groupe des trois substitutions paires est le groupe qu'on obtient par la substitution cyclique (123) nous voyons que les trois sommets d'un quelconque des deux triangles de $(S_6)_6$ donnent un cycle projectif de trois points par rapport au triangle qui a pour sommets le point unité et les deux points $r_3 r_3^2 1, r_3^2 r_3 1$ de la droite

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (1)$$

Du numéro 10 il résulte que les deux autres côtés de ce triangle sont:

$$r_3 x_1 + r_3^2 x_2 + x_3 = 0 \quad (2)$$

$$r_3^2 x_1 + r_3 x_2 + x_3 = 0. \quad (3)$$

Les trois côtés (1), (2), (3) forment donc un cycle projectif de trois droites par rapport au triangle fondamental.

Les sommets forment aussi un cycle projectif et il n'est pas difficile de vérifier que ces points sont situés sur trois coniques W , qui passent respectivement par deux des sommets du triangle fondamental en y touchant les deux autres

côtés. La propriété corrélatrice a lieu aussi pour les côtés (1), (2), (3) du triangle des points doubles de l'homographie cyclique (123). Donc :

Théorème LIII. Les deux triangles du groupe $(S_0)_6$ donnent deux cycles projectifs de trois points et en même temps de trois droites par rapport au triangle des points doubles (111), $(r_3 r_3^2 1)$, $(r_3^2 r_3 1)$ de l'homographie cyclique de 3^{me} ordre déterminée par la substitution cyclique (123).

Les sommets d'un quelconque des deux triangles sont situés sur trois coniques W , qui passent respectivement par deux sommets d'un côté du triangle des points doubles en y touchant les deux autres côtés. (Les coniques sont imaginaires avec 4 points réels.)

Les sommets du triangle des points doubles donnent aussi un cycle projectif de trois points par rapport au triangle fondamental et sont situés sur trois coniques, qui passent respectivement par les deux sommets d'un côté du triangle fondamental en y touchant les deux autres côtés. (Les coniques dans ce cas sont réelles.)

Du théorème XXXIV on déduit :

Théorème LIV. Les 6 points d'un groupe quelconque $(S_0)_6$ sont situés sur une conique du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0.$$

Cette conique passe par les points $(r_3 r_3^2 1)$, $(r_3^2 r_3 1)$ et y touche les droites qui joignent le point unité à ces deux points.

32. Les 6 points d'un groupe $(S_0)_6$ forment un hexagone spécial qui a des propriétés intéressantes. Désignons en effet les 6 points

$$y_1 y_2 y_3, \quad y_2 y_3 y_1, \quad y_3 y_1 y_2; \quad y_2 y_1 y_3, \quad y_3 y_2 y_1, \quad y_1 y_3 y_2$$

respectivement par les indices 135, 246. Il est alors facile de prouver que les 9 points $P_{12.34}$, $P_{12.56}$, $P_{34.56}$; $P_{16.23}$, $P_{16.45}$, $P_{23.45}$; $P_{14.36}$, $P_{14.25}$, $P_{25.36}$ tombent respectivement sur les trois points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(23)}$, $P_0^{(13)}$; c'est à dire que les triangles Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} du paragraphe précédent se réduisent à ces trois points. Donc les droites de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$, $\Delta_{13}\Delta_{23}$ tombent sur la droite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

En outre par le point, par ex. $P_{12.34}$ ou $P_0^{(12)}$ passent encore trois droites de PASCAL, savoir :

$$p_{235}^{VI} = 125346, \quad p_{145}^V = 126345, \quad p_{345}^{IV} = 125436. \quad (1)$$

Chaque droite passant par le point $P_0^{(12)}$, ou bien chaque point situé sur la

droite

$$x_1 - x_2 \equiv \Pi_1^{(12)} = 0$$

doit avoir ses deux premières coordonnées égales, c'est à dire que les trois droites de PASCAL (1) forment un groupe de 6 droites réduit à 3. De même pour les 8 autres points P , qui tombent sur les points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$. On a donc 27 droites de PASCAL, qui forment trois à trois 9 groupes spéciaux de trois droites.

Il en reste encore 30 qui forment 6 à 6 cinq groupes $(p)_6$ de 6 droites, et qui ont les propriétés corrélatives de celles des 6 points d'un groupe quelconque $(S_0)_6$. Donc :

Théorème LV. Si les 6 points fondamentaux d'une conique forment un groupe $(S_0)_6$ tous les éléments, qui appartiennent au même groupe de l'hexagramme, par ex. toutes les droites de PASCAL, tous les points de KIRKMAN, etc. donnent des groupes de 6 ou de 3 éléments, qui ont les mêmes propriétés que le groupe $(S_0)_6$.

33. Du théorème XXXVI il suit que trois groupes $(S_0)_6$ sont situés sur une courbe du 3^{me} ordre du système

$$\Sigma x_i^3 + \lambda \Sigma x_i^2 x_k + \mu x_1 x_2 x_3 = 0 \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Les trois courbes $\Sigma x_i^3 = 0$, $\Sigma x_i^2 x_k = 0$, $x_1 x_2 x_3 = 0$ coupent la droite unité aux points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$; nous aurons donc :

Théorème LVI. Deux groupes quelconques $(S_0)_6$ sont situés sur une courbe du 3^{me} ordre, qui appartient au système (1). Les courbes du système passent par les trois points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$.

Et par analogie :

Trois groupes quelconques $(S_0)_6$ sont situés sur une courbe de 4^{me} ordre, qui appartient au système

$$\Sigma x_i^4 + \lambda \Sigma x_i^3 x_k + \mu \Sigma x_i^2 x_k^2 + \nu \Sigma x_i^2 x_2 x_3 = 0$$

et qui touche la droite unité aux deux points $r_3 r_3^2 1$, $r_3^2 r_3 1$.

Si l'on suppose que le point $y_1 y_2 y_3$ soit situé sur la droite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ on a :

Théorème LVII. Si le point S_0 tombe sur la droite unité, les 6 points du groupe $(S_0)_6$ sont situés sur cette droite et ils forment trois couples de points équidistants relativement aux points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$. Ils forment aussi deux cycles projectifs de trois points par rapport aux points $(r_3 r_3^2 1)$, $(r_3^2 r_3 1)$.

§ 3.

Groupes des substitutions de quatre lettres
et interprétations géométriques.

34. Pour les groupes des substitutions de 4 et 5 lettres je me sers des résultats de M. J. SERRET (*). Il ne donne que les fonctions, ce qui revient au fond à donner les groupes; seulement en donnant les groupes on peut en tirer des conséquences, qui pour notre manière d'interpréter la théorie des substitutions sont fort intéressantes.

Nous laissons maintenant de côté les groupes, qui sont relatifs à 2 ou 3 lettres, et que nous avons déjà considérés. D'après SERRET on a alors les types suivants des fonctions de 4 lettres, à côté desquelles j'écris les groupes correspondants

$$\text{I.} \quad (x_1 + ax_3)(x_2 + ax_4) \\ 1, \quad (12)(34)$$

$$\text{II.} \quad (x_1 + x_2) + a(x_3 + x_4) \\ 1, \quad (12), \quad (34), \quad (12)(34).$$

Ce groupe est engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Dans le groupe total il y a trois de ces groupes.

$$\text{III.} \quad (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \\ 1, \quad (12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(23).$$

Ce groupe est aussi engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Dans le groupe total il n'y a qu'un groupe de ce genre.

$$\text{IV.} \quad (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)[(x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2] \\ 1, \quad (13)(24), \quad (1234), \quad (1432).$$

Ce groupe est engendré par la substitution cyclique (1234).

$$\text{V.} \quad x_1x_2 + x_3x_4 \\ 1, \quad (12), \quad (34), \quad (12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(32), \quad (1423), \quad (1324).$$

(*) L. c.

Annali di Matematica, tomo XI.

Il est engendré par deux substitutions, par ex. (12), (13)(24). Dans le groupe total on a trois de ces groupes.

$$\text{VI.} \quad (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

$$1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142)$$

$$(234), (243), (134), (143).$$

C'est là le groupe des 12 substitutions paires, qui peut être engendré par deux substitutions par ex. (123), (124) ou bien (12)(34), (123).

VII. Groupe total

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

qui peut être engendré par les couples des substitutions

$$(13), (134); \quad (12), (1234); \quad (132), (1234); \quad (1234), (12)(34).$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

35. Du théorème XIII on déduit pour $n = 4$:

Théorème LVIII. Sur chaque arête du tétraèdre fondamental, par ex. $A_0^{(1)} A_0^{(2)} = A_1^{(12)}$, il y a deux points $P_0^{(12)}, P_0'^{(12)}$, dont les coordonnées sont 1, -1, 0, 0; 1, 1, 0, 0, et qui divisent harmoniquement les deux sommets $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$. Il y a aussi deux plans $\Pi_2^{(12)}, \Pi_2'^{(12)}$, dont les équations sont

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

et qui passent par l'arête $A_0^{(3)} A_0^{(4)} = A_1^{(34)}$. Les 6 plans $\Pi_2^{(12)}$ passent tous par le point unité, tandis que les 6 points $P_0^{(12)}$ sont tous situés sur le plan unité. Chaque plan $\Pi_2^{(ik)}$ passera par deux points $P_0^{(ik)}$ et par un point $P_0'^{(ik)}$. De même pour tous les plans $\Pi_2^{(ik)}$ (*).

Je fais observer que les 12 points $P_0^{(ik)}, P_0'^{(ik)}$ forment trois tétraèdres, savoir:

$$P_0^{(12)}, P_0'^{(12)}, P_0^{(34)}, P_0'^{(34)}; \quad P_0^{(13)}, P_0'^{(13)}, P_0^{(24)}, P_0'^{(24)};$$

$$P_0^{(14)}, P_0'^{(14)}, P_0^{(23)}, P_0'^{(23)}$$

dont les faces sont précisément les plans correspondants $\Pi_2^{(12)}, \Pi_2'^{(12)}, \Pi_2^{(34)}, \Pi_2'^{(34)}$, etc.

Ces trois tétraèdres, que je désigne par les symboles (P') , (P'') , (P''') ont la propriété remarquable d'être homologues de quatre manières différentes, les

(*) J'énonce toujours ces théorèmes pour chaque cas particulier, parce que les figures qui en résultent jouissent de propriétés spéciales.

sommets et les faces opposées du troisième étant centres et plans d'homologie. Il y a aussi trois autres tétraèdres qui jouissent de la même propriété. Ce sont le tétraèdre fondamental (A) et les deux tétraèdres (B), (C) (*)

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1. \end{array}$$

Nous aurons à considérer cette figure dans le 3^{me} chapitre.

Du théorème XIV on déduit:

Théorème LIX. Les trois tétraèdres (P'), (P''), (P''') sont conjugués par rapport à la surface de 2^d degré

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv S_2^2 = 0.$$

Du théorème VI on a:

Théorème LX. Si l'on multiplie les coordonnées d'un point S_0 par les racines carrées de l'unité de toutes les manières possibles, on obtient 8 points qui déterminent deux tétraèdres homologues de quatre manières différentes, les sommets et les plans du tétraèdre fondamental (A) étant centres et plans d'homologie. Si le point S_0 est le point unité, on obtient deux tétraèdres (B) et (C) qui sont aussi conjugués par rapport à la surface S_2^2 .

En outre, du n.° 7 on obtient en changeant les signes de S_2^2 8 surfaces du 2^d degré, savoir:

$$\left. \begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 & -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 & x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 & x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

qui jouissent de propriétés analogues à celles des m^{n-1} surfaces du n.° 7; elles sont par ex. réciproques d'elles-mêmes par rapport à l'une quelconque d'entre elles (**).

(*) Voir A.: *Sopra alcune not. configur.*, l. c., Mém. II.

(**) A.: *Sopra alcune not. configur.*, l. c., Mém. II.

Du théorème X on déduit aussi:

1. *Théorème LXI. Les deux tétraèdres (B) (C) sont conjugués par rapport à toutes les surfaces (1) (*)*.

36. Du théorème XV on déduit:

Théorème LXII. Les 24 points qu'on obtient en permutant les 4 coordonnées d'un point S_0 , sont situés deux à deux sur 6.12 droites, qui passent 12 à 12 par les points $P_0^{(ik)}$. Les deux points d'une telle droite sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par le plan $\Pi_2^{(ik)}$.

En opérant l'involution $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4) sur les coordonnées du point S_0 , on déduit des théorèmes XVI, XVII, XIX:

Théorème LXIII. Les 6 points $P_0^{(ik)}$ déterminent 3 droites $P_1^{(\alpha\delta)(\gamma\delta)}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4) qui contiennent les deux points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\gamma\delta)}$. De même les plans $\Pi_2^{(ik)}$ se rencontrent en trois droites $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ par lesquelles passent les deux plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)}, \Pi_2^{(\gamma\delta)}$ et qui sont déterminées aussi par les deux points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\beta\gamma)}$. Les 6 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}, \Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ donnent deux à deux trois couples d'arêtes opposées respectivement des tétraèdres $(P'), (P''), (P''')$. Les trois droites $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ passent par le point unité, et les trois droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ sont situées sur le plan unité.

Théorème LXIV. Les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ sont situés deux à deux sur 3.12 droites, qui coupent 12 à 12 les droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les droites correspondantes $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Les deux points situés sur une telle droite sont divisés harmoniquement par les deux points d'intersection.

Si l'on opère sur les coordonnées du point S_0 la substitution cyclique (1234) on obtient 4 points, qui forment d'après le n.º 10 un cycle projectif de 4 points par rapport au tétraèdre (1, 1, 1, 1) $(-i, -1, i, 1), (-1, 1, -1, 1), (i, -1, -i, 1)$, où $i = \sqrt{-1}$. En posant par ex. $i = r_4$, les faces de ce tétraèdre sont

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ r_4 x_1 + r_4^2 x_2 + r_4^3 x_3 + x_4 &= 0 \\ r_4^2 x_1 + x_2 + r_4^2 x_3 + x_4 &= 0 \\ r_4 x_1 + r_4^2 x_2 + r_4^3 x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) J'appelle aussi tétraèdre conjugué par rapport à une surface du 2^a degré un tétraèdre dont les sommets sont situés sur la surface et dont les faces sont les plans tangents en ces points.

les sommets et les faces de ce tétraèdre forment deux cycles projectifs de 4 points et de 4 plans. Ces 4 points sont situés sur une courbe W du 3^{me} ordre (théor. XXIII). Dans ce cas on voit que les cônes qui projettent cette courbe W sont simplement (n.° 4)

$$x_1x_3 = x_2^2; \quad x_2x_4 = x_3^2; \quad x_1x_4 = x_3^2; \quad x_1^2x_4 = x_2^3.$$

C'est donc une courbe W qui passe par les points $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, en y touchant les arêtes $x_1 = x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$ et qui a dans le premier le plan $x_1 = 0$, dans le second le plan $x_4 = 0$ comme plans osculateurs. Donc :

Théorème LXV. Les points doubles de l'homographie donnée par une substitution cyclique de 4 indices (1234), forment un cycle projectif de 4 points, qui sont situés sur une courbe W du 3^{me} ordre. Cette courbe passe par deux sommets du tétraèdre fondamental en y touchant deux arêtes, et ayant en ces deux points deux faces comme plans osculateurs.

En tout on a 3 homographies cycliques, où les points doubles sont le point unité et trois points du groupe (r_4) , qui ont pour coordonnées les différentes racines 4^{mes} de l'unité.

Théorème LXVI. Les 4 points qu'on déduit d'un point S_0 par l'homographie cyclique (1234) forment un cycle de 4 points, projectif par rapport au tétraèdre des points doubles de l'homographie.

En tout avec les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ on peut former de 3 manières différentes six cycles projectifs de 4 points.

37. Si nous opérons sur les coordonnées d'un point S_0 une substitution de 3 lettres, par ex. (123), d'après le théorème XXVI on obtient une homographie cyclique d'ordre 3 autour du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. D'après le théorème XXX nous voyons que :

Théorème LXVII. Les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ sont situés 6 à 6 sur 16 plans, qui passent 4 à 4 par les droites d'intersection du plan unité avec les faces du tétraèdre fondamental. Les 6 points situés sur un quelconque des 16 plans sont situés sur une conique et ont les mêmes propriétés que les 6 points $(S_0)_6$ du paragraphe précédent.

38. Interprétons maintenant les autres groupes de 4 lettres. Du groupe II nous déduisons que :

Théorème LXVIII. Si sur un point S_0 on opère successivement les deux involutions (12), (34) ou bien (12), (12)(34) ou encore (34), (12)(34), on obtient le même groupe de 4 points. Ces quatre points sont situés deux à deux

sur 4 droites, qui passent respectivement deux à deux par les deux points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(34)}$. Ils sont situés aussi deux à deux sur deux droites, qui s'appuient sur les deux droites $P_1^{(12)(34)}$, $\Pi_1^{(12)(34)}$ et ils y sont divisés harmoniquement.

Avec les 24 points $(S_0)_{24}$ on peut former de trois manières différentes 6 de ces groupes.

Pour le groupe III on a :

Théorème LXIX. Si l'on opère sur un point S_0 successivement les deux involutions (12)(34), (13)(24) ou encore (13)(24), (14)(23) on obtient un autre groupe de 4 points; ces quatre points sont situés deux à deux sur 6 droites, qui coupent deux à deux respectivement les droites $P_1^{(12)(34)}$, $\Pi_1^{(12)(34)}$; $P_1^{(13)(24)}$, $\Pi_1^{(13)(24)}$; $P_1^{(14)(23)}$, $\Pi_1^{(14)(23)}$. Les deux points situés sur une telle droite sont divisés harmoniquement par les deux droites P_1 , Π_1 qu'elle coupe.

Avec les 24 points $(S_0)_{24}$ on peut former d'une seule manière 6 de ces groupes.

Pour le groupe V on a :

Théorème LXX. Si l'on opère sur le point S_0 les deux involutions par ex. (12), (13)(24), on obtient un groupe de 8 points. Ces 8 points se divisent en deux groupes de 4 points du théorème LXVIII, et en outre ils forment deux cycles projectifs de 4 points donnés par l'homographie cyclique (1324).

Avec les 24 points $(S_0)_{24}$ on peut former de trois manières différentes 3 de ces groupes.

Du groupe VI on a :

Théorème LXXI. Si l'on opère sur le point S_0 successivement les deux homographies par ex. (123), (124), on obtient un groupe de 12 points $(S_0)_{12}$. Le groupe $(S_0)_{24}$ se décompose en deux de ces groupes $(S_0)_{12}^1$, $(S_0)_{12}^2$ qui sont homologues de 6 manières différentes, les points $P_0^{(ik)}$ et les plans $\Pi_2^{(ik)}$ étant centres et plans d'homologie.

Et finalement :

Théorème LXXII. Si l'on opère sur le point S_0 successivement, par ex. l'involution (13) et l'homographie cyclique (124), on obtient le groupe total $(S_0)_{24}$.

Du théorème XXXIV on déduit aussi :

Théorème LXXIII. Un groupe quelconque $(S_0)_{24}$ est situé sur une surface du 2^d degré du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Les surfaces de ce faisceau se touchent suivant une conique du plan unité, passant par tous les points des groupes (r_4) , (r_3) .

Deux groupes sont situés sur une surface du 3^{me} ordre, quatre sur une surface du 4^{me} ordre, etc. (théorème XXXV).

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE SUR LE PLAN $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

39. J'indiquerai seulement les résultats qu'on obtient lorsque le point S_0 , $y_1 y_2 y_3 y_4$, est situé sur le plan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, que du reste nous pouvons regarder comme quelconque. Sur ce plan on a le quadrilatère donné par les 6 points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(14)}$, $P_0^{(23)}$, $P_0^{(24)}$, $P_0^{(34)}$, dont les côtés sont les droites d'intersection du plan avec les quatres faces $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ du tétraèdre fondamental. Nous pouvons prendre ce quadrilatère comme fondamental; alors entre les coordonnées d'un point y_1, y_2, y_3, y_4 on aura la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \quad (1)$$

qui est précisément la condition afin que le point soit situé sur le plan unité.

Nous considérons tout d'abord la conique où se rencontrent les surfaces du faisceau du théorème LXXIII, c'est à dire

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad (2)$$

ou bien d'après la relation (1)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0. \quad (2')$$

Cette conique donc se transforme en elle-même par les permutations des quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 , de manière qu'un de ses points quelconque donne un groupe de 24 points inscrit à la conique fondamentale.

Il est facile de voir que dans le plan il n'y a pas une autre conique qui jouisse des mêmes propriétés, tandis que dans l'espace à trois dimensions il y a une infinité de surfaces du 2^e degré qui se transforment en elles-mêmes.

Les 6 points $P_0^{(ik)}$ ont pour polaires, par rapport à la conique fondamentale, les 6 droites

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 - x_2 = 0 & x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 & x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 & x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

d'intersection des plans $\Pi_2^{(ik)}$ avec $\Sigma x_i = 0$. Ces 6 droites se rencontrent 3 à 3 en 4 points $P_0^{(15)}$, $P_0^{(25)}$, $P_0^{(35)}$, $P_0^{(45)}$ dont les coordonnées sont:

$$(-3, 1, 1, 1), \quad (1, -3, 1, 1), \quad (1, 1, -3, 1), \quad (1, 1, 1, -3)$$

qui sont les pôles des côtés $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ du quadrilatère fondamental par rapport à la conique fondamentale. Les 10 points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(14)}$, $P_0^{(15)}$, $P_0^{(23)}$, $P_0^{(24)}$, $P_0^{(25)}$, $P_0^{(34)}$, $P_0^{(35)}$, $P_0^{(45)}$ sont situés 3 à 3 sur leurs polaires par

rapport à la conique fondamentale; ils forment donc une figure analogue à celle, qui est donnée par dix points de KIRKMAN et par les 10 droites correspondantes de PASCAL d'une figure II. Or, les 6 points $P_0^{(12)}, \dots, P_0^{(34)}$ forment un quadrilatère et les autres $P_0^{(15)}, P_0^{(25)}, P_0^{(35)}, P_0^{(45)}$ forment un quadrangle, qui est le polaire réciproque du quadrilatère par rapport à la conique fondamentale; en outre, le quadrangle et le quadrilatère sont conjugués par rapport à la conique (*) et n'ont aucun sommet et aucun côté commun; c'est à dire, que pris ensemble ils constituent la figure entière des 10 points et des 10 droites. Il est aussi facile de voir que cette figure se décompose en 5 groupes des quadrangles et des quadrilatères susdits. Cette propriété s'étend aussi aux figures II de l'hexagramme, on a donc:

Théorème LXXIV. Toute figure II d'un système quelconque $[Zz]_m$ de l'hexagramme se décompose de 5 manières différentes en un quadrangle et en un quadrilatère, qui sont conjugués et polaires réciproques par rapport à la conique II déterminée par la figure.

Le quadrangle d'un des 5 groupes a pour sommets 4 points Z_m et le quadrilatère a les 4 droites z_m correspondantes pour côtés.

Mais la figure des dix points $P_0^{(ik)}$ que nous venons de considérer n'est pas générale. En effet, la conique fondamentale passe par les huit points du groupe (r_3) de chaque côté du quadrilatère fondamental, et ces huit points divisent respectivement équi-harmoniquement les trois sommets de chaque côté, ce qui n'a pas lieu en général.

40. Si l'on permute toutes les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 d'un point T_0 du plan unité, entre lesquelles a lieu la relation $\Sigma y_i = 0$ on obtient 24 points, qui sont aussi situés sur le même plan, et pour lesquels on a:

Théorème LXXV. Les 24 points d'un groupe $(T_0)_{24}$, situé sur le plan unité, sont situés deux à deux sur 12.6 droites qui passent 12 à 12 par les 6 points $P_0^{(ik)}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$).

Le segment déterminé par les deux points est divisé harmoniquement par le point $P_0^{(ik)}$ et le point d'intersection avec la polaire de $P_0^{(ik)}$ par rapport à la conique fondamentale.

Les sommets du triangle diagonal du quadrilatère des points $P_0^{(ik)}$ sont précisément les trois points

$$(1, -1, -1, 1), \quad (-1, 1, -1, 1), \quad (-1, -1, 1, 1). \quad (1)$$

(*) J'emploie le mot *conjugué* dans le sens donné par M. P. SERRET dans sa *Géom. de direction*, 1869.

Nous avons vu (théorème LXIII) que les trois droites $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ passent par le point unité, elles ne sont donc autre chose que les droites qui joignent le point unité avec les trois points (1). En effet, les coordonnées d'un point de la droite $\Pi_1^{(12)(34)} \equiv P_0^{(12)} P_0^{(34)}$ sont de la forme $1, 1, \lambda, \lambda$; cette droite passe donc par le point unité $1, 1, 1, 1$ et par le point $1, 1, -1, -1$. Par conséquent en interprétant le groupe II sur le plan on tire:

Théorème LXXVI. Les 24 points de $(T_0)_{24}$ sont situés deux à deux sur 12·3 droites qui passent 12 à 12 par les sommets du triangle diagonal du quadrilatère des points $P_0^{(ik)}$ et ils sont divisés harmoniquement par ces sommets et les droites diagonales opposées.

Si l'on opère sur un point T_0 de $\Sigma x_i = 0$ l'homographie cyclique (123), on obtient trois points d'un cycle projectif par rapport au triangle des points doubles qui sont $P_0^{451}, (r_3, r_3^2, 1, 0), (r_3^2, r_3, 1, 0)$, et en remarquant que dans le groupe total des substitutions on a 8 substitutions cycliques de la forme $(\alpha\beta\gamma)$, qui donnent 4 homographies cycliques, puisque les substitutions inverses (123), (132) donnent lieu à la même homographie cyclique, on a:

Théorème LXXVII. Les 24 points du groupe $(T_0)_{24}$ forment de quatre manières différentes huit cycles projectifs de trois points, donnés par les quatre homographies cycliques du 3^{me} ordre du groupe total.

Pour le groupe III on obtient:

Théorème LXXVIII. Les 24 points $(T_0)_{24}$ forment 6 quadrangles ayant pour triangle diagonal celui du quadrilatère des points $P_0^{(ik)}$.

Des théorèmes LXVII, LXX, LXXI on déduit aussi:

Théorème LXXIX. Les 24 points $(T_0)_{24}$ sont situés 6 à 6 sur 16 coniques passant 4 à 4 par les 4 points dont trois coordonnées sont égales aux racines cubiques de l'unité, tandis que la quatrième est nulle.

Théorème LXXX. En opérant sur le point T_0 successivement les deux homographies (123), (124) on obtient 12 points d'un groupe $(T_0)_{12}^1$. Les 24 points $(T_0)_{24}$ forment donc deux polygones de douze sommets, qui sont homologues, les 6 points $P_0^{(ik)}$ et les trois sommets du triangle diagonal de leur quadrilatère d'une part et leurs polaires par rapport à la conique fondamentale d'autre part étant centres et axes d'homologie.

On peut construire le groupe total $(T_0)_{24}$ au moyen de deux involutions, par exemple (13), (12)(34).

Cette figure, que nous avons obtenue sur le plan unité, n'est qu'une projection de la figure considérée de l'espace R_3 faite par le point unité.

PROJECTION SUR UN PLAN QUELCONQUE

PAR UN POINT ÉGALEMENT QUELCONQUE DE L'ESPACE R_3

41. Si nous projetons par un point quelconque R_0 la figure de l'espace sur un plan R_2 , nous obtenons une figure plus générale que celle du plan unité; ces figures pourtant appartiennent à la même classe.

Ainsi avec le tétraèdre fondamental on obtient sur le plan R_2 un quadrangle ${}_1A_0^{(4)}, \dots, {}_1A_0^{(4)} \equiv {}_1(A)$ sur les côtés duquel sont projetés les 6 points $P_0^{(ik)}$ et $P_0^{(ik)}$. Les premiers sont situés trois à trois sur quatre droites, qui sont la projection des droites d'intersection du plan unité avec les faces du tétraèdre fondamental. Si l'on projette sur R_2 les sommets des deux tétraèdres (B) , (C) du n.° 35, on obtient sur le plan deux quadrangles ${}_1(B)$, ${}_1(C)$ tels que leurs sommets sont respectivement situés deux à deux sur seize droites passant quatre à quatre par les sommets du quadrangle ${}_1(A)$. La même chose a lieu évidemment pour les couples de quadrangles ${}_1(A)$, ${}_1(B)$, ${}_1(A)$, ${}_1(C)$ par rapport aux sommets de ${}_1(C)$ ou de ${}_1(B)$.

Or, si nous nous souvenons de la figure commune à deux figures Π , par ex. I et II de l'hexagramme (n.° 28), on voit que *la figure de ces trois quadrangles ${}_1(A)$, ${}_1(B)$, ${}_1(C)$ est précisément la corrélative de celle donnée par les droites*

$$p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I, \quad p_{345}^{II} p_{135}^{II} p_{134}^{II} p_{145}^{II}$$

et du triangle Δ_{12} avec la droite de STEINER g_{12} .

Théorème LXXXI. Les 24 points ${}_1(S_0)_{24}$ qu'on obtient en projetant de R_0 sur R_2 un groupe $(S_0)_{24}$ de l'espace sont situés deux à deux sur $6 \cdot 12$ droites passant 12 à 12 par les point $P_0^{(ik)}$, et ils sont aussi situés 6 à 6 sur 16 coniques.

Les deux droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, dans le cas du numéro précédent, sont projetées par le point unité sur une droite et en un point, car la droite Π_1 passe elle-même par le point unité; tandis que dans le cas général actuel les droites en question sont projetées sur R_2 suivant deux droites ${}_1P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, ${}_1\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$.
Donc:

Théorème LXXXII. En projetant les deux points du groupe ${}_1(S_0)_{24}$ qui ont les coordonnées

$$y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta, \quad y_\beta y_\alpha y_\delta y_\gamma$$

on obtient sur R_2 deux points du groupe ${}_1(S_0)_{24}$, qui sont divisés harmoniquement par les deux droites ${}_1P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, ${}_1\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$.

On pourrait donner aussi au point de projection R_0 , ou au plan R_2 , des positions spéciales par rapport au tétraèdre fondamental, et on obtiendrait dès lors des configurations spéciales de la même classe.

§. 4.

Groupes des substitutions de 5 lettres.

Interprétations géométriques dans l'espace à 4, 3 dimensions
et dans le plan.

42. Je donne ici seulement les groupes des substitutions qui contiennent toutes les 5 lettres.

$$\text{I.} \quad (x_1 + r x_2 + r^2 x_3 + r^3 x_4 + r^4 x_5)^5$$

où r est une racine de l'équation

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$$

$$1, \quad (12345), \quad (13524), \quad (14253), \quad (15432).$$

Ce groupe est engendré par la substitution (12345).

$$\text{II.} \quad (x_1 + x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

$$1, \quad (12), \quad (345), \quad (354), \quad (12)(345), \quad (12)(354).$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (345) ou bien par la substitution (12)(345). Dans le groupe total il y a 10 de ces groupes.

$$\text{III.} \quad (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

$$1, \quad (345), \quad (354), \quad (12)(34), \quad (12)(35), \quad (12)(45).$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (345). Dans le groupe total il y a 10 de ces groupes.

$$\text{IV.} \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$1, \quad (345), \quad (354), \quad (12), \quad (34), \quad (35), \quad (45), \quad (12)(34), \\ (12)(35), \quad (12)(45), \quad (12)(345), \quad (12)(354).$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (35). Il y a aussi 10 de ces groupes dans le groupe total.

$$\begin{aligned}
 \text{V. } y = & x_1^2(x_2x_5 + x_3x_4) + x_2^2(x_1x_3 + x_4x_5) + x_3^2(x_1x_5 + x_2x_4) + \\
 & + x_4^2(x_1x_2 + x_3x_5) + x_5^2(x_1x_4 + x_2x_3) \\
 & 1, \quad (13)(45), \quad (14)(23), \quad (15)(24), \quad (12)(35), \\
 & (25)(34), \quad (2354), \quad (1325), \quad (1452), \quad (1534), \quad (2453), \\
 & (1243), \quad (1435), \quad (1523), \quad (1254), \quad (1342) \\
 & (12345), \quad (13524), \quad (14253), \quad (15432).
 \end{aligned}$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(35), (1325).
Il y a dans le groupe total 6 de ces groupes.

En posant

$$v = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

la fonction

$$\text{VI.} \quad v y$$

nous donne le groupe

$$\begin{aligned}
 1, \quad (13)(45), \quad (14)(23), \quad (15)(24), \quad (12)(35), \quad (25)(34), \\
 (12345), \quad (13524), \quad (14253), \quad (15432).
 \end{aligned}$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (13)(45), (14)(23).
On a 6 de ces groupes.

$$\text{VII.} \quad v.$$

Cette fonction représente le groupe de 60 substitutions paires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (23)(45) ou bien par les substitutions cycliques (12345) et (ikl) (i, k, l sont trois indices de la série 1, 2, 3, 4, 5). Naturellement il n'y a qu'un seul de ces groupes.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ESPACE R_4 À 4 DIMENSIONS.

43. Pour $n = 5$ du théorème XIII on déduit:

Théorème LXXXIII. Il y a sur chaque arête de la pyramide fondamentale par ex. $A_0^{(1)}A_0^{(2)} \equiv A_1^{(12)}$ deux points $P_0^{(12)}, P_0^{(1'2')}$ dont les coordonnées sont 1—1000, 11000, et qui divisent harmoniquement le segment déterminé par les deux sommets $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}$.

Les 10 points $P_0^{(ik)}$ sont situés trois à trois sur 10 droites, qui déterminent 5 quadrilatères. Les 20 points $P_0^{(ik)}, P_0^{(i'k')}$ sont situés trois à trois sur 30 droites qui avec les 10 premières forment 10 quadrilatères.

Il y a aussi deux espaces à trois dimensions $\Pi_3^{(12)}$, $\Pi_3^{(34)}$, qui passent par le plan d'intersection des faces $x_1=0$, $x_2=0$, et les divisent harmoniquement.

Les 10 espaces $\Pi_3^{(ik)}$ passent par le point unité, tandis que les dix points $P_0^{(ik)}$ sont situés sur l'espace unité.

Chaque espace $\Pi_3^{(ik)}$ passe par 3 points $P_0^{(ik)}$ et par quatre points $P_0'^{(ik)}$.

La figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$, $\Pi_3^{(ik)}$, $\Pi_3'^{(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

En posant dans le n.º 5 $m=2$, $n=5$ du point unité, on obtient $2^4=16$ points, savoir :

1	1	1	1	1	1	9	1	1	-1	-1	1	(1)
2	-1	-1	1	1	1	10	1	1	-1	1	-1	
3	-1	1	-1	1	1	11	1	1	1	-1	-1	
4	-1	1	1	-1	1	12	-1	1	1	1	1	
5	-1	1	1	1	-1	13	1	-1	1	1	1	
6	1	-1	-1	1	1	14	1	1	-1	1	1	
7	1	-1	1	-1	1	15	1	1	1	-1	1	
8	1	-1	1	1	-1	16	1	1	1	1	-1	

Ces points n'ont pas les propriétés analogues à celles des points que nous avons trouvés au n.º 35 pour $n=4$. Il est facile de s'assurer que les espaces polaires de ces 16 points par rapport à la surface $\Sigma x_i^2=0$ ne contiennent aucun de ces points.

Si nous considérons par ex. les deux espaces $\Pi_3^{(12)}$, $\Pi_3'^{(12)}$, dont les équations sont

$$x_1 - x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 = 0$$

on voit que chacun d'eux contient huit points différents du groupe (1). Donc :

Théorème LXXXIV. Si d'un point quelconque en R_4 , par ex. du point unité, on change les signes des coordonnées de toutes les manières possibles, on obtient 16 points $(B)_{16}$. Les points sont situés 8 à 8 respectivement sur les 20 espaces $\Pi_3^{(ik)}$, $\Pi_3'^{(ik)}$, tellement que deux de ces espaces correspondants les contiennent tous. Par chaque point du groupe $(B)_{16}$ passent 10 des 20 espaces $\Pi_3^{(ik)}$, $\Pi_3'^{(ik)}$.

Ces 16 points sont aussi situés 4 à 4 sur 40 plans, qui passent 10 à 10 par chacun d'eux.

Les couples de points

1, 12; 2, 13; 3, 14; 4, 15; 5, 16; 6, 11; 7, 10; 8, 9

sont situés sur 8 droites passant par le sommet $A_0^{(1)}$ de la pyramide fondamentale, donc:

Théorème LXXXV. Les 16 points de $(B)_{16}$ sont situés deux à deux sur 5·8 droites passant 8 à 8 par les sommets de la pyramide fondamentale.

44. Des théorèmes du n.º 9 on déduit:

Théorème LXXXVI. Les 120 points qu'on obtient en permutant les coordonnées d'un point S_0 dans l'espace R_4 sont situés deux à deux sur 10·60 droites, qui passent 60 à 60 par les points $P_0^{(ik)}$. Les deux points sur une de ces droites sont divisés harmoniquement par le point $P_0^{(ik)}$ et par l'espace correspondant $\Pi_3^{(ik)}$.

Théorème LXXXVII. Les 120 points du groupe $(S_0)_{120}$ sont aussi situés deux à deux sur 15·60 droites, qui coupent 60 à 60 chacune des 15 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et le plan correspondant $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ en deux points. Ces points divisent harmoniquement les deux points de $(S_0)_{120}$.

Théorème LXXXVIII. Les 120 points du groupe $(S_0)_{120}$ sont situés 6 à 6 sur 200 plans, qui passent 20 à 20 par les droites où l'espace unité rencontre les faces planes de la pyramide fondamentale. Les 6 points d'un tel plan sont situés sur une conique et ont les mêmes propriétés que celles du groupe $(S_0)_6$ du § 2.

Ils sont aussi situés 24 à 24 sur 25 surfaces du 2^d degré à 2 dimensions, dont les espaces à 3 dimensions passent 5 à 5 par les plans d'intersection de l'espace unité avec les faces de la pyramide fondamentale. Les 24 points d'une telle surface ont les mêmes propriétés que celle du groupe $(S_0)_{24}$ du paragraphe précédent.

45. Du groupe I et du théorème XXIII on déduit:

Théorème LXXXIX. Si l'on opère sur un point S_0 de R_4 l'homographie cyclique (12345) on obtient 5 points d'un cycle projectif. Les points doubles de l'homographie sont le point unité et 4 points qui ont pour coordonnées les racines 5^{mes} de l'unité.

Pour le groupe II on a:

Théorème XC. Si l'on opère sur un point S_0 successivement une involution, par ex. (12), et l'homographie cyclique (345) on obtient un groupe de 6 points, qui sont situés deux à deux sur 3 droites passant par le point $P_0^{(12)}$ et qui forment deux cycles projectifs de 3 points.

Avec les 120 points du cycle $(S_0)_{120}$ on peut former de dix manières différentes 20 de ces groupes.

Pour le groupe III on obtient:

Théorème XCI. En appliquant au point S_0 successivement l'involution (12)(34) et l'homographie cyclique (345), on obtient un groupe de 6 points, qui sont situés deux à deux sur 3 droites rencontrant 3 à 3 les droites $P_1^{(12)(34)}$, $P_1^{(12)(35)}$, $P_1^{(12)(45)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Ils forment aussi deux cycles projectifs de trois points.

Avec les 120 points de $(S_0)_{120}$ on peut former de 10 manières différentes 20 de ces groupes.

Pour le groupe IV:

Théorème XCII. En opérant sur un point S_0 successivement les deux involutions (12)(34) et (35), on obtient un groupe de 12 points, situés deux à deux sur 24 droites, qui passent 6 à 6 par les points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(34)}$, $P_0^{(35)}$, $P_0^{(45)}$. Ils sont situés aussi deux à deux sur 10 droites, qui coupent 6 à 6 les droites $P_1^{(12)(34)}$, $P_1^{(12)(35)}$, $P_1^{(12)(45)}$ et les plans correspondants Π_2 ; ils forment quatre cycles projectifs de 3 points.

Du groupe V:

Théorème XCIII. En opérant sur le point S_0 successivement l'involution (12)(35) et l'homographie cyclique (1325) on obtient 20 points.

Ces 20 points sont situés deux à deux sur 50 droites, qui coupent 10 à 10 les 5 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ donnés par les 5 involutions de la forme $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ du groupe V. Ils forment aussi 4 cycles projectifs de 5 points.

Avec les 120 points $(S_0)_{120}$ on peut former de 6 manières différentes 6 de ces groupes.

En égalant à zéro les 6 fonctions y on obtient 6 surfaces à 3 dimensions du 4^me degré, qui représentent le groupe V.

De même pour le groupe VI. Pour le demi-groupe on a:

Théorème XCIV. En opérant sur le point (S_0) successivement les deux involutions (12)(34), (23)(45), on obtient un groupe de 60 points $(S_0)_{60}^1$. Le groupe $(S_0)_{120}$ se décompose en deux de ces groupes $(S_0)_{60}^1$, $(S_0)_{60}^2$ qui sont homologues de 15 manières différentes, les points $P_0^{(ik)}$ et les espaces $\Pi_3^{(ik)}$ étant centres et espaces d'homologie.

Et finalement pour le groupe total on voit qu'en opérant sur le point S_0 successivement l'involution (12) et l'homographie cyclique (12345) on obtient tous les points du groupe.

On déduit aussi des théorèmes du n.º 14 qu'un groupe quelconque de 120 points $(S_0)_{120}$ est toujours situé sur une surface du 2^d degré du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0$$

et ainsi de suite.

INTERPRÉTATION DANS L'ESPACE UNITÉ

ET DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS QUELCONQUE.

46. Si nous supposons qu'un point T_0 soit situé dans l'espace unité, ses coordonnées y_1, y_2, \dots, y_5 doivent satisfaire à la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0. \quad (1)$$

Dans l'espace unité on a les 10 points $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(14)}, P_0^{(15)}, P_0^{(23)}, P_0^{(24)}, P_0^{(25)}, P_0^{(34)}, P_0^{(35)}, P_0^{(45)}$, qui sont situés 6 à 6 sur 5 plans, c'est à dire sur les plans où l'espace unité rencontre les faces à trois dimensions de la pyramide fondamentale dans R_4 .

Considérons analoguement au n.º 39 la surface

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \quad \Sigma x_i = 0 \quad (2)$$

par laquelle passent toutes les surfaces du faisceau déterminé par les groupes $(S_0)_{120}$ de R_4 . L'équation (2) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_k = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

Théorème XCV. Un point quelconque T_0 de la surface (2), que j'appelle fondamentale, donne un groupe $(T_0)_{120}$ inscrit à la surface. Cela n'a pas lieu pour tout groupe $(T_0)_{120}$ situé sur l'espace unité.

Les plans polaires des 10 points $P_0^{(ik)}$ par rapport à la surface fondamentale ont leurs équations de la forme

$$x_i - x_k = 0. \quad (4)$$

Il n'est pas difficile de voir que ce sont précisément les plans d'intersection des espaces $\Pi_3^{(ik)}$, passant par le point unité, avec l'espace $\Sigma x_i = 0$. Les 10 plans (4) se coupent 6 à 6 en 5 points, $P_0^{(16)}, P_0^{(26)}, P_0^{(36)}, P_0^{(46)}, P_0^{(56)}$ dont les coordonnées sont:

$$\begin{aligned} (-4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), & \quad (1 \ -4 \ 1 \ 1 \ 1), & \quad (1 \ 1 \ -4 \ 1 \ 1), \\ (1 \ 1 \ 1 \ -4 \ 1), & \quad (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -4). \end{aligned}$$

Ces points sont les pôles des faces du pentaèdre fondamental, où sont situés 6 à 6 les 10 points $P_0^{(ik)}$. Ces 5 points forment donc un pentagone gauche de l'espace unité, qui est conjugué par rapport à la surface fondamentale ainsi que le pentaèdre fondamental.

Or les 10 points $P_0^{(ik)}$ et les 5 points $P_0^{(16)}, P_0^{(26)}, P_0^{(36)}, P_0^{(46)}, P_0^{(56)}$, forment dans l'espace à 3 dimensions la figure analogue à celle que nous avons trouvée au n.º 39. Si nous désignons le plan polaire de $P_0^{(12)}$ par le symbole $\Pi_2^{(12)}$, on voit qu'il passe par les points $P_0^{(34)}, P_0^{(35)}, P_0^{(36)}, P_0^{(45)}, P_0^{(46)}, P_0^{(56)}$; il en est de même pour les plans polaires des autres points $P_0^{(\alpha\beta)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Je remarque aussi que les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ sont situés 3 à 3 sur 20 droites $D_1^{(\alpha\beta\gamma)}$, qui contiennent les trois points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\beta\gamma)}, P_0^{(\alpha\gamma)}$ et qui passent 4 à 4 par les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$. Ces 20 droites sont situées à leur tour 4 à 4 sur les 15 plans Π_2 . Donc :

Théorème XCVI. Les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ de l'espace unité à trois dimensions ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sont situés 3 à 3 sur 20 droites $D_1^{(\alpha\beta\gamma)}$ et 6 à 6 sur leurs plans polaires $\Pi_2^{(\alpha\beta)}$ par rapport à la surface fondamentale.

Les 20 droites D_1 passent 4 à 4 par les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ et sont situées 4 à 4 sur les 15 plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)}$.

Les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ et les 15 plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)}$ forment une figure réciproque d'elle-même par rapport à la surface fondamentale. Elle est analogue à la figure complète de deux tétraèdres homologues, de même qu'une figure Π de l'hexagramme constitue la figure complète de deux triangles homologues dans le même plan (*).

Théorème XCVII. La figure précédente se décompose en 6 groupes d'un pentaèdre et d'un pentagone complets, qui n'ont commun aucun sommet, ni aucune face, et qui, pris ensemble, constituent la figure entière. Ce pentagone et ce pentaèdre sont conjugués et polaires réciproques par rapport à la surface fondamentale (**).

La figure que nous venons de considérer n'est pas identique à la figure générale complète de deux tétraèdres homologues, car la surface fondamentale rencontre les 10 droites D_1 , où sont situés les premiers dix points $P_0^{(ik)}$, ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5$), aux points (r_3) , dont trois coordonnées sont les racines cubi-

(*) Voir A., *Behandlung der project. Verhältnisse*, etc. Math. Annalen, vol. 19.

(**) Voir A., Math. Annalen, l. c., p. 192, § 5. *Polar figuren in Bezug auf eine (n-1) dimensionale F_{n-1}^3* .

ques de l'unité et les deux autres sont nulles. La surface passe aussi par les points des groupes (r_4) , (r_5) , où r_4 et r_5 sont racines primitives 4^{mes} et 5^{mes} de l'unité.

Les points du groupe (r_3)	sont au nombre de	20
"	" (r_4)	30
"	" (r_5)	24.

Au moyen de cette surface et de l'icosaèdre, M. KLEIN a résolu l'équation du 5^{me} degré (*). Cependant il n'a donné aucune indication sur l'étude des groupes de 5 lettres, comme nous l'avons fait ici. Je cite ce travail très important de KLEIN, pour montrer que les recherches, qui nous occupent dans le présent travail, ont aussi un grand intérêt en algèbre.

47. Pour étudier maintenant les propriétés des 120 points d'un groupe $(T_0)_{120}$, situé dans l'espace unité, il suffit de suivre la même méthode que celle suivie pour le cas $n=4$.

Nous trouvons:

Théorème XCVIII. Les 120 points $(T_0)_{120}$ sont situés 2 à 2 sur 10·60 droites, passants 60 à 60 par les 10 points $P_0^{(ik)}$ ($i, k=1, 2, 3, \dots, 5$). Deux points sur une telle droite sont divisés harmoniquement par le point $P_0^{(ik)}$ et par le plan $\Pi_2^{(ik)}$ correspondant.

Si nous considérons l'involution (12)(34), on sait alors que dans l'espace R_4 les deux points que l'on déduit d'un point quelconque S_0 sont situés sur une droite, qui coupe $P_1^{(12)(34)}$ et le plan correspondant $\Pi_2^{(12)(34)}$.

