

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

REDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,

G. KÖNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MÖLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTÉ, R. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÛEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÛEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1900 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME — ANNÉE 190 .

Extrait du N°



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

190

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

AGRÉGATION (Concours pour l'Agrégation des Sciences mathématiques). — Principales formules de la Théorie des Fonctions elliptiques. TABLEAU RÉSUMÉ publié par les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. In-8; 1900. 75 c.

ANDOYER (H.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — Leçons élémentaires sur la Théorie des formes et ses applications géométriques, à l'usage des Candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques. In-4 de vi-184 pages; autographié; 1898. 8 fr.

ANDOYER (H.), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — Leçons sur la Théorie des Formes et la Géométrie analytique supérieure, à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences, 2 vol. gr. in-8° se vendant séparément :

Tome I. Volume de vi-508 pages; 1900. 15 fr.

Tome II. (En préparation.)

CAUCHY (A.). — Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'ACADEMIE DES SCIENCES et sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, avec le concours de MM. *Falson, Collet* et *Em. Borel*, Docteurs ès Sciences. 27 vol. in-4.

I^{re} Série : MÉMOIRES, NOTES ET ARTICLES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. 12 vol. in-4.

II^e Série : MÉMOIRES EXTRAITS DE DIVERS RECUEILS, OUVRAGES CLASSIQUES, MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE, MÉMOIRES PUBLIÉS SÉPARÉMENT. 15 vol. in-4.

VOLUMES PARUS :

I^{re} Série. — Tome I, 1882 (*Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. — Mémoire sur les intégrales définies*). 25 fr.

Tome IV à XII, 1884 à 1900 (*Extraits des Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Chaque volume. 25 fr.

La Table générale de la 1^{re} Série se vend séparément. 2 fr. 50 c.

II^e Série. — Tome III, 1897 : *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique.* — Tome IV, *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal, Leçons sur le Calcul différentiel.* — Tome VI, 1887. Tome VII, 1889. Tome VIII, 1890. Tome IX, 1891. (*Anciens Exercices de Mathématiques, 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e, 5^e année.*) — Tome X, 1895. *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux Exercices de Prague (Mémoire sur la dispersion de la lumière).* Chaque volume. 25 fr.

SOUSCRIPTION.

II^e Série. — Tome V, *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*. 20 fr.

Ce volume, qui paraîtra dans le cours de 1901, est mis en souscription. Le prix en est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versement à l'avance, à. 20 fr.

GUSTAVE ROBIN, chargé de cours à la Faculté des Sciences de Paris. — ŒUVRES SCIENTIFIQUES, réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par Louis Raffy, professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. *Thermodynamique générale*. 1 vol. in-8°, xvi-271 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1901.*

I.

Celui qui entreprendrait la tâche audacieuse de retracer l'histoire des Sciences physiques au XIX^e siècle devrait arrêter longuement son attention sur l'évolution qui a produit la Thermodynamique générale ou Énergétique. La *Théorie mécanique de la chaleur*, née de l'hypothèse cartésienne que la chaleur est un mode de mouvement, a donné tout d'abord naissance à une science positive, la *Thermodynamique*, qui s'est affranchie de toute tutelle, aussi bien de la Métaphysique que de la Mécanique; puis, par un développement rapide, la Thermodynamique s'est étendue au point d'absorber à son tour la Mécanique; sous le nom d'*Énergétique*, elle est devenue le code des lois qui régissent tous les changements des corps inertes, aussi bien les changements de lieu dans l'espace que les changements de qualité ou d'état.

Gustave Robin était de ceux qui suivent avec passion ce grand mouvement intellectuel et qui, par leurs efforts, le veulent accélérer et diriger; son sens critique, très aiguisé, disséquait impitoyablement les systèmes proposés et ne négligeait aucun des défauts qu'il y pouvait découvrir; en même temps, son originalité de penseur tentait de rassembler et d'agencer en un système plus solide les fragments qu'il avait disjoint.

Des fruits de ce labeur, poursuivi avec acharnement pendant près de vingt années, Robin faisait profiter ses auditeurs de la Sorbonne; la mort est venue le frapper sans qu'il ait eu le temps d'en rien livrer à la publicité.

Un ami de Gustave Robin, M. L. Raffy, n'a pas voulu que ces pensées, longuement mûries, fussent à jamais perdues; avec un

dévouement bien rare, il a voulu oublier que ses propres travaux l'avaient tenu éloigné, jusque-là, de la Physique et de la Chimie; il s'est pénétré pendant de longs mois de la pensée de l'ami disparu, au point que cette idée devint sienne, et c'est cette reconstitution, monument patiemment élevé à la mémoire de Robin, qu'il présente aujourd'hui au public.

Est-ce à dire que l'œuvre que nous avons sous les yeux soit celle que nous eût donnée Gustave Robin s'il avait vécu? De divers faits, cités par M. Raffy dans l'*Avertissement* qu'il a mis en tête du Volume, on peut conclure que Robin n'était pas encore arrivé à se satisfaire pleinement; son système ne lui semblait pas encore mûr pour la publication. N'eussions-nous pas le témoignage de M. Raffy que bien des indices nous révéleraient cet état d'évolution où se trouvait encore la pensée de Robin; entre les parties du livre qui reproduisent ses dernières leçons (1897) et les parties qui nous rapportent les enseignements de 1892 ou de 1896, il est aisé d'apercevoir non pas certes des contradictions, mais des variations de point de vue, variations dont parfois on retrouverait la cause dans certaines publications contemporaines. Ainsi, la température n'est plus celle de la source dans laquelle le système est plongé (p. 16), mais la température même du système (p. 233); la définition des *variables normales* est modifiée (p. 179 et p. 236). Une foule de nuances de ce genre marquent que nous n'avons pas sous les yeux une œuvre parvenue à son complet achèvement.

Faut-il en conclure que M. Raffy ait eu tort de nous livrer la pensée non encore fixée, le système encore en voie de développement, objet des dernières veilles de son ami? Assurément non; car il a sauvé de l'oubli le fruit de longues méditations; partant du point que Robin avait atteint, d'autres pourront, avec bien moins de peine, parvenir au but qu'il a entrevu.

Le volume sur la *Thermodynamique générale* ne contient guère d'historique; peu d'auteurs y sont cités, ils le sont comme en passant, et la bibliographie est absente. De ce qui pourrait sembler un grave défaut en un livre auquel son auteur aurait mis la dernière main, j'aperçois ici une explication. L'ouvrage est rédigé à l'aide de notes prises au cours d'un enseignement oral. Or, dans un tel enseignement, le professeur, soucieux avant tout de dérouler devant ses auditeurs la suite logique des vérités scientifiques, dé-

sireux de n'interrompre en rien cet enchaînement, néglige souvent de nommer l'auteur de chaque vérité.

Cette réflexion (pourquoi chercherais-je à le dissimuler?) m'est inspirée par la remarque suivante : Le lecteur le plus attentif pourrait feuilleter ce livre de la première page à la dernière sans y trouver une seule fois mon nom ; et cependant, s'il a quelque érudition touchant la Thermodynamique, il reconnaîtrait bientôt que la pensée de Robin s'est développée dans un continuel contact avec mes propres recherches, soit qu'elle s'en assimilât les résultats, soit qu'elle en critiquât la méthode.

Des sujets traités dans ce livre sur la *Thermodynamique générale*, il n'en est pas un auquel je n'aie consacré quelque écrit et plusieurs sont de ceux que j'avais pris vierges. La théorie de la stabilité adiabatique de l'équilibre (p. 145 à 148) ne diffère que par des détails de forme de celle que j'ai donnée en 1894 ⁽¹⁾. La vitesse de propagation de l'onde explosive donne lieu à des considérations qui tentent de généraliser ce que j'avais dit en 1896 ⁽²⁾ touchant cette onde. L'idée fondamentale de l'écrit que j'ai publié à cette époque sur la *viscosité, le frottement et les faux équilibres chimiques*, fait l'objet du chapitre consacré au *Problème général de la Dynamique* (p. 232 à 250). Enfin, le Chapitre consacré à la *Statique des déformations permanentes* (p. 215 à 231) n'est qu'une brève exposition géométrique de la théorie dont, en 1895 ⁽³⁾, j'ai communiqué les principes essentiels à l'Académie de Belgique et que je n'ai cessé, depuis lors, de développer en de nombreux Mémoires.

Hors des Chapitres que je viens de mentionner, les infiltrations de mes recherches dans les écrits de Robin se reconnaissent maintes fois à la conservation de certains aperçus, de certains exemples, à la similitude presque complète des dénominations et des notations.

⁽¹⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3^e partie, Chap. IV, n^o 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. X, p. 271; 1894).

