ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino | † **Salvatore Pincherle** in Bologna
Tullio Levi-Civita in Roma | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO XV
(LXXIV DELLA RACCOLTA)

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE
BOLOGNA, 1936-XV

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1936-XV

CONTRIBUTI ALLA TEORIA DELLE CONNESSIONI.

I. CONNESSIONI PROIETTIVE: COSTRUZIONE AL FINITO, CLASSIFICAZIONE SECONDO KLEIN.

Memoria di ENEA BORTOLOTTI (a Firenze) e VÁCLAV HLAVATÝ (a Praga).

Sunto. - *Gli AA. espongono una ricostruzione, che a un tempo è semplificazione e completamento in punti essenziali, e modificazione abbastanza profonda dal punto di vista concettuale, della teoria delle connessioni proiettive: basata su un procedimento di passaggio al limite, a partire da costruzioni* al finito. *Premettono l'esposizione del formalismo adottato: cui dà concretezza il poggiare su considerazioni geometriche semplici ed espressive. Precisano e analizzano la nozione di derivazione proiettiva; passano poi a una classificazione delle connessioni proiettive secondo le vedute di* KLEIN: *in cui accanto alle connessioni affini, metriche (di* WEYL), *euclidee appaiono per la prima volta in tutta la generalità le « connessioni metriche non-euclidee », variamente utilizzate, in casi particolari, nelle recenti teorie della « Relatività proiettiva ».*

INTRODUZIONE

1. La nozione di « connessione » in uno spazio curvo è stata sinora presentata sotto questi due aspetti fondamentali:

a) l'aspetto *analitico* (VEBLEN [1]): secondo cui la connessione è il sistema, anzi l'« oggetto geometrico », ad es. $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, dotato di una determinata legge di trasformazione (ad es. (14.8) pei « parametri misti » di una connessione proiettiva). Questo è del tutto chiaro e preciso, ma non appaga il geometra, perchè non dice nulla all'intuizione.

b) l'aspetto *geometrico-infinitesimale,* che è quello delle definizioni originarie di WEYL, CARTAN [2]. Secondo il quale dare una connessione affine a una X_n (per es.) vuol dire assegnare una legge di raccordo affine fra gli spazi tangenti *in punti infinitamente vicini....* Questa veduta singolarmente espressiva indubbiamente rivela la vera essenza delle connessioni; nel primo stadio costruttivo della teoria ha portato un aiuto prezioso ai ricercatori. Ma volendo passare ad una esposizione sistematica e razionale di queste ricerche,

---

(1) Ved. p. es. **48**, p. 162; **49**, pp. 185-186. (I numeri si riferiscono all'Elenco bibliografico).

(2) **1**, p. 389; **4**, **5**, **12**, **13**, **14**, **20**; e **29**, ove la veduta del CARTAN è formulata in tutta la sua generalità.

appare desiderabile sostituire, in qualche modo, quelle parole « punti infinitamente vicini » — tanto discusse, fors'anche calunniate! ma ad ogni modo di apparenza un po' troppo vaga e mal sicura — con un effettivo procedimento di limite, che parta da enti costruibili *al finito.*

Questo problema ci s'è presentato durante la redazione di un'opera d'insieme sulle connessioni, che in collaborazione stiamo preparando e verrà pubblicata fra non molto. Ma abbiamo creduto opportuno premettere, in una pubblicazione a parte, una esposizione preliminare delle nostre vedute sull'argomento: sia per saggiare i metodi d'esposizione e di ricerca che abbiamo in vista, che per dare una sede adeguata a sviluppi, collegamenti, considerazioni critiche e comparative che nel libro d'insieme non potrebbero trovar posto.

Naturalmente basterà dare una costruzione al finito delle *connessioni proiettive*: le altre connessioni (lineari) si possono ricondurre a quelle proiettive con una classificazione fatta secondo i principi di KLEIN. Questo a priori appare naturale, e del resto già dal CARTAN questa veduta è stata illustrata ([3]). Ma una esposizione completa, anche nei riguardi delle connessioni (metriche) *non-euclidee*, non era stata data: è quanto facciamo nel presente lavoro, ove accanto a una sintesi di risultati già contenuti in precedenti lavori nostri e di altri Autori si troveranno anche parecchi risultati nuovi.

Abbiamo premesso quegli elementi sui *tensori proiettivi*, che costituiscono un formalismo indispensabile, non tanto per le connessioni proiettive vere e proprie, quanto per le *derivazioni proiettive*, che ne sono un complemento e una generalizzazione naturale, di non minore interesse per le applicazioni. Prima di giungere ai tensori proiettivi abbiamo precisato, e illustrato con caratterizzazioni geometriche espressive, i *riferimenti* in relazione ai quali i vari tipi di componenti — o, se si vuole, di tensori — vanno interpretati. La distinzione fatta tra i tensori *geometrici* e i tensori *analitici* chiarifica assai la teoria e permette di liberare la parte propriamente geometrica da sovrastrutture superflue. L'introduzione dell'$(n+1)$-esimo differenziale, o in particolare dell'$(n+1)$-esimo parametro, viene subordinata alla considerazione di un campo di iperpiani (degli spazi tangenti).

Questo nel § 1. Il § 2 dà la costruzione al finito delle connessioni proiettive. Ciò conduce, effettivamente, a valersi di elementi i quali contengono di più di quanto non sia indispensabile; ma questo è forse nella natura

([3]) **20**, p. 318 e seg.

delle cose. Le relazioni fra i trasporti proiettivi a distanza finita a partire dai quali si costruiscono la connessione proiettiva e anche la relativa derivazione covariante, e il trasporto proiettivo (generalmente non integrabile) lungo una curva, cui la stessa connessione dà luogo, vengono convenientemente analizzate.

Il § 3 ha carattere più formale; introdotti, accanto ai parametri *misti* $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, che si presentano nel modo più spontaneo, i parametri *proiettivi* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ per la connessione proiettiva, si prende l'occasione per passare a parlare delle *derivazioni* proiettive in generale: fra cui soltanto le derivazioni « di prima specie » corrispondono a effettive connessioni proiettive.

Nel § 4, introdotte le *geodetiche* della connessione proiettiva, ce ne serviamo poi per caratterizzare, entro i campi di rappresentazioni omografiche a distanza finita che dànno origine alla supposta connessione proiettiva, uno di essi che dalla connessione medesima è intrinsecamente determinato: il trasporto a distanza finita *lungo una geodetica.*

Il § 5 è dedicato allo studio delle grandezze di *curvatura* e di *torsione* della connessione e delle derivazioni proiettive: accanto al lato formale (formule di commutazione) anche le interpretazioni geometriche sono illustrate e precisate.

Si passa, col § 6, allo studio di connessioni subordinabili a quella proiettiva: cominciando come è naturale da quella *affine.* Lo studio di questa è collegato a quello di un campo di iperpiani dati negli spazi tangenti di una varietà. Si accenna occasionalmente a una rappresentazione affine a distanza finita che risulta dalla costruzione delle *coordinate affini normali* (di VEBLEN).

Infine nel § 7 si mostra come si subordinino alla connessione affine quella *metrica* (secondo WEYL e CARTAN) e quella *euclidea,* o in particolare *riemanniana,* assegnando accanto al campo d'*iperpiani* (che servono da iperpiani impropri) un campo di *coni quadrici*; e nel § 8 si subordina analogamente alla connessione proiettiva quella *metrica non-euclidea* più generale, assegnando negli spazi tangenti un campo di *quadriche.* Si ritrovano in particolare svariate connessioni non-euclidee già conosciute, fra le quali una già introdotta da uno di noi: la quale *è individuata dal campo di quadriche,* e appare la più semplice.

La presente Memoria è il primo lavoro di una serie « Contributi alla teoria delle connessioni »: i lavori seguenti verranno pubblicati da noi o da nostri allievi o collaboratori, e saranno dedicati alle varietà anolonome, al calcolo di VITALI generalizzato, alla teoria dell'immersione, eventualmente ad altri argomenti connessi.

§ 1. Riferimenti proiettivi locali. Tensori proiettivi.

2. Siano le $\xi^r (r, s, t, p, q = a_1, \ldots, a_n)$ (4) coordinate curvilinee in una X_n, che per ora supporremo immersa in uno spazio proiettivo P_N. Se in questo le y^A sono coordinate proiettive omogenee $(A, B, C, D, E = 0^*, 1^*, \ldots, N^*)$ la X_n avrà in P_N una rappresentazione parametrica

$$y^A = y^A(\xi^{a_1}, \ldots, \xi^{a_n}). \tag{2.1}$$

Circa i secondi membri delle (2.1), supporremo che in una certa regione (n–dimensionale) Ω della X_n essi non si annullino mai simultaneamente, e siano funzioni finite, univoche e continue delle ξ^r, insieme alle loro derivate di tutti gli ordini che ci occorra di considerare; infine, che in Ω sia n la caratteristica della matrice funzionale $\left\| \dfrac{\partial y^A}{\partial \xi^r} \right\|$.

Consideriamo in P_N le y^A, ρy^A, ove ρ è uno scalare $\neq 0$ arbitrario, quali coordinate di due « punti analitici » distinti: cosicchè i *punti analitici* di P_N saranno biunivocamente riferiti ai sistemi di valori (non simultaneamente nulli) delle coordinate y^A, e due punti analitici corrisponderanno al medesimo *punto geometrico* allora e solo che avranno coordinate proporzionali (5). Analogamente si definiranno gli « iperpiani analitici » di P_N. Ciò premesso: dare le (2.1) equivale in realtà a dare la X_n *come luogo di punti analitici* di P_N, cioè non soltanto assegnare geometricamente la X_n in P_N, ma anche fissare per ciascun suo punto il fattore d'omogeneità delle coordinate y^A. Naturalmente *proprietà geometriche* della X_n saranno soltanto quelle invarianti per ogni trasformazione

$$\widetilde{y}^A = \rho(\xi^{a_1}, \ldots, \xi^{a_n}) \cdot y^A \qquad (\rho \neq 0) \tag{2.2}$$

che ne altera i punti *analitici* ma ne lascia fissi i punti *geometrici.*

(4) Dal n. 6 in poi useremo più semplicemente 1, 2,... n quali contrassegni fissi per le n coordinate curvilinee. Vedi (10). Non ci varremo nel presente lavoro di coordinate curvilinee *omogenee*: circa le quali ci limitiamo a rimandare ai lavori di v. DANTZIG e SCHOUTEN, spec. **71**, **89**, **93** (p. 41), **100**; ved. anche **108**.

(5) L'utilità della considerazione dei *punti analitici* accanto ai *punti geometrici* è apparsa manifesta sin dai primi lavori sulle connessioni proiettive. (Ved. **14**, **17**). Ma grande la varietà di definizioni e di denominazioni! Il *punto analitico* è stato detto *densità puntuale* (**56**, **61**), punto dotato di un *peso* (**69**) o *punto quotato* (**100**), *pro-vettore controvariante* (H. **84**: con le iniziali H. o B. contrassegniamo i lavori dovuti agli AA. della pres. memoria) e il punto geometrico è stato detto luogo, o *posto* (*spot, Ort*) (**89**, **71**), o *punto-ideale* (**92**, **108**) o *contro-punto* (H. **84**). Le denominazioni qui prescelte hanno forse maggiore probabilità di entrare nell'uso. Già qualche Autore le adotta: ved. p. es. S. FINIKOFF, **97**, p. 212.

3. In un punto generico ξ della X_n lo spazio proiettivo d'appartenenza dei punti

$$B^A_{a_0} = y^A, \quad B^A_r = \frac{\partial y^A}{\partial \xi^r} \tag{3.1}$$

è lo spazio proiettivo (P_n) ivi *tangente*. Le coordinate proiettive z^A (in P_N) di un qualunque punto analitico dello spazio P_n si possono esprimere sotto la forma

$$z^A = z^{a_0} y^A + z^r \frac{\partial y^A}{\partial \xi^r} = z^\alpha B^A_\alpha \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta = a_0, a_1, \dots, a_n). \tag{3.2}$$

Le z^α sono su P_n coordinate proiettive omogenee del punto z^A considerato rispetto ai punti B^A_α quali punti fondamentali, e al punto $B^A_{a_0} + B^A_{a_1} + \dots + B^A_{a_n}$ — che da essi, *in quanto sono punti analitici,* viene determinato — quale punto unità.

Per una trasformazione (2.2), e così pure per una trasformazione

$$\xi^r = \xi^r(\xi^{a'_1}, \dots, \xi^{a'_n}) \tag{3.3}$$

delle coordinate curvilinee in X_n, il riferimento proiettivo ora detto *non è invariante*: inteso invece — come è naturale — che per le medesime trasformazioni sia invariante il punto analitico $z^A = z^\alpha B^A_\alpha$, ricaviamo che per una trasformazione simultanea (2.2) e (3.3), del fattore d'omogeneità delle coordinate proiettive in P_N dei punti di X_n, e delle coordinate curvilinee su questa, i punti B^A_α e le coordinate z^α hanno le seguenti leggi di trasformazione:

$$B'^A_{\alpha'} = \rho A^\beta_{\alpha'} B^A_\beta \qquad (\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \zeta', \eta' = a_0', a_1', \dots, a_n') \tag{3.4}$$

$$z^{\alpha'} = \rho^{-1} A^{\alpha'}_\beta z^\beta \tag{3.5}$$

ove abbiamo posto

$$A^{a_0}_{a'_0} = 1, \quad A^r_{a'_0} = 0, \quad A^{a_0}_{s'} = \frac{\partial \log \rho}{\partial \xi^{s'}}, \quad A^r_{s'} = \frac{\partial \xi^r}{\partial \xi^{s'}}, \quad (\text{ed } A^{\beta'}_\alpha A^\gamma_{\beta'} = \delta^\gamma_\alpha). \tag{3.6}$$

Il complesso dei sistemi proiettivi (B^A_α) sugli spazi tangenti costituisce per la X_n quello che diremo un *riferimento proiettivo (locale) olonomo*, o C-*riferimento* [6]. Questo è *parzialmente* legato al riferimento curvilineo (ξ^r),

---

[6] I C-riferimenti si presentano nel modo più naturale a chi voglia studiare le proprietà proiettive delle X_n in P_N: ved. B. **67** e **70**, p. 35 e seg. e pp. 9-10, ove la nozione è introdotta come particolarizzazione dei B-riferimenti, di cui qui invece si parlerà più oltre (n. 6). Le corrispondenti trasformazioni, caratterizzate dalle (3.6), o dalle C) del n. 7, sono state introdotte dal Veblen: **52**, pp. 144-146. Ved. anche **65**, p. 332; B. **66**, p. 373.

e precisamente, ha quale punto fondamentale $B^A_{a_0}$ il punto di contatto dello spazio tangente generico con la X_n, e ha i punti fondamentali B^A_r posti sulle tangenti in quel punto alle n linee coordinate (ξ^r) che ne escono. Ma l'iperpiano fondamentale opposto al punto fondamentale $B^A_{a_0}$, e così anche il punto unità, non sono legati alla scelta del riferimento curvilineo, bensì a quella del fattore arbitrario delle coordinate y^A su X_n, cioè, alla particolare rappresentazione (2.1) della X_n quale *luogo di punti analitici* in P_N.

4. Si possono subordinare i riferimenti proiettivi locali per la X_n all'assegnazione del riferimento curvilineo: ad es. quando si conosca uno scalare $\tau(\xi^{a_1}, \ldots, \xi^{a_n})$ che per le (2.2), (3.3) abbia la legge di trasformazione

$$\widetilde{\tau} = \rho \Delta^{\frac{1}{n+1}} \tau \tag{4.1}$$

ove

$$\Delta = \frac{\partial(\xi^{a_1}, \ldots, \xi^{a_n})}{\partial(\xi^{a'_1}, \ldots, \xi^{a'_n})}. \tag{4.2}$$

Allora effettivamente le coordinate normalizzate

$$'y^A = \tau^{-1} y^A \tag{4.3}$$

risultano invarianti per le (2.2), e per un cambiamento (3.3) del riferimento curvilineo divengono

$$\widetilde{'y}^A = \Delta^{-\frac{1}{n+1}}\, 'y^A. \tag{4.4}$$

Ponendo nelle (3.4), (3.5), (3.6),

$$\rho = \Delta^{-\frac{1}{n+1}} \tag{4.5}$$

abbiamo che la trasformazione dei punti $'B^A_\alpha$ e delle coordinate $'z^\alpha$ (con $'$ designando gli elementi che corrispondono al valore (4.5) di ρ) viene effettivamente determinata da quella (3.3) delle coordinate curvilinee.

Il riferimento $('B^A_\alpha)$ si dirà, per la X_n, un riferimento proiettivo (locale) olonomo *speciale*, o D-*riferimento* (7).

---

(7) I D-riferimenti sono in sostanza dovuti al Cartan (**14**, p. 212). Questi mostra come, data una connessione proiettiva, sugli spazi tangenti risulti associato a un rifemento curvilineo per la X_n un riferimento proiettivo locale: ebbene tali riferimenti locali costituiscono appunto un D-riferimento (B. **70**, pp. 10, 19). Le corrispondenti D-trasformazioni si sono presentate, attraverso a un ordine assai diverso di considerazioni, al Veblen (**48**). La relazione è stata notata in B. **64**, II, p. 33. Ved. anche **47**, **54**; H. **83**; H. **84**, pp. 225-226; e cfr. **26**, **33**, H. **46**; **50**, **96**; **56**, **71**. In alcuni di questi lavori l'esponente $-\dfrac{1}{n+1}$ di Δ nella (4.5)

5. Accanto ai riferimenti proiettivi locali *olonomi* per la X_n può occorrere l'uso di riferimenti *anolonomi*. Il tipo più generale (A-*riferimento*) si ha prendendo, su ciascuno spazio tangente, *ad arbitrio* gli elementi fondamentali e unità, cioè assegnandovi ad arbitrio $n+1$ punti analitici indipendenti quali punti fondamentali ([8])

$$D_0^A,\ D_1^A, \dots,\ D_n^A, \quad \text{o} \quad D_\lambda^A \qquad (\lambda, \mu, \nu, \sigma, \tau, \upsilon, \omega = 0, 1, \dots, n). \tag{5.1}$$

Questi punti si potranno trasformare con formule arbitrarie di trasformazione lineare:

$$D'^A_{\lambda'} = U^\mu_{\lambda'}(\xi^{\alpha_1}, \dots, \xi^{\alpha_n}) D^A_\mu \qquad (\lambda', \mu', \nu', \sigma', \tau', \upsilon', \omega' = 0', 1', \dots, n') \tag{5.2}$$

per le quali le coordinate di un punto analitico del generico spazio tangente varieranno nel seguente modo:

$$z^{\lambda'} = U^{\lambda'}_\mu z^\mu \qquad (U^{\lambda'}_\mu U^\nu_{\lambda'} = \delta^\nu_\mu). \tag{5.3}$$

Un caso particolare di A-riferimento è quello pel quale il punto fondamentale D_0^A coincide, su ciascuno spazio tangente, col punto di contatto, $y^A = B^A_{\alpha_0}$ (A_0-riferimento ([9])). Per questi riferimenti nelle (5.2) e (5.3) è

$$U^i_{0'} = 0 \qquad (\text{ed } U^{i'}_0 = 0) \tag{5.4}$$

$(i, j, h, k, l = 1, \dots, n;\ i', j', h', k', l' = 1', \dots, n')$ cioè, posto

$$U^0_{0'} = \rho(\xi^{\alpha_1}, \dots, \xi^{\alpha_n}) \qquad (\text{onde } U^{0'}_0 = \rho^{-1}) \tag{5.5}$$

è sostituito da altri valori numerici. Quale sia l'intima ragione della scelta del valore $-\frac{1}{n+1}$ potrà vedersi in **48**, B. **64**, B, **70**.

L'effettiva determinazione dello scalare τ può farsi in modi differenti: si veda H. **83**, p. 412 e seg., pel caso $N = n+1$. Pel caso generale supponiamo che si sappiano associare in modo proiettivamente invariante al punto variabile $B^A_{\alpha_0}$ della X_n $N-n$ campi di punti $\underset{1}{v}^A, \dots, \underset{N-n-1}{v}^A, w^A$ che insieme a $B^A_{\alpha_0}, B^A_{\alpha_1}, \dots, B^A_{\alpha_n}$ formino N-uple di punti indipendenti e siano invarianti per le (3.3), mentre per le (2.2) le loro coordinate subiscano la moltiplicazione per lo stesso fattore ρ. Indicati con $D = (B_{\alpha_0}, B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}, \underset{1}{v}, \dots, \underset{N-n-1}{v}, w)$, $f_{rs} = (B_{\alpha_0}, B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}, \underset{1}{v}, \dots, \underset{N-n-1}{v}, B_{rs})$ i determinanti di ordine $N+1$ delle coordinate dei punti entro parentesi $\left(\text{ove } B^A_{rs} = \frac{\partial^2 y^A}{\partial \xi^r \partial \xi^s}\right)$; posto infine $f = | f_{rs}$ e supposto $f \neq 0$, basta porre

$$\tau = D^{\frac{1}{N+1}} (f D^{-n})^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}\right)}.$$

([8]) Dal Cartan (**14**) sono introdotti e usati gli A-riferimenti più generali; ved. inoltre B. **70**, pp. 6, 23.

([9]) Anche per gli A_0-riferimenti ved. Cartan, **14**, p. 210; B, **70**, p. 7. Cfr. **56**. p. 107 e seg.

si ha

(5.6) $$U^{\lambda}_{o'} = \rho\delta^{\lambda}_{o'} = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda \neq 0 \\ \rho & \text{per } \lambda = 0 \end{cases} \qquad (U^{\lambda'}_{o} = \rho^{-1}\delta^{\lambda'}_{o}).$$

6. Nella stella di direzioni dello spazio P_n tangente a X_n nel punto ξ generico la scelta del riferimento curvilineo e di un A_0-riferimento dà luogo *a una omografia*: quella che alle tangenti alle n linee coordinate ξ^r — le cui coordinate omogenee $\frac{d\xi^r}{dt}$ sono proporzionali ad $10\ldots0$, $01\ldots0, \ldots$, $00\ldots1$ — e alla « direzione unità », per la quale $\frac{d\xi^{a_1}}{dt} = \frac{d\xi^{a_2}}{dt} = \ldots = \frac{d\xi^{a_n}}{dt}$, fa corrispondere le direzioni delle rette congiungenti il punto ξ, cioè il punto fondamentale D^A_0, ai punti fondamentali $D^A_1, \ldots, D^A_n$ e al punto unità $D^A_0 + D^A_1 + \ldots + D^A_n$ del sistema proiettivo locale. Tale omografia *in generale varia*, quando si cambino comunque il riferimento curvilineo e l'A_0-riferimento. Ma *se poniamo la condizione che invece tale omografia* Π *sia invariante* per dette trasformazioni — onde risulta lecito identificare i contrassegni *fissi* $a_0 a_1 \ldots a_n$ e $01\ldots n$ (e quindi anche i contrassegni *correnti* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ e $\lambda\mu\nu\sigma\tau\upsilon\omega$; $ijhkl$ ed $rstpq$;... [10]) — dobbiamo collegare le trasformazioni (3.3) e (5.2) mediante formule

(6.1) $$U^r_{s'} = \tau(\xi^1, \ldots, \xi^n)\,\frac{\partial\xi^r}{\partial\xi^{s'}}.$$

La condizione ulteriore che, quando *non vengano mutate le coordinate curvilinee* (cioè, le (3.3) si riducano all'identità), *le formule* (5.2) *trasformino il sistema proiettivo locale mediante una omologia speciale* ci dà poi (avuto riguardo alle (5.6))

(6.2) $$\tau = \rho.$$

Infine possiamo scrivere

(6.3) $$U^{\lambda}_{\mu'} = \rho A^{\lambda}_{\mu'} \qquad (\text{ed } U^{\mu'}_{\lambda} = \rho^{-1}A^{\mu'}_{\lambda})$$

ove (cfr. le (3.6))

(6.4) $$A^{o}_{o'} = 1, \quad A^{r}_{o'} = 0, \quad A^{r}_{s'} = \frac{\partial\xi^r}{\partial\xi^{s'}} \qquad (\text{ed } A^{\lambda'}_{\mu}A^{\nu}_{\lambda'} = \delta^{\nu}_{\mu})$$

le $A^{o}_{s'}$ restando *del tutto arbitrario.* Abbiamo allora quello che diremo un B-*riferimento* [11]. In particolare l'omografia Π detta sopra può ridursi *al-*

---

[10] D'ora in poi intendiamo dunque, per semplicità, quando non sia luogo ad equivoci, sempre sostituiti i secondi contrassegni ai primi.

[11] I B-riferimenti sono introdotti in B. **70**, pp. 8, 18; sulle corrispondenti B-trasformazioni già un cenno è in **65**, p. 352. Vedi anche B. **78**; e **94**, pp. 182-183.

l'identità: il che ci dà in particolare che i punti fondamentali D_r^A stanno sulle tangenti alle linee coordinate ξ^r. Diremo allora che si ha un B_1-*riferimento.*

L'ipotesi ulteriore

$$A_{s'}^0 = \frac{\partial \log \rho}{\partial \xi^{s'}} \tag{6.5}$$

dà luogo, come caso particolare del B_1-riferimento, al C-*riferimento*, o riferimento *olonomo generale*; e più in particolare a quello *speciale*, o D-*riferimento*; dei quali abbiamo già parlato.

7. Le (3.5) pel caso di un riferimento proiettivo *olonomo*, le (5.3) per quello di un riferimento *anolonomo* mettono in evidenza il comportamento di tipo *tensoriale* dei *punti analitici* degli spazi tangenti per una trasformazione del riferimento. È naturale riguardare il punto analitico come un *tensore controvariante di valenza* 1 ([12]) (cioè, secondo la terminologia più frequentemente adottata, *del 1° ordine*) per le trasformazioni ora dette. Si presenta questa generalizzazione:

Diremo *tensore proiettivo analitico*, in un punto ξ della X_n, *un ente rappresentabile, in relazione a un qualunque* A-*riferimento, mediante un sistema di quantità* $H_{\lambda_1 \dots \lambda_h}^{\dots \mu_1 \dots \mu_k}$, a condizione che, *per una trasformazione* (5.2) *dell'*A-*riferimento, tale sistema abbia la legge di trasformazione*

$$H_{\lambda_1' \dots \lambda_h'}^{\dots \mu_1' \dots \mu_k'} = U^p U_{\lambda_1'}^{\lambda_1} \dots U_{\lambda_h'}^{\lambda_h} U_{\mu_1}^{\mu_1'} \dots U_{\mu_k}^{\mu_k'} H_{\lambda_1 \dots \lambda_h}^{\dots \mu_1 \dots \mu_k}, \tag{7.1}$$

ove le $U_{\lambda'}^{\lambda}$, $U_{\mu}^{\mu'}$, ed

$$U = | U_{\lambda'}^{\lambda} | \tag{7.2}$$

s'intendono calcolate nel supposto punto: ed h, k sono numeri interi ≥ 0 (per $h = 0$, ad es., intendendosi che *manchi* il gruppo di termini $U_{\lambda'}^{\lambda}$); p è un numero reale qualunque. Più precisamente $H_{\lambda_1 \dots \lambda_h}^{\dots \mu_1 \dots \mu_k}$, dotato dalla legge di trasformazione (7.1), si dirà un A-*tensore proiettivo di valenza* h + k (*valenza covariante* h, *valenza controvariante* k); *di peso* p, *di grado*

$$g = p(n + 1) + h - k. \tag{7.3}$$

Quando il peso sia *nullo*, $p = 0$, il grado g ha il valore

$$g = h - k \tag{7.4}$$

([12]) La parola « valenza », adottata da v. Dantzig, da Schouten e Struik al luogo di quello che i più chiamano « ordine » di un tensore (ved. **71**, p. 451; **107**, p. 7) è assai espressiva e appropriata: basti pensare alla *saturazione* degli indici.

che si dirà, per un tensore di valenza covariante h e valenza controvariante k, il *grado normale* ([13]).

Alla veduta cui s'ispira la precedente definizione si contrappone — ma il contrasto è soltanto formale — l'altra, di carattere ***nominale***, secondo cui l'A-tensore ***si identifica*** senz'altro con l'insieme dei sistemi di componenti che esso ha rispetto a tutti i possibili A-riferimenti: fra loro legati dalle formule (7.1). *È del tutto indifferente*, in sostanza, che si adotti questa o l'altra veduta: osserviamo soltanto che in quanto si consideri, secondo la prima veduta, l'ente « tensore » come qualche cosa di esistente *all'infuori* dei sistemi di componenti che lo rappresentano, si potrà parlare di « A-componenti di un tensore », anzichè di « componenti di un A-tensore ». Ma non pensiamo di attribuire gran peso a simili distinzioni!

Fissiamo ad ogni modo, l'attenzione su ciò che caratterizza le « A-trasformazioni », cioè le trasformazioni (7.1) per gli A-tensori:

A) *Le* $\mathrm{U}^{\lambda}_{\mu'}$ *sono qualunque* (*tali soltanto che* $|\mathrm{U}^{\lambda}_{\mu'}| \neq 0$).

([13]) Anche a proposito dei tensori proiettivi (cfr. ([5])) la terminologia finora usata dai differenti Autori è quanto mai varia; non solo, ma gli stessi nomi hanno indicato enti spesso distinti. In un primo tempo si è detto ***tensore proiettivo*** (T. Y. Thomas: **25**, p. 318) un tensore ***affine***, invariante per le trasformazioni di una connessione affine che ne conservano le geodetiche. Dal Veblen è stato detto tensore proiettivo quello che qui è chiamato D-*tensore* (**48**) poi quello che qui vien detto C-***tensore proiettivo analitico*** (**52**). In lavori recenti il tensore proiettivo analitico vien detto spesso ***proiettore*** (**71**, **74**, **89**, **108**), mentre il tensore proiettivo geometrico, qui definito un po' più innanzi (n. 7), è stato chiamato *proiettore-ideale* (**92**, **108**). Pei due enti sono state usate anche le denominazioni rispettive: *pro-affinore*, e ***proiettore*** (H. **84**). Nei vari casi si trattava, volta a volta, di C-tensori, D-tensori ed anche di enti soggetti ad altre leggi di trasformazione. Speriamo che la presente formulazione possa apparire abbastanza chiara e completa! La parola « tensore », qui adottata, è già nell'uso in un significato che comprende quelli attribuiti alle parole *affinore*, *proiettore*, ecc. .... Scegliere una diversa parola pei diversi tipi di tensore (nel senso comunemente inteso), anche soltanto pei principali, è forse una complicazione superflua! Anche su questo punto pensiamo sia opportuna una semplificazione.

La parola « peso », per un tensore proiettivo, è qui usata in un significato che è estensione diretta e naturale di quello usuale (ved. per es. H. **44**). Le denominazioni « eccesso » e « grado » sono state introdotte dal v. Dantzig (**71**, p. 451). Ricordiamo che pel v. Dantzig le componenti di un tensore sono funzioni omogenee (dello stesso grado) delle $n+1$ variabili *omogenee*, cui i punti della varietà sono riferiti: il grado del tensore è semplicemente il grado d'omogeneità ora detto. Ma avuto riguardo alle (7. 7) l'uso della stessa parola nelle nostre ipotesi (alquanto differenti) appare giustificato. L'eccesso è pel v. Dantzig la differenza fra il grado e la « valenza algebrica » (differenza fra la valenza controvariante e la valenza covariante) del tensore (onde la denominazione): questa relazione è per $p=0$ — con *cambiamento di segno* della « valenza algebrica »; in modo da dare ai punti analitici (di peso 0), in armonia con la (3.5), il grado -1 — la nostra (7.6), l'estensione è naturale. Sia l'eccesso che il grado possono considerarsi estensioni di quella che vien detta (**51**; **107**, p. 10) *classe* di una pseudograndezza, in relazione a una pseudograndezza fondamentale (di classe 1).

Come si passi, in relazione a un B-riferimento, oppure a un C- o D-riferimento, alle corrispondenti nozioni di B-tensori,..., D-tensori, risulta ormai quasi ovvio: ma lo esporremo in modo preciso, tanto più che risulta naturale una ulteriore generalizzazione.

Quando il riferimento adottato per la X_n sia un B-*riferimento* (o casi particolari) le $U^{\lambda}_{\lambda'}$ ed $A^{\lambda}_{\lambda'}$ sono date dalle (6.3), (6.4), cioè soddisfano alle condizioni seguenti:

$$\text{B)} \qquad U^{\lambda}_{\mu'} = \rho A^{\lambda}_{\mu'}; \quad A^{o}_{o'} = 1, \quad A^{r}_{o'} = 0, \quad A^{r}_{s'} = \frac{\partial \xi^r}{\partial \xi^{s'}}; \quad \begin{cases} A^{o}_{s'}(\xi^1, \dots, \xi^n) \ \textit{arbitrarie} \\ \rho(\xi^1, \dots, \xi^n) \neq 0 \ \textit{arbitrario}. \end{cases}$$

Valendo queste, le (7.1) divengono le « B-trasformazioni »; e allora $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ si dirà un B-*tensore proiettivo* (analitico), o anche le sue componenti $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$, relative a un B-riferimento, se ne diranno B-*componenti.* Ma più precisamente se la legge di trasformazione è la (7.1) il B-tensore si dirà « *di eccesso zero* », e invece diremo che $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ (di valenza $h+k$, di peso p) è un B-tensore « *di eccesso* e » se la legge di trasformazione delle sue componenti è

$$(7.5) \qquad H^{\cdots\mu_1'\cdots\mu_k'}_{\lambda_1'\cdots\lambda_h'} = \rho^e U^p U^{\lambda_1}_{\lambda_1'} \dots U^{\lambda_h}_{\lambda_h'} U^{\mu_1'}_{\mu_1} \dots U^{\mu_k'}_{\mu_k} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}.$$

Ancora: diremo che il tensore $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ ha il *grado*

$$(7.6) \qquad g = e + p(n+1) + h - k.$$

In particolare quando $e + p(n+1) = 0$, cosicchè vale la (7.4), diremo ancora che il tensore è *di grado normale.* Ora il significato di questa nozione risulta ben evidente: basta notare che, in forza delle B), le formule (7.5) secondo cui si trasformano le componenti del B-tensore si possono scrivere

$$(7.7) \qquad H^{\cdots\mu_1'\cdots\mu_k'}_{\lambda_1'\cdots\lambda_h'} = \rho^g \Delta^p A^{\lambda_1}_{\lambda_1'} \dots A^{\lambda_h}_{\lambda_h'} A^{\mu_1'}_{\mu_1} \dots A^{\mu_k'}_{\mu_k} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$$

ove Δ è dato dalla (4.2), cioè

$$(7.8) \qquad \Delta = \frac{\partial(\xi^1, \dots, \xi^n)}{\partial(\xi^{1'}, \dots, \xi^{n'})}.$$

Fra i B-*riferimenti* generali e quelli che abbiamo detto (n. 6) B_1-*riferimenti* non vi è distinzione formale: la differenza è soltanto *nella interpretazione geometrica.* Cosicchè nulla vi è da aggiungere circa i *tensori,* nei riguardi dei B_1-riferimenti.

Passiamo dal B-*riferimento* al C-*riferimento* (nei riguardi formali) aggiungendo la condizione (6.5). Dunque: C-*tensore proiettivo* (analitico) *è un* *ente rappresentabile, in relazione a un qualunque* C-*riferimento, da un sistema* $H^{\cdot\cdot\mu_1\ldots\mu_k}_{\lambda_1\ldots\lambda_h}$ dotato della legge di trasformazione (7.5), cioè (7.7), ove

$$\text{C)}\qquad U^{\lambda}_{\mu'} = \rho A^{\lambda}_{\mu'};\quad A^{o}_{o'} = 1,\quad A^{r}_{o'} = 0,\quad A^{o}_{s'} = \frac{\partial \log \rho}{\partial \xi^{s'}},\quad A^{r}_{s'} = \frac{\partial \xi^{r}}{\partial \xi^{s'}}$$

$$\rho(\xi^1, \ldots, \xi^n) \neq 0 \ \textit{arbitraria},$$

ed U, Δ sono dati ancora dalle (7.2), (7.8).

Infine: con l'ulteriore condizione espressa dalla (4.5) passiamo dai C-*riferimenti* ai D-*riferimenti.* Quindi: D-*tensore proiettivo* (analitico) *è un ente che in relazione a un* D-*riferimento* — e qui possiamo anche dire: in relazione *a un riferimento curvilineo* per la X_n — *si rappresenta con un sistema* $H^{\cdot\cdot\mu_1\ldots\mu_k}_{\lambda_1\ldots\lambda_h}$ dotato della legge di trasformazione (7.7) — la forma più generale (7.5) qui è manifestamente superflua — ove:

$$\text{D)}\qquad A^{o}_{o'} = 1.\quad A^{r}_{o'} = 0,\quad A^{o}_{s'} = \frac{\partial \log \rho}{\partial \xi^{s'}},\quad A^{r}_{s'} = \frac{\partial \xi^{r}}{\partial \xi^{s'}};\quad \rho = \Delta^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Per un D-tensore nelle (7.7) i termini ρ^{g}, Δ^{p} si possono intendere riuniti in un unico termine $\Delta^{-\frac{g}{n+1}+p}$, oppure $\rho^{g-p(n+1)}$: si preferisce scrivere la formula nel primo modo, il che equivale ad assumere $-\dfrac{g}{n+1}+p$ come *peso*, e il *grado* nullo.

È manifesto che un A-*tensore* è anche un B-*tensore di eccesso* 0; un qualunque B-*tensore* è anche un C-*tensore,* ecc.... Nel seguito spesso parleremo di « tensori » proiettivi (analitici) senza specificazione: lo potremo fare senza ambiguità quando sia detto esplicitamente *qual'è il tipo di riferimento adottato.*

Accanto alla nozione di tensore proiettivo *analitico* (A-tensore, B-tensore, ...) occorre introdurre il *tensore proiettivo geometrico*: *ente rappresentabile mediante le componenti di un tensore proiettivo analitico date a meno di un arbitrario fattore scalare* $\neq 0$. Cioè, che fa lo stesso: rappresentabile mediante *l'insieme dei mutui rapporti* fra le componenti di un tensore proiettivo analitico. Secondo che questo è un A-tensore, ..., D-tensore, anche il tensore geometrico si dirà un A-tensore, ..., D-tensore. Naturalmente il *peso*, l'*eccesso*, quindi anche il *grado* del tensore analitico non hanno alcuna influenza sul corrispondente tensore geometrico; cosicchè nei riguardi di questo non sarà restrittivo supporre ad es. il tensore analitico di grado *zero*; oppure di grado *normale* (h — k).

Finora abbiamo inteso riferirci a tensori proiettivi (analitici o geometrici) dati *in un punto* della X_n. È ovvio il passaggio a *campi di tensori* proiettivi, cioè a tensori proiettivi (analitici o geometrici) funzioni delle ξ^r, ossia del punto variabile in un dominio, a un qualunque numero $\leq n$ di dimensioni, della X_n: le cui componenti saranno funzioni delle ξ^r, definite (e continue derivabili,...) nel supposto dominio; s'intende bene che le (7.5), o (7.7) allora si debbono supporre verificate identicamente rispetto alle ξ^r.

Osserviamo ancora che per un tensore proiettivo (analitico) *di grado normale* e di peso 0 si potranno formare, coi coefficienti $U^{\lambda}_{\mu'}$, delle componenti *intermediarie* [14]; mentre per un tensore proiettivo analitico pure di peso 0 ma *di grado* 0 si potranno formare componenti intermediarie coi coefficienti $A^{\lambda}_{\mu'}$. Pel caso di un B-riferimento (o casi particolari), e di un tensore a valenze, covariante e controvariante, *eguali*, si presenta una ambiguità, che può togliersi soltanto distinguendo con opportune denominazioni — ad es. chiamandoli rispettivamente tensori *di tipo I* o *di tipo II* — i tensori pei quali si riguardino, essenzialmente, le $U^{\lambda}_{\mu'}$ oppure le $A^{\lambda}_{\mu'}$, quali *coefficienti delle formule di trasformazione*, che nel primo caso *si dovranno* scrivere nella forma (7.5), nel secondo caso nella forma (7.7). Ad es. è un tensore del tipo I il « *primo tensore unità* » U^{λ}_{μ} avente rispetto a un qualunque A-riferimento le componenti δ^{λ}_{μ}, e rispetto *a due* A-*riferimenti* le componenti intermediarie $U^{\lambda}_{\mu'}$ od $U^{\lambda'}_{\mu}$; è del tipo II il « *secondo tensore unità* » A^{λ}_{μ} che in relazione a un B-riferimento qualunque ha le componenti δ^{λ}_{μ} e in relazione *a due* B-*riferimenti* ha le componenti intermediarie $A^{\lambda}_{\mu'}$ od $A^{\lambda'}_{\mu}$. Ma salvo che nei riguardi delle componenti intermediarie la distinzione dei due tipi di tensori non serve.

8. Torniamo ora dal formalismo alla Geometria! risulta ora evidente quanto accennavamo sopra: che il *punto analitico* dello spazio tangente alla X_n nel suo punto generico si identifica con un tensore proiettivo (analitico) controvariante di valenza 1 *(vettore proiettivo analitico controvariante)*; l'iperpiano (P_{n-1}) analitico dello spazio proiettivo tangente si identifica con un tensore proiettivo analitico covariante di valenza 1 *(vettore proiettivo analitico covariante)*; entrambi di peso 0 e, in relazione a un B-riferimento (o casi particolari) *di eccesso* 0, quindi in ogni caso *di grado normale*, che in relazione a un B-riferimento è -1 pel punto e $+1$ per l'iperpiano ana-

[14] Cfr. **56**. p. 102; **107**, p. 22.

litico [15]. Il *punto geometrico* e *l'iperpiano geometrico* dello spazio tangente si identificano col vettore proiettivo geometrico, controvariante o covariante. Più in generale uno spazio P_h di P_n quale luogo di punti analitici o inviluppo di iperpiani analitici è rappresentabile mediante un *h-vettore* (o tensore emisimmetrico di valenza *h*) *controvariante* proiettivo, analitico, *semplice*, o rispettivamente, mediante un (n — h)*-vettore covariante* proiettivo analitico semplice; in entrambi i casi, di grado normale $(-h$ od $n-h)$; ecc....

9. Pel caso di un B-*riferimento* (o casi particolari) è immediata l'osservazione che un vettore proiettivo controvariante v^λ di grado 0 dà luogo, trascurandone la componente v^0, a un vettore *affine* (relativo, se di peso $\neq 0$) controvariante $v^r = \delta^r_\lambda v^\lambda$; mentre un vettore affine covariante w_r. dà luogo, aggiungendovi una componente nulla, a un vettore proiettivo covariante, $w_\lambda = \delta^r_\lambda w_r$.. Il significato geometrico è semplice: la direzione di $v^r = \delta^r_\lambda v^\lambda$ ha per corrispondente nell'omografia Π (n. 6) quella della congiungente il punto di contatto ξ al punto v^λ; alla giacitura di w_r. corrisponde quella dell'iperpiano $w_\lambda = \delta^r_\lambda w_r$.. Tali elementi corrispondenti in Π divengono *coincidenti* nel caso di un B_1-riferimento (o nei casi particolari: ad es. per tutti i riferimenti *olonomi*).

Poi: uno scalare (invariante) $v^0 \neq 0$ dà luogo, aggregandovi n componenti tutte nulle, a un vettore proiettivo controvariante di grado 0, $v^\lambda = \delta^\lambda_0 v^0$; un vettore proiettivo covariante di grado 0, w_λ dà luogo, trascurandone le componenti w_r, a uno scalare $w_0 = \delta^\lambda_0 w_\lambda$. È ovvia la generalizzazione: se ad es. $H_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\tau\omega}$ è un B-tensore proiettivo (di grado 0) pei suoi quattro indici, $H_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot r\omega}$ $H_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot\tau s}$, $H_{\lambda\mu}{}^{\cdot\cdot rs}$ sono tensori *misti* (proiettivi per alcuni indici e affini pei rimanenti); $H_{\lambda 0}{}^{\cdot\cdot\tau\omega}$, $H_{0\mu}{}^{\cdot\cdot\tau\omega}$, $H_{00}{}^{\cdot\cdot\tau\omega}$ sono tensori proiettivi (ad una o due valenze covarianti di meno del primitivo); $H_{\lambda 0}{}^{\cdot\cdot\tau s}$ è un tensore misto, $H_{00}{}^{\cdot\cdot rs}$ è un tensore affine.... Se A_{rs} è un tensore affine, $\delta^r_\lambda A_{rs}$ è un tensore misto, $\delta^r_\lambda \delta^s_\mu A_{rs}$ è un tensore proiettivo,... [16].

---

(15) Questo non è che uno dei modi possibili di normalizzare il punto *geometrico*, dando origine al punto *analitico* (e analogamente per l'iperpiano). Non è detto che anche altri procedimenti non possano essere utili! Un esempio ci si presenterà fra non molto; nei riguardi della derivazione con parametri $L^\lambda_{\mu r}$ (n. 17) vedremo che gli enti dotati del comportamento più semplice sono i tensori *di eccesso e grado nullo*, e quindi *di peso non nullo*! il che conduce allora a valersi di un'altra normalizzazione per punti e iperpiani degli spazi tangenti.

(16) Ved. **48**, p. 158; B. **70**, p. 12. Le stesse considerazioni valgono anche, più in generale, per A-tensori proiettivi, quando però alla trasformazione per questi si associ, con condizioni analoghe alle (6. 1), una trasformazione del riferimento anolonomo locale affine: ved. **56**, p. 112, o **61**. I, pp. 200-201.

10. Sempre intendendo che i tensori proiettivi della X_n siano riferiti a un B-*riferimento*: si pone naturalmente il problema di completare il sistema $d\xi^r$, che è un vettore affine controvariante, con una $(n+1)$-esima componente (infinitesimale) $d\xi^0$, in modo da formare un B-*vettore proiettivo controvariante* (di grado e peso 0), $d\xi^\lambda$ [17]. È immediato che $d\xi^0$ deve avere, per le B-trasformazioni, la legge di trasformazione seguente:

$$d\xi^0 = d\xi^{0'} + A^0_{r'} d\xi^{r'}. \tag{10.1}$$

Comunque sia scelto $d\xi^0$, il *punto geometrico* $d\xi^\lambda$ sta sulla tangente in ξ, omologa nella omografia II (n. 6) della tangente che ha la direzione $(d\xi^r)$. Fissare un valore per $d\xi^0$ vuol dire *fissare un punto su quella tangente.* Appare naturale convenire che i punti $d\xi^\lambda$ stiano, entro lo spazio tangente in un punto ξ della X_n, *su di un iperpiano.* Assegnato dunque, mediante un campo di vettori proiettivi geometrici covarianti T_λ — la cui legge di trasformazione può scriversi

$$\frac{T_{r'}}{T_{0'}} = A^r_{r'} \frac{T_r}{T_0} + A^0_{r'} \tag{10.2}$$

— *un campo d'iperpiani degli spazi tangenti*, la condizione *d'appartenenza* dei punti $d\xi^\lambda$ a questi iperpiani,

$$T_\lambda d\xi^\lambda = 0 \tag{10.3}$$

dà per $d\xi^0$ l'espressione

$$d\xi^0 = -\frac{T_r}{T_0} d\xi^r, \tag{10.4}$$

cioè definisce $d\xi^0$ quale *forma pfaffiana* nelle $d\xi^r$; la cui legge di trasformazione è appunto quella voluta. In particolare gli iperpiani del supposto campo potrebbero essere quelli *fondamentali,* opposti ai punti fondamentali $y^A = B^A_0$, dei sistemi proiettivi locali: allora e allora soltanto, in ciascun punto della X_n, *$d\xi^0$ si annulla.*

---

[17] La questione *dell'* $(n+1)$-*mo differenziale* $d\xi^0$, o in particolare (in relazione a un C- o D-riferimento) *dell'* $(n+1)$-*mo parametro,* è stata assai discussa: la soluzione che ne diamo, in relazione a un B-riferimento, appare semplice e chiara, mostrando in modo ben esplicito qual'è l'elemento arbitrario di cui abbiamo bisogno per dedurne $d\xi^0$. Una effettiva costruzione di ξ^0 in relazione a un D-riferimento si ha in H. **84**, pp. 224-225; là l'elemento arbitrario è uno scalare additivo. Ved. anche, pel caso generale (B-riferimento) **56**, p. 120, e pei C-riferimenti, i lavori di VEBLEN e WHITEHEAD (**52**, **57**; **55**, **65**). Ricordiamo che per questi Autori ξ^0 è un parametro indipendente da $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n$; e che le componenti dei tensori proiettivi da essi sono considerati dipendenti, per mezzo di un fattore $e^{M\xi^0}$, anche da ξ^0; M si dice *l'indice* del tensore. Ved. su questo anche B. **70**, p. 12.