Or, en projetant par le point unité sur l'espace $\Sigma x_i=0$, les deux points sont projetés en deux points d'un groupe $(T_0)_{120}$, car les groupes $(T_0)_{120}$ de l'espace $\Sigma x_i=0$ peuvent être considérés comme la projection des groupes $(S_0)_{120}$ de R_4 faite par le point unité. Ces deux points sont situés sur une droite, qui coupe la droite $P_1^{(12)(34)}$ et la droite d'intersection de $\Sigma x_i=0$ avec le plan $\Pi_2^{(12)(34)}$, puisque ce plan passe par le point unité. Donc:

Théorème XCIX. Les 120 points $(T_0)_{120}$ d'un groupe dans $\Sigma x_i=0$ sont situés deux à deux sur 10·60 droites, qui rencontrent 60 à 60 les 10 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les droites Π_1 d'intersection de $\Sigma x_i=0$ avec les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Les deux points sur une telle droite sont divisés harmoniquement par les droites P_1, Π_1 .

Si le point R_0 de projection est un point quelconque, il est clair que ce

(*) Math. Annalen, vol. 12, pag. 545. Eine neue Auflösung der Gleich. 5^{ten} Grades.

théorème n'a pas lieu, parce que les plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ ne passent pas par R_0 . Dans ce cas, on obtient dans l'espace R_3 , où l'on projette, une pyramide quelconque de 5 sommets ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(5)} \equiv {}_1(A)$. Sur ses arêtes il y a 10 points ${}_1P_0^{(ik)}$ et 10 points ${}_1P_0'^{(ik)}$, tels que ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$ divisent harmoniquement les deux sommets ${}_1A_0^{(i)}, {}_1A_0^{(k)}$.

Les 10 points ${}_1P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 10 droites, qui forment 5 quadrilatères, et 6 à 6 sur 5 plans. Les 20 points ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$ sont encore situés 3 à 3 sur 30 droites, qui forment avec les 10 premières 10 quadrilatères.

Si nous projetons les 16 points $(B)_{16}$ (théor. LXXXIV) sur R_3 on obtient un groupe de 16 points ${}_1(B)_{16}$, qui sont situés deux à deux sur 40 droites passants 8 à 8 par les 5 sommets ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(5)}$ de ${}_1(A)$.

Si l'on fait la projection de ce groupe par le point unité sur l'espace unité, ces 16 points étant 8 à 8 sur les espaces

$$x_i - x_k = 0 \quad (1)$$

on a :

Théorème C. En projetant le groupe $(B)_{16}$ du point unité, on obtient sur l'espace unité 15 points [car le point unité est lui-même un point du groupe $(B)_{16}$], qui sont situés 7 à 7 sur les 10 plans où les espaces (1) coupent $\Sigma x_i = 0$, c'est à dire sur les 10 plans polaires Π_2 des 10 points $P_0^{(ik)}$ par rapport à la surface fondamentale.

Si nous considérons les trois espaces

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0 \quad (2)$$

ils passent par un plan, puisque les trois points correspondants $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(23)}$ sont situés sur la droite, où $\Sigma x_i = 0$ rencontre la face $A_2^{(123)}$ de la pyramide fondamentale en R_4 . Il est facile de voir sur le tableau des points $(B)_{16}$ (n.° 43), que les trois espaces (2) contiennent respectivement les points

$$1, 2, 9, 10, 11, 14, 15, 16; \quad 1, 3, 7, 8, 11, 13, 15, 16$$

$$1, 4, 5, 6, 11, 12, 15, 16.$$

On voit donc que les points 1, 11, 15, 16 sont situés sur un plan et que les projections sur $\Sigma x_i = 0$ de 11, 15, 16 sont situées sur une droite, qui est une des arêtes du pentagone formé par les dix plans Π (*).

(*) C'est à dire que les 15 points sont donnés par les 5 sommets de ce pentagone et les 10 points de rencontre de ses côtés avec les faces opposées.

Les groupes de 120 points $(T_0)_{120}$ dans $\Sigma x_i = 0$, ou bien dans un espace quelconque R_3 , ont communes leurs propriétés, qui dérivent du théor. LXXXVII.

On peut étudier leurs groupes de la même manière que nous avons traité les groupes $(T_0)_{24}$ sur le plan dans le paragraphe précédent.

PROJECTION SUR UN PLAN R_2 .

48. Pour projeter les figures de l'espace R_4 sur un plan R_2 il faut projeter par une droite R_1 , qui ne coupe pas R_2 . On déduira ainsi, de la pyramide fondamentale $A_0^{(4)}, \dots, A_0^{(5)}$, un pentagone ${}_2A_0^{(4)}, \dots, {}_2A_0^{(5)}$, et des groupes de 120 points ${}_2(S_0)_{120}$, dont les propriétés se déduisent facilement des théorèmes précédents. Les configurations qu'on obtient dans R_2 sont naturellement une expression géométrique de la théorie des substitutions de 5 lettres.

En donnant à la droite de projection R_1 , ou bien au point R_0 de projection sur un espace R_3 , des positions spéciales par rapport à la pyramide fondamentale en R_4 , on a, d'après le théorème XXXVII:

Théorème CI. Pour chaque pentagone ou tétraèdre dans R_3 , ou bien pour chaque triangle, quadrangle, pentagone complet dans le plan, on obtient des configurations de la même classe, qui sont une expression géométrique de la théorie des substitutions de 5 lettres.

§ 5.

Groupes des substitutions de 6 lettres en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique.

49. Former les groupes des substitutions de n lettres est un des problèmes les plus difficiles de la théorie des substitutions, et il est, en général, loin d'être résolu. Cependant, dans des cas particuliers, on peut, ou par une méthode, ou par l'autre déterminer des groupes; c'est ainsi, par ex., que SERRET a trouvé les fonctions de 4, 5 lettres et les 6 fonctions de 6 lettres. Mais nous n'avons pas seulement besoin des fonctions et de l'ordre des groupes qu'elles représentent, nous avons besoin aussi de connaître la forme des substitutions d'un groupe, afin d'en tirer ensuite des conséquences pour nos figures géométriques; comme nous venons de le faire pour $n = 4, 5$.

Pour trouver les groupes principaux de 6 lettres et les groupes qui y sont contenus, nous nous appuierons sur la connaissance des groupes de l'hexagramme même. J'en donnerai seulement les résultats, comme pour $n=4$, $n=5$; on aura en tout cas presque toujours une vérification géométrique dans l'hexagramme, si l'on tient compte de la notation que j'ai donnée au § 1 de ce chapitre. Pour établir les substitutions je pars toujours de l'hexagone 123456.

GROUPES DES TRIANGLES $\Delta_{\alpha\beta}$, DES DROITES DE STEINER-PLÜCKER
ET DES POINTS DE SALMON.

I. Il y a dans l'hexagramme 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ (n.º 22); ces triangles représentent un groupe de 48 substitutions. Si nous considérons, par ex., le triangle $\Delta_{12} \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$, on a le groupe suivant:

1, (12)(34), (12)(56), (34)(56), (13)(24), (14)(23), (1423)(56)
 (1324)(56), (15)(26), (1625)(34), (16)(25), (1526)(34), (35)(46)
 (12)(3645), (12)(3546), (36)(45), (135)(246), (145)(236), (146)(235)
 (136)(245), (153)(264), (164)(253), (163)(254), (154)(263)
 (12), (34), (56), (12)(34)(56), (1324), (1423), (14)(23)(56)
 (13)(24)(56), (1526), (16)(25)(34), (1625), (15)(34)(26), (12)(35)(46)
 (3645), (3546), (12)(36)(45), (135246), (145236), (146235)
 (136245), (153264), (164253), (163254), (154263).

Dans ce groupe, il y a 24 substitutions paires et 24 impaires. Les 48 permutations obtenues, en partant de l'hexagone 123456, sont les suivantes:

123456,	345612,	561234;	-	214356,	435621,	562143;
213465,	346521,	652134;		124365,	436512,	651243;
341256,	563412,	125634;		432156,	564321,	215643;
342165,	653421,	216534;		431256,	654312,	126543;
432165,	654321,	216543;		341265,	653412,	126534;
431256,	564312,	125643;		342156,	563421,	215634;
214365,	436521,	652143;		123465,	346512,	651234;
213456,	345621,	562134;		124356,	435612,	561243.

Or, d'après le premier tableau des 6 figures II et d'après le n.º 23, on voit que ces permutations correspondent 6 à 6 aux droites de PASCAL

$$p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I \quad p_{345}^{II} p_{134}^{II} p_{135}^{II} p_{145}^{II}$$

ou bien

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \Delta_{12}\Delta_{14}, \Delta_{12}\Delta_{15}, \Delta_{12}\Delta_{16}; \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \Delta_{12}\Delta_{24}, \Delta_{12}\Delta_{25}, \Delta_{12}\Delta_{26}, \quad (1)$$

qui forment les deux quadrilatères des deux figures I et II, dont les côtés se rencontrent deux à deux sur les côtés du triangle Δ_{12} et aux 4 points de STEINER $G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}$ de la droite de STEINER-PLÜCKER G_{12} .

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (3645) et (135246). Il transforme le triangle Δ_{12} en lui-même, de même que l'ensemble des deux quadrilatères (1) et la droite de STEINER G_{12} et le point de SALMON S_{12} .

Dans le groupe total il y a 15 de ces groupes.

Ce groupe peut être représenté par la fonction

$$\Delta_{12} \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6. \quad (2)$$

On a donc 15 fonctions du 2^d degré $\Delta_{\alpha\beta}$, qui correspondent aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme. Il est clair que ces fonctions jouent dans la théorie des substitutions de 6 lettres un rôle analogue à celui des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ dans la théorie de l'hexagramme.

II. Les 24 substitutions paires du groupe I forment naturellement aussi un groupe; il est donné par les 24 premières substitutions et par les 24 premières permutations du groupe I. Ces dernières correspondent 3 à 3 aux droites de PASCAL des deux quadrilatères des deux figures I, II.

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (1526)(34). Ce groupe est le seul que l'on rencontre dans le groupe I.

GROUPE DES DROITES DE PASCAL ET DES POINTS Z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m}$
ET DES DROITES z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m+1}$.

50. Soit, par ex., donnée la droite $p_{345}^I = 123456 = \Delta_{12}\Delta_{13}$, elle représente le groupe:

$$\text{III. } 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), \\ (165432), (16)(25)(34), (15)(24), (14)(23)(56), (13)(46), \\ (12)(36)(45), (26)(35).$$

Ce groupe contient douze substitutions qui correspondent aux douze permuta-

tions de la droite de PASCAL. Il peut être engendré par les deux substitutions (123456), (13)(46). Il contient 6 substitutions paires et 6 impaires.

Si au lieu de considérer la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$ on considère la droite $\Delta_{13}\Delta_{23}$, qui a pour triangle Δ le triangle Δ_{12} (n.° 23), on voit que le groupe qu'elle représente, en partant de l'hexagone 163254, est contenu dans celui qui correspond au triangle Δ_{12} . Nous avons vu qu'il y a quatre droites de PASCAL, qui ont le même triangle Δ_{12} , ce sont :

$$\Delta_{13}\Delta_{23}, \quad \Delta_{14}\Delta_{24}, \quad \Delta_{15}\Delta_{25}, \quad \Delta_{16}\Delta_{26}.$$

Les groupes qui représentent ces 4 droites, si l'on part non pas de la permutation 123456 mais d'une quelconque de leurs permutations, appartiennent au groupe I du triangle Δ_{12} .

Si l'on applique les substitutions du groupe III à une autre droite de PASCAL, qui ne soit pas $\Delta_{12}\Delta_{13}$, on obtient douze permutations, qui n'appartiennent pas à la même droite de PASCAL.

Dans le groupe total, il y a donc 60 groupes III, qui sont contenus 4 à 4 dans les 15 groupes I.

Cette décomposition des groupes nous sera très utile pour l'interprétation géométrique.

Nous avons vu aussi (n.° 28) que les trois droites v_{12} , qui se rencontrent au point $Z_{345.2}^I$, correspondant à la droite p_{345}^I (*), ont les symboles

$$\left| \begin{array}{ccc} \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} \\ \Delta_{23} & \Delta_{34} & \Delta_{35} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \Delta_{23} & \Delta_{25} & \Delta_{26} \\ \Delta_{23} & \Delta_{35} & \Delta_{36} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{26} \\ \Delta_{23} & \Delta_{34} & \Delta_{36} \end{array} \right|.$$

Si nous appliquons à ces symboles les substitutions du groupe III, ce groupe de 3 droites v_{12} reste invariable; donc le point $Z_{345.2}^I$ reste aussi inaltéré. On peut le représenter, en conséquence, par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}$ de la droite correspondante de PASCAL.

Le groupe de la droite de PASCAL peut être représenté par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_1x_6 + x_2x_3 + x_4x_5) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}.$$

IV. Le groupe des 6 substitutions paires de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$ est

$$1, \quad (13)(46), \quad (26)(35), \quad (135)(246), \quad (153)(264), \quad (15)(24)$$

(*) Au n.° 28 nous avons trouvé les symboles des droites v_{12} , qui passent par le point $Z_{345.2}^{III}$; on en déduit le symbole des droites v_{12} passant par le point $Z_{345.2}^I$ en changeant l'indice 1 avec 2.

qui peut être engendré par deux substitutions, savoir: (13)(46), (26)(35), ou bien (135)(246), (13)(46).

Si nous opérons les substitutions de ce groupe sur l'hexagone 163254 de la droite $\Delta_{13}\Delta_{23}$, on obtient 6 permutations, qui correspondent trois à trois aux deux droites $\Delta_{13}\Delta_{23}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$. Donc ce groupe laisse inaltéré le point de STEINER G_{123} .

V. 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264),
(165432).

Ce groupe contient 3 substitutions paires et 3 impaires, et il est engendré par la substitution cyclique (123456).

VI. 1, (135)(246), (153)(264).

Ce groupe contient les 3 substitutions paires du groupe précédent, et il est engendré par (135)(246).

VII. 1, (13)(46), (14)(25)(36), (16)(25)(43).

Ce groupe contient 4 substitutions du groupe III, et il peut être engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions.

On voit aussi qu'il contient deux substitutions paires et deux impaires.

Dans le groupe III il y a 6 de ces groupes.

51. Dans ce numéro nous donnons d'autres groupes, qui sont contenus dans le groupe Δ_{12} .

VIII. 1, (12)(34), (12)(56), (34)(56).

Ce groupe contient 4 substitutions paires, qui appartiennent au groupe I. Il peut être engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Le groupe I contient un seul de ces groupes.

Les 4 permutations sont

123456, 214356, 213465, 124365,

qui correspondent aux droites $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{15}$, $\Delta_{12}\Delta_{16}$ de la figure I. Ce groupe laisse par suite inaltéré le quadrilatère formé par ces quatre droites.

IX. 1, (12)(34), (1625)(34), (12)(56), (1526)(34),
(16)(25), (34)(56), (15)(26).

Ce groupe contient 8 substitutions paires du groupe de Δ_{12} , et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (1625)(34). Dans le groupe I il y a 3 de ces groupes.

Les 8 permutations sont :

123456, 654312, 213465, 564321, 214356,
653421, 124365, 563412,

qui correspondent respectivement aux droites des deux quadrilatères des deux figures ΠI et Π . Ce groupe laisse donc aussi inaltérés la droite de STEINER-PLÜCKER et le point de SALMON.

X. 1, (12), (34)(56), (12)(34)(56).

Ce groupe contient deux substitutions paires et deux impaires du groupe Δ_{12} , et il peut être engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Dans le groupe Δ_{12} il y a 3 de ces groupes.

Les 4 permutations

123456, 213456, 124365, 214365

correspondent aux droites du quadrilatère de la première figure, que nous avons considéré plus haut.

XI. 1, (12), (3645), (34)(56), (3546), (12)(3645),
(12)(34)(56), (12)(3546).

Ce groupe contient 4 substitutions paires et 4 impaires du groupe Δ_{12} , et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(3645). Dans le groupe Δ_{12} il y a 3 de ces groupes.

Les 8 permutations sont :

123456, 213456, 126534, 124365, 125643,
216534, 214365, 215643

qui correspondent aux 8 droites de PASCAL des deux quadrilatères des figures ΠI et Π . Ce groupe laisse aussi inaltérés la droite G_{12} de STEINER-PLÜCKER et le point de SALMON S_{12} .

XII. 1, (12), (14)(23)(56), (56)(1423), (1324)(56),
(34), (13)(24)(56), (12)(34).

Ce groupe contient 4 substitutions paires et 4 impaires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (14)(23)(56). Dans le groupes Δ_{12} il y a 3 de ces groupes.

Les 8 permutations qu'on obtient de 123456 sont:

123456, 213456, 432165, 342165, 431265,
341265, 124356, 214356,

qui correspondent aux droites de PASCAL des deux quadrilatères des deux figures I et II, dont les côtés se coupent respectivement sur les côtés du triangle Δ_{12} . Donc ce groupe laisse aussi inaltérés la droite G_{12} et le point S_{12} .

XIII. 1, (1423)(56), (12)(34), (1324)(56).

Ce groupe contient les 4 substitutions paires du groupe XII et il peut être engendré par la substitution (1423)(56). Dans le groupe I il y a 3 de ces groupes.

Les 4 permutations

123456, 431265, 214356, 342165

correspondent aux 4 droites

$P_{345}^I P_{145}^{II} P_{135}^I P_{135}^{II}$ ou $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{26}$, $\Delta_{12}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{25}$.

XIV. 1, (12), (135246), (154)(263), (12)(34)(56)
(145)(236), (164253), (135)(246), (154263), (34)(56), (145236)
(164)(253), (146)(235), (163254), (136245), (153)(264)
(153264), (12)(34), (163)(254), (56), (12)(56), (146235)
(34), (136)(245).

Ce groupe contient 12 substitutions paires et 12 impaires du groupe Δ_{12} , et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (135246).

On ne peut former avec les substitutions de Δ_{12} qu'un seul de ces groupes.

Les 24 permutations en partant de l'hexagone 123456 sont:

123456, 345621, 562143, 214365, 436512, 651234,
213456, 345612, 561243, 124365, 436521, 652134,
435621, 652143, 346512, 561234, 562134, 214356,
651243, 123465, 213465, 435612, 124356, 346521,

qui correspondent aux huit droites de PASCAL des deux quadrilatères des deux figures I et II. Ce groupe transforme donc en eux-mêmes la droite G_{12} et le point S_{12} .

XV. 1, (12)(34), (135)(246), (153)(264), (146)(235),
(154)(263), (145)(236), (164)(253), (163)(254), (12)(56),
(34)(56), (136)(245).

Ce groupe contient les 12 substitutions paires du groupe précédent, et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (135)(246). On ne peut former avec les substitutions de Δ_{12} qu'un seul groupe semblable.

Les 12 permutations sont:

123456, 345612, 561234, 214356, 435621, 562143,
436512, 652134, 651243, 213465, 124365, 346521,

qui correspondent aux 4 droites du quadrilatère de la première figure II.

GROUPES DES POINTS DE STEINER ET DES DROITES DE CAYLEY.

52. Soient donnés les deux points de STEINER $G_{123} G_{456}$, qui sont représentés par le symbole

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 34 & 56 & \\ 45 & 61 & 23 & (n.^{\circ} 24) \\ 36 & 25 & 14 & \end{array} \quad (1)$$

ou bien chacun respectivement par les symboles $\Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{23}$, $\Delta_{45} \Delta_{46} \Delta_{56}$.

Les deux points $G_{123} G_{456}$, ou mieux les 72 permutations correspondantes aux 6 droites de PASCAL, qui passent trois à trois par ces deux points, forment un groupe de 72 substitutions, savoir:

XVI. 1, (135)(246), (153)(264), 15)(24), (13)(46),
(26)(35), (35)(46), (15)(26), (13)(24), (135)(264), (153), (246),
(264), (135), (153)(246), (15)(46), (13)(26), (24)(35), (1256)(34),
(14)(2365), (1632)(45), (16)(2345), (14)(2563), (12)(3654),
(1436)(25), (16)(23), (12)(3456), (1236)(45), (1634)(25),
(1432)(56), (16)(2543), (1234)(56), (1452)(36), (1456)(23),
(1254)(36), (1652)(34),
(123456), (14)(25)(36), (16)(54)(32), (16)(25)(34), (14)(23)(56),
(12)(36)(45), (125436), (165234), (145632), (145236), (163254),
(12)(34)(56), (16)(23)(45), (125634), (143652), (143256), (123654),
(163452), (35), (15)(246), (13)(264), (135)(24), (153)(46), (26),
(246)(35), (15)(264), (13), (135)(26), (153)(24), (46), (264)(35),
(15), (13)(246), (135)(46), (153)(26), (24).

Les 6 droites de PASCAL qui passent par G_{123} et G_{456} sont:

$$\begin{aligned} \Delta_{12}\Delta_{18} &= 123456, & \Delta_{12}\Delta_{23} &= 125634, & \Delta_{13}\Delta_{23} &= 163254 \\ \Delta_{45}\Delta_{46} &= 125436, & \Delta_{45}\Delta_{56} &= 145632, & \Delta_{46}\Delta_{56} &= 165234. \end{aligned}$$

Ce groupe contient 36 substitutions paires et 36 impaires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (35), (1256)(34) ou (13), (123456). Il y a, dans le groupe total, 10 de ces groupes.

Si l'on effectue les substitutions de ce groupe sur un hexagone correspondant à une droite de PASCAL, qui ne passe ni par G_{123} , ni par G_{456} , on obtient 72 permutations, qui ne correspondent pas aux 6 droites de PASCAL de deux points conjugués de STEINER. En effet, en opérant la substitution (35), par ex. sur l'hexagone 135264 de la droite p_{123}^I passant par le point G_{145} (§ 1 de ce chapitre) on obtient l'hexagone 153264 de la droite p_{123}^{IV} , qui passe par le point G_{124} .

XVII. Les 36 substitutions paires du groupe précédent forment un groupe, qui peut être aussi engendré par deux substitutions, par ex. (1256)(34), (15)(24), ou (1256)(34), (12)(3456).

Si nous considérons le groupe XII comme engendré par les deux substitutions (13), (14)(23)(56), on obtient un groupe de 8 substitutions, contenu dans le groupe XVI. Dans ce groupe, il y en a 9 semblables, qui dépendent des substitutions (1256)(34), (14)(2365), (45)(1632), (16)(2345), (12)(3654), (25)(1436), (1654)(23), (1432)(56), (1452)(36).

$$\begin{aligned} \text{XVIII.} \quad & 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), \\ & (153)(264), (165432), (13)(24), (145632), (35)(46), (125436), \\ & (15)(26), (165234), (143256), (163452), (123654), (15)(46), \\ & (24)(35), (13)(26), (125634), (16)(23)(45), (143652), (153)(246), \\ & (135), (264), (135)(264), (153), (246), (163254), (12)(34)(56), \\ & (145236), (26)(35), (15)(24), (13)(46), (16)(25)(34), (14)(23)(56), \\ & (12)(36)(45). \end{aligned}$$

Ce groupe contient 18 substitutions paires et 18 impaires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (123456), (13)(24).

Les 36 permutations, que l'on obtient en partant de l'hexagone 123456, correspondent précisément aux 36 hexagones des 3 droites de PASCAL, qui passent par le point G_{123} .

Dans le groupe XVI, il n'y a qu'un seul de ces groupes.

Le point de STEINER G_{123} a pour symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$ (n.° 24), donc on peut représenter le groupe XVIII par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_3x_6 + x_2x_5 + x_1x_4) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23} \quad (2)$$

tandis que le point conjugué G_{456} est représenté par la fonction

$$(x_1x_2 + x_4x_5 + x_3x_6)(x_3x_4 + x_6x_1 + x_2x_5)(x_5x_6 + x_2x_3 + x_1x_4) \equiv \Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56} \quad (3)$$

Nous appelons ces deux fonctions: deux fonctions conjuguées.

Le produit de ces deux fonctions représente le groupe XVI.

Nous avons vu, au n.° 27, que les deux droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} sont représentées par le symbole

$$\begin{vmatrix} \Delta_{14} & \Delta_{36} & \Delta_{25} \\ \Delta_{26} & \Delta_{15} & \Delta_{34} \\ \Delta_{25} & \Delta_{24} & \Delta_{16} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Or, comme le groupe XVI transforme le groupe des 6 triangles $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$ en lui-même, de même le symbole (4) se transformera en lui-même; donc le groupe XVI transforme en lui-même le couple des deux droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} , de même que la conique Σ_{135} , qui a pour triangles conjugués les triangles 135, 246 des 6 points fondamentaux.

XIX. Le groupe des 18 substitutions paires du groupe XVIII peut être engendré par deux substitutions, par ex. (135), (246).

$$\begin{aligned} \text{XX. } & 1, (35), (153)(264), (135)(246), (15)(246), (13), \\ & (264)(35), (153), (264), (135)(264), (246), (153)(246), (135), \\ & (15)(264), (246)(35), (13)(246), (13)(264), (15). \end{aligned}$$

Ce groupe contient 9 substitutions paires et 9 impaires, il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (35), (153)(264). On a dans le groupe XVI deux de ces groupes, qui correspondent aux deux groupes des substitutions

$$(13), (15), (35); \quad (24), (26), (46).$$

Les 18 permutations que l'on obtient en partant de l'hexagone 123456 sont:

$$\begin{array}{cccccc} 123456, & 561234, & 345612, & 543612, & 321456, & 165234, \\ 521436, & 163254, & 365214, & 143652, & 541632, & 325416, \\ 563214, & 145632, & 341652, & 523416, & 125436, & 361254, \end{array}$$

qui correspondent aux 6 droites de PASCAL passant par G_{123} et G_{456} .

XXI. Les 9 substitutions paires du groupe précédent peuvent être engendrées par deux substitutions par ex. (135)(246); (135)(264).

Les 9 permutations qui résultent de l'hexagone 123456 correspondent aux 3 droites de PASCAL du point G_{123} .

Ce groupe transforme en lui-même le point de STEINER G_{123} et naturellement aussi le point conjugué.

XXII. 1, (35), (15)(26), (153)(26), (13)(26), (135),
(15), (26), (26)(35), (153), (135)(26), (13).

Ce groupe contient 6 substitutions paires et 6 impaires, et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (35), (15)(26), ou (35), (153)(26).

Dans le groupe XVI il y a 6 de ces groupes, comme on le voit en remarquant que le groupe XXII correspond à la substitution (135)(26), ou (153)(26).

Les 12 permutations, en partant de l'hexagone 123456, sont:

123456, 125436, 561432, 361452, 325416, 163452,
165432, 321456, 365412, 563412, 521436, 523416.

Elles correspondent aux 6 droites de PASCAL, qui passent par $G_{123}G_{456}$.

XXIII. Le groupe des 6 substitutions paires du groupe précédent peut être engendré par les deux substitutions (15)(26), (135).

Les 6 permutations correspondantes, obtenues en partant de l'hexagone 123456, appartiennent aux trois droites de PASCAL, qui passent par G_{123} .

GROUPES DES 6 FIGURES II.

53. Considérons par ex. la figure I. Nous avons vu (n.º 26) que cette figure peut être représentée par le symbole

$$\left| \begin{array}{l} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 16 \cdot 23 \cdot 45 \\ 14 \cdot 26 \cdot 35 \\ 13 \cdot 25 \cdot 46 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \end{array} \right| = \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{15} \Delta_{16}.$$

Elle se compose de 10 droites de PASCAL, qui donnent 120 permutations. Ces 120 permutations forment précisément le groupe suivant:

XXIV. 1, (135)(246), (153)(264), (15)(24), (13)(46),
 (26)(35), (23564), (15)(36), (16243), (16435), (15623), (24)(16),
 (13426), (14)(35), (15462), (15346), (14)(26), (13542),
 (25)(46), (13265), (12453), (12645), (13)(25), (24653),
 (34)(56), (145)(236), (136)(254), (165)(234), (14563), (25436),
 (156)(243), (12364), (16352), (16)(23), (124)(356), (152)(364),
 (126)(354), (15234), (14632), (146)(235), (154)(263), (12)(34),
 (14256), (13654), (162)(345), (16)(45), (134)(256), (142)(653),
 (12536), (16524), (132)(456), (136)(245), (164)(253), (12)(56),
 (23)(45), (125)(346), (143)(265), (14325), (123)(465), (26345);
 (123456), (14)(25)(36), (165432), (16)(25)(34), (14)(23)(56),
 (12)(36)(45), (132546), (126534), (1452), (145326), (1254),
 (134652), (2365), (163245), (125643), (124365), (164523), (2563),
 (154236), (1634), (143562), (1436), (162354), (156342),
 (1246), (135264), (1532), (1526), (1324), (12)(35)(46),
 (2534), (1465), (13)(26)(45), (1345), (146253), (2654),
 (3645), (1625), (13)(24)(56), (136425), (1653), (2456),
 (2435), (15)(23)(46), (1263), (1235), (152463), (2643),
 (3546), (15)(26)(34), (1423), (142635), (1543), (2346),
 (1356), (153624), (1642), (16)(24)(35), (1564), (1362).

Ce groupe contient 60 substitutions paires et 60 substitutions impaires, et il peut être engendré par deux substitutions, par ex.

$$(14)(23)(56), \quad (12453).$$

Dans le groupe total, il y a 6 de ces groupes.

XXV. Le groupe des 60 substitutions paires du groupe précédent peut être engendré par deux substitutions, par ex. (26)(35), (12453).

On peut représenter le groupe de la figure I par la fonction

$$(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6)(x_1 x_5 + x_2 x_3 + x_4 x_6)(x_1 x_4 + x_2 x_6 + x_3 x_5) \\
(x_1 x_3 + x_2 x_5 + x_4 x_6)(x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3 x_6) \equiv \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{15} \Delta_{16}.$$

Ce sont précisément les 6 fonctions données par J. SERRET (*). Donc:

Théorème CII. Les 6 fonctions symétriques de J. SERRET par rapport à 6 lettres, et qui ont 6 valeurs, donnent le même groupe des 6 figures Π de chaque système $[Zz]_m$ de l'hexagramme.

En effet, les points Z_2, Z_3 , etc. et les droites z_2, z_3 , etc. ont respectivement les mêmes symboles des droites de PASCAL et des points de KIRKMAN.

Si l'on applique les substitutions de ces groupes à un hexagone qui n'appartient pas à la figure I, on obtient 120 permutations, qui ne correspondent pas aux 10 droites de PASCAL d'une même figure Π . Pour le constater, il suffit d'opérer la substitution (16243) sur l'hexagone (125634) de la droite p_{345}^{II} ; on obtiendra l'hexagone 645213 de la droite p_{134}^{V} . *Il serait intéressant d'étudier les propriétés de ces groupes des droites de PASCAL, qui en résultent, par rapport à la conique Π de la figure I. Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, qu'en permutant les coordonnées d'un point on obtient des involutions ou bien des homographies cycliques; ici les droites de PASCAL, qui dérivent des 120 substitutions du groupe XXIV ne jouissent-elles donc pas de certaines propriétés polaires par rapport à la conique Π de la figure I?*

Les 10 droites de PASCAL de la figure I même ont des propriétés polaires. *En existe-t-il ici de correspondantes?* On peut se faire aussi la même demande pour tous les groupes les plus intéressants.

GROUPES DES POINTS DE KIRKMAN ET DES DROITES Z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m}$
 ET DES POINTS Z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m+1}$.

54. Soit donné par ex. le point de KIRKMAN

$$\left| \begin{array}{c} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 61 \cdot 23 \\ 14 \cdot 26 \cdot 35 \end{array} \right| = \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14},$$

qui correspond à la droite de PASCAL

$$(136425) = \Delta_{15} \Delta_{16}.$$

Les trois droites de PASCAL, qui passent par ce point, donnent 36 permutations; mais elles ne donnent pas un groupe, comme pour un des points de STEINER, parce que 36 n'est pas un diviseur de 120 (**). Dans une figure Π on a dix

(*) L. c.

(**) On sait par la théorie des substitutions que l'ordre m' d'un groupe contenu dans un autre d'ordre m doit être un diviseur de m .

points de KIRKMAN, et l'on trouve que le groupe le plus grand qui transforme le point de KIRKMAN en lui-même est de 12^{me} ordre. La droite de PASCAL se transforme en elle-même par le groupe III de 12 substitutions, mais celui-ci n'est pas l'analogie de celui du point de KIRKMAN.

En effet, le groupe du point $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ est le suivant:

XXVI. 1, (26)(35), (56)(13)(24), (152463), (16)(45),
 (126)(354), (14)(25)(36), (14)(23)(56), (12)(34), (162)(345),
 (15)(23)(46), (136425).

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (26)(35), (56)(13)(24), et il contient 6 substitutions paires et 6 impaires du groupe XXIV.

Les 12 permutations obtenues, en partant de 123456, sont:

123456,	341265,	541623,	623541,	265341,	456123,
432165,	214356,	614532,	532614,	356214,	165432,

qui appartiennent aux droites de PASCAL passant par le point $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$.

Il y a dans le groupe XXIV 10 tels groupes et dans le groupe total 60.

XXVII. Les 6 substitutions paires du groupe précédent forment un groupe, qui peut être engendré par deux substitutions, par ex. (26)(35), (16)(45).

Nous avons vu, (n.° 28), que les droites z_2, z_4 , etc. des systèmes $[Zz]_{2m}$ et les points Z_{2m+1} sont représentés par les mêmes symboles que les points de KIRKMAN. Donc les groupes des points de KIRKMAN sont aussi les groupes qui correspondent aux droites z_2, z_4 , etc. et aux points Z_{2m+1} .

On peut représenter le groupe du point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_1x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5) = \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}.$$

XXVIII. Le groupe de 360 substitutions paires peut être engendré par deux substitutions, par ex. (126), (12345).

Les 360 permutations que l'on obtient en partant d'un hexagone quelconque, appartiennent 6 à 6 aux 60 droites de PASCAL.

Enfin nous avons:

XXIX. Le groupe total de 720 substitutions peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (123456).

Nous avons donc ces deux théorèmes:

Théorème CIII. Les groupes de 3, 4, 5, 6 lettres considérés peuvent être tous engendrés par deux substitutions.

Théorème CIV. Tout groupe de 3, 4, 5, 6 lettres considéré, qui contient des substitutions paires et impaires, les contient en égal nombre.

Ces groupes pour $n=6$ et ceux que nous avons trouvés pour $n=3, 4, 5$ sont la base de toute configuration analogue à celle de l'hexagramme. On voit aussi, en même temps, que celui-ci n'est qu'une expression *particulière* de ces groupes. Nous obtiendrons maintenant des configurations, qui en sont une expression *générale*.

Les groupes, que nous venons de donner, sont aussi très intéressants pour l'hexagramme lui-même, comme nous l'avons dit au n.° 53, après le théorème CI.

§ 6.

Interprétation géométrique dans l'espace R_5 en correspondance avec l'hexagramme.

55. Nous n'avons plus maintenant qu'à exprimer géométriquement les conséquences, qui résultent immédiatement des groupes précédents, et nous obtiendrons dans R_5 une véritable extension des groupes de l'hexagramme mystique. Mais cette extension peut être faite dans R_5 de différentes manières, d'après le § 5 du premier chapitre.

En effet, si nous permutons les 6 coordonnées y_1, \dots, y_6 , d'un point S_6 dans R_5 , nous obtenons 720 points. Si sur les coordonnées on opère les 12 substitutions du groupe III de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, on obtient 12 points, qui correspondent à cette droite.

Mais nous savons qu'il y a 120 points dont les coordonnées sont les 6 racines 6^mes de l'unité (n.° 5), et qui forment un groupe réduit de 120 points. Si nous considérons les deux points

$$r_6, r_6^2, r_6^3, r_6^4, r_6^5, r, r_6^5, r_6^4, r_6^3, r_6^2, r_6$$

où r_6 , par ex. est $= -r_3$, étant r_3 une racine cubique de l'unité. Ce couple se transforme en lui-même par les 12 substitutions de la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$; donc on peut faire correspondre aux 60 droites de PASCAL les 60 couples des 120 points (r_6).

Nous avons vu qu'aux 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ correspondent (n.° 49) 15 fonctions $\Delta_{\alpha\beta}$. Si nous posons ces fonctions $= 0$ nous obtenons 15 surfaces du 2^d degré à 4 dimensions, qui représentent les 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme. Ces 15

surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ dans R_5 jouent précisément un rôle analogue à celui des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ dans l'hexagramme. En projetant ensuite sur un espace à 4, 3 dimensions et sur un plan nous obtiendrons des extensions de notre figure dans ces espaces.

On peut trouver aussi dans ces extensions l'analogue à la conique, où sont situés les 6 points fondamentaux de l'hexagramme. En permutant les 6 points de toutes les manières possibles, la conique se transforme en elle-même. Si nous supposons donnée une courbe, ou une surface à 2, à 3, ou bien à 4 dimensions dans R_5 , qui passe par les 6 sommets de la pyramide fondamentale, et qui se transforme en elle-même par les permutations des 6 coordonnées, cette courbe ou cette surface à 2, 3, 4 dimensions est dans l'espace R_5 le représentant de la conique fondamentale de l'hexagramme.

56. Avant de passer à l'étude des surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$, nous voulons étudier les propriétés des 720 points d'un groupe $(S_0)_{720}$, que l'on obtient en partant d'un point quelconque S_0 et en permutant ses 6 coordonnées y_1, \dots, y_6 de toutes les manières possibles.

On voit clairement maintenant pourquoi nous avons dû interpréter d'abord les groupes pour $n=3, 4, 5$, car les propriétés des groupes $(S_0)_6, (S_0)_{24}, (S_0)_{120}$ des § 2, 3, 4 de ce chapitre sont les mêmes que pour les points des groupes de $(S_0)_{720}$, lorsqu'on y permute seulement 3, 4 ou 5 coordonnées.

Du théorème XIII et suivants on obtient pour $n=6$.

Théorème CV. Sur chaque arête de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(6)}$ (que nous désignerons simplement par les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6) dans R_5 , par ex. $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \equiv A_1^{(12)}$, il y a deux points $P_0^{(12)}, P_0'^{(12)}$, dont les coordonnées sont 1, -1, 0000, 110000, qui divisent harmoniquement le segment $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$. Il y a pour chaque face à trois dimensions de la pyramide, par ex. $A_4^{(1)} A_4^{(2)} \equiv A_3^{(12)}$, deux espaces $\Pi_4^{(12)} \Pi_4'^{(12)}$ dont les équations sont de la forme

$$x_1 \mp x_2 = 0$$

et qui passent par $A_3^{(12)}$ divisant harmoniquement les deux faces $A_4^{(1)} A_4^{(2)}$.

On a en tout 15 points $P_0^{(ik)}$ et 15 points $P_0'^{(ik)}$ et un nombre égal d'espaces à 4 dimensions $\Pi_4^{(ik)}, \Pi_4'^{(ik)}$.

Les 15 espaces $\Pi_4^{(ik)}$ passent par le point unité, tandis que les 15 points $P_0^{(ik)}$ sont situés sur l'espace unité $\Sigma x_i = 0$.

Un espace $\Pi_4^{(ik)}$ quelconque contient 7 points $P_0^{(ik)}$ et 6 points $P_0'^{(ik)}$, et un espace $\Pi_4'^{(ik)}$ 6 points $P_0^{(ik)}$ et 7 points $P_0'^{(ik)}$.

Les 15 points $P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur les 20 droites d'intersection de l'espace unité avec les faces planes de la pyramide fondamentale. Ils sont

situés 6 à 6 sur les 15 plans d'intersection de l'espace unité avec les 15 faces à trois dimensions de la pyramide fondamentale. Les 6 points sur un de ces plans sont les sommets d'un quadrilatère (1). Sur chaque face plane de la pyramide fondamentale on a 3 points $P_0^{(ik)}$ et 3 points $P_0'^{(ik)}$, qui sont les sommets d'un quadrilatère. Les 30 points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$, pris ensemble, sont situés 3 à 3 sur 80 droites, qui sont 4 à 4 les côtés de 35 quadrilatères, y compris les 15 quadrilatères que nous avons considérés plus haut.

Théorème CVI. La figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ et par les espaces $\Pi_4^{(ik)}$, $\Pi_4'^{(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface $\Sigma x_i^2 = S_4^2 = 0$.

Théorème CVII. Les 720 points d'un groupe $(S_0)_{720}$ que l'on obtient en permutant les 6 coordonnées d'un point quelconque S_0 de toutes les manières possibles, sont situés deux à deux sur $15 \cdot 360$ droites, qui passent 360 à 360 par les 15 points $P_0^{(ik)}$. Les deux points d'une de ces droites sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par l'espace correspondant $\Pi_4^{(ik)}$.

Théorème CVIII. Les 15 points $P_0^{(ik)}$ déterminent 60 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre indices de la série 123456), qui contiennent les points $P_0^{(\alpha\beta)}$, $P_0^{(\gamma\delta)}$. De même les espaces $\Pi_4^{(ik)}$ déterminent 60 espaces à 3 dimensions $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, qui sont les espaces polaires des droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ par rapport à S_4^2 .

Théorème CIX. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés deux à deux sur $60 \cdot 360$ droites, qui coupent 360 à 360 les 60 droites P_1 et les espaces correspondants Π_3 . Les deux points d'une de ces droites sont divisés harmoniquement par les espaces P_1 et Π_3 qu'elle rencontre.

Théorème CX. Les 15 points $P_0^{(ik)}$ déterminent 15 plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\lambda)}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 123456), passant par les trois points $P_0^{(\alpha\beta)}$, $P_0^{(\gamma\delta)}$, $P_0^{(\epsilon\lambda)}$. Les 15 espaces $\Pi_4^{(ik)}$ déterminent 15 plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\lambda)}$. Ces 15 plans sont aussi déterminés par les points $P_0'^{(\alpha\beta)}$, $P_0'^{(\gamma\delta)}$, $P_0'^{(\epsilon\lambda)}$.

Les 15 plans P_2 et les 15 plans correspondants Π_2 sont polaires par rapport à la surface S_4^2 (2) (*).

(1) Si l'on projette la figure des points $P_0^{(ik)}$ dans un espace à 3 dimensions on obtient la figure complète de deux tétraèdres homologues. Voir n.º 46.

(2) Par rapport à une surface à 4 dimensions et du 2^d degré en R_5 , un point a pour espace polaire un espace à 4 dimensions, une droite un espace à 3 dimensions, et un plan a pour polaire un plan.

(*) Voir mon Mém. des Math. Annalen. Abschnitt III, ($n - 1$)-dimensionale Flächen 2^{ter} Grades F_{n-1}^2 , p. 184 et suivantes.

Théorème CXI. Les 720 points du groupe $(S_0)_{720}$ sont situés deux à deux sur 15·360 droites, qui coupent 360 à 360 les 15 plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta)}$. Les deux points, sur une telle droite, sont divisés harmoniquement par les deux plans qu'elle rencontre.

Théorème CXII. Les points doubles de l'homographie donnée par une substitution cyclique, par ex. (123456), forment par rapport à la pyramide fondamentale un cycle projectif de 6 points, qui est situé sur une courbe W rationnelle du 5^{me} ordre.

Les 120 substitutions cycliques d'ordre 6 du groupe total donnent 60 homographies cycliques, dont les points doubles sont le point unité et 5 points du groupe (r_6) .

Théorème CXIII. Les 720 points $(S_0)_{720}$ forment de 60 manières différentes 120 cycles projectifs de 6 points, situés sur des courbes W rationnelles de 5^{me} ordre.

Théorème CXIV. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés 6 à 6 sur 2400 plans passant 120 à 120 par les 20 droites d'intersection de l'espace unité avec les faces planes de la pyramide fondamentale. Les 6 points sur un de ces plans sont situés sur une conique; et ils ont les mêmes propriétés que les 6 points d'un groupe $(S_0)_6$ du § 2 de ce chapitre.

Théorème CXV. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés 24 à 24 sur 450 espaces à 3 dimensions passant 30 à 30 par les 15 plans d'intersection de l'espace unité avec les 15 faces à 3 dimensions de la pyramide fondamentale. Les 24 points d'un tel espace sont situés sur une surface du 2^d degré à 2 dimensions et ils ont les mêmes propriétés que les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ du § 3 de ce chapitre.

Théorème CXVI. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés 120 à 120 sur 36 espaces à 4 dimensions, passant 6 à 6 par les espaces à 3 dimensions où l'espace unité coupe les 6 faces à 4 dimensions de la pyramide fondamentale.

57. Des groupes $(y)_{m^{n-1}}$ du n.^o 5, en posant $m=2$, $n=6$, on a des groupes $(y)_{32}$ de 32 points obtenus en changeant les signes des 6 coordonnées d'un point quelconque de toutes les manières possibles. Si l'on part du point unité (comme nous l'avons fait pour $n=4, 5$) on obtient un groupe de 32 points, qui se séparent en deux groupes $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ de 16 points, de même que dans le cas $n=4$ on a deux groupes de 4 points (B) et (C) .

TABLEAU DES DEUX GROUPES $(B)_{16}$, $(C)_{16}$.

B_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$(B)_{16}$
B_2	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_3	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_4	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_5	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_6	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_7	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_8	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_9	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{10}	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{11}	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{12}	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{13}	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{14}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{15}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B_{16}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$(C)_{16}$
C_2	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_3	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_4	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_5	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_6	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_7	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_8	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_9	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{10}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{11}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{12}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{13}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{14}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{15}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
C_{16}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

On passe d'un point d'un des deux groupes à un point du même groupe par le changement d'un nombre pair de signes, tandis que l'on passe d'un point de $(B)_{16}$ à un point de $(C)_{16}$, et viceversa, par le changement d'un nombre impair de signes.

Avec l'espace unité $\sum x_i = 0$ on obtient aussi deux groupes d'espaces à 4 dimensions $(B)_{16}$, $(C)_{16}$, dont les coordonnées sont précisément égales à celles des points de $(B)_{16}$ et de $(C)_{16}$.

Il est facile de voir que chaque espace de $(B)_{16}$ ou $(C)_{16}$ contient 10 points de $(C)_{16}$ ou de $(B)_{16}$. Par exemple l'espace

$$x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 0$$

contient les 10 points $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}$.

Si nous considérons les deux espaces $\Pi_4^{(12)}, \Pi_4^{(12)}$

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0$$

on voit que le premier contient les 16 points:

$$B_1 B_2 B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16}, \quad C_1 C_2 C_3 C_4 C_{13} C_{14} C_{15} C_{16}$$

et le second les 16 points:

$$B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10}, \quad C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12}.$$

Donc:

Théorème CXVII. En changeant de toutes les manières possibles les signes des coordonnées d'un point S_0 , par ex. du point unité, on obtient deux groupes de 16 points $(B)_{16}, (C)_{16}$. On passe d'un point d'un des deux groupes à un point du même groupe par le changement d'un nombre pair de signes, et l'on passe à un point de l'autre groupe par le changement d'un nombre impair de signes.

L'espace unité donne lieu à deux groupes de 16 espaces à 4 dimensions $(B)_{16}, (\Gamma)_{16}$, qui sont les polaires réciproques de $(B)_{16}$ et $(C)_{16}$ par rapport à la surface $\Sigma x_i^2 \equiv S_4^2 = 0$.

Théorème CXVIII. Les espaces de $(B)_{16}$ ou de $(\Gamma)_{16}$ passent respectivement par dix points de $(C)_{16}$ ou de $(B)_{16}$.

Les 32 points $(B)_{16}, (C)_{16}$ sont situés 16 à 16 sur les 30 espaces $\Pi_4^{(ik)}, \Pi_4^{(ik)}$. Un de ces espaces contient 8 points de l'un et 8 de l'autre groupe. Deux espaces correspondants, par ex. $\Pi_4^{(12)}, \Pi_4^{(12)}$, pris ensemble, contiennent tous les 32 points.