⁽²⁾ *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 2^e partie, Chap. V, § 3 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5^e série, t. II; 1896).

⁽³⁾ *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. Mémoire présenté à la classe des Sciences de l'Académie de Belgique le 13 octobre 1894 (*Mémoires in-4^o de l'Académie de Belgique*, t. LIV; 1895).

Il y a plus, et, bien souvent, Robin semble n'avoir connu les travaux de nos communs prédécesseurs que par les citations contenues dans mes écrits. Le nom de l'illustre J. Willard Gibbs, qui a tant fait pour les progrès de la Thermodynamique générale, ne se rencontre que deux fois sous sa plume, et, les deux fois, il est cité d'une manière indirecte; la première fois (p. xi), il est question « d'une manière de procéder qui tend à s'implanter en France et en Allemagne, à la suite des travaux assurément remarquables de Willard Gibbs »; la seconde fois (p. 263), on parle des « auteurs qui se rattachent à l'école de Gibbs ». Or, dans les deux cas, des questions traitées, des méthodes incriminées, il n'existe aucune trace dans les œuvres du génial professeur de New-Hawen; mais, dans le premier cas, la pensée de l'auteur est précisée par une citation textuellement empruntée à mon *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (¹); dans le second cas, le raisonnement incriminé ne se trouve nulle part, si ce n'est dans mon Ouvrage sur le *Potentiel thermodynamique*. J'ai donc, je pense, le droit de m'écrier :

Me, me adsum qui feci; in me convertite ferrum.

Et que l'on m'entende bien; mon intention n'est point ici de reprocher à Robin l'absence ou l'inexactitude de ses citations, absence et inexactitude dont je crois avoir donné plus haut l'explication; sa loyauté ne saurait être mise en doute, et il n'aurait certes rien livré à la publicité qu'il n'eût scrupuleusement reconnu à chacun de ses prédécesseurs ce qui lui revenait; pas davantage, je ne veux incriminer l'éditeur de ce livre; en s'arrachant à ses études coutumières d'Analyse et de Géométrie pour vivre la pensée du physicien qui fut son ami, M. Raffy a fait un effort dont on trouverait peu d'exemples et dont nous lui devons une vive reconnaissance; lui demander, par surcroît, de pénétrer la pensée de tous ceux qui ont écrit sur les mêmes sujets et de devenir un érudit en Thermodynamique serait une insupportable prétention.

Mais la raison de Robin était trop originale pour accepter sans un minutieux contrôle l'idée d'autrui; son sens critique était trop

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. VIII, p. 276.

aiguisé pour se laisser piper par une apparence de vérité; son caractère était trop juste pour être bienveillant; si donc, dans son enseignement, je retrouve sans cesse les traces de ma propre pensée, il me semble que j'ai le droit d'en être fier; les pièces que j'ai mises en circulation se retrouvent, nombreuses, dans le trésor amassé par ce maître essayeur; c'est donc que le coin en était net et l'alliage loyal.

L'étude que l'on va lire sera, il n'en saurait être autrement, un continuel rapprochement entre la pensée de Robin et la mienne; les concordances y seront notées et les divergences discutées; laisser passer, sans essayer d'y répondre, les objections élevées contre ma manière de voir, ce serait, me semble-t-il, manquer d'égards envers celui qui les a formulées.

II.

L'Ouvrage débute par une Introduction, formée, en majeure partie, de la leçon inaugurale du Cours de Chimie physique, donné à la Sorbonne en 1896; cette Introduction met aux prises les diverses Écoles qui se disputent le champ de la Physique théorique.

Une première tendance est celle du Mécanisme atomistique ou cartésien; guidé par un système métaphysique déterminé, il conçoit d'une certaine manière la constitution des corps, il les compose de certaines figures et de certains mouvements; à ces figures, à ces mouvements, il s'efforce de rattacher les phénomènes naturels qui, pour lui, sont alors *expliqués*.

À cette École s'oppose l'École de l'induction dont Newton, avec une admirable clarté, formule le programme dans les dernières pages du livre des *Principes*. Appuyée sur un nombre suffisant de faits bien observés, elle parvient par induction à un certain nombre de lois générales; de ces lois, l'Analyse mathématique tire ensuite divers corollaires dont la certitude égale celle des lois expérimentales qui les ont fournis; dont, par conséquent, la réalisation est à peu près certaine; par cette méthode, il est vrai, les phénomènes naturels ne sont pas expliqués; ils sont seulement classés et comme condensés en un petit nombre de principes

généraux ; mais ce que la théorie perd en pénétration, elle le gagne en sûreté, car elle se développe sans feindre aucune hypothèse sur la constitution des corps.

Cette méthode trouvait un exemple parfait dans la Mécanique céleste constituée par Newton ; cet exemple demeura longtemps le seul, car les newtoniens, abandonnant la méthode logique de leur maître, revinrent à celle de Descartes ; ils imaginèrent une certaine constitution de la matière et cherchèrent à en tirer, avec un succès qui se prolongea, éclatant, pendant un siècle, la forme des lois physiques ; seulement, outre la figure et le mouvement, seuls invoqués par les cartésiens, ils mirent en œuvre, dans leurs constructions hypothétiques, les actions moléculaires attractives ou répulsives.

Dans ces derniers temps, une troisième École a surgi. Avec Newton, elle repousse toute hypothèse qui a pour objet la constitution intime des corps ; elle professe que le but de la Physique théorique n'est pas d'expliquer les phénomènes, mais de les classer au moyen d'un certain nombre de principes généraux. Mais, avec les mécanistes cartésiens ou newtoniens, elle reconnaît que l'expérience et l'induction ne sauraient suffire, dans la plupart des cas, à formuler ces principes. Ces principes, elle les présente donc comme de simples postulats ; l'ensemble des propositions qu'elle en tire par le raisonnement mathématique, elle le donne pour une représentation toujours provisoire de la réalité, pour un *schéma* susceptible de modifications continues, de perfectionnements indéfinis qui le moulent de plus en plus étroitement sur les faits ; mais à aucun de ces corollaires elle n'attribue la moindre certitude tant qu'il n'a pas reçu le contrôle souverain et sans appel de l'expérience.

Cette forme nouvelle donnée aux théories physiques est à peu près contemporaine de la Thermodynamique ; Clausius, Kirchhoff, Helmholtz en ont, à des degrés divers, favorisé l'éclosion ; le premier, Rankine en a proclamé l'excellence dans son écrit sur l'*Énergétique* ; diverses pièces de M. H. Poincaré ont contribué à la mettre dans une vive lumière ; nous nous sommes efforcés, à plusieurs reprises, d'en tracer les principes ; plus récemment, des philosophes comme M. Milhaud, M. Leroy et M. Wilbois l'ont préconisée.

Contre cette méthode, aussi bien que contre le mécanisme cartésien ou newtonien, Robin s'élève résolument : « Au lieu de prétendre deviner la nature, il faut se laisser guider par elle; aussi écartérons-nous toutes ces méthodes, qui tendent à déterminer les phénomènes par des considérations *a priori*, hypothèses mécaniques, hypothèses analytiques ou hypothèses latentes, pour nous en tenir à l'induction ».

Or des deux méthodes, quelle est celle qui se rebelle le plus volontiers contre les arrêts de l'expérience, qui se prétend le plus apte à deviner les faits ? Est-ce la méthode qui reconnaît en principe le caractère purement arbitraire de ses postulats, qui se déclare toujours prête à les modifier jusqu'à ce que leurs conséquences se modèlent sur la réalité ? Ne sont-ce pas plutôt les théories dont on nous décrit (p. xiv) la puissance en ces termes : « Elles nous permettront de prévoir les phénomènes avec la probabilité même des inductions admises comme prémisses. Or ces inductions, consistant exclusivement à ériger en lois générales non pas l'interprétation, mais le *résultat même d'un très grand nombre d'expériences*, sont bien près de la certitude. C'est pourquoi nous serons autorisés, quand une formule aura été rigoureusement déduite de pareilles lois, à ne pas la rejeter parce qu'elle serait en contradiction avec certaines expériences ».

Dangereuse confiance ! Nous avons beau multiplier et varier les expériences d'où l'induction tire une loi générale ; si complexe est la réalité, qu'une infinité de cas possibles sont toujours omis dans nos investigations ; dissimulés à notre plus minutieuse attention, ils demeurent prêts à infliger un démenti au principe que nous croyions universel.