Si osservi che ad ogni modo — indipendentemente dall'ipotesi che $d\xi^o$ si esprima quale forma pfaffiana nelle $d\xi^r$ — per la (10.2) $d\xi^o$ *muta allora e solo che vengono mutati, nei sistemi proiettivi locali, appunto quegli iperpiani fondamentali* di cui ora accennavamo. Accettata — come intenderemo salvo contrario avviso [18] d'ora in poi — quella ipotesi, si avrà per $d\xi^o$ una determinata espressione soltanto quando fra i dati della questione che si ha in oggetto figuri *anche un campo d'iperpiani* degli spazi tangenti; altrimenti ci si potrà valere di $d\xi^o$, cioè dei punti $d\xi^\lambda$, *ma non vi si potrà attribuire un effettivo significato geometrico.*

Pel caso di un C-riferimento si può porre la condizione ulteriore che $d\xi^o$ *sia il differenziale di una funzione* $\xi^o(\xi^1, \dots, \xi^n)$: ipotesi che per la (10.1) ha significato invariante appunto a condizione che $A^o_{r'}$ sia il gradiente di uno scalare. Basterà porre

$$\xi^o = -\log \varphi, \tag{10.5}$$

ove φ è una funzione scalare delle y^A e delle loro derivate $\frac{\partial y^A}{\partial \xi^r}, \frac{\partial^2 y^A}{\partial \xi^r \partial \xi^s}, \dots$ definita su X_n, e tale che:

1) per le (2.2) si trasformi così:

$$\widetilde{\varphi} = \rho\varphi \tag{10.6}$$

cioè sia nelle $y^A, \frac{\partial y^A}{\partial \xi^r} \cdot \frac{\partial^2 y^A}{\partial \xi^r \partial \xi^s}, \dots$ complessivamente omogenea di grado 1;

2) per le (3.3) sia invariante;

3) non si alteri che per un fattore (costante $\neq 0$) in conseguenza di una trasformazione delle coordinate proiettive in P_N (o anche, di una trasformazione omografica di P_N in sè). Naturalmente φ è determinata solo a meno di un fattore $\neq 0$ invariante per le (2.2) e (3.3), e del resto arbitrario. Corrispondentemente ξ^o è determinato a meno di una funzione additiva arbitraria (invariante per le trasformazioni ora dette).

Pel caso di un D-riferimento, ρ essendo dato dalla (4.5), φ è semplicemente una qualunque *densità scalare* (affine) di peso $-\frac{1}{n+1}$; determinata a meno di un fattore scalare invariante (di peso 0) $\neq 0$ arbitrario [19].

11. Fino ad ora la X_n si è sempre supposta immersa in un ambiente proiettivo P_N $(N \geq n)$. Ma le considerazioni svolte e le nozioni introdotte si

---

[18] Precisamente, è al n. 20, nei riguardi delle *geodetiche*, che ci riuscirà utile non assoggettare $d\xi^o$, a priori, alla condizione (10.4).

[19] Ved. H. 84 (già cit.), pp. 224-225.

possono in gran parte estendere alle X_n ***considerate in sè***, indipendentemente dall'eventuale esistenza di un ambiente proiettivo d'immersione. Le definizioni però vanno convenientemente modificate.

Pel caso attuale dobbiamo supporre esplicitamente quanto per le X_n di P_N è già contenuto nelle ipotesi fatte circa i secondi membri delle (2.1): cioè che entro una regione Ω della X_n i punti sono *biunivocamente* riferiti ai sistemi di valori delle ξ^r.

Non volendo ricorrere alla nozione intuitiva di « spazio proiettivo tangente » (spazio P_n che si immagina contenente il punto generico della X_n insieme col suo intorno del 1° ordine su X_n ([20])) si può anzitutto definire il *tensore proiettivo, analitico* o *geometrico,* in relazione alle A-trasformazioni,..., D-trasformazioni (cioè: l'A-tensore,..., il D-tensore) nel modo indicato al n. 7, ove l'ipotesi dell'*ambiente proiettivo* non interviene in modo essenziale. Qui bisognerà riferirsi alla veduta *nominale* (n. 7) in quanto la nozione del *tensore* preesiste a quella del *riferimento.*

Ciò premesso: le componenti di un tensore geometrico di valenza 1 (vettore geometrico) controvariante proiettivo, dato in un punto ξ della X_n, in quanto sono determinate a meno di un comune fattore e hanno legge di trasformazione lineare intera e omogenea, si possono riguardare quali *coordinate proiettive omogenee di un punto* variabile in uno spazio proiettivo n-dimensionale, P_n, associato al punto ξ della X_n: che si può interpretare quale « spazio proiettivo tangente » alla X_n nel supposto punto. Coordinate in relazione a un sistema di riferimenti locali che, rispettivamente, si potrà dire ancora un A-riferimento,..., D-riferimento: con l'avvertenza che, ad es., quest' ultimo propriamente non si potrà dire *legato al riferimento curvi-*

([20]) Circa la nozione di spazio tangente ved. spec. **14, 52, 53, 54, 56, 95** (III), **108.** Si tratta in fondo di una questione d'interpretazione. Ma appare naturale valersi di quell'elemento concreto, che è lo spazio lineare — proiettivo — *delle direzioni* di X_n nel punto P che si considera. (Cfr. **52,** B. **64,** B. **70**). Inteso dunque che questo spazio di direzioni, insieme al punto P, si pensino dar origine allo spazio proiettivo tangente (quale spazio *puntuale*), risultano intanto *localizzabili* rispetto alle tangenti alle linee coordinate del sistema curvilineo ξ^r (cioè, riferibili ad esse mediante coordinate) le congiungenti di P agli altri punti fondamentali e unità locali di un A_0-riferimento: ciò rende lecito ripetere nel caso attuale le considerazioni che nel n. 6 hanno condotto ai B-riferimenti, e giustifica quanto svolgeremo al n. 17 circa la *deviazione* di una connessione proiettiva. Con questo lo spazio proiettivo tangente non risulta del tutto localizzato rispetto alla varietà, nel senso che una *qualunque* famiglia d'iperpiani degli spazi tangenti, non passanti pei punti di contatto, può identificarsi col sistema degli iperpiani fondamentali opposti ai punti di contatto in un A_0-riferimento arbitrariamente assegnato. Una localizzazione completa si può fare in relazione a una data connessione proiettiva: ved. **14, 54** e B. **70,** pp. 18-19.

lineo, mentre il suo modo di trasformarsi è legato a quello del riferimento curvilineo. Anche ora si potrà introdurre l'$(n+1)$-esimo differenziale $d\xi^o$, o in particolare l'$(n+1)$-esimo parametro ξ^o, come per le X_n in P_N; però non sussiste più quella costruzione che accennammo pel parametro φ, e quindi per ξ^o, in relazione a un C-riferimento.

§ 2. Le connessioni proiettive; costruzione al finito.

12. Supponiamo assegnata una rappresentazione proiettiva (omografia) fra gli spazi proiettivi tangenti nei punti $\underset{o}{\xi}$ e ξ alla X_n (21):

a) *univocamente determinata dalla coppia (ordinata) di punti* ξ *e* $\underset{o}{\xi}$ *e variabile con continuità al variare di* $\underset{o}{\xi}$ *e* ξ *entro una certa regione* n-*dimensionale* Ω *di* X_n;

b) *non degenere in* Ω;

c) *tale che scambiando i punti* $\underset{o}{\xi}$ *e* ξ *si muti nella sua inversa*;

d) *tale che per* $\xi \equiv \underset{o}{\xi}$ *si riduca all'identità.*

I coefficienti $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ di questa omografia, la quale fa corrispondere al punto geometrico $\underset{o}{z}^{\lambda}$ nello spazio tangente in $\underset{o}{\xi}$ il punto geometrico $z^{\lambda}(\underset{o}{\xi}\,\|\,\xi)$ nello spazio tangente in ξ, e quindi è rappresentata da equazioni

$$z^{\lambda}(\underset{o}{\xi}\,\|\,\xi) = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi},\ \xi)\underset{o}{z}^{\mu}, \tag{12.1}$$

saranno dunque (cond. a)) funzioni continue delle $\underset{o}{\xi}^r$ e delle ξ^r in Ω; tali (cond. b)) che in Ω

$$|\,\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi},\ \xi)\,| \neq 0, \tag{12.2}$$

cosicchè si potranno costruire gli *elementi reciproci* $\Pi_{\lambda}^{\cdot\mu}$ delle $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ in $|\,\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}\,|$, soddisfacenti alle

$$\Pi_{\lambda}^{\cdot\mu}\Pi^{\lambda}_{\cdot\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}; \tag{12.3}$$

inoltre si avrà (cond. c))

$$\Pi_{\lambda}^{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi},\ \xi) = \tau(\underset{o}{\xi},\ \xi)\Pi^{\mu}_{\cdot\lambda}(\xi,\ \underset{o}{\xi}) \tag{12.4}$$

e (cond. d))

$$\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi},\ \underset{o}{\xi}) = \psi(\underset{o}{\xi})\cdot\delta^{\lambda}_{\mu}. \tag{12.5}$$

(21) Una prima applicazione delle vedute qui adottate si può trovare in H. **106**, p. 9 e seg.

ove $\tau(\underset{o}{\xi}, \xi)$ e $\psi(\underset{o}{\xi})$ sono funzioni scalari ($\neq 0$) qualunque, la prima supposta soddisfacente alla condizione

$$\tau(\underset{o}{\xi}, \xi) = \tau(\xi, \underset{o}{\xi}). \tag{12.6}$$

I coefficienti $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ naturalmente sono determinati *soltanto a meno di una trasformazione*

$$\Pi^{*\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \sigma(\underset{o}{\xi}, \xi)\cdot\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi), \tag{12.7}$$

ove $\sigma(\underset{o}{\xi}, \xi)$ è uno scalare $\neq 0$ arbitrario.

Circa le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ facciamo l'ipotesi ulteriore che

a') *esistano derivate finite e continue delle* $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ *rispetto alle* $\underset{o}{\xi}^{r}$ *e alle* ξ^{r}, *di tutti gli ordini che occorra considerare.*

Osserviamo inoltre che non è restrittivo supporre, nelle (12.4), $\tau(\underset{o}{\xi}, \xi) = 1$ (bastando per questo introdurre nelle $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ il fattore $\tau^{\frac{1}{2}}(\underset{o}{\xi}, \xi)$); cosicchè le (12.4) diverranno

$$\Pi_{\lambda}^{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \Pi^{\mu}_{\cdot\lambda}(\xi, \underset{o}{\xi}). \tag{12.4*}$$

Questo porta come conseguenza immediata che anche nelle (12.5) il fattore $\psi(\underset{o}{\xi})$ prende il valore 1, cioè che

$$\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) = \delta^{\lambda}_{\mu}; \tag{12.5*}$$

inoltre si vede che le (12.4*) hanno per le (12.7) carattere invariante a condizione che in queste sia

$$\sigma(\underset{o}{\xi}, \xi)\cdot\sigma(\xi, \underset{o}{\xi}) = 1, \tag{12.8}$$

cioè, che lo scalare $\sigma(\underset{o}{\xi}, \xi)$ si muti nel suo inverso quando si scambino fra loro i punti $\underset{o}{\xi}$, ξ.

Le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ dànno anche luogo a una rappresentazione delle totalità dei tensori proiettivi della X_n in $\underset{o}{\xi}$ e in ξ, l'una sull'altra:

$$H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \Pi_{\lambda_1}^{\cdot\tau_1}(\underset{o}{\xi}, \xi)\dots\Pi_{\lambda_h}^{\cdot\tau_h}(\underset{o}{\xi}, \xi)\Pi^{\mu_1}_{\cdot\omega_1}(\underset{o}{\xi}, \xi)\dots\Pi^{\mu_k}_{\cdot\omega_h}(\underset{o}{\xi}, \xi)H^{\dots\omega_1\dots\omega_k}_{\tau_1\dots\tau_h}(\underset{o}{\xi}) \tag{12.9}$$

la quale però in conseguenza delle (12.7) è in realtà determinata soltanto quale rappresentazione dei *tensori proiettivi geometrici* di X_n in $\underset{o}{\xi}$ e in ξ, non dei *tensori proiettivi analitici* [22].

Per una trasformazione (5.2) dell'A-riferimento le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ e $\Pi_{\lambda}^{;\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ hanno la legge di trasformazione seguente:

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\lambda'}_{\cdot\mu'}(\underset{o}{\xi}, \xi) &= U^{\lambda'}_{\lambda}(\xi) U^{\mu}_{\mu'}(\underset{o}{\xi}) \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) \\
\Pi_{\lambda'}^{;\mu'}(\underset{o}{\xi}, \xi) &= U^{\lambda}_{\lambda'}(\xi) U^{\mu'}_{\mu}(\underset{o}{\xi}) \Pi_{\lambda}^{;\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi).
\end{aligned}
\tag{12.10}
$$

Per le (12.10) le (12.4*) hanno carattere d'invarianza; la verifica è immediata.

Notiamo esplicitamente che ad es. le $\Pi^{\lambda'}_{\cdot\mu'}$ sono, come le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$, funzioni dei due punti $\underset{o}{\xi}$ ed ξ: però espresse per le loro coordinate $\underset{o}{\xi}^{r'}$ ed $\xi^{r'}$ anzichè per le $\underset{o}{\xi}^{r}$ ed ξ^{r}.

13. In conseguenza dell'ipotesi a'), finchè ξ resti insieme a $\underset{o}{\xi}$ nella supposta regione Ω della X_n, si ha, tenuto conto delle (12.5*),

$$
\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \delta^{\lambda}_{\mu} - (\xi^r - \underset{o}{\xi}^r)\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}) - \frac{1}{2}(\xi^r - \underset{o}{\xi}^r)(\xi^s - \underset{o}{\xi}^s)\Lambda^{\lambda}_{\mu r s}(\underset{o}{\xi}) - \dots
\tag{13.1}
$$

onde, per le (12.3), si ricava

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mu}^{;\lambda}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \delta^{\lambda}_{\mu} &+ (\xi^r - \underset{o}{\xi}^r)\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}) + \\
&+ \frac{1}{2}(\xi^r - \underset{o}{\xi}^r)(\xi^s - \underset{o}{\xi}^s)\left[\Lambda^{\lambda}_{\mu r s}(\underset{o}{\xi}) + \Lambda^{\lambda}_{\nu r}(\underset{o}{\xi})\Lambda^{\nu}_{\mu s}(\underset{o}{\xi}) + \Lambda^{\lambda}_{\nu s}(\underset{o}{\xi})\Lambda^{\nu}_{\mu r}(\underset{o}{\xi})\right] + \dots
\end{aligned}
\tag{13.2}
$$

---

[22] Naturalmente, se invece le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ si intendono *fissate*, la (12. 9) dà una legge di trasporto dei tensori proiettivi *analitici* di peso ed eccesso *nullo*, di valenze qualunque. Si possono allora anche normalizzare le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ in modo che la legge di trasporto *conservi il peso e l'eccesso* di un B-tensore proiettivo analitico qualunque: di peso p, di eccesso e, di valenze covariante e contravariante h, k; escluso soltanto il caso in cui la *valenza algebrica* $k - h$ sia nulla. Basta sostituire alle $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ i loro prodotti per

$$
\left\{ (\Pi(\underset{o}{\xi}, \xi))^{\frac{e}{n+1}} \right|^{p} \cdot \left(\frac{w(\xi)}{w(\underset{o}{\xi})}\right)^{\frac{e}{n+1}} \left.\right\}^{\frac{1}{h-k}} \qquad (\Pi(\underset{o}{\xi}, \xi) = |\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)|),
$$

ove abbiamo indicato con w un qualunque scalare (affine) di peso 1, cioè abbiamo posto $w = w_{12\dots n}$, ove $w_{r_1 r_2 \dots r_n}$ è un qualunque n-*vettore* affine di peso 0. Come si vede, la normalizzazione *varia al variare di* p, e, h, k.

I coefficienti $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi})$, $\Lambda^{\lambda}_{\mu rs}(\underset{o}{\xi}), \ldots$ degli sviluppi (13.1) sono dati da

$$(13.3)\quad \left\{\begin{aligned} \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}) &= -\left(\frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial \xi^r}\right)_{\xi=\underset{o}{\xi}} = \left(\frac{\partial \Pi_{\mu}^{\cdot\lambda}(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial \xi^r}\right)_{\xi=\underset{o}{\xi}} \\ &= -\lim_{\xi\to\underset{o}{\xi}} \frac{\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) - \delta^{\lambda}_{\mu}}{\xi^r - \underset{o}{\xi}^r} = \lim_{\xi\to\underset{o}{\xi}} \frac{\Pi_{\mu}^{\cdot\lambda}(\underset{o}{\xi}, \xi) - \delta^{\lambda}_{\mu}}{\xi^r - \underset{o}{\xi}^r} \\ \Lambda^{\lambda}_{\mu rs}(\underset{o}{\xi}) &= -\left(\frac{\partial^2 \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial \xi^r \partial \xi^s}\right)_{\xi=\underset{o}{\xi}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Dato un punto $\underset{o}{\xi}$ in X_n, corrispondentemente è determinato un campo di omografie $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, e quindi a un punto $\underset{o}{z}^{\lambda}$ dello spazio tangente in $\underset{o}{\xi}$ risulta associato un campo di punti

$$(13.4)\qquad z^{\lambda}(\underset{o}{\xi} \,\|\, \xi) = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)\underset{o}{z}^{\mu}$$

degli spazi proiettivi tangenti nei punti ξ. In particolare data una qualunque linea Γ,

$$(13.5)\qquad \xi^r = \xi^r(t)$$

uscente da $\underset{o}{\xi}$ in X_n, lungo Γ è determinato in relazione al punto $\underset{o}{\xi}$ un trasporto dei punti degli spazi tangenti (dei punti geometrici, e soltanto quando s'intenda fissata una determinazione delle $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$, anche dei punti analitici), dato in forma finita dalle formule

$$(13.6)\qquad z^{\lambda}(t_0 \,\|\, t) = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi(t))\underset{o}{z}^{\mu}.$$

Possiamo scrivere queste equazioni in forma *differenziale*; per questo, deriviamo rispetto a t, considerando $\underset{o}{\xi}$ come fisso:

$$(13.7)\qquad \begin{aligned} \frac{dz^{\lambda}}{dt} &= \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi(t))}{\partial \xi^r} \underset{o}{z}^{\nu} \frac{d\xi^r}{dt} \\ &= \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi(t))}{\partial \xi^r} \Pi_{\mu}^{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi(t)) z^{\mu} \frac{d\xi^r}{dt} \end{aligned}$$

e infine

$$(13.8)\qquad \frac{dz^{\lambda}}{dt} + \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi(t)) z^{\mu} \frac{d\xi^r}{dt} = 0,$$

ove abbiamo posto

$$(13.9)\qquad \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) = -\frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial \xi^r}\, \Pi_{\mu}^{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial \xi^r}\, \Pi^{\lambda}_{\cdot\nu}(\underset{o}{\xi}, \xi).$$

Le (13.8) sono le *equazioni differenziali* del trasporto dei punti (degli spazi tangenti) definito, in forma finita, dalle (13.6). *A priori* il trasporto è *integrabile*, cioè, considerando le z^λ quali funzioni delle ξ^r, le $\underset{o}{z}^\lambda$, $\underset{o}{\xi}^r$ quali costanti assegnate, il sistema ai differenziali totali

$$(13.10)\qquad dz^\lambda + \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) z^\mu d\xi^r = 0$$

è illimitatamente integrabile. Le $\Pi^{\lambda}_{\mu r}$ si diranno i *parametri* del trasporto in parola: il quale, come trasporto *dei punti geometrici*, può anche rappresentarsi così,

$$(13.11)\qquad \frac{dz^\lambda}{dt} + \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi(t)) z^\mu \frac{d\xi^r}{dt} = \omega(\underset{o}{\xi}, \xi(t)) z^\lambda,$$

ove $\omega(\underset{o}{\xi}, \xi)$ è una funzione scalare arbitraria.

In conseguenza delle (13.1), (13.2), (13.9), si hanno per le $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ gli sviluppi

$$(13.12)\qquad \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}) + (\Lambda^{\lambda}_{\mu r s} + \Lambda^{\lambda}_{\nu r}\Lambda^{\nu}_{\mu s})(\xi^s - \underset{o}{\xi}^s) + \dots$$

in particolare

$$(13.13)\qquad \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) = \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}),$$

cosicchè per una serie ∞^1 di punti degli spazi tangenti che si trasportino secondo la legge determinata dal punto $\underset{o}{\xi}$ e dal campo d'omografie $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, cioè, secondo il trasporto integrabile di parametri $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, nel punto $\underset{o}{\xi}$ si ha (contrassegnando gli elementi calcolati in questo punto con $_0$):

$$(13.14)\qquad \left(\frac{dz^\lambda}{dt}\right)_0 + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}) \underset{o}{z}^\mu \left(\frac{d\xi^r}{dt}\right)_0 = 0.$$

14. Ma ora immaginiamo di *far variare il punto* $\underset{o}{\xi}$. Le (13.14), cioè, indicando ora il punto $\underset{o}{\xi}$ con ξ, le

$$(14.1)\qquad \frac{dz^\lambda}{dt} + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi) z^\mu \frac{d\xi^r}{dt} = 0$$

o anche, le

$$\frac{dz^\lambda}{dt} + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi) z^\mu \frac{d\xi^r}{dt} = \varphi(\xi(t)) z^\lambda \tag{14.2}$$

(ove $\varphi(\xi)$ è una funzione scalare arbitraria) definiscono allora *una nuova legge di trasporto dei punti* (geometrici) *degli spazi proiettivi tangenti,* la quale *nell'intorno del 1° ordine di ciascun punto* $\underset{o}{\xi}$ *coincide con la legge prima considerata,* di parametri $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$; ma a differenza di questa, *non è più vincolata alla scelta di un particolare punto* $\underset{o}{\xi}$. Le $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi)$ sono *i parametri* della nuova legge di trasporto.

Quando vari, secondo la (12.7), il fattore d'omogeneità delle $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, le $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi)$ corrispondentemente variano nel seguente modo:

$$\Pi^{*\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) - \frac{\partial \log \sigma(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial \xi^r} \delta^{\lambda}_{\mu} \tag{14.3}$$

$$\Lambda^{*\lambda}_{\mu r}(\xi) = \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi) - \left(\frac{\partial \log (\xi, \xi^*)}{\partial \xi^{*r}}\right)_{\xi^* = \xi} \delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{14.4}$$

cosicchè effettivamente *le* (13.11), (14.2) *sono invarianti per le* (12.7), *mentre non lo sono le* (13.10), (14.1). Più in generale le (13.11), (14.2) hanno carattere invariante per tutte (e sole) le trasformazioni

$$\Pi^{*\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) + \tau_r(\underset{o}{\xi}, \xi)\delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{14.5}$$

$$\Lambda^{*\lambda}_{\mu r}(\xi) = \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi) + \sigma_r(\xi)\delta^{\lambda}_{\mu} \tag{14.6}$$

dei parametri, le $\tau_r(\underset{o}{\xi}, \xi)$, $\sigma_r(\xi)$ indicando vettori affini arbitrari; cosicchè l'uno o l'altro trasporto dei punti hanno parametri determinati — una volta fissati il sistema curvilineo e l'A-riferimento per la X_n — *a meno delle* (14.5) *e* (14.6) (rispettivamente) [23].

---

[23] Verifichiamo subito che, $z^\lambda(t)$, $z^{*\lambda}(t)$ essendo due serie ∞^1 di punti analitici soddisfacenti alle (14, 2) e all'analogo sistema che si ha sostituendo alle $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$ le $\Lambda^{*\lambda}_{\cdot\mu r}$ date dalle (14. 6), e a $\varphi(\xi^r)$ un'altra funzione scalare $\varphi^*(\xi^r)$ qualunque, lungo la supposta curva Γ si ha

$$\frac{d}{dt}(z^{*[\lambda} z^{\mu]}) = (\Lambda^{\lambda}_{\nu r}\delta^{\mu}_{\tau} + \Lambda^{\mu}_{\tau r}\delta^{\lambda}_{\nu} + \sigma_r \delta^{\mu}_{\tau}\delta^{\lambda}_{\nu}) z^{*[\tau} z^{\nu]} \frac{d\xi^r}{dt} + \{\varphi(\xi(t)) + \varphi^*(\xi(t))\} z^{*[\lambda} z^{\mu]};$$

ne consegue che i corrispondenti punti geometrici coincidono *sempre* lungo Γ, se in un punto iniziale di Γ coincidono.

Se poi per la X_n *si cambino*, secondo le (3.3), *le coordinate curvilinee, e insieme, secondo le* (5.2), *l'*A*-riferimento*, le $\Pi^\lambda_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, $\Lambda^\lambda_{\mu r}(\xi)$ date dalle (13.9), (13.3) *hanno la medesima legge di trasformazione*, che è la seguente:

$$\Pi^{\lambda'}_{\nu' r'}(\underset{o}{\xi'}, \xi') = \Pi^\lambda_{\nu r}(\underset{o}{\xi}, \xi) U^{\lambda'}_\lambda(\xi) U^\nu_{\nu'}(\xi) A^r_{r'}(\xi) + \frac{\partial U^\lambda_{\nu'}(\xi)}{\partial \xi^{r'}} U^{\lambda'}_\lambda(\xi), \tag{14.7}$$

$$\Lambda^{\lambda'}_{\nu' r'}(\xi') = \Lambda^\lambda_{\nu r}(\xi) U^{\lambda'}_\lambda(\xi) U^\nu_{\nu'}(\xi) A^r_{r'}(\xi) + \frac{\partial U^\lambda_{\nu'}(\xi)}{\partial \xi^{r'}} U^{\lambda'}_\lambda(\xi) \text{ (}^{24}\text{)}. \tag{14.8}$$

15. Ora: si può anche *a priori* assegnare per una X_n, su cui sono fissati un *riferimento curvilineo* e un A*-riferimento*, un *sistema differenziale* (14.2), cioè, a meno di una trasformazione (14.6), un *sistema di parametri* $\Lambda^\lambda_{\mu r}(\xi)$: ciò fatto, dati *due punti* $\underset{o}{\xi}$, ξ e, generalmente, *anche una linea* Γ *che in* X_n *li congiunge, le* (14.2) *dànno luogo per integrazione a una rappresentazione omografica fra gli spazi proiettivi tangenti in* $\underset{o}{\xi}$ *e in* ξ *alla* X_n:

$$z^\lambda(\xi \mid \xi) = \Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi; \Gamma) z^\mu, \tag{15.1}$$

ove i coefficienti $\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi; \Gamma)$ sono in generale funzioni delle ξ^r e $\underset{o}{\xi}{}^r$ e insieme, *funzionali della linea* Γ (determinati da $\underset{o}{\xi}$, ξ e Γ a meno di un comune fattore scalare $\neq 0$).

Quando mediante un sistema differenziale (14.2), o mediante il sistema di parametri $\Lambda^\lambda_{\mu r}(\xi)$, dati a meno di una trasformazione (14.6) e trasformantisi secondo le (14.8), sono assegnate per una X_n le rappresentazioni proiettive (15.1) fra i suoi spazi tangenti, si dice *che alla* X_n *è data una connessione proiettiva.* Le $\Lambda^\lambda_{\mu r}(\xi)$ si dicono *parametri* della connessione ([25]). Questa si dice

---

([24]) Le $\Pi^{*\lambda}_{\mu r}$, $\underset{+}{\Lambda}{}^{*\lambda}_{\mu r}$ date dalle (14, 5), (14, 6) hanno la stessa legge di trasformazione delle $\Pi^\lambda_{\mu r}$, $\Lambda^\lambda_{\mu r}$ a condizione che nelle (14. 5), (14. 6) τ_r, σ_r siano *vettori affini.*

Notiamo una conseguenza evidente delle (14. 7), (14. 8): le differenze

$$T^{\lambda}_{\cdot\mu r}(\xi_0, \xi) = \Pi^\lambda_{\mu r}(\xi_0, \xi) - \Lambda^\lambda_{\mu r}(\xi)$$

sono *le componenti di un tensore proiettivo*, analitico, di peso ed eccesso nullo, *pei primi due indici; affine pel terzo indice.* Naturalmente in conseguenza delle (13·2) — le quali dànno anche, pel tensore $T^{\lambda}_{\cdot\mu r}(\xi_0, \xi)$, uno sviluppo a partire da un qualúnque punto ξ_0 — si ha $T^{\lambda}_{\cdot\mu r}(\xi_0, \xi_0) = 0$.

([25]) Questi che più innanzi (n. 18) diciamo — onde distinguerli dai « parametri proiettivi », come $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ — « *parametri misti* » della connessione proiettiva, si presentano nel modo più naturale quando di questa si vuol dare una rappresentazione analitica. Le forme *integrabile* se lo è il corrispondente trasporto (14.2) (il *trasporto proiettivo della connessione* ([26])); cioè se per essa le rappresentazioni proiettive (15.1) risultano *indipendenti dalla linea* Γ *che congiunge in* X_n *i punti* $\underset{o}{\xi}$, ξ. La connessione si potrà *designare mediante i suoi parametri,* in quanto da essi è individuata; non è vera l'inversa (anche fissati i riferimenti), finchè i parametri non vengano opportunamente normalizzati.

Quanto precede ci mostra senz'altro che: date in X_n le rappresentazioni *al finito* $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, ne risultano determinate:

a) una totalità ∞^n *di connessioni proiettive integrabili, di parametri* $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, *dati dalle* (13.9); ciascuna delle quali si ha fissando il punto $\underset{o}{\xi}$ e lasciando liberamente variabile il punto ξ. Il trasporto proiettivo determinato da ciascuna di queste connessioni è, fra il *corrispondente* punto $\underset{o}{\xi}$ e un punto ξ, *quello stesso dato dalla rappresentazione al finito* $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$.

b) una connessione proiettiva, generalmente non integrabile, di parametri $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi)$, *dati dalle* (13.3). Il corrispondente trasporto proiettivo (14.2) è, nell'intorno del 1° ordine di ciascun punto $\underset{o}{\xi}$, quello della *corrispondente* connessione integrabile $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$.

I *parametri* delle connessioni proiettive ora dette sono stati ricavati, al n. 13, senza alcun bisogno del trasporto *lungo una curva*; è chiaro dunque come la considerazione di questo trasporto sia, *da un punto di vista analitico,* inessenziale. Ma farne a meno significherebbe occultare *l'essenza geometrica* della connessione.

16. La connessione proiettiva $(\Lambda^{\lambda}_{\mu r})$ detta ultimamente, cioè la sua legge di trasporto proiettivo, possono dedursi dalle supposte omografie al finito $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ anche in un altro modo, per vari riguardi interessante:

---

pfaffiane ω^{λ}_{μ} con le quali opera, almeno in un primo tempo, il Cartan, sono le $\Lambda^{\lambda}_{\mu r} d\xi^r$ (**14**, p. 210); lo Schouten nei lavori precedenti, quelli fatti in collaborazione col D. v. Dantzig (**69**, e seg.) si è valso pure generalmente di parametri misti (**17**, p. 419; **34**, p. 153; **61**, I, p. 197). Ved. anche **56**: B. **64**, II, p. 29 e seg.; **54**, p. 722.

([26]) La (14.2) rappresenta un trasporto *lungo una data linea,* quindi è *sempre integrabile:* ma dicendo che « il trasporto è integrabile » intendiamo dire, naturalmente, che lo è il corrispondente sistema

$$z^{[\nu}(dz^{\lambda]} + \Lambda^{\lambda]}_{\mu r} z^{\mu} d\xi^{r}) = 0$$

ai differenziali totali: cioè che il trasporto dà luogo, da ξ_0 a ξ, ad un punto (geometrico) trasportato che non dipende dalla linea di trasporto.

Indichiamo ancora, secondo le (13.4), con $z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi})$ i punti dello spazio tangente nel punto $\underset{o}{\xi}$ che si ottengono trasportandovi, con la legge di trasporto data dalle connessioni integrabili $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\xi, \underset{o}{\xi})$, cioè dalle omografie $\Pi^{\lambda}_{\cdot\,\mu}(\xi, \underset{o}{\xi})$, i punti $z^\lambda(\xi)$ degli spazi tangenti nei punti ξ della X_n: cosicchè si avrà (ved. la (12.4*))

$$z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi}) = \Pi^{\lambda}_{\cdot\,\mu}(\xi, \underset{o}{\xi}) z^\mu(\xi) = \Pi_{\mu}^{\cdot\,\lambda}(\xi, \underset{o}{\xi}) z^\mu(\xi). \tag{16.1}$$

Ebbene: poniamo

$$(\nabla_r z^\lambda)_0 = \left(\frac{\partial z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi})}{\partial \xi^r}\right)_{\xi = \underset{o}{\xi}} = \lim_{\xi \to \underset{o}{\xi}} \frac{z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi}) - z^\lambda(\underset{o}{\xi})}{\xi^r - \underset{o}{\xi}{}^r}, \tag{16.2}$$

$$(\delta z^\lambda)_0 = \left(\frac{\partial z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi})}{\partial \xi^r} d\xi^r\right)_{\xi = \underset{o}{\xi}} = (\nabla_r z^\lambda \cdot d\xi^r)_0 . \tag{16.3}$$

Verifichiamo subito che è

$$\nabla_r z^\lambda = \frac{\partial z^\lambda}{\partial \xi^r} + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi) z^\mu, \tag{16.4}$$

$$\delta z^\lambda = dz^\lambda + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi) z^\mu d\xi^r ; \tag{16.5}$$

e tenuto conto delle (14.8), che se z^λ è un *punto analitico* (*vettore proiettivo analitico controvariante*, di peso 0, di grado normale), anche δz^λ è un punto analitico, mentre $\nabla_r z^\lambda$ è un tensore *misto*, proiettivo per l'indice λ, affine per l'indice r. (E anzi le (14.8) sono condizioni *necessarie e sufficienti* perchè δz^λ e $\nabla_r z^\lambda$ costruiti con le (16.5), (16.4), abbiano, come z^λ, comportamento tensoriale).

La dimostrazione delle (16.4), (16.5) è immediata; basta osservare che dalle (16.1) si ha per derivazione

$$\frac{\partial z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi})}{\partial \xi^r} = \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\cdot\,\lambda}(\xi, \underset{o}{\xi})}{\partial \xi^r} \cdot z^\mu(\xi) + \Pi_{\mu}^{\cdot\,\lambda}(\xi, \underset{o}{\xi}) \frac{\partial z^\mu(\xi)}{\partial \xi^r} \tag{16.6}$$

onde tenuto conto delle (12.5*), (13.3) si ha, calcolando nel punto $\underset{o}{\xi}$, appunto

$$(\nabla_r z^\lambda)_0 = \left(\frac{\partial z^\lambda(\xi \,\|\, \underset{o}{\xi})}{\partial \xi^r}\right)_{\xi = \underset{o}{\xi}} = \left(\frac{\partial z^\lambda}{\partial \xi^r}\right)_0 + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}) z^\mu(\underset{o}{\xi}). \tag{16.7}$$

Diciamo δz^λ *differenziale assoluto*, e $\nabla_r z^\lambda$ *derivata covariante* (misti) di z^λ, coi *parametri di derivazione* $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$. In modo ovvio questi operatori si estendono a *tensori analitici proiettivi* (*di peso* 0, *di grado normale*) di *qua-*

lunque valenza: posto

$$(16.8)\qquad \left(\nabla_r H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}\right)_0 = \left(\frac{\partial H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}(\xi\,\|\,\overset{o}{\xi})}{\partial\xi^r}\right)_{\xi=\overset{o}{\xi}} = \lim_{\xi\to\overset{o}{\xi}} \frac{H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}(\xi\,\|\,\overset{o}{\xi}) - H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}(\overset{o}{\xi})}{\xi^r - \overset{o}{\xi^r}}$$

$$(16.9)\qquad \left(\delta H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}\right)_0 = \left(\frac{\partial H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}(\xi\,|\,\overset{o}{\xi})}{\partial\xi^r}\, d\xi^r\right)_{\xi\,\overset{o}{\xi}}$$

si ha

$$(16.10)\qquad \nabla_r H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h} = \frac{\partial H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}}{\partial\xi^r} - \sum_1^h{}_j \Lambda^{\tau}_{\lambda_j r} H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_{j-1}\tau\lambda_{j+1}\dots\lambda_h} + \\ + \sum_1^k{}_j \Lambda^{\mu_j}_{\tau r} H^{\dots\mu_1\dots\mu_{j-1}\tau\mu_{j+1}\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}$$

$$(16.11)\qquad \delta H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h} = \nabla_r H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}\cdot d\xi^r,$$

e $\delta H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}$ è un *nuovo tensore proiettivo cogrediente* ad $H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}$, mentre $\nabla_r H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}$ è un *tensore misto,* proiettivo per gli indici $\lambda_1\dots\lambda_h$, $\mu_1\dots\mu_k$, affine per l'indice r ([27]). Però questi tensori, e cioè la derivazione covariante (proiettiva) e la differenziazione assoluta di un tensore proiettivo di grado normale, quali le abbiamo ora definite, *non sono determinati dando semplicemente la connessione proiettiva*; bisogna che *un sistema di parametri* ne sia assegnato. E se ad es. z^λ è un *punto geometrico* (vettore proiettivo geometrico controvariante), anche fissato un sistema di valori dei parametri $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, *non può neppure affermarsi ad es. che* δz^λ *sia un nuovo punto geometrico.* Ma le equazioni

$$(16.12)\qquad \frac{\delta z^\lambda}{dt} = \psi(\xi(t))z^\lambda,$$

([27]) Se alle $\Pi^{\cdot\lambda}_{\cdot\mu}$ si sostituiscono i coefficienti normalizzati nel modo accennato nella nota ([22]), le (13.3) dànno, al luogo delle $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, i parametri

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu r} + \frac{1}{h-k}\,\delta^{\lambda}_{\mu}\left[\left(\frac{e}{n+1}+p\right)\Lambda^{\nu}_{\nu r} - \frac{e}{n+1}\,\partial_r \log w\right]$$

e il procedimento indicato qui sopra dà, beninteso per un tensore proiettivo $H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}$ *che abbia l'eccesso* e, *il peso* p, *le valenze* h, k *supposti,* al luogo della (16.10) una derivata covariante che ne differisce pel gruppo di termini

$$-\left[\left(\frac{e}{n+1}+p\right)\Lambda^{\nu}_{\nu r} - \frac{e}{n+1}\,\partial_r \log w\right] H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h}$$

che va aggiunto al 2° membro generico. Cfr. con la (17.11), e ved. ([30]).

(ove $\psi(\xi)$ indica uno scalare arbitrario) hanno carattere invariante sia per le trasformazioni (14.8) e i cambiamenti (14.6) dei parametri, sia pei cambiamenti del fattore d'omogeneità delle z^λ. Tenuto conto delle (16.5) vediamo che le (16.12) *rappresentano il trasporto proiettivo dei punti* (geometrici) della connessione proiettiva $(\Lambda^\lambda_{\mu r})$. Ecco la costruzione cui avevamo accennato. Naturalmente se $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ è un *tensore proiettivo geometrico* di valenza (controvariante e covariante) qualunque, analogamente le equazioni

$$\frac{\delta H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}}{dt} = \psi(\xi(t))H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} \tag{16.13}$$

(ove $\delta H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ è costruito mediante le (16.9) o (16.11)) hanno significato invariante: quindi la nozione di *trasporto proiettivo*, relativo a una assegnata connessione proiettiva, *si estende a tensori proiettivi geometrici qualunque*, e le equazioni (16.13) lo rappresentano.

§ 3. Connessioni proiettive e derivazioni proiettive; i parametri normalizzati.

17. Come abbiamo già osservato, mentre una connessione proiettiva assegnata determina il corrispondente trasporto proiettivo dei punti, (14.2) o (16.12), *essa non determina i corrispondenti parametri* $\Lambda^\lambda_{\mu r}$, dotati della legge di trasformazione (14.8), *che a meno di una trasformazione* (14.6). E quindi essa non determina le corrispondenti operazioni di *derivazione covariante* e *differenziazione assoluta* pei tensori proiettivi, se vogliamo che le $\Lambda^\lambda_{\mu r}$ siano assunte a *parametri di derivazione.* Questo è un assai grave inconveniente poichè l'utilità della considerazione delle *connessioni* si manifesta specialmente *in quanto esse dànno luogo, in modo semplice e di agevole intuizione, ad operazioni differenziali invarianti.* Osserviamo ancora che, se pure s'intendano fissati i valori dei parametri $\Lambda^\lambda_{\mu r}$, la derivazione covariante con questi *dà luogo, applicata a tensori proiettivi, a tensori misti* anzichè a nuovi tensori proiettivi. Una opportuna introduzione di *parametri « proiettivi » normalizzati,* che dalla connessione proiettiva (fissati i riferimenti) sono *determinati,* elimina come vedremo gli inconvenienti accennati.

Le formule di trasformazione delle $\Lambda^\lambda_{\mu r}$ per le (5.2), (3.3),

$$\Lambda^{\lambda'}_{\mu' r'} = U^{\lambda'}_\lambda U^\mu_{\mu'} A^r_{r'} \Lambda^\lambda_{\mu r} + \partial_{r'} U^\lambda_{\mu'} \cdot U^{\lambda'}_\lambda \qquad \left(\partial_{r'} = \frac{\partial}{\partial \xi^{r'}}\right) \tag{17.1}$$

dànno in particolare, nell'ipotesi che ci si limiti agli A_0-riferimenti,

$$\Lambda^{s'}_{o'r'} = \rho U^{s'}_s A^r_{r'} \Lambda^s_{or}. \tag{17.2}$$

Di qui si vede che, ponendo

$$U^s_{s'} = \frac{\rho}{\tau} A^r_{s'} \Lambda^s_{or} \tag{17.3}$$

(τ scalare $\neq 0$ arbitrario), purchè sia $|\Lambda^s_{or}| \neq 0$ si può rendere

$$\Lambda^{s'}_{o'r'} = \tau \delta^{s'}_{r'}$$

cioè, potendosi intendere che sia *preventivamente* fatta una tale A_0-trasformazione, finchè si abbia in oggetto *una sola* connessione proiettiva non è restrittivo supporre (quando $|\Lambda^s_{or}| \neq 0$)

$$\Lambda^s_{or} = \tau \delta^s_r \text{ [28]}. \tag{17.4}$$

Il significato delle (17.4) è il seguente. Consideriamo una qualunque linea Γ di X_n uscente dal punto ξ: il luogo geometrico dei punti che si ottengono trasportando, lungo la linea Γ medesima, secondo la legge di trasporto (14.2) o (16.12) della connessione, sullo spazio tangente nel punto ξ i punti di Γ, è una linea Γ_0 di questo spazio. La tangente a Γ e la tangente a Γ_0 nel punto ξ sono omologhe in una ben determinata *trasformazione omografica* T della stella (ξ) in sè. Questa omografia, o meglio, lo scostarsi di essa dall'identità, esprimono quella che diciamo *la deviazione* [29] della connessione proiettiva; se l'omografia T è *l'identità*, in particolare, diciamo che la connessione proiettiva è *semplice*, o *senza deviazione*. Ciò premesso: *a condizione che valgano le* (17.4) *le tangenti in* ξ *alle* n *linee coordinate* $\xi^1, \dots, \xi^n$ *che ne escono hanno appunto nella omografia* T *quali omologhe le congiungenti del punto* ξ, *cioè del punto fondamentale* D^A_0 *dell'*A_0*-riferimento, ai punti fondamentali* $D^A_1, \dots, D^A_n$; e la

---

[28] L'osservazione è dovuta al CARTAN (**14**, p. 212). Cfr. SCHOUTEN, **17**, p. 421 o **34**, p. 154; **56**, **61**, ove è posto $\tau = c$ (cost. arbitr. $\neq 0$); B. **70**, pp. 17-18; H. **84**, p. 238. Nella (17.2) e seg. dovremmo, veramente, scrivere Λ^i_{or}, anzichè Λ^s_{or} (n. 5): l'indice i riferendosi al sistema proiettivo locale, l'indice r al riferimento curvilineo. Il significato di δ^i_r è questo: l'unità, o lo zero, secondo che, nelle *due* serie di valori $1 \dots n$, $a_1 \dots a_n$, i ed r prendono valori d'egual posto o di posto differente. La (17.4), come più sotto è precisato nel testo, vale a *fissare* l'omografia II (n. 6), facendola coincidere con l'omografia T; è questo che consente l'identificazione dei contrassegni *ijh*... ed *rst*....

[29] La nozione di *deviazione* è introdotta in B. **70**, p. 16. Esempi di connessioni (o di derivazioni) proiettive che presentano *deviazione non nulla* si hanno nelle varie teorie della Relatività proiettiva, ved. ad es. **57**, **58**, **69**, **74**, **81**, **89**, **100**.

tangente che esce da ξ con la « direzione unità » (n. 6) $d\xi^1 = d\xi^2 = ... = d\xi^n$ ha per omologa la congiungente ξ al punto $D_0^A + D_1^A + ... + D_n^A$. Dunque le (17.4) valgono a fissare una *classe* di B-riferimenti (che soltanto se la connessione è semplice saranno B_1-riferimenti).

D'ora innanzi, quando avremo in oggetto *una* connessione proiettiva potremo *intendere senz'altro che i* B-*riferimenti di cui ci varremo siano tali da soddisfare alle* (17.4).

Per le trasformazioni del B-riferimento (le B-*trasformazioni*, soddisfacenti alle (6.3), (6.4)) le (17.1) prendono la forma

$$\Lambda^{\lambda'}_{\mu' r'} = A^{\lambda'}_{\lambda} A^{\mu}_{\mu'} A^{r}_{r'} \Lambda^{\lambda}_{\mu r} + A^{\lambda'}_{\lambda} \partial_{r'} A^{\lambda}_{\mu'} + \delta^{\lambda'}_{\mu'} \partial_{r'} \log \rho. \tag{17.5}$$

Queste dànno in particolare

$$\Lambda^{o'}_{o' r'} = A^{r}_{r'} \Lambda^{o}_{or} + A^{o'}_{s} A^{r}_{r'} \Lambda^{s}_{or} + \partial_{r'} \log \rho \tag{17.6}$$

o, in forza delle (17.4),

$$\Lambda^{o'}_{o' r'} = A^{r}_{r'} \Lambda^{o}_{or} + \partial_{r'} \log \rho - \tau A^{o}_{r'}. \tag{17.7}$$

Assegnato ulteriormente un *campo di iperpiani* (geometrici) degli spazi tangenti, cioè di vettori geometrici proiettivi covarianti T_λ $\left(\text{o ancora, che fa lo stesso, di } B\text{–vettori proiettivi analitici covarianti di } \textit{peso e grado zero } \frac{T_\lambda}{T_0}\right)$, vediamo che basta porre

$$\Lambda_r = \Lambda^{o}_{or} + \tau \frac{T_r}{T_0} \tag{17.8}$$

perchè, Λ_r avendo la legge di trasformazione

$$\Lambda_{r'} = A^{r}_{r'} \Lambda_r + \partial_{r'} \log \rho \tag{17.9}$$

(che è quella secondo cui si trasforma $\partial_r \log \varphi$, ove φ sia uno scalare di grado 1 e peso 0) e $\Lambda^{\nu}_{\nu r}$, d'altra parte, trasformandosi così:

$$\Lambda^{\nu'}_{\nu' r'} = \Lambda^{\nu}_{\nu r} A^{r}_{r'} + \partial_{r'} \log U, \tag{17.10}$$

ci si possa valere di Λ_r, unito a $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, *per formare delle derivate covarianti di* B-*tensori proiettivi di peso* p *ed eccesso* e *qualunque*:

$$\begin{aligned}\nabla_r H^{\cdot\cdot\cdot\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_h} &= \partial_r H^{\cdot\cdot\cdot\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_h} - (e\Lambda_r + p\Lambda^{\nu}_{\nu r}) H^{\cdot\cdot\cdot\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_h} - \\ &- \sum_{1}^{h}{}_{j} \Lambda^{\tau}_{\lambda_j r} H^{\cdot\cdot\cdot\mu_1 \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_{j-1} \tau \lambda_{j+1} \cdots \lambda_h} + \sum_{1}^{k}{}_{j} \Lambda^{\mu_j}_{\tau r} H^{\cdot\cdot\cdot\mu_1 \cdots \mu_{j-1} \tau \mu_{j+1} \cdots \mu_k}_{\lambda_1 \cdots \lambda_s}.\end{aligned} \tag{17.11}$$

Quando sia $p = 0$, $e = 0$ la (17.11) si riduce alla (16.10). Però va notato che

Λ_r è determinato dalla connessione proiettiva *soltanto a meno di un vettore affine covariante additivo* [30].