Les 15 espaces $\Pi_4^{(ik)}$ forment la figure corrélative des 15 points $P_0^{(ik)}$. De même que les points, par ex. $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(23)}$ sont situés sur une droite, de même les espaces $\Pi_4^{(12)}, \Pi_4^{(13)}, \Pi_4^{(23)}$ passent par un espace à 3 dimensions. Or, ces trois espaces passent par les 8 points $B_1, B_{14}, B_{15}, B_{16}, C_1, C_{14}, C_{15}, C_{16}$, c'est à dire que les 32 points sont situés 8 à 8 sur 20 espaces à 3 dimensions passant par le point unité, car il y a 20 droites où sont situés 3 à 3 les 15 points $P_0^{(ik)}$. Mais il en arrive de même pour chaque point des deux groupes $(B)_{16}, (C)_{16}$, parce que la figure de 32 points est symétrique par rapport à ses points, donc:

Théorème CXIX. Les 32 points $(B)_{16}, (C)_{16}$ sont situés 8 à 8 sur 80 espaces à 3 dimensions, qui passent 20 à 20 par chacun d'eux.

Si nous considérons les 6 espaces

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0, \quad x_2 - x_4 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

ils passent par un plan, car les 6 points correspondants $P_0^{(ik)}$ sont situés sur un plan. Ces 6 espaces passent par les points $B_1, B_{16}, C_{15}, C_{16}$, qui sont par conséquent sur un plan. Or, nous avons 15 groupes (1), donc nous avons 15 plans passants par le point unité et contenant encore 3 autres points des deux groupes. Mais cela a lieu aussi pour chacun des 32 points, donc :

Théorème CXX. Les 32 points de $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ sont distribués 4 à 4 sur 60 plans passant 15 à 15 par chacun d'eux.

58. Si l'on considère les 9 espaces

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 0, & \quad x_4 + x_5 = 0, & \quad x_3 + x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, & \quad x_5 + x_6 = 0, & \quad x_1 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, & \quad x_6 + x_1 = 0, & \quad x_2 + x_5 = 0, \end{aligned}$$

on voit qu'ils passent par le point $1, -1, 1, -1, 1, -1$, ou bien C_6 . C'est un point qui ne varie pas par les substitutions du groupe des deux points de STEINER G_{123} , G_{456} , donc :

Théorème CXXI. Les 10 points du groupe $(C)_{16}$, dont les coordonnées ont trois signes positifs et trois négatifs, représentent dans R_5 les 10 couples des points de STEINER.

On s'assure facilement sur les coordonnées elles-mêmes des 32 points $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ de la vérité des théorèmes suivants :

Théorème CXXII. Les 120 droites qui joignent deux à deux les 16 points de $(B)_{16}$ ou de $(C)_{16}$ passent 4 à 4 respectivement par les 30 points P_0^{ik} , $P_0'^{(ik)}$.

Théorème CXXIII. Les deux groupes $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ sont homologues de 6 manières différentes, les sommets et les faces opposées à 4 dimensions de la pyramide fondamentale étant centres et espaces d'homologie.

Si l'on considère la surface

$$\Sigma x_i^2 \equiv S_4^2 = 0$$

et si l'on change les signes de toutes les manières possibles dans son équation, on obtient 32 surfaces, qui forment aussi deux groupes $(S_b)_{16}$, $(S_c)_{16}$, dont les propriétés résultent du n.º 7. Une des propriétés les plus remarquables est la suivante, qu'on peut vérifier très facilement.

Théorème CXXIV. Une quelconque des 32 surfaces $(S_b)_{16}$, $(S_c)_{16}$ du 2^d degré et à 4 dimensions, qui se déduisent en changeant les signes de toutes les manières possibles dans l'équation de l'une d'entre elles, par ex. $\Sigma x_i^2 = 0$, est polaire réciproque d'elle-même par rapport à chacune des autres surfaces.

On a aussi:

Théorème CXXV. La figure de 32 points $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ a par rapport aux 32 surfaces $(S_b)_{16}$, $(S_c)_{16}$, la même figure polaire réciproque des 32 espaces $(B)_{16}$ $(\Gamma)_{16}$.

DES 15 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}$ DU 2^d DEGRÉ À 4 DIMENSIONS

ET DES GROUPES DE $(S_0)_{720}$ CORRESPONDANTS AUX TRIANGLES $\Delta_{\alpha\beta}$ DE L'HEXAGRAMME.

59. Nous avons vu (n.° 48) que le groupe du triangle Δ_{12} peut être représenté par une fonction Δ_{12} , et si, d'après le n.° 13 (chap. I), nous posons

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv \Delta_{12} = 0 \quad (1)$$

on obtient une surface du 2^d degré à 4 dimensions dans R_5 , qui représente le groupe du triangle Δ_{12} . Donc:

Théorème CXXVI. Aux 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme mystique correspondent dans R_5 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ de 2^d degré à 4 dimensions, dont les équations sont de la forme

$$x_\alpha x_\beta + x_\gamma x_\delta + x_\epsilon x_\lambda = 0.$$

TABLEAU DES SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}$.

$$\begin{array}{lll} x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv \Delta_{12} = 0, & x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 \equiv \Delta_{23} = 0, & x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 \equiv \Delta_{35} = 0, \\ x_1x_6 + x_2x_3 + x_5x_4 \equiv \Delta_{13} = 0, & x_1x_5 + x_2x_3 + x_4x_6 \equiv \Delta_{24} = 0, & x_1x_2 + x_3x_5 + x_2x_4 \equiv \Delta_{36} = 0, \\ x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5 \equiv \Delta_{14} = 0, & x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_5 \equiv \Delta_{25} = 0, & x_1x_2 + x_3x_6 + x_4x_5 \equiv \Delta_{45} = 0, \\ x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_6 \equiv \Delta_{15} = 0, & x_1x_3 + x_2x_6 + x_4x_5 \equiv \Delta_{26} = 0, & x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4 \equiv \Delta_{46} = 0, \\ x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6 \equiv \Delta_{16} = 0, & x_1x_3 + x_2x_4 + x_5x_6 \equiv \Delta_{34} = 0, & x_1x_4 + x_2x_3 + x_5x_6 \equiv \Delta_{56} = 0. \end{array}$$

Une surface quelconque $\Delta_{\alpha\beta}$, par ex. Δ_{12} , passe par les 6 sommets de la pyramide fondamentale, de même que les côtés des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme passent par les 6 points fondamentaux de la conique. La surface Δ_{12} contient aussi les faces $A_2^{(135)}$, $A_2^{(136)}$, $A_2^{(145)}$, $A_2^{(146)}$, $A_2^{(235)}$, $A_2^{(245)}$, $A_2^{(246)}$ que je désigne simplement par les symboles 135, 136, 145, 146, 235, 245, 246; elle passe, en conséquence, par les 12 arêtes

$$13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 35, 36, 45, 46.$$

Les arêtes 12, 34, 56 manquent donc; ce sont celles données par les produits x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6 , qui se trouvent dans l'équation de la surface Δ_{12} (*). Donc:

Théorème CXXVII. Chaque surface $\Delta_{\alpha\beta}$, par ex. $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$, passe par les huit faces planes 135, 136, 145, 146, 235, 236, 245, 246 et par douze arêtes, les arêtes 12, 34, 56 exceptées, de la pyramide fondamentale.

L'espace polaire d'un point quelconque y_i de R_3 par rapport à Δ_{12} est:

$$y_1x_2 + y_2x_1 + y_3x_4 + y_4x_3 + y_5x_6 + y_6x_5 = 0 \quad (2)$$

si le point y_i est le sommet 1 de la pyramide fondamentale, on voit que (2) devient l'espace $x_2 = 0$ lui-même; donc:

Théorème CXXVIII. Les 6 espaces à 4 dimensions tangents à une surface $\Delta_{\alpha\beta}$ aux sommets de la pyramide fondamentale, sont ses 6 faces elles-mêmes, à 4 dimensions.

Si l'on considère une surface du 2^d degré dont l'équation est

$$a_{11}x_1^2 + \dots + a_{66}x_6^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{56}x_5x_6 = 0$$

son équation en coordonnées u_i corrélatives est:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{16} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{26} & u_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{16} & a_{23} & a_{36} \dots & a_{66} & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 \dots & u_6 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Le déterminant (3) pour la surface Δ_{12} se réduit à l'équation

$$u_1u_2 + u_3u_4 + u_5u_6 = 0. \quad (4)$$

Il est facile de voir que la surface Δ_{12} est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \equiv S_4^2 = 0. \quad (5)$$

Il suffit d'écrire la condition pour que l'espace polaire d'un point y_i par rapport à S_4^2 , c'est à dire

$$\Sigma y_i x_i = 0$$

(*) Les surfaces du 2^d degré à 3 dimensions ont un système de ∞^3 droites, celles à 4 dimensions ont deux systèmes de ∞^3 plans, etc. Voir mon Mém. des Math. Annalen, p. 189, *Anzahl der linearen Räume, die in einer (n-1)-dimensionalen F_{n-1}^2 enthalten sind*, etc.

touche la surface (4); le point y_i est alors situé sur la surface Δ_{12} elle-même. Donc:

Théorème CXXIX. Toute surface $\Delta_{\alpha\beta}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface fondamentale $S_4^2 \equiv \Sigma x_i^2 = 0$ (1).

60. Du groupe I n.° 49 on déduit:

Théorème CXXX. En opérant sur un point quelconque S_0 dans R_3 successivement les deux homographies cycliques (3645), (135246), on obtient 48 points, qui forment un groupe $(S_0)_{12}^1$. Ces 48 points correspondent aux 48 permutations des droites de PASCAL

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \quad \Delta_{12}\Delta_{14}, \quad \Delta_{12}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{16}; \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}, \quad \Delta_{12}\Delta_{25}, \quad \Delta_{12}\Delta_{26}$$

des deux figures I et II.

Les 720 points du groupe $(S_0)_{720}$ forment de 15 manières différentes 15 groupes $(S_0)_{\gamma\beta}^m$ ($m=1, 2, \dots, 15$) par rapport aux 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$.

Théorème CXXXI. Les 48 points du groupe $(S_0)_{12}^1$ sont situés deux à deux sur 3·24 droites, passant 24 à 24 par les 3 points $P_0^{(12)}, P_0^{(34)}, P_0^{(56)}$, centres des involutions de première espèce (12), (34), (56) du groupe Δ_{12} .

Les 48 points de $(S_0)_{12}^1$ sont situés deux à deux sur 9·24 droites coupant 24 à 24 les droites $P_4^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les espaces correspondants $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, qui sont les espaces fondamentaux des 9 involutions de 2^e espèce contenues dans le groupe Δ_{12} .

Théorème CXXXII. Les 48 points de $(S_0)_{12}^1$ sont situés sur 7·24 droites coupant 24 à 24 les plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon)}$, qui sont les espaces fondamentaux des 7 involutions de 3^{me} espaces contenues dans le groupe Δ_{12} .

Les 8 substitutions cycliques d'ordre 6 de Δ_{12} se divisent en 4 couples, où une substitution d'un couple est une puissance de l'autre, donc:

Théorème CXXXIII. Les 48 points de $(S_0)_{12}^1$ forment de 4 manières différentes 8 cycles projectifs de 6^{me} ordre, par rapport aux pyramides des points doubles des 4 homographies cycliques du groupe Δ_{12} .

Les 6 substitutions cycliques du 4^{me} ordre du groupe Δ_{12} forment aussi 3 couples, de la même manière que les 8 substitutions cycliques de 6^{me} ordre, donc:

Théorème CXXXIV. Les 48 points de $(S_0)_{12}^1$ forment de 3 manières différentes 12 cycles projectifs du 4^{me} ordre du groupe Δ_{12} .

De même pour les autres groupes $(S_0)_{12}^m$.

(1) On peut, si l'on veut, prendre cette surface comme surface correspondante de la conique fondamentale de l'hexagramme.

Théorème CXXXV. Si le point S_0 tombe sur une des surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$, les 720 points de $(S_0)_{720}$ se distribuent 48 à 48 sur les 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$.

Le groupe II donne:

Théorème CXXXVI. Si, sur le point S_0 , on opère successivement l'involution (13)(24) et l'homographie (1526)(34) on a 24 points du groupe $(S_0)_{12}$. Dans toute la figure on a $2 \cdot 15 \cdot 15$ de ces groupes.

DES 60 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ DE 4^me ORDRE ET À TROIS DIMENSIONS
ET DES GROUPES DE $(S_0)_{720}$ CORRESPONDANTS AUX DROITES DE PASCAL,
AUX DROITES z_{2m+1} ET AUX POINTS Z_{2m} .

61. Considérons la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, elle nous a donné le groupe III (n.° 50). Ce groupe est représenté par la fonction $\Delta_{12}\Delta_{13}$. Si nous l'égalons à zéro

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13} = 0 \quad (1)$$

elle nous donne l'ensemble de deux surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , et d'après le n.° 13 leur intersection nous représente le groupe III. Cette intersection est évidemment une surface du 4^me ordre et à 3 dimensions (*).

Les deux surfaces de 2^d degré Δ_{12} , Δ_{13} passent par les surfaces planes de la pyramide fondamentale

$$\begin{array}{cccccccc} 135, & 136, & 145, & 146, & 235, & 236, & 245, & 246 \\ 124, & 125, & 134, & 135, & 246, & 256, & 346, & 356. \end{array}$$

Elles passent donc par les deux mêmes faces 135, 246 et en outre par les arêtes 14, 25, 36, qui ne sont pas situées sur les deux faces.

Ces trois arêtes sont données par les 3 couples des indices de la surface Δ_{23} .

Nous avons vu que les points Z_{2m} et les droites z_{2m+1} ont les mêmes symboles de droites de PASCAL, donc:

Théorème CXXXVII. Aux 60 droites de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$, ou aux 60 points Z_{2m} et aux droites z_{2m+1} , correspondent 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ à 3 dimensions et du 4^me ordre, suivant lesquelles se coupent deux à deux les 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$. Une de ces surfaces, par ex. $\Delta_{12}\Delta_{13}$ contient les faces 135, 246 et les arêtes 14, 25, 36 de la pyramide fondamentale (**).

(*) Voir mon Mém. des Math. Annalen, p. 187, *Büschel von (n - 1)-dimen. Flächen F_{n-1}^2* .

(**) Voir aussi n.° 67.

62. Le groupe III donne:

Théorème CXXXVIII. Si l'on opère, sur un point quelconque S_0 , l'involution (13)(46) et l'homographie cyclique (123456), on obtient un groupé de 12 points $(S_0)_{12, 13}^4$, qui correspondent aux 12 hexagones de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$.

Les 720 points $(S_0)_{720}$ forment de 60 manières différentes, 60 de ces groupes $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma}^p$ ($p=1, 2, \dots, 60$).

Théorème CXXXIX. Ces 12 points sont situés deux à deux sur 3.6 droites, qui coupent 6 à 6 les droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les espaces correspondants $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ fondamentaux de 3 involutions des 2^d espèce du groupe III (n.° 50).

Théorème CXL. Ils sont aussi situés deux à deux sur 4.6 droites, qui coupent 6 à 6 les plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\zeta)}$, $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\zeta)}$ fondamentaux des 4 involutions de 3^{me} espèce du groupe III.

Théorème CXLI. Ils forment deux cycles projectifs de 6^{me} ordre correspondants à l'homographie cyclique de 6^{me} ordre du groupe III.

Des autres groupes IV, V, VI de la droite de PASCAL on peut aussi obtenir des groupes spéciaux de points.

Du groupe VII on déduit:

Théorème CXLII. Si l'on opère, sur le point S_0 , successivement les deux involutions (13)(46), (14)(25)(36), on obtient 4 points de $(S_0)_{12, 13}^4$, situés deux à deux sur 4 droites, qui coupent deux à deux les plans $P_2^{(14)(25)(36)}$, $P_2^{(16)(25)(34)}$ et les plans correspondants fondamentaux des deux involutions de 3^{me} espèce du groupe V. Ils sont situés deux à deux sur deux droites, qui coupent la droite $P_1^{(12)(46)}$ et l'espace $\Pi_3^{(13)(46)}$ fondamentaux de l'involution (13)(46) du groupe.

Les 12 points du groupe $(S_0)_{12, 23}^4$ forment de 6 manières différentes 3 de ces groupes.

Naturellement les autres groupes $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma}^p$ ont les mêmes propriétés.

Si le point S_0 est le point $r_6, r_6^2, r_6^3, r_6^4, r_6^5, 1$, en opérant sur ce point l'homographie cyclique (123456), il reste inaltéré, et si nous opérons sur lui l'involution (13)(46) et l'homographie cyclique (123456), qui engendrent le groupe $(S_0)_{12, 13}^4$, on obtient deux points, savoir:

$$r_6, r_6^2, r_6^3, r_6^4, r_6^5, 1; \quad 1, r_6^5, r_6^4, r_6^3, r_6^2, r_6.$$

On peut par conséquent faire correspondre aussi ces deux points à la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$. Donc:

Théorème CXLIII. Les 120 points du groupe (r_6) , dont les coordonnées sont les 6 racines 6^{mes} de l'unité, correspondent deux à deux aux 60 droites de PASCAL.

Ils sont situés 8 à 8 sur les 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$.

Pour démontrer la dernière partie de ce théorème il suffit de remarquer que la surface, par ex. Δ_{12}

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$$

passé par le point 1, $-r_3, r_3, -r_3^2, r_3^2, -1$ (r_3 étant une racine cubique de l'unité). Le groupe correspondant de 48 points se réduit pour ce point à 8. Ces 8 points correspondent aux droites de PASCAL des deux quadrilatères donnés par les deux figures Π I et II, c'est à dire $p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I, p_{345}^{II} p_{134}^{II} p_{135}^{II} p_{145}^{II}$.

63. Du groupe VIII on a :

Théorème CXLIV. Si l'on opère, sur le point S_0 , deux involutions quelconques de 2^{de} espèce du groupe VIII, on obtient 4 points. Ces 4 points sont situés deux à deux sur 6 droites coupant deux à deux les espaces fondamentaux des trois involutions du groupe.

Ce sont les 4 points correspondants aux 4 droites de PASCAL de la figure I $p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I$.

Les 48 points d'un groupe quelconque $(S_0)_{\alpha\beta}$ forment d'une seule manière 12 de ces groupes.

De même le groupe IX nous donne 8 points du groupé $(S_0)_{12}^4$ correspondant aux 8 droites de PASCAL des deux quadrilatères donnés par les deux figures I et II. On peut les engendrer avec l'involution (12)(34) et l'homographie (1625)(34).

Avec les 48 points d'un groupe $(S_0)_{\alpha\beta}$ on peut former des trois manières différentes 6 de ces groupes.

De même, des groupes X, XI, XII, XIII, on obtient respectivement des groupes de 4, 8, 8, 4 points, dont les propriétés peuvent être établies de la même manière que pour les groupes précédents.

Enfin le groupe XIV nous donne :

Théorème CXLV. Si l'on opère, sur le point S_0 , l'involution (12) et l'homographie cyclique (135246), on obtient un groupe de 24 points de $(S_0)_{12}^4$, situés deux à deux sur 3·12 droites et passants 12 à 12 par les trois points $P_0^{(12)}, P_0^{(34)}, P_0^{(56)}$. Ces 24 points correspondent aux 8 droites des deux quadrilatères des deux figures I et II.

Les 48 points d'un groupe quelconque $(S_0)_{12}^m$ forment d'une seule manière deux de ces groupes.

DES 20 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ DU 6^{me} ORDRE À 2 DIMENSIONS
ET DES GROUPES DE $(S_0)_{720}$ CORRESPONDANTS AUX 20 POINTS DE STEINER
ET AUX DROITES DE CAYLEY.

64. Nous avons vu, n.° 52, que le groupe du point de STEINER G_{123} peut être représenté par la fonction $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$. Or en posant cette fonction égale à zéro, on a

$$\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23} \equiv (x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_5x_6 + x_2x_5 + x_1x_4) = 0.$$

D'après le n.° 13, l'intersection des trois surfaces $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{23} = 0$ représente le groupe XVIII.

Les trois surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} passent respectivement par les huit faces

$$\begin{array}{cccccc} 135, & 136, & 145, & 146, & 235, & 236, & 245, & 246, \\ 124, & 125, & 134, & 135, & 246, & 256, & 346, & 356, \\ 123, & 126, & 135, & 156, & 234, & 246, & 345, & 456. \end{array}$$

Elles passent donc toutes les trois par les faces 135, 246 de la pyramide fondamentale. Elles passent aussi par le point $-1, 1, -1, 1, -1, 1$ des 10 points du groupe $(C)_{16}$, qui représentent les groupes des 10 couples de points de STEINER (théorème CXX). L'intersection de 3 surfaces quelconques du 2^d degré à 4 dimensions en R_5 est une surface de 8^{me} ordre à 2 dimensions. Dans notre cas les trois surfaces passent par les deux plans 135, 246, qui font donc partie de la surface d'intersection, par conséquent elles se coupent en outre dans une surface de 6^{me} ordre et à 2 dimensions. Cette surface passe naturellement par le point $-1, 1, -1, 1, -1, 1$.

Au point de STEINER G_{456} correspond une surface $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$, qu'on peut appeler la conjuguée de la première. Elle passe aussi par le point $-1, 1, -1, 1, -1, 1$, donc :

Théorème CXLVI. Aux 20 points de STEINER $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ correspondent en R_5 20 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\sigma\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ de 6^{me} ordre et à deux dimensions, situées respectivement sur les trois surfaces de 2^d degré $\Delta_{\sigma\beta}$, $\Delta_{\sigma\gamma}$, $\Delta_{\beta\gamma}$.

Théorème CXLVII. Les surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\sigma\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$, $\Delta_{\delta\epsilon}\Delta_{\delta\lambda}\Delta_{\epsilon\lambda}$, qui correspondent à deux points conjugués de STEINER, passent par celui des 10 points du groupe $(C)_{16}$ (théor. CXX), qui représente le groupe des deux points de STEINER.

65. Du groupe XVI il résulte :

Théorème CXLVIII. En opérant, sur le point S_0 , l'involution (13) et l'homographie cyclique (123456), on obtient un groupe de 72 points $(S_0)_{123.456}^4$, qui

correspondent aux 72 hexagones des 6 droites de PASCAL passant par les deux points de STEINER G_{123} , G_{456} .

Les 720 points de $(S_0)_{720}$ forment 10 de ces groupes $(S_0)_{\alpha\beta\gamma,\delta\epsilon\lambda}^q$ ($q = 1, 2, \dots, 10$), qui correspondent aux dix couples des points de STEINER, ainsi qu'aux dix couples des droites de CAYLEY.

Théorème CXLIX. Les 72 points du groupe $(S_0)_{123,456}^4$ sont situés deux à deux sur 6·36 droites passant 36 à 36 par les points $P_0^{(ik)}$, centres des 6 involutions de première espèce du groupe XVI.

Ils sont situés deux à deux sur 10·36 droites, qui rencontrent 36 à 36 les espaces fondamentaux P_1, Π_3 des 10 involutions de 2^{de} espèce du groupe.

Théorème CL. Les 72 points du groupe $(S_0)_{123,456}^4$ forment de 6 manières différentes 12 cycles projectifs de 6 points par rapport aux pyramides des points doubles des 6 homographies cycliques du groupe.

En effet, les 12 substitutions cycliques du groupe XVI déterminent précisément six homographies cycliques.

Ils forment aussi de deux manières différentes 24 cycles de 3 points correspondant aux deux homographies cycliques (135), (246) du groupe.

Le groupe XVII des substitutions paires de XVI nous donne un groupe de 36 points de $(S_0)_{123,456}^4$, donc :

Théorème CLI. Les deux groupes, que l'on obtient de $(S_0)_{123,456}^4$, sont évidemment homologiques pour chacun des 6 points $P_0^{(ik)}$ et des espaces correspondants $\Pi_4^{(ik)}$ du théorème CXLIX.

Du groupe XVIII on obtient :

Théorème CLII. En opérant sur le point S_0 l'involution (12)(34) et l'homographie cyclique (123456) on a 36 points du groupe $(S_0)_{123,456}^4$ correspondant aux trois droites de PASCAL de G_{123} , tandis que les 36 restants correspondent à celles de G_{456} . Les propriétés de ces deux groupes de 36 points résultent, comme pour les autres, de la nature des substitutions du groupe XVIII.

Si le point S_0 tombe sur une des 20 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$, les 720 points $(S_0)_{720}$ se distribuent 36 à 36 sur les 20 surfaces.

Du groupe XX on obtient en partant du point (S_0) , 18 points, qui correspondent aux 6 droites de PASCAL de G_{123} , G_{456} .

Avec les 72 points de $(S_0)_{123,456}^4$ on peut former de deux manières différentes 4 de ces groupes.

Du groupe XXI on obtient 9 points contenus dans les 18 points précédents et correspondants aux trois droites de G_{123} , tandis que les 9 restants correspondent aux trois droites de G_{456} .

Du groupe XXII on déduit de S_0 12 points du groupe $(S_0)_{323.456}^4$. Les 72 points de $(S_0)_{123.456}^4$ forment de 6 manières différentes 6 de ces groupes. Ces 12 points correspondent aussi aux 6 droites de PASCAL de G_{123} , G_{456} .

Du groupe XXIII on a de S_0 un groupe de 6 points contenus dans les 12 points précédents; ils correspondent aux droites de PASCAL de G_{123} .

Ces propriétés s'étendent naturellement à tout groupe $(S_0)_{\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\lambda}^q$.

DES 6 CONFIGURATIONS Π QUI CORRESPONDENT AUX 6 FIGURES Π
DU SYSTÈME PASCAL-KIRKMAN OU D'UN SYSTÈME QUELCONQUE $[Zz]_m$.

66. Nous avons vu au n.° 53 que le groupe d'un figure Π , par ex. de la figure I, est représenté par une des fonctions de SERRET, savoir: $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$. En posant

$$(x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6)(x_1x_6+x_2x_3+x_4x_5)(x_1x_4+x_2x_6+x_3x_5)(x_1x_3+x_2x_5+x_4x_6)(x_1x_5+x_2x_4+x_3x_6)=0 \\ \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16};$$

les 5 surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} , Δ_{15} , Δ_{16} , prises ensemble, passent par toutes les 15 faces planes de la pyramide fondamentale; elles passent aussi toutes par les 6 sommets; leurs points d'intersection ultérieurs forment une configuration Π , qui correspond à la figure I de l'hexagramme. Donc:

Théorème CLIII. Aux six figures Π d'un système quelconque $[Zz]_m$, ou bien du système PASCAL-KIRKMAN, correspondent en R_5 , 6 configurations Π , qui sont données respectivement par les points d'intersection de 5 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}\Delta_{\alpha\epsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$, les sommets de la pyramide fondamentale exceptés.

Du groupe XXIV on a:

Théorème CLIV. Si l'on opère sur le point S_0 successivement l'involution (14)(23)(53) et l'homographie (12453), on obtient 120 points formant un groupe $(S_0)_1$ relativement aux dix droites de PASCAL de la figure I.

Les 720 points du groupe $(S_0)_{720}$ forment, de 6 manières différentes, 6 de ces groupes, qui correspondent aux six figures Π d'un système quelconque $[Zz]_m$.

Théorème CLV. Les 120 points de $(S_0)_1$ sont situés deux à deux sur 15·60 droites, qui coupent 60 à 60 les espaces fondamentaux P_1 et Π_3 des 15 involutions de 2^e espèce du groupe.

Ils sont situés deux à deux sur 10·60 droites rencontrant 60 à 60 les plans fondamentaux P_2 , Π_2 des 10 involutions de 3^{me} espèce du groupe.

Les 20 substitutions cycliques d'ordre 6 de XXIV (n.° 53) forment 10 couples des substitutions, dont l'une est une puissance de l'autre.

Les 24 substitutions de 5^{me} ordre se séparent en 6 groupes de 4 substitutions, dont l'une est une puissance des autres, comme par ex.

$$(23564), (25436), (26345), (24653).$$

En outre, les 30 substitutions de 4^{me} ordre du groupe se séparent en 15 couples, en sorte qu'une des substitutions d'un tel couple est une puissance de l'autre; comme, par ex., les deux substitutions du couple (2365), (2563). Donc:

Théorème CLVI. Les 120 points de $(S_6)_1$ forment de 10 manières différentes 20 cycles projectifs de 6 points, par rapport aux pyramides des points doubles des 10 homographies cycliques du groupe.

Ils forment aussi de 6 manières différentes 24 cycles projectifs de 5 points par rapport aux 6 homographies cycliques d'ordre 5 du groupe.

Enfin ils se séparent, de 15 manières différentes, en 30 cycles projectifs de 4 points par rapport aux 15 homographies cycliques de 4^{me} ordre du groupe.

Du groupe XXV on obtient 60 points du groupe précédent, engendrés par l'involution (26)(35) et par l'homologie cyclique (12453).

DES 60 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ DU 8^{me} ORDRE À 2 DIMENSIONS
ET DES GROUPES DE $(S)_{720}$ QUI CORRESPONDENT AUX 60 POINTS DE KIRKMAN,
AUX 60 POINTS Z_{2m+1} OU AUX 60 DROITES z_{2m} .

67. Si nous considérons maintenant un point de KIRKMAN, par ex. $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, il correspond à la droite de PASCAL $\Delta_{15}\Delta_{16}$, ou aux points Z_{2m} et aux droites z_{2m+1} représentés par le symbole $\Delta_{15}\Delta_{16}$ (n.° 50). Le groupe de ce point de KIRKMAN peut être représenté, comme nous l'avons vu, par le produit des trois fonctions Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} . En posant

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14} = 0 \quad (1)$$

on obtient une surface, qui représente le groupe du point de KIRKMAN. Les trois surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} passent toutes par les arêtes 13, 25, 36, 15, 24, 35 de la pyramide fondamentale. Ces 6 arêtes sont données précisément par les 6 côtés de l'hexagone de la droite de PASCAL correspondante $\Delta_{15}\Delta_{16}$, ou bien de la surface $\Delta_{15}\Delta_{16}$

$$(x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_6)(x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6) = 0.$$

Les surfaces Δ_{15} , Δ_{16} passent toutes les deux par les 9 arêtes restantes, données par les 3 surfaces (1), ou bien par les 9 côtés des trois hexagones des droites de PASCAL passant par le point de KIRKMAN (n.° 25). Les trois surfaces se ren-

contrent donc suivant une surface à 2 dimensions de 8^{me} ordre, qui représente le groupe du point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$. Cette surface passe par les 6 arêtes données par les 6 couples des indices des deux surfaces Δ_{15}, Δ_{16} de la surface correspondante $\Delta_{15}\Delta_{16}$. Celle-ci passe par les 9 arêtes restantes (*). La surface $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ correspond aussi aux points Z_{2m+1} et aux droites z_{2m} de l'hexagramme, qui ont le même symbole, de même que la surface $\Delta_{15}\Delta_{16}$ correspond aux points Z_{2m} et aux droites z_{2m+1} du même symbole $\Delta_{15}\Delta_{16}$. Donc :

Théorème CLVII. Aux 60 points de KIRKMAN, aux 60 points Z_{2m+1} et aux 60 droites z_{2m} correspondent, en R_5 , 60 surfaces du 8^{me} ordre à deux dimensions, données par l'intersection de trois surfaces $\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\alpha\gamma}, \Delta_{\alpha\delta}$.

Théorème CLVIII. À la surface $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ est relative la surface de 4^{me} ordre à 3 dimensions $\Delta_{\alpha\epsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$.

La surface $\Delta_{\alpha\mu}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ passe par les 6 arêtes de la pyramide fondamentale données par les six couples des indices des deux surfaces $\Delta_{\alpha\epsilon}, \Delta_{\alpha\lambda}$. La surface $\Delta_{\alpha\epsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$ passe par les 9 arêtes restantes, déterminées par les couples des indices des trois surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$.

Le point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ et la droite de PASCAL correspondante $\Delta_{15}\Delta_{16}$ appartiennent à la figure I (n.° 26); de même les surfaces correspondantes $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ et $\Delta_{15}\Delta_{16}$ appartiennent à la configuration I; c'est à dire que ces surfaces passent par les points de cette configuration. Donc :

Théorème CLIX. Les 10 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ et les 10 surfaces correspondantes $\Delta_{\alpha\epsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$ relatives aux 10 points de KIRKMAN et aux 10 droites de PASCAL d'une des 6 figures II, ou bien aux dix points Z et à leurs droites z d'un système quelconque $[Zz]_m$, passent par les points de la configuration correspondante II.

Les 10 droites de PASCAL d'une figure II passent 3 à 3 par les 10 points de KIRKMAN de la figure, et ceux-ci sont situés 3 à 3 sur les 10 droites de PASCAL correspondantes (n.° 26), donc :

Théorème CLX. Les dix surfaces à 3 dimensions $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ d'une configuration II en R_5 se coupent 3 à 3 aux dix surfaces $\Delta_{\alpha\delta}\Delta_{\alpha\epsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$ de la même configuration, et ces dix surfaces sont situées 3 à 3 sur les dix surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$.

68. Le groupe XXVI donne :

Théorème CLXI. Si l'on opère, sur le point S_0 , successivement les deux involutions (26)(35), (56)(13)(24), on obtient un groupe de 12 points $(S_0)_{12}^{1.13.14}$ relatifs aux droites de PASCAL du point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$.

(*) Voir n.° 61.

Avec les 120 points du groupe $(S_0)_I$ (n.° 66) on peut former 10 de ces groupes correspondants aux dix points de KIRKMAN de la figure I.

Théorème CLXII. Les 12 points du groupe $(S_0)_{12,13,14}^1$ sont situés deux à deux sur 3.6 droites, qui rencontrent 6 à 6 les espaces fondamentaux P_1 et Π_3 des 3 involutions de 2^e espèce du groupe.

Ils sont aussi situés deux à deux sur 4.6 droites coupant les plans fondamentaux P_2 , Π_2 des involutions de 3^{me} espèce du groupe.

Ils forment aussi deux cycles projectifs de 6 points par rapport à l'homographie cyclique de 6^{me} ordre du groupe.

Si le point S_0 tombe sur une des 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ les 720 points de $(S_0)_{720}$ se disposent 12 à 12 sur ces surfaces.

Du groupe XXVII on déduit un groupe de 6 points contenus dans le groupe précédent.

Le groupe XXVIII de toutes les substitutions paires donne:

Théorème CLXIII. Si l'on opère sur le point S_0 les homographies cycliques (126), (12345), on obtient 360 points $(S_0)_{360}$. Les 720 points forment deux de ces groupes.

Ces deux groupes sont homologues de 15 manières différentes, les points $P_0^{(ik)}$ et les espaces $\Pi_4^{(ik)}$ étant centres et espaces d'homologie (théor. XXXIII).

Le groupe total donne:

Théorème CLXIV. En opérant sur le point S_0 l'involution (12) et l'homographie cyclique (123456), on obtient le groupe entier $(S_0)_{720}$.

69. Nous avons vu, (n.° 26), que trois figures Π de l'hexagramme, par ex. I, II, III, déterminent le point de STEINER G_{123} , tandis que les trois autres ont le point G_{456} commun. On trouve aussi dans R_5 la propriété correspondante.

Théorème CLXV. Trois configurations Π en R_5 , par ex. I, II, III, déterminent la surface $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, tandis que les autres déterminent la surface conjuguée $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$.

Deux figures Π , par ex. I et II, ont le triangle Δ_{12} commun, (n.° 28), donc:

Théorème CLXVI. Deux configurations Π dans R_5 , I et II par ex., sont situées sur la surface Δ_{12} .

Les deux figures Π déterminent aussi les 4 points G_{123} , G_{124} , G_{125} , G_{126} situés sur la droite de STEINER-PLÜCKER g_{12} , qui a pour symbole Δ_{12} , (n.° 28), donc:

Théorème CLXVII. Deux configurations Π , I et II par ex., dans l'espace R_5 , déterminent les 4 surfaces à 2 dimensions et de 6^{me} ordre relatives aux 4 points de STEINER G_{123} , G_{124} , G_{125} , G_{126} , qui sont situées sur la surface du 2^d ordre à 4 dimensions Δ_{12} .

Donc les surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ correspondent aussi aux droites de STEINER-PLÜCKER et aux points de SALMON.

Nous voyons que cette interprétation, dans l'espace à 5 dimensions, est la véritable extension de la figure de PASCAL pour les courbes et les surfaces qui se transforment en elles-mêmes, de même que la conique fondamentale dans l'hexagramme se transforme en elle-même par les permutations des 6 points fondamentaux.

§ 7.

Projections des figures obtenues dans l'espace à 5 dimensions sur l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

70. Nous pourrions projeter d'abord sur un espace à 4 dimensions quelconque et d'un point quelconque, ou bien du point unité sur l'espace unité. Les figures que l'on obtiendrait seraient aussi des expressions géométriques de la théorie des substitutions de 6 lettres dans l'espace à 4 dimensions.

Cependant, je veux, pour ne pas entrer dans des développements trop longs, faire seulement des projections sur l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

PROJECTION SUR L'ESPACE À 3 DIMENSIONS S_3 .

Les configurations, que nous venons d'étudier dans R_5 , nous donnent le moyen d'obtenir des configurations différentes de la même classe sur l'espace à 3 dimensions, par la méthode développée dans le chapitre I, § 6.

La projection d'une figure quelconque de R_5 sur un espace à 3 dimensions, que nous supposons tout à fait arbitraire, doit s'effectuer au moyen d'une droite de projection S_1 , qui ne coupe pas S_3 . En effet S_1 et S_3 dans R_5 sont deux espaces corrélatifs, tandis qu'un plan et un espace à 3 dimensions se coupent en général en un point (n.º 1).

Nous supposons que la droite S_1 et l'espace S_3 n'aient aucune position spéciale par rapport à la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(6)}$ de R_5 , que nous avons aussi désignée simplement par les 6 indices 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nous commençons par projeter la pyramide sur S_3 . On en obtient un hexagone ${}_1(A)$ complet. Les points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ seront projetés en 30 points ${}_1P_0^{(ik)}$, ${}_1P_0'^{(ik)}$, situés deux à deux sur les arêtes de l'hexagone ${}_1(A)$ fondamental et divisants

harmoniquement le segment déterminé sur l'arête par les deux sommets. Les propriétés projectives restent en effet inaltérées par projection, donc :

Théorème CLXVIII. Si l'on projette, par une droite S_1 les figures précédentes sur un espace S_3 qui ne rencontre pas S_1 , dans R_5 ; de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(6)}$ on obtient sur S_3 un hexagone complet ${}_1(A)$ tout à fait général, si la droite S_1 et l'espace S_3 n'ont aucune position spéciale par rapport à la pyramide fondamentale.

Des 15 points $P_0^{(ik)}$ et 15 points $P_0'^{(ik)}$ résultent dans R_5 30 points ${}_1P_0^{(ik)}$, ${}_1P_0'^{(ik)}$, qui sont situés deux à deux sur les 15 arêtes de l'hexagone ${}_1(A)$, en en divisant harmoniquement les deux sommets.

Les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 20 droites, qui forment 15 quadrilatères. Les points ${}_1P_0^{(ik)}$ et ${}_1P_0'^{(ik)}$ pris ensemble sont situés 3 à 3 sur 80 droites, qui sont les côtés de 20 autres quadrilatères.

Théorème CLXIX. Des 720 points $(S_0)_{720}$ de R_5 résulte par projection sur S_3 , un groupe de 720 points ${}_1(S_0)_{720}$, situés deux à deux sur $15 \cdot 360$ droites, qui passent 360 à 360 par les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ (théor. CVII).

Si nous considérons dans R_5 les deux points $S_0 S_0^{(1)}$ de coordonnées

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$y_2 y_1 y_4 y_3 y_5 y_6$$

ils sont situés sur une droite passant par $P_0^{(ik)}$ et sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par l'espace $\Pi_4^{(ik)}$. Or, on ne peut pas projeter univoquement l'espace Π_4 sur l'espace S_3 ; donc à l'involution (12) de R_5 ne correspond pas une involution de S_3 .

Si nous considérons les deux points

$$S_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$S_0^{(2)} y_2 y_1 y_4 y_3 y_5 y_6$$

qui se correspondent dans l'involution (12)(34), la droite, qui les joint, coupe la droite $P_1^{(12)(34)}$ et l'espace $\Pi_3^{(12)(34)}$. Or, on peut projeter univoquement la droite P_1 et l'espace Π_3 , mais la projection de ce dernier sera l'espace S_3 même, c'est à dire que dans S_3 nous n'avons pas l'involution correspondante à (12)(34).

Enfin, si nous considérons les deux points

$$S_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$S_0^{(3)} y_2 y_1 y_4 y_3 y_6 y_5$$

qui se correspondent dans l'involution (12)(34)(56), on voit qu'ils sont situés sur une droite, qui rencontre les deux plans fondamentaux $P_2^{(12)(34)(56)}$ et $\Pi_2^{(12)(34)(56)}$ de l'involution. Or, ces deux plans seront projetés par la droite S_1 sur S_3 suivant deux plans ${}_1P_2^{(12)(34)(56)}$, ${}_1\Pi_2^{(12)(34)(56)}$, qui passeront respectivement par les deux groupes de points ${}_1P_0^{(12)}$, ${}_1P_0^{(34)}$, ${}_1P_0^{(56)}$; ${}_1P_0^{(12)}$, ${}_1P_0^{(34)}$, ${}_1P_0^{(56)}$. Les deux points projections de S_0, S_0^3 diviseront harmoniquement ces deux plans. Donc:

Théorème CLXX. Les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ déterminent 60 droites ${}_1P_0^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et 15 plans ${}_1P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\lambda)}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ sont identiques à l'ordre près aux indices 123456) tandis que les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ déterminent 15 plans ${}_1\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\lambda)}$.

Les 720 points ${}_1(S_0)_{720}$ sont situés deux à deux sur $60 \cdot 360$ droites rencontrant 360 à 360 les 60 droites ${}_1P_1$.

Ils sont situés deux à deux sur $15 \cdot 360$ droites, qui coupent harmoniquement 360 à 360 les plans correspondants ${}_1P_2$ et ${}_1\Pi_2$ en deux points.

Si nous projetons un cycle projectif de 6 points de R_5 sur S_3 , nous obtenons aussi un groupe de 6 points, situé sur une courbe rationnelle ${}_1W$, et de même pour les cycles de 5, 4 et 3 points.

En permutant les trois premières coordonnées du point S_0 , on obtient 6 points situés sur un plan de R_5 , qui passe par la droite où l'espace unité coupe la face $A_2^{(123)}$ de la pyramide fondamentale, donc le théorème CXIV nous donne:

Théorème CLXXI. Les 720 points ${}_1(S_0)_{720}$ en S_3 sont situés 6 à 6 sur 2400 plans, qui passent 120 à 120 par les 20 droites des 20 faces de l'hexagone ${}_1(A)$ fondamental, où sont situés 3 à 3 les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$. Les 6 points sur un de ces plans forment deux triangles homologues de trois manières différentes, les trois points ${}_1P_0^{(ik)}$ situés sur le plan, étant centres d'homologie.

Si nous permutons seulement les premières quatre coordonnées de S_0 en R_5 , on obtient 24 points situés dans un espace à trois dimensions, qui passe par le plan où l'espace unité coupe la face à 3 dimensions $A_3^{(1234)}$. Les 24 points sont situés d'après le théor. CXIV, sur une surface de 2^1 degré à deux dimensions, qui sera projetée en S_3 suivant une surface du 2^1 degré; donc:

Théorème CLXXII. Les 720 points ${}_1(S_0)_{720}$ en S_3 sont situés 24 à 24 sur 450 surfaces du 2^d degré, qui correspondent 30 à 30 aux 15 tétraèdres que l'on peut former avec les 6 sommets de l'hexagone fondamental.

71. Si nous projetons maintenant sur S_3 les deux groupes de points $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ (n.° 51) nous obtenons:

Théorème CLXXIII. Les 32 points $(B)_{16}$ $(C)_{16}$ sont projetés en S_3 suivant 32 points ${}_1(B)_{16}$, ${}_1(C)_{16}$. Ces derniers points sont situés 4 à 4 sur 120 plans, qui passent 15 à 15 par chacun d'eux (théor. CXX).

Les 120 droites, qui joignent deux à deux les points de ${}_1(B)_{16}$ ou de ${}_1(C)_{16}$, passent 4 à 4 respectivement par chaque point ${}_1P_0^{(ik)}$ et ${}_1P_0'^{(ik)}$ ⁽¹⁾ (théor. CXXII).

Théorème CLXXIV. Les points de ${}_1(B)_{16}$ avec les points ${}_1(C)_{16}$ sont situés deux à deux sur 6·16 droites, qui passent 16 à 16 par les sommets de l'hexagone fondamental ${}_1(A)$ (théor. CXXIII).

72. Si nous considérons les groupes formés par les 720 points de $(S_0)_{720}$, nous obtiendrons facilement par projection les groupes correspondants sur S_3 . Cependant on ne peut pas avoir dans S_3 les surfaces correspondantes des surfaces $\Delta_{\sigma\beta}$, parce que les surfaces sont à 4 dimensions; de même on ne peut pas avoir le correspondant des 60 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$. Mais on peut projeter les 20 surfaces de 6^{me} ordre à 2 dimensions $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ et les 60 surfaces de 8^{me} ordre à 2 dimensions $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$, et enfin on peut aussi projeter les 6 configurations Π , qui correspondent aux 6 figures Π .

Théorème CLXXV. Les 20 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ de 6^{me} ordre à 2 dimensions (n.° 64) sont projetés sur S_3 suivant 20 surfaces ${}_1\Delta_{\sigma\beta}{}_1\Delta_{\alpha\gamma}{}_1\Delta_{\beta\gamma}$ de 6^{me} ordre, qui correspondent aux 20 points de STEINER et aux 20 droites de CAYLEY.

Théorème CLXXVI. Les 6 configurations Π (n.° 66) sont projetées sur S_3 suivant 6 configurations ${}_1\Pi$, qui correspondent aux 6 figures Π d'un quelconque des systèmes $[Zz]_m$ de l'hexagramme.

Théorème CLXXVII. Les 60 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ de 8^{me} ordre à 2 dimensions (n.° 67) sont projetées sur S_3 suivant 60 surfaces ${}_1\Delta_{\sigma\beta}{}_1\Delta_{\alpha\gamma}{}_1\Delta_{\alpha\delta}$ de 8^{me} ordre. Celles-ci correspondent aux 60 points de KIRKMAN, aux 60 points Z_{2m+1} ou aux 60 droites z_{2m} .

Théorème CLXXVIII. Les 60 surfaces ${}_1\Delta_{\sigma\beta}{}_1\Delta_{\alpha\gamma}{}_1\Delta_{\alpha\delta}$ passent respectivement 10 à 10 par les 6 configurations ${}_1\Pi$.

Dans S_3 on a aussi d'autres configurations de points ou d'autres courbes et surfaces qui représentent les groupes de l'hexagramme, d'après ce que nous avons démontré, sur les groupes en général, dans le premier chapitre (n.°s 17 et 18).

En projetant les 120 points (r_6) , on obtient en S_3 120 points qui correspondent deux à deux aux 60 droites de PASCAL (n.° 55).

73. On peut donner à S_1 et à l'espace S_3 des positions spéciales par rapport à la pyramide fondamentale; on obtiendra en S_3 des hexagones spéciaux, ou bien d'après le n.° 17, des pentagones ou des tétraèdres.

⁽¹⁾ De la Note n.° 57, on déduit que les 15 plans passant par un des points, par ex., de ${}_1(B)_{16}$, passent par les 15 côtés d'un hexagone formé avec 6 points du groupe ${}_1(C)_{16}$ et en outre respectivement par les autres points de ${}_1(B)_{16}$.

Nous voyons, par ex., que si la droite S_1 passe par le point unité dans R_5 , la figure en S_3 se particularise; mais la pyramide se projette toujours sur S_3 suivant un hexagone ${}_1(A)$ général. En effet, le point unité peut être regardé comme un point quelconque de l'espace R_5 . Dans ce cas les espaces $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ sont situés dans des espaces à 4 dimensions avec la droite S_1 de projection; tous leurs points seront projetés sur les plans d'intersection de ces espaces avec S_3 . Dans ce cas donc nous avons aussi dans S_3 les involutions correspondantes aux involutions de 2^e espèce de R_5 (1).