D'ailleurs, la méthode nouvelle, en proclamant que les premiers principes de toute théorie sont des postulats librement posés par l'esprit du physicien, n'oblige pas celui-ci à les formuler au hasard ; elle l'encourage à se laisser guider par toutes les considérations qui peuvent promettre à son choix une heureuse fécondité ; entre tous les postulats possibles, elle préférera assurément, toutes les fois qu'ils lui seront offerts, ceux que l'on obtient en généralisant les résultats d'un grand nombre d'expériences ; elle admire la méthode newtonienne comme l'idéal de la théorie physique ; si elle se sépare de ceux qui, avec Robin, tiennent pour la méthode

inductive, c'est qu'elle croit cet idéal hors de notre portée, et qu'ils prétendent l'atteindre.

Leur prétention est-elle couronnée de succès ?

Les inductions destinées à devenir les premiers principes de la théorie, disent les tenants de la méthode newtonienne (p. xii) « nous les formulerons toujours en énoncés faciles à retenir, *susceptibles de vérification directe* » ... « Nos énoncés (p. 72) sont de véritables *principes*, étant la généralisation par voie inductive d'un grand nombre de faits observés directement ». La réalité répond-elle à ces promesses ?

Preuons deux des énoncés essentiels du livre sur la *Thermodynamique générale*, ceux-là mêmes à propos desquels Robin s'exprime dans les termes que nous venons de rappeler, les énoncés des deux principes de Carnot (p. 66 et 68). Les voici :

PREMIER PRINCIPE DE CARNOT. — *Lorsqu'un système, primitivement en équilibre, a parcouru un cycle de transformations qui le ramènent à son état initial, ce système n'a pu produire du travail que s'il a échangé de la chaleur avec deux sources au moins.*

SECOND PRINCIPE DE CARNOT. — *Lorsqu'un système, parti d'un état d'équilibre, y revient après avoir éprouvé une série de modifications, dont une au moins est irréversible, ce système n'a pu, s'il n'a échangé de chaleur qu'avec une source au plus, que consommer du travail.*

Où sont donc les faits très nombreux et directement observés dont ces énoncés sont la généralisation par voie inductive ? Si ces « lois générales sont non pas l'interprétation, mais le *résultat même d'un très grand nombre d'expériences* », que l'on nous dise à quelle époque ces expériences ont été faites, où, par qui, comment ? La portée de ces principes est immense ; leur domaine est le domaine même du monde inorganique ; que l'on songe à l'infinie multiplicité, à l'inimaginable variété des expériences concordantes qu'il aurait fallu faire pour que ces lois inductives fussent « bien près de la certitude » (p. xiv), pour qu'elles pussent être la source de « considérations théoriques inatta-

quables » (p. 164); on sera vite convaincu qu'il n'est pas possible de les assimiler à des principes tirés des faits par l'induction, à la manière du principe de la gravitation universelle.

Ces principes sont-ils même susceptibles de quelque vérification expérimentale directe? Je ne sache pas qu'aucune vérification de ce genre ait été tentée et Robin ne nous dit pas comment elle pourrait l'être.

Il apparaît donc clairement que le principe de Carnot ne se soumet pas aux lois de la méthode newtonienne, alors même qu'il est présenté par un partisan convaincu de cette méthode.

Suivons, d'ailleurs, la genèse et l'évolution de ce principe; sa véritable nature nous apparaîtra.

Sadi Carnot est profondément pénétré de l'impossibilité du mouvement perpétuel, non par des preuves directes que l'on ne saurait donner, mais par les échecs retentissants de toutes les tentatives faites pour réaliser un *perpetuum mobile*; les machines à feu viennent de faire leur apparition dans le monde; pas plus que les anciens mécanismes, ces machines ne peuvent créer du travail avec rien; Sadi Carnot admet ce principe et en fait la base de son système thermodynamique.

Bientôt, le système de Robert Mayer, de Joule, de Colding, de Helmholtz paraît dans la Science; entre ce système et celui de Carnot et de Clapeyron, un désaccord éclate, flagrant; si l'un est vrai, l'autre est faux; lequel faut-il choisir? W. Thomson hésite. Clausius, plus perspicace, saisit la cause du désaccord; elle n'a rien d'essentiel et peut être supprimée, de telle sorte que les deux systèmes se fondent en une théorie unique. Pour constituer cette théorie, il modifie le principe même de la théorie de Carnot; il ne s'appuie plus sur l'impossibilité du mouvement perpétuel; mais, remarquant que la chaleur semble naturellement destinée à passer des corps chauds aux corps froids, il pose ce principe: On ne peut, sans fournir du travail, faire passer une certaine quantité de chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

Ce principe, Clausius en marque nettement le caractère logique (1). Est-ce une proposition évidente, à la manière des axiomes

(1) CLAUSIUS, *Poggendorff's Annalen*, Bd. CXX, p. 426; 1863. — *Mémoires sur la théorie mécanique de la chaleur*, trad. Folic, t. I, p. 310.

de la Géométrie? Assurément non. Est-ce une loi générale que l'induction a tirée des faits d'expérience? Pas davantage. Certes, l'observation de chaque jour en a suggéré l'idée; mais les expériences nombreuses, variées, précises, qui seules pourraient lui conférer quelque certitude, n'existent pas et ne sauraient même être conçues. Qu'est-ce donc? C'est une *hypothèse*, mais non point une de ces hypothèses sur la nature des corps que Newton repoussait; c'est un simple *postulat*. Et comment ce postulat acquerra-t-il droit de cité dans la Science? Par l'accord de l'expérience avec les conséquences qu'il fournira en s'unissant à d'autres postulats analogues. En proclamant ces vérités, Clausius a vraiment posé les lois de la nouvelle méthode propre à traiter les théories physiques.

W. Thomson, adoptant des idées analogues à celles de Clausius, proposa de fonder la Thermodynamique sur un autre postulat; en toute machine à vapeur, une certaine quantité de chaleur est cédée au condenseur; guidé par cette observation, il posa le principe suivant: Une machine qui fonctionne suivant un cycle de Carnot ne peut fournir du travail en empruntant de la chaleur à la source froide. Ici encore, certains faits avaient suggéré à W. Thomson cette proposition, mais, parmi ces faits, il n'en était aucun qui la confirmât d'une manière précise et directe.

Les énoncés proposés par R. Clausius et par W. Thomson ont subi diverses modifications au cours du développement de la Thermodynamique. On les regarda longtemps comme équivalents entre eux. En 1887, nous montrâmes ⁽¹⁾ que, pour constituer complètement la science de la chaleur, il était nécessaire de les invoquer tous deux et même de les modifier légèrement. Plus tard ⁽²⁾, nous eûmes devoir les restreindre aux opérations réversibles, les opérations non réversibles appartenant à des catégories trop diverses pour qu'il nous semblât possible de les soumettre à un postulat général. Cependant, Robin modifiait ces principes

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XI, juin-juillet 1887. — Cf. *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 2^e Partie, Chap. I (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. IX, p. 293; 1893).

⁽²⁾ *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, Livre I, Chap. III; Paris, 1897.

dans un sens différent et formulait les deux énoncés que nous avons reproduits.

Aucune de ces modifications n'a été le résultat immédiat d'une constatation expérimentale, capable de corriger une induction incomplète ou trop hâtive; toutes ont été inspirées par le désir de faire de la Thermodynamique un système plus un et plus logique, de mettre les corollaires éloignés de ses principes à l'abri de tout heurt, contre les faits; façon de procéder bien étrange, si l'on conçoit une théorie physique à la manière de Newton, mais bien naturelle si l'on accepte notre opinion.

Cette opinion, je pense, a toujours été, du moins chez ceux qui l'ont formulée les premiers, le fruit d'une assez longue expérience; eux aussi, ils avaient conçu tout d'abord des théories physiques un autre idéal, soit l'idéal des mécanistes, soit l'idéal des tenants de l'induction; mais des échecs répétés les ont peu à peu convaincus que l'un et l'autre idéal étaient hors de notre portée et les ont ramenés à une notion à la fois plus modeste et plus juste du rôle de la Physique théorique. La méditation critique et, plus encore, l'usage de l'enseignement eussent déterminé, ce me semble, dans l'esprit de Robin, une pareille évolution; et en lisant attentivement les derniers Chapitres du Livre, qui furent ses dernières leçons, je crois voir s'ébaucher cette évolution; je crois voir le mode d'exposition de l'auteur se confondre presque avec celui que je préconise.

Sans doute, il lui arrive encore, là où j'ai mis *hypothèse* ou *postulat*, de dire : *L'expérience montre* (p. 217 et 235); mais des principes fondamentaux, tels que l'existence des variables normales (p. 236) ou le principe de l'équivalence (p. 234), sont introduits comme des généralisations voulues par l'esprit et non comme des inductions dictées par les faits; et, qui plus est, un postulat est explicitement introduit comme tel (p. 244).

D'ailleurs, comment Robin n'aurait-il pas ressenti la gêne des entraves multiples que sa conception d'une théorie physique apporte à son exposition, entraves si encombrantes qu'après les avoir liées de ses propres mains, il s'efforce parfois de les rompre?