Ma particolarmente semplice è il caso di un tensore *di eccesso nullo e di grado nullo*: cioè, per la (7.6), di peso

$$p = \frac{k-h}{n+1}. \tag{17.12}$$

Per ogni tale tensore la (17.11) prende una forma esattamente analoga alla (16.10): soltanto *sostituiti ai parametri* $\Lambda^\lambda_{\mu r}$ i nuovi parametri

$$L^\lambda_{\mu r} = \Lambda^\lambda_{\mu r} - \frac{1}{n+1}\delta^\lambda_\mu \Lambda^\nu_{\nu r}. \tag{17.13}$$

Questi hanno una legge di trasformazione *differente dalla* (17.1), che vale pei parametri $\Lambda^\lambda_{\mu r}$, e del resto ciò è ben naturale: in quanto le $\Lambda^\lambda_{\mu r}$ servono da parametri di derivazione dei tensori (di eccesso 0 e) *di peso nullo*, e le $L^\lambda_{\mu r}$ invece, da parametri di derivazione pei tensori (di eccesso 0 e) *di grado nullo*. Ma l'interessante è che le $L^\lambda_{\mu r}$ *sono invarianti per le trasformazioni* (14.6) *dei parametri della connessione* [31]: dunque le derivate cova-

---

[30] Un'altra derivazione pei tensori di eccesso e grado qualunque è quella accennata nella nota [27]: essa dà luogo a una derivata la cui espressione si ha dalla (17.11) sostituendovi, al posto di Λ_r:

$$'\Lambda_r = \frac{1}{n+1}(\Lambda^\nu_{\nu r} - \partial_r \log w).$$

Il carattere covariante di questa nuova derivata $'\nabla_r$ ci è evidente a priori, pel modo come l'abbiamo ottenuta. D'altra parte è agevole verificare direttamente che $'\Lambda_r$ ha in realtà la stessa legge di trasformazione di Λ_r, (17.9). Il che porta come conseguenza che

$$L_r = {}'\Lambda_r - \Lambda_r$$

è un vettore affine covariante. Va notato che *per tensori qualunque* (o anche *scalari*) questa derivata $'\nabla$ può costruirsi: cade la limitazione $h - k \neq 0$ cui è soggetta la particolare costruzione geometrica che prima ne abbiamo indicato, ved. [22] e [27].

[31] Già dal CARTAN (**14**, p. 211) è stato osservato che sono sufficienti a rappresentare la connessione, e in relazione a un riferimento generale ne sono individuate, le forme $\omega^\lambda_\mu - \delta^\lambda_\mu \omega^0_0$: le quali hanno per coefficienti proprio le nostre $L^\lambda_{\mu r}$. Ved. B. **64**, II, p. 30; B. **70**, p. 20. Il sistema $L^\lambda_{\mu r}$ si presenta in modo affatto analogo, anche nei riguardi della formazione del *tensore di curvatura* (ved. più oltre, form. (22.5)) al sistema L^s_{tr} che figura nella teoria degli invarianti di una connessione affine per le trasformazioni *che ne conservano il parallelismo* delle direzioni. Ved. B. **60**, pp. 76, 89, 93: B. **66**, pp. 366, 370, 375. Si può rendere sempre $\Lambda^0_{0r} = 0$; questo appare dalle (17.7), o a partire dalle rappresentazioni al finito, può ottenersi come è accennato in questo lavoro a fine n. 18. (La condizione si conserva poi soltanto sotto la condizione $\tau A^0_r = \partial_r \log \rho$). Allora $L^\lambda_{\mu r}$ si identifica con $\Lambda^\lambda_{\mu r}$: questa via è seguita ad es. in **17**, p. 421; **34**, p. 154: **56**, p. 110.

rianti

(17.14)
$$\overset{*}{\nabla}_r H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h} = \partial_r H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h} - \\ - \sum_1^h{}_j L^{\tau}_{\lambda_j r} H^{\dots\mu_1\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_{j-1}\tau\lambda_{j+1}\dots\lambda_h} + \sum_1^k{}_j L^{\mu_j}_{\tau r} H^{\dots\mu_1\dots\mu_{j-1}\tau\mu_{j+1}\dots\mu_k}_{\lambda_1\dots\lambda_h},$$

che per un tensore di grado nullo hanno significato e carattere di covarianza non soltanto in relazione a un B-riferimento, ma *anche rispetto a un qualunque* A-*riferimento, sono determinate dalla connessione.* Lo stesso potrà dirsi ad es. del trasporto

(17.15)
$$\frac{\delta^* v^\lambda}{dt} = \frac{dv^\lambda}{dt} + L^\lambda_{\mu r} v^\mu \frac{d\xi^r}{dt} = 0$$

pei vettori proiettivi analitici controvarianti, *di grado* 0: che potranno interpretarsi come punti analitici, convenientemente *normalizzati.*

18. Possiamo valerci delle (17.7) anche per eliminare ρ dalle (17.5). Troviamo subito che, posto

(18.1)
$$\Gamma^\lambda_{\mu r} = \Lambda^\lambda_{\mu r} - \delta^\lambda_\mu \Lambda^o_{or}$$

si ha

(18.2)
$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu' r'} = A^{\lambda'}_\lambda A^\mu_{\mu'} A^r_{r'} \Gamma^\lambda_{\mu r} + \delta^{\lambda'}_{\mu'} \tau A^o_{r'} + A^{\lambda'}_\lambda \partial_{r'} A^\lambda_{\mu'}.$$

Ora queste mostrano che *se completiamo il sistema* $\Gamma^\lambda_{\mu r}$ *ponendo,* in relazione a un *qualunque* B-riferimento,

(18.3)
$$\Gamma^\lambda_{\mu o} = \tau \delta^\lambda_\mu \quad ({}^{32})$$

il sistema $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ *così costituito ha la legge di trasformazione:*

(18.4)
$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = A^{\lambda'}_\lambda A^\mu_{\mu'} A^\nu_{\nu'} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta^{r'}_{\nu'} \partial_{r'} A^\lambda_{\mu'} A^{\lambda'}_\lambda.$$

Vedremo ora in quale senso anche le $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ si possano riguardare come *parametri* della connessione proiettiva (diremo, ove occorra: parametri *proiettivi*; e le $\Lambda^\lambda_{\mu r}$, parametri *misti*); e anzi, quando sia fissato il valore di τ, essi risultino *determinati dalla connessione proiettiva*; cosicchè le loro determinazioni $\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}$ corrispondenti al valore $\tau = 1$, cioè alle posizioni

(17.4*)
$$\Gamma^r_{os} = \Lambda^r_{os} = \delta^r_s$$

(18.3*)
$$\Gamma^\lambda_{\mu o} = \delta^\lambda_\mu$$

---

[32] Cfr. T. Y. THOMAS, **26**, **33** $\left(\tau = -\frac{1}{n+1}\right)$; VEBLEN, **48**, **52** ($\tau = 1$); SCHOUTEN, GOLAB, **56**, **61**; H. **80** ($\tau = c$, cost.). Si noti che, per le (17.2), τ è invariante nei cambiamenti del B-riferimento.

al luogo delle (17.4) e (18.3), si potranno dire *parametri normalizzati* della connessione [33]. Inoltre vedremo come si possano costruire, con le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, delle *derivate covarianti proiettive* dei tensori proiettivi di peso p qualunque e grado *zero* (le quali sono dei *nuovi tensori proiettivi*); e con le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ insieme alle Λ^{o}_{or} e a τ, anche delle derivate covarianti proiettive di tensori proiettivi *di grado qualunque.*

Notiamo anzitutto che le equazioni

$$\frac{dz^{\lambda}}{dt} + \Lambda^{\lambda}_{\mu r} z^{\mu} \frac{d\xi^{r}}{dt} = \psi(\xi(t)) \cdot z^{\lambda} \tag{18.5}$$

del *trasporto proiettivo* dei punti (geometrici) determinato dalla supposta connessione proiettiva si possono scrivere anche

$$\frac{dz^{\lambda}}{dt} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} z^{\mu} \frac{d\xi^{\nu}}{dt} = \left(\psi + \tau \frac{d\xi^{o}}{dt} - \Lambda^{o}_{or} \frac{d\xi^{r}}{dt}\right) z^{\lambda} \tag{18.6}$$

cioè, insomma,

$$\frac{dz^{\lambda}}{dt} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} z^{\mu} \frac{d\xi^{\nu}}{dt} = \Psi(t)) \cdot z^{\lambda} \tag{18.7}$$

ove $\Psi(t)$ indica una qualunque funzione scalare. È vero che nelle (18.7) figura $d\xi^{o}$, il cui *valore non è determinato dalla connessione* (ma può farsi dipendere, come vedemmo (n. 10) dall'arbitraria assegnazione di un campo di iperpiani sugli spazi tangenti): ma è ovvio che il valore di $d\xi^{o}$ non influisce affatto sul trasporto dei punti *geometrici* dato dalla (18.7).

D'altra parte le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono invarianti (finchè tale s'intenda τ) per le trasformazioni (14.6), cioè

$$\Lambda^{*\lambda}_{\mu r} = \Lambda^{\lambda}_{\mu r} + \delta^{\lambda}_{\mu} \sigma_{r}. \tag{18.8}$$

ove σ_r è un qualunque vettore affine covariante; cosicchè le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, fissato che sia il valore di τ, (e, naturalmente, assegnato il riferimento curvilineo e il B-riferimento, soddisfacente alla (17.4)) le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ risultano effettivamente *determinate dalla connessione*; tali sono dunque, come accennavamo, senz'altro le $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$. Notiamo, a proposito di questi parametri (proiettivi) *normalizzati* $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$,

---

[33] Questi parametri *normalizzati* sono introdotti in B. **70**, pp. 19-21. Un altro tipo di parametri normalizzati, esprimibile ad es. così, $P^{\lambda}_{\mu\nu} = L^{\lambda}_{\mu r} \delta^{r}_{\nu} + \frac{1}{n} \delta^{\lambda}_{\mu} L^{s}_{\nu s}$, era stato introdotto in B. **64**, III, p. 88, o B. **66**, p. 375 (ved. anche B. **70**, p. 21; **94**, p. 184) in analogia col sistema dei parametri della connessione affine invariante, determinata da una legge di trasporto lineare delle direzioni (B. **60**. p. 78; B. **66**, p. 365).

che essi fra gli « oggetti geometrici » pei quali vale la legge di trasformazione (18.4) sono caratterizzati dalle condizioni (17.4*), (18.3*) e

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{o}_{or} = 0; \tag{18.9}$$

cioè dalle

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu o} = \underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{o\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}. \tag{18.10}$$

Se z^λ è un vettore controvariante proiettivo (di peso zero e) *di grado zero,* le (18.4) mostrano che tale è anche

$$\frac{dz^\lambda}{dt} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} z^\mu \frac{d\xi^\nu}{dt} = \mathfrak{D}_\nu z^\lambda \cdot \frac{d\xi^\nu}{dt} = \frac{\mathfrak{d} z^\lambda}{dt}; \tag{18.11}$$

più in generale, possiamo per un qualunque tensore proiettivo *di grado zero e peso* p formare con $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (o in particolare con $\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}$) delle *derivate covarianti proiettive,* che sono *nuovi tensori proiettivi* (sempre *di grado zero e dello stesso peso* p):

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_\nu H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} &= \delta^r_\nu \partial_r H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} - p\Gamma^{\tau}_{\tau\nu} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} - \\ &- \Sigma_j \Gamma^{\tau}_{\lambda_j\nu} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\tau\lambda_{j+1}\cdots\lambda_h} + \Sigma_j \Gamma^{\mu_j}_{\tau\nu} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_{j-1}\tau\mu_{j+1}\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}\end{aligned} \tag{18.12}$$

ove con $\mathfrak{D}_\nu$ (o rispettivamente con $\underset{1}{\mathfrak{D}}_\nu$) designiamo dunque il simbolo della *derivazione proiettiva* di parametri $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ generici (o di parametri normalizzati $\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}$).

Le derivate col simbolo $\underset{1}{\mathfrak{D}}_\nu$ pei tensori di grado zero sono *determinate data la connessione proiettiva* e quindi le $\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}$; mentre i corrispondenti *differenziali assoluti proiettivi,* di simbolo $\underset{1}{\mathfrak{d}}$, ove più in generale

$$\mathfrak{d} = d\xi^\nu \mathfrak{D}_\nu \tag{18.13}$$

contengono in generale $d\xi^o$ (escluso anzi soltanto il caso in cui *il grado zero sia pel tensore il grado normale* h — k) e quindi *non sono determinati dalla connessione proiettiva* ([34]).

([34]) L'impossibilità di determinare, in generale, *in modo intrinseco alla connessione* i differenziali proiettivi dei tensori è stata variamente enunciata e interpretata. Ved. **56,** pp. 120-122; **61**, I, pp. 206-208; B. **70**, p. 23; **71**, pp. 423-424; H. **84**, pp. 245-246; **100**, p. **67**; H. **105**, p. 122.

La via per la quale si è giunti ai sistemi di *parametri proiettivi* $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ di una connessione proiettiva, e quindi alle *derivazioni proiettive* (n. seg.), non necessariamente legate a

Pei tensori di grado g qualunque basta porre

(18.14) $$\Gamma_r = \Lambda^o_{or}, \quad \Gamma_o = -\tau$$

perchè, Γ_λ avendo la legge di trasformazione

(18.15) $$\Gamma_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'}\Gamma_\lambda + \delta^{r'}_{\lambda'}\partial_{r'} \log \rho$$

si possa formare di un tensore $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$ di grado g la derivata proiettiva (nuovo tensore proiettivo dello stesso grado g)

(18.16) $$\mathfrak{D}_\nu H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} = \delta^r_\nu \partial_r H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} - (g\Gamma_\nu + p\Gamma^\tau_{\tau\nu})H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} - \\ - \sum_1^h{}_j \Gamma^\tau_{\lambda_j\nu} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}\tau\lambda_{j+1}\cdots\lambda_h} + \sum_1^k{}_j \Gamma^{\mu_j}_{\tau\nu} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_{j-1}\tau\mu_{j+1}\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}.$$

---

una connessione proiettiva vera e propria, non è veramente quella che qui sopra abbiamo adottato. Le ricerche su quelle che il WEYL ha chiamato le proprietà *proiettive* di una connessione affine (proprietà invarianti per le trasformazioni che ne conservano le geodetiche) — cioè: su quella che è stata detta la *geometria proiettiva dei cammini* — (ved. **3**, **8**, **9**, **10**, **21**; **41**, B. **64**, **96**) hanno condotto T. Y. THOMAS a introdurre, partendo da una connessione affine Γ^r_{st}, un sistema Π^r_{st} che ha una differente legge di trasformazione, ma è *invariante* nel senso detto sopra: e che egli ha detto sistema dei « *coefficienti della connessione proiettiva* ». (Ved. **22**, **23**, **24**, **25**, **32**, **59** (ove il THOMSEN pel caso $n = 2$ ricava *anche una connessione affine proiettivamente invariante*); **72**, **76**). Ora è appunto il sistema Π^r_{st}, di cui subito era apparsa l'importanza fondamentale nella geometria proiettiva dei cammini, che dallo stesso T. Y. THOMAS è stato completato in un sistema $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ di « parametri proiettivi » (nel senso precisato qui sopra nel testo); e ciò allo scopo di render possibile una interpretazione *affine* $(n+1)$-dimensionale. Ved. **26**, **33**, **39**, H. **43**, H. **46** (ove la teoria di T. Y. THOMAS viene estesa e completata); **47**, **48**, **48**, **50**. Con ulteriori ricerche di VEBLEN, WEYL, WHITEHEAD ed altri (**52**, **53**, **54**, **55**, **57**; **63**, **65**, **94**) la teoria è andata riavvicinandosi alla sua essenza geometrica, dalle sue origini formali; il processo di riavvicinamento ed unificazione con le primitive teorie di CARTAN e SCHOUTEN si è compiuto poi al suo ritorno in Europa (**56**, **61**; B. **70**, B. **78**; H. **83**, H. **84**); e un notevole impulso la teoria ha avuto dalle ricerche recenti sulla Relatività proiettiva (**69**, **74**, **75**, **77**, **87**, **88**, **89**, **90**, **91**, **100**; cfr. **57**, **58**, **68**, **81**), ricerche guidate - dopo i primi lavori della Scuola di VEBLEN — dallo SCHOUTEN, e basate su un formalismo costruito da v. DANTZIG (**71**, **73**, **92**), da SCHOUTEN stesso ed HAANTJES (ved., oltre alle opere già citate, **108**). Dire come siano congegnate tutte queste ricerche e anche soltanto come vi siano introdotte e trattate, col mezzo di « parametri proiettivi », le connessioni, sarebbe assai lungo e oltre tutto superfluo! Ci limitiamo a chiarire il nostro punto di vista: il formalismo dei parametri proiettivi offre alle connessioni proiettive una rappresentazione comoda e anche utile, benchè complicata con l'introduzione di elementi non intrinseci, quale è $d\xi^o$. Ma soprattutto apre la via a generalizzazioni (« derivazione proiettiva ») e ad applicazioni, e sono queste che dànno alla teoria uno scopo. A questo proposito rimandiamo ai nostri lavori: H. **80**; B. **67**, **70**, **78**; H. **83**, **84**, **105**. (In H. **83**, in relazione all'ente studiato — una ipersuperficie di uno spazio proiettivo — $d\xi^o$ *viene determinato*; ciò risulta possibile appunto in quanto l'ente considerato dà luogo a un sistema d'iperpiani negli spazi tangenti (n. 10). Cfr. B. **67**, **70**).

Se il peso è *nullo* e il grado g è il grado *normale* h — k, e allora soltanto, nella corrispondente espressione del differenziale assoluto proiettivo

$$\delta H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} = d\xi^\nu \mathfrak{D}_\nu H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h} \tag{18.17}$$

non figura $d\xi^o$.

Naturalmente Γ_λ, o anche $\underset{1}{\Gamma}_\lambda$ che corrisponde all'ipotesi $\tau = 1$, a differenza di $\underset{1}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, *non sono determinati* dalla connessione; o meglio (*fissato* anche per Γ_λ il valore di τ) lo sono soltanto a meno di un cambiamento

$$\Gamma^*_\lambda = \Gamma_\lambda + \delta^r_\lambda \varphi_r \tag{18.18}$$

ove φ_r è un arbitrario vettore affine covariante. Ma ad ogni modo le formule

$$\frac{\underset{1}{\delta} H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}}{dt} = \psi(\xi(t)) H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}, \tag{18.19}$$

ove $\underset{1}{\delta}$ s'intenda calcolato coi parametri $\underset{1}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ e $\underset{1}{\Gamma}_\lambda$,

$$\underset{1}{\Gamma}_r = \Lambda^o_{or}, \quad \underset{1}{\Gamma}_o = -1, \tag{18.14*}$$

e con un valore arbitrariamente fissato per il grado g e il peso p, rappresentano sempre *la legge di trasporto* (18.13) *determinata dalla connessione* pel tensore proiettivo *geometrico* di componenti proporzionali ad $H^{\cdots\mu_1\cdots\mu_k}_{\lambda_1\cdots\lambda_h}$; di più, in relazione alla scelta fatta per g, p, ψ e $d\xi^o$ dànno anche, lungo ciascuna linea di trasporto, una *normalizzazione* del tensore geometrico.

Concludendo: *la connessione proiettiva determina la legge di trasporto dei tensori proiettivi geometrici; determina i parametri misti* $L^\lambda_{\mu r}$ *pei tensori di grado ed eccesso nullo, e, in relazione a un* B*-riferimento, i parametri proiettivi normalizzati* $\underset{1}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ *pei tensori di grado nullo; quindi una derivazione mista covariante per i primi, una derivazione proiettiva covariante per i secondi* (quest'ultima può generalizzarsi dando allo scalare τ, anzichè il valore 1, un altro valore qualunque, costante o funzione del punto variabile su X_n). *Con l'aggiunta di un sistema che ha la legge di trasformazione* (17.7) *la connessione proiettiva dà luogo anche a una derivazione proiettiva covariante dei tensori proiettivi di grado qualunque, e a una derivazione covariante mista dei tensori proiettivi di eccesso nullo, grado qualunque. L'ulteriore aggiunta di un campo d'iperpiani* T_λ *degli spazi tangenti determina anche una derivazione covariante mista dei tensori proiettivi di eccesso qualunque. L'aggiunta* *di* T_λ *è in ogni caso necessaria* (ove $d\xi^o$ s' intenda espresso nella forma (10.4)) *perchè risulti determinato, di un tensore proiettivo di grado non normale, il differenziale assoluto proiettivo quando ne è nota la derivata covariante proiettiva.*

I parametri proiettivi normalizzati $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ si possono anche ottenere, come i parametri misti $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, *direttamente a partire dalle rappresentazioni al finito* $\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$. Basta normalizzare i coefficienti di queste rappresentazioni in modo da rendere $\Pi^{o}{}_{\cdot o}(\underset{o}{\xi}, \xi) = 1$, il che sarà possibile entro una regione n-dimensionale opportunamente limitata di X_n in quanto è per ipotesi — per la (12.5*) — $\Pi^{o}{}_{\cdot o}(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) = 1$. Naturalmente i coefficienti così normalizzati,

$$\widehat{\Pi}^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)/\Pi^{o}{}_{\cdot o}(\underset{o}{\xi}, \xi) \tag{18.20}$$

sono *invarianti per le* (12.7). Ricavando con le (13.3) le $\widehat{\Lambda}^{\lambda}_{\mu r}$ corrispondenti, otteniamo ovviamente $\widehat{\Lambda}^{o}_{or} = 0$; possiamo intendere poi (secondo quanto s'è osservato al n. prec.) soddisfatte le (17.4*), cioè $\widehat{\Lambda}^{s}_{or} = \delta^{r}_{s}$. Ma allora le corrispondenti $\underset{1}{\widehat{\Gamma}}{}^{\lambda}_{\mu r}$, cioè, data l'invarianza dei parametri normalizzati per le (14.6), le $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu r}$, *risultano eguali alle* $\widehat{\Lambda}^{\lambda}_{\mu r}$, cosicchè, tenute presenti le (18.3*), vediamo infine che i parametri normalizzati $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ si possono costruire con le seguenti formule:

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}(\underset{o}{\xi}) = \left(\delta^{o}_{\nu}\widehat{\Pi}^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) - \delta^{r}_{\nu}\,\frac{\partial\widehat{\Pi}^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)}{\partial\xi^{r}}\right)_{\xi=\underset{o}{\xi}}. \tag{18.21}$$

19. Che *coi parametri* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ *e* Γ_{λ}, o in particolare $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ e $\underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda}$, *si possano costruire delle derivate covarianti* (proiettive), non è affatto conseguenza della particolare costruzione di quei parametri a partire da una connessione proiettiva: *ma soltanto della corrispondente legge di trasformazione*, (18.4) *e* (18.15). *A priori* possiamo assegnare i sistemi (« oggetti geometrici ») $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e Γ_{λ}, dotati delle leggi di trasformazioni ora dette e non soggetti ad alcun'altra restrizione; e valercene per calcolare, mediante le (18.16) pei tensori proiettivi analitici di grado qualunque, e in particolare mediante le (18.12), quindi utilizzando le sole $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, pei tensori proiettivi analitici di grado zero, delle *derivate covarianti proiettive.* Assegnando, ulteriormente, l'espressione di $d\xi^o$, si determineranno corrispondentemente, secondo le (18.17), i *differenziali as-*

soluti proiettivi dei tensori medesimi; però in generale non soltanto questi differenziali risulteranno *dipendenti da* $d\xi^o$, anche pei tensori di grado zero, ma *la stessa corrispondente legge di trasporto* (18.19) *dei tensori geometrici ne dipenderà.* Questo lo vediamo subito riferendoci al caso più semplice, del *trasporto dei punti geometrici.* Inteso che $\mathfrak{d}z^\lambda$ sia calcolato come per un punto analitico (tensore proiettivo di valenza controvariante 1, peso 0, grado -1) il sistema

$$(19.1) \qquad \frac{\mathfrak{d}z^\lambda}{dt} = \frac{dz^\lambda}{dt} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} z^\mu \frac{d\xi^\nu}{dt} + \Gamma_\nu \frac{d\xi^\nu}{dt} z^\lambda = \psi(\xi(t)) z^\lambda$$

quando l'espressione di $d\xi^o$ sia assegnata, mediante la (10.4), dà luogo a un trasporto dei punti, che possiamo scrivere nella forma (14.2), cioè

$$(19.2) \qquad \frac{dz^\lambda}{dt} + \Lambda^\lambda_{\mu r} z^\mu \frac{d\xi^r}{dt} = \psi(\xi(t)) \cdot z^\lambda$$

ponendo

$$(19.3) \qquad \Lambda^\lambda_{\mu r} = \Gamma^\lambda_{\mu r} - \Gamma^\lambda_{\mu o} \frac{T_r}{T_o} + \delta^\lambda_\mu \left(\Gamma_r - \Gamma_o \frac{T_r}{T_o} \right).$$

Per un cambiamento nella scelta di $d\xi^o$ questi parametri $\Lambda^\lambda_{\mu r}$ si mutano in

$$(19.4) \qquad {}^*\Lambda^\lambda_{\mu r} = \Lambda^\lambda_{\mu r} - (\Gamma^\lambda_{\mu o} + \delta^\lambda_\mu \Gamma_o) \left(\frac{\overline{T}_r}{\overline{T}_o} - \frac{T_r}{T_o} \right);$$

ora di qui si vede che $\Lambda^\lambda_{\mu r}$, ${}^*\Lambda^\lambda_{\mu r}$ sono parametri misti *di una stessa connessione proiettiva* — cioè: i corrispondenti trasporti dei punti geometrici coincidono — *a condizione che sia*

$$(19.5) \qquad \Gamma^\lambda_{\mu o} = \omega \delta^\lambda_\mu$$

ove ω indica uno scalare arbitrario.

Diciamo, anche quando $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e Γ_λ sono assegnati *a priori*, che essi sono *i parametri di una derivazione proiettiva*; designiamo questa mediante i suoi parametri. Ciò posto, possiamo concludere:

Data a priori una derivazione proiettiva ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, Γ_λ), *condizione necessaria e sufficiente perchè essa determini una legge di trasporto proiettivo dei punti geometrici, e quindi una connessione proiettiva, è che valgano le* (19.5). In caso contrario occorre, per dar luogo a una connessione proiettiva, l'ulteriore assegnazione dell'espressione (10.4) di $d\xi^o$, cioè, *di un campo d'iperpiani* degli spazi tangenti.

Diremo che una derivazione proiettiva è di prima specie quando valgono le (19.5), *cioè quando essa individua una connessione proiettiva: in caso contrario, che essa è di seconda specie.*

Supponiamo che la derivazione $(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \Gamma_{\lambda})$ sia di prima specie; va esplicitamente notato che pei suoi parametri misti $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$, dati dalle (19.3), *non si può affatto affermare valgano, in generale, le* (17.4); il che porta in conseguenza l'impossibilità di costruire con le (18.1), (18.3*) dei *parametri normalizzati,* caratterizzati dalle (18.10), per la connessione proiettiva che la supposta derivazione di prima specie determina. Cosicchè *non è sufficiente, per lo studio generale delle derivazioni proiettive e anche soltanto di quelle di prima specie. la rappresentazione con quei parametri normalizzati,* utilissimi invece quando si debba studiare *una singola connessione proiettiva* e sia libera la scelta dell'A-riferimento. Questo non porta però inconvenienti per la costruzione degli invarianti di una derivazione proiettiva, come accenneremo.

Se per una derivazione proiettiva *di seconda specie,* o in particolare anche di prima specie, valgono le (17.4*), i parametri normalizzati della connessione proiettiva che la connessione determina insieme al campo d'iperpiani T_{λ} sono:

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - (\Gamma^{\lambda}_{\mu o} - \delta^{\lambda}_{\mu})\frac{T_{\nu}}{T_{o}} - \delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{r}_{\nu}\left\{\Gamma^{o}_{or} - (\Gamma^{o}_{oo} - 1)\frac{T_{r}}{T_{o}}\right\}. \tag{19.6}$$

In particolare vediamo come questi parametri $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ non dipendano affatto da Γ_{λ}, ma soltanto da $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Se poi valgono anche le (19.5) con $\omega = 1$, cioè le (18.3*), le (19.6) divengono

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{r}_{\nu}\Gamma^{o}_{or}. \tag{19.7}$$

Osserviamo ancora che anche con queste altre formule

$$\underset{1}{G}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - (\Gamma^{\lambda}_{\mu o} - \delta^{\lambda}_{\mu})\frac{T_{\nu}}{T_{o}} - \left\{\Gamma^{\lambda}_{o\nu} - (\Gamma^{\lambda}_{oo} - \delta^{\lambda}_{o})\frac{T_{\nu}}{T_{o}} - \delta^{\lambda}_{\nu}\right\}\frac{T_{\mu}}{T_{o}} \tag{19.8}$$

si può associare a una derivazione proiettiva generale $(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})$ (pei tensori proiettivi *di grado zero*) e a un campo d'iperpiani T_{λ} una connessione proiettiva, della quale i *parametri normalizzati* sono proprio le $\underset{1}{G}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$; d'altra parte le (18.4) mostrano che

$$E^{\lambda}_{\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu o}, \quad F^{\lambda}_{\mu} = \Gamma^{\lambda}_{o\mu} \tag{19.9}$$

sono *tensori proiettivi,* di grado zero, soddisfacenti alla condizione

$$E^{\lambda}_{o} = F^{\lambda}_{o}. \tag{19.10}$$

Di qui si può ricavare che *gli invarianti della derivazione proiettiva* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ *sono gli invarianti della connessione proiettiva di parametri normalizzati* $\underset{1}{G}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ *e dei* *tensori proiettivi di grado zero* E^{λ}_{μ}, F^{λ}_{μ} (soddisfacenti alla (19.10)), $B_{\lambda} = \frac{T_{\lambda}}{T_o}$. Ma l'interesse di questa riduzione non è che secondario, infatti la costruzione diretta degli invarianti di una *derivazione* proiettiva generale non è differente da quella che dà gli invarianti di una *connessione* proiettiva.

§ 4. Geodetiche. Trasporto a distanza finita lungo le geodetiche uscenti da un punto.

20. Sia data in X_n una curva Γ, $\xi^r = \xi^r(t)$. La connessione $(\Lambda^{\lambda}_{\mu r})$ determina, per integrazione delle equazioni (14.2) del trasporto proiettivo, una rappresentazione omografica fra gli spazi tangenti a X_n nel punto fisso $\underset{o}{\xi}$ e nel punto generico $\xi(t)$ di Γ:

$$z^{\lambda}(t \mid t_0) = \Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(t,\ t_0) z^{\mu}(t). \tag{20.1}$$

Costruiti gli elementi reciproci $\Lambda_{\lambda}^{\cdot\mu}(t,\ t_0)$ delle $\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(t,\ t_0)$ in $|\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}|$ non è restrittivo supporre (cfr. le (12.4*))

$$\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(t,\ t_0) = \Lambda_{\mu}^{\cdot\lambda}(t_0,\ t). \tag{20.2}$$

Ciò posto, è immediata l'osservazione che *le* $\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}$ *sono legate ai parametri* $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi(t))$ *della connessione da formule* (cfr. le (13.9))

$$\frac{d\Lambda^{\nu}_{\cdot\mu}(t,\ t_0)}{dt} \Lambda_{\nu}^{\cdot\lambda}(t,\ t_0) = -\frac{d\Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu}(t_0,\ t)}{dt} \Lambda_{\mu}^{\cdot\nu}(t_0,\ t) = (\Lambda^{\lambda}_{\mu r} + \delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_r) \frac{d\xi^r}{dt} \tag{20.3}$$

ove φ_r è un vettore affine arbitrario. Per conseguenza si ottiene dalle (20.1), per derivazione:

$$\frac{dz^{\lambda}(t \mid t_0)}{dt} = \Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu}(t,\ t_0)\left(\frac{dz^{\nu}(t)}{dt} + \Lambda^{\nu}_{\mu r} z^{\mu}(t) \frac{d\xi^r}{dt} + \varphi_r \frac{d\xi^r}{dt} z^{\nu}(t)\right) \tag{20.4}$$

cioè, per le (20.1) medesime,

$$\frac{dz^{\lambda}(t \mid t_0)}{dt} - z^{\lambda}(t \mid t_0)\psi_r \frac{d\xi^r}{dt} = \Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu}(t,\ t_0)\left(\frac{\delta z^{\nu}(t)}{dt} + z^{\nu}(t)\chi_r \frac{d\xi^r}{dt}\right) \tag{20.5}$$

ove ψ_r, χ_r sono ancora vettori affini arbitrari (e δz^{ν} è dato dalla (16.5)).

L'annullarsi dei primi membri delle (20.5) esprime *che il punto* $z^{\lambda}(t \mid t_0)$ *è fisso*; l'annullarsi del secondo esprime *che il punto* $z^{\lambda}(t)$ *si trasporta lungo* Γ *per la legge del trasporto proiettivo della connessione*; che le due condizioni si equivalessero era ben prevedibile. Intendiamo d'ora in poi (in questo n.) che il riferimento adottato sia un B-riferimento: precisamente, che valgano le (17.4*); il che porta, come abbiamo visto (n. 17) la coincidenza delle omografie Π (n. 6), che *localizzano* nella stella di direzioni tangenti in ciascun punto le direzioni fondamentali e unità pel riferimento proiettivo locale rispetto al riferimento curvilineo, con le omografie T (n. 17), di significato intrinseco alla connessione proiettiva. E supponiamo ora in particolare che i punti $z^\lambda(t)$ detti sopra siano, lungo Γ, i punti $\frac{d\xi^\lambda}{dt}$ (n. 10), posti sulle tangenti omologhe alle tangenti di Γ nelle omografie T (n. 17); o, come diremo per brevità, sulle *tangenti associate* a quelle di Γ (che sono le stesse tangenti di Γ se la connessione proiettiva è *semplice*, cioè *senza deviazione* (n. 17)). Osserviamo che su quelle tangenti i punti $\frac{d\xi^\lambda}{dt}$ sono, finchè non si fissi l'espressione di $d\xi^0$ — che per ora lasciamo affatto arbitraria —, punti qualunque, soltanto diversi dai punti di contatto. Nell'ipotesi detta sopra, consideriamo sullo spazio tangente a X_n nel punto ξ la linea

$$x^\lambda = \int_{t_0}^{t} z^\lambda(t \mid t_0)dt \tag{20.6}$$

che diremo *immagine tangenziale di* Γ (*relativa alla supposta scelta di* $d\xi^0$). Per le (20.5) abbiamo, nel punto t generico di Γ,

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2} - \frac{dx^\lambda}{dt}\psi_r\frac{d\xi^r}{dt} = \Lambda^\lambda_{\cdot\nu}(t, t_0)\left(\frac{\delta^2\xi^\nu}{dt^2} + \frac{d\xi^\nu}{dt}\chi_{r}\frac{d\xi^r}{dt}\right), \tag{20.7}$$

quindi vediamo che *l'immagine tangenziale di* Γ *è una linea retta allora e allora soltanto che le tangenti associate a quelle di* Γ *contengono un campo di punti che lungo* Γ *si spostino pel trasporto proiettivo determinato dalla connessione.*

Le linee della X_n che godono della proprietà ora detta si dicono *geodetiche della connessione proiettiva* ([35]). Queste linee si possono dunque rappresentare col sistema d'equazioni

$$\frac{\delta^2\xi^\nu}{dt^2} + \frac{d\xi^\nu}{dt}\chi_{r}\frac{d\xi^r}{dt} = 0, \qquad \left(\frac{\delta^2\xi^\nu}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\frac{d\xi^\nu}{dt}\right) \tag{20.8}$$

ove χ_r è un arbitrario vettore covariante affine; o anche, introdotto su cia-

([35]) Cfr. **14**, p. 219; B. **70**, pp. 30-31; e i lavori di SCHOUTEN e v. DANTZIG, ove la nozione appare profondamente modificata. Ved. ad es. **71**, p. 431; **100**, p. 68.

scuna geodetica il parametro

$$s = \int e^{-\int \chi_r \frac{d\xi^r}{dt} dt} dt \tag{20.9}$$

al luogo di t, col sistema

$$\frac{\delta^2 \xi^\nu}{ds^2} = 0. \tag{20.10}$$

Queste non hanno carattere d'invarianza per le (14.6): ma è evidente che ad esse possiamo anche sostituire le

$$\frac{\overset{1}{\delta^2} \xi^\nu}{d\mathfrak{S}^2} = 0 \tag{20.11}$$

le quali invece (in quanto valgono le (17.4*)) per le (14.6) sono invarianti. Il parametro $\mathfrak{S}$, dato lungo ciascuna geodetica da

$$\mathfrak{S} = \int e^{\int \left(\frac{d\xi^o}{ds} - \Lambda^o_{or} \frac{d\xi^r}{ds}\right) ds} ds = \int e^{\int \left(\frac{d\xi^o}{dt} - \Lambda^o_{or} \frac{d\xi^r}{dt} - \chi_r \frac{d\xi^r}{dt}\right) dt} dt \tag{20.12}$$

è determinato dalla connessione proiettiva a meno di una trasformazione lineare intera a coefficienti costanti

$$'\mathfrak{S} = \alpha \mathfrak{S} + \beta; \tag{20.13}$$

lo potremo dire *parametro proiettivo* pei punti della geodetica. Le (20.11) *non dànno soltanto le linee geodetiche: ma anche, a meno di condizioni iniziali, i punti* $\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}s}$ *sulle tangenti associate* a quelle di ciascuna geodetica, nei suoi singoli punti (e anzi, in relazione al riferimento curvilineo e al B–riferimento scelto, sempre a meno di dati iniziali le (20.11) *associano ai punti di ciascuna geodetica i valori di un parametro* ξ^o). È quasi superfluo notare che le $\frac{d\xi^\lambda}{d\mathfrak{S}}$ soddisfacenti alle (20.11) *non potranno in generale soddisfare anche alle* (10.3) *o* (10.4), in relazione a una conveniente scelta degli iperpiani T_λ: si vede subito che la condizione per la compatibilità delle (20.11) e (10.3) è *che il campo di iperpiani* T_λ *sia conservato dalla connessione,* cioè che il trasporto proiettivo degli iperpiani che essa determina dia luogo lungo una qualunque linea della X_n a serie di iperpiani appartenenti al campo. Insomma: *soltanto se esiste un campo d'iperpiani conservato dalla connessione* (il che porta, come vedremo, che *la connessione proiettiva è affine*) *si possono scegliere le serie di punti posti sulle tangenti associate alle geodetiche, e varianti lungo queste linee pel trasporto proiettivo della connessione, in modo che stiano sugli iperpiani di un campo, anzi, appunto del campo detto sopra.*

Volendo rappresentare *soltanto le linee geodetiche* della connessione la prima equazione del sistema (20.10) o (20.11) (corrispondente al valore numerico $\nu = 0$) è naturalmente superflua; scegliendo convenientemente il parametro p le rimanenti equazioni possono scriversi

$$\frac{d^2\xi^r}{dp^2} + \underset{1}{\Gamma}{}^r_{st}\frac{d\xi^s}{dp}\frac{d\xi^t}{dp} = 0. \tag{20.14}$$

In esse i parametri $\underset{1}{\Gamma}{}^r_{st}$ possono normalizzarsi, secondo T. Y. THOMAS, in modo che siano *individuati dalle geodetiche* (e dal riferimento) ([36]). Ma su questo non ci fermeremo.

21. Mediante il trasporto proiettivo, determinato dalla connessione proiettiva che si considera, *lungo le linee geodetiche uscenti da un punto* $\underset{0}{\xi}$, si può — entro una conveniente regione n-dimensionale della X_n, *di cui ogni punto sia raggiunto da una sola geodetica uscente da* $\underset{0}{\xi}$ — costruire *una rappresentazione omografica al finito*, come quella $(\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\xi, \underset{0}{\xi}))$ da cui siamo partiti. Si tratta semplicemente di esprimere in forma finita gli integrali del sistema

$$\frac{dz^\lambda}{d\mathfrak{S}} = -\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu} z^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\mathfrak{S}} \quad \text{o} \quad \frac{\underset{1}{\mathfrak{d}} z^\lambda}{d\mathfrak{S}} = 0 \tag{21.1}$$

lungo una generica geodetica, che intendiamo rappresentata con le (20.11). Per questo applichiamo, *formalmente*, l'operatore $\dfrac{\underset{1}{\mathfrak{d}}}{d\mathfrak{S}}$ ai due membri della (21.1) tenendo conto della (21.1) medesima e della (20.11); *senza considerare l'indice* λ; cioè, come se $\dfrac{dz^\lambda}{d\mathfrak{S}}$ fosse un sistema di scalari, $\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu}$ un tensore di valenza covariante 2 (e grado zero), ecc.... Ciò equivale a prendere in considerazione i tensori (e in particolare scalari) che *nel sistema attuale* hanno le componenti $\dfrac{dz^{(\lambda)}}{d\mathfrak{S}}, \dfrac{d^2z^{(\lambda)}}{d\mathfrak{S}^2}, \ldots, \underset{1}{\Gamma}{}^{(\lambda)}_{\mu\nu}$; ove λ si considera come *indice ordinale.* Avremo successivamente

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2z^\lambda}{d\mathfrak{S}^2} \overset{*}{=} -\underset{1}{\mathfrak{D}}_\omega \underset{1}{\Gamma}{}^{(\lambda)}_{\mu\nu} \cdot z^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\mathfrak{S}}\frac{d\xi^\omega}{d\mathfrak{S}}, \\ &\frac{d^3z^\lambda}{d\mathfrak{S}^3} \overset{*}{=} -\underset{1}{\mathfrak{D}}_{\omega_2}\underset{1}{\mathfrak{D}}_{\omega_1} \underset{1}{\Gamma}{}^{(\lambda)}_{\mu\nu} \cdot z^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\mathfrak{S}}\frac{d\xi^{\omega_1}}{d\mathfrak{S}}\frac{d\xi^{\omega_2}}{d\mathfrak{S}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{21.2}$$

([36]) Ved. loc. cit. ([34]).

(ove con $\overset{*}{=}$ indichiamo, cfr. **107**, p. 24, eguaglianze *valide in relazione all'attuale riferimento*); onde, posto

$$(21.3)\qquad \left(\frac{d\xi^\nu}{d\mathfrak{S}}\right)_0 \overset{*}{=} a^\nu$$

segue

$$(21.4)\qquad z^\lambda \overset{*}{=} P^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)\cdot \underset{0}{z}^\mu,$$

ove abbiamo posto [37]

$$(21.5)\qquad P^{\lambda}_{\cdot\mu} \overset{*}{=} \delta^\lambda_\mu - (\underset{1}{\Gamma}{}^\lambda_{\mu\nu})_0 a^\nu \mathfrak{S} - (\underset{1}{\mathfrak{D}}_\omega \underset{1}{\Gamma}{}^{(\lambda)}_{\mu\nu})_0 a^\nu a^\omega \frac{\mathfrak{S}^2}{2} -$$
$$- (\underset{1}{\mathfrak{D}}_{\omega_2} \underset{1}{\mathfrak{D}}_{\omega_1} \underset{1}{\Gamma}{}^{(\lambda)}_{\mu\nu})_0 a^\nu a^{\omega_1} a^{\omega_2} \frac{\mathfrak{S}^3}{3!} - \ldots$$

Generalmente queste rappresentazioni al finito *differiranno da quelle*, $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)$, *da cui siamo partiti*: ciò è a priori evidente in quanto *infinite* differenti classi di rappresentazioni $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)$, una delle quali è la $P^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)$ dànno luogo *alla medesima connessione.* Ma facilmente esprimiamo le condizioni, perchè le rappresentazioni omografiche $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)$ si riducano alle $P^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)$, individuate dalla connessione:

Osserviamo che, date le $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi)$, anche a meno di una trasformazione (12.7), risultano associate a ciascun punto $\underset{0}{\xi}$ le ∞^{n-1} linee integrali del sistema seguente (e corrispondenti ai sistemi di valori dei rapporti fra le a^λ):

$$(21.6)\qquad \frac{d\xi^\lambda}{ds} = \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \xi) a^\mu \qquad\qquad (\text{per } s = s_0,\ \xi^\lambda = \underset{0}{\xi}{}^\lambda)$$

che ne escono: esse sono le geodetiche della connessione integrabile $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{0}{\xi}, \xi)$ (n. 15) uscenti da $\underset{0}{\xi}$. Ciò premesso, ecco le condizioni (necessarie e sufficienti) cercate:

a) Ciascuna linea, in relazione a un suo punto $\underset{0}{\xi}$ geodetica della connessione integrabile $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{0}{\xi}, \xi)$, deve essere anche, in relazione a ogni altro suo punto $\underset{1}{\xi}$, geodetica della connessione $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{1}{\xi}, \xi)$; il che porta per conse-

(37) Ad evitare ogni incertezza circa la convergenza degli sviluppi ci poniamo nell'ipotesi dell'*analiticità* delle funzioni $(\Lambda^{\lambda}_{\mu r}, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})$ in considerazione.

guenza che le geodetiche di $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ non dipendono da $\underset{o}{\xi}$, e coincidono con le geodetiche di $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi)$;

b) Il trasporto proiettivo a distanza finita definito dalle (12.1) lungo ciascuna delle geodetiche ora dette *deve, inoltre, essere transitivo*; cioè, se $\underset{0}{\xi}, \underset{1}{\xi}, \underset{2}{\xi}$ sono tre punti su una stessa geodetica, si deve avere

$$\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{0}{\xi}, \underset{1}{\xi})\Pi^{\mu}{}_{\cdot\nu}(\underset{1}{\xi}, \underset{2}{\xi}) = k\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\nu}(\underset{0}{\xi}, \underset{2}{\xi}) \qquad (k \text{ scalare}). \tag{21.7}$$

Analiticamente però è più semplice, per esprimere la coincidenza delle rappresentazioni $\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ con le $P^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$, valersi del confronto diretto fra gli sviluppi (21.5) e quelli che analogamente si ottengono per $\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}$ partendo, anzichè dalle $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$, dai parametri proiettivi normalizzati $\Theta^{\lambda}_{\mu\nu}$ della connessione integrabile $\Pi^{\lambda}_{\mu r}$:

$$\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi(l)) \overset{*}{=} \delta^{\lambda}_{\mu} - (\Theta^{\lambda}_{\mu\nu})_0 a^{\nu}\mathfrak{S} - (\underset{\theta}{\mathfrak{D}}_{\omega}\Theta^{(\lambda)}_{\mu\nu})_0 a^{\nu}a^{\omega}\frac{\mathfrak{S}^2}{2} - \tag{21.8}$$
$$- (\underset{\theta}{\mathfrak{D}}_{\omega_2}\underset{\theta}{\mathfrak{D}}_{\omega_1}\Theta^{(\lambda)}_{\mu\nu})_0 a^{\nu}a^{\omega_1}a^{\omega_2}\frac{\mathfrak{S}^3}{3!} - \dots,$$

ove, le $\Pi^{\lambda}_{\mu r}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ essendo date dalle (13.9), si ha

$$\Theta^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{r}_{\nu}(\Pi^{\lambda}_{\mu r} - \delta^{\lambda}_{\mu}\Pi^{o}_{or}) + \delta^{o}_{\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}; \tag{21.9}$$

infine $\underset{\theta}{\mathfrak{D}}$ è il simbolo di derivazione proiettiva coi parametri $\Theta^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Per la coincidenza delle due classi di rappresentazioni naturalmente occorre e basta che sia

$$\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) = \psi(\underset{o}{\xi}, \xi)P^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi) \qquad \psi(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) = 1; \tag{21.10}$$

ma è *sufficiente* che le relazioni valgano con $\psi(\underset{o}{\xi}, \xi) = 1$. Eguagliando i coefficienti dei termini d'eguale ordine abbiamo dunque un sistema di condizioni sufficienti perchè le rappresentazioni al finito $\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ siano quelle cui dà origine il trasporto da $\underset{o}{\xi}$ a ξ lungo la geodetica congiungente ([38]).

([38]) Si tenga presente che le $\underset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ si esprimono, mediante le (18.1), (18.10), (13.3), o direttamente mediante le (18.21), per le $\Pi^{\lambda}{}_{\cdot\mu}(\underset{o}{\xi}, \xi)$ e loro derivate.

(continua)

Sur les réductions monômes des intégrales abéliennes.