D'après le théorème XXXVII nous avons:

Théorème CLXXIX. Pour tout tétraèdre, pentagone et hexagone complet dans l'espace à 3 dimensions, on obtient des configurations de la même classe que l'hexagramme mystique, et dont les propriétés résultent des théorèmes précédents.

Toutes les courbes ou surfaces à deux dimensions de R_5 , qui se transforment en elles-mêmes, seront projetées suivant des courbes ou des surfaces pour lesquelles les groupes, que nous venons d'étudier, ont les propriétés analogues à celles que les groupes de l'hexagramme ont par rapport à la conique fondamentale.

PROJECTION SUR UN PLAN S_2

74. Nous projetons maintenant par un plan R_2 quelconque de R_5 sur un plan S_2 , et nous supposons d'abord que R_2 et S_2 n'aient aucune position spéciale par rapport à la pyramide fondamentale. On a:

Théorème CLXXX. En projetant par un plan R_2 sur un autre plan S_2 , qui ne coupe pas R_2 , les figures de R_5 ; de la pyramide fondamentale, résulte un hexagone général ${}_2(A)$. Des 30 points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ résultent 30 points ${}_2P_0^{(ik)}$, ${}_2P_0'^{(ik)}$ situés deux à deux sur les côtés de l'hexagone ${}_2(A)$, et qui en divisent harmoniquement les deux sommets.

Les 15 points ${}_2P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 20 droites et ils sont 6 à 6 les sommets de 15 quadrilatères.

Les 30 points ${}_2P_0^{(ik)}$, ${}_2P_0'^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 80 droites, qui déterminent 20 autres quadrilatères.

(1) Dans ce cas les 32 points $(B)_{16}$ $(C)_{16}$ sont projetés en 31 points, c'est à dire en 15 points ${}_1(B)_{15}$ et 16 points ${}_1(C)_{16}$. Du théor. CXX on déduit qu'il y a un hexagone complet de 6 points de ${}_1(C)_{16}$, dont les côtés passent par les points ${}_1(B)_{15}$.

Les 120 points (r_6) étant situés sur l'espace unité, si la droite S_1 est contenue dans l'espace unité, les 120 points ${}_1(r_6)$ sont situés sur un plan, ainsi que les 15 points ${}_1P^{(ik)}$, etc.

Théorème CLXXXI. Les 720 points d'un groupe $(S_0)_{720}$ de R_5 sont projetés en 720 points d'un groupe ${}_2(S_0)_{720}$ de S_2 . Ces 720 points sont situés deux à deux sur 15·360 droites, qui passent 360 à 360 par les 15 points ${}_2P_0^{(ik)}$.

Ils sont situés 6 à 6 en 2400 coniques, qui passent 120 à 120 par les points projections des points (r_3) , situés sur une des 20 droites, où sont disposés 3 à 3 les points ${}_2P_0^{(ik)}$.

Les deux points de (r_3) d'une de ces droites divisent équi-anharmoniquement ses trois points ${}_2P_0^{(ik)}$.

Les 6 points d'une de ces coniques ont les mêmes propriétés que les 6 points $(S_0)_6$ du § 2 de ce chapitre.

Ainsi tous les groupes de points de $(S_0)_{720}$ dans l'espace R_5 , par ex., les groupes $(S_0)_{\alpha\beta}^m$; $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma}^p$; $(S_0)_{\alpha\beta\gamma}^q$; $(S_0)_{\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\lambda}^q$; $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \alpha\epsilon, \alpha\lambda}^l$; $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta}^k$, etc. qui correspondent aux groupes des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, des droites de PASCAL, des points de STEINER et de leurs couples, des 6 figures Π , des points de KIRKMAN, etc. nous donnent par projection sur S_2 les groupes correspondants.

On aura aussi dans le plan S_2 des groupes spéciaux; par ex., en projetant les 120 points (r_6) , on obtient sur le plan 120 points correspondants deux à deux aux 60 droites de PASCAL, etc.

D'après le théorème XXXVII on déduit:

Théorème CLXXXII. Pour tout triangle, quadrangle, pentagone, hexagone du plan on obtient des configurations de points, de droites et de courbes de la même classe que l'hexagramme mystique.

Ce théorème a lieu aussi quand l'hexagone est inscrit à une conique.

Toutes les courbes de R_5 qui se transforment en elles-mêmes, seront projetées suivant des courbes planes, pour lesquelles les groupes plans, que nous venons d'étudier, ont des propriétés analogues à celles que les groupes de l'hexagramme ont par rapport à la conique fondamentale.

Par la méthode que nous avons suivie jusqu'à présent pour $n = 3, 4, 5, 6$ on peut discuter aussi complètement les configurations, qui correspondent à n quelconque, soit dans l'espace R_{n-1} , soit dans un espace de dimensions moindre.

Nous avons donné déjà quelques propriétés fondamentales de ces configurations dans le chapitre I. Par exemple, pour le cas $n = 10$, ou $n = 20$, etc. on obtiendra des configurations analogues pour 10 points quelconques d'une surface du 2^d degré, ou pour 20 points quelconques d'une surface de 3^{me} ordre, etc.

CHAPITRE III.

AUTRES INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES DES GROUPES
DES SUBSTITUTIONS DE 6 LETTRES.

§ 1.

Interprétation géométrique au moyen de 6 complexes linéaires
de droites deux à deux en involution dans R_3 .

75. Soient donnés 6 complexes linéaires de droites $x_1=0, x_2=0, \dots, x_6=0$ deux à deux en involution. Pour que y_1, y_2, \dots, y_6 soient les coordonnées d'une droite, il faut que soit satisfaite la relation quadratique

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_6^2 = 0. \quad (1)$$

Si y_1, y_2, \dots, y_6 ne satisfont pas à cette relation, l'équation

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_6 x_6 = 0, \quad (2)$$

représente un complexe linéaire général.

Les 6 complexes linéaires ont, deux à deux, deux directrices communes, qui forment, 6 à 6, 15 tétraèdres, que KLEIN appelle *fondamentaux*. Leurs sommets et leurs faces sont distincts, de manière qu'on a 60 sommets et 60 faces. Par exemple, les deux complexes $x_1=0, x_2=0$ ont pour directrices les deux droites :

$$1, \pm i, 0, 0, 0, 0$$

que l'on peut désigner par le symbole 12. Le tétraèdre donné par les six directrices 12, 34, 56 peut être représenté par le symbole 12·34·56, de même que le triangle Δ_{12} de l'hexagramme. Nous désignerons aussi ce tétraèdre par le symbole θ_{12} ⁽¹⁾.

(1) Une droite dans l'espace à 3 dimensions a 6 coordonnées p_{ik} , où $p_{ik} = (y_i z_k - y_k z_i)$, étant $y_1, y_2, y_3, y_4; z_1, z_2, z_3, z_4$ deux points quelconques de la droite. Si u_i, v_i sont les coordonnées de deux plans passant par la droite, on a $\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$. Entre les coordonnées p_{ik} et π_{ik} il existe les relations

$$R = p_{12} p_{34} + p_{31} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0, \quad p_{12} : p_{34} : p_{31} : p_{24} : p_{14} : p_{23} = \pi_{34} : \pi_{12} : \pi_{24} : \pi_{31} : \pi_{23} : \pi_{14}$$

KLEIN a démontré qu'étant donné un complexe du 2^d degré $\Omega = 0$, on peut transformer li-

76. En permutant les coordonnées y_1, y_2, \dots, y_6 d'une droite p de toutes les manières possibles, on obtient 720 droites, car la relation (1) reste toujours inaltérée. Si l'on considère encore deux droites y'_i, y''_i , qui rencontrent la pre-

néairement R et Q en deux équations contenant seulement les carrés de 6 variables p_{ik} , lorsque les racines du déterminant de la forme $R + \lambda\Omega$, égalé à zéro, sont distinctes. (Inaug. Dissertation: *Ueber die Transformation der allg. Gleichungen 2^{ten} Grades zwischen Linien-coordinaten auf eine canonische Form.* Bonn, 1868). De manière que R peut prendre la forme:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 0 \quad (2)$$

où x_1, x_2, \dots, x_6 sont six complexes linéaires en involution. (Voir aussi KLEIN, *Math. Ann.*, vol. 2). On trouve beaucoup de propriétés nouvelles sur cette figure dans mon Mémoire. *Sopra alcune notevoli configurazioni*, ecc. Mem. II, Atti della R. Acc. dei Lincei, 1881.

Si nous considérons comme tétraèdre fondamental le tétraèdre θ_{12} , les formules de transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i sont :

$$\left. \begin{array}{lll} p_{12} = x_1 + ix_2, & p_{31} = x_3 + ix_4, & p_{14} = x_5 + ix_6 \\ p_{34} = x_1 - ix_2, & p_{24} = x_3 - ix_4, & p_{23} = x_5 - ix_6 \end{array} \right\} i = \sqrt{-1} \quad (1)$$

d'où :

$$\left. \begin{array}{lll} x_1 = p_{12} + p_{34}, & x_3 = p_{31} + p_{24}, & x_5 = p_{14} + p_{23} \\ x_2 = i(p_{34} - p_{12}), & x_4 = i(p_{24} - p_{31}), & x_6 = i(p_{23} - p_{14}). \end{array} \right\} \quad (2)$$

Étant donné le complexe linéaire

$$A p_{14} + B p_{24} + C p_{34} + D p_{23} + E p_{31} + F p_{12} = 0 \quad (3)$$

on en détermine l'équation en coordonnées x_i au moyen des formules (2); on a :

$$x_1(C + F) + ix_2(F - C) + x_3(B + E) + ix_4(E - B) + x_5(D + A) + ix_6(A - D) = 0 \quad (3')$$

ou bien en posant :

$$\left. \begin{array}{llll} C + F = a_1, & i(F - C) = a_2, & B + E = a_3, & i(E - B) = a_4, \\ A + D = a_5, & i(A - D) = a_6 \end{array} \right\} \quad (4)$$

on déduit :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_6 x_6 = 0. \quad (3'')$$

Des formules (4) il résulte :

$$\left. \begin{array}{llll} A = a_5 - ia_6, & D = a_5 + ia_6, & B = a_3 + ia_4, & E = a_3 - ia_4, \\ C = a_1 + ia_2, & F = a_1 - ia_2. \end{array} \right\} \quad (4')$$

DIRECTRICES DE DEUX COMPLEXES LINÉAIRES DE DROITES.

Étant donnés en général deux complexes linéaires de droites, dont les coefficients sont $ABCDEF, A'B'C'D'E'F'$, ils déterminent un faisceau de complexes dans lequel les deux directrices sont deux complexes spéciaux; donnés par les deux racines de l'équation :

$$(A'D' + B'E')\mu^2 + [(A'D + A'D') + (B'E + B'E')] \mu + (AD + EB) = 0 \quad (5)$$

(PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, pag. 69).

mière en un même point P , en opérant toutes les permutations paires de 6 lettres sur les coordonnées y_i, y'_i, y''_i , on obtient trois groupes de 360 droites, qui se coupent 3 à 3 suivant 360 points formant un groupe $(P)_{360}$. En opérant sur les coordonnées y_i, y'_i, y''_i les permutations impaires, on a trois groupes de 360 droites, situées 3 à 3 sur 360 plans d'un groupe $(\Pi)_{360}$, qui est relié au groupe $(P)_{360}$. Donc ⁽¹⁾:

Théorème CLXXXIII. En permutant de toutes les manières possibles les 6 coordonnées y_1, y_2, \dots, y_6 d'une droite p , on obtient 720 droites d'un groupe

Par les formules (4) on en déduit:

$$(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)u^2 + (a_3a'_3 + a_4a'_4 + a_5a'_5 + a_6a'_6)u + (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) = 0. \quad (5')$$

étant $a_1, a_2, \dots, a_6; a'_1, a'_2, \dots, a'_6$ les coordonnées des deux complexes.

FORMULES DE TRANSFORMATION ENTRE LES COORDONNÉES D'UNE DROITE
ET CELLES DE SA POLAIRE PAR RAPPORT À UN COMPLEXE LINÉAIRE DE DROITES.

Soit:

$$Ap_{14} + Bp_{24} + Cp_{34} + Dp_{23} + Ep_{31} + Fp_{12} = 0. \quad (6)$$

Les formules de transformation entre un point x_1, x_2, x_3, x_4 et son plan focal, ou polaire u_1, u_2, u_3, u_4 , par rapport à ce complexe sont d'après PLÜCKER:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Du_4 + Cu_2 - Bu_3, & x_2 &= Eu_4 - Cu_1 + Au_3, \\ x_3 &= Fu_4 + Bu_1 - Au_2, & x_4 &= -(Du_1 + Eu_2 + Fu_3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

et, par conséquent, en considérant la droite p_{ik} qui joint deux points x_i, x'_i , on obtient les formules de transformations demandées, savoir:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_1x'_2 - x'_1x_2) &= \rho p_{12} = C(Cp'_{34} + Dp'_{23} + Bp'_{24} + Ap'_{14} + Ep'_{13}) - \\ &\quad - (BE + AD)p'_{12} \\ \rho(x_3x'_4 - x'_3x_4) &= \rho p_{34} = F(Bp'_{24} + Dp'_{23} + Ap'_{14} + Ep'_{13} + Fp'_{12}) \\ &\quad - (BE + AD)p'_{34}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

De même pour les autres coordonnées. Au moyen des formules de transformation (2) on obtient:

$$\rho x_1 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_6^2)x'_1 + a_1(a_2x'_2 + a_3x'_3 + a_4x'_4 + a_5x'_5 + a_6x'_6), \text{ etc.}$$

⁽¹⁾ En effet, si l'on opère sur les coordonnées d'une droite y_i une permutation paire on a alors une homographie parmi les points de l'espace, car le déterminant donné par la permutation est négatif; tandis que si l'on opère une permutation impaire le déterminant est positif, et, par conséquent, on obtient une réciprocité entre les points et les plans de l'espace, de manière que si une droite passe par un point, la droite correspondante est située sur un plan.

(p)₇₂₀. Un point P donne lieu à un groupe de 360 points (P)₃₆₀ et de 360 plans (Π)₃₆₀. Et, réciproquement, un plan du groupe (Π)₃₆₀ donne lieu aux deux mêmes groupes (Π)₃₆₀ et (P)₃₆₀.

Les deux groupes sont corrélatifs.

DES 15 TÉTRAÈDRES ET DES SURFACES DE 2¹ DEGRÉ θ_{αβ}.

77. Le groupe d'un triangle Δ_{αβ}, par exemple du triangle Δ₁₂ de l'hexagramme, ou bien de la surface Δ₁₂ de l'espace à 5 dimensions du chapitre précédent, est aussi le groupe appartenant au tétraèdre θ₁₂ de cette figure. Donc:

Théorème CLXXXIV. Les 15 tétraèdres fondamentaux θ_{αβ} correspondent aux 15 triangles Δ_{αβ} de l'hexagramme.

Si l'on considère les trois complexes linéaires:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0$$

ou bien

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0, \quad x_5 - x_6 = 0$$

d'après la règle donnée par KLEIN (*) (1), il est facile de voir qu'ils déterminent une surface de 2¹ degré, dont l'équation est:

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv \theta_{12} = 0.$$

Cette surface admet aussi le même groupe que le triangle Δ₁₂, donc:

Théorème CLXXXV. Aux 15 triangles Δ_{αβ} correspondent aussi 15 surfaces de 2^d degré θ_{αβ}, qui ont respectivement le tétraèdre θ_{αβ} comme conjugué.

Théorème CLXXXVI. La surface θ_{αβ} est polaire réciproque d'elle-même par rapport aux 6 surfaces dont les symboles ne contiennent ni l'indice α ni β.

La polaire réciproque de la surface θ_{αβ} par rapport à une des 8 autres

(*) L. c., pag. 209.

(1) Si on a un complexe $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_6x_6 = 0$, on appelle la quantité $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_6^2$ l'invariant du complexe. Si l'on considère un autre complexe $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_6x_6 = 0$, la quantité $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_6b_6$ s'appelle l'invariant simultané des deux complexes. Si on a trois complexes linéaires, et A_{11}, A_{22}, A_{33} sont leurs invariants et A_{12}, A_{13}, A_{23} leurs invariants simultanés, l'hyperboloïde qu'ils déterminent, est donné par le déterminant:

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ f_2 & A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ f_3 & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

surfaces $\theta_{\alpha\gamma}, \dots, \theta_{\alpha\lambda}, \theta_{\beta\gamma}, \dots, \theta_{\beta\lambda}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4, 5, 6), par ex., à la surface $\theta_{\alpha\gamma}$, est la surface $\theta_{\beta\gamma}$ (*).

« Théorème CLXXXVII. Du point P on obtient au moyen du groupe du triangle Δ_{12} (n.º 49) 24 points $(P)'_{\Delta_{12}}$ et 24 plans $(\Delta)'_{\Delta_{12}}$ des groupes $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$. Les 24 points de $(P)_{\Delta_{12}}$ forment 6 tétraèdres conjugués par rapport à la surface θ_{12} . Les faces de ces tétraèdres sont les 24 plans de $(\Pi)'_{\Delta_{12}}$.

Si le point P par exemple correspond à la droite $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, la face opposée Π , du tétraèdre, qui a pour sommet le point P , est donnée par la droite $y_2, y_1, y_4, y_3, y_6, y_5$.

Les 360 points de $(P)_{360}$ et les 360 plans $(\Pi)_{360}$ forment de 15 manières différentes 15 de ces groupes (**).

(*) En opérant la transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i , l'équation de la surface θ_{12} devient :

$$-p_{12}^2 + p_{34}^2 - p_{31}^2 + p_{24}^2 - p_{14}^2 + p_{23}^2 = 0$$

ou en coordonnées de points :

$$-y_1^2 + y_3^2 + y_5^2 + y_4^2 = 0$$

(A., *Sopra alcune notevoli conf.*, etc., l. c., Mém. II). La droite $p_{12}, p_{34}, p_{31}, p_{24}, p_{14}, p_{23}$ a, par rapport à cette surface, la droite polaire $p_{34}, -p_{12}, p_{24}, -p_{31}, p_{23}, -p_{14}$, ou bien la droite $x_1, x_3, x_3, x_4, x_5, x_6$ a pour droite polaire la droite $x_2, x_1, x_4, x_2, x_6, x_5$.

On obtient la surface polaire de la surface

$$\theta_{15} \equiv x_1 x_2 + x_3 x_6 + x_4 x_5 = 0$$

par rapport à θ_{12} en remplaçant au lieu de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ les coordonnées $x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5$, qui est, comme on le voit, la surface θ_{15} elle-même. La surface polaire de $\theta_{15} \equiv x_1 x_6 + x_2 x_3 + x_4 x_5 = 0$ par rapport à la surface θ_{12} est la surface

$$\theta_{23} = x_1 x_4 + x_2 x_6 + x_3 x_6 = 0.$$

(**) Supposons qu'au point z_1, z_2, z_3, z_4 correspond la droite $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, que l'on trouve en joignant le point z_i avec un autre point z'_i , on a, au moyen des 24 substitutions paires du groupe Δ_{12} (n.º 49), les 24 droites et du point z_i les 24 points correspondants suivants, accompagnés avec les droites de PASCAL correspondant aux 24 hexagones représentés par les 24 droites.

I.	z_1, z_2, z_3, z_4	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$	p_{345}^I
	$iz_4, -z_3, z_2, iz_1$	$x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_6$	p_{135}^I
	$iz_3, z_4, iz_1, -z_2$	$x_2 x_1 x_3 x_4 x_6 x_5$	p_{124}^I
	$iz_2, iz_1, -z_4, z_3$	$x_1 x_2 x_4 x_3 x_6 x_5$	p_{145}^I
II.	$z_1, z_3, z_2, -z_4$	$x_3 x_4 x_1 x_2 x_5 x_6$	p_{345}^{II}
	$-iz_4, -z_2, z_3, iz_1$	$x_4 x_3 x_2 x_1 x_5 x_6$	p_{134}^{II}
	$iz_2, -z_4, iz_1, -z_3$	$x_4 x_3 x_4 x_2 x_6 x_5$	p_{146}^{II}
	$iz_3, -iz_1, z_4, z_2$	$x_3 x_4 x_2 x_1 x_6 x_5$	p_{135}^{II}

De ce théorème on tire:

Théorème CLXXXVIII. Les 360 points $(P)_{360}$ sont situés 15 à 15 sur les 360 plans de $(\Pi)_{360}$ et, réciproquement, ceux-ci passent 15 à 15 par les 360 points $(P)_{360}$.

Les 15 points situés sur un de ces plans Π forment 15 triangles $\Delta'_{\alpha\beta}$ conjugués respectivement par rapport aux 15 coniques d'intersection du plan Π avec les 15 surfaces $\theta_{\alpha\beta}$ (1).

III.	$-z_1, z_4, z_3, z_2$	$x_5 x_6 x_3 x_4 x_1 x_2$	p_{345}^{II}
	$iz_2, -z_3, z_4, -iz_1$	$x_6 x_5 x_4 x_3 x_1 x_2$	p_{145}^{II}
	$iz_3, z_2, -iz_1, -z_4$	$x_6 x_5 x_3 x_4 x_2 x_1$	p_{135}^{II}
	$iz_4, -iz_1, -z_2, z_3$	$x_5 x_6 x_4 x_3 x_2 x_1$	p_{134}^{II}
IV.	$z_1, -z_2, z_4, z_3$	$x_1 x_2 x_5 x_6 x_3 x_4$	p_{345}^{II}
	$iz_3, -z_4, -z_2, iz_1$	$x_2 x_1 x_6 x_5 x_3 x_4$	p_{135}^{II}
	iz_4, z_3, iz_1, z_2	$x_2 x_1 x_5 x_6 x_4 x_3$	p_{134}^{II}
	$-iz_2, iz_1, -z_3, z_4$	$x_1 x_2 x_6 x_5 x_4 x_3$	p_{145}^{II}
V.	$z_1, -z_3, -z_4, z_2$	$x_3 x_4 x_5 x_6 x_1 x_2$	p_{345}^{I}
	$iz_2, z_4, -z_3, iz_1$	$x_4 x_3 x_6 x_5 x_1 x_2$	p_{145}^{I}
	$-iz_4, z_2, iz_1, z_3$	$x_4 x_3 x_5 x_6 x_2 x_1$	p_{135}^{I}
	$-iz_3, iz_1, -z_2, -z_4$	$x_3 x_4 x_6 x_5 x_2 x_1$	p_{134}^{I}
VI.	$-z_1, -z_4, z_2, z_3$	$x_5 x_6 x_1 x_2 x_3 x_4$	p_{345}^{I}
	$iz_3, -z_2, -z_4, -iz_1$	$x_6 x_5 x_2 x_1 x_3 x_4$	p_{134}^{I}
	$iz_2, z_3, -iz_1, z_4$	$x_6 x_5 x_1 x_2 x_4 x_3$	p_{145}^{I}
	$-iz_4, -iz_1, -z_3, z_2$	$x_5 x_6 x_2 x_1 x_4 x_3$	p_{135}^{I}

Les 24 substitutions impaires du groupe Δ_1 , donnent 24 plans. Nous avons vu qu'à la droite $x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5$ correspond le plan des coordonnées $-z_1, z_2, z_3, z_4$. Ce plan est évidemment le plan polaire du point z_1, z_2, z_3, z_4 par rapport à la surface

$$\theta_{12} \equiv -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$$

et il contient en outre les trois autres points du tétraèdre I. Le plan polaire du point $iz_4, -z_3, z_2, iz_1$ passe aussi par les trois autres points de I; donc le tétraèdre I est un tétraèdre conjugué par rapport à la surface θ_{12} , et les faces de ce tétraèdre sont des plans du groupe $(\Pi)_{\Delta_{12}}$.

(1) Nous avons vu, qu'en se rapportant au tétraèdre θ_{12} , à la droite $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ correspond le plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$. La droite, qui correspond au pôle de ce plan, par rapport à la surface θ_{12} , s'obtient, d'après ce qui précède, en opérant sur les indices de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ la substitution (12) (34) (56) donnée par les indices de θ_{12} ; de même pour les autres surfaces $\theta_{\alpha\beta}$. Pour obtenir les trois droites correspondant aux points du groupe $(P)_{\Delta_{12}}$

On sait que les six pôles d'un plan Π par rapport aux 6 complexes fondamentaux sont situés sur une conique, et qu'ils n'ont aucune autre particularité (*). On déduit :

Théorème CLXXXIX. Les 15 points P d'un plan Π sont situés respectivement sur les 15 côtés de l'hexagramme H , déterminé par les 6 pôles du plan par rapport aux 6 complexes fondamentaux (²).

situés sur le plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$, il suffit d'opérer sur les indices de la droite donnée les substitutions (56), (34), (12). Si l'on fait cette opération pour toutes les surface $\theta_{\alpha\beta}$, on trouve seulement 15 droites correspondant à 15 points P situés sur le plan Π donné, car en effet on a seulement 15 transpositions $(\alpha\beta)$, et le théorème est ainsi démontré.

Les 15 droites du plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$ sont :

$$\begin{array}{lll} (12) & x_1 x_2 x_4 x_3 x_6 x_5 & (23) & x_3 x_1 x_4 x_2 x_6 x_5 & (35) & x_2 x_1 x_4 x_5 x_6 x_3 \\ (13) & x_2 x_3 x_4 x_1 x_6 x_5 & (24) & x_4 x_1 x_2 x_3 x_6 x_5 & (36) & x_2 x_1 x_4 x_6 x_3 x_5 \\ (14) & x_2 x_4 x_1 x_3 x_6 x_5 & (25) & x_5 x_1 x_4 x_3 x_6 x_2 & (45) & x_2 x_1 x_5 x_3 x_6 x_4 \\ (15) & x_3 x_5 x_4 x_3 x_6 x_1 & (26) & x_6 x_1 x_4 x_3 x_2 x_5 & (46) & x_2 x_1 x_6 x_3 x_4 x_5 \\ (16) & x_2 x_6 x_4 x_3 x_1 x_5 & (34) & x_2 x_1 x_3 x_4 x_6 x_5 & (56) & x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_6 \end{array}$$

On sait que le rapport anharmonique des 4 points d'intersection d'une droite avec les faces d'un tétraèdre est égal au rapport anharmonique des plans passant par les sommets et par la droite. Au moyen des substitutions du groupe Δ_{12} le tétraèdre θ_{12} se transforme en lui-même, donc : les 48 droites, qui dérivent d'une droite donnée, coupent les 4 faces du tétraèdre θ_{12} en 4 points d'un même rapport anharmonique, car une substitution nous donne, comme nous l'avons vu, une homographie ou bien une réciprocité de l'espace.

(*) KLEIN, Math. Annalen, vol. 2, l. c.

(²) Étant donné un complexe linéaire

$$A p_{14} + B p_{24} + C p_{34} + D p_{23} + E p_{31} + F p_{12} = 0$$

le pôle du plan u_1, u_2, u_3, u_4 par rapport à ce complexe est, d'après PLÜCKER (l. c., pag. 31).

$$\begin{aligned} y_1 &= D u_4 + C u_2 - B u_3, & y_2 &= E u_4 - C u_1 + A u_3, & y_3 &= F u_4 + B u_1 - A u_2, \\ y_4 &= -(D u_1 + E u_2 + F u_3). \end{aligned}$$

Si nous considérons le complexe $x_1 = 0$ ou $p_{12} + p_{34} = 0$ on a $C = F = 1, A = B = D = E = 0$ d'où

$$y_1 = u_2, \quad y_2 = -u_1, \quad y_3 = u_4, \quad y_4 = -u_3.$$

Si le plan donné est le plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$ le pôle est évidemment $z_2, z_1, z_4, -z_3$.

Les pôles de ce plan par rapport aux autres complexes fondamentaux $x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_6 = 0$ sont $z_2, z_4, -z_4, z_3; z_3, -z_1, z_1, z_2; z_3, z_4, z_1, -z_2; z_4, z_3, -z_2, z_1; z_4, -z_3, z_4, z_1$. Les coordonnées des points de la droite des deux premiers points sont : $z_2(1 + \lambda), z_1(1 + \lambda), z_4(1 - \lambda), z_3(\lambda - 1)$.

En posant $\lambda = -i$, nous obtenons précisément le point $iz_2, iz_1, -z_4, z_3$ qui est un des 15 points P du plan Π considéré.

Théorème CXC. Si le point P tombe sur une des surfaces $\theta_{\alpha\beta}$, les 360 points de $(P)_{360}$ se distribuent 24 à 24 sur ces surfaces, et les 360 plans de $(\Pi)_{360}$ sont tangents 24 à 24 en ces mêmes points aux mêmes surfaces.

GROUPES CORRESPONDANT AUX DROITES DE PASCAL.

78. Aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$, qui déterminent une droite de PASCAL, correspondent les tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$ et les deux surfaces $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$. Ces deux surfaces se rencontrent suivant une courbe C^4 de 4^{me} ordre qui correspond à la droite de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$. Donc :

Théorème CXCI. Aux 60 droites de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ correspondent 60 courbes C^4 de 4^{me} ordre $\theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\gamma}$, qui sont l'intersection de deux surfaces $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$.

Théorème CXCI. Les 6 points P de $(P)_{360}$ et les 6 plans Π de $(\Pi)_{360}$, déterminés par le groupe de la droite de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$, forment deux figures polaires réciproques par rapport à la surface $\theta_{\beta\gamma}$.

Les 360 points $(P)_{360}$ et les 360 plans $(\Pi)_{360}$ forment de 60 manières différentes 60 de ces groupes (1).

Théorème CXCI. Si le point P tombe sur une des 60 courbes $\theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\gamma}$, les 360 points de $(P)_{360}$ se distribuent 6 à 6 sur ces courbes.

GROUPES CORRESPONDANT AUX POINTS DE STEINER.

79. Le groupe des deux points de STEINER G_{123} , G_{456} (n.° 52) est représenté par la surface du 2¹ degré

$$x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 \equiv x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \equiv S_{135} \quad (1)$$

qui a pour tétraèdres conjugués les tétraèdres

$$\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}; \quad \theta_{45}, \theta_{46}, \theta_{56}.$$

Les dix surfaces (1) ont été trouvées par KLEIN (*) (2). Donc :

(1) Nous avons vu, au n.° 50, qu'en partant de la droite de PASCAL 163254 = $\Delta_{13}\Delta_{23}$ les 12 permutations correspondantes sont contenues dans le groupe Δ_{12} . Or, des 6 permutations paires on obtient les 6 permutations impaires en opérant la substitution (12)(34)(56); on sait aussi qu'en opérant cette même substitution sur la droite $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ correspondant au point z_1, z_2, z_3, z_4 , on obtient la droite $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$, qui correspond au plan polaire de ce point par rapport à la surface Δ_{12} . Mais (12)(34)(56) est une substitution du groupe de la droite $\Delta_{13}\Delta_{23}$, donc la droite $x_2x_5x_4x_1x_6x_3$, qui résulte de $x_1x_6x_5x_2x_5x_4$, est la polaire de cette droite par rapport à la surface Δ_{12} .

(*) KLEIN, l. c., pag. 209.

(2) A., *Sopra alcune notevoli config.*, etc., l. c., Mem. II.

Théorème CXCIV. Un quelconque des 10 couples de points de STEINER est représenté par une des dix surfaces $S_{\alpha\beta\gamma}$, fondamentales de KLEIN.

Une surface $S_{\alpha\beta\gamma}$ a pour conjugués les tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\gamma}, \theta_{\beta\gamma}; \theta_{\delta\epsilon}, \theta_{\delta\lambda}, \theta_{\epsilon\lambda}$, qui forment une figure identique aux deux ternes des tétraèdres (A), (B), (C); (P'), (P''), (P''') du n.º 35.

Théorème CXCV. Les 6 surfaces $\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\gamma}, \theta_{\beta\gamma}; \theta_{\delta\epsilon}, \theta_{\delta\lambda}, \theta_{\epsilon\lambda}$ sont polaires réciproques d'elles-mêmes par rapport à la surface $S_{\alpha\beta\gamma}$ de KLEIN.

Une surface $\theta_{\alpha\beta}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport aux 4 surfaces $S_{\alpha\beta\gamma}, S_{\alpha\beta\delta}, S_{\alpha\beta\epsilon}, S_{\alpha\beta\lambda}$. L'ensemble de ces 4 surfaces correspond à la droite de STEINER-PLÜCKER $g_{\alpha\beta}$ et au point de SALMON $S_{\alpha\beta}$ (¹).

Théorème CXCVI. En opérant sur le point P les substitutions du groupe XVI, on obtient un groupe de 36 points et des 36 plans de $(\Pi)_{360}$.

Les 36 points sont situés 4 à 4 sur les 36 plans et ceux-ci passent 4 à 4 par les 36 points.

Les 360 points de $(P)_{360}$ et les 360 plans $(\Pi)_{360}$ forment de 10 manières différentes 10 de ces groupes (²).

Théorème CXCVII. Si le point P tombe sur une des 10 surfaces $S_{\alpha\beta\gamma}$, les points $(P)_{360}$ se distribuent 36 à 36 sur ces surfaces, tandis que les plans $(\Pi)_{360}$ sont 36 à 36 tangents en ces mêmes points aux mêmes surfaces.

(¹) En opérant la transformation entre les coordonnées p_{ik} et x , l'équation de la surface $S_{123} \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ devient:

$$p_{12}^2 + p_{34}^2 + p_{31}^2 + p_{24}^2 + p_{14}^2 + p_{23}^2 = 0$$

ou bien en coordonnées de points:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

Une droite qui a les coordonnées $p_{12}, p_{24}, p_{31}, p_{24}, p_{14}, p_{23}$ ou $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ a pour droite polaire, par rapport à cette surface la droite $p_{34}, p_{12}, p_{24}, p_{31}, p_{23}, p_{14}$ ou $x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5, -x_6$.

Trouvons maintenant la surface polaire de $\theta_{13} \equiv x_1 x_6 + x_2 x_3 + x_4 x_5 = 0$ par rapport à cette surface. En remplaçant x_1, x_2, \dots, x_6 par $x_1, -x_1, x_2, -x_4, x_5, -x_6$, on obtient la surface θ_{13} elle-même. Donc le théorème est démontré.

(²) On obtient, au moyen des 72 substitutions du groupe XVI (n.º 52), 36 points P et 36 plans Π . Au point z_1, z_2, z_3, z_4 correspond toujours la droite $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$; mais dans le groupe XVI il y a la substitution (12)(34)(56), donc parmi les 36 plans il y a aussi le plan correspondant à la droite $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$. Ce plan d'après la Note, pag. 221 contient les 4 points correspondant aux droites

$$x_1 x_2 x_4 x_1 x_6 x_5, \quad x_6 x_1 x_4 x_3 x_2 x_5, \quad x_2 x_1 x_4 x_5 x_6 x_3, \quad x_4 x_1 x_2 x_3 x_6 x_5,$$

qui sont aussi contenus parmi les 36 points P ; donc le théorème est démontré.

GROUPES CORRESPONDANT AUX FIGURES II.

80. Théorème CXCVIII. *Le groupe d'une figure II, par exemple I, est représenté dans l'espace par l'ensemble des 5 tétraèdres, $\theta_{12}\theta_{13}\theta_{14}\theta_{15}\theta_{16}$, ou bien des 5 surfaces des mêmes symboles.*

Les arêtes de ces 5 tétraèdres contiennent tous les 60 sommets et par elles passent toutes les 60 faces des 15 tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$.

Théorème CXCI. *Les 60 points P de $(P)_{30}$, donnés par le groupe d'une figure II, par ex. III, déterminent 5 · 15 tétraèdres qui sont conjugués 15 à 15 par rapport aux surfaces $\theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{34}, \theta_{35}, \theta_{36}$, et dont les faces sont des plans II (*)*.

81. Si l'on considère le complexe linéaire

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

que j'appelle *le complexe unité*, on voit facilement qu'il se transforme en lui-même par les permutations des 6 coordonnées. Il y a deux groupes très-intéressants de 6 droites qui se transforment en eux-mêmes par les permutations des 6 coordonnées; ils sont formés par les directrices communes aux 6 complexes fondamentaux et au complexe unité.

Les deux directrices de $x_1 = 0$ et du complexe unité ont les coordonnées

$$\pm \sqrt{-5}, 1, 1, 1, 1, 1 \quad (^{\circ}).$$

(*) D'après la Note (1) pag. 220 on voit que la droite $x_5x_4x_1x_6x_3x_2$ correspond au pôle du plan correspondant à la droite $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$ par rapport à la surface $\theta_{23} \equiv x_1x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 = 0$. Considérons les 4 droites suivantes:

$$x_5x_1x_1x_6x_3x_2, \quad x_2x_4x_1x_3x_6x_5, \quad x_2x_1x_4x_6x_3x_5, \quad x_5x_1x_4x_3x_6x_2. \quad (^{\circ})$$

Les points relatifs aux trois dernières droites sont contenus dans le plan correspondant à la droite $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$. Ces points P forment avec le point correspondant à la droite $x_5x_4x_1x_6x_3x_2$ un tétraèdre conjugué par rapport à la surface θ_{23} , comme il n'est pas difficile de le voir d'après les règles données à la Note (2) pag. 219. Mais les 4 droites (*) appartiennent au groupe de la figure III; les 60 points P qui en résultent forment, en conséquence, 15 tétraèdres conjugués par rapport à θ_{23} , et dont les faces sont 60 plans II. La droite qui correspond au plan des trois points relatifs aux trois dernières droites de (*), est $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$, qui n'appartient pas au groupe de la figure III avec celles des 60 points P.

(^o) En effet, si l'on détermine dans ce cas la valeur de μ dans l'équation (5) de la Note à pag. 216, et qu'on substitue ensuite dans l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \mu x_1 = 0,$$

on obtient les deux directrices $\pm \sqrt{-5}, 1, 1, 1, 1, 1$. En opérant sur une de ces droites,

82. Si l'on considère un complexe quelconque, par exemple

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n + x_6^n = 0$$

qui se transforme en lui-même par les permutations des 6 coordonnées, sa surface focale (Brennfläche), se transforme aussi en elle-même, c'est à dire chaque point P de la surface détermine un groupe $(P)_{360}$ inscrit à la surface, de même qu'un plan Π tangent à la surface détermine un groupe $(\Pi)_{360}$ circonscrit.

Cette surface a les mêmes propriétés par rapport aux 15 tétraèdres fondamentaux $\theta_{\alpha\beta}$, aux surfaces $\sigma_{\alpha\beta}$ et aux 10 surfaces $S_{\alpha\beta\gamma}$.

SECTION DE LA FIGURE AVEC UN PLAN.

83. Soit donné un plan Π ; ses six pôles par rapport aux 6 complexes fondamentaux soient 1, 2, 3, 4, 5, 6. On a les théorèmes suivants:

Théorème CC. Les 15 couples de directrices des 6 complexes fondamentaux coupent un plan Π en deux groupes de 15 points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$, situés deux à deux sur les 15 côtés de l'hexagramme H , déterminé par les six pôles 1, 2, 3, 4, 5, 6 du plan Π par rapport aux six complexes.

Les deux points, par ex. $T^{(12)}$, $T'^{(12)}$, divisent harmoniquement le segment 12 ⁽¹⁾.

Théorème CCI. Les 30 points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ sont situés trois à trois sur les 60 droites d'intersection du plan Π avec les 60 faces des 15 tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$.

Ils sont aussi de 10 manières différentes les sommets de 6 quadrilatères, donnés par un des 10 sextuples de tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\gamma}\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\alpha\epsilon}\theta_{\beta\lambda}\theta_{\epsilon\lambda}$.

Il y a aussi 6 groupes de 5 de ces quadrilatères, dont les 30 sommets sont les 30 points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ ⁽²⁾.

Ces 30 points ne forment évidemment pas la figure analogue à celle des 30 points ${}_2P_0^{(ik)}$, ${}_2P_0'^{(ik)}$ du n.° 74, car ceux-ci sont situés 3 à 3 sur 80 droites et en outre les points $P_0^{(ik)}$ ne forment pas la même figure que les 15 points ${}_2P_0^{(ik)}$, tandis que les points $T^{(ab)}$ ont les mêmes propriétés que les 15 points $T^{(ab)}$.

par exemple $+\sqrt{5}$, 1, 1, 1, 1, toutes les substitutions des 5 indices 23456, elle reste inaltérée, tandis que les tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$ se transforment en eux-mêmes, ou l'un dans l'autre, donc: Les droites des deux groupes considérés coupent respectivement les 15 tétraèdres en quatre points d'un même rapport anharmonique. Un point d'une droite d'un des deux groupes donne un groupe de 360 points distribués 36 à 36 sur les 6 droites du groupe, et 360 plans passant 36 à 36 par les mêmes droites.

⁽¹⁾ On sait que les pôles d'un plan par rapport à deux complexes linéaires de droites sont situés sur la droite qui joint les deux points d'intersection du plan avec les directrices des deux complexes, et on sait aussi que les pôles divisent harmoniquement ces deux points (PLÜCKER, l. c.).

⁽²⁾ Cela résulte évidemment de la figure même des 15 tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$.

Théorème CCII. Les 10 surfaces de KLEIN $S_{\alpha\beta\gamma}$, rencontrent le plan Π suivant les 10 coniques Σ_{abc} qui ont pour triangles conjugués deux triangles, dont les sommets sont trois de 6 points fondamentaux de l'hexagramme H ⁽¹⁾.

Théorème CCIII. Les 6 quadrilatères des dix sestuples de points $T^{(ab)}$ $T'^{(ab)}$ sont respectivement conjugués par rapport aux 10 coniques Σ_{abc} ⁽²⁾.

Théorème CCIV. Les 15 surfaces $\theta_{\alpha\beta}$ rencontrent le plan Π suivant 15 coniques $\theta_{\alpha\beta}$. Par rapport à la conique θ_{12} sont conjugués le triangle Δ'_{12} (voir le théor. CLXXXVIII) et le quadrilatère $T^{(12)}$, $T'^{(12)}$; $T^{(34)}$, $T'^{(34)}$; $T^{(56)}$, $T'^{(56)}$.

⁽¹⁾ La surface S_{123} ou S_{456} correspond au couple des points de STEINER G_{123} , G_{456} dont le symbole est:

$$\left| \begin{array}{ccc} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 52 & 14 \end{array} \right| \quad (\text{n.}^\circ 24). \quad (1)$$

La surface S_{123} a pour tétraèdres conjugués les tétraèdres θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} ; θ_{45} , θ_{46} , θ_{56} qui sont donnés par les lignes horizontales et verticales de (1).

En rapportant toute la figure au tétraèdre θ_{12} , au moyen des formules de transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i (n.º 76), on trouve que les autres couples des directrices 13, 15, 35; 24, 26, 46 ont les coordonnées:

$$\begin{array}{ll} \text{pour 13} & p_{12} = 1, \quad p_{31} = \pm i, \quad p_{14} = 0, \quad p_{34} = 1, \quad p_{24} = \pm i, \quad p_{23} = 0; \\ \text{'' 15} & p_{12} = 1, \quad p_{31} = 0, \quad p_{14} = \pm i, \quad p_{34} = 1, \quad p_{24} = 0, \quad p_{23} = \pm i; \\ \text{'' 35} & p_{12} = 0, \quad p_{31} = 1, \quad p_{14} = \pm i, \quad p_{34} = 0, \quad p_{24} = 1, \quad p_{23} = \pm i; \\ \text{'' 24} & p_{12} = i, \quad p_{31} = \mp 1, \quad p_{14} = 0, \quad p_{34} = -i, \quad p_{24} = \pm 1, \quad p_{23} = 0; \\ \text{'' 26} & p_{12} = i, \quad p_{31} = 0, \quad p_{14} = \mp 1, \quad p_{34} = -i, \quad p_{24} = 0, \quad p_{23} = \pm 1; \\ \text{'' 46} & p_{12} = 0, \quad p_{31} = i, \quad p_{14} = \mp 1, \quad p_{34} = 0, \quad p_{24} = -i, \quad p_{23} = \pm 1; \end{array}$$

tandis que l'équation de la surface S_{123} est:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

On démontre facilement que cette surface contient les directrices des couples 13, 15, 35; 24, 26, 46. (Voir A., *Sopra alcune notevoli config.*, etc., l. c., Mem. II.) Donc une surface $S_{\alpha\beta\gamma}$ passe par les directrices des six couples qui ne sont pas compris dans le symbole correspondant (1).

Maintenant coupons la figure avec le plan Π . Les points $T^{(ab)}$ $T'^{(ab)}$ situés sur les côtés 13, 15, 35; 24, 26, 46 de l'hexagramme des six pôles, par ce qui précède, appartiennent à la conique d'intersection du plan Π avec la surface S_{123} . En conséquence, les points 1, 3; 3 et 5 sont divisés harmoniquement par cette conique, c'est à dire que le point 3 a pour polaire la droite 15; de même pour les autres sommets des triangles 135, 246. On voit aussi que les indices abc des coniques Σ se rapportent aux points fondamentaux de l'hexagramme, tandis que les indices $\alpha\beta\gamma$ des surfaces S de KLEIN se rapportent aux 6 indices des figures Π .

⁽²⁾ Cela résulte évident par la figure même des tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$ et des surfaces de KLEIN.

84. Théorème CCV. Les pôles $S^{(ab)}$ $S'^{(ab)}$ du plan Π par rapport aux deux complexes $x_a \pm x_b = 0$ sont situés sur les côtés ab de l'hexagramme H divisant harmoniquement les segments ab et $T^{(ab)}$ $T'^{(ab)}$.

Théorème CCVI. Le pôle $S^{(123)}$ du plan Π par rapport au complexe $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est le point d'intersection des trois droites $1S^{(23)}$, $2S^{(13)}$, $3S^{(12)}$, qui joignent les points fondamentaux 1, 2, 3 respectivement aux points $S^{(23)}$, $S^{(13)}$, $S^{(12)}$.

Théorème CCVII. Le pôle $S^{(1234)}$ du plan Π par rapport au complexe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est l'intersection des 4 droites $1S^{(234)}$, $2S^{(124)}$, $3S^{(124)}$, $4S^{(123)}$. Par ce point passent aussi les trois droites $S^{(12)}S^{(34)}$, $S^{(13)}S^{(24)}$, $S^{(14)}S^{(23)}$.

Théorème CCVIII. Le pôle $S^{(12345)}$ du plan Π par rapport au complexe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ est l'intersection des 5 droites

$$1S^{(2345)}, \quad 2S^{(1345)}, \quad 3S^{(1245)}, \quad 4S^{(1234)}.$$

Par ce point passent aussi les 10 droites $S^{(ab)}S^{(cde)}$ (a, b, c, d, e étant, identiques à l'ordre près, aux indices 12345).

Théorème CCIX. Le pôle $S^{(123456)}$ du plan Π par rapport au complexe unité $\Sigma x_i = 0$ est le point de rencontre des 6 droites

$$1S^{(23456)}, \quad 2S^{(13456)}, \quad 3S^{(12456)}, \quad 4S^{(12356)}, \quad 5S^{(12346)}, \quad 6S^{(12345)}.$$

Par ce point passent en outre les 15 droites $S^{(ab)}S^{(cdef)}$ et les 20 droites $S^{(abc)}S^{(def)}$ ($abcdef$ étant, identiques à l'ordre près, aux indices 123456).

De même on peut obtenir les pôles par rapport aux autres complexes

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm x_5 \pm x_6 = 0. \tag{1}$$

Les équations des 6 complexes polaires des 6 complexes fondamentaux par rapport au complexe unité sont :

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

ces complexes sont naturellement deux à deux en involution.

De même si l'on détermine les six complexes polaires par rapport à un quelconque des autres complexes (1).