« Nous nous interdrons, dit-il (p. 12), toute hypothèse por-

tant sur l'infiniment petit, qui est par définition même l'insaisissable; nous n'énoncerons nos inductions qu'en *lois intégrales*, c'est-à-dire en lois concernant des grandeurs finies. »

Que le lecteur compare le livre de Robin à un *Traité usuel de Thermodynamique*, il aura vite reconnu combien cette obligation de présenter toute formule sous forme intégrale rend l'exposition compliquée et inélégante.

Mais cette obligation même, il est impossible de la toujours respecter; il faut bien parfois différentier une égalité; aussi Robin prend-il la peine (p. 56) de montrer qu'il en a le droit; ce qu'il dit pour le prouver lui eût permis d'employer la forme différentielle bien plus souvent qu'il ne l'a fait, au grand avantage de son exposition.

« Nous n'introduirons (p. xiv) que des *grandeurs accessibles à l'expérience*; nous ne prononcerons donc pas les mots *énergie* et *entropie*. » Il faut bien cependant, et dès le début du Livre (p. 57), introduire le *potentiel interne*, et le potentiel interne n'est pas plus directement accessible à l'expérience que l'énergie et l'entropie; il y a plus : dans un nombre immense de cas, les données thermochimiques nous permettent de calculer la variation d'énergie qui accompagne une modification, tandis que la variation de potentiel interne ne nous est pas connue; c'est même l'un des reproches que les tenants de l'ancienne Thermo-chimie ont souvent adressés aux partisans du potentiel interne.

D'ailleurs, les deux notions d'énergie et d'entropie sont si essentielles au développement de la Thermodynamique qu'on se flatterait en vain de les éviter; qu'on les chasse par la porte, elles rentreront par la fenêtre; lorsque Robin écrit les deux relations fondamentales de la Thermodynamique (p. 138 et p. 139), il y fait figurer les deux combinaisons

$$F(T) - T \frac{\partial F(T)}{\partial T} + T\theta(T) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(T)}{\partial T} - \theta(T);$$

ces combinaisons, il ne les nomme point; il se garde même de représenter chacune d'elles par une lettre unique; n'empêche que ce sont précisément l'énergie et l'entropie.

« Nous ne raisonnerons jamais (p. xiv) que sur des *opérations*

réalisables, ou du moins sur des opérations qui peuvent être considérées comme des cas limites d'opérations réalisables. » Nous n'emploierons donc pas ces « modifications virtuelles (p. xi) *qui peuvent être contraires à des lois naturelles*, pourvu qu'elles soient conformes à la définition des paramètres » par lesquels l'état du système est fixé.

Lagrange a fondé la Statique mécanique tout entière sur la méthode des modifications virtuelles; Willard Gibbs a étendu cette méthode à la Statique physico-chimique; par là, nous sommes en possession d'un procédé uniforme, régulier, sûr, pour aborder tout problème de Statique; à l'aide de ce procédé, chacune des équations d'équilibre d'un système donné est obtenue à coup sûr une et une seule fois; ce puissant moyen d'investigation est le résultat d'une évolution scientifique de près de trois siècles, qui va de Léonard de Vinci à Helmholtz en passant par Galilée, Descartes, Pascal, Bernoulli, Varignon, Lagrange, Fourier; Laplace, Gauss, Jacobi et Gibbs; et c'est d'une telle méthode que Robin se prive volontairement!

S'il évitait du moins, en payant un tel prix, de soumettre les systèmes matériels à des modifications qui n'ont point de réalité hors de l'entendement! Il ne le peut; il faut bien fermer certains cycles, faire subir à un système, d'une manière réversible, tel ou tel changement d'état; puisqu'il est interdit de regarder ces opérations comme de pures fictions mathématiques, on imagine que, sous l'action de certains agents, le système subit réellement ces opérations; mais cela ne suffirait pas si ces agents eux-mêmes demeuraient de purs concepts, de pures fictions intellectuelles; il faut donc que l'expérience prouve que de tels agents existent, tout au moins qu'ils sont possibles; or, dans une foule de cas, cette preuve manque. Il y a plus: à maintes reprises, Robin est obligé de faire appel à des agents contre l'existence desquels proteste tout l'enseignement de la Physique et de la Chimie expérimentales; tels sont ces « *corps témoins* (p. 12), incapables de produire ou d'empêcher le mouvement du système, mais capables, en des états et positions convenables, de déterminer ou d'arrêter certaines transformations physiques ou chimiques du système ». De ces actions dues à la simple *présence* de certains corps, la Chimie expérimentale a depuis longtemps fait justice; partout et toujours,

sous l'action de présence, elle a trouvé une modification très réelle qu'une observation trop sommaire n'avait pas aperçue.

Prenons l'exemple même cité par Robin (p. 13), et admettons-en l'exactitude de fait qui, cependant, depuis les expériences de MM. A. Gautier et H. Hélier, serait sujette à caution : « Le mélange tonnant se combine, dès 440° C., d'une façon appréciable, dans un flacon de verre neuf. Mais Van't Hoff a observé que la transformation s'arrête complètement quand les parois du verre ont subi une légère dévitrification. Si donc on chauffe le mélange tonnant dans un vase dont toutes les parois sont déjà dévitrifiées, sauf une, la combinaison se fera; mais il suffira, pour l'arrêter net, de masquer brusquement la paroi neuve par une lame dévitrifiée. » A supposer l'observation exacte, comment devrait-elle s'interpréter? Par les deux énoncés suivants : A 440°, un mélange d'oxygène et d'hydrogène ne peut se transformer en eau. A 440°, un mélange d'oxygène, d'hydrogène et d'un alcali contenu dans un verre peut se transformer en alcali hydraté. Il ne saurait être étonnant que de ces deux réactions essentiellement distinctes, l'une soit possible dans des conditions où l'autre ne l'est pas; mais où trouver maintenant une action de présence qui permette de produire ou d'arrêter à volonté la transformation en eau du mélange tonnant?

De cette discussion, une conclusion se dégage : Vouloir fonder sur la seule induction un système thermodynamique logique, c'est faire une tentative qui ne saurait aboutir; la suite même de ses méditations eût certainement amené Robin à reconnaître cette vérité.

L'analyse des divers Chapitres du Livre fortifiera encore cette conclusion.

III.

Les quatre premiers Chapitres sont consacrés en grande partie à des définitions fondamentales qui méritent d'être examinées avec soin.

La première définition est celle de la *température*; pour introduire cette notion, Robin reproduit presque textuellement (p. 1 à 4) ce que nous en avons dit au début de notre *Commen-*

taire ⁽¹⁾; vient ensuite la définition du thermomètre normal; ici, je n'ai pas lu sans quelque étonnement la phrase suivante, qu'une inexactitude de rédaction peut seule expliquer : « Cet instrument n'a jamais été défini jusqu'ici comme nous allons le faire. » Je reconnais en effet textuellement, dans la définition donnée par Robin, celle que préconisait J. Moutier, qui fut notre maître à tous deux; une seule différence peut être signalée : à l'imitation de Regnault, Moutier prenait l'air sec comme corps thermométrique; selon la convention aujourd'hui adoptée, Robin prend l'hydrogène.

Dans notre *Commentaire*, la définition du travail et de la quantité de chaleur est précédée du postulat de la conservation de l'énergie; il nous a toujours semblé qu'un ordre différent impliquait cercle vicieux. C'est cependant un ordre différent que suit Robin.

La quantité de chaleur l'occupe tout d'abord et il définit en premier lieu ce qu'il nomme une *source*; de cette définition, il passe aisément à celle du calorimètre et de la quantité de chaleur. La définition de la source ne laisse pas que de donner prise à quelques doutes. Il suppose (p. 6) que « ce corps ne rayonne pas de chaleur par sa surface extérieure, c'est-à-dire qu'il ne modifie pas sensiblement avec le temps la température des corps voisins; enfin qu'il est incapable d'exercer aucune espèce d'action sur les corps qui ne sont pas en contact avec lui ». Les mots : « ce corps ne rayonne pas de chaleur » n'ont pas immédiatement de sens, puisque la quantité de chaleur n'a pas encore été définie; il faut donc les expliquer; mais l'explication donnée ne vaut point; un morceau de fer rouge, plongé dans un puits de glace massif, ne modifie pas la température de la glace qui l'environne; il rayonne cependant de la chaleur. Quant aux mots : « n'exercer aucune action », ils ne peuvent jusqu'ici être entendus, puisque la définition de la force, ou plutôt du travail, sera donnée seulement au Chapitre suivant.