D. Mordoukhay-Boltovskoy (Rostov-Don).

§ 1. **Le théorème de Koenigsberger.** — En vertu des recherches de Liouville (¹), Abel (²) et Koenigsberger (³) le problème général de la réduction de l'intégrale abélienne:

$$\int F(x,\ y)dx$$

définie par la courbe

(1) $$f(x,\ y) = 0$$

à l'intégrale

$$\int \psi_i(\xi,\ \eta)d\xi$$

définie par la courbe

$(2)_i$ $$\psi_i(\xi,\ \eta) = 0$$

et encore à des fonctions algébrique-logarithmiques se ramène au problème de la réduction à la forme suivante:

(3) $$\int F(x,\ y)dx = P(x,\ y) + \sum_{i=1}^{i=n} B_i \sum_{j=1}^{j=\pi_i} \int \psi_i\,(\xi_i^{(j)},\ \eta_i^{(j)})d\xi_i^{(j)},$$

où

(4) $$P(x,\ y) = Q(x,\ y) + \sum_{k=1}^{k=m} C_k \lg R_k(x,\ y)$$

$Q(x,\ y)$, $R(x,\ y)$ étant des fonctions rationnelles de $(x,\ y)$, au moyen de la

---

(¹) Liouville, *Mémoire sur la classification des transcendantes etc.*, « Journ. de Liouville », t. 2, 1837.

(²) Abel, *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, « Journ. de Crelle », t. 4, 1829. Oeuvres, t. I, p. 545, aussi, t. II, p. 278.

(³) Koenigsberger, *Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen specielles auf elliptische Integrale*, « Crelle's Journal », t. 89, 1880. *Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale*, Leipzig, 1878. *Allgemeine Untersuchungen auf die Theorie der Differentialgleichungen*, Leipzig, 1882.

D. Mordoukhay-Boltovskoy, *Sur la réduction des intégrales abéliennes aux transcendantes inférieures*, « Annales de l'Institut Polytechnique de Varsovie », 1906.

substitution suivante:

$$(5)_i \qquad \alpha_{0i}(x, y)\xi_i^{\pi_i} + \alpha_{1i}(x, y)\xi_i^{\pi_i - 1} + \dots \alpha_{\pi_i, i}(x, y) = 0$$

$$(6) \qquad \eta_i^{(j)} = S(\xi_i^{(j)}, x, y)$$

où $\alpha_{ji}(x, y)$ est une fonction entière de (x, y), $S(\xi_i^{(j)}, x, y)$ une fonction rationnelle de $(x, y, \xi_i^{(j)})$, $\xi_i^{(j)}$ une racine de $(5)_i$.

L'équation (5) nous donne:

$$(7) \qquad d\xi_i^{(j)} = U(\xi_i^{(j)}, x, y)dx + V(\xi_i^{(j)}, x, y)dy$$

où $U(\xi_i^{(j)}, x, y)$, $V(\xi_i^{(j)}, x, y)$ sont rationnelles par rapport à $\xi_i^{(j)}, x, y$.

L'équation (1), qui définit l'intégrale $\int F(x, y)dx$ nous donne:

$$(8) \qquad dy = u(x, y)dx$$

où $u(x, y)$ est une fonction rationnelle de (x, y).

En substituant la valeur de dy de l'équation (8) dans l'équation (7), nous avons:

$$(9) \qquad d\xi_i^{(j)} = T_i(\xi_i^{(j)}, x, y)dx$$

T_i étant une fonction rationnelle de $(\xi_i^{(j)}, x, y)$.

En multipliant les deux parties de (9) par la fonction rationnelle: $\psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})$ que nous construisons d'une manière que l'intégrale:

$$\int \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})d\xi_i^{(j)}$$

soit de *première espèce* (ce que nous pourrons faire si $\pi_i \geq 1$) nous obtenons par l'équation (9)

$$(10)_i \qquad \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})d\xi_i^{(j)} = W(\xi_i^{(j)}, x, y)dx$$

W_i étant rationnelle par rapport à $(\xi_i^{(j)}, x, y)$.

En ajoutant ces équations $(10)_i$ respectivement nous avons pour les valeurs différentes de $j = 1, 2, \dots \sigma$:

$$(11) \qquad \sum_{j=1}^{j\ \pi_i} \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})d\xi_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{j=\pi_i} W_i(\xi_i^{(j)}, x, y)dx.$$

La somme qui se trouve dans la partie droite de (11) est une fonction rationnelle *symmétrique* de $\xi_i^{(j)}$ et par conséquent elle s'exprime en vertu de l'équation (5) en fonction rationnelle de (x, y). Par suite

$$(12) \qquad \Sigma \int \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})d\xi_i^{(j)} = \int F_i^{(1)}(x, y)dx.$$

La somme dans la partie gauche restant finie pour toutes les valeurs de $(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)})$, et aussi pour toutes les valeurs de (x, y), $\int F_i^{(1)}(x, y)dx$, comme l'intégrale $\int \psi_i^{(1)}(\xi, \eta)d\xi$, devra être de première espèce ou (ce que KOENIGSBERGER n'a pas remarqué) *constante.*

Nous allons démontrer qu'on ne peut avoir que les deux cas suivants:

1) $\xi_i^{(j)}$, $\eta_i^{(j)}$ sont constants et alors on peut poser dans (3), $B_i = 0$.

2) Il existe pour le moins une fonction $F_i^{(1)}(x, y)$, distincte de zéro, satisfaisant à la réduction (12).

En effet si *toutes* les sommes:

$$\sum_{j=1}^{j=\pi_i} \int \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)}) d\xi_i^{(j)}$$

qui correspondent aux différentes intégrales de première espèce pouvaient se ramener à des constantes, $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ serait definie par l'équation de degré π, dont les coéfficients sont des fonctions uniformes de

$$u_k = \sum_{j=1}^{j\ \pi_i} \int \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i^{(j)}, \eta_i^{(j)}) d\xi_i^{(j)} \qquad k = 1, 2, \ldots \pi_i$$

et comme $u_k = \text{const.}$, on aurait aussi $\xi_i^{(j)} = \text{const.}$, $\eta_i^{(j)} = \text{const.}$.

En supposant, que la réduction soit donnée dans la forme *preparée,* c'est à dire contenant le moindre possible nombre de transcendantes $\int \psi_i(\xi, \eta)d\xi$ et par conséquent en supposant les sommes pour lesquelles $B_i = 0$ exclues, nous pouvons énoncer le théorème fondamental de KOENIGSBERGER:

Si l'intégrale abélienne $\int \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx}$ *se ramène aux intégrales* $\int \psi_\mathrm{i}(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi$, *on peut toujours indiquer pour chaque intégrale* $\int \psi_\mathrm{i}(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi$ *au moins une intégrale de première espèce se réduisant au moyen de la même substitution à l'intégrale de première espèce* $\int \psi_\mathrm{i}^{(1)}(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi$.

Ainsi pour la réduction des intégrales de seconde et de troisième espèce, il est *nécessaire* mais *non suffisant* que le problème de la réduction des intégrales de première espèce soit résoluble.

On peut ajouter que dans le cas général, si on a la réduction de l'intégrale de première espèce $(12)_\mathrm{k}$ pour $k = 1$, il existe encore $\overline{\pi_i - 1}$ réductions semblables.

Les $\int F_{ik}^{(1)}(x, y)dx$ composent le système complèt des π_i intégrales indépendantes de première espèce.

En effet, si dans le cas général quelques $F_{ik}^{(1)}(x, y)$ étaient égales à zéro, on aurait la même chose dans tous les cas *particuliers*.

Si l'on pose tous les $\xi_i^{(j)}$, $\eta_i^{(j)}$ excepté $\xi_i^{(1)}$, $\eta_i^{(1)}$ égaux à des constantes, en divisant l'équation par $\xi - \xi_i^{(j)}$ on obtient

$$\xi_i^{(1)} = \alpha_i(x, y) \tag{13$_1$}$$

et par consequent en vertu de (6) on a aussi:

$$\eta_i^{(1)} = \beta_i(x, y) \tag{14$_1$}$$

$\alpha_i(x, y)$, $\beta_i(x, y)$ étant rationnelles par rapport à (x, y).

Voici un exemple d'une semblable réduction:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^{15}}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^5}} \tag{15$_1$}$$

$$\xi = x^3$$

$$\eta = y$$

et à la fois

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 + x^{15}}} = \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 + \xi^5}}. \tag{15$_2$}$$

Dans ce cas la réduction (12) se ramène à la forme

$$\int F_{ik}^{(1)}(x, y)dx = \int \psi_{ik}^{(1)}(\xi_i, \eta_i)d\xi_i \tag{16}$$

à un seul terme, que nous appelerons *monôme*.

Mais on peut avoir des cas où le nombre des intégrales $\int F_{ik}^{(1)}(x, y)dx$ réductibles est moindre que π_i.

Les cas de ce genre nous allons appeler — *cas critiques du théorème de Koenigsberger*.

La réduction (12) est obtenue par (1-2).

Nous pouvons dire que la compatibilité des équations:

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

$$\psi(\xi, \eta) = 0 \tag{2}$$

$$\alpha_0(x, y)\xi^\pi + \alpha_1(x, y)\xi^{\pi-1} + \dots \alpha_\pi(x, y) = 0 \tag{5}$$

$$\eta^{(j)} = S(\xi^{(j)}, x, y) \tag{6}$$

définit les conditions nécessaires et suffisantes de la réduction des intégrales de première espèce $\int F(x, y)dx$ à des intégrales $\int \psi(\xi, \eta)d\xi$, qu'on peut formuler de la manière suivante:

(y, x) *étant des coordonnées sur la courbe* (1) *et une coordonnée* ξ *sur la courbe* (2) *étant définie par l'équation* (5) *avec les coéfficients* α_i(x, y) *rationnels par rapport à* (x, y), *l'autre* η *peut être exprimée rationnellement en* (ξ, x, y).

§ 2. **La réduction rationnelle monôme.** — Dans le cas général, dans la réduction (12) on a le nombre des intégrales $\int \psi_{ik}(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\xi^{(j)}$ égal à π, *genre* de la courbe (2).

Mais des exceptions peuvent se rencontrer les reductions du type *raccourci*

$$(12)' \qquad \int F_i(x, y)dx = \sum_{j=1}^{j=\rho} \int \psi_{ik}(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\xi^{(j)}$$
$$\rho < \pi.$$

Ce racourcissement est possible dans la forme *canonique* (12) avec la substitution de la forme (5-6) qui se ramène à

$$(5)' \qquad \alpha_0(x, y)\xi^\rho + \alpha_1(x, y)\xi^{\rho-1} + \dots \alpha_\rho(x, y) = 0$$
$$(6)' \qquad \eta^{(j)} = S(\xi^{(j)}, x, y).$$

Mais la même chose est possible aussi pour la forme *non canonique,* quand (ξ, η) sont des fonctions algébriques de (x, y) et (x, y) de (ξ, η) du type *général.* Quand on passe à la forme canonique, sans doute la forme a un seul terme se détruit.

Dans le mémoire présent, nous avons l'intention de discuter le cas où $\rho = 1$, c'est à dire de la réduction menôme:

$$(17) \qquad \int F(x, y)dx = \int \psi(\xi, \eta)d\xi.$$

Nous prendrons d'abord le cas où la réduction est canonique, c'est à dire *la réduction rationnelle monôme*:

$$(17) \qquad \int F(x, y)dx = \int \psi(\xi, \eta)d\xi$$

$$(18) \qquad \xi = \alpha(x, y)$$

$$(19) \qquad \eta = \beta(x, y).$$

D'abord il faut remarquer que dans ce cas on ne peut avoir le cas critique au théorème de KOENIGSBERGER. Nous devons avoir toujours π réductions:

$$(17)_1 \qquad \int F_1(x, y)dx = \int \psi_1(\xi, \eta)d\xi.$$

La condition nécessaire et suffisante de la réduction des intégrales de première espèce peut être formulée de la manière suivante:

La courbe f(x, y) = 0 (1), *qui définit* $\int$F(x, y)dx *s'obtient par la transformation rationnelle de la courbe* $\psi(\xi, \eta) = 0$ (2), *qui définit* $\int \psi(\xi, \eta)d\xi$.

Dans le cas général nous avons la transformation *birationnelle* de la courbe (2) c'est à dire les équations qui definissent (x, y) en (ξ, η) sont du premier degré et

$$(20) \qquad x = a(\xi, \eta)$$

$$(21) \qquad y = b(\xi, \eta)$$

et à chaque point de (1) ne correspond qu'un seul point et inversement.

Mais sous certaines conditions pour les coefficients de $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ il peut arriver que (x, y) soient définis par des équations d'ordres supérieurs:

$$(22) \qquad a_0(\xi, \eta)x^q + a_1(\xi, \eta)x^{q-1} + \dots a_q(\xi, \eta) = 0;$$

y dans le cas où x n'est pas racine multiple de (22) s'exprime rationnelement en (ξ, η, x)

$$(23) \qquad y = S(\xi, \eta, x).$$

Dans le cas contraire:

$$(24) \qquad S_0(x, \xi, \eta)y^k + S_1(x, \xi, \eta)y^{k-1} + \dots S_k(x, \xi, \eta) = 0.$$

A un point de (2) correspond non un seul, mais q points de (1).

Une telle transformation (on une telle substitution) sera appellée-*rationnelle d'ordre* q ([4]).

Si nous substituons dans (1) les expressions de (x, y) en (ξ, η) de (22), (23) ou (24) ou si dans l'équation

$$(25) \qquad \prod_i f(x_i, y_i) = 0$$

([4]) *Sur la transformation rationnelle*, V.

APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris, 1895, ch. IV, § 119, 120.

PAINLEVÉ, *Sur les équations différentielles du premier ordre*, « Annales de l'École Normale », 1891. *Leçons sur la théorie analytique des éq. diff.*, Paris, 1897.

qui s'obtient par la multiplication des valeurs de $f(x, y)$ pour les systèmes différents de (x, y) satisfaisant à (22), (23) ou (24), nous remplacerons les fonctions symmétriques (x_i, y_i) par leurs expressions tirées de ces équations, nous obtiendrons comme résultat de (1), (18), (19):

$$\omega(\xi, \eta) = 0. \tag{26}$$

Les degrés de $\omega(\xi, \eta)$ étant par rapport à ξ et η, μ et ν, μ étant l'ordre de $\alpha(x, y)$, ν de $\beta(x, y)$.

La partie gauche $\omega(\xi, \eta)$ ne doit pas nécessairement coincider avec $\psi(\xi, \eta)$ dans le cas de la transformation birationnelle:

$$\omega(\xi, \eta) = A\psi(\xi, \eta) \tag{27}$$

et dans le cas de la transformation d'ordre $q > 1$:

$$\omega(\xi, \eta) = A[\psi(\xi, \eta)]^q \tag{28}$$

où A est constante.

On a donc

$$\mu = \mu' q, \quad \nu = \nu' q,$$

μ', ν' étant les degrés de $\psi(\xi, \eta)$ par rapport à ξ, η.

Si on peut indiquer pour q *une limite supérieure*

$$q \leq M$$

on pourra résoudre le problème de la réduction de l'intégrale de première espéce au moyen *d'un nombre fini d'opérations algébriques.*

Il faudra seulement décomposer le problème de la réduction par la substitution d'ordre *quelconque* en M problèmes de la réduction par la substitution d'ordre determiné.

En vertu du théorème connu de H. Weber [5]

$$(2\pi - 2)q \leq 2p - 2$$

on pourra prendre pour $\pi > 1$

$$M = E\left(\frac{p-1}{\pi - 1}\right).$$

Les conditions de la réductibilité au moyen d'une substitution de l'ordre q peuvent être formulées de la manière suivante:

---

[5] Picard, *Cours d'Analyse,* t. II, p. 454. Appell et Goursat, p. 476. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie,* 1921, § 61, s. 109.

Il existe une fonction rationnelle $\alpha(x, y)$ d'ordre $\mu' q$ de x et y, définie par l'équation

(1) $$f(x, y) = 0$$

telle, qu'en posant $\xi = \alpha(x, y)$ on aura pour η, définie par l'équation

(2) $$\psi(\xi, \eta) = 0$$

l'expression rationnelle en (x, y)

$$\eta = \beta(x, y).$$

Mais chaque fonction rationnelle de (x, y) est uniforme sur la surface de Riemann (y, x) et inversement.

Si

(29) $$y = \sum_{j=-u}^{j-\infty} y_{\frac{j}{s}} (x - x_0)^{\frac{j}{s}}$$

$$(x - \infty) = \frac{1}{x}$$

et

(30) $$\xi = \sum_{j=-r}^{j=\infty} \xi_{\frac{j}{s}} (x - x_0)^{\frac{j}{s}}$$

et à la fois

(31) $$\eta = \sum_{j=-\rho}^{j=\infty} \eta_{\frac{j}{\sigma}}^{(x)} (x - x_0)^{\frac{j}{\sigma}}$$

ou

(32) $$\eta = \eta_0 + \sum_{j=\rho}^{j=\infty} \eta_{\frac{j}{\sigma}}^{(x)} (x - x_0)^{\frac{j}{\sigma}}.$$

Si $r \leq 0$ et ξ_0 est fini, nous avons:

(33) $$\eta = \eta_0 + \sum_{j=0}^{j=\infty} \eta_{\frac{\rho\tau+\sigma j}{\sigma s}}^{(x)} (x - x_0)^{\frac{\rho\tau+\sigma j}{\sigma s}}$$

ou

(34) $$\eta = \sum_{j=0}^{j=\infty} \eta_{-\frac{\rho\tau+\sigma j}{\sigma s}}^{(x)} (x - x_0)^{-\frac{\rho\tau+\sigma j}{\sigma s}}.$$

Pour $\sigma = 1$, η est uniforme sur la surface de Riemann de (y, x). Pour que η soit aussi uniforme pour $\sigma > 1$, il faut et il suffit que τ se divise par σ.

On peut enoncer les conditions obtenues de la manière suivante:

On a $\overline{\sigma - 1}$ équations:

$$\xi_{\frac{j}{\sigma}} = 0$$

avec l'inégalité

$$\xi_{\frac{\sigma}{s}} \gtrless 0.$$

Ce sont les conditions de *la première classe.*

Si

$$\xi_{\frac{\sigma}{s}} = 0$$

on a

(35)₂ $$\xi_{\frac{\sigma+1}{s}} = 0$$

et

(36)₂ $$\xi_{\frac{2\sigma}{s}} \gtrless 0.$$

Ce sont les conditions de *la seconde classe,* etc.

De la même manière on discute le cas $\xi_0 = \infty$.

A un point ordinaire η ne correspond aucune équation conditionelle, au point de la ramification correspondent $q(\sigma - 1)$ équations de la première classe avec q inégalités, en général $\sum\limits_i q_i(l_i\sigma - 1)$ équations conditionnelles des classes differentes avec $\omega \sum\limits_i q_i = \omega q$ inégalités, ω étant le nombre des points des ramifications.

Il est facile de voir que l'ordre de la classe ne surpasse pas un nombre fixe, qu'on peut indiquer.

En effet, quand l'ordre est égal à l

$$\eta = \eta_0 + \eta^{(x)}_{\frac{\rho l}{s}} (x - x_0)^{\frac{\rho l}{s}} + \ldots$$

$$\eta = \eta^{(x)}_{-\frac{\rho l}{s}} (x - x_0)^{-\frac{\rho l}{s}} + \ldots$$

qui donnent, pour une valeur determinée de η, ρl valeurs de x.

Nous devons donc avoir:

(37) $$\rho l < \nu' q < \nu' M.$$

§ 3. **La propriété fondamentale de la réduction irrationnelle monôme.** — Passons à présent à la réduction *irrationnelle*

(38) $$\int F(x, y) dx = \int \psi(\xi, \eta) d\xi.$$

Nous allons démontrer la propriété *fondamentale* de la réduction irrationnelle monôme:

Si la réduction (38) *n'est pas possible par une substitution rationnelle*:

(18) $$\xi = \alpha(x, y)$$

(19) $$\eta = \beta(x, y)$$

l'intégrale $\int \psi(\xi, \eta) d\xi$ *se ramène au moyen d'une substitution rationnelle*

(39) $$\zeta = A(\xi, \eta)$$

(40) $$\omega = B(\xi, \eta)$$

à une intégrale d'ordre inférieur.

Le théorème est valable non seulement pour les intégrales de première espèce, mais aussi pour la seconde et la troisième.

La substitution peut être définie par plusieures équations irréductibles:

$(41)_k$ $$\sum_h \alpha_{h,k}(x, y)\xi_k{}^h = 0$$

$(42)_k$ $$\sum_h \beta_{h,k}(x, y)\eta_k{}^h = 0.$$

Mais on peut faire la transformation *homographique*

$$\xi_1 = \frac{a\xi + b\eta + c}{k\xi + l\eta + m}, \quad \eta_1 = \frac{d\xi + e\eta + f}{k\xi + l\eta + m}$$

de la courbe, en choisissant a, b tels, que deux valeurs correspondentes à deux solutions η soient différentes ou que deux points (ξ', η), (ξ'', η), ou ξ', ξ'' sont deux solutions de (42) soient différents.

On peut aussi choisir les coéfficients de tel façon que cela ait lieu pour *chaque* équation $(42)_k$.

De même, par une transformation homographique on ramène l'équation (1), qui définit $\int F(x, y)dx$ à

$(1)_1$ $$f_1(x_1, y_1) = 0,$$

les valeurs de x_1, correspondentes à y_1 étant différentes.

Ainsi la réduction (38) peut être remplacée par la suivante:

$(38)_1$ $$\int F_1(x_1, y_1)dx_1 = \int \psi_1(\xi_1, \eta_1)d\xi_1$$

avec la substitution, qui est définie par les équations:

$(5)_1$ $$\sum_h \alpha_{h,k}(x_1, y_1)\xi_{1k}^h = 0,$$

$(6)_1$ $$\eta_{1k} = S_k(x_1, y_1, \xi_{1k}).$$

Pour la simplification de la notation l'indice 1 près de x, y, ξ, η sera omis.

Au lieu de $(\xi_k^{(j)}, \eta_k^{(j)})$ nous allons écrire $(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})$.

Remarquons que la fonction symmétrique de $(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})$ s'exprime rationnellement en (x, y).

Chaque réduction de l'intégrale abélienne (38) par la substitution (5), (6) entraine les autres réductions:

$$\int F(x, y)dx = \int \psi(\xi_l, \eta_l)d\xi_l$$

qui correspondent aux autres racines des équations:

$$\varphi_0(x, y)\xi^a + \varphi_1(x, y)\xi^{a-1} + \dots \varphi_a(x, y) = 0$$
$$\eta = \psi(\xi, x, y).$$

Par conséquent nous avons les réductions:

$$(38)_g \qquad \int F(x_i, y_i)dx_i = \int F(x, y)dx = \int \psi(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})d\xi^{(g)}$$

où (x, y) sont définis par les systèmes des équations:

$$\sum_h \alpha_{h,k}(\xi, \eta)x^h = 0$$
$$y = T_k(\xi_k, \eta_k, x).$$

Mais à la fois nous avons:

$$(38)_{ig} \qquad \int F(x_i, y_i)dx_i = \int \psi(\xi^{(gi)}, \eta^{(gi)})d\xi^{(gi)}$$

où $\xi^{(gi)}$, $\eta^{(gi)}$ sont définis par les systèmes des équations:

$$\sum_h \beta_{h,k}(x_i, y_i)\xi_k^{(g)h}$$
$$\eta_{kl} = S_k(x_i, y_i, \xi_{kl})$$
$$\xi^{(1)} = \xi, \quad \eta^{(1)} = \eta$$

d'où

$$(43) \qquad \int \psi(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})d\xi^{(g)} = \int F(x, y)dx = \int F(x_i, y_i)dx_i = \int F(\xi^{(gi)}, \eta^{(gi)})d\xi^{(gi)},$$

d'où il suit que

$$(\xi^{(gi)}, \eta^{(gi)}) \quad \text{sont tous parmi} \quad (\xi^{(g)}, \eta^{(g)}).$$

Les fonctions symétriques de $(\xi^{(gi)}, \eta^{(gi)})$ sont des fonctions symétriques rationnelles de (x_i, y_i) et par cela des fonctions rationnelles de (ξ, η), de sorte que $(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})$ [6] sont exprimés en (ξ, η) au moyen des équations de la forme

---

[6] Il n'est pas nécessaire que ce soient *toutes* les valeurs possible de $(\xi^{(g)}, \eta^{g})$, mais seulement celles qui sont définies par une équation *irreductible*.

suivante:

(44) $$\sum_h A_h(\xi, \eta)\xi^{(g)h} = 0$$

(45) $$\eta^{(g)} = B(\xi, \eta, \xi^{(g)}).$$

En vertu de ces équations, nous pouvons écrire:

(47) $$\sum_{j=1}^{j\ u} \alpha(\xi^{(j)}, \eta^{(j)}) = A(\xi, \eta)$$

(48) $$\Sigma\, \beta(\xi^{(j)}, \eta^{(j)}) = B(\xi, \eta)$$

α, β étant des fonctions rationnelles $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$, que nous allons choisir convenablement, $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ étant des fonctions rationnelles de (ξ, η). En posant

(49) $$\zeta = A(\xi, \eta)$$

(50) $$\omega = B(\xi, \eta)$$

nous aurons la transformation rationnelle de la courbe

(2) $$\psi(\xi, \eta) = 0$$

dans l'autre

(51) $$\vartheta(\zeta, \omega) = 0.$$

Nous allons à présent démontrer que par un choix convenable de $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ l'intégrale $\int \psi(\xi, \eta) d\xi$ se réduit par la substitution (47), (48) à $\int \chi(\zeta, \omega)\, d\zeta$ défini par la courbe (51).

En prenant pour les pôles *simples* de (ξ, η):

(A) $$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \ldots$$

et en désignant par

$(A)_j$ $$(\alpha_1^{(j)}, \beta_1^{(j)}), (\alpha_2^{(j)}, \beta_2^{(j)}), (\alpha_3^{(j)}, \beta_3^{(j)}), \ldots$$

les valeurs $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$, correspondantes aux valeurs (A) de (ξ, η), nous obtenons pour $A(\xi, \eta)$ les pôles définis par les tables: (A) et $(A)_j$ et avec

$$A(\alpha_i, \beta_i) = \infty$$

nous devons avoir aussi

$$A(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}) = \infty.$$

D'autre part, sauf ces pôles, *il n'y en a pas d'autres.*

En effet si $A(\gamma, \delta) = 0$, nous devons avoir pour quelque j (en vertu de (47)):

$$\alpha(\gamma^{(j)}, \delta^{(j)}) = 0$$

ou $(\gamma^{(j)}, \delta^{(j)})$ est la valeur de $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ pour $\xi = \gamma$, $\eta = \delta$.

En remplaçant dans nos discussions (ξ, η) par $(\xi^{(q)}, \eta^{(q)})$, nous obtenons les équations:

$$\sum_{h=0}^{h=\mu} A_h(\xi^{(q)}, \eta^{(q)})\xi^h = 0$$
$$\eta = B(\xi^{(q)}, \eta^{(q)}, \xi)$$

qui nous donneront en $\xi^{(q)}, \eta^{(q)}$: $(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}), (\xi^{(2)}, \eta^{(2)}), \ldots$ et après la division par $(\xi - \xi^{(q)})$

$$\sum_{h=0}^{h=\mu-1} C_h(\xi^{(q)}, \eta^{(q)})\xi^h = 0$$

qui définit $(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}), (\xi^{(2)}, \eta^{(2)}), \ldots (\xi^{(q-1)}, \eta^{(q-1)}), (\xi^{(q)}, \eta^{(q)}), (\xi^{(q+1)}, \eta^{(q+1)}), \ldots (\xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)})$, en $(\xi^{(q)}, \eta^{(q)})$.

Si on pose $\xi^{(q)} = \gamma^{(q)} = \alpha, \quad \eta^{(q)} = \delta^{(q)} = \beta$ on n'obtient pour $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ que $\mu - 1$ valeurs, qui sont toutes parmi A_j.

La construction de la fonction rationnelle $B(\xi, \eta)$ s'opère de la manière suivante:

Les pôles de $B(\xi, \eta)$:

(Γ) $$(\alpha_1, \beta_1), (\gamma_2, \delta_2), (\gamma_3, \delta_3), \ldots$$

(γ_j, δ_j) sont différents de A_j.

Les autres pôles de $B(\xi, \eta)$ sont définis par la table suivante:

$(\Gamma)_j$ $$(\alpha_1^{(j)}, \beta_1^{(j)}), (\gamma_2^{(j)}, \delta_2^{(j)}), (\gamma_3^{(j)}, \delta_3^{(j)}), \ldots$$

Le système

(49) $$\zeta = A(\xi, \eta)$$

(50) $$\omega = B(\xi, \eta)$$

(2) $$\psi(\xi, \eta) = 0$$

admettra par rapport à (ξ, η), μ solutions qui en vertu des égalités:

$$A(\xi, \eta) = A(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$$
$$B(\xi, \eta) = B(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$$

seront: $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$.

La fonction rationnelle symétrique de $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ s'exprime rationnellement en (ζ, ω).

En prenant

(52) $$I = \int \psi(\xi, \eta)d\xi = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=\mu} \int \psi(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\xi^{(j)}$$

on remplace sous le signe de l'intégrale $d\xi^{(j)}$ par l'expression:

$$d\xi^{(j)} = T(\zeta, \omega, \xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\zeta$$

qu'on obtient en différentiant (49), (50):

$$d\zeta = \frac{\partial A}{\partial \xi^{(j)}} d\xi^{(j)} + \frac{\partial A}{\partial \eta^{(j)}} d\eta^{(j)}$$

$$d\omega = - \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \zeta}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial \omega}} d\zeta = \frac{\partial B}{\partial \xi^{(j)}} d\xi^{(j)} + \frac{\partial B}{\partial \eta^{(j)}} d\eta^{(j)}.$$

En définitive, on a

$$I = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{j=u} \int T(\zeta, \omega, \xi^{(j)}, \eta^{(j)}) \Theta(\xi^{(j)}, \eta^{(j)}) d\zeta = \int \chi(\zeta, \omega) d\zeta$$

χ étant une fonction rationnelle de (ζ, ω).

Certainement si $\int \psi(\xi, \eta) d\xi$ est de première espèce, l'intégrale $\int \chi(\zeta, \omega) d\zeta$ étant partout finie, doit être aussi de première espèce.

Si $\int \psi(\xi, \eta) d\xi$ a des *pôles* et des points *logarithmiques*, la même chose a lieu pour $\int \chi(\zeta, \omega) d\zeta$.

Si $\mu > 1$, en vertu du théorème de H. Weber (7) le genre de la courbe $\vartheta(\zeta, \omega) = 0$ doit être inférieur au genre de $\psi(\xi, \eta) = 0$ c'est à dire l'ordre de l'intégrale $\int \chi(\zeta, \omega) d\zeta$ est moindre que π — ordre de $\int \psi(\xi, \eta) d\xi$.

Il faut encore ajouter que si la courbe *hyperelliptique* $f(x, y) = 0$ du genre p sera transformée par la substitution rationnelle en courbe algébrique $\varphi(\xi, \eta) = 0$ du genre $\pi \leq p$, celle ci sera aussi *hyperelliptique*.

En effet, quelques courbes adjointes

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{j\ \pi} \lambda_j P_j(x, y) = 0$$

seront transformées en courbes adjointes

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{j=\pi} \lambda_j Q_j(\xi, \eta) = 0$$

et comme $P(x, y)$ en passant par un point fixe (a, b) doit passer par un autre (a', b') (8), la même chose arrivera à la courbe $Q(x, y) = 0$ pour toutes

(7) H. Weber, « Crelle's Journal », B. 76, (1875).

(8) Appell et Goursat, § 175, p. 386.

les valeurs de λ_j c'est à dire pour toutes les courbes adjointes et la courbe $\varphi(\xi, \eta)=0$ sera aussi *hyperelliptique.*

§ 4. **Le cas critique du théorème de Koenigsberger.** — Il faut indiquer encore une proprieté remarquable de la réduction irrationnelle monôme:

Chaque réduction irrationnelle monôme des intégrales de première espèce:

$$(38)\qquad \int F(x, y)dx = \int \psi(\xi, \eta)d\xi$$

donne le cas critique du théorème de Koenigsberger (§ 1).

En conservant les notations du paragraphe précedent, nous avons, en vertu de (38):

$$(53)\qquad \mu\int F(x, y)dx = \sum_{j-1}^{j-\mu}\int \psi(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\xi^{(j)}$$
$$\xi^{(1)}=\xi, \quad \eta^{(1)}=\eta$$

où les fonctions symétriques de $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ sont des fonctions rationnelles de (x, y).

Or

$$(54)\qquad \sum_{j=1}^{j\ \mu}\int \psi(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\xi^{(j)} = \sum_{j=1}^{j-\pi}\int \psi(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})d\xi^{(j)}$$

$$(55)\qquad A_0(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \ldots \xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)})\xi^{(j1)\pi} + A_1(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \ldots \xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)})\xi^{(j1)\pi-1} + \ldots$$
$$\ldots + A_\pi(\xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)}) = 0$$

$$(56)\qquad \eta^{(j1)} = P(\xi^{(j1)}, \xi^{(1)}, \eta^{(1)}, \xi^{(2)}, \eta^{(2)}, \xi^{(\mu)}, \eta^{(\mu)}),$$

A_i étant des fonctions rationnelles symétriques de $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$, P, f. rat. de $\xi^{(j1)}$, et f. rat. sym. de $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$.

En vertu de (54) la réduction (53), se ramène à la suivante:

$$(59)\qquad \mu\int F(x, y)dx = \sum_{j=1}^{j=\pi}\int \psi(\xi^{(j1)}, \eta^{(j1)})d\xi^{(j1)}$$

$$(60)\qquad \alpha_0(x, y)\xi^{(j1)\pi} + \alpha_1(x, y)\xi^{(j1)\pi-1} + \ldots \alpha_\pi(x, y) = 0$$

$$(61)\qquad \eta^{(j1)} = S(\xi^{(j1)}, x, y).$$

Or dans le paragraphe précedent nous avons démontré que les fonctions rationnelles symétriques de $(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ s'expriment en fonctions rationnelles de (ξ, η) et par suite les équations (55), (56) peuvent être remplacées par les suivantes:

$$(62)\qquad B_0(\xi, \eta)\xi^{(j1)\pi} + B_1(\xi, \eta)\xi^{(j1)\pi-1} + \ldots B_\pi(\xi, \eta) = 0$$

$$(63)\qquad \eta^{(j1)} = Q(\xi^{(j1)}, \xi, \eta)$$

d'où on obtient (§ 1) la réduction:

$$\mu\int \Psi_1(\xi, \eta)d\xi = \sum_{j=1}^{j=\pi}\int \psi_1(\xi^{(j1)}, \eta^{(j1)})d\xi^{(j1)}, \tag{64}$$

l'intégrale $\int \Psi_1(\xi, \eta)d\xi$ étant de première espèce.

Si on suppose que le cas critique n'a pas lieu, on aura avec (59) encore $\overline{\pi - 1}$ réductions:

$$\mu\int F_i(x, y)dx = \sum_{j=1}^{j=\pi}\int \psi_i(\xi^{(j1)}, \eta^{(j1)})d\xi^{(j1)} \qquad i = 1, 2, \dots \pi \tag{59$_i$}$$

et avec (64) encore $\overline{\pi - 1}$ semblables réductions:

$$\mu\int \Psi_i(\xi, \eta)d\xi = \sum_{j=1}^{j=\pi}\int \psi_i(\xi^{(j1)}, \eta^{(j1)})d\xi^{(j1)} \qquad i = 1, 2, \dots \pi \tag{64$_i$}$$

d'où en comparant $(59)_i$ et $(64)_i$ on obtient:

$$\int F_i(x, y)dx = \int \Psi_i(\xi, \eta)d\xi$$

ou

$$\int \frac{Q_i(x, y)}{fy'}\, dx = \int \frac{\Theta(\xi, \eta)}{\psi_\eta'}\, d\xi$$

et

$$\frac{\Theta_i(\xi, \eta)}{\Theta_k(\xi, \eta)} = \frac{Q_i(x, y)}{Q_k(x, y)} = \lambda_{ik}.$$

Les courbes adjointes:

$$\Theta_i(\xi, \eta) - \lambda_{ik}\Theta_k(\xi, \eta) = 0$$

ne peuvent avoir avec la courbe

$$\psi(\xi, \eta) = 0 \tag{2}$$

qu'*un* point commun, sauf les points doubles, si la courbe (2) ne se ramène pas à une courbe hyperelliptique par une transformation birationnelle.

Par conséquent à λ_{ik} ne peut correspondre qu'un point (ξ, η).

(ξ, η) s'expriment rationnellement en λ_{ik} et aussi en (x, y) et la substitution de la réduction (38) est contrairement à l'hypothèse *rationnelle*.

Le cas ou la courbe (2) se ramène à la courbe hyperelliptique doit être discuté séparement. Nous avons

$$\int F(x, y)dx = \int \frac{\Psi_i(\zeta)d\zeta}{\sqrt{H(\zeta)}} \qquad i = 1, 2, \dots \pi \tag{65}$$

$$\zeta = A(\xi, \eta) \tag{66}$$

$$\sqrt{H(\zeta)} = B(\xi, \eta) \tag{67}$$

étant des fonctions rationnelles de (ξ, η) et inversement

$$\xi = C(\zeta, \sqrt{H(\zeta)}) \tag{68}$$

$$\eta = D(\zeta, \sqrt{H(\zeta)}) \tag{69}$$

des fonctions rationnelles de ζ, $\sqrt{H}(\zeta)$.

Or des équations (65) on tire

$$\int H_i(x, y)dx = \int \frac{\zeta^i d\zeta}{\sqrt{H(\zeta)}}$$

d'où ζ et $\sqrt{H(\zeta)}$ et puis (en vertu de (68), (69)) — ξ, η s'expriment rationnellement en (x, y).

§ 5. **L'équation d'Euler généralisée: l'intégrale générale.** — Voici encore une de nombreuses applications du théorème fondamental du § 3.

L'équation différentielle d'Euler [9]

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \tag{73}$$

$$R(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

avec l'intégrale générale algébrique peut être considerée comme un cas particulier du système des équations différentielles de Jacobi:

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \frac{f_k(x_i)}{\sqrt{R(x_i)}} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots p \tag{74}$$

$$R(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{2n})$$

où $f_k(x)$ sont des polynômes de degré $\leq p - 2$, que possède le système des intégrales algébriques.

Or une autre généralisation de l'équation (73) est encore possible; en effet, on peut prendre l'équation suivante, qui nous appelerons *l'équation d'Euler généralisée*:

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{f(y)dy}{\sqrt{R(y)}} \tag{75}$$

où

$$R(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{2n})$$

---

[9] « Nov Comm. Petrop. », 6, p. 37. Op. omn. (1), 20, p. 58. « Institut. Calc. Integr. », I, Sect. 2, cap. 6.

Lagrange, *Sur l'int. de quelques équations*, « Misc. Taur. », 4, Oeuvres II, p. 5.

α_j étant différents, le degré de $f(x)$ ne surpassant pas $\overline{p-2}$ de telle sorte que $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ soit de première espèce.

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants:

I. *L'équation d'Euler généralisée* (75) *ne peut avoir l'intégrale générale algébrique qu'à la condition que*

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

se ramène à l'intégrale elliptique et l'intégrale de l'équation (75) *doit être de la forme suivante*:

$$\frac{A(x)B(x)\sqrt{R(y)} - A(y)B(y)\sqrt{R(x)}}{1 - k^2A^2(x)A^2(y)} = C, \tag{76}$$

A(x), B(y) *étant des fonctions rationnelles,* C — *constante arbitraire.*

II. *L'équation d'Euler généralisée ne peut avoir une intégrale particulière algébrique autre que* y = x *sans avoir l'intégrale générale algébrique qu'à la condition que l'intégrale*

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

se ramène par la substitution rationnelle

$$z = A(x)$$

à l'intégrale d'ordre inférieur. En ce cas cette intégrale doit être de la forme suivante

$$A(y) = A(x).$$

D'après le théorème fondamental de § 3, on a tout de suite pour $p > 1$, dans le cas de l'irréductibilité de l'intégrale, la forme *rationnelle* de la relation entre $(y, \sqrt{R(y)})$ et $(x, \sqrt{R(x)})$

$$y = \alpha(x, \sqrt{R(x)}) \tag{77}$$

$$\sqrt{R(y)} = \beta(x, \sqrt{R(x)}). \tag{78}$$

On doit ajouter encore qu'en vertu du théorème de SCHWARZ ([10]) α, β ne peuvent pas contenir un paramètre *arbitraire*.

Donc dans le cas de l'intégrale *générale algébrique* nous avons la ré-

([10]) SCHWARZ, « Journal de Crelle », t. 57. APPELL et GOURSAT, ch. XI. SEVERI, *Vorlesungen über Algeb. Geometrie*, C. VI, § 51, p. 143.

duction de $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ à l'intégrale d'ordre inférieur:

$$\int \frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{Q(z)}},$$

que nous pourrons supposer *irréductible*.

Si $\pi > 1$, dans les équations:

$$z = A(x, \sqrt{R(x)}) \tag{79}$$
$$\sqrt{\Theta(z)} = B(x, \sqrt{R(x)})$$

φ n'y a pas de constante arbitraire et de même dans la solution algébrique de l'équation:

$$\frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{\Theta(z)}} = \frac{\varphi(u)du}{\sqrt{\Theta(u)}} \tag{80}$$

$$u = \gamma(z, \sqrt{\Theta(z)})$$
$$\sqrt{\Theta(u)} = \delta(z, \sqrt{\Theta(z)}). \tag{81}$$

En éliminant $(z, \sqrt{\Theta(z)})$, $(u, \sqrt{\Theta(u)})$ des équations (79), (81) et la suivante:

$$u = A(y, \sqrt{R(y)}) \tag{79'}$$
$$\sqrt{\Theta(u)} = B(y, \sqrt{R(y)})$$

nous obtenons une équation entre (y, x) sans constante arbitraire, c'est à dire une intégrale *particulière*.

Dans le cas de l'intégrale algébrique générale on doit avoir:

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = C \int \frac{dz}{\sqrt{\Theta(z)}} \tag{82}$$
$$\Theta(z) = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2),$$

où $(z, \sqrt{\Theta(z)})$ sont définis par l'équation (79), ou en vertu du théorème connu d'ABEL par

$$z = A(x) \tag{83}$$
$$\sqrt{\Theta(z)} = B(x) \sqrt{R(x)}.$$

L'équation d'EULER généralisée se raméne à l'équation d'EULER:

$$\frac{dz}{\sqrt{\Theta(z)}} = \frac{du}{\sqrt{\Theta(u)}},$$

dont l'intégrale générale est la suivante:

$$\frac{z\sqrt{\Theta(u)} - u\sqrt{\Theta(z)}}{1 - k^2 u^2 z^2} = C$$

et par conséquent l'intégrale de l'équation d'Euler généralisée (75):

$$(76) \qquad \frac{A(x)B(y)\sqrt{R(y)} - A(y)B(x)\sqrt{R(x)}}{1 - k^2A^2(x(A^2(y)} = C.$$

§ 6. **L'équation d'Euler généralisée: l'intégrale particulière.** — Supposons maintenant que $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ ne se ramène pas à une intégrale d'ordre infèrieur. Dans ce cas, la substitution (77), (78) est rationnelle et en vertu du théorème fondamental de Koenigsberger ([11]) on doit avoir:

$$(84) \qquad \int \frac{y^k dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \overline{p-1}$$

où $f_k(x)$ sont des polynômes de degré ne surpassant pas $\overline{p-1}$, d'où

$$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = \dots \frac{f_{p-1}(x)}{f_p(x)}$$

c'est à dire y est une fonction rationnelle de x, qui par suite de la birationnalité de la substitution (77), (78) se ramène à la forme

$$(85) \qquad y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

En substituant cette expression de y dans (82) on obtient

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)\frac{P(x)}{\sqrt{S(x)}} = \frac{f(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

$P(x)$, $S(x)$ étant des pnlynômes et $S(x)$ tel que, si les racines de $R(x)$ sont α_i, les racines de $S(x)$ seront

$$(86) \qquad \beta_i = \frac{\alpha\alpha_i + \beta}{\gamma\alpha_i + \delta},$$

d'où

$$R(x)P^2(x) = S(x)f^2(x).$$

Chaque racine de $R(x)$ doit entrer dans $S(x)$, car $x - \alpha$, entrant dans $P^2(x)R(x)$ à un degré impair, ne peut entrer dans $S(x)f^2(x)$ qu'à la condition qu'il divise $S(x)$. De même, nous nous persuadons que chaque racine $S(x)$ doit être racine de $R(x)$.

([11]) Abel, *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.* Oeuvres, t. I, p. 545. Oeuvres, t. II, p. 278.

Koenigsberger, *Vorlesungen über der Theorie der hyperelliptischer Integrale*, Leipzig, 1877.

Ainsi, pour quelques i et j nous devons avoir:

$$\beta_j = \alpha_i .$$

Il suit que

$$\Theta\alpha_i, \; \Theta^2\alpha_i, \; \Theta^3\alpha_i, \ldots \; \Theta^\mu\alpha_i$$

où

(86)′
$$\Theta(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

sont des racines de $R(x)$ et pour quelque valeur entière positive $\mu = k$:

(87)
$$\Theta^k \alpha_i = \alpha_i .$$

Pour toutes les racines α_i on peut prendre la même valeur pour k, car si on avait obtenu pour les groupes différentes de α_i: k_1, k_2, k_3,... on pourait prendre pour k le multiple de k_j.

L'équation (87) du second degré a plus de deux racines différentes et se ramène à l'identité

(87)′
$$\Theta^k t = t;$$

k doit être > 1 parcequ'autrement on aurait

$$\alpha = \delta, \; \beta = 0, \; \gamma = 0, \; y = x.$$

Or la condition (87)′ entraine la suivante

(88)
$$(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)a^2 \frac{\lambda\pi}{k} = 0 \text{ [12]}$$

pour λ premier avec k, et comme

$$\cos^2 \frac{\lambda\pi}{k} > 0$$

on aura

(89)
$$(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0.$$

Or il est facile à voir qu'a cette condition il existe des constantes (p, q, r, s) telles que les substitutions:

(90)
$$y = \frac{pu + q}{ru + s}$$

$$x = \frac{pz + q}{vz + s}$$

ramènent les équations (85), (86) à la forme

$$u = \mu z$$

$$\eta_i = \mu \vartheta_i$$

---

[12] Serret, *Cours d'Algébre Supérieure*, t. II, ch. IV, p. 360.

où

$$\beta_i = \frac{p\eta_i + q}{r\eta_i + s}, \quad \alpha_i = \frac{p\vartheta_i + q}{r\vartheta_i + s}$$

et l'équation (82) a la forme:

(91)
$$\frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{\Theta(z)}} = \frac{\varphi(u)du}{\sqrt{\Theta(u)}}$$
$$\Theta(z) = (z - \vartheta_1)(z - \vartheta_2) \dots (z - \vartheta_{2p+2}).$$

En effet, (90), (85) nous donnent:

$$\frac{pu + q}{ru + s} = \frac{(\alpha p + \beta r)z + (\alpha q + \beta s)}{(\gamma p + \delta r)z + (\gamma q + \delta s)},$$

d'où

$$u = \frac{Az + B}{Cz + D}$$
$$A = \beta rs + \alpha ps - \delta qr - \gamma pq$$
$$B = \beta s^2 + (\alpha - \delta)qs - \gamma q^2$$
$$C = \gamma p^2 + (\delta - \alpha)pr - \beta r^2$$
$$D = \gamma pq + \delta ps - \alpha rq - \beta rs.$$

Pour les valeurs de $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{s}$ égales aux racines de l'équation:

(92)
$$\gamma h^2 + (\delta - \alpha)h - \beta = 0$$

nous obtenons $u = \mu z$, si on suppose que $h_1 \gtrless h_2$ ce que doit avoir lieu en vertu de (89).

Par la même équation sont liés η_i, ϑ_i et nous nous persuadons (comme plus haut pour $R(x)$), que $\Theta\vartheta_i$, $\Theta^2\vartheta_i$, $\Theta^3\vartheta_i, \dots$ sont des racines de $\Theta(z)$ et

$$\Theta^k\vartheta_i = \vartheta_i,$$

si

$$\Theta t = \mu t.$$

Soit d'abord que la relation

$$\vartheta_i = \mu\vartheta_j$$

n'a lieu que pour $i \gtrless j$.

On a dans ce cas

(93)
$$\vartheta_2 = \mu\vartheta_1, \; \vartheta_3 = \mu\vartheta_2, \dots \; \vartheta_k = \mu\vartheta_{k-1}, \; \vartheta_1 = \mu\vartheta_k.$$

En multipliant terme à terme nous obtenons

(94)
$$\mu^k = 1$$

et il ne peut pas être

(94)'
$$\mu^l = 1$$

parcequ'on aurait alors $\vartheta_{l+1} = \mu^l \vartheta_l$ et en vertu de (94)' $\vartheta_{l+1} = \vartheta_1$ ce qui n'est pas le cas. Ainsi μ est une racine primitive de l'équation (94).