On peut facilement construire les 6 pôles $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ du plan de

section Π par rapport aux 6 complexes (2). Les droites $11'$, $22'$, $33'$, $44'$, $55'$, $66'$ doivent passer évidemment par le point $S^{(123456)}$ déjà déterminé. La droite $11'$ doit passer aussi, comme nous l'apprend le théorème précédent, par le point $S^{(23456)}$. Étant A le point harmonique de $S^{(23456)}$ par rapport aux points 1 , $S^{(123456)}$; le point $1'$ est le point harmonique de A par rapport à 1 et $S^{(23456)}$ (1). Les 6 points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $6'$ déterminent un autre hexagramme H' , qui est relié au premier par le pôle du complexe unité. En continuant à faire avec l'hexagramme H' les mêmes opérations indiquées dans les théorèmes précédents pour l'hexagramme H , on obtient un autre hexagramme H'' , et une suite de nouveaux complexes et par conséquent d'hexagrammes, deux hexagrammes consécutifs ayant les mêmes propriétés que H , H' .

Si l'on donne enfin au plan Π des positions spéciales par rapport aux tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$ fondamentaux, on obtient des hexagrammes spéciaux, qu'il serait intéressant d'étudier.

§ 2.

Autre extension des groupes de l'hexagramme pour 6 points d'une courbe gauche de 3^{me} ordre.

85. Soient donnés 6 points $1, 2, 3, 4, 5, 6$ d'une courbe gauche C^3 de 3^{me} ordre. Nous avons donné déjà une extension des groupes de l'hexagramme dans le chapitre II, § 7, en projetant les figures de l'espace à 5 dimensions R_5 sur l'espace à 3 dimensions.

Les théorèmes de CHASLES et CREMONA sur la C^3 , obtenus au moyen du théo-

(1) En effet, le point $S^{(23456)}$ est le pôle du plan Π par rapport au complexe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_1 = 0,$$

tandis que A est le pôle du plan Π par rapport au complexe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1 = 0$$

ou

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

On voit donc que le pôle $1'$ du plan Π par rapport au complexe

$$-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

est précisément le point harmonique de A par rapport à 1 , $S^{(23456)}$.

rème de PASCAL, peuvent encore fournir par projection une nouvelle extension des propriétés de l'hexagramme.

Étant donné un septième point 7 quelconque de la courbe, les trois points du schéma

12 · 457

23 · 576

34 · 761

où les droites 12, 23, 34 rencontrent les plans 457, 576, 761 sont, d'après CHASLES, situés sur un plan passant par le point 7. CREMONA a démontré que si le point 7 se déplace sur la courbe, les plans correspondants passent par une sécante fixe p de la courbe C^3 , qui correspond donc à la droite de PASCAL de l'hexagone 123456, que nous avons désignée aussi par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}$.

On obtient ainsi 60 sécantes p , qui correspondent aux 60 hexagones gauches de C^3 et aux 60 droites de PASCAL. Elles peuvent être représentées par les mêmes symboles que celles-ci.

On déduit tout simplement par projection de l'hexagramme même (*) les théorèmes suivants :

Théorème CCX. À trois droites de PASCAL, se rencontrant en un point de STEINER ou en un point de KIRKMAN, correspondent trois sécantes p , situées sur un hyperboloïde qui contient la courbe C^3 .

Aux 20 points de STEINER G et aux 60 points de KIRKMAN K correspondent respectivement 20 et 60 hyperboloïdes G, K .

Théorème CCXI. À quatre points de STEINER, situés sur une droite de STEINER-PLÜCKER $g_{\alpha\beta}$, correspondent 4 hyperboloïdes, qui se coupent suivant une sécante $g_{\alpha\beta}$ de C^3 .

Théorème CCXII. À trois points de KIRKMAN situés sur une droite de CAYLEY $c_{\alpha\beta\gamma}$, correspondent trois hyperboloïdes K , qui se rencontrent suivant une sécante $c_{\alpha\beta\gamma}$ de la courbe C^3 .

Théorème CCXIII. À quatre droites de CAYLEY passant par un point de SALMON $S_{\alpha\beta}$ correspondent 4 sécantes $c_{\alpha\beta\gamma}$ situées sur un hyperboloïde.

Théorème CCXIV. Aux 6 figures Π correspondent 6 figures de 10 sécantes trois à trois sur 10 hyperboloïdes K , qui passent trois à trois par les 10 sécantes p .

(*) D'après la remarque faite au n.º 6, une courbe gauche de 3^{me} ordre est toujours contenue dans un espace à 3 dimensions.

Des systèmes $[Zz]_m$ en nombre infini on déduit aussi par projection un nombre infini de systèmes de 60 sécantes z de C^3 et de 60 hyperboloïdes Z passant par la courbe C^3 .

J'ai donné ces théorèmes pour faire voir que l'on peut aussi généraliser les groupes de l'hexagramme de cette manière pour la C^3 .

On peut aussi faire correspondre aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, par ex. 12·34·56 l'hyperboloïde déterminé par les côtés 12, 34, 56 de l'hexagone de C^3 . On a alors 15 hyperboloïdes $\Delta_{\alpha\beta}$. Ils se coupent deux à deux suivant 60 courbes de 4^{me} ordre, qui passent toutes par les 6 sommets de l'hexagone. À un point de STEINER ou à un point de KIRKMAN correspondent deux points, etc.

Si nous projetons l'hexagone 1, 2, 3, 4, 5, 6 de C^3 par un point quelconque S_0 sur un plan, on obtient sur ce plan 6 points, qu'on peut regarder en général comme quelconque. Au moyen de la géométrie descriptive, nous pouvons aussi déterminer les projections p' des 60 droites p , c' des 20 droites c , et g' des 15 droites g . De même, on peut construire les contours apparents des 20 hyperboloïdes G et des 60 hyperboloïdes K , qui sont simplement des coniques touchant respectivement trois droites p' . Les coniques S touchent aussi 4 à 4 les droites g' et les coniques K touchent trois à trois les 20 droites c' .

On voit que cela donne aussi une extension des groupes de l'hexagramme pour 6 points quelconques du plan. Ces six points se réduisent à 5 lorsqu'on prend le point de projection S_0 sur un des 15 côtés de l'hexagramme de C^3 . La courbe même est projetée sur une courbe rationnelle de 3^{me} ordre C'^3 (1).

§ 3.

**Théorème analogue à celui de Pascal
pour 8 points de la courbe rationnelle du 4^{me} ordre
dans l'espace à 4 dimensions. — Corollaire (2).**

86. Cette courbe est déterminée par 7 points quelconques de l'espace R_4 . Soit 8 un autre point de la courbe et considérons l'octogone 12345678, et

(1) On voit clairement par ce qui précède, que la méthode très simple que j'ai développée dans ce paragraphe n'a rien à faire avec les méthodes que j'ai développées dans les paragraphes précédents.

(2) A., Math. Annalen, vol. 19, l. c. On trouve développé dans ce Mémoire les propriétés principales des courbes rationnelles d'un espace de dimensions quelconques. Le théorème que je donne ici se déduit par projection de la propriété de 7 points d'une cubique gauche.

formons le schéma

$$\left. \begin{aligned} 123 \cdot 567 &= A_0^{(1)} \\ 234 \cdot 678 &= A_0^{(2)} \\ 345 \cdot 781 &\equiv A_0^{(3)} \\ 456 \cdot 812 &\equiv A_0^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

On voit que les quatre points $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_0^{(4)}$, où se rencontrent respectivement, les plans 123, 567, etc. des couples (1) (car dans R_4 deux plans en général se rencontrent seulement en un point), forment un cycle; c'est à dire que si l'on continue à former, en partant de 456 · 812, un autre couple de plans de la même manière qu'on a formé le second couple du premier, ou le troisième du second, on obtient le premier couple. Ce schéma a donc les mêmes propriétés que le schéma

$$\begin{aligned} 12 \cdot 45 \\ 23 \cdot 56 \\ 34 \cdot 61 \end{aligned}$$

de la droite de PASCAL de l'hexagone 123456 dans le plan R_2 .

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème CCV. Si 12345678 sont huit points quelconques de la courbe rationnelle C^4 dans l'espace à 4 dimensions R_4 et que l'on forme le schéma

$$\begin{aligned} 123 \cdot 567 \\ 234 \cdot 678 \\ 345 \cdot 781 \\ 456 \cdot 812 \end{aligned}$$

les quatre points $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_0^{(4)}$ où se rencontrent respectivement les plans des quatre couples du schéma forment un tétraèdre, dont les 4 faces coupent les diagonales 15, 26, 37, 48 de l'octagone.

Le 4 points déterminent un espace S_3 à trois dimensions. Dans tout l'octagramme il y a 2520 de ces espaces.

Corollaire. Si les droites 12, 34, 56, 78 sont tangentes à la courbe C^4 , les quatre points $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_0^{(4)}$ sont situés sur un plan, qui ne passe par aucun des 4 points de contact, et qui n'est pas contenu dans l'espace à trois dimensions déterminé par ces quatre points.

Ces théorèmes se laissent aussi étendre aux courbes rationnelles C^6, C^8, \dots, C^{2m} des espaces R_6, R_8, \dots, R_{2m} . Dès lors le passage de C^{2m} à C^{2m+1} se fait comme dans le théorème CHASLES-CREMONA pour C^3 qu'on déduit de C^2 . La projection dans R_3 et R_2 donne des théorèmes pour les courbes rationnelles (¹).

Leipzig, juillet 1881.

ADDITION.

AUTRES GROUPES DE SIX LETTRES.

87. Dans le groupe I des triangles Δ_{12} , n.° 49, il y a aussi les trois groupes suivants :

VIII* 1, (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (34)(56).

Dans le groupe I il y a un seul de ces groupes, et il ne peut pas être engendré par deux substitutions. On peut l'engendrer par trois substitutions, par ex. (12), (12)(34), (12)(56).

VIII* 1, (1625), (16)(25)(34), (12)(56), (1526),
(34)(56), (15)(26)(34), (12)(34).

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (1625), (16)(25)(34). Dans le groupe I il y a trois de ces groupes.

VIII*** 1, (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56),
(34)(56), (12)(34)(56), (15)(26), (16)(25), (15)(26)(34),
(16)(25)(34), (1625), (1526), (1625)(34), (1526)(34).

Ce groupe contient 8 substitutions paires et 8 impaires, et il ne peut pas être engendré par deux substitutions. Dans le groupe I il y a trois de ces groupes.

Dans le groupe des points de STEINER, par ex. XVIII, est contenu le groupe

(¹) J'ai démontré dans mon Mémoire des Math. Annalen, I. c., que d'une courbe rationnelle C^n de R_n on déduit par projection toutes les espèces des courbes rationnelles de n^m ou d'un ordre moindre de l'espace R_3 et du plan.

suivant des 18 substitutions :

1, (135), (246), (153), (264), (135)(246), (135)(264), (153)(246),
(153)(264), (14)(25)(36), (163254), (125634), (143652), (145236),
(165432), (16)(23)(45), (12)(34)(56), (123456).

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (135), (123456) ou bien (135), (12)(34)(56). Il contient 9 substitutions paires et 9 impaires.

Dans le groupe XVIII il y a deux de ces groupes.

Une chose très utile à faire ce serait d'étudier les groupes géométriques, que nous venons de trouver, par la méthode synthétique, et comme celle-ci rend les choses plus visibles, on pourra trouver peut-être des théorèmes sur ces groupes qui échappent à l'analyse et qui auront leurs correspondants dans la théorie des substitutions.

TABLE DES MATIÈRES (*).

PRÉAMBULE et PRÉFACE Pag. 93-102

CHAPITRE I.

Généralités sur l'interprétation géométrique de la théorie
des substitutions de n lettres.

§ 1.

*Étude de la correspondance projective entre deux espaces à $n - 1$ dimensions
dans un espace à $n - 1$ dimensions.*

Nr. 1.	Notations	Pag.	111
" 2-3.	Homographies	"	112
" 4.	Homographies cycliques	"	115
" 5-6.	Théorèmes sur les groupes de m^{n-1} points qu'on obtient en multipliant de toutes les manières possibles les coordonnées homogènes y_1, y_2, \dots, y_n d'un point dans R_{n-1} par les racines m^{es} de l'unité	"	117
" 7.	Théorèmes qui dérivent si au lieu de considérer un point, on considère une surface à $n - 2$ dimensions du 2 ^d degré	"	119

§ 2.

" 8-9.	Interprétation géométrique d'une substitution quelconque, particulièrement de la forme (12) (34)... ($m - 1, m$)	"	120
--------	--	---	-----

§ 3.

" 10.	Substitutions cycliques	"	126
-------	-----------------------------------	---	-----

§ 4.

" 11-12.	Théorèmes généraux sur les groupes qu'on obtient en permutant moins de n indices	"	130
----------	--	---	-----

§ 5.

" 13-15.	Représentation des groupes de substitutions	"	132
----------	---	---	-----

§ 6.

Projections sur un espace à trois dimensions et sur un plan.

" 16.	Généralités	"	136
" 17-18.	Projections sur un espace à trois dimensions	"	137
" 19.	Projections sur un plan	"	140

(*) Cette table est un peu plus détaillée que celle qui est jointe au travail envoyé par moi à l'Académie de Belgique.

§ 7.

Nr. 20-21.	Application aux courbes et aux surfaces dans l'espace à 3 dimensions et sur le plan	Pag.	141
------------	---	------	-----

CHAPITRE II.

**Première interprétation géométrique des groupes
des substitutions de 6 lettres en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique
dans les espaces à 5, 4, 3 dimensions et dans le plan.**

§ 1.

<i>Groupes principaux de l'Hexagramme. — Emploi d'une notation nouvelle.</i>			
Nr. 22.	Généralités	Pag.	143
" 23.	Droites de Pascal	"	144
" 24.	Points de Steiner	"	ivi
" 25.	Points de Kirkman	"	145
" 26.	Figures II	"	146
" 27.	Droites de Cayley	"	148
" 28-29.	Des figures déterminées par deux figures quelconques II. Systèmes $[Zz]_m$	"	150

§ 2.

" 30-33.	Groupes des substitutions de trois lettres et interprétations géométriques	"	153
----------	--	---	-----

§ 3.

<i>Groupes des substitutions de quatre lettres et interprétations géométriques.</i>			
" 34.	Groupes de 4 lettres	"	157
" 35-38.	Interprétation géométrique dans l'espace à trois dimensions	"	158
" 39-40.	Interprétation géométrique dans le plan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$	"	163
" 41.	Projection sur un plan quelconque par un point également quelconque de l'espace R_3	"	166

§ 4.

<i>Groupes des substitutions de 5 lettres. — Interprétations géométriques dans l'espace à 4, 3 dimensions et dans le plan.</i>			
" 42.	Groupes des substitutions de 5 lettres	"	167
" 43-45.	Interprétation géométrique dans l'espace R_4 à 4 dimensions	"	168
" 46-47.	Interprétation dans l'espace unité et dans un espace à trois dimensions quelconque	"	172
" 48.	Projection sur un plan	"	176

§ 5.

<i>Groupes des substitutions de 6 lettres en relation avec l'Hexagramme.</i>			
" 49.	Généralités. — Groupes des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, des droites de Steiner-Plücker et des points de Salmon	"	176
" 50-51.	Groupes des droites de Pascal et des points Z des systèmes $[Zz]_{2m}$ et des droites z des systèmes $[Zz]_{2m+1}$	"	178
" 52.	Groupes des points de Steiner et des droites de Cayley	"	183
" 53.	Groupes des 6 figures II	"	186
" 54.	Groupes des points de Kirkman et des droites z des systèmes $[Zz]_{2m}$ et des points Z des systèmes $[Zz]_{2m+1}$	"	188

§ 6.

Interprétations géométriques dans l'espace R_5 en correspondance avec l'Hexagramme.

Nr. 55-56.	Propriétés générales des 720 points $(S)_{720}$ qu'on obtient dans l'espace R_5 en permutant les 6 coordonnées homogènes d'un point	Pag.	190
" 57-58.	Deux groupes de 16 points $(B)_{16}, (C)_{16}$	"	193
" 59-60.	Des 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ du 2 ^o degré à 4 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$, correspondant aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'Hexagramme.	"	197
" 61-63.	Des 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta}$ du 4 ^o ordre à 3 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$ correspondant aux droites de Pascal, aux droites z_{2m+1} et aux points Z_{2m}	"	200
" 64-65.	Des 20 surfaces $\Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta} \Delta_{\epsilon\zeta}$ du 6 ^o ordre à 2 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$ correspondant aux 20 points de Steiner et aux droites de Cayley	"	203
" 66.	Des 6 configurations Π qui correspondent aux 6 figures Π du système Pascal-Kirkman ou d'un système quelconque $[Zz]_m$	"	205
" 67-69.	Des 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta} \Delta_{\epsilon\zeta}$ du 8 ^o ordre à 2 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$ qui correspondent aux 60 points de Kirkman, aux 60 points Z_{2m+1} ou aux 60 droites z_{2m}	"	206

§ 7.

Projections des figures obtenues dans l'espace à 5 dimensions sur l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

" 70-73.	Projections sur l'espace à 3 dimensions.	"	209
" 74.	Projection sur un plan.	"	213

CHAPITRE III.

Autres interprétations géométriques des groupes des substitutions de 6 lettres.

§ 1.

Interprétation géométrique au moyen de 6 complexes linéaires deux à deux en involution dans R_3 .

Nr. 75-76.	Généralités	Pag.	215
" 77.	Des 15 tétraèdres et des surfaces de 2 ^o degré $\theta_{\alpha\beta}$	"	218
" 78.	Groupes correspondant aux droites de Pascal.	"	222
" 79.	Groupes correspondant aux points de Steiner.	"	ivi
" 80-82.	Groupes correspondant aux figures Π	"	224
" 83-84.	Section de la figure avec un plan	"	225

§ 2.

" 85	<i>Autre extension¹ des groupes de l'hexagramme pour 6 points d'une courbe gauche du 3^o ordre.</i>	"	228
------	--	---	-----

§ 3.

" 86.	<i>Théorème analogue à celui de Pascal pour 8 points de la courbe rationnelle du 4^o ordre dans l'espace à 4 dimensions. — Corollaires</i>	"	230
" 87.	ADDITION. — Autres groupes de six lettres	"	232

Intorno ad una congruenza di modulo primo.

(Nota di CARLO MARIA PIUMA, in Genova.)

Essendo

$$m = pq + 1$$

un'intero primo, p e q interi, e A , B , C parimente interi e nessuno di essi divisibile per m , in questa Nota, mi propongo di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti, onde la congruenza

$$Ax^p + By^q + C \equiv 0 \pmod{m} \quad (1)$$

possa essere soddisfatta non assegnando ad x e ad y che soli valori interi, e poi, nel caso che ciò sia possibile, di esporre un metodo il quale permetta di abbreviare alquanto la serie dei calcoli diretti alla determinazione dei valori interi di x e di y che la verificano.

In primo luogo è evidente che, se la (1) è soddisfatta dalla coppia di valori

$$x \equiv b, \quad y \equiv a \pmod{m}$$

assegnati ad x e ad y , necessariamente ne seguirà che la congruenza

$$Az + Bz_1 + C \equiv 0 \pmod{m} \quad (2)$$

sarà essa pure verificata da

$$z \equiv b^p, \quad z_1 \equiv a^q \pmod{m}.$$

Ed osservando che quando b ed a sono interi diversi da zero si ha pure

$$z^q - 1 \equiv 0, \quad z_1^p - 1 \equiv 0 \pmod{m} \quad (3)$$

ne risulterà che z non potrà ricevere che dei valori compresi fra i seguenti

$$h_0 = 0, \quad h_1, \quad h_2, \dots, \quad h_q \pmod{m}$$

rappresentando con

$$h_1, \quad h_2, \dots \quad h_q$$

le q radici incongrue della prima fra le (3), mentre z_1 non potrà ricevere che dei valori compresi fra i seguenti

$$k_0 = 0, \quad k_1, \quad k_2, \dots \quad k_p$$

dove

$$k_1, \quad k_2, \dots \quad k_p$$

rappresentano le p radici incongrue della seconda delle (3).

E reciprocamente quando si abbia

$$A h_u + B k_v + C \equiv 0 \pmod{m}$$

essendo

$$h_u^q - 1 \equiv 0, \quad k_v^p - 1 \equiv 0 \pmod{m}$$

potremo soddisfare alla (1) sostituendo ad x e ad y valori interi i quali saranno rispettivamente le radici delle due congruenze

$$x^p \equiv h_v, \quad y^q \equiv k_v \pmod{m}$$

le quali in virtù delle fatte ipotesi sono sempre possibili.

Facciamo ora

$$A h_u + B k_v + C \equiv \alpha_{u,v} \pmod{m}$$

rappresentando con $\alpha_{u,v}$ il minimo residuo positivo del trinomio, contenuto nel primo membro, rispetto al modulo m , avendo qui, come nel seguito di questa Nota, h_u e k_v il significato che loro abbiamo sopra attribuito, cioè essendo h_u radice della prima fra le (3) o zero, e k_v essendo zero ovvero radice della seconda delle (3).

Con questa convenzione circa la notazione è facile vedere che, onde la (1) possa essere soddisfatta da valori interi per x e per y , sarà condizione necessaria e sufficiente che, per una o più fra le $(p+1)(q+1)$ combinazioni dei $p+1$ valori, 0, 1, 2, ... p che può ricevere v e pei $q+1$ valori 0, 1, 2, ... q che può ricevere u , si abbia

$$\alpha_{u,v} = 0.$$

Ciò posto, radunando le diverse $\alpha_{u,v}$ così ottenute nel quadro seguente, riunendo cioè in una stessa linea quelle tra loro che hanno eguale il primo indice, ed in una stessa colonna quelle delle α che hanno eguale il secondo indice

si avrà

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2\dots} & \alpha_{0,p} \\
 \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2\dots} & \alpha_{1,p} \\
 \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2\dots} & \alpha_{2,p} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_{q,0} & \alpha_{q,1} & \alpha_{q,2\dots} & \alpha_{q,p}
 \end{array}$$

Per quello che abbiamo visto sopra, condizione necessaria e sufficiente alla possibilità della (1) sarà evidentemente questa, cioè che il prodotto di tutte le $\alpha_{u,v}$ contenute nel quadro precedente sia eguale a zero.

Questo prodotto può essere ottenuto in ciascuno dei due diversi modi seguenti, cioè:

1.º Moltiplicando tra loro tutte le $\alpha_{u,v}$ contenute in ciascuna linea, e poi tra di loro i prodotti così ottenuti;

2.º Moltiplicando tra loro tutte le $\alpha_{u,v}$ contenute in ciascuna colonna e poi tra loro i prodotti così ottenuti.

Per tal modo ponendo da prima

$$\beta_u = \alpha_{u,0} \cdot \alpha_{u,1} \cdot \alpha_{u,2} \dots \cdot \alpha_{u,p}$$

si ottiene

$$\beta_u \equiv \{C + Ah_u\} \{(C + Ah_u)^p - (-B)^p\} \pmod{m}$$

e poi ponendo similmente

$$\gamma_v = \alpha_{0,v} \cdot \alpha_{1,v} \cdot \alpha_{2,v} \dots \cdot \alpha_{q,v}$$

si ottiene

$$\gamma_v \equiv \{C + Bk_v\} \{(C + Bk_v)^q - (-A)^q\} \pmod{m}.$$

Ed indicando con P il prodotto di tutte le $\alpha_{u,v}$ avremo col primo metodo

$$P \equiv C \{C^q - (-A)^q\} \prod_{u=0}^{u=q} \{(C + Ah_u)^p - (-B)^p\} \pmod{m}$$

e col secondo

$$P \equiv C \{C^p - (-B)^p\} \prod_{v=0}^{v=p} \{(C + Bk_v)^q - (-A)^q\} \pmod{m}.$$

Ed a ciò P sia eguale a zero, sarà necessario e sufficiente che i secondi membri delle due congruenze precedenti sieno divisibili per m ; quindi che abbia luogo

una almeno delle congruenze

$$\left. \begin{aligned} C^q - (-A)^q &\equiv 0, & (C + Ah_0)^p - (-B)^p &\equiv 0, \\ (C + Ah_1)^p - (-B)^p &\equiv 0, \dots & (C + Ah_q)^p - (-B)^p &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \pmod{m} \quad (4)$$

poichè per ipotesi C non è divisibile per m . Ovvero, ciò che torna lo stesso, che lo sia una almeno tra le

$$\left. \begin{aligned} C^p - (-B)^p &\equiv 0, & (C + Bk_0)^q - (-A)^q &\equiv 0, \\ (C + Bk_1)^q - (-A)^q &\equiv 0, \dots & (C + Bk_p)^q - (-A)^q &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \pmod{m}. \quad (5)$$

Da ciò risulta che se alcune delle congruenze del primo sistema sono verificate lo saranno pure alcune del secondo. Ma questa relazione che hanno tra loro i due precedenti sistemi di congruenze (4) e (5) può essere maggiormente precisata.

Risulta infatti, da una semplicissima osservazione, la quale ci gioverà ancora sotto un altro punto di vista, che il numero il quale esprime quante delle congruenze del sistema (4) sono soddisfatte, esprimerà pure quante di verificate ve ne hanno nell'altro sistema (5).

L'osservazione, della quale qui intendo parlare, è la seguente: per la (2) ad ogni valore di z ne corrisponde uno ed un solo di z_1 e reciprocamente; come per la (1) ad ogni valore di x^p ne corrisponde uno ed un solo di y^q e reciprocamente, e se si ha $z = x^p$ si avrà pure $z_1 = y^q$ e reciprocamente, ben'inteso sempre prescindendo da multipli del modulo m .

Ora se una delle (4) è verificata converrà distinguere due casi, quello cioè pel quale sia verificata la

$$C^q - (-A)^q \equiv 0 \pmod{m}$$

ovvero lo sia alcuna delle restanti tutte della forma

$$(C + Ah_s)^p - (-B)^p \equiv 0 \pmod{m}.$$

Nel primo caso si vede che dovrà aver luogo una congruenza della forma

$$Ah_s + C \equiv 0 \pmod{m} \quad (6)$$

onde sarà

$$k_r \equiv 0 \pmod{m}$$

quindi conservando le notazioni fin qui adoperate sarà

$$z_1 \equiv k_r \equiv a^q \equiv 0 \pmod{m}$$

la quale riduce la (1) alla

$$Ab^p + C \equiv 0 \pmod{m}.$$

e la (2) alla

$$Az + C \equiv 0 \pmod{m}$$

è dal confronto di queste due ultime congruenze ne risulterà la

$$z \equiv b^p \pmod{m}$$

e per la (6)

$$z \equiv h_s \equiv b^p \pmod{m}$$

con che resta determinato il valore di h_s che in unione del valore $k_r \equiv 0 \pmod{m}$ soddisfanno alla (2), dai quali poi si possono dedurre i valori di b , ed a che sostituiti ad x e ad y soddisfanno la (1), ma questa coppia di valori $k_r \equiv 0 \pmod{m}$ e quello di h_s che ne abbiamo dedotto soddisfanno pure e solamente alla seconda delle (5), quindi in questo caso ad una congruenza verificata nel primo sistema ne corrisponde una ed una sola di verificata nel secondo.

Nel secondo caso si vede che se si ha

$$(C + Ah_s)^p - (-B)^p \equiv 0 \pmod{m} \tag{7}$$

dovrà essere verificata una almeno delle congruenze

$$Ah_s + Bk_r + C \equiv 0 \pmod{m}$$

facendo percorrere ad r la serie dei valori 1, 2, ... p . L'ultima congruenza, dato h_s , determina completamente k_r ad un multiplo presso di m , quindi determina completamente r , per cui una sola delle congruenze nelle quali si scinde la (7) potrà essere verificata, ed allora con metodo analogo a quello tenuto relativamente al primo caso si vede che ad ognuna delle congruenze (4) verificata, ne corrisponde una ed una sola di soddisfatte fra le (5). Da ciò risulta chiaramente la proposizione che abbiamo enunciata.

La stessa osservazione, e le conseguenze che da essa abbiamo dedotte fanno vedere, che onde ottenere tutte le soluzioni della (1) si può, per ritrovarle, adoperare il metodo seguente.

Risolta una delle due congruenze (3) (nella pratica credo più conveniente in generale risolvere quella di grado inferiore) ad esempio la

$$z^q - 1 \equiv 0 \pmod{m}$$

e determinate così le

$$h_a = 0, \quad h_1, \quad h_2, \dots, \quad h_q.$$

si osserverà se fra le congruenze

$$C^q - (-A)^q \equiv 0, \quad (C + Ah_u)^p - (-B)^p \equiv 0 \pmod{m} \tag{8}$$

nella seconda delle quali si faccia percorrere ad u la serie di valori $0, 1, 2, \dots, q$, ve ne sieno di soddisfatte.

Nel caso non ve ne sieno sarà impossibile risolvere la (1) nel modo richiesto; se poi si avesse

$$C^q - (-A)^q \equiv 0 \pmod{m}$$

la (2) sarebbe verificata da

$$z_1 \equiv 0 \pmod{m}$$

insieme con

$$Az + C \equiv 0 \pmod{m},$$

dalla quale si ricava il valore

$$z \equiv h_u \pmod{m}$$

e da esse si deduce che sarà

$$a \equiv 0 \pmod{m}$$

insieme con b eguale ad una qualunque delle p radici di

$$x_1^p - h_u \equiv 0 \pmod{m}.$$

Quando poi si avesse

$$(C + Ah_u)^p - (-B)^p \equiv 0 \pmod{m}$$

la congruenza

$$Ah_u + Bz_1 + C \equiv 0 \pmod{m}$$

determinerebbe un valore di

$$z_1 \equiv k_v \pmod{m}$$

e tutti i sistemi di valori di x e di y che soddisfanno alla (1) sarebbero dati dalle combinazioni, per x di ciascuna delle radici della congruenza

$$x_2^p - h_u \equiv 0 \pmod{m}$$

con ciascuna delle radici della congruenza

$$y_1^q - k_v \equiv 0 \pmod{m}$$

per y .

Sia ad esempio da risolvere la congruenza

$$2x^6 + 3y^5 + 5 \equiv 0 \pmod{31}.$$

Risolvendo la congruenza

$$x^6 - 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

otterremo

$$h_0 \equiv 0, \quad h_1 \equiv 1, \quad h_2 \equiv 2, \quad h_3 \equiv 4, \quad h_4 \equiv 8, \quad h_5 \equiv 16 \pmod{31}$$

per cui,

$$h_3 \equiv 4 \pmod{31}$$

sarà il solo valore possibile di h_u , perchè esso è il solo che soddisfa ad una delle congruenze (4); la (2) ci fornirà poi

$$k_v \equiv 6 \pmod{31}$$

e le

$$x_2^6 - 4 \equiv 0, \quad y_1^5 - 6 \equiv 2 \pmod{31}$$

ci daranno quindi pei valori di b e di a che sostituiti al luogo di x e di y soddisfanno la (1) la serie di valori

$$\left. \begin{array}{l} b \equiv 4, \quad 7, \quad 11, \quad 20, \quad 24, \quad 27 \\ a \equiv 11, \quad 13, \quad 21, \quad 22, \quad 26 \end{array} \right\} \pmod{31}.$$

Per fare un'applicazione, di ordine più generale, dei risultati precedentemente ottenuti, supporremo ora

$$q = 2.$$

Perciò che sopra si è stabilito dovremo osservare, in questo caso, se tra le congruenze

$$\left. \begin{array}{l} C^2 - (-A)^2 \equiv 0, \quad C^p - (-B)^p \equiv 0, \quad (C+A)^p - (-B)^p \equiv 0, \\ (C-A)^p - (-B)^p \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{m} \quad (9)$$

ve ne sieno o no di verificate, nel secondo caso la (1) non può essere soddisfatta sostituendo ad x e ad y valori interi, nel primo può essere verificata assegnando ad x e ad y valori interi, onde si avrà il seguente:

Teorema. Essendo m un intero primo e

$$m = 2p + 1,$$

la congruenza

$$Ax^p + By^2 + C \equiv 0 \pmod{m}$$

sarà possibile quando uno dei due numeri

$$C+A, \quad C-A$$

sia divisibile per m , ovvero quando fra i prodotti

$$-BC, \quad -B(C+A), \quad -B(C-A)$$

ve ne siano dei residui quadratici di m .

In tutti gli altri casi essa sarà impossibile.

Nulla è a dire quanto alle condizioni relative a

$$C + A, \quad C - A$$

cioè che uno dei due sia divisibile per m , poichè da questa si ricava la relazione

$$C^2 - (-A)^2 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Quanto all'altra deducendo le congruenze delle ipotesi fatte si avrà

$$(-B)^p C^p \equiv \pm 1, \quad (-B)^p (C + A)^p \equiv \pm 1, \quad (-B)^p (C - A)^p \equiv \pm 1 \pmod{m}$$

i segni superiori essendo relativi al caso del residuo e gli inferiori a quelli del non residuo. Osserviamo che si ha sempre

$$(-B)^{2p} \equiv 1 \pmod{m},$$

per cui dalle congruenze precedenti risulterà

$$C^p \equiv \pm (-B)^p, \quad (C + A)^p \equiv \pm (-B)^p, \quad (C - A)^p \equiv \pm (-B)^p \pmod{m}$$

le quali nel caso del non residuo escludono rispettivamente le

$$C^p - (-B)^p \equiv 0, \quad (C + A)^p - (-B)^p \equiv 0, \quad (C - A)^p - (-B)^p \equiv 0 \pmod{m}$$

e nel caso del residuo fanno vedere che quelle delle (9) che loro corrisponde sono verificate.

Da questo teorema risulta immediatamente il seguente:

Corollario. Con valori interi di x e di y , il trinomio

$$Ax^3 + By^2 + C \tag{10}$$

può sempre essere reso divisibile per 7, quando nessuno degli interi A , B , C sia divisibile per questo numero (*).

Infatti dietro le fatte ipotesi poichè nè A , nè C sono divisibili per 7, C , $C + A$, $C - A$ sono tra loro incongrui rispetto al modulo 7. Per quel che si è visto, onde fosse impossibile rendere divisibile per 7, con valori interi attribuiti ad x e ad y , il trinomio (10) sarebbe in primo luogo necessario che nessuno dei numeri

$$C + A, \quad C - A$$

fosse divisibile per 7.

(*) Questo corollario è la questione n° 1404 proposta dal sig. PELLET nel fascicolo di luglio 1882 dei Nouvelles Annales de mathématique.

Quando ciò si verificasse perchè il detto trinomio (10) non potesse nel modo richiesto essere reso divisibile per 7 sarebbe necessario, quantunque non sufficiente, che

$$C, \quad C + A, \quad C - A$$

fossero tutti residui o tutti non residui quadratici di 7, per cui nel primo caso questi numeri dovrebbero essere le tre radici della congruenza

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

e nel secondo essi dovrebbero essere le tre radici della

$$x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

per cui in entrambi i casi la loro somma dovrebbe essere divisibile per 7. Ma la somma di queste tre quantità riducendosi a

$$3C$$

e se ne dedurrebbe che C dovrebbe essere divisibile per 7 ciò che è contro le fatte ipotesi, e da ciò consegue la verità del corollario enunciato.

Dal Bosco presso Pontedecimo, 29 luglio 1882.

An extension of a theorem of Legendre's.

[By JOHN C. MALET, *Cork (Ireland).*]

In this memoir I use the following notation

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^m \theta d\theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^m \theta (1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta$$

$$F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{m'} \theta d\theta}{(1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}, \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'} \theta (1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta$$

where

$$m' = \frac{2}{n} - m - 1, \quad k' = 1 - k$$

and

$$1 + m > 0, \quad 1 + m' > 0.$$

We have evidently

$$n \frac{dF}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}^2 \theta \text{Cos}^m \theta d\theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n+1}{n}}}$$

and we easily find

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{\text{Sin} \theta \text{Cos}^{m+1} \theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}} \right\} =$$

$$\frac{\text{Cos}^m \theta}{kn} \left\{ \frac{nk - (m+2)n + 2}{\Delta^n} + \{(m+2)n - 2\} \Delta^{\frac{n-1}{n}} - \frac{2kk' \text{Sin}^2 \theta}{\Delta^{\frac{n+1}{n}}} \right\}$$

where

$$\Delta = 1 - k \sin^2 \theta.$$

Hence we have

$$2nk k' \frac{dF}{dk} = \{(m+2)n-2\} E - \{(m+2)n-2-nk\} F$$

we have also

$$\frac{dE}{dk} = \frac{n-1}{nk} (E-F).$$

Eliminating E between these equations and writing u for F in the result we get the differential equation

$$2nk(1-k) \frac{d^2u}{dk^2} + \{(m+2)n - (3n+2)k\} \frac{du}{dk} - u = 0. \quad (A)$$

This equation being unaltered by changing m to m' and k to k' , the complete solution is

$$u = C_1 F + C_2 F'$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants.

Now if the solutions of the linear differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

be $y = y_1$ and $y = y_2$ we may easily prove the relation

$$e^{\int P dx} \left\{ y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right\} = C \quad (1)$$

where C is a constant. In the case of equation (A) this gives, after some reduction,

$$k^{\frac{m}{2}} k'^{\frac{m'}{2}} \left\{ (1-m') F' E + (1-m) F E' - 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) F F' \right\} = C$$

C being independent of k .

To determine the value of C ; write the relation

$$nk^{\frac{m+2}{2}} k'^{\frac{m'+2}{2}} \left\{ F' \frac{dF}{dk} - F \frac{dF'}{dk} \right\} = \frac{nC}{2}$$

and put $k=1$.

Now in the first case if m' is negative we find when $k=1$

$$nF \frac{dF'}{dk} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{-m'-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'} \theta \text{Sin}^2 \theta d\theta$$

which is finite; therefore when m' is negative when $k=1$ we have

$$k'^{\frac{m'+2}{2}} F' \frac{dF'}{dk} = 0.$$

In the second case suppose m' to be positive, we have as before when $k=1$

$$k'=0, \quad n \frac{dF'}{dk} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'} \theta \text{Sin}^2 \theta d\theta$$

and transforming

$$F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^m \theta d\theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}$$

by the substitution

$$\text{Sin} \theta = \frac{\text{Cos} \varphi}{\sqrt{1 - k \text{Sin}^2 \varphi}}$$

we find

$$k'^{\frac{m'}{2}} F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}^m \varphi d\varphi}{(1 - k \text{Sin}^2 \varphi)^{\frac{1-m'}{2}}}$$

which gives for $k=1$

$$k'^{\frac{m'}{2}} F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'-1} \theta \text{Sin}^m \theta d\theta$$

which is finite when m' is positive, therefore in this case also

$$k'^{\frac{m'+2}{2}} F' \frac{dF'}{dk} = 0$$

when $k=1$.

Now we have

$$n \frac{dF}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}^2 \theta \text{Cos}^m \theta d\theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n+1}{n}}}$$

hence as before putting

$$\text{Sin } \theta = \frac{\text{Cos } \varphi}{\sqrt{1 - k \text{Sin}^2 \varphi}}$$

we find

$$n k^{\frac{m'+2}{2}} \frac{dF}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^2 \theta \text{Sin}^m \theta (1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{m'-1}{2}} d\theta$$

therefore for $k=1$

$$n k^{\frac{m+2}{2}} k^{\frac{m'+2}{2}} F' \frac{dF}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m' \theta} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'+1 \theta} \text{Sin}^m \theta d\theta$$

which is therefore the value of $\frac{nC}{2}$.

To express C in terms of Eulerian Integrals, we have

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m' \theta} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m'+2}{2}\right)}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'+1 \theta} \text{Sin}^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m'+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{m+m'+3}{2}\right)}.$$

Hence

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+m'+3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{n}\right)}$$

and we have

$$\left. \begin{aligned} k^{\frac{m}{2}} k^{\frac{m'}{2}} \left\{ (1-m') F' E + (1-m) F E' - 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) F F' \right\} = \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n}{n}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

If $m=0$, $C = \frac{\pi}{2}$, therefore from symmetry if $m'=0$ C must also become equal to $\frac{\pi}{2}$; which easily is proved directly from the equation

$$k^{\frac{m}{2}} \left\{ F' E + (1-m) F E' - 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) F F' \right\} = C$$

which by putting $k=1$ reduces without difficulty to

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } \theta d\theta = C.$$

If therefore $m=0$ or $m'=0$ equation (B) becomes

$$\frac{m}{k^{\frac{m}{2}}} k^{\frac{m'}{2}} \left\{ (1-m')F'E + (1-m)F'E' - 2\left(1-\frac{1}{n}\right)FF' \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

If $m=0$ and $m'=0$, then $n=2$ and we have Legendre's well known relation between complete elliptic integrals of the first and second kind with complementary moduli.

If $m'+1=0$ $F'=u$ is no longer a solution of equation (A), but in this case the equation is satisfied by $u = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}}$; and the complete solution is

$$u = C_1 F + \frac{C_2}{k^{\frac{1}{n}}}$$

where we suppose $\frac{2}{n} + 1 > 0$.

In this case by the application of (1) we find

$$2nE + \{2(1-n) + (n-2)k\}F = C\sqrt{1-k}$$

C being independent of k .

Putting $k=0$ we find

$$C = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{\frac{2}{n}} \theta d\theta.$$

Hence we derive the formula

$$2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{\frac{2}{n}} \theta (1-k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta + \{2(1-n) + (n-2)k\} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{\frac{2}{n}} \theta d\theta}{(1-k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}} = 2\sqrt{1-k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{\frac{2}{n}} \theta d\theta.$$

In general $u = k^p$ is a solution of equation (A) provided that

$$2p + m = 0 \quad \text{and} \quad (np + 1)(2p + 1) = 0$$

hence we see that if $m = 1$ then $u = \frac{1}{\sqrt{k}}$ satisfies the equation; in fact in this case we find

$$F' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

In this case then without any restriction as to n , the complete solution is

$$u = C_1 F + \frac{C_2}{\sqrt{k}}.$$

From which as before we find

$$(3n - 2)E - 2(n - 1)F = C(1 - k)^{\frac{n-1}{n}}$$

putting $k = 1$ we get $C = n$, hence the theorem

$$(3n - 2) \int_0^1 (1 - kx^2)^{\frac{n-1}{n}} dx - 2(n - 1) \int_0^1 \frac{dx}{(1 - kx^2)^{\frac{1}{n}}} = n(1 - k)^{\frac{n-1}{n}}.$$

In the remainder of this memoir I shall sometimes have to put in evidence the indices m, n, m' and I shall then write F, E, F', E' as follows $F(m, n), E(m, n), F'(m', n), E'(m', n)$ or when n remains unchanged $F(m), E(m), F'(m'), E'(m')$.

If now in equation (A) we change n to $\frac{n}{1-n}$ and suppose m to remain unaltered we get the equation

$$2nk(1 - k) \frac{d^2 u}{dk^2} + \{(m + 2)n - (2 + n)k\} \frac{du}{dk} + (n - 1)u = 0 \quad (C)$$

of which the complete solution must evidently be

$$u = C_1 E(m) + C_2 E'(m' - 2)$$

provided that in this case we have $1 + m > 0$ and $m' - 1 > 0$.

In place of the solution $u = E'(m' - 2)$ we may derive another as follows. We have

$$2nk(1 - k) \frac{dF'}{dk} = n(m - 1)E' - n(m - k)F'$$

$$n(1 - k) \frac{dE'}{dk} = (n - 1)(F' - E').$$

Now put

$$u = \lambda E' + F' \quad \text{where} \quad \lambda = \frac{n(m-1)}{2(n-1)}$$

and we find without difficulty

$$2k \frac{du}{dk} = (m-1 + \lambda m)E' - mu.$$

Eliminating E' between this equation and

$$n(1-k) \frac{dE'}{dk} = (n-1)[u - (1+\lambda)E']$$

we find

$$2nk(1-k) \frac{d^2u}{dk^2} + \{(m+2)n - (2+n)k\} \frac{du}{dk} + (n-1)u = 0$$

which is equation (C).

Hence the complete solution of (C) when $1+m > 0$ and $1+m' > 0$ may be written

$$u = C_1 E(m) + C_2 \left\{ F'(m') + \frac{n(m-1)}{2(n-1)} E'(m') \right\}.$$

If therefore $m'-1 > 0$ and also $m'+1 > 0$ then we should have, A being a constant,

$$A E'(m'-2) = 2(n-1)F'(m') + n(m-1)E'(m')$$

a result which is easily verified thus

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \cdot \left\{ \text{Cos}^{m'-1} \theta \text{Sin} \theta (1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} \right\} = \\ & \left\{ (1-m') \text{Cos}^{m'-2} \theta + (1-m) \text{Cos}^{m'} \theta \right\} (1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} + \frac{2(1-n)}{n} \cdot \frac{\text{Cos}^{m'} \theta}{(1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}. \end{aligned}$$

Hence integrating between 0 and $\frac{\pi}{2}$ we have

$$(m'-1)E'(m'-2) = (1-m)E'(m') + \frac{2(1-n)}{n} \cdot F'(m').$$

This solution of (C) enables us to integrate equation (A) when $1+m' < 0$ provided that we have as before $1+m > 0$ and also $3+m' > 0$.

The integration may be performed as follows.

In equation (A)

$$2nk(1-k)\frac{d^2u}{dk^2} + \{(m+2)n - (3n+2)k\}\frac{du}{dk} - u = 0$$

change n to $\frac{n'}{1-n'}$ and as before the equation becomes

$$2n'k(1-k)\frac{d^2u}{dk^2} + \{(m+2)n' - (2+n')k\}\frac{du}{dk} + (n'-1)u = 0$$

which is satisfied by

$$u = F'(m'', n') + \frac{n'(m-1)}{2(n'-1)} E'(m'', n')$$

where,

$$n' = \frac{n}{1+n}, \quad m'' = \frac{2}{n'} - m - 1 = \frac{2}{n} - m + 1$$

and $m'' + 1 > 0$ or $m' + 3 > 0$. Now

$$F'(m'', n') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{m'+2}\theta d\theta}{(1-k'\text{Sin}^2\theta)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$E'(m'', n') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{m'+2}\theta d\theta}{(1-k'\text{Sin}^2\theta)^{\frac{1}{n}}}$$

From previous results we may readily prove

$$2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{m'+2}\theta d\theta}{(1-k'\text{Sin}^2\theta)^{\frac{1}{n}}} = \{n(m-2) - (n-2)k\} F'(m'+2) + n(3-m) E'(m'+2).$$

Hence when $m' + 1 < 0$ the solution of (A) is

$$u = C_1 F(m) + \frac{C_2}{k} \{n(3-m) E'(m'+2) + [n(m-2) + (2-nm)k] F'(m'+2)\}$$

provided that

$$m + 1 > 0, \quad m' + 3 > 0.$$

Hence also if

$$m + 1 < 0, \quad m' + 1 < 0$$

the solution of (A) is

$$u = \frac{C_1}{1-k} \{n(3-m')E(m+2) + [n(m'-2) + (2-nm')(1-k)]F(m+2)\} \\ + \frac{C_2}{k} \{n(3-m)E'(m'+2) + [n(m-2) + (2-nm)k]F'(m'+2)\}$$

provided that

$$m+3 > 0, \quad m'+3 > 0.$$

June 22^d 1882.
Queens College.
Cork (Ireland).

Sulla risolvente di Lagrange per le equazioni di grado primo risolvibili per radicali.

(Nota di LUIGI BIANCHI, in Pisa.)

Nel volume 2° degli Annali di matematica, pag. 102, il prof. BETTI ha dimostrato che se un'equazione di grado primo p è risolvibile per radicali, la risolvente di LAGRANGE, oltre il fattore lineare razionale, ha sempre anche $\varphi(p-1)-1$ fattori razionali di grado p , dove φ sta ad indicare la solita funzione della teoria dei numeri. La presente Nota ha per iscopo di completare e generalizzare quel teorema, mostrando che quei $\varphi(p-1)-1$ fattori sono gli unici fattori razionali di grado p e trovando in qual modo si spezza la parte residua della risolvente.