Cette notion de *source* joue un grand rôle dans les raisonne-

(1) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 1^{re} Partie, Chap. I, n° 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. VIII, p. 284; 1892).

ments de Robin ; tout système qui se transforme est placé dans une source dont il peut n'avoir pas la température et c'est la température seule de la source, et non celle du corps, qui figure dans les formules.

Cette manière de procéder, dont l'origine se trouve dans une remarque de Clausius (1), ne nous paraît pas présenter tous les avantages qu'on lui attribue ; lorsqu'il s'agit d'états d'équilibre ou de modifications réversibles, la température du système et celle de la source sont identiques ; la distinction s'évanouit donc ; d'autre part, lorsque l'on veut poser les équations de la Dynamique générale, on est obligé de considérer non point la température de la source, mais celle du système ; et c'est ce que fait Robin (p. 233).

A la définition du travail, systématiquement ramené par Robin au travail que produit le déplacement de poids, il nous semble que l'on doit adresser une objection d'une extrême gravité. Citons le début de cette définition (p. 17) :

« Le système à étudier (S) sera toujours supposé placé dans une source, qui recueillera ou fournira toute la chaleur qu'il pourra mettre en jeu. Ce système sera en relation avec un ensemble d'agents mécaniques et de corps témoins que nous désignerons collectivement, pour abrégcr, sous le nom de *corps extérieurs* ou de *système étranger* (S_1) Ces deux systèmes (S) et (S_1), ainsi que la source ou les sources qui les entourent successivement, forment une portion (P) de l'univers *isolée*, de manière à n'éprouver aucune action de la part du monde extérieur et à n'en exercer aucune sur lui.

» Le premier système étranger, le plus simple, que nous considérerons est celui qui ne pourra éprouver d'*autre modification qu'un changement de configuration* de ses parties, dont la densité, la température, la composition chimique, etc., restent invariables. Elles n'exercent point d'action à distance les unes sur les autres, comme il a été dit, de sorte que si l'une d'elles est détachée du reste, elle tombera vers le sol Ce seront des solides indéformables, des fils et des membranes inextensibles, des fluides incompressibles ; ces hypothèses sont admissibles au moins

(1) CLAUSIUS, *Die mechanische Wärmetheorie*, 2^{te} Auflage, Bd. I, p. 110.

dans une première approximation... Un pareil système sera dit *système de poids*.

» Le système étranger (S_1) étant ainsi défini, considérons d'abord deux états d'équilibre de (S) auxquels correspondent nécessairement deux états d'équilibre de (S_1); ces deux derniers états ne diffèrent que par le déplacement de certains des corps extérieurs. Rapportons ces déplacements à des axes de coordonnées dont l'un, l'axe des z , sera vertical et dirigé vers le bas. Soit P le poids de l'un des corps déplacés....»

Mais n'avons-nous pas supposé, il y a un instant, que « les deux systèmes (S) et (S_1) formaient une portion (P) de l'univers isolée, de manière à n'éprouver aucune action de la part du monde extérieur et à n'en exercer aucune sur lui »? Pourquoi une partie du système (S_1) tomberait-elle sur le sol dont elle n'éprouve aucune action? Comment peut-il être question, pour les corps du système (S_1), de *verticale* dirigée vers le *bas*, et comment surtout peut-on parler du *poids* de l'un d'eux? Ces mots ont-ils donc un sens pour un système qui n'est pas soumis à l'action de la terre et qui ne réagit pas sur elle? Et s'ils n'en ont aucun, que vaut donc cette nouvelle définition du travail, rendue indépendante de la notion de force?

« Nous arrivons (p. 38) à la notion capitale de réversibilité qui est due à Sadi Carnot. C'est l'idée la plus originale qui ait été acquise dans les Sciences, l'invention la plus imprévue, la plus hardie, la plus géniale des temps modernes. Elle a souvent été mal comprise. »

Longtemps, en effet, la notion de modification réversible fut, pour beaucoup d'esprits justes et rigoureux, une sorte de pierre de scandale qui les arrêtaient au seuil de la Thermodynamique; si, disaient-ils, un système soumis à certaines actions extérieures subit une modification d'un certain sens, comment les mêmes actions pourraient-elles aussi lui faire subir la même modification, mais en sens inverse? Les difficultés que soulevait la définition encore imprécise de la réversibilité ont, aujourd'hui, complètement disparu; mettant à profit les indications de divers auteurs,

et particulièrement de Clausius, nous nous sommes attachés à préciser cette définition (¹). *Une modification réversible n'est pas une modification*; c'est une suite continue d'états d'équilibre que l'esprit du physicien peut aussi bien parcourir dans un sens que dans l'autre; mais cette suite d'états d'équilibre, parcourue dans un premier sens, est la limite d'une infinité de modifications réalisables, tandis que, parcourue en sens inverse, elle est la limite d'une autre infinité de modifications réalisables. Cette définition a été adoptée par divers mathématiciens et physiciens, parmi lesquels nous nous plairons à citer MM. E. et F. Cosserat et M. Helm.

Cette définition, Robin l'admet dans le fond; mais sa doctrine touchant la forme qui convient aux théories physiques, en l'obligeant à ne raisonner jamais que sur des *opérations réalisables* (p. xiv), le gêne pour proclamer que la modification réversible ne saurait être réalisée, qu'elle est une pure opération intellectuelle; parfois donc, il semble qu'il en parle comme si l'on pouvait réellement faire subir à un système une telle modification (p. 39); en aucun cas, il n'en marque nettement le caractère essentiel, il n'affirme qu'elle est une pure conception de l'esprit.

IV.

Nous excéderions de beaucoup les bornes imposées à cet article si nous discussions les principes et leurs applications avec autant de détail que les définitions. Nous nous contenterons donc d'examiner quelques points choisis parmi ceux qui ont surtout attiré notre attention.

Nous avons cité ci-dessus (II) la forme très originale sous laquelle Robin énonce les deux principes auxquels il conserve le nom de *principes de Carnot*. Ces principes portent exclusivement sur les cycles *monothermiques*. Il serait impossible d'en rien tirer touchant les cycles *dithermiques* (cycles de Carnot) ou

(¹) *Étude sur les travaux thermodynamiques de J. Willard Gibbs* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2^e série, t. XI, juin et juillet 1887). — *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 2^e Partie, Chap. I (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4^e série, t. IX, p. 305; 1893).

polythermiques, si l'on ne leur adjoignait une proposition qui leur soit hétérogène. En effet, outre ces deux principes, Robin admet, comme un fait d'expérience, qu'un corps particulier, l'hydrogène, vérifie le postulat de W. Thomson (p. 94); dès lors, il lui est aisé de prouver, par une méthode bien connue, que tous les corps doivent également vérifier ce postulat.

Les énoncés donnés par Robin pour les deux principes de Sadi Carnot diffèrent de ceux que nous avons donnés dans notre *Étude sur les travaux thermodynamiques de J. Willard Gibbs* et dans notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*; ils s'en rapprochent cependant par un trait commun : les énoncés de Robin, comme les nôtres, embrassent aussi bien les cycles irréversibles que les cycles réversibles.

Depuis le temps où nous avons donné ces énoncés, leur généralité nous a paru trop grande et nous les avons restreints ⁽¹⁾ aux seuls cycles réversibles; nous avons reconnu, en effet, que nos énoncés très généraux pouvaient conduire à des conséquences inadmissibles. Nous nous proposons de montrer que la même observation peut être faite au sujet des énoncés de Robin.

De ces principes, par des démonstrations dont la rigueur ne fait point de doute, Robin déduit la proposition suivante :

Supposons qu'un système, parti de la température T_0 et plongeant successivement dans des sources dont la température est T_1, T_2, \dots, T, y éprouve des modifications *non réversibles* qui correspondent à des dégagements de chaleur Q_1, Q_2, \dots, Q . Nous aurons l'*inégalité* (p. 139)

$$\frac{Q_1}{AT_1} + \frac{Q_2}{AT_2} + \dots + \frac{Q}{AT} > \frac{\partial F(T)}{\partial T} - \theta(T) - \frac{\partial F(T_0)}{\partial T_0} + \theta(T_0).$$

L'inégalité ne serait remplacée par une *égalité* que si toutes les modifications considérées étaient *réversibles*. Or, nous nous sommes attachés à prouver ⁽²⁾ qu'il existe des modifications nou

⁽¹⁾ *Traité élémentaire de Mécanique chimique, fondé sur la Thermodynamique*, t. I, p. 61. Paris, 1897.

⁽²⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3^e Partie, Chap. II, n^o 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. X).

réversibles pour lesquelles l'inégalité précédente doit être cependant remplacée par une égalité; ce sont toutes les modifications au cours desquelles le travail des résistances passives est constamment nul; tels sont tous les mouvements des systèmes sans viscosité ni frottement qu'étudie la Mécanique classique.