Dans l'autre groupe des relations analogues à (93)

$$\vartheta_{k+2} = \mu\vartheta_{k+1}, \ \vartheta_{k+3} = \mu\vartheta_{k+2}, \dots \ \vartheta_{k+l+1} = \mu\vartheta_{k+l}, \ \vartheta_{k+l} = \mu\vartheta_{k+l+1}$$

doit entrer le même nombre des racines:

$$\vartheta_{k+1}, \ \vartheta_{k+2}, \dots \ \vartheta_{2k+1},$$

car si on avoit $l < k$ on obtiendrait $\mu^l = 1$ et si $l < k \dots \vartheta_{2k+1} = \vartheta_k$.

Ainsi toutes les racines de $\Theta(z)$ sont distribuées en groupes:

$$\begin{array}{c} \vartheta_1, \ \vartheta_2, \dots \ \vartheta_k \\ \vartheta_{k+1}, \ \vartheta_{k+2}, \dots \ \vartheta_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \vartheta_{k(q-1)+1}, \ \vartheta_{k(q-1)+2}, \dots \ \vartheta_{kq}, \end{array}$$

qui satisfont aux équations analogues à (93) d'où

$$\Theta(z) = H(z^k) \tag{95}$$

est un polynôme par rapport à z^k, où k est diviseur de $2p+2$.

Soit maintenant $i = j$

$$\vartheta_i = \mu\vartheta_i$$

d'où pour une valeur de i

$$\vartheta_i = 0.$$

En discutant les autres racines nous obtenons

$$\frac{\Theta(z)}{z} = H(z^k) \tag{96}$$

k étant diviseur de $\overline{2p+1}$.

Des équations (95) et (96) on tire:

$$\frac{\varphi(\mu z)\,\mu dz}{\sqrt{\Theta(\mu z)}} = \frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{\Theta(z)}}$$

où

$$\Theta(\mu z) = \Theta(z)$$

et par conséquent

$$\varphi(\mu z)\mu z = \varphi(z)z$$

reste *invariable*, quand on remplace z par μz.

Comme plus haut pour $\Theta(z) = H(z^k)$, nous nous persuadons que $\varphi(z)z$, dont les racines sont liées par équations:

$$g_j = \mu g_i$$

doit être de la forme:

$$\pi(z^k) = z^k h(z^k)$$

(97) $$\varphi(z) = h(z^k) z^{k-1}.$$

Pour le second cas (96) nous aurons

(98) $$\varphi(\mu z)\mu^{\frac{1}{2}} = \varphi(z)$$

(99) $$\varphi^2(\mu z)\mu z = \varphi^2(z) z.$$

De (99) on tire

$$\varphi^2(z) z = h(z^k) z^k$$

$$\varphi(z) = \sqrt{h(z^k)}\, z^{\frac{k-1}{2}}.$$

Cette expression satisfait aussi à (98), mais cela ne peut avoir lieu qu'à la condition:

$$\mu^{\frac{k}{2}} = 1,$$

c'est à dire, si μ n'est pas une racine primitive de (94).

L'équation (91) se transforme dans la suivante:

(100) $$\frac{\varphi(z^k) z^{k-1} dz}{\sqrt{H(z^k)}} = \frac{\varphi(u^k) u^{k-1} du}{\sqrt{H(u^k)}}$$

et l'integrale

$$\int \frac{\varphi(z^k) z^{k-1} dz}{\sqrt{H(z^k)}}$$

par la substitution

(101) $$z^k = v$$

et

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

par la substitution $v = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^k$ se réduit, contrairement à l'hypothèse, à l'intégrale d'ordre inférieur

$$\int \frac{\Psi(v)dv}{\sqrt{a(v)}}.$$

Il nous reste a discuter le cas où

(102) $$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{\Theta(z)}},$$

et $\int \frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{\Theta(z)}}$, ne se ramenant pas aux intégrales d'ordre inférieur, est d'ordre > 1.

En vertu du théorème de KOENIGSBERGER:

(103) $$\int \frac{z^k dz}{\sqrt{\Theta(z)}} = \int \frac{f_k(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \qquad k = 0.\ 1,\ 2, \ldots \overline{p-1}$$

d'où nous obtenons les relations (83):

(83) $$\begin{aligned} z &= A(x) \\ \sqrt{\Theta(z)} &= B(x)\sqrt{R(x)}, \end{aligned}$$

$A(x)$, $B(x)$ étant des fonctions rationnelles sans constantes arbitraires.

L'équation

$$\frac{\varphi(z)dz}{\sqrt{\Theta(z)}} = \frac{\varphi(u)du}{\sqrt{\Theta(u)}}$$

ne peut avoir des solutions algébriques autres que

$$z = u.$$

Parconséquent la solution de (75) doit être

$$A(x) = A(y).$$

§ 7. Sur la transformation des intégrales hyperelliptiques de première classe et de première espèce

(104) $$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx.$$

Nous allons maintenant indiquer une application intéressante du théorème général du § 3 au problème qui représente la généralisation naturelle du problème de la multiplication des intégrales elliptiques:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \Delta \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ [13]},$$

et précisement au problème de la réduction monôme du type (104) des intégrales hyperelliptiques, en prenant

$$R(x) = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \ldots a_6 .$$

En vertu de ce que nous avons demontré plus haut, si

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

---

[13] ABEL, *Précis d'une théorie des fonc. ellip.*, « Journal de Crelle », 4, (1829), Oeuvres I, p. 518. Recherches... Oeuvres I, p. 377.

ne se ramène pas à une intégrale elliptique, on doit avoir:

(105)
$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$
$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{\gamma x + \delta}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

et

(106)
$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

En ramenant dans (105) les intégrales à la forme canonique au moyen des substitutions:

(107)
$$x = \frac{p\xi + q}{r\xi + s}, \quad y = \frac{p\eta + q}{r\eta + s}$$

nous allons examiner au lieu de (105) les réductions suivantes:

(108)
$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} = \int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi$$
$$\int \frac{\eta\,d\eta}{\sqrt{\Theta(\eta)}} = \int \frac{\gamma\xi + \delta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi$$

où

$$\Theta(\xi) = \xi(1-\xi)(1-\varkappa^2\xi)(1-\lambda^2\xi)(1-\mu^2\xi).$$

Le lecteur peut faire lui-même les calculs assez minitueux pour vérifier les resultats.

On peut faire huit hypothèses sur la correspondence des racines de $\Theta(\xi)$ dans la transformation (107), qui correspondent aux cycles des differents ordres: (6), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 1, 1) dans la transformation des racines:

1)
$$(0, \infty), (\infty, 1), (1, a), (a, b), (b, c), (c, 0)$$
$$a = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad b = \frac{1}{\lambda^2}, \quad c = \frac{1}{\mu^2}$$

et en résolvant les équations que nous donne la substitution (107), nous avons:

$$\varkappa^2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda^2 = 2, \quad \mu^2 = 3, \quad \eta = \frac{3\xi - 1}{3\xi}$$

et on voit que

(109)
$$\varkappa^2\lambda^2 = \mu^2$$

ce qui est très important.

Le même résultat s'obtient pour

2) $(1, a),\ (a, 0),\ (0, 1),\ (\infty, b),\ (b, c),\ (c, \infty).$

On a

$$\varkappa^2 = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^4+1}, \quad \mu^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2+1)}{\lambda^4+1}, \quad \eta = \frac{\mu\xi^2-\lambda^2}{\lambda^2\mu^2(1-\mu^2\xi)}$$

et de même

$$(1, a),\ (a, b),\ (b, c),\ (c, 1),\ (0, 0),\ (\infty, \infty)$$

où

$$\lambda^2 = \frac{1}{\varkappa^4}, \quad \mu^2 = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad \eta = \frac{\xi}{\varkappa^2}$$

et enfin

3) $(\infty, 0),\ (0, \infty),\ (1, a),\ (b, c),\ (c, b),\ (a, 1)$

$$\varkappa^2 = \mu^2\lambda^2, \quad \eta = \frac{1}{\varkappa^2\xi}.$$

Or Jacobi ([14]) montre que pour (109) nous avons la réduction de l'intégrale hyperelliptique à deux intégrales élliptiques, et précisement:

(110)
$$\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi = p\int\frac{d\zeta}{\sqrt{H_1(\zeta)}} + q\int\frac{d\zeta}{\sqrt{H_2(\zeta)}}$$

$$p = -\frac{\beta\mu+\alpha}{2\mu\sqrt{2\mu}}, \quad q = -\frac{\beta\mu-\alpha}{2\mu\sqrt{2\mu}}$$

$$H_1(\zeta) = (\zeta-1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)$$

$$H_2(\zeta) = (\zeta+1)(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta).$$

Le cas

5) $(\infty, a),\ (a, b),\ (b, c),\ (c, \infty),\ (0, 1),\ (1, 0)$

est impossible, parcequ'il donne $\varkappa^2 = \mu^2$, contrairement à la supposition que $\int \frac{\alpha\xi+\beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}}\,d\xi$ est de première espèce.

La même chose a lieu pour

6) $(a, b),\ (b, c),\ (c, a),\ (0, \infty),\ (\infty, 1),\ (1, 0)$

et pour

7) $(1, a),\ (a, 1),\ (b, c),\ (c, b),\ (0, 0),\ (\infty, \infty).$

Il nous reste:

8) $(0, 1),\ (1, a),\ (a, b),\ (b, c),\ (c, 0),\ (\infty, \infty)$

([14]) Jacobi, « Crelles Journal », t. 8.

qui donne:

$$\mu^2 = \omega, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega - 1}, \quad \varkappa^2 = \frac{1}{1-\omega}, \quad \eta = -\omega\xi - 1,$$

ω étant une racine de l'équation:

$$\frac{\omega^5+1}{\omega+1} = \omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1 = 0.$$

Or au moyen de la substitution (107) on peut ramener la correspondance (8) à la suivante:

$$(1, \varepsilon), (\varepsilon, a), (a, b), (b, c), (c, 0), (\infty, \infty).$$

En effet, nous pouvons choisir $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ de telle manière que trois racines deviennent: ε, 1, ∞.

Nous prendrons pour ε la racine primitive de l'équation:

$$\varepsilon^5 = 1.$$

En remarquant, que $\frac{p}{r} = \infty$, $r = 0$, nous aurons:

$$(111) \quad p + q = \varepsilon, \quad p\varepsilon + q = a, \quad pa + q = b, \quad pb + q = c, \quad pc + q = 1$$

et en multipliant la 5 me par

$$1, \quad 4 - p, \quad 3 - p^2, \quad 2 - p^3, \quad 1 - p^4$$

et en additionant nous obtenons:

$$q(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 1 - p^5$$

ou

$$(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)(p + q - 1) = 0$$

et comme $p + q = \varepsilon \neq 1$, on a

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$$

et

$$p = \varepsilon^i$$

où i est égal à un des nombres: 1, 2, 3, 4.

Nous allons démontrer que

$$i = 1.$$

En substituant à la place de $p \ldots \varepsilon^i$ et à la place de $q \ldots \varepsilon - \varepsilon^i$ dans les équations (111), nous obtenons, après l'élimination des $a, b, c, \ldots$; l'équation suivante:

$$\varepsilon^{4i+1} + \varepsilon^{4i} - \varepsilon^{3i+1} - \varepsilon^{3i} - \varepsilon^{2i-1} - \varepsilon^{i-1} - \varepsilon^i - 1 = 1,$$

et en remarquant que

$$\varepsilon^{4i} + \varepsilon^{3i} + \varepsilon^{2i} + \varepsilon^{i} + 1 = 0,$$
$$\varepsilon^{4i} = 1,$$

d'où $4i + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ et $i = 1$.

Par suite $p = \varepsilon$, $q = 0$ et les équations (111) nous donnent

$$a = \varepsilon^2, \quad b = \varepsilon^3, \quad c = \varepsilon^4.$$

Dans ce cas, l'intégrale $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$ se ramène par la substitution

$$\zeta = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

à l'intégrale

$$\int \frac{(P\zeta + Q)}{\sqrt{\zeta^5 - 1}} d\zeta$$

ou à

$$\int \frac{(Q\omega + P) d\omega}{\sqrt{\omega(\omega^5 - 1}} \quad \left(\omega = \frac{1}{\zeta}\right).$$

Ainsi la réduction

$$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

n'est possible que dans les cas suivants:

1) *quand* $\mathrm{I} = \int \frac{\mathrm{Ax} + \mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{R(x)}}} \mathrm{dx}$ *se ramène à une intégrale elliptique*

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - \varkappa^2\zeta^2)}};$$

2) *quand* I *s'exprime par deux intégrales elliptiques*:

$$p\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} + q\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}};$$

3) *quand* I *peut être transformée, par la substitution*:

$$\zeta = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

dans l'intégrale:

$$\int \frac{P\zeta + Q}{\sqrt{\zeta(\zeta^5 - 1)}} d\zeta.$$

Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n (*).

Memoria di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - *Si estende agli integrali*

$$I_{C[n]}^{[n]} = \int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

(*ove* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *è una funzione prefissata, e si sono indicate con*

$$C^{[n]}: \qquad y = y(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

le curve tali che $y(x)$ *sia assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini, e che esista finito l'integrale* $I_{C[n]}^{[n]}$), *un teorema di semicontinuità, dato dal* TONELLI *per* $n=1$: ogni integrale quasi-regolare positivo è, sotto opportune condizioni, semicontinuo inferiormente.

All'inizio di una Memoria, in corso di stampa (1), dedicata al problema dell'esistenza del minimo dell'integrale

$$I_{C[n]}^{[n]} = \int_a^b f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx, \quad (C^{[n]}: \; y = y(x), \; a \leq x \leq b)$$

e nella quale comincio ad estendere a questo problema i risultati stabiliti dal TONELLI per $n=1$, ho enunciato le condizioni sufficienti per la semicontinuità dell'integrale $I_{C[n]}^{[n]}$, senza dimostrarle, osservando che avrei esposto altrove solamente la dimostrazione della condizione sufficiente per la semicontinuità degli *integrali soltanto quasi-regolari positivi* (2), che presenta par-

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) Vedi S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine* n. (In corso di stampa negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ». Serie II, Vol. V (1936), Fasc. 3-4).

(2) Vedi loc. cit. in (1), n.° 2, c).

ticolare interesse, mentre le altre dimostrazioni possono dedursi immediatamente dalle analoghe date dal TONELLI per $n = 1$ [3].

Tale dimostrazione forma oggetto del presente lavoro.

1. **Generalità.** — Per le generalità rimandiamo alla Memoria già citata [4], limitandoci a ricordare che, supposto, salvo indicazione contraria, che $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ sia una funzione finita e continua insieme con la sua derivata parziale $f_{y^{(n)}}$, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di un campo $A^{[n]}$ ad $n+1$ dimensioni, e per tutti i valori finiti di $y^{(n)}$, consideriamo le curve

$$C^{[n]}: \qquad y = y(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

per le quali $y(x)$ è una funzione assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, tale che ogni punto $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, $(a \leq x \leq b)$ appartenga ad $A^{[n]}$ ed esista finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE) $I^{[n]}_{C[n]}$.

2. **Teorema di continuità.** — Nel presente n.° supponiamo che la funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ sia lineare rispetto alla $y^{(n)}$, cioè abbia la forma seguente

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv P(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + y^{(n)}Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

e che inoltre le funzioni P e Q siano definite anche in un campo $A^{[n]}_*$, contenente $A^{[n]}$ nel suo interno, in modo che, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}_*$, esse risultino finite e continue insieme con le derivate parziali Q_x, Q_y, $Q_{y'}, \dots, Q_{y^{(n-2)}}$.

Sotto queste ipotesi, l'integrale

$$I^{[n]}_{C[n]} = \int_a^b [P(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) + y^{(n)}(x)Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))]dx$$

è una funzione continua [5].

a) Infatti sia $C_0^{[n]}$: $y = y_0(x)$, (a_0, b_0), una curva qualunque $C^{[n]}$ e si considerino, dapprima, soltanto quelle curve $C^{[n]}$: $y = y(x)$, che sono definite nello stesso intervallo (a_0, b_0). Indichiamo tale classe di curve con $C^{[n]}(a_0, b_0)$ e consideriamo la differenza $I^{[n]}_{C[n]} - I^{[n]}_{C_0[n]}$, ove $C^{[n]}$ è una curva qualunque

(3) Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* (N. Zanichelli, Bologna 1921-3), Vol. I, Cap. XI, pp. 383-419; ed anche L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II, Vol. III (1934), pp. 401-50), Cap. I, pp. 405-13.

(4) Vedi loc. cit. in (1), n.° 1.

(5) Per $n = 1$, vedi L. TONELLI, opera cit. in (3), n.° 149, pp. 385-9.

della classe $C^{[n]}(a_0, b_0)$; abbiamo:

$$(1)\qquad I^{[n]}_{C[n]} - I^{[n]}_{C_0[n]} = \int_{a_0}^{b_0} [P(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) - P(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x))]dx +$$

$$+ \int_{a_0}^{b_0} [y^{(n)}(x) Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) - y_0^{(n)}(x) Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), y_0^{(n-1)}(x))]dx +$$

$$+ \int_{a_0}^{b_0} y_0^{(n)}(x)[Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), y_0^{(n-1)}(x)) - Q(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x))]dx.$$

Preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, per la continuità delle funzioni P e Q possiamo determinare un $\rho_0' > 0$, in modo che, se è $\rho' \leq \rho_0'$, per ogni curva della classe $C^{[n]}(a_0, b_0)$, appartenente all'intorno $(\rho')^n$ della $C_0^{[n]}$, l'integrale, che figura, per primo, al secondo membro della (1), sia, in modulo, minore di $\frac{\varepsilon}{3}$, e inoltre, posto $\int_{a_0}^{b_0} | y_0^{(n)}(x) | dx = H$, ove H è un numero finito, perchè $C_0^{[n]}$ è una curva $C^{[n]}$, si abbia

$$| Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), y_0^{(n-1)}(x)) - Q(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x)) | < \frac{\varepsilon}{3H}.$$

Risulta pertanto

$$(2)\qquad | I^{[n]}_{C[n]} - I^{[n]}_{C_0[n]} | \leq$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \int_{a_0}^{b_0} [y^{(n)} Q(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - y_0^{(n)} Q(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, y_0^{(n-1)})]dx \right|.$$

Si consideri ora la funzione

$$\Phi(x) = \int_{y_0^{(n-1)}(x)}^{y^{(n-1)}(x)} Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), u)du,$$

la quale risulta continua in tutto l'intervallo (a_0, b_0); inoltre, in quasi tutto questo intervallo, esiste finita la sua derivata del primo ordine

$$(3)\qquad \Phi'(x) = \int_{y_0^{(n-1)}(x)}^{y^{(n-1)}(x)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial Q}{\partial y} + y''(x)\frac{\partial Q}{\partial y'} + \dots + y^{(n-1)}(x)\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}\right]du +$$

$$+ y^{(n)}(x) Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad y_0^{(n)}(x) Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), y_0^{(n-1)}(x)).$$

In modo analogo a quello seguito dal TONELLI, per $n=1$, si prova che la funzione Φ è assolutamente continua in tutto (a_0, b_0), osservando che, indicato con $A_\tau^{[n]}$ un campo limitato contenente tutti i punti $(x, y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x))$, $(a_0 \leq x \leq b_0)$, nonchè tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ appartenenti all'intorno $(\rho')^n$ della curva $C_0^{[n]}$, i massimi moduli della funzione Q e delle sue derivate parziali $Q_x, Q_y, Q_{y'}, \dots, Q_{y^{(n-2)}}$, sono, in $A_\tau^{[n]}$, inferiori ad un numero fisso, e giovandosi della assoluta continuità della $y_0(x)$ e delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini.

Indicato con M il massimo modulo di Q in $A_\tau^{[n]}$, con M' il maggiore dei massimi moduli, in $A_\tau^{[n]}$, delle $Q_x, Q_y, Q_{y'}, \dots, Q_{y^{(n-2)}}$, e con Λ un numero che superi almeno di ρ' il maggiore dei massimi moduli della $y_0(x)$ e delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini nell'intervallo (a_0, b_0), integrando la (3) da a_0 a b_0 e prendendo i moduli si ottiene

$$\left|\int_{a_0}^{b_0}\left[y^{(n)}(x)Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) - y_0^{(n)}(x)Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), y_0^{(n-1)}(x))\right]dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{y_0^{(n-1)}(b_0)}^{y^{(n-1)}(b_0)} Q(b_0, y(b_0), y'(b_0), \dots, y^{(n-2)}(b_0), u)du - \int_{y_0^{(n-1)}(a_0)}^{y^{(n-1)}(a_0)} Q(a_0, y(a_0), y'(a_0), \dots, y^{(n-2)}(a_0), u)du\right| +$$

$$+\left|\int_{a_0}^{b_0} dx \int_{y_0^{(n-1)}(x)}^{y^{(n-1)}(x)}\left[\frac{\partial Q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x), u)}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial Q}{\partial y} + y''(x)\frac{\partial Q}{\partial y'} + \dots + y^{(n-1)}(x)\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}\right]du\right| \leq$$

$$\leq 2M\rho' + (b_0 - a_0)\rho' M'(1 + (n-1)\Lambda) < \frac{\varepsilon}{3},$$

per $\rho' < \varepsilon : 3[2M + (b_0 - a_0)M'(1 + (n-1)\Lambda)]$.

Dalla (2) risulta, per ogni curva $C^{[n]}$ della classe $C^{[n]}(a_0, b_0)$, appartenente propriamente all'intorno $(\rho')^n$ della $C_0^{[n]}$

$$\left| I^{[n]}_{C^{[n]}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}} \right| < \varepsilon,$$

se è $\rho' < \rho_0'$ e $\rho' < \varepsilon : 3[2M + (b_0 - a_0)M'(1 + (n-1)\Lambda)]$.

Dunque $I^{[n]}_{C_0^{[n]}}$ è semicontinuo inferiormente nella classe $C^{[n]}(a_0, b_0)$.

b) Dobbiamo ora considerare tutte le curve $C^{[n]}$, quindi anche quelle che sono definite in un intervallo (a, b), per il quale valga almeno una delle disuguaglianze $a \neq a_0$, $b \neq b_0$.

Presi ad arbitrio due numeri positivi ε, ρ, in modo che tutti i punti dell'intorno $(\rho)^n$ della curva $C_0^{[n]}$ appartengano al campo $A_*^{[n]}$, e indicato con M_1 un numero maggiore dei massimi moduli delle P, Q, $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}$, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ del campo $A^{[n]}_{*}$, appartenenti all'intorno $(\rho)^n$ della $C_0^{[n]}$, determiniamo un numero positivo ρ_1, non superiore a ρ, e tale che sia

$$(4) \qquad \rho_1 < \rho_0', \quad \rho_1 < \frac{\varepsilon}{3M_1[(b_0 - a_0 + \rho)(1 + (n-1)\Lambda) + 2]}.$$

Sia ρ_2 un numero positivo, minore di $\frac{1}{2}$ e di $\frac{\rho_1}{2[1 + 3(n-1)\Lambda]}$ e tale inoltre che in ogni intervallo di (a_0, b_0), di ampiezza non superiore a ρ_2, l'oscillazione della $y_0(x)$ e quelle delle sue derivate dei primi $n-1$ ordini siano minori di $\frac{\rho_1}{2}$.

Definiamo una curva $\bar{C}_0^{[n]}$: $y = \bar{y}_0(x)$, $(a_0 - \rho_2, b_0 + \rho_2)$ nel seguente modo:

$$\bar{y}_0(x) \equiv y_0(x), \qquad \text{in} \quad (a_0, b_0),$$
$$\bar{y}_0(x) \equiv y_0(a_0) + (x - a_0)y_0'(a_0) + \frac{(x-a_0)^2}{2!} y_0''(a_0) + \dots + \frac{(x-a_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)}(a_0),$$
$$\text{in} \quad (a_0 - \rho_2, a_0),$$
$$\bar{y}_0(x) \equiv y_0(b_0) + (x - b_0)y_0'(b_0) + \frac{(x-b_0)^2}{2!} y_0''(b_0) + \dots + \frac{(x-b_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)}(b_0),$$
$$\text{in} \quad (b_0, b_0 + \rho_2).$$

Poi se $y = y(x)$, (a, b) è una curva qualunque $C^{[n]}$, appartenente propriamente all'intorno $(\rho_2)^n$ della $C_0^{[n]}$ si definisca una curva $\bar{C}^{[n]}$:$y = \bar{y}(x)$, $(a_0 - \rho_2, b_0 + \rho_2)$ nel seguente modo

$$\bar{y}(x) \equiv y(x), \qquad \text{in} \quad (a, b),$$
$$\bar{y}(x) \equiv y(a) + (x - a)y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} y''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(a),$$
$$\text{in} \quad (a_0 - \rho_2, a),$$
$$\bar{y}(x) \equiv y(b) + (x - b)y'(b) + \frac{(x-b)^2}{2!} y''(b) + \dots + \frac{(x-b)^{n-1}}{(n-1!} y^{(n-1)}(b),$$
$$\text{in} \quad (b, b_0 + \rho_2).$$

Ogni curva $\bar{C}^{[n]}$ appartiene all'intorno $(\rho_1)^n$ della $\bar{C}_0^{[n]}$, ed è definita nello stesso intervallo $(a_0 - \rho_2, b_0 + \rho_2)$, in cui è definita la $\bar{C}_0^{[n]}$.

In virtù delle (4) abbiamo quindi, per quanto abbiamo stabilito precedentemente,

$$\left| I^{[n]}_{\bar{C}^{[n]}} - I^{[n]}_{\bar{C}_0^{[n]}} \right| < \varepsilon,$$

ed anche, tenendo conto della seconda delle (4), e siccome $\rho_2 < \frac{1}{2}\rho_1$,

$$\left| I^{[n]}_{\overline{C}^{[n]}} - I^{[n]}_{C^{[n]}} \right| < 4\rho_2 M_1 < \varepsilon$$

ed analogamente

$$\left| I^{[n]}_{\overline{C}_0^{[n]}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}} \right| < \varepsilon.$$

Quindi, per ogni curva $C^{[n]}$ appartenente all'intorno $(\rho_2)^n$ della $C_0^{[n]}$, risulta $\left| I^{[n]}_{C^{[n]}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}} \right| < 3\varepsilon$, ossia l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è una funzione continua.

3. **Osservazione. Esempio.** — È da rilevare che, nel caso $n = 1$, il Tonelli suppone che sia continua, oltre alle funzioni P e Q, anche la derivata parziale Q_x, e dà un esempio, in cui pur essendo le P e Q continue, l'integrale dell'espressione $P(x, y) + y'Q(x, y)$ non è funzione continua [6].

Nel n.° precedente abbiamo supposto, oltre all'esistenza e continuità della Q_x, anche quella delle Q_y, $Q_{y'}, \ldots$, $Q_{y^{(n-2)}}$, ed ora ci domandiamo se l'esistenza di queste ultime derivate sia o no essenziale. A ciò risponde in modo affermativo il seguente esempio, nel quale, per semplicità, supponiamo $n = 2$, e dal quale risulta che se la derivata Q_y non esiste dappertutto, l'integrale dell'espressione $P(x, y, y') + y''Q(x, y, y')$ può non essere continuo.

Si supponga

$$P \equiv 0, \quad Q \equiv -\sqrt{y}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{y^2},$$

con $Q = 0$, per $y = 0$, e si consideri il campo $A^{[2]}$, costituito da tutti i punti dello spazio (x, y, y') nei quali è $x \geq 0$.

Sulla curva

$$C_0^{[2]}: \qquad y = y_0(x) \equiv 0, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

è

$$I^{[2]}_{C_0^{[2]}} = \int_0^1 [P(x, y_0, y_0') + y_0'' Q(x, y_0, y_0')]dx = 0.$$

Preso un intero $r > 1$, e diviso l'intervallo $(0, 1)$ in r parti uguali, si

(6) Vedi L. Tonelli, opera cit. in (3), n.° 150, pp. 390-2; ed anche L. Tonelli, *La semicontinuità nel Calcolo delle Variazioni*, (« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », T. XLIV (1920)), Cap. II, § 2, n.° 45.

definisca una funzione $y_r(x)$ nel seguente modo

$$y = \frac{1}{\sqrt{2r + \frac{3}{4}}} + 9r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r - \frac{3}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{2r + \frac{3}{4}}}\right)x^2, \qquad \text{in } \left(0, \frac{1}{6r}\right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2r - \frac{3}{4}}} - 9r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r - \frac{3}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{2r + \frac{3}{4}}}\right)\left(x - \frac{1}{2r}\right)^2, \quad \text{in } \left(\frac{1}{3r}, \frac{2}{3r}\right),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2r + \frac{3}{4}}} + 9r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r - \frac{3}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{2r + \frac{3}{4}}}\right)\left(x - \frac{1}{r}\right)^2, \quad \text{in } \left(\frac{5}{6r}, \frac{1}{r}\right),$$

poi, negli intervalli $\left(\frac{1}{6r}, \frac{1}{3r}\right)$ e $\left(\frac{2}{3r}, \frac{5}{6r}\right)$ si faccia variare linearmente la $y_r(x)$ fra i valori già assegnati negli estremi, e in $\left(\frac{1}{r}, 1\right)$ si definisca la $y_r(x)$ mediante la periodicità di periodo $\frac{1}{r}$. La funzione $y_r(x)$ così definita risulta, in tutto $(0, 1)$, assolutamente continua insieme con la sua derivata del primo ordine ed inoltre l'integrale

$$I^{[2]}_{C_r^{[2]}} = -\int_0^1 \sqrt{y_r(x)}\, y_r''(x) \operatorname{sen} \frac{\pi}{y_r^2(x)}\, dx$$

esiste finito. Abbiamo dunque una successione di curve $C^{[2]}$ (vedi n.° 1),

$$C_r^{[2]}: \qquad y = y_r(x), \qquad 0 \le x \le 1, \qquad\qquad r = 2, 3, \dots,$$

tali che, per $r \to \infty$, le $y_r(x)$ e $y_r'(x)$ convergono uniformemente, in tutto $(0, 1)$, verso lo zero, e quindi anche rispettivamente verso $y_0(x)$ e $y_0'(x)$.

Risulta

$$(5) \qquad I^{[2]}_{C_r^{[2]}} = \sum_{s=1}^{r}\left[\int_{\frac{s-1}{r}}^{\frac{s-1}{r}+\frac{1}{6r}}\left(-\sqrt{y_r(x)}\, y_r''(x) \operatorname{sen} \frac{\pi}{y_r^2(x)}\right)dx + \int_{\frac{s}{r}-\frac{1}{6r}}^{\frac{s}{r}} \dots\right] + \sum_{s=1}^{r}\left(\int_{\frac{2s-1}{2r}-\frac{1}{6r}}^{\frac{2s-1}{2r}+\frac{1}{6r}} \dots\dots\right),$$

perchè negli altri intervalli di $(0, 1)$ è sempre $y_r''(x) \equiv 0$.

Indichiamo con $\Delta_{r,1}$ il plurintervallo costituito da tutti gli intervalli d'integrazione che figurano nella prima sommatoria, e con $\Delta_{r,2}$ quello costituito da tutti quelli che figurano nella seconda sommatoria.

In ogni punto interno a $\Delta_{r,1}$ è sempre $y_r''(x) = 18r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r - \frac{3}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{2r + \frac{3}{4}}}\right)$, mentre, in ogni punto interno a $\Delta_{r,2}$, $y_r''(x)$ ha sempre valore contrario al precedente.

Inoltre, in ogni punto di $\Delta_{r,1}$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{3}{4}}}\leq y_r(x)\leq \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{3}{4}}}<\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{1}{4}}},$$

ove l'ultima disuguaglianza è sempre verificata per $r\geq 2$, come si prova con calcoli elementari che tralasciamo; è quindi

$$Q(y_r(x))\leq -\sqrt{y_r(x)}\frac{1}{\sqrt{2}}\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2r+\frac{3}{4}}}.$$

Invece, in ogni punto di $\Delta_{r,2}$, è

$$\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{3}{4}}}\geq y_r(x)\geq \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{3}{4}}}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{3}{4}}}>\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{1}{4}}},$$

e quindi

$$Q(y_r(x))\geq \sqrt{y_r(x)}\frac{1}{\sqrt{2}}\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2r-\frac{1}{4}}}.$$

Pertanto siccome la misura di ognuno dei due plurintervalli $\Delta_{r,1}$, $\Delta_{r,2}$ è uguale a $\frac{1}{3}$, risulta

$$I^{[2]}_{C_r^{[2]}}\leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2r+\frac{3}{4}}}18r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{3}{4}}}-\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{3}{4}}}\right)\frac{1}{3}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2r-\frac{1}{4}}}18r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{3}{4}}}-\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{3}{4}}}\right)\frac{1}{3}=$$

$$=-3\sqrt{2}r^2\left(\frac{1}{\sqrt{2r-\frac{3}{4}}}-\frac{1}{\sqrt{2r+\frac{3}{4}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2r+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2r-\frac{1}{4}}}\right)=$$

$$=-\frac{9}{\sqrt{2}}r^2\frac{1}{\sqrt{4r^2-\frac{9}{16}}\left(\sqrt{2r+\frac{3}{4}}+\sqrt{2r-\frac{3}{4}}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2r+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2r-\frac{1}{4}}}\right).$$

e quindi, per $r \to \infty$, è $I^{[2]}_{C_r[2]} \to -\infty$, ed anche $I^{[2]}_{C_r[2]} - I^{[2]}_{C_0[2]} \to -\infty$, ossia l'integrale $I^{[2]}_{C[2]}$ non è semicontinuo inferiormente sulla curva $C_0^{[2]}$.

4. Teorema di semicontinuità per gli integrali soltanto quasi-regolari. — Si supponga ora che la funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ sia, per tutti gli $y^{(n)}$, definita anche in un campo $A^{[n]}_*$, contenente $A^{[n]}$ nel suo interno, e in modo che, per tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}_*$ e per qualsiasi $y^{(n)}$ essa risulti sempre finita e continua insieme con la sua derivata parziale $f_{y^{(n)}}$; e si supponga inoltre che, in $A^{[n]}$, ed anche in $A^{[n]}_*$, e per tutti gli $y^{(n)}$, esistano sempre finite e continue anche le derivate parziali $f_{y^{(n)}x}, f_{y^{(n)}y}, f_{y^{(n)}y'}, \dots, f_{y^{(n)}y^{(n-2)}}$.

Sotto queste ipotesi, se $\mathrm{I}^{[n]}_{C[n]}$ *è un integrale quasi-regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente.*

Infatti si ponga, in tutto $A^{[n]}_*$ e per ogni $y^{(n)}$,

$$\bar{f}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) - \\ - \{ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, 0) + y^{(n)} f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, 0) \},$$

$$\bar{I}^{[n]}_{C[n]} = \int_{C[n]} \bar{f}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx;$$

e si osservi che anche l'integrale $\bar{I}^{[n]}_{C[n]}$ è quasi-regolare positivo, ed inoltre è sempre

$$(6) \qquad \bar{f}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geq 0, \quad \bar{f}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, 0) = 0.$$

Cominciamo a provare, in modo analogo a quello indicato dal Tonelli per $n = 1$ ([7]), che l'integrale $\bar{I}^{[n]}_{C[n]}$ è semicontinuo inferiormente.

Diremo eccezionale un punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)})$ del campo $A^{[n]}$, nel quale $\bar{f}_{y^{(n)}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, y^{(n)})$ è costante per tutti i valori di $y^{(n)}$; allora, per la seconda delle (6), risulta

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, y^{(n)}) \equiv \lambda y^{(n)} \equiv 0,$$

perchè λ è una costante necessariamente nulla, perchè altrimenti $\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}, y^{(n)})$ assumerebbe anche valori negativi, contrariamente alla prima delle (6).

Sia $C_0^{[n]}$: $y = y_0(x)$, $(a_0 \leq x \leq b_0)$ una qualunque curva $C^{[n]}$, e si indichi con C_0' la curva definita dal sistema

$$(7) \qquad \{ y^{(j)} = y_0^{(j)}(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0, \\ \left(j = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ y_0^{(j)}(x) \equiv \frac{d^j y_0(x)}{dx^j}, \text{ per } j \neq 0;\ y_0^{(0)}(x) \equiv y_0(x) \right).$$

([7]) Vedi L. Tonelli, loc. cit. in ([3]), per secondo, n.° 5, pag. 411. Cfr. L. Tonelli, opera citata in ([3]), Vol. I, n.° 98, pp. 272-4.

Siccome l'insieme E dei punti eccezionali che si trovano sulla curva C_0' è chiuso, potremo determinare, su tale curva, un numero finito di archi $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_r'$, contenenti nel loro interno tutti i punti di E, (eccettuati eventualmente gli estremi della C_0'), di lunghezza complessiva non superiore a $m(E)+\delta_\varepsilon$, ove $m(E)$ è la misura dello pseudoarco E e δ_ε è un numero positivo scelto in modo che, su ogni pseudointervallo δ di (a_0, b_0), di misura non superiore a δ_ε, sia

$$\int_\delta \bar{f}(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)})dx < \varepsilon,$$

ove ε è un numero positivo, prefissato ad arbitrio.

Pertanto, indicati con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ gli intervalli di (a_0, b_0), ai quali per le (7) corrispondono sulla curva $C_0^{[n]}$ gli archi $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_r'$, abbiamo, tenendo presente che, in tutti i punti di E, è $\bar{f}=0$

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{\alpha_i} \bar{f}(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)})dx < \varepsilon.$$

Sugli archi $\beta_1', \beta_2', \dots, \beta_s'$ della curva C_0', che si ottengono da essa sopprimendo i punti interni agli archi α_i' ed anche il primo estremo di α_1' e il secondo di α_r', qualora tali punti siano anche estremi della curva C_0', non esiste alcun punto eccezionale e quindi è possibile determinare un $r_1 > 0$, abbastanza piccolo in modo che, in $A^{[n]}$, non vi sia alcun punto eccezionale distante dagli archi β' meno di r_1. Quindi, indicati con $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ gli intervalli di (a_0, b_0), ai quali corrispondono, per le (7) sulla curva C_0', gli archi $\beta_1', \beta_2', \dots, \beta_s'$, l'integrale della funzione $\bar{f}$ è, sopra questi intervalli, semicontinuo inferiormente [8].

Procedendo, poi, in modo analogo al TONELLI [9], si conclude che l'integrale $\bar{I}^{[n]}_{C[n]}$ è semicontinuo inferiormente, e siccome, per quanto abbiamo visto al n.° 2, la differenza

$$I^{[n]}_{C[n]} - \bar{I}^{[n]}_{C[n]} = \int_{C[n]} \{ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, 0) + y^{(n)} f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, 0) \} \, dx$$

è un integrale continuo, il nostro teorema è con ciò provato.

---

(8) Vedi S. CINQUINI, loc. cit. in (1), n.° 2, β).

(9) Vedi L. TONELLI, loc. cit. per secondo in (7).

Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici.

Memoria di DARIO GRAFFI (a Cagliari).

Sunto. - *Nel primo capitolo si generalizza e si perfeziona il metodo trattato in ricerche precedenti per verificare se l'errore commesso ritenendo invarianti adiabatici gli integrali ciclici di* BOHR-SOMMERFELD *di un sistema meccanico qualora i parametri non variano in maniera infinitamente lenta e graduale rimane entro limiti prefissati. I resultati vengono applicati al problema del moto armonico con forza di richiamo variabile col tempo e al problema dei due corpi di massa variabile dimostrando come una insignificante variazione di eccentricità dell'orbita di uno dei due corpi rispetto all'altro non sia incompatibile con una enorme variazione di massa.*

Nel secondo capitolo viene indicata un metodo di integrazione approssimata per i sistemi meccanici con parametri dipendenti dal tempo, e si calcola un valore maggiorante per l'errore commesso con questa approssimazione.

Nel terzo capitolo si tratta, in vista di ricerche future, lo studio di un sistema meccanico con due parametri variabili di cui uno solo in maniera prossima ad essere infinitamente lenta e graduale, e si dimostra come gl'integrali ciclici del sistema possono venire approssimati con altre grandezza di più facile calcolo.

INTRODUZIONE

L'esistenza di invarianti adiabatici per un sistema meccanico, dipende anzitutto, come è noto, dal variare infinitamente lento ([1]) di alcuni parametri del sistema stesso. Siccome tale condizione non è mai in pratica verificata esattamente, abbiamo, in note precedenti ([2]), stabiliti metodi per calcolare se l'errore commesso nelle applicazioni degli invarianti adiabatici resta compreso entro limiti prefissati. E questi resultati abbiamo applicato al problema dei due corpi con massa variabile.

([1]) Come del resto è notissimo non basta ammettere che i parametri varino in maniera infinitamente lenta, ma occorrono altre condizioni per assicurare l'invarianza adiabatica. Ma su questo e sul concetto di variazione infinitamente lenta di un parametro torneremo in seguito.

([2]) Gli invarianti adiabatici come metodo d'integrazione approssimata di equazioni differenziali. « Rendiconti Accademia dei Lincei », I sem., 1932, pag. 657. Limitazione dei valori degli invarianti adiabatici con applicazione al problema delle masse variabili. Parte I e II « Atti Accademia Torino », 1933.

Nel presente lavoro, completeremo ed estenderemo quelle ricerche. Ci limiteremo però ancora a sistemi con un grado di libertà, e le grandezze che al limite potrebbero essere invarianti adiabatici, saranno gli integrali ciclici di BOHR-SOMMERFELD.

Crediamo opportuno per far comprendere meglio lo scopo del lavoro esporre brevemente i principali resultati che in esso verranno conseguiti.

Cominceremo con ottenere, sia pure seguendo metodi già esposti nelle altre note citate, una nuova formula per il limite superiore dell'errore che si commette considerando quegli integrali di SOMMERFELD come invarianti. Queste formule, che sono in sostanza generalizzazione di quelle ottenute in un caso particolare del problema delle masse variabili (1), offrono alcuni notevoli vantaggi rispetto alle altre finore ottenute. Infatti tali formule sono di più facile applicazione ai sistemi meccanici, di più, contenendo grandezze dipendenti dai parametri (e non esplicitamente dal tempo come le formule delle altre note), ossia la variazione (2) totale dei parametri stessi in un periodo e nell'intervallo in cui si studia l'eventuale variabilità dell'integrale di SOMMERFELD, è più spedito ottenere da esse deduzioni generali e di carattere pratico.

Applicheremo questi resultati ai problemi già presi in esame nelle altre note, e cioè al moto armonico con forza d'attrazione dipendente dal tempo e al problema dei due corpi di massa variabile. Nel primo caso otterremo limiti superiori dell'errore commesso in generale più bassi di quelli trovati nella nostra nota citata del 1932. Nel secondo caso potremo generalizzare con opportune ipotesi i resultati che in altri lavori abbiamo ottenuti con leggi speciali per la variazione della massa, cioè verificheremo che una variazione sensibile sull'eccentricità dell'orbita descritta da un corpo rispetto all'altro si può ottenere ammettendo, anzitutto, enormi variazioni della massa dei due corpi.

---

(1) Sull'eccentricità dell'orbita nel problema dei due corpi di massa variabile. « Rendiconti Accademia dei Lincei », I sem., 1934, pag. 144 e 223.

(2) Il concetto di variazione totale si trova esposto p. es. in L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna 1923, I vol., pag. 40. Siccome in questo trattato a pag. 171 per le funzioni assolutamente continue (e quindi in particolare per le funzioni derivabili e con derivata continua a cui sempre ci limiteremo) si dimostra che la variazione totale di una funzione $f(x)$ in un intervallo (a, b) vale $\int_a^b |f'|\, dx$ noi intenderemo sempre questo integrale come la variazione di $f(x)$ in (a, b). È da notare che se $f(x)$ è sempre crescente o decrescente la variazione totale vale $|f(b) - f(a)|$.

Verificheremo inoltre che le formule di questo lavoro sono applicabili anche ad intervalli infiniti, il che non sarebbe possibile con quelle delle altre Note (1).

Passeremo poi a vedere se è possibile ottenere per mezzo del concetto di invariante adiabatico un metodo d'integrazione approssimata delle equazioni del moto di un sistema meccanico, riprendendo così uno studio iniziato nel 1932 e risoluto per il caso particolare del moto armonico ora ricordato. Noi vedremo che questo metodo non è sempre applicabile per tutto l'intervallo in cui si può ritenere l'integrale ciclico invariante con errore trascurabile, salvo casi molto particolari. Però se limitiamo il metodo d'integrazione ad un intervallo in cui è trascurabile il quadrato della variazione del parametro (2), allora diventa pure trascurabile l'errore commesso nel sostituire la soluzione esatta con quella approssimata. Si noterà che una analoga proprietà vale per il metodo delle perturbazioni, ma a noi sembra il nostro metodo più semplice, e quello che più importa, è che con questo metodo si può conoscere un limite superiore dell'errore commesso.

Infine svolgeremo la seguente questione che ci si è presentata in un problema di meccanica celeste. Studieremo il caso di un sistema meccanico in cui vi sono due parametri, uno solo però variabile in una maniera prossima a quella che assicura l'invarianza adiabatica degli integrali ciclici. Troveremo che l'integrale ciclico in un intervallo in cui resta finita la variazione totale dei due parametri, si avvicina approssimativamente ad una grandezza di più facile calcolo, almeno in certi casi. O per meglio dire calcoleremo un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo all'integrale ciclico questo valore approssimato e vedremo che tale limite diventa tanto più piccolo quanto più la variazione del primo parametro si avvicina a quella che assicura l'invarianza adiabatica. Termineremo con la discussione della portata e dell'applicabilità di questo resultato (3).

---

(1) Notiamo che le formule citate valgono qualunque sia il modo di variazione dei parametri ma, come vedremo, esse danno errori tanto più piccoli quanto più il detto modo di variazione si avvicina a quello che assicura l'invarianza adiabatica.

(2) A rigore l'intervallo in cui è valida la nostra integrazione approssimata non coincide con quello indicato nel testo, ma ne differisce in generale di poco. La cosa sarà naturalmente precisata più avanti.

(3) In un sunto dei miei lavori già citati, fatti dal WINTNER sui « Zentralblatt für Mathematik » (5-15 e 7-372) si afferma che l'idea delle mie altre ricerche non è nuova, perchè l'ebbe già il KNESER (« Mathematischen Annalen », 91, 155, 1924). Debbo dichiarare che a me sembra essere scopo del KNESER quello di dare una dimostrazione esatta dell'invarianza adiabatica degli integrali ciclici di BOHR-SOMMERFELD, mentre la mia ricerca si propone (ripetiamolo) di ottenere un limite superiore per l'errore commesso, qualora i parametri non varino nel

CAPITOLO I.

1. Formule introduttive. — Si abbia un sistema meccanico ad un grado di libertà retto dalle equazioni Hamiltoniane nelle variabili p e q:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \tag{1}$$

dove la funzione di HAMILTON $\mathcal{H}$ dipende, oltre che da p e q, da un certo numero di parametri variabili col tempo. Noi supporremo per fissare le idee che questi parametri siano in numero di due e li indicheremo con le lettere a e b. Adoperiamo due parametri in vista delle questioni che tratteremo nel terzo capitolo, sebbene per gli scopi di questo basterebbe usare, (e il procedimento sarebbe più semplice) un parametro solo.

Passiamo a formulare le ipotesi fondamentali per la nostra ricerca. Ammetteremo anzitutto che ad ogni valore per a e b compreso entro un certo campo (connesso) C si possa coordinare un campo A del piano delle p, q tale che le soluzioni di (1) con a e b costanti e con condizioni iniziali entro il corrispondente A siano periodiche e tutte contenute in A. Potremo perciò ad ogni valore a, b di C ed ad ogni p, q contenuto nel corrispondente A coordinare l'integrale ciclico di BOHR-SOMMERFELD $J = \oint p dq$. Queste J relative ai punti di A le supporremo variabili con continuità fra due valori J_1 e J_2 alla loro volta dipendenti con continuità da a, b. Ammetteremo anche, benchè non sia strettamente necessario, nello spazio delle J, a, b, convesso il campo (che diremo campo B) limitato da J_1, J_2 e da una superficie cilindrica retta di base C.

Supporremo poi che si possa esprimere $\mathcal{H}$ come funzione univoca di J, a, b, che per ogni (a, b) di C e per ogni J compreso i corrispondenti J_1, J_2, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J}$ sia sempre dello stesso segno e che i valori iniziali di p e q siano compresi nel campo A relativo ad $a(0)$, $b(0)$.