1. Ricordiamo che se un'equazione irriducibile di grado primo p è risolvibile per radicali, il suo gruppo consta delle $p(p-1)$ sostituzioni lineari

$$\left. \begin{aligned} v' &\equiv av + b \pmod{p} & a &= 1, 2, \dots, p-1 \\ & & b &= 0, 1, 2, \dots, p-1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

effettuate sugli indici delle radici

$$x_0 x_1 x_2 \dots x_{p-1}.$$

Questo gruppo, che indicheremo con $G_{p(p-1)}$, lo diremo, seguendo una denominazione adottata, *gruppo metaciclico* e chiameremo invece *gruppo ciclico* Γ_p il gruppo formato dalle p sostituzioni

$$v' \equiv v + b \pmod{p} \quad b = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$

In generale il gruppo della nostra equazione coinciderà, come si è detto sopra, col gruppo totale metaciclico, ma potrà anche esserne soltanto un sottogruppo d'ordine $p\delta$, dove δ è un divisore qualunque di $p-1$. Noi considereremo dap-

prima il caso generale e i risultati ottenuti saranno poi facilmente estendibili anche agli altri.

Le sostituzioni del gruppo metaciclico si possono porre sotto una forma più adatta al nostro scopo della forma lineare (1). Indicando con g una radice primitiva (mod p) e posto

$$S = (x_0 x_1 x_2 \dots x_{p-1}), \quad U = (x_1 x_g x_{g^2} \dots x_{g^{p-2}}), \quad (2)$$

cosicchè S è una sostituzione ciclica a periodo p (le cui p potenze formano il gruppo ciclico Γ_p) ed U una sostituzione ciclica a periodo $p-1$, le sostituzioni del gruppo metaciclico $G_{p(p-1)}$ sono date dalla formola

$$U^\alpha S^\beta, \quad (3)$$

dove α percorre un sistema completo di resti (mod $p-1$) e β un analogo sistema (mod p).

Il gruppo ciclico $\Gamma_p = (1, S, S^2, \dots, S^{p-1})$ e l'altro $\Gamma_{p-1} = (1, U, U^2, \dots, U^{p-2})$ sono permutabili e si ha la formola

$$U^\alpha S^\beta = S^{\beta_1} U^\alpha, \quad \text{dove } \beta_1 \equiv \beta g^\alpha \pmod{p} \quad (*). \quad (4)$$

Dalla (4) segue facilmente la formola seguente, di cui dovremo fare uso

$$(U^\alpha S^\beta)^r = U^{r\alpha} S^{\beta(1+g^{-\alpha}+g^{-2\alpha}+\dots+g^{-(r-1)\alpha})}$$

ossia

$$(U^\alpha S^\beta)^r = U^{r\alpha} S^{\beta \frac{1-g^{-r\alpha}}{1-g^{-\alpha}}}. \quad (5)$$

2. Ciò posto, sia y_1 una funzione razionale delle p radici $x_0 x_1 x_2 \dots x_{p-1}$, il cui gruppo sia il gruppo metaciclico e i cui $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-2)$ valori algebricamente distinti lo siano anche numericamente, sicchè la risolvente di LAGRANGE con essa costruita abbia tutte le radici

$$y_1 y_2 y_3 \dots y_{\pi(p-2)} \quad (6)$$

distinte.

Se nella serie (6) delle y eseguiamo una sostituzione qualunque del gruppo metaciclico sulle x , l'effetto prodotto sarà una sostituzione sulle y , cosicchè al gruppo metaciclico sulle x corrisponderà un gruppo *isomorfo* H sulle y (**). Questo gruppo H è certamente intransitivo perchè non sposta y_1 ; ne segue che

(*) Vedi per es. SERRET: *Algèbre supérieure*, § 436.

(**) Le considerazioni qui svolte valgono per qualunque gruppo e qui vengono ripetute solo per maggior chiarezza di quel che segue. Cf. per es. NETTO: *Substitutionen-Theorie*, § 89.

le y si aggruppano in sistemi, sui quali le sostituzioni di H operano transitivamente. Se

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots \quad (7)$$

è uno di tali sistemi, le sostituzioni del gruppo metaciclico, effettuate sulla serie (7), non fanno che scambiare fra loro quegli r valori y , e siccome operano transitivamente sulla serie stessa, ne segue che il fattore corrispondente

$$(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_i)$$

della risolvente di LAGRANGE è razionalmente noto, ma irriducibile. La ricerca dei fattori irriducibili della risolvente di LAGRANGE equivale adunque perfettamente a quella dei sistemi di transitività, in cui si aggruppano le y della serie (6) rispetto al gruppo metaciclico.

Ciò posto, indichiamo con Ty_1 il valore y della serie (6) che si ottiene da y_1 , effettuando in essa la sostituzione qualunque T all'infuori del gruppo metaciclico. Allora, se fra le $p(p-1)$ sostituzioni del gruppo metaciclico ve ne sono r (formanti un gruppo Λ) che lasciano invariato Ty_1 , i valori distinti, che risulteranno da Ty_1 , applicandovi le sostituzioni del gruppo metaciclico, saranno $\frac{p(p-1)}{r}$ e tale sarà quindi il grado di quel fattore irriducibile della risolvente di LAGRANGE, che contiene come radice Ty_1 . Ma se V è una sostituzione di quel sottogruppo Λ del gruppo metaciclico, che lascia invariato Ty_1 , ne segue

$$\begin{aligned} VT \cdot y_1 &= Ty_1 \\ T^{-1}VT \cdot y_1 &= y_1 \end{aligned}$$

e quindi $T^{-1}VT$, lasciando y_1 invariata, appartiene al gruppo metaciclico. Questo sottogruppo Λ non può contenere alcuna potenza di S , poichè se

$$T^{-1}S^{\beta}T$$

appartenesse al gruppo metaciclico, essendo a periodo p , sarebbe un'altra potenza di S e T stessa apparterebbe quindi, contro l'ipotesi, al gruppo metaciclico (*). L'ordine r di questo sottogruppo non potrà quindi essere divisibile per p e sarà perciò un divisore di $p-1$, che indicheremo con $\frac{p-1}{\delta}$.

Il grado del fattore irriducibile corrispondente sarà allora $p\delta$.

(*) SERRET, l. c., § 433 e seguenti.

3. Indicando in generale con V le sostituzioni del gruppo metaciclico, è chiaro che due sostituzioni T, T_1 , all'infuori di questo gruppo, legate fra loro da una relazione della forma

$$T_1 = V_i T V_k, \quad (8)$$

danno luogo al medesimo fattore irriducibile della risolvibile di LAGRANGE. Reciprocamente, se danno luogo al medesimo fattore irriducibile, debbono essere legate da una relazione della forma (8), poichè allora si ha necessariamente

$$T_1 y_1 = V_i T \cdot y_1$$

quindi $T_1^{-1} V_i T$ è una sostituzione del gruppo metaciclico che possiamo indicare con V_k^{-1} ; ne segue

$$T_1^{-1} V_i T = V_k^{-1}$$

ossia la (8).

Due tali sostituzioni T_1, T si diranno *equivalenti* rispetto al gruppo metaciclico od anche semplicemente equivalenti ed è chiaro che pel nostro scopo potremo sempre sostituire ad una sostituzione T qualunque sostituzione equivalente.

Essendo ora T una sostituzione qualunque, supponiamo che il sottogruppo corrispondente Λ (n.º 2) contenga una sostituzione $U^\alpha S^\beta$; dico che:

Si può sostituire a T una sostituzione equivalente T_1 tale che nel sottogruppo corrispondente a T_1 entri U^α .

Per ciò basterà porre

$$T_1 = U^{\alpha_1} S^{\beta_1} T$$

e determinare α_1, β_1 in modo che

$$T_1^{-1} U^\alpha T_1 = T^{-1} S^{-\beta_1} U^{-\alpha_1} \cdot U^\alpha \cdot U^{\alpha_1} S^{\beta_1} T = T^{-1} (S^{-\beta_1} U^\alpha S^{\beta_1}) T$$

appartenga al gruppo metaciclico. Ma siccome per ipotesi $T^{-1} (U^\alpha S^\beta) T$ vi appartiene, basterà che si abbia

$$S^{-\beta_1} U^\alpha S^{\beta_1} = U^\alpha S^\beta,$$

ossia per la (4)

$$U^\alpha S^{\beta_1(1-g^{-\alpha})} = U^\alpha S^\beta,$$

da cui

$$\beta_1(1-g^{-\alpha}) \equiv \beta \pmod{p}$$

e siccome non può essere $\alpha \equiv 0 \pmod{p-1}$ (n.º 2), avremo di qui un valore perfettamente determinato per β_1 , il che dimostra la proprietà enunciata.

(Osservazione. Il valore di α_1 resta arbitrario e ciò è naturale perchè

$$(U^{\alpha_1} T)^{-1} U^{\alpha} (U^{\alpha_1} T) = T^{-1} U^{\alpha} T$$

qualunque sia α_1).

Possiamo dunque limitarci a considerare quelle sostituzioni T , il cui sottogruppo corrispondente Λ (n.º 2) di ordine $\frac{p-1}{\delta}$ contenga una potenza di U e quindi un intero sottogruppo

$$1, U^{\delta_1}, U^{2\delta_1}, \dots, U^{\left(\frac{p-1}{\delta_1}-1\right)\delta_1} \quad (9)$$

di Γ'_{p-1} , dove δ_1 è un divisore di $p-1$. Allora è facile vedere che le sostituzioni (9) esauriscono tutto il sottogruppo Λ e quindi $\delta_1 = \delta$. Supposto infatti che Λ contenesse un'altra sostituzione $U^{\alpha} S^{\beta}$ con β diverso da zero, indicando con ε il massimo comun divisore di α , δ_1 , si potrà risolvere in numeri interi x, y la equazione

$$\alpha x + \delta_1 y = \varepsilon \quad (10)$$

e Λ conterrà quindi la sostituzione

$$U^{\delta_1 y} (U^{\alpha} S^{\beta})^x,$$

ossia per la (5)

$$U^{\delta_1 y} \cdot U^{\alpha x} S^{\beta \frac{1-g^{-\alpha x}}{1-g^{-\alpha}}} = U^{\varepsilon} S^{\beta_1}.$$

Ora se si ha

$$\beta_1 \equiv \beta \frac{1-g^{-\alpha x}}{1-g^{-\alpha}} \equiv 0 \pmod{p},$$

U^{ε} appartiene alla serie (9) e siccome ε divide δ_1 ne segue $\delta_1 = \varepsilon$, cioè α è multiplo di δ_1 (*). Il gruppo Λ contiene adunque

$$U^{-\frac{\delta_1}{\varepsilon}} \cdot U^{\alpha} S^{\beta} = S^{\beta},$$

il che è impossibile (n.º 2).

Se poi non è $\beta_1 \equiv 0 \pmod{p}$, allora Λ contiene la sostituzione

$$U^{-\delta_1} (U^{\varepsilon} S^{\beta_1})^{\frac{\delta_1}{\varepsilon}} = U^{-\delta_1} \cdot U^{\delta_1} S^{\beta_1} \frac{1-g^{-\delta_1}}{1-g^{-\varepsilon}} = S^{\beta_1} \frac{1-g^{-\delta_1}}{1-g^{-\varepsilon}}$$

(*) Ciò si può vedere anche così: da $\beta_1 \equiv 0 \pmod{p}$ segue $\alpha x \equiv 0 \pmod{p-1}$ e per la (10) $\delta_1 y \equiv \varepsilon \pmod{p-1}$ e δ_1 dividendo $p-1$ divide ε , per cui $\delta_1 = \varepsilon$.

mentre non essendo $\delta_1 \equiv 0 \pmod{p-1}$, non può essere

$$\beta_1 \frac{1-g^{-\delta_1}}{1-g^{-\varepsilon}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Il sottogruppo Λ corrispondente alle attuali sostituzioni T consta adunque delle $\frac{p-1}{\delta}$ sostituzioni

$$1, U^\delta, U^{2\delta}, \dots, U^{\left(\frac{p-1}{\delta}-1\right)\delta}$$

e la sostituzione T trasforma ogni sostituzione di questo sottogruppo in sostituzioni del gruppo metaciclico, cosicchè

$$T^{-1} U^\delta T = U^\alpha S^\beta$$

e siccome $U^\alpha S^\beta$ deve essere a periodo $\frac{p-1}{\delta}$ come $T^{-1} U^\delta T$ sarà $\alpha = r\delta$, dove r è primo con δ ; avremo quindi

$$T^{-1} U^\delta T = U^{r\delta} S^\beta. \quad (11)$$

Ma possiamo ancora semplificare la ricerca, dimostrando che: *Si può sostituire a T una sostituzione equivalente T_1 che sia permutabile col gruppo Λ .*

Poniamo infatti

$$T_1 = T U^{\alpha_1} S^{\beta_1}$$

e determiniamo α_1, β_1 in modo che si abbia

$$T_1^{-1} U^\delta T_1 = U^{r\delta}.$$

Ciò è sempre possibile poichè avendosi

$$T_1^{-1} U^\delta T_1 = S^{-\beta_1} U^{-\alpha_1} T^{-1} U^\delta T U^{\alpha_1} S^{\beta_1}$$

ossia per la (11)

$$T_1^{-1} U^\delta T_1 = S^{-\beta_1} U^{-\alpha_1} \cdot U^{r\delta} S^\beta \cdot U^{\alpha_1} \cdot S^{\beta_1},$$

facendo uso successivamente della (4) si trova

$$T_1^{-1} U^\delta T_1 = S^\beta g^{r\delta - \alpha_1 + \beta_1(g^{r\delta} - 1)} \cdot U^{r\delta},$$

e basterà quindi porre

$$\beta_1(g^{r\delta} - 1) + \beta g^{r\delta - \alpha_1} \equiv 0 \pmod{p}$$

talchè, non essendo $r\delta \equiv 0 \pmod{p-1}$, ad ogni valore di α_1 corrisponde un valore conveniente di β_1 .

4. Risulta di qui che basterà limitarsi a considerare quelle sostituzioni T ,

il cui sottogruppo corrispondente

$$\Lambda = \left(1, U^\delta, U^{2\delta}, \dots, U^{\left(\frac{p-1}{\delta}-1\right)\delta} \right) \quad (12)$$

è permutabile con T .

Il caso considerato dal BERTI corrisponde a $\delta=1$ ed effettivamente si vede subito che le sostituzioni ivi considerate

$$T = \begin{pmatrix} \nu^\lambda \\ \nu \end{pmatrix},$$

dove λ è primo con $p-1$, sono permutabili col sottogruppo totale

$$\Gamma_{p-1} = (1, U, U^2, \dots, U^{p-2});$$

infatti si ha $T^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt[\lambda]{\nu} \\ \nu \end{pmatrix}$, dove per $\sqrt[\lambda]{\nu}$ si intende la radice ν' della congruenza

$$x^\lambda \equiv \nu \pmod{p},$$

quindi

$$T^{-1} U^\alpha T = \begin{pmatrix} \sqrt[\lambda]{\nu^\lambda g^\alpha} \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \sqrt[\lambda]{g^\alpha} \\ \nu \end{pmatrix} = U^{\alpha_1}$$

dove $g^{\alpha_1} = \sqrt[\lambda]{g^\alpha}$, ossia $\lambda \alpha_1 \equiv \alpha \pmod{p-1}$.

Di più si verifica facilmente che due qualunque di quelle $\varphi(p-1)-1$ sostituzioni (l'identità esclusa) non sono equivalenti.

Ci proponiamo qui di risolvere la questione più generale: *Quanti sono i fattori irriducibili di grado $p\delta$?*

Per questo ci conviene prima di tutto determinare quante sono le sostituzioni T permutabili col gruppo (12) e tali di più che fra due di esse non abbia luogo una relazione della forma

$$T_1 = U^\alpha S^\beta \cdot T. \quad (13)$$

Cominciamo dal dimostrare: *Se due sostituzioni T_1, T sono permutabili col sottogruppo (12) Λ e sono legate fra loro dalla (13) ne segue necessariamente $\beta=0$.*

Infatti si ha per ipotesi

$$\left. \begin{aligned} T^{-1} U^\delta T &= U^{r\delta} \\ T_1^{-1} U^\delta T_1 &= U^{s\delta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

dove r, s sono primi con $\frac{p-1}{\delta}$. Determinata x dalla congruenza

$$sx \equiv r \pmod{\frac{p-1}{\delta}}$$

si elevi la 2^a delle (14) alla potenza x e si avrà

$$T^{-1} U^{\delta x} T = U^{s x \delta} = U^{r \delta} = T^{-1} U^{\delta} T$$

ossia per la (13)

$$T^{-1} S^{-\beta} U^{-\alpha} \cdot U^{\delta x} \cdot U^{\alpha} S^{\beta} T = T^{-1} U^{\delta} T$$

$$T^{-1} (S^{-\beta} U^{\delta x} S^{\beta}) T = T^{-1} U^{\delta} T,$$

da cui

$$S^{-\beta} U^{\delta x} S^{\beta} = U^{\delta}$$

e per la (5)

$$S^{\beta(g^{\delta x - 1})} U^{\delta x} = U^{\delta}$$

$$S^{\beta(g^{\delta x - 1})} = U^{\delta - \delta x}.$$

Ma S essendo ciclica a periodo p ed U ciclica a periodo $p-1$, ciò richiede che si abbia

$$\delta x \equiv \delta \pmod{p-1} \quad \beta(g^{\delta x} - 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

da cui

$$\beta(g^{\delta} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

e non essendo $\delta \equiv 0 \pmod{p-1}$ sarà

$$\beta \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{c. d. d.}$$

Reciprocamente è chiaro che se T trasforma U^{δ} in $U^{r\delta}$, $U^{\alpha} T$ ha il medesimo effetto, e quindi, per ottenere il numero delle sostituzioni permutabili col gruppo Λ e non legate fra loro da relazione della forma (13), occorrerà dividere per $p-1$ il numero totale delle sostituzioni permutabili con Λ , che trasformano cioè U^{δ} in potenze di U^{δ} . Ora nella formola

$$T^{-1} U^{\delta} T = U^{r\delta}$$

r può assumere $\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)$ valori diversi e per ogni valore speciale di r tutte le sostituzioni T si ottengono da una fissa moltiplicandola per le sostituzioni permutabili con U^{δ} (*), il numero di queste ultime, essendo U^{δ} sostituzione regolare con δ cicli di $\frac{p-1}{\delta}$ lettere, è dato da

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \delta \cdot \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta} = \pi(\delta) \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta}$$

(*) Cfr. SERRET, l. c., § 421.

e il numero richiesto sarà quindi

$$\frac{1}{p-1} \pi(\delta) \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^\delta \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right) = \pi(\delta-1) \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right),$$

dove per $\delta=1$ si dovrà prendere $\pi(0)=1$.

Sottraendo da questo numero l'unità per non contare fra le T la sostituzione identica, avremo il risultato:

Vi sono

$$f(\delta) = \pi(\delta-1) \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right) - 1 \quad (15)$$

sostituzioni diverse dall'identità permutabili col gruppo (12) e non legate fra loro da relazioni della forma (13).

5. Ciascuna delle $f(\delta)$ sostituzioni T sopra trovate è permutabile col gruppo (12); il gruppo corrispondente ad una di esse T (n.º 2) o coincide col gruppo (12) o lo contiene come sottogruppo. In questo ultimo caso se Λ_1 è il gruppo corrispondente, siccome Λ_1 contiene Λ , conterà di potenze di U (n.º 3) e sarà perciò

$$\Lambda_1 = \left(1, U^{\delta_1}, U^{2\delta_1}, \dots, U^{\left(\frac{p-1}{\delta_1}-1\right)\delta_1}\right)$$

dove δ_1 è un divisore di δ . Ora, se

$$T^{-1} U^{\delta_1} T = U^{r\delta_1} S^\beta$$

dove r è primo con $\frac{p-1}{\delta_1}$, elevando a $\frac{\delta}{\delta_1}$ si avrà

$$T^{-1} U^\delta T = U^{r\delta} S^{\beta \frac{1-g^{-r\delta}}{1-g^{-r\delta_1}}}$$

e siccome non è $r\delta \equiv 0 \pmod{p-1}$ perchè r è primo con $\frac{p-1}{\delta_1} = \frac{p-1}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\delta_1}$ e quindi con $\frac{p-1}{\delta}$, sarà $\beta \equiv 0 \pmod{p}$. Ne segue che T è permutabile con Λ_1 .

Quando una sostituzione T è permutabile col gruppo Λ e il suo sottogruppo corrispondente Λ_1 coincide con Λ diremo che essa appartiene all'esponente δ . Ne risulta, per quanto si è visto sopra, che ciascuna sostituzione T fra le $f(\delta)$ trovate o appartiene a δ , o a un divisore δ_1 di δ . Se adunque con $\psi(\delta_1)$ si indica il numero delle sostituzioni non legate fra loro da relazioni della forma (13) e appartenenti all'esponente δ_1 , è chiaro che

$$\Sigma \psi(\delta_1),$$

dove δ percorre tutti i divisori di δ , sarà almeno eguale a $f(\delta)$. D'altra parte, se due sostituzioni T_1, T_2 sono fra le $\psi(\delta_i)$ appartenenti a un medesimo divisore δ_1 di δ , esse non sono legate fra loro da una relazione (13) e perciò sono sostituzioni diverse fra le $f(\delta)$ sopra trovate. Lo stesso accade se appartengono a due divisori diversi δ_1, δ_2 di δ ; poichè se fossero legate fra loro dalla (13) sarebbe $\beta = 0$ per quanto si è visto al principio del n.º 4. Ne seguirebbe

$$T_2 = U^\alpha T_1$$

e supposto per es. $\delta_1 < \delta_2$ e

$$T_1^{-1} U^{\delta_1} T_1 = U^{r\delta_1}$$

ne seguirebbe altresì

$$T_2^{-1} U^{\delta_1} T_2 = T_1^{-1} U^\alpha \cdot U^{\delta_1} \cdot U^\alpha T_1 = U^{r\delta_1},$$

cioè T_2 sarebbe permutabile col sottogruppo relativo a T_1 e quindi $\delta_2 \overline{<} \delta_1$ contro l'ipotesi.

Da tutto ciò risulta evidente che la funzione numerica $\psi(\delta)$ sopra definita soddisfa la condizione

$$\sum \psi(\delta_i) = f(\delta) = \pi(\delta - 1) \left(\frac{\delta - 1}{\delta} \right)^{\delta-1} \varphi \left(\frac{\delta - 1}{\delta} \right) - 1, \quad (16)$$

dove il segno sommatorio si estende a tutti i divisori di δ (1 e δ inclusi).

Sappiamo dalla teoria dei numeri che una funzione $\psi(\delta)$, definita da una condizione come la (16), resta perfettamente determinata dalla funzione del secondo membro (*) e se supponiamo che decomposto δ in fattori primi sia

$$\delta = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

avremo la formola seguente

$$\psi(\delta) = f(\delta) - \sum f\left(\frac{\delta}{p_i}\right) + \sum f\left(\frac{\delta}{p_i p_k}\right) - \sum f\left(\frac{\delta}{p_i p_k p_l}\right) + \dots \quad (17)$$

dove i segni sommatorii si estendono alle combinazioni diverse dei fattori primi diseguali di δ . Abbiamo dunque il risultato:

Vi sono $\psi(\delta)$ sostituzioni T diverse dall'identità, non legate fra loro da relazioni (13), e appartenenti all'esponente δ , la funzione numerica $\psi(\delta)$ essendo definita dalla (17) o dalla (16).

(*) V. DIRICHLET: *Zahlentheorie*, Suppl. VII, oppure BACHMANN: *Kreistheilung*, 2º Vorlesung.

6. Siamo ora in grado di risolvere completamente il problema proposto al n.º 4. È evidente intanto che ogni sostituzione T fra le $\psi(\delta)$ appartenenti all'esponente δ darà luogo ad un fattore irriducibile di grado $p\delta$ della risolvente di LAGRANGE, e viceversa per rappresentante di ogni fattore irriducibile di grado $p\delta$ si potrà prendere una fra le $\psi(\delta)$ sostituzioni sopra trovate. Però due di queste sostituzioni T, T_1 daranno ancora luogo al medesimo fattore irriducibile quando siano equivalenti (n.º 3) e quindi dovremo ora ricercare se una tale equivalenza può aver luogo. Supponiamo adunque

$$T_1 = U^{\alpha_1} S^{\beta_1} T U^{\alpha} S^{\beta} \quad (18)$$

e che T, T_1 appartengano ambedue all'esponente δ ; si avrà quindi

$$\left. \begin{aligned} T^{-1} U^{\delta} T_1 &= U^{r\delta} \\ T_1^{-1} U^{\delta} T &= U^{s\delta} \end{aligned} \right\} r, s \text{ primi con } \frac{p-1}{\delta}.$$

Da quest'ultima e dalla (18) segue

$$S^{-\beta} U^{-\alpha} T^{-1} S^{-\beta_1} U^{-\alpha_1} \cdot U^{\delta} \cdot U^{\alpha_1} S^{\beta_1} T U^{\alpha} S^{\beta} = U^{s\delta},$$

cioè:

$$S^{-\beta} U^{-\alpha} T^{-1} (S^{-\beta_1} U^{\delta} S^{\beta_1}) T U^{\alpha} S^{\beta} = U^{s\delta}$$

ovvero

$$T^{-1} (S^{-\beta_1} U^{\delta} S^{\beta_1}) T = U^{\alpha} S^{\beta} U^{s\delta} S^{-\beta} U^{-\alpha}.$$

Ne segue che le due sostituzioni

$$S^{-\beta_1} U^{\delta} S^{\beta_1}, \quad U^{\alpha} S^{\beta} U^{s\delta} S^{-\beta} U^{-\alpha}$$

appartengono al sottogruppo corrispondente a T cioè sono potenze di U^{δ} . Facendo quindi uso della (4) si troverà

$$\beta_1 \equiv 0, \quad \beta \equiv 0 \pmod{p}$$

e quindi la (18) deve ridursi a

$$T_1 = U^{\alpha_1} T U^{\alpha}. \quad (19)$$

E siccome si vede subito reciprocamente che se T_1, T sono legate fra loro dalla (19) appartengono al medesimo esponente δ , ne concludiamo:

Perchè due sostituzioni T, T_1 appartenenti al medesimo esponente δ siano equivalenti è necessario e sufficiente che abbia luogo la (19).

Ma per vedere se fra le $\psi(\delta)$ sostituzioni del n.º 5 appartenenti all'esponente δ ve ne sono di equivalenti è inutile considerare nella (19) i valori di α_1 diversi da zero, poichè $T U^{\alpha}$ e $U^{\alpha_1} \cdot T U^{\alpha}$ sono legate fra loro da una relazione

della forma (13); basterà adunque per ognuna delle $\psi(\delta)$ sostituzioni T considerare le $p-1$ sostituzioni

$$T, TU, TU^2, \dots, TU^{p-2} \quad (20)$$

e se fra queste ve ne sono r soltanto non legate fra loro da relazioni (13) e se r non dipenderà dalla sostituzione presa T ma solo da δ , è chiaro che il numero totale dei fattori irriducibili di grado $p\delta$ sarà dato da $\frac{\psi(\delta)}{r}$.

Ora da

$$T^{-1}U^\delta T = U^{s\delta},$$

risolta la congruenza

$$sx \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{\delta}},$$

segue

$$T^{-1}U^{\delta x} T = U^\delta$$

cioè

$$U^{\delta x} T = T U^\delta$$

quindi

$$TU^\delta = U^{\delta x} T, \quad TU^{\delta+1} = U^{\delta x} \cdot TU, \quad TU^{\delta+2} = U^{\delta x} \cdot TU^2 \dots$$

Nella serie (20) i termini che seguono $TU^{\delta-1}$ sono dunque legati ai precedenti da relazioni della forma (13); le sostituzioni (20) non legate fra loro da tali relazioni non possono quindi essere altro che

$$T, TU, TU^2, \dots, TU^{\delta-1}.$$

Ma fra due di queste sostituzioni non può effettivamente aver luogo una relazione (13); infatti supposto

$$TU^\lambda = U^\rho \cdot TU^\mu$$

con $\lambda, \mu < \delta$ e λ diverso da μ , ne segue

$$T^{-1}U^\rho T = U^{\lambda-\mu}$$

e perciò $U^\rho, U^{\lambda-\mu}$ appartengono al sottogruppo corrispondente a T , cioè $\rho, \lambda-\mu$ sono multipli di δ il che è impossibile.

Il numero che sopra abbiamo indicato con r è adunque eguale a δ e indipendente da T ; abbiamo quindi il teorema:

La risolvente di LAGRANGE per le equazioni di grado primo p a gruppo metaciclico (risolvibili per radicali) ha $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ fattori irriducibili diversi di grado $p\delta$, dove $\psi(\delta)$ è la funzione numerica definita dalla (17).

Da questo teorema si intende escluso il caso di $\delta = p - 1$. Il numero dei fattori irriduttibili di grado $p(p-1)$ è dato da

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-2) - 1 - p \Sigma \psi(\delta)}{p(p-1)},$$

dove il segno sommatorio si riferisce a tutti i divisori di $p-1$ ($p-1$ escluso). Ora

$$\Sigma \psi(\delta) = f(p-1) - \psi(p-1)$$

quindi: *Il numero dei fattori irriduttibili di grado $p(p-1)$ è dato da*

$$\frac{p\psi(p-1) - (p-1)f(p-1)}{p(p-1)} = \frac{\psi(p-1)}{p-1} - \frac{f(p-1)}{p}.$$

In particolare avendosi

$$\psi(1) = \varphi(p-1) - 1$$

$$\psi(2) = f(2) - f(1) = \frac{p-1}{2} \varphi\left(\frac{p-1}{2}\right) - \varphi(p-1)$$

vi saranno $\varphi(p-1) - 1$ fattori irriduttibili di grado p e

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{p-1}{2} \varphi\left(\frac{p-1}{2}\right) - \varphi(p-1) \right\}$$

fattori di grado $2p$.

Si osservi di più in generale che, se δ è un divisore primo di p sarà

$$\psi(\delta) = f(\delta) - f(1) = \pi(\delta-1) \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right) - \varphi(p-1)$$

e si avranno quindi

$$\frac{1}{\delta} \left\{ \pi(\delta-1) \left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right) - \varphi(p-1) \right\}$$

fattori irriduttibili di grado $p\delta$.

Esempi numerici:

	$p=7$	$p-1=6$			
δ	$\frac{p-1}{\delta}$	$\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)$	$f(\delta)$	$\psi(\delta)$	
1	6	2	1	1	1
2	3	2	5	4	2
3	2	1	7	6	2
6	1	1	119	108	1.

La risolvente di LAGRANGE ha quindi in questo caso 1 fattore di 7^{mo} grado, 2 di 14°, 2 di 21° e 1 di 42°.

$p = 11$	$p - 1 = 10$				
δ	$\frac{p-1}{\delta}$	$\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)$	$f(\delta)$	$\psi(\delta)$	
1	10	4	3	3	3
2	5	4	19	16	8
5	2	1	383	380	76
10	1	1	362879	362480	3259.

La risolvente di LAGRANGE ha in questo caso 3 fattori di 11^{mo} grado, 8 di 22°, 76 di 55°, 3259 di 110°.

7. Una questione analoga a quella risolta nei numeri precedenti per il gruppo metaciclico sopra un numero primo p di lettere si presenta naturalmente per ogni altro gruppo e la difficoltà della sua risoluzione dipende dalla maggiore o minore complicazione del gruppo.

Qui mi sembra utile osservare che lo stesso metodo tenuto sopra per il gruppo metaciclico si applica a un gruppo ciclico sopra un numero qualunque n di lettere, cosicchè essendo δ un divisore qualunque di n e la funzione numerica $\psi(\delta)$ essendo definita dall'equazione

$$\sum \psi(\delta_i) = \pi(\delta - 1) \left(\frac{n}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{n}{\delta}\right) - 1, \quad (21)$$

dove il segno sommatorio si estende a tutti i divisori δ_i di δ (1 e δ inclusi), si ha il teorema:

La risolvente ciclica di un'equazione Abeliana di grado n , le cui radici formano un unico periodo, ha $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ fattori irriducibili di grado δ , δ essendo un divisore qualunque di n .

Resta così dimostrato *a priori* che la funzione numerica ψ sopra definita soddisfa alla relazione

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}$$

qualunque sia n .

È notevole poi che in questo caso il teorema non è nemmeno in difetto per $\delta = n$, poichè il numero dei fattori irriducibili di grado δ è dato da

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) + 1 - \sum' \psi(\delta)}{n},$$

dove in \sum' δ percorre i divisori di n (n escluso).

Ora

$$\Sigma' \psi(\delta) = f(n) - \psi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) - 1 - \psi(n),$$

dunque il numero dei fattori irriducibili di grado n è $\frac{\psi(n)}{n}$.

Il numero dei fattori lineari è dato da $\psi(1) = \varphi(n) - 1$, ai quali aggiungendo quello che corrisponde alla sostituzione identica, si ottiene il numero completo $\varphi(n)$ delle radici razionalmente note. Effettivamente l'ordinaria risolvente ciclica della corrispondente equazione Abeliana, oltre la radice

$$y_1 = \{x_1 + \varepsilon \theta(x_1) + \varepsilon^2 \theta^2(x_1) + \cdots + \varepsilon^{n-1} \theta^{n-1}(x_1)\}^n$$

razionalmente nota ha anche razionalmente note quelle che si ottengono cambiando $\theta(x_1)$ in $\theta^r(x_1)$, dove r è primo col periodo n o, ciò che torna lo stesso, ε nelle rimanenti $\varphi(n) - 1$ radici primitive n^e dell'unità.

La seguente tabella numerica può servire di verifica per le enunciate proprietà della funzione $\psi(\delta)$ pei valori più semplici di n .

$n=4, \pi(n-1)=6$				$n=6, \pi(n-1)=120$				$n=8, \pi(n-1)=5040$				$n=9, \pi(n-1)=40320$			$n=10, \pi(n-1)=362880$			
δ	1	2	4	1	2	3	6	1	2	4	8	1	3	9	1	2	5	10
$\frac{n}{\delta}$	4	2	1	6	3	2	1	8	4	2	1	9	3	1	10	5	2	1
$\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)$	2	1	1	2	2	1	1	4	2	1	1	6	2	1	4	4	1	1
$f(\delta)$	1	1	5	1	5	7	119	3	7	47	5039	5	35	40319	3	19	383	362879
$\psi(\delta)$	1	0	4	1	4	6	108	3	4	40	4992	5	30	40284	3	16	380	362480
$\frac{\psi(\delta)}{\delta}$	1	0	1	1	2	2	18	3	2	10	624	5	10	4476	3	8	76	36248

Facciamo ancora qualche osservazione sul caso generale, in cui il gruppo dato sia un gruppo qualunque

$$G_r = (S_1, S_2, \dots, S_r)$$

di r sostituzioni

$$S_1 = 1, \quad S_2, \quad S_3, \dots, \quad S_r$$

sopra n lettere

$$x_1 x_2 \dots x_n.$$

Se si prende una funzione razionale y_1 delle n x a gruppo G_r , che ammetta quindi $\frac{\pi(n)}{r} = q$ valori distinti

$$y_1 y_2 \dots y_q,$$

per quanto si disse al n.º 2, la ricerca del numero e del grado dei sistemi di transitività, in cui si scindono le q y rispetto al gruppo G_r , equivale perfettamente a quella del numero e del grado dei fattori irriducibili della risolvante corrispondente per un'equazione $f(x) = 0$ di grado n a gruppo G_r .

Praticamente si può sempre risolvere tale questione scrivendo le sostituzioni nel modo seguente. Distribuite le $\pi(n) = r q$ sostituzioni nel quadro

$$\begin{array}{cccc} 1 & S_2 & S_3 \dots & S_r \\ T_2 & T_2 S_2 & T_2 S_3 \dots & T_2 S_r \\ T_3 & T_3 S_2 & T_3 S_3 \dots & T_3 S_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_q & T_q S_2 & T_q S_3 \dots & T_q S_r, \end{array}$$

di modo che due sostituzioni di una medesima orizzontale diano luogo ad uno stesso valore di y_1 , potremo prendere per es. le q sostituzioni

$$1, T_2, T_3, \dots T_q$$

per rappresentanti dei q valori y . Fra le T daranno poi luogo a valori y di un medesimo sistema quelle, e quelle soltanto, che sono legate da una relazione della forma (n.º 3)

$$T_\alpha = S_i T_\beta S_k.$$

Se adunque si considera il quadro completo

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & S_2 & S_3 \dots & S_r & & & & \\ T_2 & T_2 S_2 & T_2 S_3 \dots & T_2 S_r & S_2 T_2 & S_3 T_2 \dots & S_r T_2 & \\ T_3 & T_3 S_2 & T_3 S_3 \dots & T_3 S_r & S_2 T_3 & S_3 T_3 \dots & S_r T_3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ T_q & T_q S_2 & T_q S_3 \dots & T_q S_r & S_2 T_q & S_3 T_q \dots & S_r T_q & \\ \\ S_2 T_2 S_2 & S_3 T_2 S_2 \dots & S_r T_2 S_2 & & \dots & S_2 T_2 S_r & S_3 T_2 S_r \dots & S_r T_2 S_r \\ S_2 T_3 S_2 & S_3 T_3 S_2 \dots & S_r T_3 S_2 & & \dots & S_2 T_3 S_r & S_3 T_3 S_r \dots & S_r T_3 S_r \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2 T_q S_2 & S_3 T_q S_2 \dots & S_r T_q S_2 & & \dots & S_2 T_q S_r & S_3 T_q S_r \dots & S_r T_q S_r \end{array}$$

apparterranno ad un medesimo sistema quelle T che si ritroveranno in una stessa orizzontale.

Così per es. se il gruppo G_r è il gruppo ciclico

$$1, (1234), (13)(24), (1432)$$

su quattro elementi, formando il quadro corrispondente

1, (1234), (13)(24), (1432)	(134), (1423), (243)	(1243), (132), (14)	(142), (34), (123)	(23), (124), (1342)
(12), (234), (1324), (143)	(13), (12)(34), (24), (14)(23)	(14), (123), (1342), (243)	(23), (134), (1243), (142)	(34), (124), (1423), (132)

risulta evidente che le sostituzioni (12), (14), (23), (34) si aggruppano in un solo sistema, mentre le altre due 1, (13) danno luogo ad un sistema ciascuna, talchè la risolvente corrispondente del 6° grado si spezza in due fattori lineari e in uno del 4° conformemente alla tabella numerica superiore.

8. Abbiamo visto al numero precedente che la funzione numerica $\psi(\delta)$ definita dalla (21) soddisfa la condizione

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}$$

e non sarà inutile confermare direttamente questa proprietà.

Cominciamo dal caso in cui δ sia un numero primo; allora si ha

$$\psi(\delta) = f(\delta) - f(1) = \pi(\delta - 1) \left(\frac{n}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{n}{\delta}\right) - \varphi(n).$$

Pel teorema di WILSON

$$\pi(\delta - 1) \equiv -1 \pmod{\delta},$$

quindi

$$\psi(\delta) \equiv -\left(\frac{n}{\delta}\right)^{\delta-1} \varphi\left(\frac{n}{\delta}\right) - \varphi(n) \pmod{\delta};$$

ora se $\frac{n}{\delta}$ è ancora divisibile per δ , ambedue i termini del 2° membro sono divisibili per δ e perciò $\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}$. Se poi $\frac{n}{\delta}$ è primo con δ si ha

$$\left(\frac{n}{\delta}\right)^{\delta-1} \equiv 1 \pmod{\delta}, \quad \varphi(n) = \varphi(\delta) \varphi\left(\frac{n}{\delta}\right) = (\delta - 1) \varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)$$

e quindi ancora

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Supponiamo ora che δ sia la potenza p^α di un numero primo con $\alpha > 1$; si avrà:

$$\psi(\delta) = \pi(p^\alpha - 1) \left(\frac{n}{p^\alpha}\right)^{p^{\alpha-1}} \varphi\left(\frac{n}{p^\alpha}\right) - \pi(p^{\alpha-1} - 1) \left(\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right)^{p^{\alpha-1-1}} \varphi\left(\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right). \quad (22)$$

Ora $\left(\frac{n}{p^{\alpha-1}}\right)^{p^{\alpha-1-1}}$ contiene il fattore $p^{p^{\alpha-1-1}}$, che è $\cong p^\alpha$ appena

$$p^{\alpha-1} \cong \alpha + 1,$$

quando cioè non si abbia contemporaneamente $p=2$, $\alpha=2$, caso che considereremo a parte; escluso questo caso l'ultimo termine della (22) è adunque sempre divisibile per $p^\alpha = \delta$. L'esponente λ della più alta potenza di p che divide il fattore

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p^\alpha - 1)$$

del 1.º termine è dato dalla formola (*)

$$\lambda = \left[\frac{p^\alpha - 1}{p} \right] + \left[\frac{p^\alpha - 1}{p^2} \right] + \cdots + \left[\frac{p^\alpha - 1}{p^{\alpha-1}} \right],$$

dove in generale col simbolo $\left[\frac{m}{n} \right]$ si indica il massimo numero intero contenuto in $\frac{m}{n}$. Dunque

$$\lambda = (p^{\alpha-1} - 1) + (p^{\alpha-2} - 1) + \cdots + (p - 1) \quad (23)$$

e perciò se $\alpha > 2$ si ha evidentemente

$$\lambda > \alpha$$

poichè λ consta di $\alpha - 1$ termini positivi, dei quali l'ultimo soltanto può essere eguale ad uno; se $\alpha = 2$, allora

$$\lambda = p - 1 \cong \alpha \cong 2$$

appena $p > 2$. Dunque, rimanendo sempre escluso il caso $p=2$, $\alpha=2$, anche il 1.º termine della (22) è divisibile per $p^\alpha = \delta$, cioè $\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}$.

Nel caso escluso $p=2$, $\alpha=2$ o si ha $n > 2^2$ e allora si vede subito che ambedue i termini del 2º membro della (22) sono divisibili per 4, oppure $n=4$ e allora

$$\psi(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 = 4,$$

sicchè in ogni caso

$$\psi(4) \equiv 0 \pmod{4}.$$

(*) DIRICHLET: *Zahlentheorie*, § 15.

Veniamo ora al caso generale e supponiamo δ decomposto in fattori primi

$$\delta = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

dove si supporrà il numero dei fattori primi diversi $r \geq 2$, il caso $r = 1$ essendo già stato considerato.

Posto per brevità $\frac{n}{\delta} = m$ avremo dalla (21)

$$\begin{aligned} \psi(\delta) = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\delta - 1) m^{\delta-1} \varphi(m) - \sum_i 1 \cdot 2 \dots \left(\frac{\delta}{p_i} - 1 \right) (m p_i)^{\frac{\delta}{p_i} - 1} \varphi(m p_i) + \\ & + \sum_{i_1 i_2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left(\frac{\delta}{p_{i_1} p_{i_2}} - 1 \right) (m p_{i_1} p_{i_2})^{\frac{\delta}{p_{i_1} p_{i_2}} - 1} \varphi(m p_{i_1} p_{i_2}) - \dots \end{aligned}$$

dove nel termine generale sommatorio

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_s} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \left(\frac{\delta}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}} - 1 \right) (m p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s})^{\frac{\delta}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}} - 1} \varphi(m p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}) \quad (24)$$

i_1, i_2, \dots, i_s percorrono le combinazioni diverse s ad s dei numeri $1, 2, 3, \dots, r$. Cominciamo dal dimostrare che esclusi i casi

1.° $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1$ con p_1 qualunque

2.° $p_1 = 2, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1$

ogni termine nella somma (24) è divisibile per $p_1^{\alpha_1}$.

Se consideriamo dapprima un termine di (24) che non contenga p_1 al denominatore, è chiaro che sarà

$$\frac{\delta}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}} > p_1^{\alpha_1} + 1$$

quando non sia contemporaneamente

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1,$$

quindi in $\pi \left(\frac{\delta}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_s}} - 1 \right)$ entrerà $p_1^{\alpha_1}$; se poi $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 1$, la disegualianza precedente non avrà luogo soltanto nel termine della penultima somma, pel quale si avrà

$$\frac{\delta}{p_2 p_3 \dots p_r} = p_1^{\alpha_1}$$

e $\pi(p_1^{\alpha_1} - 1)$ conterrà una potenza di p_1 , il cui esponente sarà dato dalla (23) e sarà quindi $\geq \alpha_1$ quando non sia $p_1 = 2, \alpha_1 = 2$ come si è visto sopra.

Per un termine invece che contenga p_1 al denominatore avremo

$$\frac{\delta}{p_1 p_{i_2} \dots} = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots,$$

quindi se non sarà contemporaneamente

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1, \quad (25)$$

avremo

$$\frac{\delta}{p_1 p_{i_2} \dots} - 1 > p_1^{\alpha_1 - 1},$$

e il termine corrispondente contenendo

$$(m p_1 p_{i_2} \dots)^{\frac{\delta}{p_1 p_{i_2} \dots} - 1}$$

conterrà una potenza di p_1 il cui esponente sarà

$$\lambda \cong p_1^{\alpha_1 - 1} \cong \alpha_1$$

appena $\alpha_1 > 1$. Se poi $\alpha_1 = 1$ non avranno luogo contemporaneamente le (25) e il termine in questione conterrà

$$p_1^{p_2^{\alpha_2 - 1} p_3^{\alpha_3 - 1} \dots - 1} \cong p_1 \cong p_1^{\alpha_1}.$$

Infine se avessero luogo le (25) con $\alpha_1 > 1$, avremmo sempre

$$\frac{\delta}{p_1 p_{i_2} \dots} \cong p_1^{\alpha_1 - 1}$$

e si presenterà un fattore

$$p_1^{p_2^{\alpha_2 - 1} - 1} \cong p_1^{\alpha_1}$$

appena che $p_1^{\alpha_1 - 1} \cong \alpha_1 + 1$, il che ha sempre luogo per $p_1 > 2$ o per $p_1 = 2$ con $\alpha_1 > 2$.

Restano dunque da studiarli i casi

$$1.^\circ \quad p_1 = 2, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1$$

$$2.^\circ \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1.$$

Cominciando dal 1.º caso osserveremo che, per quanto si è visto sopra, i termini non divisibili per $p_1^{\alpha_1} = 4$ possono essere soltanto il termine corrispondente a

$$\frac{\delta}{p_2 p_3 \dots p_r} = 4$$

della penultima somma e l'ultimo termine corrispondente a

$$\frac{\delta}{2 p_2 p_3 \dots p_r} = 2;$$

ma il primo, essendo dato da

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m p_2 p_3 \dots p_r) \varphi(m p_2 p_3 \dots p_r),$$

è divisibile per 4 perchè l'argomento di φ contiene almeno un fattore primo dispari, e il secondo termine

$$2 m p_2 \dots p_r \varphi(2 m p_2 \dots p_r)$$

è pure divisibile per 4 per la stessa ragione. Nel 2.º caso

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 1$$

si ha, per quanto precede

$$\begin{aligned} \varphi(\delta) &\equiv \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p_1 - 1) (m p_2 \dots p_r)^{p_1 - 1} \varphi(m p_2 \dots p_r) \\ &\mp \varphi(m p_1 p_2 \dots p_r) \pmod{p_1}, \end{aligned}$$

cioè pel teorema di WILSON

$$\pm \varphi(\delta) \equiv (m p_2 \dots p_r)^{p_1 - 1} \varphi(m p_2 \dots p_r) + \varphi(m p_1 \dots p_r) \pmod{p_1}.$$

Se m è divisibile per p_1 , il 1.º e 2.º termine sono divisibili per p_1 quindi $\varphi(\delta) \equiv 0 \pmod{p_1}$; se m è primo con p_1 si ha pel teorema di FERMAT

$$\begin{aligned} \pm \varphi(\delta) &\equiv \varphi(m p_2 \dots p_r) + \varphi(m p_1 p_2 \dots p_r) \\ &\equiv \varphi(m p_2 \dots p_r) + \varphi(p_1) \varphi(m p_2 \dots p_r) \equiv 0 \pmod{p_1}. \end{aligned}$$

In ogni caso adunque risulta

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1}}$$

e quindi

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

9. a) I risultati ottenuti nei numeri precedenti valgono nel caso che il gruppo dell'equazione proposta sia il gruppo totale metaciclico; se invece non ne è che un sottogruppo, essi vengono modificati nel modo che ora andiamo ad esaminare.