Il est vrai qu'une difficulté pourrait être soulevée; les températures qui figurent dans l'énoncé de Robin sont les températures des diverses sources qui enveloppent le système; au contraire, dans nos énoncés, il est toujours question de la température du système lui-même. La difficulté s'évanouit si l'on prend soin de se limiter à des modifications durant lesquelles le système garde une température invariable; rien n'empêche alors de l'enfermer dans une source gardant sans cesse cette même température, et le langage employé dans nos énoncés ne diffère plus de celui de Robin. Or c'est précisément de telles modifications sans changement de température que traite habituellement la Dynamique classique.

Si donc on veut garder les principes de Robin dans leur entière généralité, on est tenu de considérer les mouvements sans viscosité ni frottement comme impossibles; on peut supposer très petit le travail des résistances passives, mais on ne peut le supposer rigoureusement nul; la Dynamique classique devient un *cas limite* de la Thermodynamique générale; elle n'en saurait plus être un *cas particulier*.

Parmi les propositions que Robin tire des principes de Carnot, ou mieux des lois de Statique qui en découlent, se trouve (p. 79) le critérium de stabilité de l'équilibre isothermique : *Pour qu'un état soit un état d'équilibre isothermique stable, il faut et il suffit que le potentiel total du système soit minimum dans cet état*. Tout le monde sait que Lagrange avait déjà énoncé une telle proposition dans le domaine de la Mécanique rationnelle; tout le monde connaît également la belle et rigoureuse démonstration par laquelle Lejeune-Dirichlet a prouvé que ce critérium *suffisait* à

p. 230; 1894). — *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 1^{re} Partie, Chap. I, § V, formule (33) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5^e série, t. II; 1896).

assurer la stabilité de l'équilibre. Nous avons fait remarquer ⁽¹⁾ que cette démonstration s'étendait aux équilibres plus généraux que considère la Thermodynamique.

Robin adresse à cette démonstration de Lejeune-Dirichlet de vives critiques (p. 83). Laissons de côté l'assertion que « Dirichlet se sert de la théorie des petits mouvements »; visiblement, elle résulte d'une inadvertance; la démonstration de Lagrange reposait sur la théorie des petits mouvements; Dirichlet a précisément eu pour objet de s'affranchir de cette méthode peu rigoureuse. Il est d'ailleurs très facile de tenir compte, dans la démonstration de Lejeune-Dirichlet, des actions de viscosité que Robin semble lui objecter. Arrêtons-nous plutôt à la critique que renferment les lignes suivantes :

« Il importe de remarquer que, grâce aux principes de Carnot, nous avons pu établir *complètement* cette proposition capitale, sans faire intervenir les lois de la Dynamique. Or Lejeune-Dirichlet a seulement démontré que le minimum du potentiel est une condition *suffisante* pour l'équilibre stable, mais non qu'il en est la condition *nécessaire*; et sa démonstration s'appuie sur des résultats empruntés à la Dynamique, ce qui est un grave défaut; il n'est pas acceptable qu'on doive connaître les lois exactes du mouvement pour établir un théorème relatif à l'équilibre. »

Il nous paraît difficile de souscrire à ce jugement et de regarder le problème de la stabilité de l'équilibre comme une question de Statique. En effet, en quoi consiste exactement ce problème : On prend un système dans un état d'équilibre; on l'écarte de cet état et on lui imprime des vitesses initiales; il se met en mouvement; on veut prouver que si le dérangement initial et l'impulsion initiale sont suffisamment petits, ce mouvement éloignera très peu le système de l'état d'équilibre considéré? Il est bien évident qu'il s'agit d'établir un théorème relatif non pas à l'équilibre du système, mais à son mouvement; c'est donc à la Dynamique et non

⁽¹⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3^e Partie, Chapitre IV, n^o 2 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. X, p. 264; 1894).

à la Statique que l'on en doit demander la démonstration; c'est, d'ailleurs, ce qu'ont pensé Lagrange et Lejeune-Dirichlet aussi bien que M. Liapounoff et M. Hadamard.

Ces remarques font craindre que la démonstration donnée par Robin ne soit pas pleinement rigoureuse; l'examen de cette démonstration ne fait que confirmer cette crainte.

Le point de départ de cette démonstration est le théorème suivant (p. 78) : *Dans une transformation isothermique spontanée, entre deux états d'équilibre, le potentiel total ne peut que diminuer.*

Voici la première partie (p. 79) de la démonstration à laquelle cette proposition sert de lemme :

« Supposons que, dans l'état (A), le potentiel total soit *minimum*. Je dis que (A) est un état d'équilibre stable, car, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait y maintenir le système en équilibre au moyen de liaisons appropriées; à la rupture d'une de ces liaisons succéderait une *transformation spontanée* du système qu'on pourrait arrêter dans l'état (A'), très voisin de (A). Dans cette transformation entre deux états d'équilibre (A) et (A'), le potentiel total devrait, en vertu du théorème précédent, avoir *diminué*, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du minimum en (A)... »

Si, comme le suppose cette dernière phrase, l'état (A) est un état d'équilibre, il n'est point nécessaire d'user de liaisons pour y maintenir le système en équilibre; de plus, à la rupture de ces liaisons, le système n'éprouvera aucune modification spontanée. Pour qu'il éprouve une modification spontanée, il faudra ou bien le déranger quelque peu de l'état (A), ou bien lui imprimer des vitesses initiales, ou bien réaliser à la fois ces deux opérations; mais alors, l'état initial du système n'est plus l'état d'équilibre (A) et n'est même plus un état d'équilibre.

Quant à l'état (A'), est-il un état d'équilibre? Si, aux forces qui agissaient sur le système et qui correspondent au potentiel total considéré, on adjoint d'autres forces capables de l'arrêter en (A'), le système s'y trouvera en équilibre, mais, les forces extérieures agissantes n'étant point celles qui correspondent au potentiel considéré, le théorème précédent n'est pas applicable; si, au con-

traire, les forces agissantes sont celles qui correspondent à ce potentiel, elles ne maintiennent pas le système en équilibre dans l'état (A').

Il semble, du reste, qu'une certaine confusion se soit glissée ici entre la notion d'équilibre et la notion d'équilibre stable; elle apparaît, en particulier, dans ce membre de phrase (p. 79): « Un état d'équilibre stable est, par définition, un état d'équilibre dans lequel aucune transformation spontanée n'est possible... ». C'est là un caractère commun à tous les états d'équilibre.

Étudiant l'équilibre adiabatique, Robin établit (p. 148) cette proposition : *quand un équilibre est stable relativement aux modifications isothermiques, il est stable relativement aux modifications adiabatiques*. Cette proposition nous est due ⁽¹⁾.

Le problème de la propagation de l'onde explosive a été pour la première fois abordé dans nos études sur les faux équilibres ⁽²⁾; nous l'avons résolu seulement dans le cas particulier où le milieu, en avant du front de l'onde, est immobile et où la température et la pression y ont exactement les valeurs pour lesquelles la combinaison prend naissance; en d'autres termes, nous avons supposé que le mélange gazeux au sein duquel se fait la propagation était dans un état de *faux équilibre limite*. Nous avons admis qu'en traversant le front de l'onde, la pression p , le volume spécifique ω , la température T et les trois composantes u , v , w de la vitesse variaient d'une manière continue, tandis que leurs dérivées partielles pouvaient varier d'une manière discontinue; l'emploi de la méthode d'Hugoniot nous a fourni aisément, dans ces conditions, la vitesse de propagation de l'onde explosive.

Quelles sont les lois suivant lesquelles se propage cette onde lorsque l'état initial du milieu n'est plus un état de faux équilibre limite? C'est là une de ces questions qu'il est impossible d'éviter.

⁽¹⁾ *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3^e partie, Chap. IV, n^o 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. X, p. 271; 1894).

⁽²⁾ *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 2^e partie, Chap. V, § 3 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5^e série, t. II; 1896).

Si l'on veut encore que les variables p , ω , T , u , v , w varient d'une manière continue lorsqu'on traverse le front de l'onde, il faut que, sur ce front même, p et T aient, en chaque point, les valeurs pour lesquelles débute la réaction; chaque point du front de l'onde doit se trouver dans un état de faux équilibre limite, partant dans un état qui n'est pas l'état initial du fluide.

Il faut donc que le fluide, en aval du front de l'onde, soit déjà en mouvement; les opinions peuvent d'ailleurs différer sur la nature de ce mouvement; on ne peut supposer qu'il s'avance dans le fluide en repos en formant une onde analogue à l'onde sonore, car celle-ci, qui se propage beaucoup plus lentement que l'onde explosive, ne peut la précéder; mais, avec M. Vieille, on peut supposer qu'une onde de discontinuité précède l'onde explosive; on peut supposer également que le mouvement en aval de l'onde explosive ne se propage pas par ondes; que les fonctions u , v , w sont analytiques dans toute la région située en aval de l'onde explosive, et nulles à l'infini.