---

modo che assicura l'invarianza adiabatica degli integrali ora citati. Di più nella sua Nota il KNESER non fa alcuna applicazione dei suoi resultati, tanto meno al problema delle masse variabili, nel quale gli invarianti adiabatici furono introdotti solo nel 1928 dal LEVI-CIVITA. Per queste ragioni mi sembra inesatta l'asserzione del WINTNER.

Debbo dichiarare però che ho preso dal KNESER alcune notazioni.

Si osservi ancora che in questo lavoro si usa l'espressione limite superiore dell'errore, ma che sarebbe più esatto adoperare il termine valore maggiorante.

Ciò posto potremo formare l'equazione di JACOBI ponendo in luogo di E la $\mathcal{H}(J, a, b)$. Mediante un integrale completo di questa equazione $V(q, J, a, b)$ (integrale che si ottiene facilmente mediante una quadratura) potremo avere la nota trasformazione canonica delle variabili p e q in nuove variabili di cui una e la J e l'altra la sua coniugata che indicheremo con $-w$. Tale trasformazione sarà data ovviamente dalle equazioni:

$$p = \frac{\partial V}{\partial q} \qquad -w = -\frac{\partial V}{\partial J} \tag{2}$$

le quali come è noto definiscono p e q come funzioni periodiche di w con periodo 1 s'intende per (a, b) costante e entro C e J compreso fra i corrispondenti J_1, J_2.

Allora le equazioni relative alle J e w saranno sempre del tipo Hamiltoniano con la funzione di HAMILTON uguale alla $H(J, a, b) + \frac{\partial V}{\partial t}$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial}{\partial(-w)}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) \qquad \frac{d(-w)}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial J} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right). \tag{3}$$

Ora la V è funzione esplicita del tempo solo attraverso a e b perciò è:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial a} a' + \frac{\partial V}{\partial b} b'. \tag{4}$$

Se ora indichiamo con J_a, J_b, w_a, w_b, ω rispettivamente le derivate $\frac{\partial^2 V}{\partial w \partial a}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial w \partial b}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial J \partial a}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial J \partial b}$, $\frac{\partial H}{\partial J}$, le (3) assumono la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dJ}{dt} = -a'J_a - b'J_b \\[2ex] \dfrac{dw}{dt} = \omega + a'w_a + b'w_b . \end{cases} \tag{5}$$

Le J_a, J_b, w_a, w_b saranno in generale funzioni di J, w, a, b. Esse godono anzitutto della seguente proprietà. Essendo come è noto $\frac{\partial V}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial b}$ [1], fissati

---

[1] Per comprendere ciò si osservi che esprimendo la $V(q, J, a, b)$ in funzione di w cioè ponendo al posto q la sua espressione in funzione di w si ottiene una funzione multiforme tale cioè che se w aumenta di uno la V aumenta di J ossia si ha:

$$V(q(w+1), J, a, b) = V(q(w), J, a, b) + J. \tag{α}$$

E questa relazione è immediata conseguenza dell'altra:

$$V(q(w+1), J, a, b) - V(q(w), J, a, b) = \oint p\,dq = J.$$

a, b e J (s'intende $(a.\ b)$ entro C, J fra J_1 e J_2) funzioni periodiche di w con periodo 1 saranno tali anche J_a, J_b, w_a, w_b. Di più sarà:

$$\int_w^{w+1} J_a dw = \int_w^{w+1} \frac{\partial^2 V}{\partial w \partial a} dw = \left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]_w^{w+1} = 0 \tag{6}$$

e analogamente:

$$\int_w^{w+1} J_b dw = 0. \tag{7}$$

Ammetteremo poi che le ω, J_a, J_b, w_a, w_b siano per ogni a, b in C e per ogni J e w comprese rispettivamente fra J_1 e J_2, w', $w'+2$ (w' numero reale qualunque) sempre limitate e a rapporto incrementale limitato rispetto a tutte quattro le variabili, a, b, J, w. È ovvio, per la periodicità delle nostre funzioni, che queste ipotesi valgono per ogni w ferme restando i limiti per a, b e per J. Ovviamente poi le equazioni (5) e tutte le loro proprietà sono valide fino a che dalle J e w che si ottengono risolvendo tali equazioni corrispondono per le (2) valori di p e q compresi entro C cioè fino a che $J(t)$ resta compresa fra le J_1 e J_2 corrispondenti ad $a(t)$, $b(t)$.

A questo punto, sarà bene notare che le ipotesi che abbiamo ora ricordate si potrebbero dedurre da altre più semplici fatte sulle equazioni (1). Abbiamo creduto opportuno non seguire questa via che ci porterebbe troppo lontano.

Passiamo ora ad alcune definizioni relative ai parametri. Ripetiamo che per variazione totale $V(a,\ t)$ del parametro a in un intervallo $(0,\ t)$ intenderemo l'espressione:

$$V(a,\ t) = \int_0^t \left|\frac{da}{dt}\right| dt \tag{8}$$

Derivando ora la (α) rispetto ad a avremo ricordando che la $\frac{\partial V}{\partial a}$ che compare nelle nostre formule si ottiene derivando V mantenendo costante q si ha:

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial a}\right\}_{w+1} + \left\{\frac{\partial V}{\partial a}\right\}_{w+1} = \left\{\frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial a}\right\}_w + \left\{\frac{\partial V}{\partial a}\right\}_w \tag{β}$$

dove nel primo membro i termini si suppongono calcolati in $w+1$ nel secondo membro in w a parità s'intende di a, b, J. Ora $\frac{\partial V}{\partial q} = p$ è funzione periodica di periodo 1 di w così pure sarà $\frac{\partial q}{\partial a}$ essendo periodica di periodo 1 per ogni a, b in C la q. Si ha allora che il primo termine al primo membro di (β) si elide col primo termine a secondo membro restando così:

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial a}\right\}_{w+1} = \left\{\frac{\partial V}{\partial a}\right\}_w$$

e ciò dimostra la periodicità di $\frac{\partial V}{\partial a}$ rispetto a w. Analoga dimostrazione vale per $\frac{\partial V}{\partial b}$.

che se a è sempre crescente o decrescente in $(0, t)$ diviene:

$$V(a, t) = |a(t) - a(0)|. \tag{9}$$

Se invece a non è sempre crescente o decrescente ma ha in $(0, t)$ un numero finito di massimi o minimi l'espressione di $V(a, t)$ non è più così semplice, ma il calcolo di essa non è affatto difficile.

Conviene infatti per eseguire questo calcolo, dividere l'intervallo $(0, t)$ in un certo numero di tratti in cui $a(t)$ è sempre crescente o decrescente ed applicare a questi tratti la formula (9). Analoghe definizioni valgono per il parametro b.

Intenderemo poi per periodo del moto, relativo all'istante t, il periodo del moto retto dalle (1) con J, a, b costanti e uguali a $J(t)$, $a(t)$, $b(t)$ e con $\mathcal{H}$ uguale al valore corrispondente a $J(t)$, $a(t)$, $b(t)$. Questo periodo $T(t)$ vale ovviamente $\dfrac{1}{\omega(J(t), a(t), b(t))}$ [1].

Diremo perciò variazione del parametro a o b nel periodo T corrispondente all'istante t (grandezza che indicheremo con $\Delta_t a$, $\Delta_t b$ o se non vi è luogo ad equivoco con Δa, Δb) la variazione di questo parametro nel periodo t, $t + T(t)$. Sarà cioè:

$$\Delta_t a = \int_t^{t+T(t)} \left|\frac{da}{dt}\right| dt \qquad \Delta_t b = \int_t^{t+T(t)} \left|\frac{db}{dt}\right| dt. \tag{10}$$

Se la variazione di un parametro per ogni valore di t di un certo intervallo $(0, h)$ si può considerare come infinitesima diremo che il parametro varia in $(0, h)$ in maniera infinitamente lenta. Infine diremo (seguendo in sostanza il LEVI-CIVITA) che un parametro a o b varia in $(0, h)$ in maniera graduale quando si può considerare come infinitesimo per ogni $0 < t < h$ la variazione totale delle sue derivate in t, $t + T(t)$ rispetto al valore assoluto della derivata stessa calcolata nel punto $\bar{t}$ intermedio fra t e $t + T(t)$ e tale che $|a'(\bar{t})|\, T(t)$ o $|b'(\bar{t})|\, T(t)$ valga $\Delta_t a$ o $\Delta_t b$. Cioè: affinchè il parametro a vari in maniera graduale deve essere infinitesima l'espressione che indicheremo con $\Delta_t a'$

$$\Delta_t a' = \frac{\displaystyle\int_t^{t+T} \left|\frac{d^2 a}{dt^2}\right| dt}{\left|\dfrac{da}{dt}\right|_{t+\theta T}}, \tag{11}$$

in cui $t + \theta T = \bar{t}$. Analoga definizione si può dare per $\Delta_t b'$.

---

[1] Si noti che in seguito ammetteremo ω positiva. Se ciò non fosse si può sempre ridursi a questo caso cambiando t in $-t$.

2. **Calcolo di un fondamentale limite superiore.** — Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dJ}{dt} = - a'J_a - b'J_b \tag{12}$$

e l'altra equazione differenziale nella y

$$\frac{dy}{dt} - b'\bar{J}_b. \tag{13}$$

Dove $\bar{J}_b$ non è altro che J_b in cui però in luogo di J si è messo la y grandezza che ora preciseremo. Noi ci proponiamo di calcolare un intervallo entro cui la differenza fra J e y resta in modulo inferiore ad un numero η positivo prefissato, ma tale che in un certo intervallo $(0, h')$, $y(t) + \eta$ sia sempre inferiore al corrispondente J_2, $y(t) - \eta$ superiore al corrispondente J_1 (¹). La y è poi definita oltre che dell'equazione (13) anche dalla condizione:

$$y(0) = J(0) = J_0 \tag{13'}$$

la quale per la continuità di J_1 e J_2 e per il fatto che J_0 è compreso fra la J_1 e J_2 corrispondente a $a(0)$, $b(0)$, assicura l'esistenza di $(0, h')$.

Ora per ragioni di continuità esisterà evidentemente un certo intervallo intorno all'origine $(0, h)$ compreso in $(0, h')$ in cui $|J - y| \leq \eta$. Ciò assicura che in $(0, h)$, J è compreso fra J_1 e J_2 e perciò sono applicabili tutte le proprietà ammesse per il sistema (5). Allora sottraendo membro a membro la (13) dalla (12) e integrando l'espressione ottenuta da 0 a t' $(t' \leq h)$ abbiamo:

$$|J - y| \leq \left|\int_0^{t'} a'J_a dt\right| + \left|\int_0^{t'} b'(J_b - \bar{J}_b)dt\right|. \tag{14}$$

Proponiamoci dunque di calcolare un limite superiore $I(t')$ di $\left|\int_0^{t'} a'J_a dt\right|$.

A questo scopo, mediante i punti $t_1 = \dfrac{1}{\omega(J(0), a(0), b(0))}$

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega(J(t_1),\ a(t_1),\ b(t_1))} \dots t_r = \frac{1}{\omega(J(t_{r-1}),\ a(t_{r-1}),\ b(t_{r-1}))} + t_{r-1}$$

$$t_{n-1} = t_{n-2} + \frac{1}{\omega(J(t_{n-2}),\ a(t_{n-2}),\ b(t_{n-2}))}$$

(¹) S'intende che (O, h') deve essere tale che in esso $a(t)$ e $b(t)$ siano entro C.

dividiamo l'intervallo $(0, t)$ in n parti, supponendo che:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{1}{\omega(J(t_{n-1}),\ a(t_{n-1}),\ b(t_{n-1}))}$$

sia superiore a t'. Allora avremo:

(15) $$\left|\int_0^t a' J_a dt\right| \leq I_{01} + I_{12} \dots I_{r,\,r+1} \dots + \left|\int_{t_{n-1}}^t a' J_a dt\right|$$

dove:

(16) $$I_{r,\,r+1} = \left|\int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a dt\right|.$$

Calcoliamo ora un limite superiore per $I_{r,\,r+1}$. A questo scopo consideriamo la funzione, J_a' ottenuta ponendo in J_a al posto di $J(t)$, $a(t)$, $\omega(t)$, $J(t_r)$, $a(t_r)$, $w_1(t)$ essendo $w_1(t)$ uguale a $w(t_r) + \dfrac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r}$. Potremo scrivere:

(17) $$I_{r,\,r+1} \leq \left|\int_{t_r}^{t_{r+1}} a'(J_a - J_a') dt\right| + \left|\int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt\right|.$$

Ora dalla prima di (5) si ha per l'intervallo $(t_r,\ t_{r+1})$

(18) $$|J(t) - J(t_r)| = \left|\int_{t_r}^t a' J_a dt + \int_{t_r}^t b' J_b dt\right|$$
$$\leq M_a \int_{t_r}^t |a'|\, dt + M_b \int_{t_r}^t |b'|\, dt.$$

Dove M_a e M_b sono rispettivamente i limiti superiori di $|J_a|$ e $|J_b|$ per ogni $a(t)$ e $b(t)$ con t variabile in $(0, t')$, per qualunque w e per J compreso fra il massimo di $y(t) + \eta$ e il minimo di $y(t) - \eta$ s'intende in $(0, t')$ [1]. Le M_a, M_b sono finite per le ipotesi fatte sulle limitazioni di J_a, J_b.

---

[1] Puo darsi che qualche J, a, b compresi fra i limiti ora indicati cada fuori del campo B in cui sono definite le J_a, J_b. Siccome però i valori di queste grandezze che compaiono nelle nostre equazioni sono calcolate per J, a, b entro B, noi intenderemo che M_a e M_b sono i limiti superiori di $|J_a|$ e $|J_b|$ per quei valori di J, a, b compresi fra i limiti precisati nel testo e interni a B. O in altre parole potremo convenire che le J_a e J_b per valori di J, a, b fuori di B sono nulle. Queste avvertenze valgono anche con le ovvie modificazioni per casi analoghi che incontreremo in seguito.

D'altra parte abbiamo dalla seconda delle (5):

$$w(t) = \int_{t_r}^{t} \omega(J,\, a,\, b)dt + \int_{t_r}^{t} a' w_a dt + \int_{t_r}^{t} b' w_b dt + w(t_r). \tag{19}$$

Perciò si ha subito:

$$|\, w(t) - w_1(t) \,| \leq \int_{t_r}^{t} |\, \omega(J,\, a,\, b) - \omega(J(t_r),\, a(t_r),\, b(t_r)) \,|\, dt + \left| \int_{t_r}^{t} a' w_a dt \right| + \left| \int_{t_r}^{t} b' w_b dt \right| . \tag{20}$$

E poichè si suppone la ω Lipschitziana, esisteranno tre numeri positivi H, K_a, K_b tali che:

$$\begin{aligned} &|\, \omega(J,\, a,\, b) - \omega(J(t_r),\, a(t_r),\, b(t_r)) \,| \leq \\ &\leq H \,|\, J(t) - J(t_r) \,| + K_a \,|\, a(t) - a(t_r) \,| + \\ &+ K_b \,|\, b(t) - b(t_r) \,| \leq (M_a H + K_a) \int_{t_r}^{t} |\, a' \,|\, dt + (M_b H + K_b) \int_{t_r}^{t} |\, b' \,|\, dt. \end{aligned} \tag{21}$$

Le H, K_a, K_b sono prese relativamente a tutti i valori di t [1] compresi fra t_r e t_{r+1} e a tutti i valori di J compresi fra il massimo e il minimo di $J(t)$ in $(t_r,\, t_{r+1})$.

Se ora sostituiamo nella (20) la (21) e indichiamo con A e B i valori massimi di $|\, w_a \,|$, $|\, w_b \,|$ per ogni w, per ogni t di $(0,\, t')$ e per J compreso fra il massimo di $Y + \eta$ e il minimo di $Y - \eta$ in $(0,\, t')$, abbiamo:

$$\begin{aligned} |\, w(t) - w_1(t) \,| &\leq \int_{t_r}^{t} dt (M_a H + K_a) \int_{t_r}^{t} |\, a' \,|\, dt + \\ &+ \int_{t_r}^{t} dt (M_b H + K_b) \int_{t_r}^{t} |\, b' \,|\, dt + A \int_{t_r}^{t} |\, a' \,|\, dt + B \int_{t_r}^{t} |\, b' \,|\, dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Ciò posto torniamo alla (17). Poichè J_a è per ipotesi Lipschitziana potremo trovare quattro numeri positivi R, S, P, Q tali che per ogni w e per

---

[1] Più precisamente di $a(t)$, $b(t)$ per t compreso ecc.. In seguito useremo spesso la locuzione abbreviata del testo.

valori di J e t compresi fra gli stessi limiti indicati a proposito, di H, K_a, K_b sia:

(23) $$| J_a - J_a' | \leq R \,| J(t) - J(t_r) | + S \,| w(t) - w_1(t) | + \\ + P \,| a(t) - a(t_r) | + Q \,| b(t) - b(t_r) | .$$

Abbiamo allora ricordando la (18) e la (21):

(24) $$I_{r,\,r+1} \leq R \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, M_a dt \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt + R \int_{t_r}^{t_{r+1}} dt M_b \, | a' | \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt$$

$$+ S \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, (M_a H + K_a) dt \int_{t_r}^{t} dt \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt + S \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt (M_b H + K_b) \int_{t_r}^{t} dt \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt$$

$$+ SA \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt + SB \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt$$

$$+ P \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt + Q \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt$$

$$+ \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt \right| .$$

Ora si ha subito:

(25) $$\int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt = \frac{1}{2} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \right)^2$$

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt \leq \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t_{r+1}} | b' | \, dt$$

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} dt \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt \leq \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \int_{t_r}^{t} | a' | \, dt (t - t_r) \leq \frac{t_{r+1} - t_r}{2} \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \right)^2$$

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} dt \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt \leq \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t} | b' | \, dt (t - t_r) \leq (t_{r+1} - t_r) \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt \int_{t_r}^{t_{r+1}} | b' | \, dt .$$

Abbiamo poi con una semplice integrazione per parti:

(26) $$\int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt = a'(t_{r+1}) \int_{t_r}^{t_{r+1}} J_a' dt - \int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' \int_{t_r}^{t} J_a' dt .$$

Ora J_a' non è altro che la J_a in cui sono fissati i valori di J, a, b e solo la w_1 è variabile. Di più la w_1 per $t = t_r$ vale $w(t_r)$ per $t = t_{r+1}$ vale $w(t_r) + 1$. Si ha perciò ricordando la (7)

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} J_a' dt = \frac{1}{\omega} \int_{w_1(t_r)}^{w_1(t_r)+1} J_a' dw_1 = 0.$$

Quindi dalla (26) si ha:

$$\left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a' J_a' dt \right| \leq M_a (t_{r+1} - t_r) \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a'' | \, dt \leq \frac{M_a \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a'' | \, dt \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt}{| \bar{a}' |}. \tag{27}$$

Essendo $| \bar{a}' |$ quel valore di $| a' |$ compreso fra t_r e t_{r+1} tale che

$$| \bar{a}' | (t_{r+1} - t_r) = \int_{t_r}^{t_{r+1}} | a' | \, dt.$$

Perciò sostituendo nella (24) abbiamo:

$$I_{r,\, r+1} \leq Z_r (\Delta t_r a)^2 + Z_r' (\Delta t_r b)(\Delta t_r a) + M_a \Delta t_r a' \Delta t_r a. \tag{28}$$

Dove:

$$Z_r = \frac{RM_a + S(M_a H + K_a)(t_{r+1} - t_r) + SA + P}{2} \tag{29}$$

$$Z_r' = RM_b + S(M_b H + K_b)(t_{r+1} - t_r) + SB + Q. \tag{30}$$

D'altra parte si ha:

$$\left| \int_{t_{n-1}}^{t'} a' J_a dt \right| \leq M_a \int_{t_{n-1}}^{t'} | a' | \, dt \leq M_a \Delta t_{n-1} a. \tag{31}$$

Indichiamo ora con Z e Z' due numeri superiori rispettivamente a tutti i Z_r e Z_r'. Siano poi $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$ i valori massimi in $(0, t')$ di $\Delta t_r a$ e $\Delta t_r a'$ per ogni t di $(0, t')$. Allora ricordando, che $V(a, t') > V(a, t_{n-1})$, $V(b, t') > V(b, t_{n-1})$ si ha sostituendo nella (15) i limiti superiori ora ottenuti:

$$\left| \int_0^{t'} a' J_a dt \right| \leq Z \Delta_m a \, V(a, t') + Z' \Delta_m a \, V(b, t') + M_a \Delta_m a' \, V(a, t') + M_a \Delta_m a. \tag{32}$$

Il secondo membro di (32) è il cercato limite superiore che verrà indicato con $I(t')$.

Prima di chiudere questo paragrafo aggiungiamo la seguente osservazione. Si consideri una funzione g di J, $g = f(J)$ funzione tale che $f'(J)$ sia sempre positiva o sempre negativa, quando J varia fra il massimo valore di J_2 e il minimo valore di J_1 relativo all'intervallo $(0, h')$. Allora si potrà invertire questa relazione e scrivere $J = \varphi(g)$. Ciò permette di scrivere le nostre equazioni in modo da avere come incognite la g. Si ponga infatti nelle ω, J_a, J_b, w_a, w_b delle (5) in luogo di J la $\varphi(g)$. Poi si moltiplichi la prima delle (5) per $f'(J) = f'(\varphi(g))$. Si ottiene così:

$$\frac{dg}{dt} = -a'f'(\varphi(g))J_a - b'f'(\varphi(g))J_b, \qquad \frac{dw}{dt} = \omega + a'w_a + b'w_b.$$

Ora se si suppone f' e φ limitate e Lipschitziane si ottiene subito che i termini moltiplicati per a', b' al secondo membro delle equazioni ora scritte godono delle stesse proprietà di J_a, J_b e w_a, w_b e lo stesso può dirsi della ω.

Perciò i resultati ora ottenuti per J valgono anche per g naturalmente tenendo conto dei diversi valori che ora assumono i secondi membri delle equazioni che definiscono w e g.

3. **Regole per il calcolo pratico della espressione $I(t)$.** — Nella (32) compare la Z, Z', M_a, $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ perciò dobbiamo anzitutto indicare qualche metodo per il calcolo di queste grandezze in un intervallo $(0, t')$ inferiore a $(0, h)$.

Si osservi anzitutto che M_a, M_b sono quantità valide in base alla loro definizione per qualunque r e si calcolano trovando il massimo valore di J_a, J_b per t in $(0, t')$ per ogni w e J compreso fra il valore massimo in $(0, t')$ di $y + \eta$ e il valore minimo sempre in $(0, t')$ di $y - \eta$ valori che indicheremo rispettivamente con $y_{\max} + \eta$ e $y_{\min} - \eta$.

Passiamo ora alle Z. Perciò prendiamo in esame i termini che compaiono nelle Z_r. In esse vi sono anzitutto le A, B indipendenti da r perchè valgono rispettivamente i limiti superiori di $|w_a|$, $|w_b|$ per t in $(0, t')$ e compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ e per ogni w. Le R, S, P, Q definite dalle (23) e che compaiono nella espressione di Z_r devono coincidere (almeno sotto condizioni di derivabilità per J_a, J_b che supporemo largamente soddisfatte) rispettivamente con un valore assoluto di $\frac{\partial J_a}{\partial J}$, $\frac{\partial J_a}{\partial w}$, $\frac{\partial J_a}{\partial a}$, $\frac{\partial J_a}{\partial b}$ nel campo definito da $-\infty < w < +\infty$ $t_r < t < t_{r+1}$ (1), J compreso fra il massimo e il minimo

(1) O meglio fra $a(t)$, $b(t)$ comprese rispettivamente fra i loro massimi e minimi in (t_r, t_{r+1})

di $J(t)$ in (t_r, t_{r+1}) [1]. Analogamente H, K_a, K_b non sono altro che valori assoluti di $\frac{\partial\omega}{\partial J}, \frac{\partial\omega}{\partial a}, \frac{\partial\omega}{\partial b}$ calcolati in un punto del campo ora descritto. Infine $t_{r+1} - t_r$ non è altro che $\frac{1}{\omega(J(t_r), a(t_r), b(t_r))}$. Ora il calcolo esatto di queste grandezze è impossibile perchè bisognerebbe conoscere $J(t)$ e $w(t)$ che sono incognite. Se ne può calcolare un limite superiore prendendo il valore massimo di queste grandezze per ogni t di $(0, t')$ per ogni w, e per ogni J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$. Ponendo queste grandezze nelle espressioni di Z_r e Z_r' si troverebbe un valore superiore a qualunque Z_r e Z_r' e questo valore si potrebbe prendere rispettivamente per Z e Z'.

Vi è però la possibilità di ottenere valori più bassi di Z e Z' in base alle seguenti osservazioni che faremo riferendoci a Z perchè analogamente si può procedere per Z'.

In Z intervengono le espressioni $H(t_{r+1} - t_r)$, $K_a(t_{r+1} - t_r)$. Ora H è un valore di $\left|\frac{\partial\omega}{\partial J}\right|$ calcolato per t compreso fra t_r e t_{r+1} e per J compreso fra il massimo e il minimo di $J(t)$ in t_r, t_{r+1}. Perciò si ha [2]:

$$H = \left| \left(\frac{\partial\omega}{\partial J}\right)_{t_r} + \left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J^2}\right\}(J - J(t_r)) + \left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial a}\right\}(a(t) - a(t_r)) + \left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial b}\right\}(b(t) - b(t_r)) \right|.$$

Dove $\left\{\frac{\partial\omega}{\partial J}\right\}_{t_r}$ è il valore di $\frac{\partial\omega}{\partial J}$ calcolato in t_r mentre $\frac{\partial^2\omega}{\partial J^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial a}, \frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial b}$ sono valori di queste derivate calcolate per J, a e b nel campo descritto a proposito di H. Quindi ricordando che $|J - J(t_r)| < M_a\Delta_m a + M_b\Delta_m b$, $|a - a(t_r)| < \Delta_m a$, $|b - b(t_r)| < \Delta_m b$ quantità queste di solito molto piccole, risulta opportuno prendere qualche volta come valore maggiorante di $H(t_{r+1} - t_r)$ l'espressione:

$$\left\{\frac{\frac{\partial\omega}{\partial J}}{\omega}\right\}_{\max} + \frac{\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J^2}\right\}_{\max}(M_a\Delta_m a + M_b\Delta_m b) + \left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial a}\right\}_{\max}\Delta_m a + \left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial b}\right\}_{\max}\Delta_m b}{\omega_{\min}} \tag{34}$$

dove il simbolo max o min accanto alle parentesi indica il massimo o il minimo del valore assoluto della espressione entro parentesi per ogni J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ e ogni t di $(0, t')$. Analoghe considerazioni si possono fare per $K_a S(t_{r+1} - t_r)$.

[1] Cioè per un valore di $J(t)$ in questo intervallo.

[2] Si noti che i valori di t in cui sono calcolati $a(t)$ e $b(t)$ possono anche essere diversi.

Si può calcolare facilmente un altro limite superiore per $H(t_{r+1} - t_r)$, $K_a(t_{r+1} - t_r)$ qnalora sia $\omega = f(J)e^{ha+kb}$ con h e k numeri indipendenti da J, a, b. Si ha infatti

$$(35) \qquad t_{r+1} - t_r = \frac{e^{-ha(t_r)-kb(t_r)}}{f(J(t_r))}$$

$$(36) \qquad H = | f'(J(\bar{t}))e^{ha(t)+kb(t)} |$$

dove t e $\bar{t}$ sono valori intermedi fra t_r e t_{r+1}. Quindi:

$$(37) \qquad H(t_{r+1} - t_r) \leq \frac{\{ f'(J(t)) \}_{\max}}{\{ f(J(t)) \}_{\min}} e^{|h| \Delta_m a + |k| \Delta_m b}.$$

Si ha poi usando le stesse notazioni:

$$(38) \qquad K_a = | hf(J')e^{ha(t)+kb(t)} |.$$

Per cui:

$$(39) \qquad K_a(t_{r+1} - t_r) < | h | \frac{\{ f(J) \}_{\max}}{\{ f(J) \}_{\min}} e^{|h| \Delta_m a + |k| \Delta_m b}$$

dove $| f(J) |_{\max}$ $\{ f(J) \}_{\min}$ $\{ f'(J) \}_{\min}$ significano rispettivamente il massimo o il minimo di $| f(J) |$ $| f'(J) |$ per J variabile fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ [1].

Se occorre un limite superiore più basso si può scrivere:

$$| f(J') | \leq | f(J(t_r)) | + | J' - J(t_r) | \{ f'(J) \}_{\max} \leq$$
$$\leq f(J(t_r)) + \{ f'(J) \}_{\max}(M_a\Delta_m a + M_b\Delta_m b)$$

e una forma analoga vale per $f'(J)$. Allora si ha:

$$(41) \quad H(t_{r+1} - t_r) = \left(\left\{ \frac{f'(J)}{f(J)} \right\}_{\max} + \frac{\{ f''(J) \}_{\max}}{\{ f(J) \}_{\min}} (M_a\Delta_m a + M_b\Delta_m b) \right) e^{|h| \Delta_m a + |k| \Delta_m b}.$$

$$(42) \quad K_a(t_{r+1} - t_r) \leq | h | \left(1 + \frac{\{ f'(J) \}_{\max}}{\{ f(J) \}_{\min}} (M_a\Delta_m a + M_b\Delta_m b) \right) e^{|h| \Delta_m a + |k| \Delta_m b}$$

col solito significato per i termini entro parentesi graffa. Analoghe considerazioni valgono per $K_b(t_{r+1} - t_r)$.

Passiamo ora allo studio di $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$. Quando queste grandezze non sono assegnate come dato del problema e non sono facilmente calcolabili in base alle formule che le esprimono conviene calcolare di esse un limite superiore, in base alle seguenti considerazioni.

---

[1] Si noti che se h è positivo e a decrescente si può sopprimere nell'esponenziale il $\Delta_m a$. Lo stesso accade se h è negativo e a crescente. Le stesse conclusioni valgono con le ovvie modificazioni per il parametro b.

Cominciando da $\Delta_m a$ si deve notare che esso è sempre inferiore ad $\frac{a'_{\max}}{\omega_{\min}}$ essendo $a'_{\max}$ il valore massimo di $|a'|$ in $(0, t')$, $\omega_{\min}$ il valore minimo di ω in $(0, t')$ e per J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$. Dí questo limite superiore abbiamo fatto varie applicazioni nelle altre nostre note relative agli invarianti adiabatici.

Però si può trovare per $\Delta_m a$ un limite superiore che di regola è più basso di quello ora accennato. Infatti se $\bar{t}$ è un punto dell'intervallo (t_r, t_{r+1}) abbiamo:

$$a'(t) = a'(t_r) + (t - t_r)a''(\bar{t}). \tag{43}$$

Allora si ha:

$$\int_{t_r}^{t_{r+1}} |a'|\, dt \leq |a'(t_r)| \int_{t_r}^{t_{r+1}} dt + \left| \int_{t_r}^{t_{r+1}} a''(\bar{t})(t - t_r) \right| \tag{44}$$

$$\leq \left| \frac{a'(t_r)}{\omega(J(t_r),\ a(t_r),\ b(t_r))} \right| + \frac{|a''|_{\max}}{2} (t_{r+1} - t_r)^2$$

dove $|a''|_{\max}$ è il valore massimo di $|a''|$ in $(0, t')$. Quindi si ha subito:

$$\Delta_m a \leq \left| \frac{a'}{\omega} \right|_{\max} + \frac{|a''|_{\max}}{2\omega^2_{\min}} \tag{45}$$

indicando con $\left| \frac{a'}{\omega} \right|_{\max}$ il valore massimo di $\left| \frac{a'}{\omega} \right|$ per ogni t di $(0, t')$ e per ogni J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$.

Ora siccome avviene spesso in pratica che $\frac{|a''|_{\max}}{2\omega^2_{\min}}$ è trascurabile rispetto $\left| \frac{a'}{\omega} \right|_{\max}$ e questo termine è inferiore dal più uguale ad $\frac{a'_{\max}}{\omega_{\min}}$ se ne conclude che questo limite superiore per $\Delta_m a$ può essere più conveniente dell'altro calcolato con la $\frac{a'_{\max}}{\omega_{\min}}$. È da notare che ponendo fin da principio nelle nostre formule in luogo $|a'|$ il suo limite superiore $|a'|_{\max}$ il termine $S(M_a H + K_a)(t_{r+1} - t_r)$ nell'espressione di Z_r va moltiplicato per $\frac{1}{3}$ mentre il termine analogo nell'espressione di Z_r' va diviso per 2, e $V(a, t')$ viene sostituito con $|a'|_{\max} t'$.

Passiamo ora allo studio di $\Delta_m a'$. Un suo limite superiore è evidentemente $\frac{|a''|_{\max}}{\omega_{\min} a'_{\min}}$ essendo $a'_{\min}$ il valore minimo di $|a'|$ in $(0, t')$. Oppure si può moltiplicare denominatore e numeratore dell'espressione di $\Delta t_r a'$ per $t_{r+1} - t_r$ e allora un limite superiore di $\Delta_m a'$ è dato da $\dfrac{|a''|_{\max}}{\omega_{\min}\Delta_{\min} a}$ essendo $\Delta_{\min} a$ il valore minimo di $\Delta t_r a$ in $(0, t')$.

Questi limiti superiori hanno però l'inconveniente di non essere applicabili qualora in qualche punto di $(0, t')$ sia a' o $\Delta_t a$ nulla. Conviene nei casi ora ricordati modificare un po' la forma del termine $M_a \Delta_m a' V(a, t)$. Si ricordi perciò che questo termine sorge dalla somma di integrali del tipo:

$$\left|\int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' \int_{t_r}^{t} J_a' dt\right|.$$

Ora si ha subito la relazione:

$$\left|\int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' \int_{t_r}^{t} J_a' dt\right| \leq M_a |a''|_{\max} \int_{t_r}^{t_{r+1}} dt \int_{t_r}^{t} dt = \frac{M_a |a''|_{\max}(t_{r+1} - t_r)}{2\omega_{\min}}. \tag{46}$$

Per cui nelle espressione di $I(t)$ in luogo di $M_a V(a, t')\Delta_t a'$ si può mettere $\dfrac{M_a |a''|_{\max} t'}{2\omega_{\min}}$. Questa sostituzione è stata sempre fatta nelle nostre note sugli invarianti adiabatici.

Oppure si può osservare che è:

$$\left|\int_{t_r}^{t_{r+1}} a'' \int_{t_r}^{t} J_a dt\right| < \frac{M_a}{\omega_{\min}} \int_{t_r}^{t_{r+1}} |a''|\, dt$$

per cui in luogo $M_a V(a, t')\Delta_m a'$ possiamo mettere (s'intende nella espressione di $I(t')$) $\dfrac{M_a}{\omega_{\min}}\ V(a', t')$.

È poi ovvio che in qualche caso speciale dalle formule di definizioni di $\Delta_t a$, $\Delta_t a'$ si possono ottenere valori per $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ sfruttando le particolari proprietà di a e a' [1].

4. Caso in cui b è costante. Calcolo di t' e altre proprietà. — Rimandando al Capitolo terzo lo studio del caso in cui b è variabile, supponiamo d'ora in poi b costante per cui $y(t)$ si riduce a J_0 (valore di J per $t = 0$) e

[1] Osserviamo che in seguito indicheremo i massimi o minimi di a' o a'' semplicemente con i simboli $a'_{\max}$ o $a''_{\max}$.

resta così:

$$(47) \qquad |J - J_0| \leq \left| \int_0^t a' J_a dt \right| \leq (Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a') V(a, t') + M_a \Delta_m a = I(t').$$

Da questa formula troviamo un metodo per verificare se t' è compreso entro l'intervallo $(0, h)$. Per questo scopo osserviamo anzitutto che $I(t')$ è definita in tutto $(0, h')$ perchè per tutti i valori t' di questo intervallo si possono definire Z, M_a, $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$, $V(a, t')$. Osserviamo poi che $I(t')$ è una funzione non decrescente di t' perchè è prodotto e somma di termini che sono tali. Naturalmente questa $I(t')$ è limite superiore di $|J - J_0|$ nell'intervallo $(0, h)$ in cui $J_0 - \eta < J < J_0 + \eta$.

Ora è facile dimostrare il teorema: se $I(t')$ è per $t' < h'$ inferiore a η certamente t' è interno a $(0, h)$ e lo stesso accade di tutti i $\bar{t}'$ inferiori a t'.

Infatti o l'intervallo $(0, h)$ coincide con $(0, h')$ e allora il nostro teorema è dimostrato, oppure $h < h'$ allora $|J(h) - J_0| = \eta$. Ma se $I(t') < \eta$ non può essere $t' > h$ altrimenti si avrebbe $I(t') \geq I(h) \geq \eta$ contro l'ipotesi. Perciò la verifica se t' è interno ad h e quindi vale la (47) si ottiene provando che $I(t')$ è inferiore a η.

È interessante il caso in cui si possa prendere η abbastauza piccolo per cui sia possibile $h' = \infty$. Allora se $I(t')$ resta per $t \to \infty$ inferiore a η la $I(t')$ si può applicare in tutto l'intervallo $(0, \infty)$ cioè la (47) può servire per prevedere valori assintotici di $|J - J_0|$. È da notare che dovendo restare $I(t')$ finito occorre che $V(a, t')$ resti pure finito ([1]).

Si noti ora che se $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$ si possono considerare infinitesime cioè se a varia in maniera infinitamente lenta e graduale, allora se per ogni t' finito o infinito la $V(a, t')$ è finita resulta $|J - J_0|$ inferiore per ogni t finito a qualunque ε minore di η, e perciò per l'arbitrarietà di ε, $J = J_0$ per ogni valore di t quindi anche al limite per $t \to \infty$. Si ha così che se un parametro varia in maniera infinitamente lenta e graduale la J resta costante per tutto l'intervallo anche infinito in cui $V(a, t')$ resta finita purchè esista un numero η tale che per ogni t' sia $J_2 - \eta > J_0 > J_1 + \eta$. Sotto questa forma viene spesso enunciato il concetto d'invariante adiabatico ([2]).

([1]) In seguito nella espressione di $I(t)$ porremo talvolta in luogo di M_a soltanto M.

([2]) Notiamo che i fisici sostituiscono spesso alla nozione di variazione graduale del parametro quella di variazione non in fase col moto. Questa nozione è più generale ma più difficile a mettere in equazione.

5. Applicazione al problema del moto armonico con forza di richiamo dipendente dal tempo. — Intenderemo per moto armonico con forza di richiamo dipendente dal tempo, un moto retto dall'equazione:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q \tag{48}$$

essendo q la coordinata e ω una funzione reale e positiva del tempo. Evidentemente questo moto per ω costante è periodico, e ciò per ogni $\omega > 0$ e per ogni p, q, quindi C coincide con $(0, \infty)$, e il corrispondente A con tutto il piano. Come abbiamo visto in altri lavori [1] ponendo:

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos 2\pi w \qquad p = \frac{dq}{dt} = \sqrt{2J\omega}\, \text{sen}\, 2\pi w. \tag{49}$$

Abbiamo subito:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2 q^2}{2} = \omega J \tag{50}$$

il che ci dice $\mathcal{H}$ funzione univoca di J e $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} > 0$. Di più poichè $\mathcal{H}$ può assumere qualunque valore positivo la J varia da zero a infinito per cui $J_1 = 0$, $J_2 = \infty$ cioè J_1 e J_2 variano con continuità e il campo J, ω è convesso. In base alle (49) abbiamo subito con trasformazioni esposte nella nostra nota citata [2]:

$$\frac{dJ}{dt} = -Ja' \,\text{sen}\, 4\pi w \tag{50}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^a}{2\pi} + \frac{a'}{4\pi} \cos 4\pi w \tag{51}$$

essendo $a = \log \omega$. È facile vedere che $\omega = e^a$, $J_a = \text{sen}\, 4\pi w$, $w_a = \cos 4\pi \omega$ sono funzione limitate e Lischiptziane per ogni a di $(-\infty, \infty)$, J di $(0, \infty)$, w di $(-\infty, \infty)$ verificando perciò che sono soddisfatte tutte le condizioni necessarie per applicare le nostre formule.

Ora nella equazione (50) si può prendere come incognita non J ma $\log J$ ottenendosi la formula:

$$\frac{d \log J}{dt} = -a' \,\text{sen}\, 4\pi w. \tag{52}$$

Poichè J può variare fra i limiti $(0, \infty)$ $\log J$ può variare fra $(-\infty, +\infty)$ perciò qualunque sia il valore iniziale di J, J_0 e qualunque sia η (finito)

---

[1] Cfr. il primo lavoro citato a pag. 1.

[2] Si osservi che la w vale la θ della nota citata divisa per 2π.

l'intervallo $(0, h')$ coincide con $(0, \infty)$ in quanto chè per qualunque η finito $\log J_0 \pm \eta$ è sempre entro i limiti in cui le soluzioni di (48) sono periodiche. Ora dalla (52) si ha subito $M_a = 1$, $R = P = 0$, $S = 4\pi$ mentre dalla (51) resulta $H = 0$, $K_a = \frac{e^a}{2\pi}$, $A = \frac{1}{4\pi}$. Quanto a $(t_{r+1} - t_r)$ si può prendere $\pi e^{-a(t_r)}$ perchè le J_a e w_a sono periodiche di periodo $\frac{1}{2}$ rispetto a w. Allora si ha per la (39) e tenendo presente questo valore di $t_{r+1} - t_r$, $K_a(t_{r+1} - t_r) = \frac{e^{\Delta_m a}}{2}$. Quindi si ha:

$$Z = \pi e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2}. \tag{53}$$

Allora per le nostre formule si ha:

$$\left|\log \frac{J(t')}{J_0}\right| \leq \left(\pi e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2}\right)\Delta_m a\, V(a, t') + \Delta_m a' V(a, t') + \Delta_m a = I(t'). \tag{54}$$

E questa equazione vale per qualunque t' tale che $V(a, t')$ sia finita. Infatti la nostra relazione vale per qualunque $t' < h$ con h scelta in modo che in $(0, h)$ sia:

$$\left|\log \frac{J(t')}{J_0}\right| < \eta.$$

Ora per provare se t' è in h basta provare che $I(t')$ è inferiore a η. Ma η non appare nell'espressione di $I(t')$ perciò possiamo prenderla a nostro arbitrio purchè finita e quindi la sceglieremo sempre superiore ad ogni $I(t')$ finito [1]. Resta così provato la nostra asserzione e cioè si può applicare la (54) per qualunque t' che rende $V(a, t')$ finito.

Ora nella nostra nota del 1932 avremo trovato la formula (scambiando in essa t_1 con t')

$$\log \frac{J}{J_0} = \frac{\pi\, |\omega'|_{\max}}{\omega^2_{\min}} + \left(\pi + \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{|\omega'_{\max}|^2}{\omega^4_{\min}}\, \omega_{\max} t' + \frac{\pi}{2}\frac{\omega''_{\max}}{\omega^3_{\min}}\, \omega_{\max} t' \tag{55}$$

dove il simbolo max o min posto al fianco di una espressione indica il valore massimo o minimo di quella espressione in valore assoluto.

Per fare un raffronto fra il secondo membro di (55) e quello di (54) è bene modificare la (5') per avere termini fra loro confrontabili sebbene sia probabile che la (54) dia sempre resultati migliori della (55). Per fare questo

[1] Più precisamente fissato un $I(t')$ finito sceglieremo η superiore a $I(t')$. Con ciò resta provato che t' e in (O, h).

confronto basta dunque mettere in luogo del termine $\Delta a'' V(a, t)$ il termine $\frac{a''_{\max}(t_{r+1} - t_r)}{2}$ come si è già indicato nel paragrafo 4. Di più si ha:

$$\Delta_m a < a'_{\max}(t_{r+1} - t_r)_{\max} = \pi \frac{\omega'_{\max}}{\omega^2_{\min}} \qquad \frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} > 1, \tag{56}$$

$$V(a, t') = \int_0^{t'} \left| \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega} \right| d\omega \leq \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|_{\max} t' \leq \frac{\omega'_{\max}}{\omega_{\min}} t'$$

$$\frac{a''_{\max}(t_{r+1} - t_r)_{\max} t'}{2} \leq \frac{\pi}{2} \frac{\omega''_{\max}}{\omega^2_{\min}} t' + \frac{\pi}{2} \frac{\omega'^2_{\max}}{\omega^3_{\min}} t'. \tag{57}$$

Ponendo poi sin da principio in luogo di $|a'|$ il suo valore massimo $a'_{\max}$ la Z diventa $\frac{\pi}{3} e^{\Delta_m a} + \frac{1}{2}$. Essendo poi di solito $\Delta_m a$ molto piccolo si può ammettere $\frac{\pi^2}{3} e^{\Delta_m a} + \pi$ [1] sia poco diverso da $\frac{\pi^2}{3} + \pi$.

Ora un semplice raffronto fra la (54) e (55) tenendo conto delle (56) e (57) ci fa vedere che le formule ora ottenute danno in generale limitazioni più basse di quelle di noi trovate qualche anno fa.

6. **Applicazione al problema delle masse variabili.** — In base alle formule sovrascritte potremo calcolare con molta facilità un limite superiore per le variazioni dell'eccentricità dell'orbita osculatrice nel problema dei due corpi di massa variabile. Otteremo delle limitazioni non molto diverse da quelle trovate per il caso delle masse decrescenti nella nostra nota del 1934 già citata, ma le troveremo molto più rapidamente e valide qualunque sia il modo di variazione della massa.

In base al resultato delle nostre note [2] il problema dei due corpi di massa variabile si riconduce al seguente sistema Hamiltoniano in cui c è la costante delle aree B il prodotto della massa totale per la costante di gravitazione K:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{B}{r^2} + \frac{c^2}{r^3}, \quad \frac{dr}{dt} = p, \quad \mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \frac{2B}{r} + \frac{c^2}{2r^2}. \tag{58}$$

Ora è notissimo che per qualunque valore di B positivo esiste un campo C in cui le soluzioni del sistema (58) sono periodiche. Perciò in questo campo si potrà costruire la J e la corrispondente eccentricità ε che vale

(1) Se a è crescente allora per l'osservazione di pag. 15 si può porre in questa formula $\Delta_m a = 0$.

(2) Vedi in particolare la citata nota dell'« Accademia di Torino ».

$\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 c^2}{J^2}}$. È poi noto che le (58) hanno soluzioni periodiche fino a quando ε è inferiore a 1 e positivo, perciò i valori J_1, J_2 saranno i valori $4\pi c$ e ∞ corrispondenti a $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$.

Perciò fino a che le p e q restano nella C ossia fino a che ε resta compreso fra 0 e 1 si può trasformare le equazioni (58) in altre contenenti la J e la sua variabile coniugata w e in base all'osservazione contenuta alla fine del paragrafo secondo possiamo ricondurci a equazioni che hanno per incognite ε e w. Queste equazioni già ottenute in altre note sono della forma:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -a' \frac{(1-\varepsilon^2)\cos u}{1-\varepsilon\cos u}, \tag{59}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^{2a}(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi c^3} + \frac{a'}{2\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} u}{\varepsilon} + \frac{(1-\varepsilon^2)\operatorname{sen} u \cos u}{1-\varepsilon\cos u}\right).$$

In cui $a = \log B$, u è una grandezza definita dalla equazione di KEPLERO

$$2\pi w = u - \varepsilon \operatorname{sen} u. \tag{60}$$

Evidentemente nel caso delle masse costanti u è l'anomalia eccentrica e w l'anomalia media. Le (59), (60) valgono dunque per $0 < \varepsilon < 1$.

Noi dovremo supporre naturalmente le condizioni iniziali tali che ε_0 resulti compreso fra 0 e 1.

Dalle formule sovra scritte è poi facile vedere che $H = -\frac{2\pi B^2}{J^2}$ e quindi $\frac{\partial\omega}{\partial J} > 0$ e che J_a e w_a soddisfano alle condizioni poste per esse. Noi porremo poi sempre $\eta < 1 - \varepsilon_0$, $\eta < \varepsilon_0$ in modo che l'intervallo $(0, h')$ in cui $\varepsilon_0 + \eta < \varepsilon_2$, $\varepsilon_0 - \eta > \varepsilon_1$ coincida con l'intervallo $(0, \infty)$.