Supponiamo che il gruppo della proposta consti delle $\frac{p(p-1)}{\varepsilon}$ sostituzioni (*)

$$S^\beta U^{\alpha\varepsilon} \begin{cases} \beta = 0, 1, 2, \dots, p-1 \\ \alpha = 0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{\varepsilon} - 1, \end{cases} \quad (1')$$

(*) Siccome supponiamo che la proposta resti sempre irriduttibile, il suo gruppo deve avere appunto la forma qui assunta.

dove ε indica un divisore di $p-1$, e prendendo a considerare un fattore di grado p^δ originariamente irriducibile della risolvente di LAGRANGE, cerchiamo se esso continua ad esser tale anche col gruppo attuale, o se ha luogo una decomposizione in fattori irriducibili di grado minore.

Per ciò rammentiamo che ogni fattore irriducibile di grado p^δ ha avuto origine (n.º 4) da una sostituzione T appartenente all'esponente δ , permutabile cioè col sottogruppo

$$\Lambda = \left(1, U^\delta, U^{2\delta}, \dots, U^{\left(\frac{p-1}{\delta}-1\right)\delta} \right)$$

ma non con un sottogruppo più ampio, talchè δ era il minimo esponente pel quale si aveva l'uguaglianza

$$U^\delta T \cdot y_1 = T \cdot y_1.$$

Il fattore irriducibile corrispondente $F_\delta(y)$ potrà rappresentarsi simbolicamente colla formola

$$F_\delta(y) = \prod_{\beta, r} (y - S^\beta U^r T \cdot y_1) \begin{cases} \beta \pmod{p} \\ r \pmod{\delta} \end{cases} \quad (2')$$

dove β percorre un sistema completo di resti \pmod{p} ed r un sistema analogo $\pmod{\delta}$.

Attualmente, il gruppo dell'equazione proposta essendo ridotto alle sostituzioni (1'), si aggrupperanno in un fattore irriducibile quei fattori lineari di (2') che si otterranno l'uno dall'altro con sostituzioni (1'). Un tale fattore potrà dunque rappresentarsi simbolicamente con

$$\Pi(y - S^\beta U^{\alpha\varepsilon} T \cdot y_1) \begin{cases} \beta \pmod{p} \\ \alpha\varepsilon \pmod{\delta} \end{cases} \quad (3')$$

Indicando con σ il massimo comun divisore di ε, δ , i valori di α in (3') dovranno essere incongruenti $\pmod{\frac{\delta}{\sigma}}$; ma α assume in (1') i valori $0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{\varepsilon} - 1$ e poichè $\frac{\delta}{\sigma}$ divide $\frac{p-1}{\sigma} = \frac{p-1}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma}$ ed è primo con $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ dividerà $\frac{p-1}{\varepsilon}$, quindi i valori che α assume in ogni fattore irriducibile come (3') saranno appunto $\frac{\delta}{\sigma}$ e potremo enunciare il teorema:

Ogni fattore irriducibile di grado p^δ si scinde, per la riduzione del gruppo, in σ fattori di grado $\frac{p^\delta}{\sigma}$, dove σ è il massimo comun divisore di ε, δ . In par-

tiolare se δ è primo con ε , i fattori primitivi di grado $p\delta$ rimarranno irriduttibili.

Ponendo $\frac{\delta}{\sigma} = e$, dai $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ fattori di grado $p\delta$ scaturiranno $\frac{1}{e}\psi(\sigma e)$ fattori di grado pe , sicchè avremo il teorema:

Se il gruppo attuale dell'equazione proposta consta di $\frac{p(p-1)}{\varepsilon}$ sostituzioni del gruppo metaciclico, e se con e si indica un divisore qualunque di $\frac{p-1}{\varepsilon}$ ($\frac{p-1}{\varepsilon}$ escluso), la risolvente di LAGRANGE avrà un numero di fattori irriduttibili di grado pe eguale a

$$\frac{1}{e} \sum_{\sigma: \varepsilon} \psi(\sigma \cdot e)$$

dove sotto il segno sommatorio σ percorre tutti quei divisori di ε che rendono $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ primo con e .

Nel caso escluso $e = \frac{p-1}{\varepsilon}$, il numero dei fattori di grado $p(p-1)$ essendo $\frac{\psi(p-1)}{p-1} - \frac{f(p-1)}{p}$ (n.º 6) e ciascuno di questi dando appunto origine a fattori irriduttibili di grado $\frac{p(p-1)}{\varepsilon}$, si vede subito che il numero corrispondente è dato da

$$\frac{\varepsilon}{p-1} \sum_{\sigma: \varepsilon} \psi\left(\sigma \cdot \frac{p-1}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \frac{f(p-1)}{p}.$$

b) Invece di dedurre questi risultati da quelli già ottenuti si potrebbe trattare direttamente il problema e si troverebbe con considerazioni identiche a quelle già svolte nel caso del gruppo totale metaciclico che, ponendo

$$F(e) = f(\varepsilon \cdot e) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\varepsilon e - 1) \left(\frac{p-1}{\varepsilon e}\right)^{\varepsilon e - 1} \varphi\left(\frac{p-1}{\varepsilon \cdot e}\right) - 1, \quad (4')$$

dove e è un divisore qualunque di $\frac{p-1}{\varepsilon}$, e definendo una funzione numerica $\chi(e)$ per mezzo della relazione

$$\sum_{e_1: \varepsilon} \chi(e_1) = F(e). \quad (5')$$

Il numero dei fattori irriduttibili di grado pe della risolvente di LAGRANGE
Annali di Matematica, tomo XI.

sarà dato da $\frac{\chi(e)}{e}$ nel caso di $e < \frac{p-1}{\varepsilon}$, e da

$$\frac{\varepsilon}{p-1} \chi(p-1) - \varepsilon \frac{F\left(\frac{p-1}{\varepsilon}\right)}{p} = \frac{\varepsilon}{p-1} \chi(p-1) - \varepsilon \frac{f(p-1)}{p}$$

nel caso di $e = \frac{p-1}{\varepsilon}$.

Per vedere la coincidenza dei due risultati, basta mostrare che la nuova funzione numerica χ definita dalle (4') (5') si esprime per mezzo della funzione ψ appunto colla formola

$$\chi(e) = \sum_{\sigma: \varepsilon} \psi(\sigma e), \quad (6')$$

o, ciò che è lo stesso, che il 2° membro di questa relazione soddisfa alla equazione caratteristica (5') della funzione χ .

Dovremo adunque verificare la formola

$$\sum_{e_1: \varepsilon} \sum_{\sigma: \varepsilon} \psi(\sigma e_1) = f(\varepsilon \cdot e)$$

ovvero, poichè $f(\varepsilon \cdot e) = \sum_{\tau: \varepsilon e} \psi(\tau)$,

$$\sum_{e_1: \varepsilon} \sum_{\sigma: \varepsilon} \psi(\sigma e_1) = \sum_{\tau: \varepsilon e} \psi(\tau);$$

tale relazione sarà evidentemente dimostrata quando ogni divisore τ di $\varepsilon \cdot e$ possa decomorsi in un modo e in un modo solo nel prodotto $\sigma \cdot e_1$, di due numeri σ , e_1 rispettivamente divisori di ε , e e tali che $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ risulti primo con e_1 . Ora ciò è evidente poichè prendendo per σ il massimo comun divisore di τ e di ε la decomposizione $\tau = \sigma \cdot \frac{\tau}{\sigma}$, $e_1 = \frac{\tau}{\sigma}$ e questa soltanto soddisfa alle condizioni volute.

10. Abbiamo veduto che se il gruppo dell'equazione è il gruppo totale metaciclico, vi sono $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ fattori irriducibili di grado $p\delta$ caratterizzati da altrettante sostituzioni T appartenenti all'esponente δ e non equivalenti. Potremmo ora proporci il problema di:

Trovare la rappresentazione analitica di un sistema completo di $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ sostituzioni appartenenti all'esponente δ e non equivalenti.

La formola del BETTI $\nu' \equiv \nu^\lambda \pmod{p}$, dove λ percorre i $\varphi(p-1) - 1$ numeri

inferiori a $p-1$ e primi con $p-1$ (1 escluso), risolve questo problema nel caso di $\delta=1$.

Ci limiteremo a trattare il caso $\delta=2$ e a stabilire le formole corrispondenti, il che ci condurrà alla conferma del risultato che il numero dei fattori irriducibili di grado $2p$ della risolvente di LAGRANGE è dato da

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{p-1}{2} \varphi \left(\frac{p-1}{2} \right) - \varphi(p-1) \right\},$$

cioè

$$\text{da } \frac{p-3}{4} \varphi(p-1) \text{ se } p \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{e } \frac{p-5}{4} \varphi \left(\frac{p-1}{2} \right) \text{ se } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Le sostituzioni T appartenenti all'esponente δ trasformano U^δ in potenze di U^δ sicchè

$$T U^\delta T^{-1} = U^{\lambda \delta} \quad (\lambda \text{ primo con } \frac{p-1}{\delta});$$

se T è una sostituzione fissa che produce un tale effetto, ogni altra sostituzione T si ottiene mediante la formola

$$T = A T$$

dove A è una sostituzione che trasforma U^δ in sè stessa (*).

Ora facendo uso di note formole (v. SERRET: *Algèbre supérieure*, § 475) si trova facilmente che ogni sostituzione A che trasforma

$$U^2 = (g^0, g^2, g^4, \dots, g^{p-3})(g^1, g^3, g^5, \dots, g^{p-2})$$

in sè medesima, può rappresentarsi analiticamente colla formola:

$$\nu' \equiv \frac{p+1}{2} \left\{ (g^m + g^n) \nu + (g^m - g^n) \nu^{\frac{p+1}{2}} \right\} \pmod{p}, \quad (7)$$

(*) Infatti supposto

$$T U^\delta T^{-1} = U^{\lambda \delta}$$

$$T U^\delta T^{-1} = U^{\lambda \delta}$$

e risolta la congruenza $\lambda x \equiv 1 \pmod{\frac{p-1}{\delta}}$ ne segue

$$T U^{x \delta} T^{-1} = U^\delta, \quad T^{-1} U^\delta T = U^{x \delta}$$

e perciò, posto $A = T T^{-1}$:

$$A U^\delta A^{-1} = T T^{-1} U^\delta T T^{-1} = T U^{x \delta} T^{-1} = U^\delta.$$

dove m, n sono soggetti alla sola condizione

$$m \equiv n \pmod{2}. \quad (7')$$

Distinguendo i valori di ν in residui e non residui quadratici \pmod{p} , la (7) può anche scriversi:

$$\left. \begin{aligned} \nu' &\equiv g^m \cdot \nu && \text{per } \left(\frac{\nu}{p}\right) = +1 \\ &\pmod{p} && \\ \nu' &\equiv g^n \cdot \nu && \text{" } \left(\frac{\nu}{p}\right) = -1. \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

Per ottenere da queste sostituzioni A tutte le sostituzioni T che trasformano U^2 in $U^{2\lambda}$ (λ primo con $\frac{p-1}{2}$), occorre determinare una sostituzione fissa T , che produca un tale effetto e fare quindi uso della formola $T = AT$. Ma se $p \equiv 1 \pmod{4}$, λ essendo primo con $\frac{p-1}{2}$, è pur tale con $p-1$ e la formola

$$\nu' \equiv \nu^\lambda \pmod{p}$$

definisce una sostituzione T dell'effetto voluto.

Lo stesso accade per $p \equiv 3 \pmod{4}$, se λ è dispari; se invece λ è pari, $\lambda + \frac{p-1}{2}$ è dispari e primo con $p-1$ e la formola

$$\nu' \equiv \nu^{\lambda + \frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

definisce una conveniente sostituzione T .

Dopo ciò risulta facilmente il teorema:

Tutte le sostituzioni permutabili col gruppo

$$(1, U^2, U^4, \dots, U^{p-3})$$

sono contenute nella formola

$$\nu' \equiv \frac{p-1}{2} \left\{ (g^m + g^n) \nu^\lambda + (g^m - g^n) \nu^{\lambda + \frac{p-1}{2}} \right\} \pmod{p}, \quad (9')$$

dove m, n sono qualunque purchè $m \equiv n \pmod{2}$ e λ percorre i $\varphi\left(\frac{p-1}{2}\right)$ numeri inferiori a $\frac{p-1}{2}$ e primi con $\frac{p-1}{2}$ se $p \equiv 1 \pmod{4}$ e i $\varphi(p-1)$ numeri inferiori a $p-1$ e primi con $p-1$ se $p \equiv 3 \pmod{4}$.

La (9') può anche scriversi

$$\left. \begin{aligned} v' &\equiv g^m \cdot v^\lambda \\ v' &\equiv g^n \cdot v^\lambda \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{per } \left(\frac{v}{p}\right) = +1 \\ \text{ " } \left(\frac{v}{p}\right) = -1. \end{array} \quad (10')$$

Le sostituzioni T che appartengono all'esponente 2 dovranno quindi cercarsi fra le (9') [o (10')]; ma da queste ultime occorrerà escludere quelle che appartengono all'esponente 1, che trasformano cioè U in potenze U^r (r primo con $p-1$). La formola più generale per tali sostituzioni si trova facilmente data da

$$v' \equiv g^\alpha \cdot v^r \pmod{p}, \quad (11')$$

dove α è qualunque. Per la coincidenza delle (9') (11') richiedesi o $r = \lambda$, o $r = \lambda \frac{p+1}{2}$. La prima ipotesi trae con sè $n \equiv m \pmod{p-1}$, la seconda $n \equiv m + \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}$. Ora se $p \equiv 3 \pmod{4}$, soltanto la prima ipotesi è ammissibile poichè $\frac{p+1}{2}$ non è primo con $p-1$; se invece $p \equiv 1 \pmod{4}$ anche la seconda può aver luogo. Ne concludiamo quindi:

Per ottenere dalla (9') le sole sostituzioni appartenenti all'esponente 2 occorre in ogni caso escludere quelle per le quali $n \equiv m \pmod{p-1}$, di più nel caso $p \equiv 1 \pmod{4}$ quelle, che danno $n \equiv m + \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}$.

11. Volendo ora ottenere un sistema completo di sostituzioni (9') non equivalenti e appartenenti all'esponente 2, bisogna esaminare in quali casi due sostituzioni (9') T, T_1 appartenenti all'esponente 2 potranno essere equivalenti. Per ciò richiedesi (n.º 6) che T, T_1 siano legate da una relazione della forma

$$T_1 = U^\alpha T U^\beta.$$

Ora supposto T data dalla (9') e T_1 dall'altra

$$v' \equiv \frac{p+1}{2} \left\{ (g^{m_1} + g^{n_1}) v^\lambda + (g^{m_1} - g^{n_1}) v^{\lambda \frac{p+1}{2}} \right\} \pmod{p} \quad (12')$$

si trova subito che $U^\alpha T U^\beta$ è data dalla formola:

$$v' \equiv \frac{p+1}{2} g^{\lambda\beta+\alpha} \left\{ (g^m + g^n) v^\lambda + (-1)^\beta (g^m - g^n) v^{\lambda \frac{p+1}{2}} \right\} \pmod{p}.$$

Perchè questa coincida colla (11') si dovrà avere

$$\lambda_1 = \lambda \text{ ovvero } \lambda_1 \equiv \lambda \frac{p+1}{2} \pmod{p-1}$$

ma se $p \equiv 3 \pmod{4}$ $\frac{p+1}{2}$ non è primo con $p-1$ e la 2.^a è impossibile; se $p \equiv 1 \pmod{4}$ ne seguirebbe $\lambda_1 = \lambda + \frac{p-1}{2}$, mentre λ_1 non supera $\frac{p-1}{2}$.

Dunque sarà in ogni caso $\lambda_1 = \lambda$ e perciò

$$\left. \begin{aligned} g^{m_1} + g^{n_1} &\equiv g^{\lambda\beta + \alpha} (g^m + g^n) \\ g^{m_1} - g^{n_1} &\equiv (-1)^\beta g^{\lambda\beta + \alpha} (g^m - g^n) \end{aligned} \right\} \pmod{p},$$

dalle quali segue:

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv m + \lambda\beta + \alpha, & n_1 &\equiv n + \lambda\beta + \alpha \pmod{p-1} \text{ se } \beta \equiv 0 \pmod{2} \\ m_1 &\equiv n + \lambda\beta + \alpha, & n_1 &\equiv m + \lambda\beta + \alpha \pmod{p-1} \text{ " } \beta \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Ora α, β essendo arbitrari, tale è pure $\lambda\beta + \alpha$; se quindi per brevità denotiamo col simbolo $[m, n, \lambda]$ la sostituzione (9') ne concluderemo:

Perchè due sostituzioni $[m, n, \lambda], [m_1, n_1, \lambda_1]$ siano equivalenti è necessario e sufficiente che si abbia $\lambda_1 = \lambda$ e $n_1 - m_1 \equiv \pm(n - m) \pmod{p-1}$.

Ne risulta che, per ottenere un sistema completo di sostituzioni non equivalenti, potremo scegliere ad arbitrio il valore di m , prendere per es. $m = 0$ e fra le sostituzioni restanti $[0, n, \lambda]$ $[0, n_1, \lambda]$ saranno ancora equivalenti quelle, per le quali si avrà $n_1 \equiv -n \pmod{p-1}$. Basterà dunque far percorrere ad n i valori pari non superiori a $\frac{p-1}{2}$ e poichè, nel caso $p \equiv 1 \pmod{4}$, la sostituzione $\left[0, \frac{p-1}{2}, \lambda\right]$ appartiene all'esponente 1, avremo che:

Un sistema completo di sostituzioni non equivalenti appartenenti all'esponente 2 è dato

$$\begin{aligned} \text{da } [0, 2, \lambda], & \quad [0, 4, \lambda], \dots & \left[0, \frac{p-3}{2}, \lambda\right] & \text{ se } p \equiv 3 \pmod{4} \\ \text{e da } [0, 2, \lambda], & \quad [0, 4, \lambda], \dots & \left[0, \frac{p-5}{2}, \lambda\right] & \text{ " } p \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Ma nel 1.^o caso λ percorre $\varphi(p-1)$ valori e ne percorre invece $\varphi\left(\frac{p-1}{2}\right)$ nel 2.^o; resta quindi confermato il risultato che di tali sostituzioni non equivalenti, ossia di fattori irriducibili di grado $2p$ della risolvente di LAGRANGE, ve

ne sono

$$\frac{p-3}{4} \varphi(p-1) \text{ se } p \equiv 3 \pmod{4}$$

e

$$\frac{p-5}{4} \varphi\left(\frac{p-1}{2}\right) \text{ se } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Per rappresentanti poi di tale sistema completo possiamo prendere le seguenti sostituzioni

$$\begin{aligned} v' &\equiv v^\lambda && \text{per } \left(\frac{v}{p}\right) = +1 \\ & && (\text{mod } p) \\ v' &\equiv g^{2m} v^\lambda && \text{" } \left(\frac{v}{p}\right) = -1, \end{aligned}$$

dove λ percorre i valori anzidetti ed m i valori $1, 2, 3, \dots, \frac{p-3}{4}$ ovvero $1, 2, \dots, \frac{p-5}{4}$, secondo che $p \equiv 3$ o $\equiv 1 \pmod{4}$.

Sui gruppi $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione.

(Nota di G. VERONESE, a Padova.)

1. La presente Nota serve a completare le mie ricerche su questi gruppi della Memoria precedente, intitolata: *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres*, ecc. Al capitolo III di essa ho dimostrato che se si scambiano in tutte le maniere possibili i 6 complessi fondamentali $x_1=0$, $x_2=0, \dots, x_6=0$ di KLEIN, un punto dà origine ad un gruppo di 360 punti $(P)_{360}$, cui è legato un gruppo di 360 piani $(\Pi)_{360}$ (*).

Se si fa corrispondere il punto z_1, z_2, z_3, z_4 alla retta $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, che si ottiene unendo questo punto con un altro di coordinate z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 , alla retta $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$ corrisponde il piano $-z_1, z_2, z_3, z_4$.

Secondo il teorema CLXXXVIII della mia Memoria i 360 punti di $(P)_{360}$ sono situati 15 a 15 sui 360 piani di $(\Pi)_{360}$, e reciprocamente questi passano 15 a 15 per i 360 punti.

Per ottenere le rette corrispondenti ai 15 punti P situati sopra uno dei 360 piani Π , per es. sul piano $-z_1, z_2, z_3, z_4$, basta operare sugli indici delle coordinate della retta ad esso corrispondente le 15 sostituzioni della forma (ik) , ove i, k sono due indici differenti della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 (**). Uno di questi punti è il punto $iz_2, iz_1, -z_4, z_3$, essendo $i=\sqrt{-1}$ (***)).

A pag. 227 ho indicato con $S^{(ab)}$, $S'^{(ab)}$ i poli di un piano di sezione Π rispetto ai due complessi $x_a \pm x_b = 0$. Questi punti si possono costruire facilmente,

(*) Come ha osservato anche il KLEIN nel suo scritto: *Ueber eine geom. Repräsentation der Resolventen*. Math. Annalen, Bd. 4, 1871.

(**) A., l. c., Nota (1), pag. 220-221.

(***) Ib., Nota (2), pag. 219.

poichè dividono armonicamente il segmento dei punti a, b fondamentali dell'esagrammo dato dai 6 poli del piano rispetto ai 6 complessi $x_1=0, \dots, x_6=0$, ed inoltre dividono armonicamente il segmento dei punti $T^{(ab)}, T'^{(ab)}$ determinati dall'incontro del lato ab con le direttrici dei due complessi $x_a=0, x_b=0$, ossia con una qualunque delle coniche $\Sigma_{abc}, \Sigma_{abd}, \Sigma_{abe}, \Sigma_{abf}$, che sono le intersezioni del piano Π con le superficie fondamentali corrispondenti di KLEIN.

Se il piano Π coincide col piano $-z_1, z_2, z_3, z_4$, i poli $S^{(12)}, S'^{(12)}$ rispetto ai due complessi $x_1 \pm x_2 = 0$ [dalla nota (2) pag. 221] sono:

$$iz_2, iz_1, z_4, -z_3; \quad iz_2, iz_1, -z_4, z_3.$$

Il secondo di questi punti è il punto P sopra trovato, quindi i 15 punti $S'^{(ab)}$ altro non sono che i punti P , dunque:

I 15 punti P di un piano Π sono i poli di esso rispetto ai 15 complessi $x_a - x_b = 0$.

Se si considerano i tre complessi

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 - x_1 = 0 \quad (1)$$

è chiaro che appartengono ad un fascio, vale a dire che i tre poli del piano Π rispetto ad essi sono situati in linea retta. Siccome poi coi 15 complessi $x_a - x_b = 0$ si possono formare 20 gruppi (1), così abbiamo:

I 15 punti P di un piano Π sono situati tre a tre su 20 rette, che passano quattro a quattro per i 15 punti.

I poli del piano rispetto ai complessi $x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0, x_3 + x_1 = 0$ sono pure situati in linea retta, dunque:

I tre punti P e i tre punti $S^{(ab)}$ situati sui lati di un triangolo, che ha per vertici tre qualunque dei 6 punti fondamentali dell'esagrammo, per es. 123, sono i vertici di un quadrilatero.

I punti P e $S^{(ab)}$ formano in tutto 20 di tali quadrilateri.

Pel punto P polo del piano rispetto a $x_1 - x_2 = 0$ passano dunque le 8 rette che congiungono i poli del piano Π rispetto ai complessi

$$\begin{aligned} x_2 \pm x_3 = 0, & \quad x_3 \pm x_1 = 0 \\ x_2 \pm x_4 = 0, & \quad x_4 \pm x_1 = 0 \\ x_2 \pm x_5 = 0, & \quad x_5 \pm x_1 = 0 \\ x_2 \pm x_6 = 0, & \quad x_6 \pm x_1 = 0. \end{aligned}$$

Pel punto $S^{(12)}$ passano le 8 rette che congiungono i poli del piano rispetto

ai complessi

$$\begin{aligned} x_3 \mp x_1 &= 0, & x_3 \pm x_2 &= 0, \\ x_4 \mp x_1 &= 0, & x_4 \pm x_2 &= 0, \\ x_5 \mp x_1 &= 0, & x_5 \pm x_2 &= 0, \\ x_6 \mp x_1 &= 0, & x_6 \pm x_2 &= 0, \end{aligned}$$

dunque:

I 15 punti P e i 15 punti $S^{(ab)}$ sono situati 3 a 3 in 80 rette le quali passano 8 a 8 per ciascuno di essi.

Questa figura non è analoga a quella dei 30 punti $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ poichè questi giacciono tre a tre in 60 rette, che passano 6 a 6 per ciascuno di essi (*). Essa invece ha una certa analogia con quella che si ottiene proiettando sopra un piano la figura formata dai 30 punti $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ dello spazio a 5 dimensioni, le cui coordinate sono della forma $1, \mp 1, 0, 0, 0$ (**).

2. Operando sulla retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ corrispondente al punto z_1, z_2, z_3, z_4 le sostituzioni del gruppo di una coppia di punti conjugati di STEINER, per es. G_{123} , G_{456} , i 360 punti e i 360 piani si separano in 10 gruppi di 36 punti e 36 piani $(P)_{36}$, $(\Pi)_{36}$. I 36 punti sono situati 6 a 6 sui 36 piani, e questi passano 6 a 6 per ciascuno di essi (***). Così per es. sul piano corrispondente alla retta $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ sono situati i 6 punti corrispondenti alle rette:

$$\begin{aligned} x_2 x_3 x_4 x_1 x_6 x_5, & & x_2 x_1 x_4 x_5 x_6 x_3, & & x_2 x_5 x_4 x_3 x_6 x_1, \\ x_6 x_1 x_4 x_3 x_2 x_5, & & x_4 x_1 x_2 x_3 x_6 x_5, & & x_2 x_1 x_6 x_3 x_4 x_5, \end{aligned}$$

che si ottengono operando sugli indici di $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ le trasposizioni (13), (35), (15); (26), (24), (46), essendo 135 oppure 246 gli indici fissi negli esagoni delle rette di PASCAL dei due punti G_{123} , G_{456} (****).

Applicando invece le sostituzioni di un punto di STEINER, per es. G_{123} o G_{456} (*****) sugli indici della retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ si ottiene un gruppo di 18 punti e di 18 piani contenuto nel gruppo precedente, in modo che questo si separa in due gruppi di 18 punti e di 18 piani, che indico con $(P)_{18}$, $(\Pi)_{18}$; $(P)'_{18}$, $(\Pi)'_{18}$. Ma siccome nel gruppo di un punto di STEINER non c'è alcuna sostituzione della forma (ik) , così è chiaro che nessuno dei 18 punti di $(P)_{18}$

(*) A., l. c., n.º 83.

(**) Ib., n.º 74.

(***) Ib., Nota (2), pag. 223 e Errata-corrige.

(****) Ib., pag. 144-145.

(*****) Ib., pag. 184, XVIII.

è situato sopra alcuno dei 18 piani di $(\Pi)_{18}$. La stessa cosa accade per i due gruppi $(P)_{18}$, $(\Pi)'_{18}$; dunque per ciò che precede i 18 punti di $(P)_{18}$ devono essere situati 6 a 6 sui 18 piani di $(\Pi)'_{18}$, che passano 6 a 6 per quei 18 punti. Analogamente pei punti e piani di $(P)'_{18}$ e $(\Pi)_{18}$. Si osserva inoltre che partendo dalla retta $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ le rette corrispondenti ai punti di $(P)_{18}$ e ai piani di $(\Pi)_{18}$ sono date dalle permutazioni pari e dispari delle rette di PASCAL 123456, 125634, 163254 del punto G_{123} , mentre quelle dei punti e dei piani di $(P)'_{18}$ e $(\Pi)'_{18}$ sono date dalle permutazioni pari e dispari delle rette di PASCAL 125436, 145632, 165234 del punto G_{456} .

Abbiamo visto che nel piano di $(\Pi)_{18}$ corrispondente alla retta $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$ giacciono i punti relativi alle rette:

$$\begin{array}{lll} x_2x_3x_4x_1x_6x_5, & x_2x_1x_4x_5x_6x_3, & x_2x_5x_4x_3x_6x_1, \\ x_6x_1x_4x_3x_2x_5, & x_4x_1x_2x_3x_6x_5, & x_2x_1x_6x_3x_4x_5, \end{array}$$

che appartengono al gruppo $(P)'_{18}$. Per i primi tre punti passano anche i piani corrispondenti alle rette

$$x_2x_3x_4x_5x_6x_1, \quad x_2x_5x_4x_1x_6x_3$$

e per i tre ultimi

$$x_6x_1x_2x_3x_4x_5, \quad x_4x_1x_6x_3x_2x_5$$

i quali appartengono al gruppo $(\Pi)_{18}$, come risulta dalle rette di PASCAL del punto G_{123} . Dunque si ha:

Uno qualunque dei 10 · 10 gruppi di 36 punti P e 36 piani Π, che si ottengono da $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$ con i gruppi di sostituzioni delle 10 coppie di punti conjugati di STEINER, si separa in due gruppi di 18 punti e 18 piani, che non passano per alcuno dei 18 punti. Esso si separa pure in due altri gruppi di 18 punti e 18 piani, i quali passano 6 a 6 per i 18 punti, mentre questi giacciono 6 a 6 sui 18 piani.

I 18 punti di uno qualunque di questi ultimi due gruppi giacciono tre a tre su 12 rette, per le quali passano tre a tre i 18 piani.

3. Interpretiamo ora geometricamente le sostituzioni della forma (12), (12)(34), (12)(34)(56), (123).

a) Operando sulla retta $x_2x_1x_3x_4x_5x_6$ la sostituzione (12) si ottiene la retta $x_2x_1x_3x_4x_5x_6$, che è la conjugata della prima rispetto al complesso $x_1 - x_2 = 0$. Infatti le formole di trasformazione fra due rette conjugate rispetto ad un complesso $\Sigma a_i x_i = 0$ sono

$$\rho x_1 = -x'_1(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_1^2) + 2a_1(a_2x'_2 + a_3x'_3 + a_4x'_4 + a_5x'_5 + a_6x'_6), \text{ ecc. } (*)$$

(*) A., l. c., Nota (1), pag. 215-217.

quindi nel nostro caso basta porre

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0.$$

Da ciò risulta che il punto e il piano corrispondenti alle due rette sono polo e piano polare rispetto al complesso $x_1 - x_2 = 0$.

Le direttrici dei due complessi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ si trasformano una nell'altra, le direttrici invece dei complessi $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, che hanno per coordinate

$$0, 0, 1, \pm i, 0, 0; \quad 0, 0, 0, 0, 1, \pm i$$

corrispondono a sè stesse, ossia appartengono al complesso $x_1 - x_2 = 0$.

b) Per la sostituzione (12)(34) dalla retta $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ si passa alla retta $x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_6$. Se alla prima corrisponde il punto z_1, z_2, z_3, z_4 , alla seconda corrisponde il punto $iz_3, z_4, iz_1, -z_2$ (*); questi due punti sono coniugati rispetto alla superficie

$$\theta_{12} \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 = 0,$$

che riferita al tetraedro θ_{12} dato dalle direttrici dei complessi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, ha per equazione:

$$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

Ma le due rette non sono coniugate rispetto a questa superficie, perchè la coniugata della prima è $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ (**). Quando dunque il primo punto si muove in una retta, il secondo percorre una retta, che non è però la coniugata della prima rispetto a θ_{12} , mentre due piani corrispondenti sono coniugati rispetto alla stessa superficie.

È chiaro che la superficie θ_{12} corrisponde a sè stessa nell'omografia (12)(34). I punti uniti cadono quindi su essa e i piani uniti sono tangenti ad essa in questi punti.

Il tetraedro $\theta_{12} \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$ si trasforma in sè medesimo.

Se indichiamo con $A_1 A_2, A_3 A_4$; $A_1 A_3, A_2 A_4$; $A_1 A_4, A_2 A_3$ le tre coppie di direttrici dei complessi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, che formano il tetraedro θ_{12} , noi vediamo che le rette $A_1 A_4, A_2 A_3$ corrispondono a sè stesse, mentre $A_1 A_2$ e $A_1 A_3$ si trasformano rispettivamente in $A_3 A_4, A_2 A_4$. Dunque i punti d'incontro delle due direttrici dei complessi $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ con la superficie θ_{12} e i piani tangenti condotti ad essa sono i punti e i piani uniti dell'omografia (12)(34).

(*) A., l. c., Nota (2), pag. 219.

(**) Ib., Nota (1), pag. 219.

Si ha pure che la superficie e il tetraedro θ_{12} si trasformano in sè stessi anche nelle omografie (12)(56), (34)(56).

c) Nella reciprocità (12)(34)(56) dalla retta $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ si passa alla retta $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$, che è la conjugata della prima rispetto alla superficie θ_{12} . Il punto corrispondente alla prima è il polo del piano corrispondente alla seconda rispetto a θ_{12} .

d) Le tre rette $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $x_2x_3x_1x_4x_5x_6$, $x_3x_1x_2x_4x_5x_6$, che si corrispondono nell'omografia ciclica (123), sono conjugate della retta $x_2x_1x_3x_4x_5x_6$ rispetto ai complessi

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 - x_1 = 0.$$

I tre punti corrispondenti a quelle tre rette sono situati sopra una retta, e sono i poli del piano relativo alla retta $x_2x_1x_3x_4x_5x_6$ rispetto ai tre complessi. Le direttrici di essi sono:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^2 & r & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ove r è una radice cubica primitiva dell'unità (*). Dunque:

I tre punti corrispondenti nell'omografia ciclica (123) sono situati sopra una retta e formano un gruppo equianarmonico coi due punti d'incontro di essa con le direttrici dei tre complessi $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$, $x_3 - x_1 = 0$.

4. Noi possiamo utilizzare ora queste interpretazioni per dedurre altre proprietà dei punti e piani di $(P)_{360}$ e $(\Pi)_{360}$.

I 24 punti $(P)_{12}$ e i 24 piani $(\Pi)_{12}$, dati dalle 48 sostituzioni del gruppo del triangolo $\Delta \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$ dell'esagrammo o del tetraedro θ_{12} (**), formano 6 tetraedri conjugati rispetto alla superficie θ_{12} (***), ciò che risulta anche dalle interpretazioni (c) e (b) del numero precedente essendovi nel gruppo Δ_{12} le sostituzioni (12)(34)(56) e (12)(34), (12)(56), (34)(56). Ma in questo gruppo oltre queste sostituzioni ci sono anche le sostituzioni (13)(24)(56), (15)(34)(26), (12)(35)(46), (12)(36)(45), (16)(25)(34), (14)(23)(56) e (13)(24), (15)(26), (35)(46), (36)(45), (16)(25), (14)(23), che corrispondono ai triangoli Δ_{34} , Δ_{35} , Δ_{36} , Δ_{45} , Δ_{46} , Δ_{56} (****), dunque:

(*) A., l. c., Nota (1), pag. 215. Le direttrici del fascio $\Sigma a_i x_i + \mu \Sigma a'_i x_i = 0$ sono date dalla formola $\mu^2 \Sigma a_i^2 + 2\mu \Sigma a_i a'_i + \Sigma a_i'^2 = 0$.

(**) Ib., pag. 177.

(***) Ib., Teor. CLXXXVII.

(****) Ib., pag. 143.

I 24 punti $(P)_{\Delta_{12}}$ e i 24 piani $(\Pi)_{\Delta_{12}}$ formano due figure polari reciproche rispetto alle superficie θ_{34} , θ_{35} , θ_{36} , θ_{45} , θ_{46} , θ_{56} , e 6 tetraedri conjugati rispetto alla superficie θ_{12} . Essi sono due a due conjugati rispetto alle stesse superficie θ_{34} , θ_{35} , θ_{36} , θ_{45} , θ_{46} , θ_{56} .

Nel gruppo di una retta di PASCAL, per es. $123456 = \Delta_{12}\Delta_{13}$ (*) sono contenute le sostituzioni $(14)(25)(36)$, $(16)(25)(34)$, $(14)(23)(56)$, $(12)(36)(45)$ e inoltre $(15)(24)$, $(13)(46)$, $(26)(35)$. Le prime quattro corrispondono ai triangoli Δ_{23} , Δ_{46} , Δ_{56} , Δ_{45} , le altre ai triangoli Δ_{16} , Δ_{15} , Δ_{14} , dunque:

I 6 punti e i 6 piani di $(P)_{360}$ e $(\Pi)_{360}$, determinati dal gruppo della retta di PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}$ $\Delta_{\alpha\gamma}$, formano due figure polari reciproche rispetto alle superficie $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\epsilon\delta}$, $\theta_{\epsilon\lambda}$, $\theta_{\delta\lambda}$ (ove α ; β , γ , δ , ϵ , λ sono identici, salvo l'ordine, agli indici 123456). Essi sono due a due conjugati rispetto alle superficie $\theta_{\alpha\delta}$, $\theta_{\alpha\epsilon}$, $\theta_{\alpha\lambda}$.

Con analoghe considerazioni si ottiene dal gruppo di un punto di STEINER:

I 18 punti e i 18 piani di $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$, determinati dalle sostituzioni del gruppo di un punto di STEINER $G_{\alpha\beta\gamma}$, formano due figure polari reciproche rispetto alle 6 superficie $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$, $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\delta\epsilon}$, $\theta_{\delta\lambda}$, $\theta_{\epsilon\lambda}$, date dalle sostituzioni $(ab)(cd)(ef)$ del gruppo. Essi sono due a due conjugati rispetto alle 9 superficie $\theta_{\alpha\beta}$ rimanenti, date dalle sostituzioni $(ab)(cd)$ del gruppo.

I 18 punti e i 18 piani formano anche 6 cicli proiettivi di tre punti o di tre piani sia rispetto alle direttrici dei complessi $x_1 - x_3 = 0$, $x_3 - x_5 = 0$, $x_5 - x_1 = 0$, sia rispetto alle direttrici dei complessi $x_2 - x_4 = 0$, $x_4 - x_6 = 0$, $x_6 - x_2 = 0$.

Per il gruppo di una figura Π si ha:

I 60 punti o i 60 piani di $(P)_{360}$ e $(\Pi)_{360}$, che si ottengono dal gruppo di una figura Π , per es. I , determinano 5 · 15 tetraedri conjugati 15 a 15 rispetto alle superficie θ_{12} , θ_{13} , θ_{14} , θ_{15} , θ_{16} . I 60 punti e i 60 piani formano due figure polari reciproche rispetto alle 10 superficie θ restanti.

E finalmente dal gruppo di un punto di KIRKMAN:

I 6 punti e i 6 piani di $(P)_{360}$ e $(\Pi)_{360}$ determinati dal gruppo di un punto di KIRKMAN $\Delta_{\alpha\beta}$, $\Delta_{\alpha\gamma}$, $\Delta_{\alpha\delta}$ formano due figure polari reciproche rispetto alle 4 superficie $\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\beta\delta}$, $\theta_{\gamma\delta}$, $\theta_{\epsilon\lambda}$, e sono due a due conjugati rispetto alle superficie $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$, $\theta_{\alpha\delta}$.

Padova, febbrajo 1883.

(*) A., l. c., pag. 178.

Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria.

(Nota di F. BRIOSCHI, in Milano.)

1. È noto che fra i covarianti e gli invarianti di una forma binaria del terzo ordine esiste una relazione, e che la stessa proprietà ha luogo fra i covarianti e gli invarianti di una forma binaria del quarto ordine.

Evidentemente fra tre covarianti qualsivogliano di una forma binaria deve sussistere una relazione, perciò il numero di queste potrebbe essere determinato dal numero dei covarianti indipendenti relativi alla forma stessa. Ed infatti per le forme binarie del terzo e del quarto ordine il numero dei covarianti indipendenti essendo tre, una sola relazione esiste fra essi così nell'uno, come nell'altro caso. A completare il numero di quelle relazioni devono però aggiungersi quelle che possono esistere fra semplici invarianti.

Da questo punto di vista il numero delle relazioni esistenti fra i covarianti e gli invarianti di una forma binaria del quinto ordine sarebbe di 970, per quella del sesto ordine di 1338 e così via; ma il maggior numero di esse si dedurrà per eliminazione da un più piccolo numero di relazioni indipendenti le quali, vedesi facilmente, dover essere 18 per le forme binarie del quinto ordine; 20 per quelle del sesto ordine ed in generale $m + p - 2$, supposto essere m il numero dei covarianti indipendenti della forma, e p il numero delle relazioni esistenti fra soli invarianti. E siccome se indicasi con r il numero degli invarianti indipendenti, e con k quello dei coefficienti della forma si ha $p = r - k + 3$, il numero delle relazioni indipendenti sarà in generale $m + r - k + 1$ (*).

A questo stesso numero si giunge anche con altre considerazioni. È noto per la teoria dei covarianti associati ad una data forma, che un covariante indi-

(*) CLEBSCH: *Theorie der binären Formen*, pag. 305.

pendente qualunque moltiplicato per una potenza della forma stessa è eguale ad una funzione omogenea di quei covarianti associati. Ora questi sono in numero $k-1$, e perciò ciascuno degli altri covarianti ed invarianti indipendenti, in numero di $m+r-k+1$, moltiplicati per una potenza della forma, saranno esprimibili in funzione dei primi $k-1$ covarianti associati.

Nella Monografia sulla teorica dei covarianti e degli invarianti pubblicata fino dall'anno 1858 in questi Annali (*) ho appunto applicato il metodo dei covarianti associati alla ricerca delle relazioni esistenti fra i covarianti e gli invarianti delle forme binarie di terzo e di quarto ordine. Ma per le forme binarie d'ordine superiore, il metodo, pur conducendo al numero di relazioni sopra indicato, le determina per modo che soltanto dopo lunghe eliminazioni si può giungere alle richieste relazioni fra tre covarianti.

Anche la trasformazione della forma binaria data per mezzo dei covarianti lineari, se di ordine dispari, o dei covarianti quadratici, se di ordine pari, può semplificare quella ricerca, anzi darebbe risolto il problema se non fossero altre le relazioni fra i covarianti indipendenti che si debbono avere in mira. Nelle pagine che seguono ci gioveremo però dell'uno e dell'altro metodo.

Infine rammenteremo qui alcune relazioni esistenti tra forme binarie qualsivogliano alle quali pure ricorreremo più avanti. Sieno a, b, c, d quattro forme binarie, nessuna delle quali lineari; dimostrasi (***) facilmente essere:

$$(ab)(cd) + (ad)(cb) = \frac{1}{2} [ab(cd)_2 + ad(cb)_2 + cd(ab)_2 + cb(ad)_2 - 2ac(bd)_2 - 2bd(ac)_2]$$

nella quale le $(ab) (ab)_2 \dots$ hanno gli ordinari significati.

Da questa si deducono altre due, e cioè:

$$\left. \begin{aligned} 2(ab)(ac) &= ab(ac)_2 + ac(ab)_2 - bc(aa)_2 - a^2(bc)_2 \\ \overline{(ab)}^2 &= ab(ab)_2 - \frac{1}{2}b^2(aa)_2 - \frac{1}{2}a^2(bb)_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Sieno m, n gli ordini delle forme a, b , e sia $d = (ab)$: se poniamo $e = (dc)$ si ha:

$$e = \frac{1}{2} \frac{m-n}{m+n-2} c(ab)_2 + \frac{1}{2} [b(ac)_2 - a(bc)_2] \quad (2)$$

(*) Annali di Matematica, tom. 1, Anno 1858.

(**) Id., Serie II, tom. 7, Anno 1875, pag. 125. — CLEBSCH: *Theorie der binären Formen*, pag. 117.

dalla quale si ottengono le due seguenti di molto uso:

$$\left. \begin{aligned} (da) &= \frac{1}{2}b(aa)_2 - \frac{n-1}{m+n-2}a(ab)_2 \\ (db) &= -\frac{1}{2}a(bb)_2 + \frac{m-1}{m+n-2}b(ab)_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

l'una conseguenza dell'altra.

Infine, anche nel caso che le a, b, \dots sieno lineari, si hanno le due relazioni:

$$\left. \begin{aligned} a(bc) + b(ca) + c(ab) &= 0 \\ (ab)(cd) + (ad)(bc) + (ac)(db) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2. Ciò posto passiamo a determinare alcune relazioni fra i covarianti di una forma del quinto ordine. Indicata con f la forma, porrò:

$$h = \frac{1}{2}(ff)_2, \quad \theta = 2(fh), \quad l = \frac{1}{2}(ff)_4, \quad \omega = (fl)$$

poi:

$$p = -\frac{1}{3}(fl)_2 = \frac{5}{12}(fh)_4, \quad u = (fp)_2, \quad m = \frac{1}{2}(pp)_2, \quad \alpha = (lp)_2$$

quindi:

$$\begin{aligned} g &= (fu), & k &= (fp), & \varrho &= (fm), & v &= (ul), & q &= (lp), & r &= (mp) \\ n &= (lm), & \beta &= (l\alpha), & \gamma &= (m\alpha), & \delta &= (n\alpha) \end{aligned}$$

e da ultimo:

$$A = \frac{1}{2}(ll)_2, \quad B = (lm)_2, \quad C = \frac{1}{2}(mm)_2, \quad D = (\alpha\delta) = (\gamma\beta).$$

Si hanno così:

4 invarianti	A, B, C, D dei gradi 4, 8, 12, 18
4 covarianti lineari	$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ " " 5, 7, 11, 13
3 " di 2° ordine	l, m, n " " 2, 6, 8
3 " di 3°	" p, q, r " " 3, 5, 9
2 " di 4°	" u, v " " 4, 6
3 " di 5°	" f, ω, ϱ " " 1, 3, 7
2 " di 6°	" h, k " " 2, 4
1 " di 7°	" g " " 5
1 " di 9°	" θ " " 3

ossia, come è noto, 19 covarianti e quattro invarianti indipendenti.

Indicando con f_0, f_1, \dots, f_5 i covarianti associati alla forma f si hanno i valori:

$$f_0 = f, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = fh, \quad f_3 = f\theta, \quad f_4 = f(f^2l - 3h^2),$$

$$f_5 = 2f(f^2\omega - h\theta)$$

e per essi i covarianti u, p, m, α e l'invariante A danno le relazioni:

$$3f^2u = 2\omega\theta + 4h^2l + 6fhp - f^2l^2 \quad (a)$$

$$f^3p = -(\theta^2 + 4h^3) + f^2hl \quad (b)$$

$$f^2A = -[\omega^2 + hl^2 + 3flp] \quad (c)$$

$$f^2m = -(hp^2 + k^2) + fpu \quad (d)$$

$$f^2\alpha = -2(hlp + k\omega) + fl\omega - 3fp^2 \quad (e)$$

le tre ultime delle quali si possono dedurre dalle (1) formando i quadrati di k , di ω ed il loro doppio prodotto. Ora dalla:

$$l(fh) + f(hl) + h(lf) = 0$$

osservando essere $k = (fp) = \frac{2}{3}(hl)$, si ha:

$$3fk = 2h\omega - l\theta \quad (f)$$

e quindi per le prime tre superiori:

$$9k^2 + hl^3 + 6hlu + 4Ah^2 + fl^2p = 0$$

$$6k\omega + 6hlp + 4Afh + fl^3 + 3fl\omega = 0$$

$$3k\theta + 6h^2p - 3fhu - f^2lp = 0$$

che conducono alle seguenti:

$$9fm = 3h\alpha + 9pu + l^2p$$

$$3f\alpha = l^3 - 9p^2 + 6lu + 4Ah.$$

Eliminando dalle (a) (b) (c) le ω, θ , si ottiene per questi valori di m, α , la relazione:

$$12hm + lp^2 - 3u^2 = f(\alpha l - \frac{4}{3}Ap)$$

e per questa gli invarianti B, C danno:

$$6Bf = l(\alpha l - \frac{4}{3}Ap) - 3\alpha u - 36mp \quad (g)$$

$$36Cf = \alpha^2 p + 9\alpha lm - 16Amp - 2Blp \quad (h)$$

Così essendo $g = (fu) = -2(hp)$ si ottiene la:

$$fg = p\theta - 2hk \quad (k)$$

che dà facilmente per le superiori i valori di $g^2, g\theta, \dots$

Il covariante $\mathfrak{S} = (fm) = -\frac{4}{3}(up)$ darà:

$$2f\mathfrak{S} = pg - uk \quad (l)$$

ed inoltre, sempre applicando la prima delle relazioni (4) si hanno le:

$$fv = u\omega - lg \quad (m)$$

$$fq = lk - p\omega \quad (n)$$

$$fr = mk - p\mathfrak{S} \quad (p)$$

$$fn = l\mathfrak{S} - m\omega. \quad (q)$$

Analogamente essendo $(f\bar{\alpha}) = -2\nu$, $(p\alpha) = 2n$, si giunge alle:

$$f\beta = -2l\nu - \alpha\omega \quad (r)$$

$$f\gamma = -2m\nu - \alpha\mathfrak{S} \quad (s)$$

$$f\delta = -2n\nu - \alpha(fn) \quad (t)$$

essendo:

$$(fn) = \frac{4}{3}l(\alpha l - \frac{4}{3}Ap) + \frac{2}{3}pm.$$

Da ultimo per le:

$$(f\beta) = 9lm + 3\alpha p + 2Au, \quad (f\gamma) = -(9m^2 + Bu)$$

si otterrà la:

$$Df = \gamma(9lm + 3\alpha p + 2Au) + \beta(9m^2 + Bu). \quad (u)$$

Si hanno così le 18 relazioni (a) (b)... (u).