Robin ne se propose pas de décider entre ces diverses suppositions; il suppose simplement (p. 206) qu'il y a mouvement de part et d'autre de l'onde explosive, mais que ce mouvement, exempt de toute réaction chimique en aval de l'onde, est accompagné en amont d'une telle réaction. Il en résulte que la loi de détente adiabatique n'est pas la même en amont et en aval; en aval, cette relation a la forme $p = F(\omega)$; en amont, elle a la forme $p = f(\omega)$. Lorsqu'on traverse le front de l'onde, p , ω , T , u , v , w , varient d'une manière continue, mais $\frac{dp}{d\omega}$ présente une discontinuité.

Prenons un point M sur la surface de l'onde; prenons pour axe des x la normale extérieure en ce point, pour plan des (y , z) le plan tangent; accentuons les lettres qui se rapportent à des points en aval de l'onde, Sur l'onde, nous aurons (p. 210)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, & \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\
 (2) \quad & \frac{\partial \omega'}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, & \frac{\partial \omega'}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

et aussi (p. 211)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega'}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{1}{dF} - \frac{1}{df} \right) \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \omega'}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} = \left(\frac{1}{dF} - \frac{1}{df} \right) \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Robin, qui écrit ces équations, ne semble pas avoir aperçu que les égalités (2) et (3) entraînent les égalités

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

auxquelles on peut adjoindre, en vertu de (1), les égalités

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = 0.$$

Pour qu'une onde explosive du genre de celle que nous considérons puisse se propager, il faut qu'en tous les points du front de l'onde la pression ait, en même temps, la même valeur. L'existence des relations $p = f(\omega)$, $p' = F(\omega')$ permet, d'ailleurs, d'étendre cette proposition au volume spécifique et, partant, à la température.

Cette condition est vérifiée d'elle-même si, en aval du front de l'onde, le milieu est immobile; on retombe alors sur le problème que nous avons traité; mais, si le milieu qui précède l'onde explosive est en mouvement, la condition précédente ne sera vérifiée que dans des cas infiniment particuliers, comme le serait le mouvement par *tranches* ou le mouvement par *ondes sphériques*; en général, le problème traité par Robin devient illusoire.

En réalité, une inexactitude essentielle vicie l'exposé de Robin.

La relation entre le volume spécifique ω et la pression p , tant en aval qu'en amont de l'onde, n'est pas donnée sous une forme finie telle que $p = f(\omega)$, $p' = F(\omega')$; elle est donnée sous forme différentielle et s'écrit

$$(4) \quad K(\omega', p') dp' + L(\omega', p') d\omega' = 0,$$

en aval de l'onde et

$$(5) \quad k(\omega, p) dp + l(\omega, p) d\omega = 0$$

en amont. Robin a particulièrement insisté (p. 206) sur la manière d'obtenir cette dernière relation. L'intégration des relations (4) et (5) donne, pour chacun des éléments matériels qui constitue le fluide, des égalités de la forme

$$(6) \quad p' = G(\omega', p'_0, \omega'_0).$$

$$(7) \quad p = g(\omega, p_0, \omega_0),$$

ω'_0, p'_0 étant le volume spécifique et la pression de l'élément matériel à l'instant à partir duquel on lui applique la relation (4); ω_0, p_0 étant le volume spécifique et la pression de l'élément matériel à l'instant à partir duquel on lui applique la relation (5).

Or, le mouvement sans réaction chimique qui se produit en aval de l'onde et auquel on applique la relation (4) peut être censé engendré à partir d'un état où le fluide homogène et immobile avait partout même pression et même volume spécifique; dans ces conditions, ω'_0, p'_0 ont même valeur pour tous les éléments matériels situés en aval de l'onde; on peut donc remplacer l'égalité (6) par une égalité $p' = F(\omega')$ de même forme pour tous ces éléments.

Mais il n'en est plus de même en amont de l'onde. La relation (7) est applicable à un élément matériel du moment que le mouvement dont il est animé est accompagné d'une réaction chimique; l'instant à partir duquel on doit l'appliquer à un élément, c'est l'instant où cet élément a commencé à subir une réaction chimique, l'instant où il a passé par un état de faux équilibre limite, en un mot l'instant où il s'est trouvé sur le front de l'onde; ω_0, p_0 sont le volume spécifique et la pression de cet élément à cet instant; dans le problème que nous avons traité, on était assuré que ω_0, p_0 (respectivement identiques à ω'_0, p'_0) avaient même valeur pour tous les éléments; l'égalité (7) pouvait alors être remplacée par une égalité $p = f(\omega)$ de même forme pour tous les éléments; mais, dans le problème traité par Robin, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi; ω_0, p_0 varieront en général, en amont de l'onde, d'un élément à l'autre et leur présence inévi-

table dans l'équation (7) compliquera la solution (1) des diverses questions d'Hydrodynamique.

Toutefois, dans ce cas, la propagation de l'onde explosive s'étudierait sans peine en employant les méthodes qui nous ont permis (2) d'étudier la propagation de l'onde ordinaire dans les fluides parfaits.

En 1894 et en 1895, dans trois Mémoires étendus présentés à l'Académie de Belgique, nous avons posé les principes (3) d'une théorie des déformations permanentes; cette théorie a été développée ensuite en de nombreux écrits. Dans le Chapitre intitulé : *Statique des déformations permanentes*, Robin fait à la priorité de nos recherches cette simple allusion (p. 215) : « Nous ferons de ces phénomènes une étude géométrique simple, équivalente à une étude analytique longue et compliquée. » Cette assertion n'est pas entièrement exacte.

Robin se contente d'étudier un système défini par une seule variable normale hors la température; celle-ci, d'ailleurs, est supposée invariable. Dans ces conditions, la théorie qu'il développe concorde avec la nôtre, pourvu toutefois qu'il se propose d'étudier seulement les modifications éprouvées par le système et non point les quantités de chaleur que ces modifications mettent en jeu; car, à la différence de la nôtre, sa théorie ne lui fait point connaître la loi qui régit ces phénomènes. D'ailleurs, le cas traité est éminemment restreint. Veut-on rendre à la température la liberté de varier? Veut-on surtout étudier un système défini par plusieurs variables normales hors la température? L'exposé de Robin n'ouvre pas la voie aux généralisations qui permettent de traiter ces problèmes. Cet exposé se borne donc à présenter sous forme géométrique quelques-unes des propositions qui composent notre théorie; si celle-ci est plus longue et plus compliquée, elle

(1) *Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique* (Comptes rendus, t. CXXXII, p. 117; 21 janvier 1901).

(2) *Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits* (Comptes rendus, t. CXXXII, p. 1303; 3 juin 1901).

(3) *Sur les déformations permanentes et l'hystérésis*. Mémoires présentés à l'Académie de Belgique le 13 octobre 1894, le 11 mars 1895 et le 3 août 1895 (*Mémoires in-4° de l'Académie de Belgique*, t. LIV).

est aussi incomparablement plus étendue et plus riche en résultats.

Le Chapitre XIII et dernier traite le *problème général de la Dynamique*.

Si un système est défini par n variables normales hors la température, la Thermodynamique ne fournit que n équations du mouvement de ce système; il faudra donc, au moyen d'hypothèses étrangères à cette Science, former une équation de plus, dite *relation supplémentaire*. Cette vérité est apparue tout d'abord lorsque Laplace et Poisson ont voulu étudier la propagation du son dans un fluide; nous l'avons énoncée dans son entière généralité (¹). Robin montre (p. 241) comment, si l'on connaît la loi de l'émission de la chaleur par la surface qui limite le système, on pourra former cette équation supplémentaire.

Outre cette équation, on peut écrire n équations, dites *équations du mouvement*, qui correspondent respectivement aux équations d'équilibre.

Pour passer de chacune des équations d'équilibre à l'équation correspondante du mouvement, on peut se contenter d'ajouter à l'action qui s'exerce réellement un terme nouveau, l'*action d'inertie*; c'est le procédé de d'Alembert; il conduit aux équations de Lagrange.

Ces équations ne s'accordent pas avec tous les phénomènes qu'étudie la Dynamique générale; il est nécessaire de compléter chacune d'elles par l'introduction d'un terme nouveau; ce terme, introduit d'abord par Navier, par Poisson, par lord Rayleigh, par W. Thomson et Tait, puis, d'une manière plus systématique et plus générale, par Helmholtz et par nous-même, est l'*action de viscosité*; elle dépend des *vitesse*s (dérivées par rapport au temps des variables normales) et s'annule avec elles.