Posto ciò passiamo al calcolo di $I(t')$. Abbiamo intanto i seguenti limiti superiori per (¹) M_a, R, S, P, validi per qualunque w e t e per ε compreso fra $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0 + \eta$, $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 - \eta$ (²):

$$M_a = (1 + \varepsilon_{\max}), \quad R = \left\{\frac{\partial J_a}{\partial \varepsilon}\right\} = \left\{\frac{+2\varepsilon\cos u}{1-\varepsilon\cos u} - \frac{(1-\varepsilon^2)\cos^2 u}{(1-\varepsilon\cos u)^2} + \frac{\partial J_a}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right\}$$

$$= \left\{\frac{2\varepsilon\cos u}{1-\varepsilon\cos u} - \frac{(1-\varepsilon^2)\cos^2 u}{(1-\varepsilon\cos u)^2} + \left(\frac{(1-\varepsilon^2)\operatorname{sen} u}{1-\varepsilon\cos u} + \frac{(1-\varepsilon^2)\varepsilon\operatorname{sen} u\cos u}{(1-\varepsilon\cos u)^2}\right)\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right\}.$$

(¹) Qui intendiamo per J_a e w_a i termini che moltiplicano a' nelle (59). Naturalmente anche le J_a e w_a soddisferebbero a quelle condizioni.

(²) La parentisi graffa attorno ad alcuni termini significa che questi termini sono calcolati in modulo per un valore di $a(t)$ e uno di $\varepsilon(t)$ con t intermedio fra (t_r, t_{r+1}) in modo da soddisfare a quelle condizioni per cui si introducono nelle nostre formule.

Ma è:

$$2\pi w = u - \varepsilon \operatorname{sen} u.$$

Quindi derivando rispetto a ε

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

Perciò si ha:

$$R = \left\{ \frac{2\varepsilon \cos u}{1 - \varepsilon \cos u} - \frac{(1-\varepsilon^2)\cos^2 u}{(1-\varepsilon\cos u)^2} + \frac{(1-\varepsilon^2)\operatorname{sen}^2 u}{(1-\varepsilon\cos u)^3} \right\} \leq \frac{1 + 3\varepsilon_{\max}}{1 - \varepsilon_{\max}} + \frac{1+\varepsilon_{\max}}{(1-\varepsilon_{\max})^2}.$$

Si ha poi:

$$S = \left\{ \frac{\partial J_a}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} \right\} = \left\{ \frac{(1-\varepsilon^2)\operatorname{sen}^2 u}{(1-\varepsilon\cos u)^3} \cdot 2\pi \right\} \leq \frac{2\pi(1+\varepsilon_{\max})}{(1-\varepsilon_{\max})^2}$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{\operatorname{sen} u}{\varepsilon} + \frac{(1-\varepsilon^2)\operatorname{sen} u \cos u}{1 - \varepsilon\cos u} \right\} \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\min}} + 1 + \varepsilon_{\max} \right)$$

$$P = 0.$$

Passiamo ora al calcolo di $H(t_{r+1} - t_r)$ e $K_a(t_{r+1} - t_r)$. Essendo ω del tipo $f(\varepsilon)e^{ha}$ con $f(\varepsilon) = \frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi c^3}$ e $h = 2$ si ha dalla (41), dopo semplici considerazioni:

$$H(t_{r+1} - t_r) \leq \left(\frac{+3\varepsilon_{\max} e^{2\Delta_m a}}{(1-\varepsilon^2_{\max})} + \frac{3(1-2\varepsilon^2_{\min})(1+\varepsilon_{\max})}{(1-\varepsilon^2_{\max})^2}\,\Delta_m a e^{2\Delta_m a} \right)$$

e dalla (42)

$$K_a(t_{r+1} - t_r) = \left(2e^{2\Delta_m a} + \frac{6\varepsilon_{\max}(1+\varepsilon_{\max})(1-\varepsilon^2_{\min})^{\frac{1}{2}}}{(1-\varepsilon^2_{\max})^{\frac{3}{2}}}\,\Delta_m a e^{2\Delta_m a} \right).$$

Si ha allora:

$$Z = \frac{1}{2}\left\{ \frac{(1+3\varepsilon_{\max})(1+\varepsilon_{\max})}{1-\varepsilon_{\max}} + \frac{(1+\varepsilon_{\max})^2}{(1-\varepsilon_{\max})^2} \right\} + \tag{61}$$

$$+ \frac{2\pi \cdot 3\varepsilon_{\max}}{(1-\varepsilon_{\max})^2}\frac{(1+\varepsilon_{\max})^2}{(1-\varepsilon^2_{\max})} e^{2\Delta_m a} + 2\pi\frac{2(1+\varepsilon_{\max})}{(1-\varepsilon_{\max})^2} e^{2\Delta_m a}$$

$$\frac{(1+\varepsilon_{\max})}{(1-\varepsilon_{\max})^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_{\min}} + (1+\varepsilon_{\max}) \right) +$$

$$+ \frac{2\pi(1+\varepsilon_{\max})}{(1-\varepsilon_{\max})^2}\,\Delta_m a e^{2\Delta_m a}\left\{ \frac{3(1-2\varepsilon^2_{\min})(1+\varepsilon_{\max})^2}{(1-\varepsilon^2_{\max})^2} + \frac{6\varepsilon_{\max}(1+\varepsilon_{\max})(1-\varepsilon^2_{\min})^{\frac{1}{2}}}{(1-\varepsilon^2_{\max})^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Ora è da notare che a una formula non molto diversa siamo giunti nel nostro lavoro citato a pag. 2 e precisamente questa Z (supponendo nullo $\Delta_m a$) a un valore minore della θ che in tali note abbiamo calcolato. Anzi essendo

$\Delta_m a$ nelle applicazioni sempre molto piccolo possiamo ritenere la θ sempre superiore a Z perciò faremo le deduzioni seguenti in base ai valori numerici di θ che abbiamo già calcolato in altra occasione.

Abbiamo dunque applicando la (32)

$$|\varepsilon - \varepsilon_0| \leq \theta V(a, t')\Delta_m a + (1 + \varepsilon_{\max})\Delta_m a' V(a, t') + (1 + \varepsilon_{\max})\Delta_m a \tag{62}$$

e otteniamo così una formula analoga a quella trovata nelle nostre note precedenti ma valida per qualunque modo di variazione della massa. E questa formula si può applicare per tutto l'intervallo $(0, h)$ in cui la $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ resta inferiore a η. Anzi da essa è facile dedurre un limite inferiore per la variazione di massa necessaria affinchè $|\varepsilon - \varepsilon_0|$ raggiunga il valore prefissato η. Difatti si ha che quel valore di t' che rende il secondo membro di (62) uguale a η è certamente inferiore o al più uguale al valore h in cui $\varepsilon - \varepsilon_0$ può valere η. Siccome $V(a, t')$ è crescente se ne deduce che il valore di $V(a, t')$ che soddisfa il secondo membro di (62) eguagliato a η dà il cercato limite inferiore. Supponendo ora la massa $m(t)$ sempre crescente o decrescente, si ha $V(a, t') = \left|\log \frac{m(t')}{m_0}\right|$ (essendo m_0 la somma delle masse dei due corpi per $t = 0$) e perciò:

$$\left|\log \frac{m(t')}{m_0}\right| = \frac{\eta - (1 + \varepsilon_{\max})\Delta_m a}{\theta\Delta_m a + (1 + \varepsilon_{\max})\Delta_m a'} \text{ (1)}. \tag{63}$$

Vediamo ora di applicare queste formule al caso delle stelle doppie in cui la massa diminuisce per irraggiamento, caso già da noi studiato nelle note citate. In esse supponendo $\eta = \frac{1}{100}$ si è trovato θ inferiore a 200. Ovviamente poi $1 + \varepsilon_{\max} < 2$. Resta da conoscere il valore di $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$. Ora per il sistema Terra-Sole all'epoca presente questo numero secondo il JEANS sarebbe dell'ordine di 10^{-13}. In altre epoche questo numero poteva essere diverso perchè tale era la massa del sole. Però si può pensare che non sia variato di molto al trascorrere del tempo perchè se è ovvio che più grande è la massa più grande è l'energia irradiata, questo effetto può essere, almeno in parte, compensato dal fatto che più grande è la massa più breve resulta di solito il periodo. Comunque poichè le stelle doppie hanno masse e periodi diversi dal sistema sole-terra noi faremo i nostri calcoli per diversi valori di $\Delta_m a$.

Quanto a $\Delta_m a'$ i dati sono molto più incerti, noi faremo per ciò l'ipotesi

(1) S'intende che η si suppone superiore a $(1 + \varepsilon_{\max})\Delta_m a'$

(in qualche caso particolare verificata ([1])) che esso sia dell'ordine di grandezza di $\Delta_m a$. Allora avremo dalla (63) ponendo per semplificare i calcoli e per stare più al sicuro $\Delta_m a' = 100\,\Delta_m a$

$$\left|\log\frac{m(t')}{m_0}\right| = \frac{\frac{1}{100} - 2\Delta_m a}{400\,\Delta_m a}$$

e ponendo $\Delta_m a = 10^{-n}$ e ricordando che in quesio caso la massa è decrescente

$$\frac{m_0}{m(t')} = e^{0,25(10^{-2}-2.10^{-n})10^{n-2}}. \tag{64}$$

Si vede subito da questa formula che $n = 13$ si ha sensibilmente $\frac{m_0}{m(t)} = e^{2,5.10^8}$ cioè per avere variazioni di ε di un centesimo la massa dovrebbe subire una enorme diminuzione. Dalla (64) si vede subito che il valore $\frac{m_0}{m}$ pur diminuendo m rimane enorme fino a che $n \geq 6$. Esso può diventare possibile solo per valori di n minori di 6. Si può perciò concludere che per avere variazione anche piccolissime di eccentricità occorre invocare nelle stelle doppie enormi variazioni di masse, o valori per le variazioni relative di massa in un periodo troppo diversi da quelli comunemente ammessi.

Agli stessi resultati eravamo giunti in altre note considerando però particolari leggi di variazioni delle masse. Qui i resultati sono ottenuti in modo molto più generale, e con calcoli più facili. Vi è però l'ipotesi di $\Delta a'$ dell'ordine di Δa ipotesi che non sappiamo controllare in generale essendo del resto tale controllo di competenza degli astronomi. Comunque ci sembra di aver trovato delle formule per lo studio delle variazioni di eccentricità al variare della massa ancora più semplici di quelle da noi date nelle altre note.

Vogliamo da ultimo osservare che $V(a, t) = \log\frac{m_0}{m(t)}$ se la massa è de-

---

([1]) Si noti che nel caso della legge del JEANS, (*Astronomy and Cosmogony*, pag. 130-131) si ha $\frac{dB}{dt} = -\alpha B^3$ con α costante e la nostra ipotesi su $\Delta a'$ risulta verificata. Difatti $\frac{da}{dt} = -\alpha e^{2a}$, $\Delta a = \alpha\int_{t_r}^{t_{r+1}} e^{2a}dt$, $\Delta a' = 2\alpha\int_{t_r}^{t_{r+1}} e^{4a-2a}dt$ dove $\bar{a}$ è un valore di t intermedio fra t_r e t_{r+1}. Siccome a varia in t_r, t_{r+1} di quantità trascurabili si può suporre $e^{2(a-\bar{a})} = 1$ e perciò resulta subito $\Delta a' = 2\Delta a$ cioè Δa e $\Delta a'$ sono dello stesso ordine di grandezza. Si noti che il ragionamento vale ponendo in luogo dell'esponente 3 qualunque esponente e perciò è applicabile anche per la legge proposta dall'ARMELLINI (« Rendiconti Lincei » II sem., 1932).

crescente, tende all'infinito per $t \to \infty$ se $m(t)$ per $t \to \infty$ tende allo zero. In questo caso le formule ora sviluppate non ci permettono di affermare che $|\varepsilon - \varepsilon_1|$ resta sempre limitato perchè il secondo membro di (62) tende all'infinito. Ciò è conforme del resto a resultati dell'ARMELLINI [1] che ha mostrato la ε tendere per $t \to \infty$ all'infinito qualora $m(t)$ tenda allo zero (sempre per $t \to \infty$) d'ordine sufficientemente grande. Quindi nel caso ora ricordato i nostri metodi non ci permettono di prevedere valori assintotici per ε al tendere di t all'infinito.

Però se $m(t)$ per $t \to \infty$ non tende allo zero, allora se $a(t)$ è tale che $V(a, t)$ resti sempre finita (come accade spesso in questioni che si presentano nella pratica) le nostre formule conservano sempre valori finiti e da esse si potrà, almeno in qualche occasione, prevedere l'andamento assintotico di ε. Ritroviamo così in un caso particolare quanto si è affermato in generale e cioè che le formule sviluppate in questo lavoro, permettono a differenza di quelle usate nelle nostre note precedenti, di studiare variazioni di grandezze per intervalli di lunghezza infinita.

CAPITOLO II.

7. Considerazioni generali sull'integrazione approssimata di equazioni differenziali col metodo degli invarianti adiabatici.

— Nella nostra nota del 1932 già citata abbiamo integrato approssimativamente, usando il concetto d'invariante adiabatico, l'equazione del moto armonico con forza variabile col tempo, determinando anche un limite superiore per l'errore che si commette sostituendo quella soluzione approssimata alla soluzione esatta.

Si presenta perciò spontanea l'idea di estendere tale metodo d'integrazione approssimata a qualunque sistema meccanico con un grado di libertà del tipo ora considerato con un solo parametro a variabile.

Questa estensione non ci è riuscita, anzi non la riteniamo possibile. Per giustificare questa asserzione crediamo opportuno ripetere la dimostrazione più naturale per il calcolo della soluzione approssimata e del limite superiore per l'errore commesso sostituendo la soluzione approssimata a quella esatta, e vedremo che detto limite superiore non resta affatto piccolo in tutto l'intervallo in cui J si può ritenere costante come avviene nel caso sovra ricordato del moto armonico.

---

[1] « Rendiconti Accademia dei Lincei », II sem., 1932.

Si consideri perciò il nostro sistema (5) in cui si porrà $b' = 0$ essendo ora soltanto a variabile. Avremo allora:

$$(65) \qquad \begin{cases} \dfrac{dJ}{dt} = -a'J_a \\ \dfrac{dw}{dt} = \omega + a'w_a \end{cases}$$

e integrando da $(0, a\ t')$ queste equazioni abbiamo:

$$(66) \qquad J = J_0 - \int_0^{t'} a'J_a dt$$

$$(67) \qquad w = w_0 + \int_0^{t'} \omega dt + \int_0^{t'} a'w_a dt.$$

Ora si è visto che l'integrale a secondo membro di (66) un certo intervallo $(0, t')$ equivale ad una quantità finita moltiplicata per $\Delta_m a$ o $\Delta_m a'$. Perciò se $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$ sono abbastanza piccole si può ritenere in $(0, t')$, $J = J_0$

Passiamo alla (67). Per l'ultimo integrale che in essa vi figura si potrebbero applicare i metodi già usati per l'integrale a secondo membro di (18) metodi però che sarebbero validi nel caso in cui fosse $\int_w^{w+1} w_a dt = 0$ essendo l'integrazione fatta supponendo a e J costanti. Questa ipotesi non è necessariamente sempre verificata nella pratica ma essa può presentarsi in vari casi particolari per esempio nel problema dei due corpi di massa variabile. Allora ammessa tale ipotesi l'ultimo integrale a secondo membro di (67) resulta dell'ordine di $\Delta_m a$ o $\Delta_m a'$ e quindi trascurabile se tali sono $\Delta_m a$, $\Delta_m a'$. Ma a secondo membro di (65) si presenta l'integrale di ω il quale non si può calcolare in modo esatto perchè ω è in generale funzione di J e si sa soltanto che la J vale approssimativamente J_0 nell'intervallo $(0, t')$.

A prima vista si potrebbe pensare che il sostituire nella espressione di ω in luogo di J, J_0 (ottenendo così una soluzione approssimata di (65)) conduca ad errori piccoli, ma calcolando per la via più naturale il limite superiore dell'errore commesso sostituendo nella (65) J_0 a J esso non risulta dell'ordine di $\Delta_m a$. Infatti indicato con $\omega(J, a)$, $\omega(J_0, a)$ rispettivamente il valore vero di ω e quello che si ottiene quando in luogo di J si pone J_0 l'errore μ che si commette sostituendo nell'integrale di ω, J_0 in luogo di J sarebbe

$$(68) \qquad \mu = \left| \int_0^t (\omega(J, a) - \omega(J_0, a)) dt \right|.$$

Per trovare un limite superiore di questo errore, si potrebbe procedere così ricordando che $|\omega(J, a) - \omega(J_0, a)| \leq H|J - J_0|$ (¹)

$$(69)\quad \mu \leq \int_0^{t'} H|J - J_0|\,dt \leq H\Big(Z\int_0^{t'} \Delta_m a V(a, t)dt + \int_0^{t'} M_a \Delta_m a' V(a, t)dt + \int_0^{t'} M_a \Delta_m a dt\Big).$$

Il limite superiore per μ che ora si calcola non è dell'ordine di $\Delta_m a$. Per semplificare la dimostrazione supponiamo a variabile in modo lineare cioè $\Delta a' = 0$, $\Delta_m a = \dfrac{a'}{\omega_{\min}}$, $V(a, t) = a't$. Si ha allora:

$$(70)\qquad \mu \leq \frac{HZ}{\omega_{\min}} \int_0^{t'} a'^2 t dt + H\int_0^{t'} \frac{M_a}{\omega_{\min}} a' dt = \frac{HZ}{2\omega_{\min}} (a't')^2 + \frac{HM_a}{\omega_{\min}} a't'$$

e siccome all'ultimo membro di (70) non compare, $\Delta_m a$ ma $(a't')^2$ ossia $(V(a, t'))^2$ quantità questa che si suppone finita (²) e perciò il limite superiore ora calcolato non è affatto trascurabile. Per questa ragione risulta dubbia e forse non lecita la sostituzione della J_0 a J nella (67).

Si obietterà che un limite superiore dell'errore commesso calcolato per altra via potrebbe resultare dell'ordine di $\Delta_m a$. Non mi è riuscito di dimostrare che questo fatto sia, almeno in generale, da escludersi, e del resto una dimostrazione del genere non avrebbe un eccessivo interesse. Vogliamo però notare che le considerazioni sopra riportate per il calcolo del limite superiore per μ si possono facilmente ripetere soltanto supponendo $|J - J_0|$ dell'ordine di $\Delta_m a V(a, t')$ e $\dfrac{\partial\omega}{\partial J}$ sempre dello stesso segno per t in $(0, t')$ e J compreso fra $J_0 - \eta$, $J_0 + \eta$ e si troverebbe che μ è dell'ordine di $(V(a, t'))^2$. Ciò ci fa appunto ritenere che la soluzione approssimata ora costruita non sia valida in tutto l'intervallo $(0, t')$ in cui J si può ritenere uguale a J_0.

Nel caso del moto armonico tale difficoltà non si presenta, perchè ω non dipende da J e perciò nel secondo integrale di (67) non è necessario sostituire J a J_0.

(¹) La H si suppone relativo a tutto l'intervallo $(0, t')$, ossia ora H è il valore massimo di $\dfrac{\partial\omega}{\partial J}$ per J compreso fra $J_0 - \eta$, $J_0 + \eta$ e t in $(0, t')$.

(²) A rigore in questa equazione compare anche un termine in $a't'$. Ma come vedremo questo termine si può fare almeno in qualche caso scomparire. Resta però il fatto che μ è inferiore solo a un termine in $V(a, t')$.

8. **Integrazione approssimata di equazioni differenziali col metodo degli invarianti adiabatici.** — Nonostante le affermazioni di carattere negativo del numero precedente dalle formule (66), (67) si può ancora ottenere una integrazione approssimata delle (65) purchè si limiti convenientemente l'intervallo $(0, t')$ in cui l'integrazione approssimata sia sostituibile a quella esatta, e si ammetta qualche altra ipotesi spesso verificata in pratica.

Noi supporremo anzitutto che $\frac{\partial V}{\partial a}$ e quindi w_a siano funzioni periodiche di w a valore medio nullo nell'intervallo w, $w+1$ e ciò per qualunque w, per qualunque J compreso fra $J_0+\eta$, $J_0-\eta$ e per qualunque $a(t)$. S'intende che il valor medio di $\frac{\partial V}{\partial a}$ si suppone calcolato supponendo J e a costante e solo variabile w.

In secondo luogo ammetteremo che nell'intervallo [1] $\left(0, \frac{1}{\omega(J(0),\ a(0))}\right)$ esista un valore t_0 di t tale che in esso sia $\frac{\partial V}{\partial a}(J(t_0), a(t_0), w(t_0)) = 0$. Questa ipotesi può ritenersi verificata in pratica per le seguenti ragioni. Si consideri la funzione $\frac{\partial V'}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial a}(J(0), a(0), w(0)+\omega(0)t)$ questa funzione essendo in $\left(0, \frac{1}{\omega(0)}\right)$ periodica a valor medio nullo assumerà in questo intervallo valori in parte positivi ed in parte negativi. Perciò se per fissare le idee la $\frac{\partial V'}{\partial a}$ è in $t=0$ positiva esisterà certamente un punto $\bar{t}$ dell'intervallo $\left(0, \frac{1}{\omega(0)}\right)$ in cui questa funzione è negativa. Ora poichè, come si è già visto varie volte e avremo occasione di ricordare più innanzi, la differenza fra $J(t)-J(0)$, $a(t)-a(0)$, $w(t)-\left(w(0)+\frac{t}{\omega(0)}\right)$ è in tutto $\left(0, \frac{1}{\omega(0)}\right)$ dell'ordine di $\Delta_m a$ in pratica molto piccolo possiamo ritenere per continuità in $\bar{t}$ $\frac{\partial V}{\partial a}$ negativa e perciò esisterà in $(0, \bar{t})$ ossia in $0, \frac{1}{\omega(0)}$ un valore t_0 per cui $\frac{\partial V}{\partial a}$ è nulla. Del resto con le considerazioni che precedono è facile verificare l'esistenza di t_0.

Ciò posto torniamo alle nostre formule è osserviamo che si avrebbe:

$$w = w(0) + \int_0^{t'} \omega(J, a)dt + \int_0^{t'} a' w_a dt. \tag{71}$$

[1] Per brevità l'estremo superiore di questo intervallo verrà indicato con $\frac{1}{\omega(0)}$.

Noi prenderemo come valore approssimato di w l'espressione $\bar{w}$ tale che (¹):

$$\bar{w} = w(0) + \int_0^{t'} \omega(J(t_0), a)dt + \int_0^{t'} a' w_a dt. \tag{72}$$

Sottraendo membro a membro la (71) dalla (72) si ha:

$$|w - \bar{w}| \leq \left| \int_0^{t'} \omega(J, a)dt - \omega(J(t_0), a)dt \right| + \left| \int_0^{t'} a' w_a dt \right|. \tag{73}$$

Quindi trovando un limite superiore del secondo membro di questa equazione ne segue subito un limite superiore per il primo. Ora ricordando la proprietà di w_a e ripetendo gli stessi calcoli fatti per il calcolo del limite

---

(¹) Si noti che si ammette di conoscere $J(t_0)$ invece di J_0. E possibile però calcolare un valore approssimato di $J(t_0)$, $J_1(t_0)$ tale che la sua introduzione in (72) porti ad un errore dell'ordine di $\Delta_m a \cdot a'_{\max} t'$ per le nostre approssimazione trascurabile. Noi porremo:

$$J_1(t_0) = J_0 - \int_0^{t_0} a' J_a' dt. \tag{α}$$

Essendo J_a', analogamente al capitolo primo J_a, calcolata per $J = J_0$, $a = a(0)$, $\omega = \omega(0) + \frac{t}{\omega(0)}$. Allora integrando la (12) sottraendovi la (α) e ragionando nel modo con cui si è giunti alla (24) si ha:

$$| J(t_0) - J_1(t_0) | \leq Z(\Delta_m a)^2 \leq \frac{Z}{\omega_{\min}} \Delta_m a \cdot a'.$$

Quindi:

$$\left| \int_0^{t'} (\omega(J(t_0), a) - \omega(J_1(t_0), a))dt \right| \leq \frac{ZH}{\omega_{\min}} \Delta_m a \cdot a'_{\max} t'$$

come dovevasi dimostrare.

Naturalmente si ammette nota anche t_0. Questo valore si potrebbe calcolare approssimativamente nel seguente modo. Si indichi con $\left(\frac{\partial V'}{\partial a}\right)$ la $\frac{\partial V}{\partial a}(J_0, a(0), \omega(0)t)$, questa differisce come si è detto da $\frac{\partial V}{\partial a}$ di un termine dell'ordine di Δa, termine il cui massimo indicheremo con $P\Delta_m a$ essendo P un numero facilmente calcolabile. Allora t_0 sarà compreso fra quel valore t' in cui $\frac{\partial V'}{\partial a} - P\Delta_m a > 0$ e quel valore t'' in cui $\frac{\partial V}{\partial a} + P\Delta_m a < 0$. Ammetteremo l'esistenza di t', t'' e che $t'' - t'$ sia dell'ordine di $\Delta_m a$. Allora ragionando come precede è facile provare che se si prende come valore approssimato di t_0 un qualunque valore fra t' e t'' si commette ancora un errore dell'ordine di $\Delta_m a \cdot a'_{\max} t'$ cioè un errore trascurabile. Si potrebbe cercare anche un metodo di approssimazioni successive per il calcolo di t_0 che evitasse le ipotesi fatte in questa nota, ma non ne vale la pena giacchè questa ipotesi sono assai spesso verificate in pratica e del resto in pratica $J(t_0)$ e t_0 si ha nei dati del problema stesso.

superiore per $|J - J_0|$ si può dire che è:

$$(74)\qquad \left|\int_0^{t'} a' w_a dt\right| = (\bar{Z}\Delta_m a + A\Delta_m a')V(a, t') + A\Delta_m a$$

essendo la $\bar{Z}$ costruita in modo analogo alla Z che appare nel limite superiore di $|J - J_0|$. Resta da trovare un limite superiore per il primo termine a secondo membro di (73).

A questo scopo si osservi che è valida la relazione:

$$(75)\qquad \left|\int_0^{t'} \omega(J, a) - \int_0^{t'} \omega(J(t_0), a)dt\right| \leq \left|\int_0^{t_0} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a))dt\right| + \left|\int_{t_0}^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a))dt\right|.$$

Ora è:

$$(76)\qquad \left|\int_0^{t_0} \omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)dt\right| \leq H\int_0^{t_0} |J - J(t_0)|\, dt \leq \frac{MH\Delta_m a}{\omega(0)} \text{ [1]}.$$

Molto più difficile è il calcolo di un valore maggiorante per l'ultimo integrale a secondo membro di (75). A questo scopo dividiamo l'intervallo (t_0, t') in n parti con i punti $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{n-1}$ punti tali che:

$$(77)\qquad \tau_1 = t_0 + \frac{1}{\omega(J(t_0), a(t_0))} \qquad \tau_{r+1} = \tau_r + \frac{1}{\omega(J(\tau_r), a(\tau_r))}.$$

Potremo perciò scrivere:

$$(78)\qquad \left|\int_{t_0}^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a))dt\right| \leq \left|\int_{t_0}^{\tau_1} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a))dt\right| +$$
$$+ \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a))dt\right| \dots \left|\int_{t_{n-1}}^{t} (\omega(J, a) - \omega(J(t_0), a))dt\right|.$$

Consideriamo ora l'integrale generico:

$$(79)\qquad \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)dt\right| \leq \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J, a) - \omega(J(\tau_r), a))dt\right| +$$
$$+ \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\omega(J(\tau_r), a) - \omega(J(t_0), a))dt\right|.$$

[1] La relazione $|J(t_0) - J| \leq \frac{M\Delta_m a}{\omega(0)}$ valida per t in $(0, t_0)$ si ottiene subito dalla prima di (65) dopo averla integrata da t a t_0.

Rifacendo lo stesso calcolo già fatto a proposito della espressione per il limite superiore di $J(t_r) - J_0$

$$(80) \qquad | J(\tau_r) - J(t_0) | \leq (Z\Delta_m a + M\Delta_m a') V(a, \tau_r) \text{ [1]}$$

$$| J(\tau_r) - J(t_0) | \leq \frac{Z}{\omega_{\min}} a'^2_{\max}\tau_r + \frac{M}{2}\frac{a''_{\max}}{\omega_{\min}}\tau_r$$

con il noto significato per $a'_{\max}$, $a''_{\max}$.

Perciò si ha subito ricordando $t' > \tau_r$

$$(81) \qquad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \omega(J(\tau_r), a) - \omega(J(t_0), a) dt \right| \leq H \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} | J(\tau_r) - J_0 | \, dt \leq$$

$$\leq H \left(\frac{Za'^2_{\max}}{\omega_{\min}} + \frac{M}{2}\frac{a''_{\max}}{\omega_{\min}} \right) t'(\tau_{r+1} - \tau_r).$$

Quanto all'altro termine a secondo membro di (79) sono necessarie varie osservazioni. Anzitutto si noti che si ha:

$$(82) \qquad \omega(J, a) = \omega(J(\tau_r), a(\tau_r)) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial J}\right)_{\tau_r} (J(t) - J(\tau_r)) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial J}\right)_{\tau_r} (a(t) - a(\tau_r)) +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial^2\omega}{\partial J^2} \right\} (J(t) - J(\tau_r))^2 + 2 \left\{ \frac{\partial^2\omega}{\partial J \partial a} \right\} (J(t) - J(\tau_r))(a(t) - a(\tau_r)) + \left\{ \frac{\partial^2\omega}{\partial a^2} \right\} (a(t) - a(\tau_r))^2.$$

Dove $\left(\frac{\partial\omega}{\partial J}\right)_{\tau_r}$, $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a}\right)_{\tau_r}$ significa il valore di queste derivate calcolate per $J = J(\tau_r)$, $a = a(\tau_r)$ mentre le derivate entro parentesi graffa significano valori di queste derivate per valori di $J(\tau)$ e $a(\tau)$ per τ in τ_r, τ_{r+1}.

Con analogo significato dei simboli si ha:

$$(83) \qquad \omega(J(\tau_r), a) = \omega(J(\tau_r), a(\tau_r)) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a}\right)_{\tau_r} (a(t) - a(\tau_r)) + \left\{ \frac{\partial^2\omega}{\partial J^2} \right\}^2 (a(t) - a(\tau_r))^2.$$

Allora se col suffisso max posto vicino ad una certa grandezza intendiamo al solito il massimo in valore assoluto di questa grandezza per J compreso fra $J_0 - \eta$ e $J_0 + \eta$ e a compresa fra $(0, t')$. Abbiamo sottraendo la (83) dalla (82) e sostituendo nel secondo membro di (79):

$$(84) \qquad \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \omega(J, a) - \omega(J(\tau_r), a) dt \right| \leq \left| \left(\frac{\partial\omega}{\partial J}\right)_{\tau_r} \right| \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) dt \right| + La'^2_{\max}(\tau_{r+1} - \tau_r)^3$$

---

[1] A rigore in luogo di $V(a, \tau_r)$ si dovrebbe mettere la variazione totale di a in t_0, τ_r. Ma essendo questa variazione inferiore a $V(a, \tau_r)$ conviene mettere nella (80) la $V(a, \tau_r)$.

con

(85) $$L = \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J^2}\right\}_{\max} M_a^2 + \frac{2}{3}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial J\partial a}\right\}_{\max} M_a + \frac{2}{3}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial a^2}\right\}_{\max} \text{(1)}.$$

Calcoliamo ora un limite superiore per $\left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r))dt\right|$. Si ricordi anzitutto:

(86) $$\frac{dJ}{dt} = -a'J_a = -a'\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w}.$$

Si osservi poi che è:

(87) $$\left|\frac{\partial^2 V(J(t),\ w(t),\ a(t))}{\partial a\partial w} - \frac{\partial^2 V\left(J(\tau_r),\ w(\tau_r) + \dfrac{t-\tau_r}{\tau_{r+1}-\tau_r},\ a(\tau_r)\right)}{\partial a \partial w}\right| \leq$$
$$\leq R\,|J(t) - J(\tau_r)| + S\left|w(t) - w(\tau_r) - \frac{t-\tau_r}{\tau_{r+1}-\tau_r}\right| + P\,|a(t) - a(\tau_r)|.$$

E ricordando che $w(\tau_r) + \dfrac{t-\tau_r}{\tau_{r+1}-\tau_r}$ è analoga alla w_1 usata nel paragrafo 2 del primo capitolo si può affermare che in base alla (21) il termine che moltiplica S è inferiore a $(M_a H + K_a)(\tau_{r+1} - \tau_r) + A\int_{\tau_r}^{t} |a'|dt$.

Si ha così indicando per brevità con $\left|\dfrac{\partial V(t)}{\partial a\partial w} - \dfrac{\partial V(\tau_r)}{\partial a \partial w}\right|$ il primo membro di (87)

(88) $$\left|\frac{\partial V(t)}{\partial a\partial w} - \frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a\partial w}\right| \leq (RM_a + S(M_a H + K_a)(\tau_{r+1} - \tau_r) + SA + P)\int_{\tau_r}^{t} |a'|dt$$
$$\leq 2Za'_{\max}(t - \tau_r).$$

Quindi indicato per maggiore chiarezza $\left\{\dfrac{\partial V}{\partial a \partial w}\right\}_{\tau_r}$ e $\left\{\dfrac{\partial V}{\partial a}\right\}_{\tau_r}$ rispettivamente (2) la $\dfrac{\partial^2 V}{\partial a \partial w}$, $\dfrac{\partial V}{\partial a}$ calcolate per $J = J(\tau_r)$, $w = w(\tau_r) + \dfrac{t-\tau_r}{\tau_{r+1}-\tau_r}$, $a = a(\tau_r)$ e con a''_M un

---

(1) Ciò si ottiene ricordando che $J(t) - J(\tau_r) < M_a a'_{\max}(t - \tau_r)$, $|a(t) - a(\tau_r)| \leq a'_{\max}(t - \tau_r)$.

(2) Si noti che $\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial a \partial w}\right)_{\tau_r}$ coincide con $\dfrac{\partial V(\tau_r)}{\partial a \partial w}$ sopra considerata.

valore di a'' per t compreso fra τ_r e τ_{r+1} si ha subito dalla (86):

$$J(t) - J(\tau_r) = \int_{\tau_r}^{t} a' \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} dt = a'(\tau_r) \int_{\tau_r}^{t} \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} dt + \int_{\tau_r}^{t} a''_M (t - \tau_r) \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} dt = \tag{89}$$

$$= a'(\tau_r) \int_{\tau_r}^{t} \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} \right\}_{\tau_r} dt + g(t) = \frac{a'(\tau_r)}{\omega_r} \left[\left\{ \frac{\partial V}{\partial a} \right\} \right]_{\tau_r}^{t} + g(t)$$

dove si è indicato con $g(t)$ l'espressione:

$$g(t) = \int_{\tau_r}^{t} \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} a''_M (t - \tau_r) dt + a'(\tau_r) \int_{\tau_r}^{t} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial w} \right)_{\tau_r} \right) dt \tag{90}$$

e con ω_r la $\omega(J(\tau_r),\ a(\tau_r))$. Abbiamo subito:

$$|g(t)| \leq \frac{M_a a''_{\max} (t - \tau_r)^2}{2} + Z a'^2_{\max} (t - \tau_r)^2.$$

Si ha così:

$$\left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r))\, dt \right| \leq \left| \frac{a'(\tau_r)}{\omega_r} \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_{\tau_r} dt - \frac{a'(\tau_r)}{\omega_r^2} \right| \frac{\partial V(J(\tau_r),\ w(\tau_r),\ a(\tau_r))}{\partial a} \Bigg| + \tag{91}$$

$$+ \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} g(t) dt \right| = + \left| \frac{a'(\tau_r)}{\omega_r^2} \frac{\partial V}{\partial a} (J(\tau_r),\ w(\tau_r),\ a(\tau_r)) \right| + \left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} g(t) dt \right|.$$

Il primo termine a secondo membro si è potuto omettere in base alla relazione:

$$\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial a} \right\}_{\tau_r} dt = \frac{1}{\omega_r} \int_{w(\tau_r)}^{w(\tau_r)+1} \frac{\partial V\left(J(\tau_r),\ w(\tau_r) + \dfrac{t - \tau_r}{\tau_{r+1} - \tau_r},\ a(\tau_r) \right)}{\partial a} dw \tag{92}$$

e all'ipotesi che il valor medio di $\dfrac{\partial V}{\partial a}$ calcolato da w a $w+1$ con J e a costante è nullo.

Allora per trovare un limite superiore per $\left| \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (J(t) - J(\tau_r)) \right| dt$ rimane da trovarsi un limite superiore per $\dfrac{\partial V}{\partial a}$ calcolato per $t = \tau_r$ valore che ora indicheremo con $\dfrac{\partial V}{\partial a}(\tau_r)$.

Ora possiamo scrivere: ricordando che $\frac{\partial V}{\partial a}(t_0) = 0$

$$(93) \qquad \left|\frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a}\right| \leq \left|\frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{r-1})}{\partial a}\right| \ldots \left|\frac{\partial V(\tau_s)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{s-1})}{\partial a}\right| + \left|\frac{\partial V(\tau_1)}{\partial a} - \frac{\partial V(t_0)}{\partial a}\right|.$$

Calcoliamo ora un limite superiore per un generico dei termini che compaiono a secondo membro di (93). Si ha infatti:

$$(94) \qquad \left|\frac{\partial V(\tau_s)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{s-1})}{\partial a}\right| \leq \left|\frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_s),\ w(\tau_s),\ a(\tau_s)) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1})(w(\tau_{s-1}) + \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}),\ a(\tau_{s-1}))\right| +$$
$$+ \left|\frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}), w(\tau_{s-1}) + \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}), a(\tau_{s-1})) - \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}), w(\tau_{s-1}), a(\tau_{s-1}))\right|.$$

Ora l'ultimo termine è nullo per la periodicità di $\frac{\partial V}{\partial a}$. Quanto al primo indicato con M, A, Q rispettivamente al massimo di $\left(\frac{\partial V}{\partial a \partial w}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial J}\right)$, $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$ per t in $(0, t')$, J in $J_0 - \eta$, $J_0 + \eta$ e per qualunque w si ha:

$$(95) \qquad \left|\frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_s),\ w(\tau_s),\ a(\tau_s)) - \frac{\partial V}{\partial a}(J(\tau_{s-1}),\ w(\tau_{s-1}) + \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}),\ a(\tau_{s-1}))\right| \leq$$
$$\leq M_a \mid w(\tau_s) - w(\tau_{s-1}) - \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}) \mid + A \mid J(\tau_s) - J(\tau_{s-1}) \mid +$$
$$+ Q \mid a(\tau_s) - a(\tau_{s-1}) \mid .$$

Ora indicando con K un valore maggiorante in $(0, t')$ e $J_0 - \eta$, $J_0 + \eta$ per la grandezza finora indicato con questo simbolo e ricordando la (22)

$$(96) \qquad \begin{gathered} \mid J(\tau_s) - J(\tau_{s-1}) \mid \leq M_a a'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}) \\ \mid a(\tau_s) - a(\tau_{s-1} \mid \leq a'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}) \\ \mid w(\tau_s) - w(\tau_{s-1}) - \omega(\tau_{s-1})(\tau_s - \tau_{s-1}) \mid \leq \left(\frac{K + HM_a}{\omega_{\min}} + A\right) a'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}). \end{gathered}$$

Quindi si ha:

$$(97) \qquad \left|\frac{\partial V(\tau_s)}{\partial a} - \frac{\partial V(\tau_{s-1})}{\partial a}\right| \leq \left(M_a \frac{K + HM_a}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q\right) a'_{\max}(\tau_s - \tau_{s-1}).$$

Quindi si ha sostituendo in (94)

$$(98) \qquad \left|\frac{\partial V(\tau_r)}{\partial a}\right| \leq \left(M_a \frac{(K + HM_a)}{\omega_{\min}} + 2M_a A + Q\right) a'_{\max} t'.$$

Perciò tornando alla (91) abbiamo:

$$(99)\qquad \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}}(J(t)-J(\tau_r))dt\right| \leq \left(\frac{M_a(K+HM_a)}{\omega_{\min}}+2M_aA+Q\right)\frac{a'^2_{\max}}{\omega_{\min}}\,t'(\tau_{r+1}-\tau_r)+$$
$$+\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}}\frac{M_a a''_{\max}(t-\tau_r)^2}{2}\,dt+Za'^2_{\max}\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}}(t-\tau_r)^2dt$$

$$(100)\qquad \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}}(J(t)-J(\tau_r))dt\right| \leq \left(\frac{M_a(K+HM_a)}{\omega_{\min}}+2M_aA+Q\right)\frac{a'^2_{\max}}{\omega_{\min}}\,t'(\tau_{r+1}-\tau_r)+$$
$$+\frac{M_a a''_{\max}(\tau_{r+1}-\tau_r)^3}{6}+\frac{Za'^2_{\max}(\tau_{r+1}-\tau_r)^3}{3}\leq$$
$$\leq\left[\left(\frac{M_a(K+HM_a)}{\omega_{\min}}+2M_aA+Q+\frac{Z}{3}\right)\frac{a'^2_{\max}}{\omega_{\min}}\,t'+\frac{M_a a''_{\max}}{6\omega_{\min}}\,t'\right](\tau_{r+1}-\tau_r).$$

Quindi si ha:

$$(101)\qquad \left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}}(\omega(J,\ a)-\omega(J(t_0),\ a))\,dt\right|\leq$$
$$\leq\left(\frac{HM_a(K+HM_a)}{\omega_{\min}}+\frac{2HM_aA+HQ}{\omega_{\min}}+\frac{4}{3}\frac{ZH}{\omega_{\min}}\right)a'^2_{\max}t'(\tau_{r+1}-\tau_r)+$$
$$+\frac{L}{\omega_{\min}}\,a'^2_{\max}t'(\tau_{r+1}-\tau_r)+\frac{2}{3}M_aH\frac{a''_{\max}}{\omega_{\min}}\,t'(\tau_{r+1}-\tau_r)=$$
$$=ma'^2_{\max}t'(\tau_{r+1}-\tau_r)+na''_{\max}t'(\tau_{r+1}-\tau_r).$$

Essendo:

$$(102)\qquad m=\frac{HM_a(K+HM_a)}{\omega_{\min}}+\frac{2HM_aA+HQ}{\omega_{\min}}+\frac{4}{3}\frac{ZH}{\omega_{\min}}+\frac{L}{\omega_{\min}}$$

$$(103)\qquad n=\frac{2}{3}\frac{M_aH}{\omega_{\min}}.$$

Si ha poi:

$$(104)\qquad \left|\int_{\tau_{n-1}}^{t'}|\,\omega(J(t),\ a)-\omega(J(t_0),\ a)\,|\,dt\right|$$
$$\left|\int_{\tau_{n-1}}^{t'}|\,\omega(J,\ a)-\omega(J(\tau_{n-1}),\ a)\,|\,dt\right|+\left|\int_{\tau_{n-1}}^{t}\omega(J(\tau_{n-1}),\ a)-\omega(J(t_0),\ a)dt\right|\leq$$
$$\leq H\int_{\tau_{n-1}}^{t}|\,J(t)-J(\tau_{n-1})\,|\,dt+\frac{HZa'^2_{\max}t'}{\omega_{\min}}\int_{\tau_{n-1}}^{t'}dt+\frac{M_aH}{2}\frac{a''_{\max}t'}{\omega_{\min}}\int_{\tau_{n-1}}^{t'}dt\leq$$
$$\leq\frac{HM\Delta_m a}{\omega_{\min}}+|\,ma'^2_{\max}t'+na''_{\max}t'\,|\,(t'-\tau_{n-1}).$$

Allora sommando la (104) con le (101) e (76) si ha:

$$(105)\qquad \left|\int_0^{t'} \omega(J, a) - \omega(J(t_0), a)dt\right| \leq \frac{2HM}{\omega_{\min}} \Delta_m a + m(a'_{\max} t')^2 + n a''_{\max} t'^2.$$

e da questa formula si ottiene facilmente, aggiungendo $(\bar{Z}\Delta_m a + A\Delta_m a')V(a, t') + A\Delta_m a)$ la cercata espressione per il limite superiore dell'errore commesso nel sostituire alla soluzione esatta del sistema (65) la soluzione approssimata. Come si vede a parte il termine in $\Delta_m a$, che è di solito piccolissimo, l'errore dipende da $(a'_{\max} t')^2$ e $a''_{\max} t'^2$. Ora se la a variasse in modo lineare $a''_{\max} t'^2$ sarebbe nulla mentre $a'_{\max} t'$ sarebbe l'incremento che subisce la a nell'intervallo $(0, t')$.

Perciò in questo caso si può affermare che la nostra integrazione approssimata è valida nell'intervallo in cui si può ritenere infinitesimo il quadrato degli incrementi di a. Se invece a non varia in modo lineare non è possibile un enunciato così semplice del nostro resultato. Si può però osservare che essendo $\Delta_m a'$ molto piccolo nell'intervallo $(0, t')$ si può presumere $a''_{\max} t'^2$ dell'ordine di $(a'_{\max} t')^2$ (1), e perciò si può ancora enunciare il teorema nel modo sopra indicato.

Comunque per più esattezza la formula (105) serve in ogni caso per verificare entro quale intervallo la soluzione approssimata è sostituibile a quella esatta. Prima di lasciare la questione, vogliamo notare che, come scende anche dalla nostra dimostrazione, sarebbe stato possibile trovare un limite superiore più basso di quello calcolato, ma esso sarebbe risultato assai più incomodo nelle applicazioni. Osserviamo poi che per esprimere l'errore commesso supponiamo noto il modo di variare di a ossia di conoscere $a'_{\max}$. Ma ciò è necessario altrimenti non sarebbe possibile il calcolo di $\int_0^{t'} \omega(J(t_0), a)dt$ (2).

9. **Calcolo approssimato del numero delle oscillazioni.** — Se il metodo d'integrazione approssimata delle nostre equazioni è valido solo per un intervallo di tempo che possiamo dire ristretto, rispetto all'intervallo in cui la J si

(1) Questa presunzione si può giustificare in base al fatto che $\Delta a'$, Δa sono dello stesso ordine di grandezza e $\frac{a'}{a'_{\max}}$, $\frac{a''}{a''_{\max}}$ sono in $(0, t')$ molto vicine all'unità. Allora è facile dedurre $a''_{\max}$ dell'ordine di $a'^2_{\max}$ cioè $a''_{\max} t'^2$ dell'ordine di $(a'_{\max} t')^2$.

(2) È poi ovvio che la nostra integrazione vale per t' nell'intervallo $(0, h)$ in cui $|J - J_0| < \eta$.

può ritenere costante, è possibile però partendo dalla (67) ottenere per certe grandezze delle approssimazioni valide per tutto l'intervallo in cui ΔJ si può ritenere trascurabile.

Noi calcoleremo con approssimazione più che sufficiente per tutti i bisogni della pratica, il numero delle oscillazioni che subisce il nostro sistema, intendendo per numero delle oscillazioni il numero delle volte in cui w assume valori interi, ossia in sostanza la w stessa, ma questa volta interessa che l'errore sia piccolo rispetto alla w non come nel paragrafo precedente rispetto all'unità. Questa ricerca può avere interesse per esempio se si volesse conoscere quante volte un pianeta è passato in un certo tempo al perielio.

Come è noto la w vale:

$$w = \int_0^{t'} \omega(J, a)dt + \int_0^{t'} a' w_a dt. \tag{106}$$

Mentre il valore approssimato che noi proponiamo per il calcolo delle oscillazioni sarà

$$w' = \int_0^{t'} \omega(J_0, a)dt. \tag{107}$$

Quindi l'errore relativo commesso λ vale:

$$\lambda = \frac{\int_0^{t'} \omega(J, a) - \omega(J_0, a)dt + \int_0^{t'} a' w_a dt}{\left| \int_0^{t'} \omega(J, a)dt + \int_0^{t'} a' w_a dt \right|}. \tag{108}$$

Ossia:

$$\lambda = 1 - \frac{\int_0^{t'} \omega(J_0, a)dt}{\int_0^{t'} \omega(J_0, a)dt + \int_0^{t'} (\omega(J, a) - \omega(J_0, a))\, dt + \int_0^{t'} a' w_a dt.}. \tag{109}$$

Ora è:

$$\left| \int_0^{t} a' w_a dt \right| \lesssim (\bar{Z}\Delta_m a + A\Delta_m a') V(a, t) + A\Delta_m a. \tag{110}$$

Si ha poi applicando il teorema della media e indicando con $\bar{t}$ un valore del tempo intermedio fra $(0, t')$

$$\left|\int_0^{t'}(\omega(J,\, a)-\omega(J_0,\, a))\,dt\right| = \left|\int_0^{t'}\omega(J_0,\, a)\left(1-\frac{\omega(J,\, a)}{\omega(J_0,\, a)}\right)dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^{t'}\omega(J_0,\, a)\,dt\right|\left|\frac{\omega(J(\bar t),\, a(\bar t))-\omega(J_0,\, a(\bar t))}{\omega(J_0,\, a(\bar t))}\right| \leq \left|\int_0^{t'}\omega(J_0,\, a)dt\right|\frac{H}{\omega_{\min}}\,|J(\bar t)-J_0| \leq$$

$$\leq \int_0^{t'}\omega(J_0,\, a)dt\left[\frac{H}{\omega_{\min}}\,[Z\Delta_m a + M_a\Delta_m a']\,V(a,\, t) + \frac{HM}{\omega_{\min}}\,\Delta_m a\right].$$

Ossia:

$$\lambda = 1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{H}{\omega_{\min}}(Z\Delta_m a + M_a\Delta_m a')\,V(a,\, t') + \cfrac{(\bar Z\Delta_m a + A\Delta_m a')V(a,\, t') + A\Delta_m a}{\int_0^{t'}\omega(J_0,\, a)dt} + \cfrac{HM_a\Delta_m a}{\omega_{\min}}}. \tag{111}$$

Come si vede subito con una semplice riduzione questo limite superiore per λ è dell'ordine di $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$. E perciò se queste grandezze sono molto piccole risulta subito che λ è piccolo, restando così dimostrato il nostro asserto.