3. Fra le varie relazioni che possono dedursi da quelle stabilite nel paragrafo precedente scegliamo le seguenti. Formando il quadrato della (m), e moltiplicandole per ω si ottengono le:

$$4\nu^2 = -h\alpha^2 + f[6Bp - 9\alpha m + \frac{4}{3}A(\alpha l - \frac{4}{3}Ap)]$$

$$2\nu\omega = h\alpha l - f[9lm + 2Au]$$

per le quali e pel valore di ω^2 dato dalla (c) si ha quadrando la (r) e rammentando le (g) (h):

$$\beta^2 + A\alpha^2 = Ll \quad (5)$$

ed analogamente dalla (s):

$$\gamma^2 + C\alpha^2 = Mm \quad (6)$$

posto:

$$L = 4(2AB - 27C), \quad M = 4AC - B^2.$$

Da queste si deducono tosto, essendo per definizione $(l\alpha) = \beta$, $(m\alpha) = \gamma$, le:

$$(\beta\alpha) = L, \quad (\gamma\alpha) = M$$

e quindi anche le:

$$(l\beta) = -A\alpha, \quad (m\gamma) = -C\alpha.$$

Si noti ora che dalle formole (3) si deducono le seguenti:

$$(ln) = \frac{1}{2}Bl - Am, \quad (mn) = Cl - \frac{1}{2}Bm$$

perciò dalla:

$$l(n\alpha) + n(\alpha l) + \alpha(ln) = 0$$

e dalla analoga cambiando l in m , si ottengono le:

$$l(\delta + \frac{1}{2}B\alpha) - Am\alpha - n\beta = 0$$

$$Cl\alpha + m(\delta - \frac{1}{2}B\alpha) - n\gamma = 0$$

ma si ha anche la:

$$l(m\beta) + m(\beta l) + \beta(lm) = 0$$

ossia

$$l(m\beta) + Am\alpha + n\beta = 0$$

quindi sarà:

$$(m\beta) = -(\delta + \frac{1}{2}B\alpha)$$

e nello stesso modo:

$$(l\gamma) = \delta - \frac{1}{2}B\alpha.$$

Pongasi:

$$P = (\beta\delta), \quad Q = (\gamma\delta)$$

dalla:

$$(\alpha\delta)(\gamma\beta) + (\alpha\beta)(\delta\gamma) + (\alpha\gamma)(\beta\delta) = 0$$

si ha che:

$$D^2 = MP - LQ \tag{A}$$

e dalle:

$$\beta(\alpha\delta) + \alpha(\delta\beta) + \delta(\beta\alpha) = 0$$

$$\gamma(\alpha\delta) + \alpha(\delta\gamma) + \delta(\gamma\alpha) = 0$$

si ottengono le relazioni fra i covarianti lineari:

$$D\beta = P\alpha + L\delta, \quad D\gamma = Q\alpha - M\delta; \tag{B}$$

ma dalla relazione (4) si ha che:

$$L(l\gamma) = -D\beta - AM\alpha = L\delta - (P + AM)\alpha$$

perciò pel valore di $(l\gamma)$ trovato sopra si avrà:

$$P = \frac{1}{2}BL - AM \text{ ed analogamente } Q = CL - \frac{1}{2}BM$$

le quali pel valore superiore di D^2 danno:

$$D^2 = BLM - AM^2 - CL^2.$$

A questa si ponno aggiungere le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}MD^2 &= BPQ - AQ^2 - CP^2 \\ 0 &= B(LQ + MP) - 2AMQ - 2CLP \\ \frac{1}{4}LM &= AQ - \frac{1}{2}BP, \quad \frac{1}{4}M^2 = \frac{1}{2}BQ - CP \\ -\frac{1}{4}L^2M &= AD^2 + P^2, \quad -\frac{1}{4}LM^2 = \frac{1}{2}BD^2 + PQ, \quad -\frac{1}{4}M^3 = CD^2 + Q^2. \end{aligned}$$

4. La relazione (A) e le due (B) sono fra quelle che intendiamo qui considerare. Una quarta relazione fra i covarianti quadratici l, m, n si ottiene tosto dal quadrato di n ed è la:

$$n^2 = Blm - Am^2 - Cl^2. \quad (C)$$

Le l, m, n si possono esprimere, come è noto, in funzione di α e di δ ; infatti dalle (5) (6) per le (B) si ha tosto:

$$\left. \begin{aligned} D^2l &= L\delta^2 - 2P\delta\alpha - \frac{1}{4}LM\alpha^2 \\ D^2m &= M\delta^2 - 2Q\delta\alpha - \frac{1}{4}M^2\alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

e siccome:

$$l\gamma - m\beta + n\alpha = 0$$

si avrà anche:

$$Dn = -\delta^2 - \frac{1}{4}M\alpha^2.$$

Passando ai covarianti cubici p, q, r osserverò dapprima che essendo $(mp)_2 = 0$, dall'applicazione della seconda delle (1) si hanno tosto le:

$$\left. \begin{aligned} q^2 &= \alpha lp - l^2m - Ap^2, \quad r^2 = -m^3 - Cp^2 \\ 2qr &= \alpha mp - 2lm^2 - Bp^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

dalle quali eliminando q, r si ha per la (C):

$$Mp^2 = 2(2Cl - Bm)\alpha p + \alpha^2 m^2 + 4mn^2,$$

ma per la (3) risulta $(np) = \frac{1}{2}\alpha m$, perciò dalla:

$$\alpha(np) + n(p\alpha) + p(\alpha n) = 0$$

si deduce la:

$$p\delta = \frac{1}{2}\alpha^2 m + 2n^2$$

e la superiore divisa per p dà:

$$Mp = 2(2Cl - Bm)\alpha + 2m\delta.$$

Così essendo analogamente:

$$p\beta = \alpha q + 2ln, \quad p\gamma = \alpha r + 2mn$$

e dalla:

$$n(\gamma\alpha) + \gamma(\alpha n) + \alpha(n\gamma) = 0$$

risultando per valori trovati sopra che:

$$Mn = \gamma\delta + (C\beta - \frac{1}{2}B\gamma)\alpha$$

si avranno le:

$$Mq = 2(Cl - Bm)\beta + Bl\gamma + 2n\delta$$

$$Mr = (4Cl - Bm)\gamma - 2Cm\beta.$$

Queste espressioni di p, q, r conducono facilmente alla loro rappresentazione in funzione di α, δ e si avrà per la prima:

$$D^2p = 2\delta^3 + \frac{2}{3}M\delta\alpha^2 - Q\alpha^3 \tag{E}$$

e per le altre due indicando con $\varphi(\delta, \alpha)$ il secondo membro di questa, si avranno le:

$$\left. \begin{aligned} D(Lr - Mq - Dp) &= -\frac{2}{3}\alpha \frac{d\varphi}{d\alpha} \\ D(Lr - Mq + Dp) &= \frac{2}{3}\delta \frac{d\varphi}{d\delta} \\ D(Pr - Qq) &= -\frac{1}{3}\left[\delta \frac{d\varphi}{d\alpha} + \frac{1}{4}M\alpha \frac{d\varphi}{d\delta}\right] \end{aligned} \right\} \tag{F}$$

e quindi:

$$(Lr - Mq - Dp)\delta^2 - 2(Pr - Qq)\delta\alpha - \frac{1}{4}M(Lr - Mq + Dp)\alpha^2 = 0.$$

Quest'ultima relazione, la quale corrisponde alla:

$$lr - mq + np = 0$$

agevola la eliminazione delle δ, α dai valori delle p, q, r ; ma il risultato della eliminazione può ottenersi ancora più facilmente nel seguente modo. Dalle equazioni (7) si deduce essere:

$$Bqr - Ar^2 - Cq^2 - \frac{1}{4}Mp^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 m^2$$

e dalla prima delle superiori si ha:

$$Lr - Mq - Dp = 2\alpha^2\gamma;$$

ora moltiplicando la prima per $8(2Cq - Br) = -8m\gamma$, e la seconda per

$-(r^2 + Cp^2) = m^3$ si ottiene la relazione richiesta fra i covarianti cubici, ossia la:

$$\left. \begin{aligned} CDp^3 - 16C^2q^3 + 108Cr^3 + 24BCq^2r - 3(4AC + 3B^2)qr^2 - \\ - 2(B^3 - 54C^2)p^2r + Dpr^2 - 3CMP^2q = 0. \end{aligned} \right\} (G)$$

Il covariante biquadratico u dà per la (g) e per le tre che la precedono, la seguente:

$$9Bu = 2\alpha^2l - 2A(\alpha p + lm) - Bl^2 - 54m^2 \quad (H)$$

e quindi anche:

$$9Bv = -\alpha\beta l + 2A(\alpha q + ln) + 54mn. \quad (K)$$

Moltiplicando la prima per n , la seconda per m e sommandole, osservando essere:

$$2Ar - Bq = \gamma l - \alpha n$$

si ottiene la:

$$9(nu + mv) = l(\alpha q - ln)$$

e perciò anche:

$$(um) = \frac{1}{9}(\alpha q - ln).$$

Passiamo ora a considerare i tre covarianti del quinto ordine f , ω , ϑ . Pel valore di Bu trovato sopra, dalle relazioni (g) (h) deducesi la seguente:

$$9Mf = \alpha^3l - 27\alpha m^2 + 2(4Am - Bl)\alpha l + 2Nm p$$

posto:

$$N = 27B - 8A^2$$

nella quale sostituendo per l , m , p i valori di questi covarianti in funzione di δ , α si ottiene facilmente la espressione di f in funzione degli stessi covarianti lineari δ , α , data la prima volta da CLEBSCH e GORDAN in questi Annali (Anno 1867). Essa è:

$$9D^4f = A_0\delta^5 + 5A_1\delta^4\alpha + 10A_2\delta^3\alpha^2 + \dots + A_5\alpha^5 \quad (L)$$

essendo:

$$A_0 = 4N, \quad A_1 = 4AL - 27M, \quad A_2 = -\frac{1}{2}L^2$$

ed:

$$A_3 = -\frac{3}{4}MA_1 - \frac{1}{2}QA_0$$

$$A_4 = -\frac{3}{4}MA_2 - \frac{1}{2}QA_1$$

$$A_5 = -\frac{3}{4}MA_3 - \frac{1}{2}QA_2.$$

Per queste tre ultime relazioni vedesi tosto che indicando con λ , μ , ν le radici

della equazione:

$$t^3 + \frac{3}{4}Mt + \frac{1}{2}Q = 0$$

se si suppongono:

$$A_0 = a + b + c, \quad A_1 = a\lambda + b\mu + c\nu, \quad A_2 = a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2$$

si hanno le:

$$A_3 = a\lambda^3 + b\mu^3 + c\nu^3, \quad A_4 = a\lambda^4 + b\mu^4 + c\nu^4, \quad A_5 = a\lambda^5 + b\mu^5 + c\nu^5$$

e quindi:

$$9D^4f = ax^5 + by^5 + cz^5$$

posto:

$$x = \delta + \lambda\alpha, \quad y = \delta + \mu\alpha, \quad z = \delta + \nu\alpha,$$

e siccome la (E) si trasforma nella:

$$D^2p = 2xyz$$

siamo condotti per nuova via al noto teorema che le tre variabili x, y, z , che danno per f la trasformata canonica, sono i fattori del covariante cubico p .

Le espressioni in δ, α pei due covarianti di quinto ordine ω, ϑ si deducono, analogamente a quanto si è osservato pei covarianti cubici, dalle relazioni:

$$\left. \begin{aligned} M\omega - L\vartheta - Df &= -\frac{2}{5}D\alpha \frac{df}{d\alpha} \\ M\omega - L\vartheta + Df &= \frac{2}{5}D\delta \frac{df}{d\delta} \\ Q\omega - P\vartheta &= -\frac{1}{5}D\left[\delta \frac{df}{d\alpha} + \frac{1}{4}M\alpha \frac{df}{d\delta}\right] \end{aligned} \right\} \quad (M)$$

per le quali:

$$(M\omega - L\vartheta - Df)\delta^2 - 2(Q\omega - P\vartheta)\delta\omega - \frac{1}{4}M(M\omega - L\vartheta + Df)\alpha^2 = 0$$

che coincide colla:

$$l\vartheta - m\omega - nf = 0.$$

Fra le tre forme di quinto ordine f, ω, ϑ sussiste una relazione del quinto grado; supponendo $f=0$ si avrà da questa una equazione del quinto grado in $\frac{\vartheta}{\omega} = \frac{m}{l} = y$, la quale si otterrà anche dalla eliminazione del rapporto $\delta:\alpha$ dalla quintica $f=0$ e della quadratica $ly - m = 0$. Questa equazione del quinto grado in y , che è una trasformata della $f=0$ per mezzo dei covarianti qua-

dratici è la seguente:

$$\left. \begin{aligned} (8AN - 9L)y^5 + \frac{5}{3}(7AL - 5BN)y^4 - \frac{20}{3}(AM + 2BL)y^3 - \\ - \frac{10}{3}(3BM - 4CL)y^2 + \frac{20}{3}CM y + \frac{4}{9}(4B^2M - 8BQ - M^2) = 0. \end{aligned} \right\} (N)$$

5. La più importante però delle relazioni fra covarianti di una forma del quinto ordine è quella che sussiste fra la forma stessa ed i due covarianti del sesto ordine che abbiamo indicati con h, k . Pel caso di $f=0$ posto $\frac{k}{h} = y$, siccome si hanno, per la $f=0$, le:

$$kx_2 = f_1 p, \quad hx_2^2 = -f_1^2$$

sarà:

$$y f_1 + x_2 p = 0$$

ed anche:

$$y f_2 - x_1 p = 0$$

e la nuova trasformata in y della $f=0$ si otterrà dalla eliminazione del rapporto $\frac{x_1}{x_2}$ da queste due biquadratiche. Oppure se si introducono le trasformate di f e di p in δ, α si hanno le due forme biquadratiche:

$$\varphi = (b_0, b_1 \dots b_4)(\delta, \alpha)^4 = 0$$

$$\psi = (c_0, c_1 \dots c_4)(\delta, \alpha)^4 = 0$$

nelle quali:

$$b_0 = A_0 y, \quad b_1 = A_1 y - \frac{1}{2} \rho, \quad b_2 = A_2 y, \quad b_3 = A_3 y - \frac{3}{8} M \rho, \quad b_4 = A_4 y + Q \rho$$

$$c_0 = A_1 y + 2 \rho, \quad c_1 = A_2 y, \quad c_2 = A_3 y + \frac{1}{4} M \rho, \quad c_3 = A_4 y - \frac{1}{4} Q \rho, \quad c_4 = A_5 y$$

posto per brevità $\rho = 9D$.

Il risultante di due forme biquadratiche si può esprimere, come è noto (*), in funzione degli otto invarianti simultanei di quelle forme nel modo seguente. Sieno:

$$H = \frac{1}{2}(\varphi \varphi)_2, \quad K = \frac{1}{2}(\psi \psi)_2$$

gli hessiani delle forme date;

$$i = \frac{1}{2}(\varphi \varphi)_4, \quad j = \frac{1}{3}(\varphi H)_4; \quad s = \frac{1}{2}(\psi \psi)_4, \quad t = \frac{1}{3}(\psi K)_4$$

gli invarianti della prima forma e quelli della seconda; infine:

$$R = (\varphi \psi)_4, \quad S = (\varphi K)_4, \quad T = (\psi H)_4, \quad U = (HK)_4$$

(*) D'OVIDIO. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Gennaio 1880.

Annali di Matematica, tomo XI.

gli altri quattro invarianti fondamentali; si avrà pel risultante la:

$$4(R^2 - 4si)^2 - (48U - 4si - R^2)^2 + 6 \cdot 4^3 [R(9tj - ST) + 2S(Si - 3sj) + 2T(Ts - 3it)] = 0.$$

Nel caso particolare che consideriamo i valori degli otto invarianti simultanei sono i seguenti:

$$\begin{aligned} i &= \rho^2(Ly^2 - \frac{3}{4}M), & s &= -\frac{1}{4}Mi \\ j &= 2\rho^3[Dy^3 + Py^2 - \frac{1}{4}DAy - \frac{1}{8}Q] \\ t &= -\rho^3[DQy^3 - (PQ + \frac{1}{8}LM^2)y^2 - \frac{1}{16}D(4AQ - \frac{3}{4}LM)y + \frac{1}{8}(Q^2 + \frac{1}{8}M^3)] \\ R &= -2\rho^2(Py^2 - \frac{3}{4}Q), & T &= \frac{3}{2}\rho^3[LMY^2 + \frac{1}{8}DLy - \frac{1}{8}M^2] \\ S &= \frac{3}{2}\rho^3[DMY^3 - \frac{1}{8}(MP + 2LQ)y^2 - \frac{1}{8}DBLy + \frac{1}{8}MQ] \\ U &= -\frac{1}{24}\rho^4[L^2My^4 + 6(LM^2 + 5PQ)y^2 + \frac{9}{8}(\frac{7}{4}M^3 + 5Q^2)] \end{aligned}$$

i quali valori sostituiti nella equazione superiore conducono, dopo alcune riduzioni, alla:

$$16(A^2 - 144B)y^5 - 5 \cdot 8 \cdot 9(AB + 24C)y^3 - 5 \cdot 9^2(4AC - B^2)y + 54D = 0 \quad (P)$$

trasformata della $f=0$ posto $y = \frac{h}{h}$. Ma $16(A^2 - 144B)$ è il discriminante della forma binaria f , indicandolo con Δ^2 e ponendo $z = \Delta y$, si otterrà così l'equazione:

$$z^5 - 5 \cdot 8 \cdot 9(AB + 24C)z^3 - 5 \cdot 9^2(4AC - B^2)\Delta^2 z + 54D\Delta^3 = 0$$

nella quale si trasforma una equazione qualunque del quinto grado (*). Evidentemente trasformazioni analoghe devono sussistere per forme binarie di più alto ordine.

Le relazioni (A) (B)... (P) fra tre covarianti di f , o fra due di essi nella ipotesi di $f=0$, sono della natura di quelle che più specialmente importa considerare nello studio delle forme binarie.

6. La trasformazione della equazione generale del quinto grado in quella nella quale sono nulli i coefficienti del secondo e del quarto termine era indicata dal sig. HERMITE molti anni sono in una lettera a BORCHARDT: *Sur l'invariant du 18^{me} ordre des formes du cinquième degré*, etc., pubblicata nel

(*) Vedi la mia Nota: *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Math. Annalen, Bd. 13, pag. 144.

vol. 59 del Giornale di Matematiche di Berlino. Questo risultato può ritenersi come una conseguenza del seguente teorema, il quale trova pure applicazione in una analoga trasformazione delle equazioni del sesto grado.

Se f è una forma binaria dell'ordine n ; h, k due covarianti di essa dello stesso ordine m , il primo di grado u , il secondo di grado v ; eliminando il rapporto $\frac{x_1}{x_2}$ dalle $f=0, hy-k=0$ si ottiene una trasformata della equazione $f=0$:

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

nella quale i coefficienti A_0, A_1, \dots, A_n sono invarianti della forma binaria f , essendo il coefficiente A_r del grado $nu + m + r(v-u)$. Se perciò la forma f non ammette invariante di quest'ultimo grado il coefficiente A_r dovrà essere nullo.

Sia dapprima f del quinto ordine, ed indicando con p il suo covariante cubico di terzo grado, sieno:

$$h = \frac{1}{2}(ff)_2, \quad k = (fp),$$

il coefficiente A_r sarà del grado $16 + 2r$. Ma come abbiamo veduto sopra dalle:

$$f=0 \quad hy-k=0$$

si deducono le:

$$f_1 y + x_2 p = 0, \quad f_2 y - x_1 p = 0$$

e perciò i coefficienti della trasformata superiore hanno tutti per fattore comune il discriminante, e dividendo l'equazione per esso, diventerà A_r del grado $8 + 2r$. Ora una forma binaria del quinto ordine non possiede invarianti del 10 grado e del 14 grado, saranno quindi A_1 ed A_3 eguali a zero; cioè la trasformata avrà la forma:

$$\Delta y^5 + F_{12} y^3 + F_{16} y + F_{18} = 0$$

essendo Δ il discriminante, ed F_{12}, F_{16}, F_{18} invarianti di grado 12, 16, 18.

Analogamente per le forme del sesto ordine, supponendo p essere il covariante biquadratico del secondo grado della forma stessa. Il grado di A_r sarebbe $20 + r$, ma tutti i coefficienti hanno un fattore comune del grado 10° ; d'altra parte la forma binaria del sesto ordine non ha invarianti dei gradi 11, 13, quindi la trasformata in y avrà la forma:

$$\Delta y^6 + F_{12} y^4 + F_{14} y^2 + F_{15} y + F_{16} = 0.$$

Daremo infine la nota di alcuni lavori recenti intorno l'argomento trattato in queste pagine, non senza ricordare che le prime relazioni fra covarianti ed invarianti di forme binarie si trovano nelle Memorie di SALMON, di CAYLEY, di ALVESTER, di CLEBSCH e di GORDAN.

- VIDIO - *La relazione fra gli otto invarianti fondamentali di due forme binarie biquadratiche.*
- IDEM - *Nota sulle forme binarie del 5° ordine.* (Atti della R. Accademia di Torino, 1880.)
- STÉPHANOS - *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne.* (C. R., 12 décembre, 1881.)
- IDEM - *Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants de caractère pair d'une forme binaire du sixième ordre.* (C. R., 22 janvier, 1883.)
- BRILL - *Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades.* (Math. Annalen, Bd. 20.)
- LINDEMANN - *Ueber die Hesse'sche Covariante einer binären algebraischen Form fünfter Ordnung.* (Math. Annalen, Bd. 21.)
- PERRIN - *Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants des formes binaires.* (C. R., février, 1883.)

In queste comunicazioni all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia il sig. PERRIN applica la teorica dei covarianti associati alla ricerca delle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti; il qual metodo, come ebbi a notare nel corso del presente lavoro, trovasi esposto ed applicato nella mia Monografia del 1858.

Un teorema relativo alla funzione potenziale.

(Nota di A. TONELLI, a Roma.)

Nella Nota: *Sopra la funzione potenziale in uno spazio di n dimensioni*, pubblicata nel tomo X (Serie II) di questi Annali, a pag. 310 ho osservato che se U è una funzione monodroma, finita e continua insieme con le sue derivate sino all'ordine $m+1$ inclusive, e che ammette le derivate determinate e finite di ordine $m+2$ in un campo S_n ad n dimensioni, nel quale soddisfa l'equazione differenziale

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0$$

dove x_1, x_2, \dots, x_n rappresentano un sistema di coordinate ortogonali, per le quali l'elemento lineare nel campo considerato assume la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$$

introducendo le coordinate polari $\rho, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ col porre

$$x_r = a_r + \rho \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \dots \operatorname{sen} z_{r-1} \cos z_r$$

$$x_n = a_n + \rho \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \dots \operatorname{sen} z_{n-2} \operatorname{sen} z_{n-1}$$

$$r = 1, 2, \dots, n-1$$

anche l'altra

$$V = \rho^s \int_0^\rho \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho$$

con $0 \leq s \leq m$, è pure una funzione monodroma, finita e continua insieme con le sue derivate prime nel campo stesso, che soddisfa l'equazione $\Delta^2 V = 0$. Le due funzioni U e V saranno quindi funzioni potenziali. Questa proprietà però, come risulta immediatamente dal metodo tenuto per dimostrarla, suppone ve-

rificata anche la condizione

$$\left\{ \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s} \right\}_{\rho=0} = 0$$

mentre, anche quando questa non sia verificata, è facile dedurre dalla nota funzione U , una nuova funzione potenziale, la quale si ottiene da V aggiungendovi un termine della forma

$$b_s \rho^s$$

dove b_s è una costante, rispetto a ρ , convenientemente determinata.

Osservando infatti che si ha

$$\int_0^\rho \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho = \rho^{m-s} \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m} - (m-s) \rho^{m-s-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{m-s} 1 \cdot 2 \dots (m-s) \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s} - (-1)^{m-s} 1 \cdot 2 \dots (m-s) \left\{ \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s} \right\}_{\rho=0}$$

è chiaro che prendendo

$$b_s = (-1)^{m-s} 1 \cdot 2 \dots (m-s) \left\{ \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s} \right\}_{\rho=0}$$

la funzione $V + b_s \rho^s$ assume la forma

$$\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m} - (m-s) \rho^{m-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}} + \dots + (-1)^{m-s} 1 \cdot 2 \dots (m-s) \rho^s \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s}$$

e quindi, per la proprietà dimostrata a pag. 309 della Nota citata, soddisfa l'equazione $\Delta^s \{V + b_s \rho^s\} = 0$

Supponendo $s=0$, la quantità da aggiungersi a V riducesi a

$$b_0 = (-1)^m 1 \cdot 2 \dots m U_{\rho=0}$$

ed essendo quindi costante rispetto a ρ , non ha alcuna influenza sul valore di $\frac{\partial(V+b_0)}{\partial \rho}$, e perciò le conclusioni fatte in quella ipotesi e dedotte dalla considerazione di $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ restano inalterate.

Le precedenti conclusioni possono essere generalizzate, e possono dedursi delle funzioni potenziali da una funzione potenziale nota, mediante replicate integrazioni.

Supponiamo infatti che U sia una funzione potenziale finita e continua insieme colle sue derivate fino ad un certo ordine, che poi fisseremo, in un

campo S_n ad n dimensioni, e accenniamo per maggior semplicità con

$$\int f(\rho) d\rho$$

l'integrale indefinito privo di costante arbitraria; allora, per la precedente osservazione, sieno o no zero le derivate di U rispetto a ρ nel punto $\rho=0$, la funzione

$$W = \rho^\sigma \int \rho^{n-\sigma} \frac{\partial^{n+1} V}{\partial \rho^{n+1}} d\rho$$

con $0 \leq \sigma \leq n$, sarà una funzione potenziale, finita e continua insieme con le sue derivate del primo ordine, se V è una funzione potenziale finita e continua insieme con le sue derivate dell'ordine $n+1$, ed ha le derivate di ordine $n+2$ finite e determinate nel campo S_n . Ora noi possiamo prendere

$$V = \rho^s \int \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho$$

quando U sia finita e continua insieme con le sue derivate fino all'ordine $n+m+1$ inclusive, ed abbia le derivate di ordine $n+m+2$ determinate e finite, e sia $0 \leq s \leq m$. Supponiamo inoltre che si abbia anche $s \geq n+1$, così che sia $0 \leq \sigma \leq n < s \leq m$, e allora, per una nota formula, avremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} V}{\partial \rho^{n+1}} &= s(s-1) \dots (s-n) \rho^{s-n-1} \int \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \\ &+ \sum_1^{n+1} h(n+1)_h \left[\rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} \right]_{(h-1)} [\rho^s]_{(n-h+1)} \end{aligned}$$

dove con gl'indici attribuiti alle quantità tra parentesi si sono indicate le derivate. Poniamo ora per brevità

$$A = s(s-1) \dots (s-n) \quad A_h = (n+1)_h s(s-1) \dots (s+h-n)$$

$$A_{h,k} = (h-1)_k (m-s)(m-s-1) \dots (m-s-k+1)$$

e allora, a calcoli eseguiti, potremo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} V}{\partial \rho^{n+1}} &= A \rho^{s-n-1} \int \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \sum_1^{n+1} A_h \rho^{s+h-n-1} \sum_0^{h-1} A_{h,k} \rho^{m-s-k} \frac{\partial^{m+h-k} U}{\partial \rho^{m+h-k}} \\ &= A \rho^{s-n-1} \int \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \sum_1^{n+1} A_h \sum_0^{h-1} A_{h,k} \rho^{m+h-k-n-1} \frac{\partial^{m+h-k} U}{\partial \rho^{m+h-k}} \end{aligned}$$

e sostituendo questo valore di $\frac{\partial^{n+1} V}{\partial \rho^{n+1}}$ nell'espressione di W , otterremo

$$W = A \rho^\sigma \int \rho^{s-\sigma-1} d\rho \int \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \sum_1^{n+1} A_h \sum_0^{h-1} A_{h,k} \rho^\sigma \int \rho^{m+h-k-\sigma-1} \frac{\partial^{m+h-k} U}{\partial \rho^{m+h-k}} d\rho.$$

Ora se poniamo

$$m + h - k - 1 = l$$

è chiaro che l può assumere i valori compresi tra m e $m+n$, e i termini che compariscono nella doppia somma sono della forma

$$C \rho^\sigma \int \rho^{l-\sigma} \frac{\partial^{l+1} U}{\partial \rho^{l+1}} d\rho$$

con $0 \leq \sigma \leq l$, e quindi sono altrettante funzioni potenziali, poichè gl'integrali debbono intendersi sempre privi di costante arbitraria, e ciò ci porta a concludere che anche

$$V_1 = \rho^\sigma \int \rho^{s-\sigma-1} d\rho \int \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho$$

sarà una funzione potenziale, monodroma, finita e continua insieme colle derivate del primo, e che ha determinate le derivate parziali del secondo ordine nel campo S_n , quando U nel medesimo campo sia monodroma, finita e continua insieme con le derivate dell'ordine $m+n+1$ inclusive, ed abbia determinate e finite le derivate dell'ordine $n+m+2$: e poichè in V_1 non vi è più traccia di n , pel quale avevamo la condizione $\sigma \leq n < s$, potremo prendere $n = \sigma$ o $n = s-1$; e allora basterà che le condizioni relative alle derivate di U si estendano fino agli ordini $m+\sigma+1$ e $m+\sigma+2$, ovvero $m+s$ e $m+s+1$.

Come si è osservato, deve aversi $0 \leq \sigma < s \leq m$, per cui se prendiamo $\sigma = 0$, $s = 1$, $m = 1$, quelle disuguaglianze sono verificate, e si avrà

$$V_1 = \int d\rho \int \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} d\rho = U$$

che è funzione potenziale; mentre, prendendo $\sigma = 0$, $s = 1$ e $m = 2$, avremo

$$V_2 = \int d\rho \int \rho \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} d\rho = \int \left\{ \rho \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right\} d\rho = \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - 2U$$

che è pure, come è noto, funzione potenziale, ecc.

La formula ora dimostrata può ancora generalizzarsi seguendo il processo fin qui adoperato, poichè, se V è una funzione potenziale, monodroma, finita e

continua insieme con le sue derivate fino all'ordine $n + \sigma + 1$ inclusive, ed ha finite e determinate le derivate di ordine $n + \sigma + 2$, per la formula ora dimostrata, anche l'altra

$$W_1 = \rho^\sigma \int \rho^{s-\sigma-1} d\rho \int \rho^{n-s} \frac{\partial^{n+1} V}{\partial \rho^{n+1}} d\rho$$

con $0 \leq \sigma < s \leq n$ sarà pure una funzione potenziale, che è monodroma, finita e continua insieme con le sue derivate del primo ordine, ed ha finite e determinate le derivate del secondo ordine. Ma possiamo prendere

$$V = \rho^\tau \int \rho^{m-\tau} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho$$

quando U abbia le derivate, monodrome, finite e continue sino all'ordine $n + m + \sigma + 1$ inclusive e le derivate dell'ordine $n + \sigma + m + 2$ determinate e finite nel campo S_n ; e allora se $n < \tau \leq m$ si giunge facilmente a dimostrare che

$$V_2 = \rho^\sigma \int \rho^{s-\sigma-1} d\rho \int \rho^{\tau-s-1} d\rho \int \rho^{m-\tau} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho$$

con $0 \leq \sigma < s < \tau \leq m$, è pure una funzione potenziale. Osservando poi che in questa formula non compare più n , per la quale si hanno le limitazioni $\tau > n \geq s$, è chiaro che potremo prendere $n = \tau - 1$ o $n = s$, e allora le condizioni riguardo alla continuità e all'esistenza delle derivate parziali di U si estenderanno fino agli ordini $m + s + \sigma + 1$ e $m + s + \sigma + 2$, ovvero $m + \sigma + \tau$ e $m + \sigma + \tau + 1$.

In modo analogo si otterrebbe dalla U una nuova funzione potenziale mediante quattro, cinque, ecc. integrazioni successive; ma la generalizzazione della formula precedente può ottenersi, forse con maggiore semplicità ed evidenza, seguendo un altro metodo, il quale ha il vantaggio di non imporre condizioni relative alla continuità delle derivate di U il cui ordine è superiore ad $m + 1$. Accennando con b_{s_1} una costante, rispetto a ρ , e che sopra abbiamo visto dover essere uguale a

$$(-1)^{m-s_1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (m - s_1) \left\{ \frac{\partial^{s_1} U}{\partial \rho^{s_1}} \right\}_{\rho=0},$$

se $s_1 \leq m$, si avrà

$$\int_0^\rho \rho^{m-s_1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + b_{s_1} = \sum_{s_1}^m A_k \rho^{k-s_1} \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k}$$

dove le A_k sono coefficienti numerici, finiti e differenti da zero, dipendenti da m e da s_1 , facili a determinarsi.

Annali di Matematica, tomo XI.

Ma se $s_1 > s_2$, moltiplicando l'eguaglianza precedente per $\rho^{s_1 - s_2 - 1} d\rho$ e integrando tra 0 e ρ , avremo

$$\int_0^\rho \rho^{s_1 - s_2 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{m - s_1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \frac{b_{s_1}}{s_1 - s_2} \rho^{s_1 - s_2} = \sum_{s_1}^m A_k \int_0^\rho \rho^{k - s_2 - 1} \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k} d\rho$$

e se poniamo

$$b_k = (-1)^{k-1} s_2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots (k-1 - s_2) \left\{ \frac{\partial^{s_2} U}{\partial \rho^{s_2}} \right\}_{\rho=0}$$

è noto che si ha

$$\int_0^\rho \rho^{k - s_2 - 1} \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k} d\rho + b_k = \sum_{s_2}^{k-1} B_h \rho^{h - s_2} \frac{\partial^h U}{\partial \rho^h}$$

per cui, ponendo per brevità $\sum_{s_1}^m A_k b_k = b_{s_2}$, e osservando che il massimo valore che assume k è m , avremo anche

$$\int_0^\rho \rho^{s_1 - s_2 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{m - s_1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \frac{b_{s_1}}{s_1 - s_2} \rho^{s_1 - s_2} + b_{s_2} = \sum_{s_2}^{m-1} D_k \rho^{k - s_2} \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k}$$

dove con D_k si sono accennati dei coefficienti numerici, finiti, dipendenti da m , s_1 , s_2 , e che possono facilmente calcolarsi.

Da questa formula ora, con un processo analogo, se $s_2 > s_3$, dopo aver moltiplicato i due membri per $\rho^{s_2 - s_3 - 1} d\rho$, integrato tra 0 e ρ e ridotto il secondo membro, otterremo

$$\int_0^\rho \rho^{s_2 - s_3 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{s_1 - s_2 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{m - s_1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + \frac{b_{s_1}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} \rho^{s_1 - s_3} + \\ + \frac{b_{s_2}}{s_2 - s_3} \rho^{s_2 - s_3} + b_{s_3} = \sum_{s_3}^{m-2} E_k \rho^{k - s_3} \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k}$$

dove le E_k sono coefficienti finiti, dipendenti da m , s_1 , s_2 , s_3 , che facilmente potrebbero determinarsi, e

$$b_{s_3} = \sum_{s_3}^{m-1} D_k b'_k \text{ con } b'_k = (-1)^{k-1 - s_3} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (k-1 - s_3) \left\{ \frac{\partial^{s_3} U}{\partial \rho^{s_3}} \right\}_{\rho=0}$$

Ripetendo l volte il medesimo processo, e introducendo successivamente le costanti b_{s_4} , b_{s_5} , ..., b_{s_l} , determinate nel medesimo modo delle b_{s_1} , b_{s_2} , b_{s_3} , e riducendo ogni volta il secondo membro, quando sia $s_3 > s_4$, $s_4 > s_5$, ..., $s_{l-1} > s_l$, otterremo finalmente:

$$\int_0^\rho \rho^{s_1 - s_l - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{s_l - 2 - s_{l-1} - 1} d\rho \cdots \int_0^\rho \rho^{s_2 - s_3 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{s_1 - s_2 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{m - s_1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho +$$

$$+ \frac{b_{s_1}}{(s_1 - s_2) \cdots (s_1 - s_l)} \rho^{s_1 - s_1} + \frac{b_{s_2}}{(s_2 - s_3) \cdots (s_2 - s_l)} \rho^{s_2 - s_1} + \cdots + \frac{b_{s_{l-1}}}{s_{l-1} - s_l} \rho^{s_{l-1} - s_1} +$$

$$+ b_{s_l} = \sum_{s_l}^{m-l+1} L_k \rho^{k-s_l} \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k}$$

dove al solito le L_k sono coefficienti numerici, finiti, dipendenti da m, s_1, s_2, \dots, s_l , che facilmente potrebbero determinarsi.

Moltiplicando ora quella uguaglianza per ρ^{s_l} , il secondo membro si riduce a

$$\sum_{s_l}^{m-l+1} L_k \rho^k \frac{\partial^k U}{\partial \rho^k}$$

ed è una funzione potenziale per l'osservazione a pag. 309 della Nota citata; lo stesso dunque avverrà del primo membro; ovvero

$$V_l = \rho^{s_l} \int_0^\rho \rho^{s_{l-1} - s_l - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{s_{l-2} - s_{l-1} - 1} d\rho \cdots \int_0^\rho \rho^{s_2 - s_3 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{s_1 - s_2 - 1} d\rho \int_0^\rho \rho^{m-s_1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho +$$

$$+ \frac{b_{s_1}}{(s_1 - s_2) \cdots (s_1 - s_l)} \rho^{s_1} + \frac{b_{s_2}}{(s_2 - s_3) \cdots (s_2 - s_l)} \rho^{s_2} + \cdots + \frac{b_{s_{l-1}}}{s_{l-1} - s_l} \rho^{s_{l-1}} + b_{s_l} \rho^{s_l}$$

sarà una funzione potenziale, quando $0 \leq s_l < s_{l-1} < \cdots < s_2 < s_1 \leq m$.

Come caso particolare potremo prendere

$$s_l = 0, \quad s_{l-1} = 1, \quad s_{l-2} = 2, \dots, \quad s_1 = l - 1$$

e allora otterremo, mediante l successive integrazioni,

$$V = \int_0^\rho d\rho \int_0^\rho d\rho \cdots \int_0^\rho d\rho \int_0^\rho \rho^{m-l+1} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho + c_{l-1} \rho^{l-1} + c_{l-2} \rho^{l-2} + \cdots + c_1 \rho + c_0$$

che sarà una funzione potenziale.

È evidente che qui non hanno nessuna influenza sulla conclusione fatta, le derivate di U degli ordini superiori ad $m+1$, ciò che non avveniva col metodo tenuto precedentemente. Osserveremo infine che nelle costanti $b_{s_1}, b_{s_2}, \dots, b_{s_l}$, comparendo i valori delle derivate di U degli ordini s_1, s_2, \dots, s_l nel punto $\rho = 0$, a causa della monodromia di quelle derivate, si può dire che le costanti stesse sono assolutamente indipendenti anche dalle altre coordinate dei punti del campo S_n .

Roma, giugno 1882.

An extension of a theorem of Legendre's.

[By JOHN C. MALET, *Cork (Ireland).*]

In a former number of the *Annali* I gave an extension of a theorem of LEGENDRE'S (Series II, tomo 11, pag. 246); having since still further extended the theorems there given I propose in the following short memoir to give my new results.

I use the following notation

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^m \theta \text{Sin}^p \theta d\theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^m \theta \text{Sin}^p \theta (1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta$$

$$F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^{m'} \theta \text{Sin}^p \theta d\theta}{(1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}, \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'} \theta \text{Sin}^p \theta (1 - k' \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta$$

where

$$k + k' = 1, \quad m' = \frac{2}{n} - m - p - 1$$

$$m + 1 > 0, \quad m' + 1 > 0, \quad p + 1 > 0.$$

We easily find

$$nk \frac{dE}{dk} = (n-1) \{E - F\}$$

$$2k'k \frac{dF'}{dk} = \left\{ p + m + 2 - \frac{2}{n} \right\} E - \left\{ \left(p + m + 2 - \frac{2}{n} \right) - (p+1)k \right\} F.$$

Hence the differential equation

$$2nk(1-k) \frac{d^2 u}{dk^2} + \left\{ n(p+m+2) - k(3n+np+2) \right\} \frac{du}{dk} - (p+1)u = 0 \quad (A)$$

is satisfied by $u = F'$ and therefore the complete solution is

$$U = C_1 F + C_2 F'$$

where C_1 and C_2 are arbitrary constants.

We have then as before

$$k^{\frac{m+p}{2}} k'^{\frac{m'+p}{2}} \left\{ (1-m') F' E + (1-m) F E' - 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) F F' \right\} = C \quad (B)$$

where C is independent of k .

To determine the value of C , write relation (B) in the forme

$$k^{\frac{m+p}{2}} k'^{\frac{m'+p}{2}+1} \left\{ F' \frac{dF}{dk} - F \frac{dF'}{dk} \right\} = \frac{C}{2}$$

and put $k=1$.

Now in the first case if $m'+p$ is negative we find, when $k=1$

$$n F' \frac{dF'}{dk} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{-m'-p-1} \theta \text{Sin}^p \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'} \theta \text{Sin}^{p+2} \theta d\theta$$

which is finite, therefore in this case, when $k=1$

$$k'^{\frac{m'+p}{2}+1} F' \frac{dF'}{dk} = 0.$$

In the second case, supposing $m'+p$ not to be negative, transforming

$$F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^m \theta \text{Sin}^p \theta d\theta}{(1-k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}}$$

by the substitution

$$\text{Sin} \theta = \frac{\text{Cos} \varphi}{\sqrt{1-k \text{Sin}^2 \varphi}}$$

we find

$$k'^{\frac{m'+p}{2}} F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}^m \varphi \text{Cos}^p \varphi d\varphi}{\{1-k \text{Sin}^2 \varphi\}^{\frac{1-m'}{2}}}$$

which gives, for $k=1$

$$k'^{\frac{m'+p}{2}} F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m \varphi \text{Cos}^{p+m'-1} \varphi d\varphi$$

which is finite, therefore in this case also, when $k=1$

$$k^{\frac{m'+p}{2}+1} F' \frac{dF'}{dk} = 0.$$

Now transforming

$$n \frac{dF'}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^m \theta \text{Sin}^{p+2} \theta d\theta}{(1-k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n+1}{n}}}$$

by the same substitution as above, we find

$$n k^{\frac{m'+p}{2}+1} \frac{dF'}{dk} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}^m \varphi \text{Cos}^{p+2} \varphi d\varphi}{\{1-k \text{Sin}^2 \varphi\}^{\frac{1-m}{2}}}$$

which when $k=1$ becomes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m \varphi \text{Cos}^{p+m'+1} \varphi d\varphi$$

therefore

$$\frac{nC}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^{m'} \theta \text{Sin}^p \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin}^m \theta \text{Cos}^{p+m'+1} d\theta.$$

Or, expressing C in terms of Eulerian Integrals

$$\begin{aligned} k^{\frac{m+p}{2}} k^{\frac{m'+p}{2}} \left\{ (1-m') F' E' + (1-m) F E' - 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) F' F' \right\} = \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2 n \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

To return to the consideration of equation (A) we find that $u = k'$ is a solution, provided that

$$2\lambda + p + m = 0, \quad (n\lambda + 1)(2\lambda + p + 1) = 0.$$

Hence if $m'+1=0$ or $p+m = \frac{2}{n}$, the solution is

$$u = C_1 F' + \frac{C_2}{k^{\frac{1}{n}}}$$

and instead of formula (B) we have

$$2nE - \{2(n-1) - (np + n - 2)k\} F' = Ck^{\frac{1-p}{2}}$$

or determining the constant by putting $k=0$ we get

$$\begin{aligned} 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^m \theta \text{Sin}^{\frac{2}{n}-m} \theta (1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta - \{2(n-1) + n(m+1)k\} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Cos}^m \theta \text{Sin}^{\frac{2}{n}-m} \theta d\theta}{(1 - k \text{Sin}^2 \theta)^{\frac{1}{n}}} &= \\ &= 2(1-k)^{\frac{1+m}{2} - \frac{1}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos}^m \theta \text{Sin}^{\frac{2}{n}-m} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Again if $m=1$, $u = \frac{1}{k^{\frac{p+1}{2}}}$ is a solution of (A) in fact in this case we find

$$F' = \frac{\Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2k^{\frac{p+1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

and we find as before

$$\{(p+3)n - 2\} \int_0^1 x^p (1 - kx^2)^{\frac{n-1}{n}} dx - 2(n-1) \int_0^1 \frac{x^p dx}{(1 - kx^2)^{\frac{1}{n}}} = n(1-k)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Queens College.
Cork (Ireland).
March 30, 1883.

FINE DEL TOMO XI.º (SERIE II.ª)

ERRATA-CORRIGÉ.

Pagina	linea	<i>in luogo di</i>	<i>leggete</i>
168	20	par ex. (12)(34), (23)(45) ou bien par les	par ex. par les
171	31	involutions (12)(34), (23)(45)	homographies (12345), (i kl) (<i>i, k, l</i> étant trois indices de la série 1, 2, 3, 4, 5)
180	17	6	3
183	22	(16)(23)	(1654)(23)
185	20	deux	trois
ivi	20	(135)(246)	(135), (246), (15)(26)
196	7	60	120
204	9 e 10	10. 36	9. 36
212	35	De la Note n.° 57 on	On
216	35	$(A'D' + B'E')\mu^2 + [(AD' + A'D) + (BE' + B'E)]\mu + (AD + BE) = 0$	$(A'D' + B'E' + C'F')\mu^2 + [(AD' + A'D) + (BE' + B'E) + (CF' + C'F)]\mu + (AD + BE + CF) = 0$
217	10	$(a_3^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_6^2)\mu^3 + (a_3 a_1 + a_4 a_4 + a_5 a_6 + a_6 a_6)\mu + (a_3^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_6^2) = 0$	$\Sigma a_i^2 \mu^2 + 2 \Sigma a_i a_i' \mu + \Sigma a_i^2 = 0, i=1, 2, \dots, 6$
220	32 e 34	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$	$x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$
223	13 e 35	4	6
ivi	36		<i>aggiungete</i> $x_2 x_5 x_4 x_3 x_6 x_1, x_2 x_1 x_6 x_5 x_4 x_5$
225	4	(Brennfläche)	(Singularitätenfläche)
ivi	36	(Plücher) l. c.	si les deux complexes sont en involution.