Ainsi complétées, les équations du mouvement restent en désaccord avec des classes étendues de phénomènes, tels que les effets du frottement et les faux équilibres chimiques; il faut donc

(¹) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3^e Partie, Chapitre II, n^o 2 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, t. X, p. 225; 1894).

les modifier encore en introduisant un nouveau terme, l'*action de frottement*; ce terme ne tend plus vers zéro lorsque toutes les vitesses tendent vers zéro; de plus, la valeur limite vers laquelle il tend change selon que ces diverses vitesses tendent vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives.

Ces principes ont été posés par nous ⁽¹⁾ en 1896. Ils sont repris par Robin (p. 242). Robin leur laisse d'ailleurs cette forme très générale, tandis que nous avons poussé plus avant la détermination des termes de frottement. Il ne peut donc mener bien loin les conséquences de ces principes; en fait, il se borne à en établir une seule, dont nous allons dire quelques mots.

Lorsqu'on introduit, dans les équations de la Dynamique générale, des termes de frottement, on modifie, par le fait même, les lois de la Statique; les conditions d'équilibre sont représentées non plus par des équations, mais par des inéquations, en sorte que ces états d'équilibre forment un *continuum*. Dans son immortel Ouvrage *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*, Gibbs avait déjà observé, en analysant les résultats de l'expérience la plus obvie, que les faux équilibres chimiques présentaient ce caractère; mais il n'avait pas tenté de donner aux lois de la Dynamique et de la Statique une forme analytique qui le reproduisît. Nous avons montré ⁽²⁾ que ce caractère découlait des hypothèses que nous avons faites sur la dynamique des systèmes affectés de frottement. Robin démontre également (p. 246) l'existence de ce *continuum* d'équilibre.

Cette démonstration termine réellement l'œuvre de Robin sur la Thermodynamique générale. Le Chapitre XIV traite de *quelques propriétés thermiques des corps rattachés à la théorie des mouvements stationnaires*; il reproduit des recherches plus anciennes dans l'œuvre de Robin; ces recherches se rattachent aux efforts de Clausius pour retrouver le théorème de Carnot, à partir de l'hypothèse des mouvements stationnaires; elles dé-

⁽¹⁾ *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*; 2^e Partie: du Frottement (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5^e série, t. II; 1896).

⁽²⁾ *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 2^e Partie, Chap. I, § 2 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5^e série, t. II; 1899).

coulent de méthodes physiques que Robin a rejetées plus tard (p. x).

Les bornes que cette étude ne saurait excéder ne nous ont pas permis d'être complet; elles nous ont obligé de choisir parmi les questions traitées en ce Livre, court de forme, mais riche de fond; nous avons cru être utile au lecteur en analysant les Chapitres qui nous paraissaient prêter à discussion, de préférence à ceux dont nous n'aurions eu qu'à louer la netteté et la rigueur; si notre compte rendu semble plus sobre d'éloges que de critiques, l'explication en est là et non dans la valeur même du Livre de Robin.

Des discussions qui se sont développées devant lui, le lecteur conclura du moins que ce Livre suggère des idées et qu'il fait penser. Or, dans le domaine si neuf, si peu exploré, de la Thermodynamique générale, on ne saurait, sans grande audace, se proposer de construire un système définitif. Dès lors, faire penser n'est-il pas l'objet que doit surtout se proposer un esprit doué d'originalité? N'est-ce pas le but que visait G. Robin?

P. DUHEM.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathém.*, 2^e série, t. XXV; novembre 1901.)

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures; se vendant séparément (OUVRAGE COMPLET) :

I^o PARTIE : *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima;* 1887..... 15 fr.

II^o PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces;* 1889..... 15 fr.

III^o PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces;* 1894..... 15 fr.

IV^o PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique;* 1896..... 15 fr.

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Deux volumes grand in-8, se vendant séparément :

TOME I : Volume de iv-338 pages avec figures; 1898..... 10 fr.

TOME II..... (En préparation.)

FRENET (E.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux aspirants à la licence ès Sciences mathématiques. 5^e édition, augmentée d'un *Appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales*, par H. LAURENT, Examineur d'admission à l'École Polytechnique. In-8, avec figures; 1891..... 8 fr.

LAGRANGE. — **Œuvres complètes de Lagrange**, publiées par les soins de J.-A. Serret et G. Darboux, Membres de l'Institut, sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet.

La I^{re} Série comprend tous les *Mémoires* imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément..... 30 fr.

La II^e Série se compose de 7 volumes, qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits; savoir :

Tome VIII : *Résolution des équations numériques;* 1879..... 18 fr.

Tome IX : *Théorie des fonctions analytiques;* 1881..... 18 fr.

Tome X : *Leçons sur le calcul des fonctions;* 1884..... 18 fr.

Tome XI : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX (1^{re} PARTIE : *Statique*); 1888..... 20 fr.

Tome XII : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX (2^e PARTIE : *Dynamique*); 1889..... 20 fr.

Tome XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert*, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par LUDOVIC LALANNE. In-4; 1882..... 15 fr.

Tome XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants*, publiée et annotée par LUDOVIC LALANNE, avec deux fac-similés; 1892..... 15 fr.

PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

[Librairie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, Paris (6^e).]

	FORMAT.	PÉRIODICITÉ.	PARIS.	FRANCE et ALGERIE.	UNION POSTALE.
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, publiées par les Professeurs.....	In-4	Trimestriel	fr 25	fr 28	fr 28
Annales de l'Observatoire de Montsouris, publiées par les Chefs de service.....	G ^d in-8	Trimestriel	15	17	17
Annales de l'Université de Grenoble, publiées par les Facultés et l'École de Médecine.....	G ^d in-8	3 N ^{os}	42	42	45
Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, publiées par les Professeurs, II ^e Série.....	In-8	Trimestriel	42	42	43
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, publiées par les Maîtres de Conférences.....	In-4	Mensuel	30	35	35
Bulletin astronomique, publié par l'Observatoire de Paris; Directeur H. POINCARÉ.....	G ^d in-8	Mensuel	46	48	48
Bulletin de la Société française de Photographie.....	G ^d in-8	Mensuel	15	15	18
Bulletin de la Société internationale des Électriciens.....	G ^d in-8	Mensuel	25	27	27
Bulletin de la Société mathématique de France.....	G ^d in-8	4 N ^{os}	45	46	46
Bulletin des Sciences mathématiques, publié par G. DARBOUX et J. TANNERY.....	G ^d in-8	Mensuel	48	20	20
Bulletin mensuel du Bureau central météorologique de France, par E. MASCART.....	In-4	Mensuel	5	6	6
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.....	In-4	Hébdomad.	20	30	34
Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par CAMILLE JORDAN.....	In-4	Trimestriel	30	35	35
Journal de Physique théorique et appliquée, publié par E. BOUÏE, A. CORNU, E. MASCART et A. POTIER.....	G ^d in-8	Mensuel	45	45	45
L'Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par G.-A. LAIBANT, EM. LEMOINE, Ed. MAULLET et A. GRÉVY.....	In-8	Mensuel	7	8,50	8,50
Mémorial des Poudres et Salpêtres. Prix pour un volume (4 fascicules en deux années).....	G ^d in-8	Semestriel.	42	43	43
Moniteur de la Photographie, Directeur LÉON VIBAL.....	G ^d in-8	Bi-mensuel	45	17	19
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par LAISANT et ANTOUR.....	In-8	Mensuel	8	9	10
Revue générale de Chimie pure et appliquée, fondée par Ch. Friedel et G.-F. Joubert.....	G ^d in-8	Bi-mensuel	45	17	17
American Journal of Mathematics pure and applied. Editors TH. CRAIG et SIMON NEWCOMB.....	G ^d in-4	Trimestriel	30	30	30
L'Art en Photographie. Reproduction d'œuvres primées en concours mensuels.....	G ^d in-4	Mensuel	22	22	22
Le Mathématiche pure ed applicata. Revue de Mathématiques (Enseignement supérieur et secondaire); par M. le Professeur CRISTOFORO ALASIA.....	In-8	Mensuel	42	42	42
Mathesis, Recueil mathématique publié par MANSION et NEUBERG.....	G ^d in-8	Mensuel	9	9	9
Revue semestrielle des publications mathématiques (Société mathématique d'Amsterdam).....	G ^d in-8	Somestriel	8,50	8,50	8,50

Les abonnements sont faits pour un an et partent de Janvier. — Envoyer un mandat de poste ou valeur sur Paris à M. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55 à Paris, 6^e. On peut aussi s'abonner, sans supplément de frais, en versant le prix de l'abonnement dans un des bureaux de poste de France et de l'Union postale. — Lorsque l'abonnement n'est pas payé en souscrivant, le prix est augmenté de 50 centimes pour frais de recouvrement.