CAPITOLO III.

10. **Generalità sui sistemi a due parametri variabili.** — Riprendiamo ora il caso in cui il nostro sistema meccanico abbia due parametri a e b. Supporremo che a vari al solito in maniera tale che Δa e $\Delta a'$ siano molto piccoli cioè in modo da avvicinarsi a variare in maniera infinitamente lenta e graduale, mentre sul modo di variare di b non facciamo per ora alcuna ipotesi. Allora vogliamo dimostrare che la differenza fra J e la y definita nel capitolo primo, è nulla se a varia in modo infinitamente lento e graduale ed in ogni caso è possibile dare un limite superiore per la differenza $|J-y|$ in modo da poter verificare se la y è sostituibile alla J con sufficiente approssimazione.

Perciò riprendiamo la formula (14) del capitolo primo:

$$|J-y| \leq \left|\int_0^{t'}a'J_a dt\right| + \left|\int_0^{t'}b'(J_b-\bar J_b)dt\right|. \tag{112}$$

E poichè J_b è Lipschitziana possiamo scrivere:

$$|J_b - \bar{J}_b| \leq T|J - y|. \tag{113}$$

Essendo T il massimo di $\frac{\partial J_b}{\partial J}$ per t in $(0, t')$ e J compreso fra $y_{\max} + \eta$, $y_{\min} - \eta$ e per ogni w. Naturalmente come nel capitolo primo supponiamo $(0, t')$ compreso nell'intervallo $(0, h)$ in cui $|J - y|$ è inferiore a η.

Si ha allora:

$$|J - y| \leq I(t') + T\int_0^{t'} |b'|\,|J - y|\,dt. \tag{114}$$

Dove $I(t')$ è il limite superiore già calcolato per $\left|\int_0^{t'} a'J_a dt\right|$ ossia $M_a \Delta_m a +$ $+ (Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a')V(a, t') + Z'\Delta_m a V(b, t)$.

Per trovare il limite superiore cercato si consideri la funzione soddisfacente all'equazione:

$$V = I(t') + T\int_0^{t'} |b'|\,V dt. \tag{115}$$

Noi dimostreremo anzitutto che V è maggiore di $|J - Y|$. A questo scopo si sottragga la (115) dalla (114). Si ha:

$$|J - y| - V \leq T\int_0^{t'} |b'|\,(|J - Y| - V)dt. \tag{116}$$

Ora per $t = 0$ è $J - y = 0$ mentre V vale $I(0) = M_a \Delta_m a$. Allora per $t' = 0$, $|J - y| - V < 0$ e per continuità resterà tale in un intorno $(0, \delta)$. È facile vedere che l'intorno $(0, \delta)$ coincide con $(0, t')$. Difatti se fosse $\delta < t'$ sarebbe per $t = \delta$, $|J - y| - V = 0$. Ma essendo in $(0, \delta)$, $|J - y| - V$ negativo il secondo membro sarebbe per $t = \delta$ negativo, mentre il primo sarebbe nullo il che è assurdo. Segue perciò $|J - y| < V$ in tutto $(0, t')$.

Calcoliamo ora V in base alla sua definizione (115). Derivando questa equazione si ha:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt} + T|b'|\,V = (Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a'\left|\frac{da}{dt}\right| + Z'\Delta_m a\left|\frac{db}{dt}\right| + T|b'|\,V$$

e ntegrando questa equazione differenziale si ha:

$$V = e^{T\int_0^{t'}|b'|dt} \int_0^{t'} e^{-\int_0^t T|b'|\,dt} \left[(Z\Delta'_m a + M_a \Delta_m a') \left| \frac{da}{dt} \right| + Z'\Delta_m a \left| \frac{db}{dt} \right| \right] dt + V(0) \leq$$

$$\leq e^{TV(b,t')} (\{ Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a' \} V(a, t') + Z'\Delta_m a V(b, t') + M_a \Delta_m a).$$

Quindi:

$$|J - y| \leq e^{TV(b,t')} (\{ Z\Delta_m a + M_a \Delta_m a' \} V(a, t') + \\ + Z'\Delta_m a V(b, t') + M_a \Delta_m a) = e^{TV(b,t')} I(t'). \tag{117}$$

Da questa formula è facile anzitutto verificare in quale intervallo $(0, t')$ resta sicuramente $|J - y|$ inferiore a η perchè basta verificare per le ragioni esposte nel capitolo primo se in un certo intervallo è inferiore a η il secondo membro della formula in discorso. Naturalmente si vede subito che a parità di $V(a, t')$, $V(b, t')$ questo intervallo è tanto più ampio quanto più piccolo è $\Delta_m a$ e $\Delta_m a'$ anzi se la a varia in maniera infinitamente lenta e graduale la differenza fra J e y è nulla in qualunque intervallo $(0, t')$ (1) finito o infinito in cui $V(a, t')$, $V(b, t')$ restano finite. Questo resultato si ottiene con considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo 4 del capitolo primo.

11. **Osservazioni critiche.** — Dobbiamo ora aggiungere alcune osservazioni sulla portata pratica del nostro resultato.

Si noterà anzitutto che la formula (117) è applicabile se $V(a, t')$, $V(b, t')$ sono finite. Ora affinchè $V(a, t')$ abbia un valore finito è abbastanza grande essendo $\Delta_m a$ molto piccolo, deve essere grande il numero di periodi compresi in $(0, t')$. Ma allora salvo casi speciali, dovrebbe essere Δb molto piccolo altrimenti $V(b, t')$ diventerebbe enorme e la nostra limitazione non sarebbe applicabile praticamente.

Sembrerebbe da ciò che in sostanza per applicare la (117) fosse necessario ammettere che la b vari in modo analogo alla a e che perciò il nostro resultato non avesse alcun valore perchè si riducesse al caso di un sistema in cui vi sono due parametri variabili come a. Si deve però notare che per avere $V(b, t')$ finito, si deve per quanto precede supporre in generale Δb piccolo, ma non vi è alcuna ipotesi da farsi su $\Delta b'$. Perciò si può dire che il nostro resultato vale se b varia in una maniera che si avvicina ad essere

(1) S'intende compreso in $(0, h')$.

infinitamente lenta, ma non si avvicina affatto ad essere graduale. Questioni di questo genere si presentano nella meccanica celeste.

Altra obbiezione che si può fare al nostro resultato è che la y viene ricavata da una equazione differenziale in cui appare $\bar{J}_b$ che dipende da w la quale è incognita fino a che non si sappia integrare tutto il sistema (5). Perciò il nostro resultato è applicabile quando per altra via si conosce la $w(t)$ oppure il caso in cui si possa esprimere w come funzione di b perchè allora basta integrare l'equazione

$$\frac{dy}{dt} = - b' \bar{J}_b$$

in cui la sola incognita è la y. Di questo caso vedremo una applicazione alla meccanica celeste.

Poi il nostro resultato può avere interesse qualora si vogliono conoscere alcune limitazioni per la J. In questo caso può essere facile trovare un limite superiore per y in base alla (13) e da questa risalire ad una limitazione per J.

Speriamo in ricerche future di mostrare alcune applicazioni delle formule ottenute in questo capitolo.

CONTRIBUTI ALLA TEORIA DELLE CONNESSIONI.

I. CONNESSIONI PROIETTIVE: COSTRUZIONE AL FINITO, CLASSIFICAZIONE SECONDO KLEIN.

Memoria di ENEA BORTOLOTTI (a Firenze) e VÁCLAV HLAVATÝ (a Praga) (*).

§ 5. Curvatura, torsione.

22. Abbiamo già accennato (n. 15) alla *non-integrabilità* (in generale) del trasporto (14.2) ([39]), cioè della connessione proiettiva $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}(\xi)$. La verifica è semplice: supposto che dal punto $\overset{}{\underset{o}{\xi}}$ al punto ξ il trasporto proiettivo dei punti (geometrici) si faccia, per integrazione delle (14.2), lungo una linea Γ, e indicando con $\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(\xi, \underset{o}{\xi};\, \Gamma)$ i coefficienti della rappresentazione omografica così ottenuta — i quali a priori potranno effettivamente essere, oltrechè *funzioni delle* ξ^r *e* $\underset{o}{\xi}^r$, anche *funzionali della linea* Γ — dovremo avere, per una serie di punti $z^{\lambda}(\xi) = z^{\lambda}(\xi \mid \underset{o}{\xi})$ che lungo Γ vari appunto secondo la legge del trasporto proiettivo della connessione,

$$z^{\lambda}(\xi) = \Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(\xi, \underset{o}{\xi};\, \Gamma) z^{\lambda}(\underset{o}{\xi}) \tag{22.1}$$

(cfr. la (20.1)). Di qui, fissata per un momento la linea Γ, derivando lungo Γ abbiamo (col solito significato e la solita convenzione, cfr. nn. 13, 20, per le $\Lambda_{\mu}^{\cdot\lambda}$)

$$\frac{dz^{\lambda}(\xi)}{dt} = \frac{\partial\Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu}(\xi, \underset{o}{\xi};\, \Gamma)}{\partial\xi^r}\, \underset{o}{z}^{\nu}\, \frac{d\xi^r}{dt} = \frac{\partial\Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu}(\xi, \underset{o}{\xi};\, \Gamma)}{\partial\xi^r}\, \Lambda_{\mu}^{\cdot\nu}(\xi, \underset{o}{\xi};\, \Gamma) z^{\mu}(\xi)\, \frac{d\xi^r}{dt}. \tag{22.2}$$

Dal confronto con le (14.2) ricaviamo che le $\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}(\xi, \underset{o}{\xi};\, \Gamma)$ sono soggette alle condizioni differenziali

$$\left(\frac{\partial\Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu}}{\partial\xi^r} + \Lambda^{\lambda}_{\mu r}\Lambda^{\mu}_{\cdot\nu}\right) d\xi^r = \omega\Lambda^{\lambda}_{\cdot\nu} \tag{22.3}$$

ove ω indica uno pfaffiano arbitrario. La non-integrabilità del trasporto (14.2)

(*) Continuazione e fine, ved. tomo precedente, pagg. 1-45.

([39]) Ved. ([26]).

è conseguenza della non-integrabilità delle (22.3); effettivamente troviamo subito che, posto

$$(22.4) \qquad \Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \partial_s \Lambda_{\lambda r}^{\mu} - \partial_r \Lambda_{\lambda s}^{\mu} + \Lambda_{\lambda r}^{\nu} \Lambda_{\nu s}^{\mu} - \Lambda_{\lambda s}^{\nu} \Lambda_{\nu r}^{\mu},$$

poi

$$(22.5) \qquad L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} - \frac{1}{n+1} \delta_\lambda^\mu \Lambda_{rs\nu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \partial_s L_{\lambda r}^{\mu} - \partial_r L_{\lambda s}^{\mu} + L_{\lambda r}^{\nu} L_{\lambda s}^{\mu} - L_{\lambda s}^{\nu} L_{\nu r}^{\mu}$$

(ved. le (17.13)) condizione necessaria e sufficiente perchè esista uno pfaffiano $\omega = h_r d\xi^r$ tale che, corrispondentemente, il sistema (22.3) ai differenziali totali sia illimitatamente integrabile, è

$$(22.6) \qquad L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0;$$

e verifichiamo agevolmente in modo diretto che *questa è pure la condizione perchè sia integrabile il trasporto dei punti,* (14.2). In generale la (22.6) non è verificata, cosicchè l'omografia risulta appunto, come accennavamo, generalmente *un funzionale* della linea Γ, oltrechè funzione dei due punti $\underset{0}{\xi}$. ξ fra i quali detta linea è tracciata in X_n.

Il sistema $L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$, *invariante per le* (14.6) (a differenza di $\Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$) e quindi *determinato dalla connessione proiettiva,* è un tensore misto, affine per gli indici r, s, proiettivo per gli indici λ, μ; di grado normale e quindi *nullo.* Lo diremo *il tensore di curvatura* della connessione proiettiva [40]. Abbiamo già una interpretazione geometrica del suo annullarsi, un'altra ne indichiamo ora:

Fin qui, nel presente §, *nessuna restrizione è stata posta circa il riferimento* adottato, che dunque si può supporre sia *un* A–*riferimento.* Avuto

---

[40] Cfr. **14**, p. 215; **17**, p. 421, o **34**, p. 155; fra i lavori più recenti, **71**, p. 418; **108**. Il tensore $L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ qui definito « tensore di curvatura » è introdotto in B. **70**, p. 24; è costruito in modo analogo al tensore $L_{rsp}^{\cdot\cdot\cdot q}$ il cui annullarsi, in una varietà a connessione affine, indica *la integrabilità del trasporto delle direzioni.* (Ved. B. **60**, p. 93; B. **66** pp. 370, 376), Nella maggior parte dei lavori precedenti, come non si fa netta distinzione fra connessioni e derivazioni proiettive, così si dice *tensore di curvatura della connessione* quello che forse è più giustificato dire tensore di curvatura *della derivazione*: quale $\Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ per $\Lambda_{\lambda r}^{\mu}$, e i tensori $\Gamma_{\nu\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$, $\Gamma_{\lambda\mu}$ indicati più innanzi (form. (23.8), (23.9)) per ($\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, Γ_λ).

Notiamo ancora che introducendo il tensore $T^{\lambda}_{\cdot\mu r}$ (ved. [24]), in conseguenza dell'integrabilità della connessione $\Pi_{\mu r}^{\lambda}(\xi_0, \xi)$ si ha (qualunque sia il punto ξ_0)

$$L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}(\xi_0) = \left(\partial_s T^{\lambda}_{\cdot\mu r} - \partial_r T^{\lambda}_{\cdot\mu s} - \frac{1}{n+1} \varepsilon_\mu^\lambda \left[\partial_s T^{\nu}_{\cdot\nu r} - \partial_r T^{\nu}_{\cdot\nu s}\right]\right)_{\xi=\xi_0};$$

e quindi la condizione perchè anche la connessione $(\Lambda_{\mu r}^{\lambda})$ sia integrabile si può anche esprimere mediante $T^{\lambda}_{\cdot\mu r}$. (Naturalmente è condizione sufficiente, per l'integrabilità della connessione $(\Lambda_{\mu r}^{\lambda})$, che esista almeno un punto ξ_0 in cui sia, identicamente per ξ, $T^{\lambda}_{\cdot\mu r}(\xi_0, \xi) = 0$).

riguardo alle (17.1) e alle (14.6), ne ricaviamo facilmente che *l'annullarsi di* $L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ *è anche condizione necessaria e sufficiente perchè sia possibile scegliere l'A-riferimento in modo tale che uno dei corrispondenti sistemi di parametri misti* $\Lambda_{\mu r}^{\lambda}$ *della connessione sia formato da numeri tutti nulli.* Ora le (22.3) mostrano che allora e solo che uno dei sistemi di valori delle $\Lambda_{\mu r}^{\lambda}$ è formato da numeri nulli le omografie (22.1) si riducono a

$$z^{\lambda}(\underset{o}{\xi}) \equiv z^{\lambda}(\underset{o}{\xi}). \tag{22.7}$$

Il che del resto era ben prevedibile perchè si comprende come l'esistenza di $n+2$ campi di punti (dei quali $n+1$ qualunque *indipendenti*) *conservati dalla connessione* porti *l'integrabilità* di questa, e viceversa. Ora: quando la X_n *è essa stessa uno spazio proiettivo* P_n, con questo si può intendere coincidente lo spazio proiettivo tangente ad essa in un qualunque suo punto; ed esiste per essa una connessione proiettiva (integrabile) privilegiata, di banale semplicità, ottenuta a partire da rappresentazioni omografiche $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}(\xi, \underset{o}{\xi})$ *tutte coincidenti con l'identità.* Se, quale A-riferimento, si prende un ordinario sistema proiettivo in P_n — che dunque *è sempre lo stesso per tutti i punti di* P_n — le omografie $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ o $\Lambda^{\lambda}_{\cdot\mu}$ (qui fa lo stesso) naturalmente sono date proprio dalle (22.7). Viceversa: quando le (22.1) possano rappresentarsi nella forma (22.7), con conveniente scelta dell'A-riferimento, *la connessione può identificarsi con quella dello spazio proiettivo,* immaginando coincidenti tutti gli spazi tangenti, e su essi, coincidenti pure i sistemi coordinati proiettivi dell'A-riferimento. Questo può esprimersi dicendo che *l'annullarsi del tensore di curvatura è la condizione perchè la varietà a connessione proiettiva si riduca a uno spazio proiettivo* (o più esattemente: perchè la sua connessione proiettiva si riduca a quella, privilegiata, dello spazio proiettivo).

23. Il tensore di curvatura $L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ si può esprimere (in relazione a un B-riferimento) *anche pei parametri normalizzati* $\underset{1}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\lambda}$ (come a priori è evidente); e invece $\Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ si può esprimere per $\underset{1}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\lambda}$ e Λ_{or}^{o}:

$$\Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \partial_s \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda r}^{\mu} - \partial_r \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda s}^{\mu} + \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda r}^{\nu} \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu s}^{\mu} - \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda s}^{\nu} \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu r}^{\mu} + \delta_{\lambda}^{\mu}(\partial_s \Lambda_{or}^{o} - \partial_r \Lambda_{os}^{o}), \tag{23.1}$$

$$L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \partial_s \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda r}^{\mu} - \partial_r \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda s}^{\mu} + \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda r}^{\nu} \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu s}^{\mu} - \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda s}^{\nu} \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu r}^{\mu} - \frac{1}{n+1} \delta_{\lambda}^{\mu}(\partial_s \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu r}^{\nu} - \partial_r \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu s}^{\nu}). \tag{23.2}$$

Si potrebbe pensare che anche il gruppo di termini

$$\partial_s \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda r}^{\mu} - \partial_r \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda s}^{\mu} + \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda r}^{\nu} \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu s}^{\mu} - \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda s}^{\nu} \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu r}^{\mu}$$

costruito con le $\underset{1}{\Gamma}{}^{\mu}_{\lambda r}$ come il tensore $\Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ con le $\Lambda^{\mu}_{\lambda r}$, *fosse un tensore*: questo invece *non è* per un B–riferimento qualunque, ma soltanto pei C–riferimenti (o casi particolari). Il che si potrebbe verificare direttamente, ma risulta chiaramente da quanto segue:

È naturale provare a costruire delle formule analoghe a quelle, ben note, di *commutazione* delle derivate seconde covarianti, o dei differenziali secondi assoluti, dei tensori affini: nelle quali appare sempre il *tensore di curvatura* della corrispondente connessione affine (insieme al *tensore di torsione*).

Limitiamoci a prendere in considerazione il caso di un B–vettore proiettivo controvariante di peso p ed eccesso e (o grado g) qualunque: l'estensione a tensori proiettivi (analitici) qualsiansi risulta agevole.

Per l'operatore δ abbiamo, posto

$$\Lambda_{rs} = \partial_s \Lambda_r - \partial_r \Lambda_s \tag{23.3}$$

(tensore affine, in conseguenza delle (17.9)):

$$(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) w^\lambda = \Lambda_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} d_1 \xi^r d_2 \xi^s w^\mu - (e \Lambda_{rs} + p \Lambda_{rs\nu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}) d_1 \xi^r d_2 \xi^s w^\lambda . \tag{23.4}$$

Il termine contenente Λ_{rs} manca se $e = 0$: la corrispondente formula vale anche per un A–vettore. L'operatore ∇_r (derivata covariante mista, fatta coi parametri $\Lambda^\lambda_{\mu r}$) non si può applicare che a tensori proiettivi, dunque *non si può costruire l'operatore alternato* $\nabla_s \nabla_r - \nabla_r \nabla_s$ (per tensori proiettivi).

Passiamo ora alla differenziazione assoluta *proiettiva*, per ora con *parametri generali* $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, Γ_ν. Premettiamo l'osservazione che, quando $d\xi^o$ si intenda dato dalla (10.4), sia cioè uno pfaffiano nelle $d\xi^r$, $(d_2 d_1 - d_1 d_2)\xi^o$ è il suo *covariante bilineare*:

$$(d_2 d_1 - d_1 d_2) \xi^o = - \sigma^o_{rs} d_1 \xi^r d_2 \xi^s , \tag{23.5}$$

ove abbiamo posto

$$\sigma^o_{rs} = \partial_s \left(\frac{T_r}{T_o} \right) - \partial_r \left(\frac{T_s}{T_o} \right); \tag{23.6}$$

onde, per le (10.2), σ^o_{rs} ha la legge di trasformazione

$$\sigma^{o'}_{r's'} = A^r_{r'} A^s_{s'} \sigma^o_{rs} + \partial_{s'} A^o_{r'} - \partial_{r'} A^o_{s'} . \tag{23.7}$$

Ciò premesso: posto

$$\Gamma_{\nu\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = \delta^s_\omega \partial_s \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta^r_\nu \partial_r \Gamma^\lambda_{\mu\omega} + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\tau\omega} - \Gamma^\tau_{\mu\omega} \Gamma^\lambda_{\tau\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu o} \delta^r_\nu \delta^s_\omega \sigma^o_{rs} \tag{23.8}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu} = \delta^s_\mu \partial_s \Gamma_\lambda - \delta^r_\lambda \partial_r \Gamma_\mu - \delta^s_\mu \delta^r_\lambda \sigma^o_{rs} \Gamma_o \tag{23.9}$$

si ha, col solito significato per w^λ:

$$(\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2) w^\lambda = \Gamma_{\nu\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} w^\mu d_1 \xi^\nu d_2 \xi^\omega - (g \Gamma_{\nu\omega} + p \Gamma_{\nu\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}) d_1 \xi^\nu d_2 \xi^\omega w^\lambda ; \tag{23.10}$$

dove, naturalmente, il termine con $\Gamma_{\nu\omega}$ mancherà se w^λ è *di grado zero*. E ora possiamo formare anche l'operatore alternato $\mathfrak{D}_\nu\mathfrak{D}_\omega - \mathfrak{D}_\omega\mathfrak{D}_\nu$:

$$(23.11) \qquad (\mathfrak{D}_\nu\mathfrak{D}_\omega - \mathfrak{D}_\omega\mathfrak{D}_\nu)w^\lambda = \Gamma_{\omega\nu\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} w^\mu + (\Gamma_{\nu\omega}^\tau - \Gamma_{\omega\nu}^\tau - \delta_o^\tau\delta_\nu^r\delta_\omega^s\sigma_{rs}^o)\mathfrak{D}_\tau w^\lambda + \\ + (g\Gamma_{\nu\omega} + p\Gamma_{\nu\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau})w^\lambda$$

o anche, posto

$$(23.12) \qquad 2S_{\nu\omega}^{\cdot\cdot\tau} = \Gamma_{\nu\omega}^\tau - \Gamma_{\omega\nu}^\tau - \delta_o^\tau\delta_\nu^r\delta_\omega^s\sigma_{rs}^o,$$

$$(23.13) \qquad (\mathfrak{D}_\nu\mathfrak{D}_\omega - \mathfrak{D}_\omega\mathfrak{D}_\nu)w^\lambda = \Gamma_{\omega\nu\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} w^\mu + 2S_{\nu\omega}^{\cdot\cdot\tau}\mathfrak{D}_\tau w^\lambda + (g\Gamma_{\nu\omega} + p\Gamma_{\nu\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau})w^\lambda.$$

In questa, che del resto si collega alla (23.10), essendo

$$(23.14) \qquad (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)w^\lambda = (\mathfrak{D}_\omega\mathfrak{D}_\nu - \mathfrak{D}_\nu\mathfrak{D}_\omega)w^\lambda d_1\xi^\nu d_2\xi^\omega + \\ + 2S_{\nu\omega}^{\cdot\cdot\tau}\mathfrak{D}_\tau w^\lambda \cdot d_1\xi^\nu d_2\xi^\omega,$$

$\Gamma_{\omega\nu\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$, $S_{\nu\omega}^{\cdot\cdot\tau}$ e $\Gamma_{\nu\omega}$ sono effettivi *tensori proiettivi*, tutti *di peso e di grado zero*. Con questi tensori si possono dunque scrivere tutte le *formule di commutazione* delle derivate covarianti proiettive; *essi possono servire per formare tutti gli invarianti della più generale derivazione proiettiva*. Ma veniamo al caso particolare in cui questa è la derivazione che ha per parametri *i parametri normalizzati* $\underset{1}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^\lambda$ di una connessione proiettiva. Allora il tensore $\Gamma_{\nu\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ diviene

$$(23.15) \qquad \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = \delta_\nu^r\delta_\omega^s \underset{1}{\Gamma}{}_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda},$$

cioè in sostanza esso è, come $\Lambda_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ e $L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$, un *tensore misto*; legato ad essi dalle relazioni

$$(23.16) \qquad \Lambda_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \underset{1}{\Gamma}{}_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} + \delta_\lambda^\mu \underset{1}{\Gamma}{}_{rs},$$

$$(23.17) \qquad L_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \underset{1}{\Gamma}{}_{rs\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} - \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\mu \underset{1}{\Gamma}{}_{rs\nu}^{\cdot\cdot\cdot\nu},$$

che subito si ricavano dalle (23.1), (23.2) tenute presenti le (23.9) e (18.14*).

Poi: valendo ora le (18.14*), si ha, nel caso attuale,

$$(23.18) \qquad \underset{1}{\Gamma}{}_{\lambda\mu} = \delta_\lambda^r\delta_\mu^s \underset{1}{\Gamma}{}_{rs} = \delta_\lambda^r\delta_\mu^s(\Lambda_{rs} - \sigma_{rs}^o).$$

Infine le (23.8), (23.12) e (18.10) dànno

$$(23.19) \qquad 2\underset{1}{S}{}_{\nu\omega}^{\cdot\cdot\tau} = \underset{1}{\Gamma}{}_{\nu\omega o}^{\cdot\cdot\cdot\tau},$$

il che porta per conseguenza, essendo $\underset{o}{B}{}^\lambda$ le coordinate dei punti della X_n, sugli spazi tangenti dei quali sono punti di contatto, rispetto al B-riferimento (onde numericamente avremo $\underset{o}{B}^\lambda = \delta_o^\lambda$):

$$(23.20)\qquad (\underset{1}{\mathfrak{d}}_2\underset{1}{\mathfrak{d}}_1 - \underset{1}{\mathfrak{d}}_1\underset{1}{\mathfrak{d}}_2)\underset{o}{B}^\lambda = \underset{1}{\Gamma}_{\omega\nu o}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} d_1\xi^\nu d_2\xi^\omega = 2\underset{1}{S}_{\omega\nu}^{\cdot\cdot\lambda} d_2\xi^\omega d_1\xi^\nu = 2\underset{1}{S}_{rs}^{\cdot\cdot\lambda} d_2\xi^r d_1\xi^s.$$

A questa formula si collega una interpretazione geometrica di cui diremo fra poco; per la quale $\underset{1}{S}_{rs}^{\cdot\cdot t}$ può dirsi il *tensore di torsione* ([41]) della connessione proiettiva. Un' altra interpretazione vale anche pel caso generale, di una qualunque derivazione proiettiva $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$: si ha

$$(23.21)\qquad (\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2)\xi^\lambda = \mathfrak{d}_2 d_1\xi^\lambda - \mathfrak{d}_1 d_2\xi^\lambda = 2S_{\omega\nu}^{\cdot\cdot\lambda} d_1\xi^\omega d_2\xi^\nu \text{ ([42])}.$$

Scriviamo ancora la formula, corrispondente alla (23.4), relativa alla differenziazione δ^* con parametri $L_{\mu r}^\lambda$ (ved. la (17.15)), per un vettore analitico proiettivo controvariante di eccesso 0 e grado 0:

$$(23.22)\qquad (\overset{*}{\delta}_2\overset{*}{\delta}_1 - \overset{*}{\delta}_1\overset{*}{\delta}_2)w^\lambda = L_{sr\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} d_1\xi^r d_2\xi^s w^\mu.$$

Questa formula particolarmente semplice ci sarà utile fra poco. Notiamo esplicitamente che essa vale anche in relazione *a un qualunque* A-*riferimento.*

24. Veniamo alla interpretazione più espressiva del tensore di curvatura, e conseguentemente, di quello di torsione: quella cui dà luogo il trasporto proiettivo ciclico.

Accenniamo alla determinazione del divario per trasporto proiettivo, relativo a una connessione $(\Lambda_{\mu r}^\lambda)$, di un punto, lungo un circuito finito: secondo un procedimento indicato, pel caso di una connessione affine, da A. J. McConnell ([43]). Sia Γ in X_n una curva chiusa (regolare) tracciata in X_n, e contenente un punto O. Sullo spazio π tangente a X_n in O sia $\underset{o}{P}^*(\underset{o}{z}^{*\lambda})$ la posizione che va ad assumere, per effetto pel trasporto ciclico lungo l' intera curva Γ, a partire da O fino a ritornarvi dopo un giro completo, un punto iniziale $\underset{o}{P}(\underset{o}{z}^\lambda)$ di Γ. Osserviamo che non è restrittivo riferirsi al trasporto di un *punto analitico*, comunque normalizzato e quindi di *eccesso* e *grado* qua-

([41]) Cfr. **14**, p. 216. Invece il tensore misto $S_{\nu\omega}^{\cdot\cdot r}$, dato dalla (23.12), si potrà dire *tensore di torsione della derivazione* $(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \Gamma_\nu)$.

([42]) Cfr. **16**, p. 68.

([43]) Ved. **45**, I.

lunque; infatti variando la normalizzazione delle z^λ, e anche variando la scelta del sistema di parametri misti $\Lambda^\lambda_{\mu r}$, potranno in corrispondenza variare le coordinate di $\underset{o}{P^*}$, ma non il punto geometrico che esse individuano su π. Precisamente converrà supporre che venga trasportato un punto analitico di *eccesso zero, grado zero secondo la* (17.15), che hanno significato *intrinseco alla connessione* anche pel caso — cui intendiamo riferirci — che il riferimento per la X_n sia un qualunque A-*riferimento*.

Prendiamo (seguendo il McCONNELL) in X_n una superficie σ passante per Γ, su cui Γ racchiuda una regione regolare, semplicemente connessa R. Su σ consideriamo un sistema coordinato curvilineo (ρ, θ) del quale le linee $\rho(\theta = \text{cost.})$ escano da O: e il parametro ρ su ciascuna di esse prenda in O il valore zero. Precisamente supponiamo che da ciascun punto di R (escluso O) e in particolare di Γ esca una e una sola linea ρ. Sia z^λ un punto analitico, di grado zero, che lungo Γ vari pel trasporto proiettivo rappresentato dalle (17.15): in O esso avrà due determinazioni generalmente distinte, che indicheremo precisamente con $\underset{o}{z^\lambda}$ (determinazione iniziale) e $\underset{o}{z^{*\lambda}}$ (determinazione finale): si tratta dunque di determinare il divario

$$\Delta z^\lambda = \underset{o}{z^{*\lambda}} - \underset{o}{z^\lambda} \tag{24.1}$$

pel trasporto ciclico lungo Γ.

Definiamo z^λ in tutta la regione R a questo modo: determinato z^λ in ogni punto di Γ (cioè, entro il relativo spazio proiettivo tangente) pel trasporto (17.15) lungo Γ a partire dalla determinazione $\underset{o}{z^\lambda}$ in O, lungo ciascuna curva ρ di R a partire dal punto (diverso da O) in cui essa va a incontrare Γ determiniamo z^λ sempre pel trasporto (17.15). A questo modo z^λ è determinato in ogni punto di R *salvo il punto* O, ove generalmente z^λ avrà infinite determinazioni: corrispondenti però al valore $\rho = 0$ e a *differenti* valori di θ. E il campo di punti z^λ così costruito in R soddisfa alle condizioni

$$\frac{\delta^* z^\lambda}{dt} = 0, \quad \frac{\delta^* z^\lambda}{d\rho} = 0, \tag{24.2}$$

ove intendiamo, secondo le (17.15), che t sia il parametro cui sono riferiti i punti di Γ.

Accanto al campo di punti $z^\lambda(\rho, \theta)$ costruiamo in R anche un campo di iperpiani (analitici, di grado 0) $w_\lambda(\rho, \theta)$, a questo modo: a partire da una determinazione iniziale $\underset{o}{w_\lambda}$ in O determiniamo w_λ in ogni punto di R mediante il trasporto

$$\frac{\delta^* w_\lambda}{d\rho} = \frac{dw_\lambda}{d\rho} - L^{\mu}_{\lambda r} w_\mu \frac{d\xi^r}{dt} = 0 \tag{24.3}$$

lungo la curva ρ che va da O al supposto punto. Dunque w_λ soddisferà alla condizione

$$\frac{\delta^* w_\lambda}{d\rho} = 0 \tag{24.4}$$

in tutta la regione R.

A questo punto non v'è che ripetere, con lievi ed ovvie modificazioni, lo sviluppo esposto, pel caso da lui trattato, dal McConnell ([44]); sostituite, per maggiore generalità, alle coordinate ρ, θ su σ altre coordinate u, v tali che in R nessuno dei determinanti funzionali $\dfrac{\partial(\xi^r, \xi^s)}{\partial(u, v)}$ si annulli, abbiamo tenute presenti le (22.5)

$$\underset{o}{w_\lambda}\Delta z^\lambda = -\iint_R L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} z^\mu w_\lambda \frac{\partial\xi^r}{\partial u}\frac{\partial\xi^s}{\partial v}\, du dv \tag{24.5}$$

onde, applicando il teorema del valor medio,

$$\underset{o}{w_\lambda}\Delta z^\lambda = -\left[L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} z^\mu w_\lambda \frac{\partial\xi^r}{\partial u}\frac{\partial\xi^s}{\partial v}\right]_M \iint_R du dv, \tag{24.6}$$

ove M indica un conveniente punto entro R. Conseguenza immediata è che se, con lo stesso procedimento seguito per w_λ, formiamo $n+1$ *campi di iperpiani analitici* (di grado zero) indipendenti $\overset{\tau}{w}_\lambda$, e supponiamo che le determinazioni iniziali $\underset{o}{\overset{\tau}{w}_\lambda}$ coincidano con gli *iperpiani fondamentali* del riferimento locale per lo spazio tangente in O, $\underset{o}{\overset{\tau}{e}_\lambda}$, di componenti δ_λ^τ, abbiamo

$$\Delta z^\tau \overset{*}{=} -\left[L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} z^\mu \overset{\tau}{w}_\lambda \frac{\partial\xi^r}{\partial u}\frac{\partial\xi^s}{\partial v}\right]_{M_{(\tau)}} \iint_R du dv; \tag{24.7}$$

il significato di $\overset{*}{=}$ essendo quello già precisato al n. 21; e con $M_{(\tau)}$ indicandosi $n+1$ convenienti punti entro R. Ancora: se per A-riferimento entro R prendiamo in ogni punto *quello che ha quali iperpiani (analitici) fondamentali gli iperpiani* $\overset{\tau}{w}_\lambda$ detti sopra, abbiamo

$$\Delta z^\lambda \overset{*}{=} -\iint_R L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} z^\mu \frac{\partial\xi^r}{\partial u}\frac{\partial\xi^s}{\partial v}\, du dv = -\left[L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} z^\mu \frac{\partial\xi^r}{\partial u}\frac{\partial\xi^s}{\partial v}\right]_{M_{(\lambda)}} \iint_R du dv. \tag{24.8}$$

([44]) **45**, I, pp. 211-212.

Di qui, il ricavare la formula relativa al trasporto ciclico *infinitesimale* ([45]) sarebbe agevole; ma ad ogni modo l'interpretazione voluta, pel tensore di curvatura $L_{rs\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$, già appare evidente. Se in particolare nella (24.8) supponiamo che la determinazione iniziale del punto z^λ, $\underset{o}{z^\lambda}$, *sia il punto* O *medesimo*, in cui intenderemo posto (come si fa per gli A_o–riferimenti) il punto fondamentale $\underset{o}{B^A}$, cioè $\underset{o}{e^\lambda}$, allora anche in ogni punto di R il corrispondente punto z^λ diverrà il punto $\underset{o}{e^\lambda}$ del corrispondente riferimento locale, geometricamente coincidente col punto medesimo di R che è in considerazione: e la (24.8) prenderà la forma

$$\Delta \underset{o}{B^\lambda} \overset{*}{=} -\iint_R L_{rso}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} \frac{\partial\xi^r}{\partial v}\frac{\partial\xi^s}{\partial u}\, du dv = -\left[L_{rso}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} \frac{\partial\xi^r}{\partial u}\frac{\partial\xi^s}{\partial v}\right]_{M_{(\lambda)}} \iint_R du dv. \tag{24.9}$$

Risulta di qui che il punto variato O* coincide col punto O iniziale a condizione che sia

$$L_{rso}^{\cdot\cdot\cdot t} = \Lambda_{rso}^{\cdot\cdot\cdot t} = \underset{1}{\Gamma_{rso}^{\cdot\cdot\cdot t}} = \underset{1}{S_{rs}^{\cdot\cdot t}} = 0 \tag{24.10}$$

abbiamo così l'interpretazione cercata del tensore di torsione $\underset{1}{S_{rs}^{\cdot\cdot t}}$ e in particolare del suo annullarsi.

§ 6. **Connessione affine.**

25. Fino ad ora si è trattato sempre di *connessioni proiettive* in generale. Ma allo stesso modo che in uno spazio *piano*, secondo KLEIN, si possono subordinare alla geometria proiettiva quella *affine*, quelle *metriche, euclidea* e *non–euclidee*, e anche quella *conforme* (a un numero inferiore di dimensioni) così alla geometria delle varietà *a connessione proiettiva* si possono subordinare quelle delle varietà *a connessione affine, a connessione metrica generale* (di WEYL), *a connessione euclidea, e non–euclidea*; *a connessione conforme.* Non ci occuperemo di queste ultime nel presente lavoro: ma nei riguardi delle precedenti, mostriamo come esse si inquadrino nella teoria generale delle connessioni proiettive, basata sulla costruzione al finito.

Cominciamo dalle varietà *a connessione affine.* Precisamente: in un primo tempo determiniamo una connessione affine entro una X_n *che ha già una connessione proiettiva* (qualunque).

([45]) Cfr. **45**, I, p. 213.

Diremo che *una connessione proiettiva* in una X_n è *una connessione affine quando esiste per essa un campo* (n-dimensionale) *di iperpiani invariante.* La ragione della denominazione è evidente: assunti gli iperpiani del supposto campo quali *iperpiani impropri,* le omografie cui la connessione dà luogo entro gli spazi proiettivi tangenti in dne punti qualunque si potranno considerare *come affinità* fra i due spazi; dei quali la scelta di iperpiani impropri fa appunto degli *spazi affini.*

Condizione *sufficiente* perchè un campo d'iperpiani sia invariante per le omografie, (20.1), determinate dalla connessione — o, come diremo per brevità: perchè tale campo *sia invariante per la connessione* — è che il supposto campo sia invariante per un (qualunque) sistema di rappresentazioni omografiche al finito (13.4), che dia luogo alla supposta connessione.

Ciò premesso: entro una X_n, in cui è dato un campo (13.4) di rappresentazioni omografiche al finito fra gli spazi tangenti, sia assegnato *un campo d'iperpiani* posti negli spazi tangenti, e non passanti pei rispettivi punti di contatto: mediante un campo di vettori proiettivi covarianti T_λ, che in relazione a un B-riferimento non sarà restrittivo supporre vettori analitici di peso ed eccesso nullo, soddisfacenti alla condizione

$$T_o = -1 \tag{25.1}$$

(che vale a fissare il fattore d'omogeneità). L'omografia (13.4) fra gli spazi $\underset{o}{\pi}$, π tangenti in $\xi(\underset{o}{z}^\lambda = \underset{o}{x}^\lambda)$ e in $\xi(z^\lambda = x^\lambda)$ (ove con $\underset{o}{z}^\lambda$, z^λ indichiamo coordinate proiettive dei punti su $\underset{o}{\pi}$, π) in uno e in un solo modo si può decomporre in una « affinità » fra i due spazi (cioè: una omografia che muti l'uno nell'altro i corrispondenti iperpiani $\underset{o}{T}_\lambda$, T_λ associati) e in una *omologia speciale* di π in sè, col centro nel punto $x^{*\lambda}$ omologo su π, nell'omografia prodotto, del punto di contatto $\underset{o}{x}^\lambda$ di $\underset{o}{\pi}$. Precisamente l'affinità è

$$z^{*\sigma} = P^{\sigma}_{\cdot\mu} \underset{o}{z}^\mu \tag{25.2}$$

con

$$P^{\sigma}_{\cdot\mu} = \Pi^{\sigma}_{\cdot\mu} + \Pi^{\sigma}_{\cdot\nu} \underset{o}{x}^\nu \left(\frac{\underset{o}{T}_\mu}{\underset{o}{T}_\tau \underset{o}{x}^\tau} - \frac{\Pi^{\tau}_{\cdot\mu} T_\tau}{\Pi^{\tau}_{\cdot\lambda} \underset{o}{x}^\lambda T_\tau} \right) \tag{25.3}$$

e l'omologia speciale è

$$z^\lambda = K^{\lambda}_{\cdot\sigma} z^{*\sigma} \tag{25.4}$$

con

$$K^{\lambda}_{\cdot\sigma} = A^\lambda_\sigma - \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu} \underset{o}{x}^\mu \left(\frac{\underset{o}{T}_\tau \Pi^{\cdot\tau}_{\sigma}}{\underset{o}{T}_\tau \underset{o}{x}^\tau} - \frac{T_\sigma}{\Pi^{\tau}_{\cdot\nu} \underset{o}{x}^\nu T_\tau} \right); \tag{25.5}$$

l'iperpiano d'omologia è

$$\Pi^{\nu}_{\cdot\mu}\overset{o}{x}{}^{\mu}\overset{o}{T}_{\tau}(T_{\nu}\Pi_{\lambda}^{;\tau} - T_{\lambda}\Pi_{\nu}^{;\tau})z^{\lambda} = 0. \tag{25.6}$$

Lo stesso procedimento che a partire dalle $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu}$ dà, mediante le (13.3), i *parametri misti* $\Lambda^{\lambda}_{\mu r}$ della corrispondente connessione proiettiva, applicato alle « affinità » (25.2), cioè alle $P^{\lambda}_{\cdot\mu}$, dà i parametri di una nuova connessione proiettiva che, secondo la definizione poco sopra esposta, dovrà dirsi una connessione affine. In relazione al primitivo B-riferimento i parametri misti di questa sono (tenuto conto che $\overset{o}{x}{}^{\nu} \overset{*}{=} \overset{o}{B}{}^{\nu} \overset{*}{=} \delta^{\nu}_{o}$, e inteso che nelle (17.4) sia $\tau = 1$)

$$\overset{T}{\Lambda}{}^{r}_{st} = \Lambda^{r}_{st}, \quad \overset{T}{\Lambda}{}^{r}_{ot} = \Lambda^{r}_{ot} = \delta^{r}_{t}, \quad \overset{T}{\Lambda}{}^{o}_{ot} = \Lambda^{o}_{ot}, \tag{25.7}$$

$$\overset{T}{\Lambda}{}^{o}_{st} = \Lambda^{r}_{st} T_{r} - \frac{\partial T_{s}}{\partial \xi^{t}} + T_{s}T_{t} - \Lambda^{o}_{ot}T_{s},$$

onde tenute presenti le (17.5) ricaviamo che se si cambia il B-riferimento, prendendo quali nuovi iperpiani fondamentali $\overset{o}{B}_{\lambda}$ dei riferimenti locali *precisamente gli iperpiani* T_{λ}, la connessione affine acquista i parametri proiettivi normalizzati

$$G^{r}_{st} = \underset{*}{\Gamma}{}^{r}_{st} - \delta^{r}_{s}T_{t} - \delta^{r}_{t}T_{s}, \quad G^{r}_{ot} = \delta^{r}_{t}, \quad G^{o}_{ot} = G^{o}_{st} = 0, \quad G^{\lambda}_{\mu o} = \delta^{\lambda}_{\mu}. \tag{25.8}$$

Fra questi bastano ovviamente i soli parametri G^{r}_{st} a rappresentare la connessione affine: d'altra parte essi, data la connessione, *sono determinati quando si fissi soltanto il sistema coordinato curvilineo.* Li possiamo dire (quando occorra precisare) *parametri affini olonomi* della connessione affine. Essi per le (3.3) hanno la legge di trasformazione ben conosciuta

$$G^{r'}_{s't'} = A^{r'}_{r} A^{s}_{s'} A^{t}_{t'} G^{r}_{st} + A^{r'}_{r} \frac{\partial A^{r}_{s'}}{\partial \xi^{t'}} \tag{25.9}$$

e dànno luogo, in conseguenza, alla costruzione di *derivate covarianti affini.* Si rientra qui in una teoria già così nota che sarebbe fuori luogo soffermarvisi. Notiamo soltanto che il procedimento del n. 16 applicato al caso attuale dà anche per le derivate covarianti affini una costruzione con procedimenti di limite, a partire dalle rappresentazioni (affini) al finito.

Torniamo alle (25.7): esse mostrano che la condizione per la coincidenza della connessione affine determinata dal campo d'iperpiani T_{λ} e la primitiva connessione proiettiva è l'annullarsi del *tensore affine*:

$$(25.10)\qquad p_{st} = \Lambda^o_{st} + \frac{\partial T_s}{\partial \xi^t} - \Lambda^r_{st} T_r - T_s T_t + \Lambda^o_{ot} T_s = $$
$$= \underset{1}{\Gamma^o_{st}} + \frac{\partial T_s}{\partial \xi^t} - \underset{1}{\Gamma^r_{st}} T_r - T_s T_t,$$

che naturalmente si riduce a $\Lambda^o_{st} = \underset{1}{\Gamma^o_{st}}$ quando gli iperpiani T_λ si assumono ad iperpiani $\overset{o}{B}_\lambda$ dei riferimenti locali.

Dunque: *una connessione proiettiva e un campo d'iperpiani determinano una connessione affine e un tensore affine* p_{st}. *L'annullarsi di questo è condizione per la coincidenza della connessione affine con quella proiettiva* [46].

La condizione *perchè una connessione proiettiva sia affine* si ricava in modo ovvio da quanto precede: si tratta di esprimere *che esiste un campo d'iperpiani* T_λ, *tale che il corrispondente tensore affine* p_{st} *si annulli.* Lo sviluppo effettivo di queste condizioni è stato già esposto altrove da uno di noi due [47], non lo ripeteremo.

26. Naturalmente possiamo costruire in una X_n una connessione affine senza alcun bisogno *che vi preesista una connessione proiettiva.* Diamo soltanto il campo T_λ, e in relazione a un B-riferimento supponiamo valga per esso la (25.1). Diamo un campo di rappresentazioni omografiche al finito fra gli spazi tangenti, (13.4), sotto la condizione che per queste omografie il campo d'iperpiani T_λ sia invariante. Prendiamo questi iperpiani come iperpiani $\overset{o}{B}_\lambda$ dei riferimenti locali: questo porta subito $\Pi_r{}^o = 0$: le (13.3) dànno, per conseguenza $\Lambda^o_{rs} = 0$. Introdotte le coordinate non omogenee $Z^r = \frac{z^r}{z^o}$, che potranno interpretarsi quali coordinate cartesiane sugli spazi tangenti, le equazioni (14.2) del trasporto proiettivo — che nel caso attuale potremo dire: trasporto affine — dei punti dànno (ved. le (18.1))

$$(26.1)\qquad dZ^p + \underset{1}{\Gamma^p_{qr}} Z^q d\xi^r + \Lambda^p_{or} d\xi^r = 0.$$

Ma di qui ricaviamo subito la corrispondente legge di trasporto *dei vettori*, da cui il termine non omogeneo scompare:

$$(26.2)\qquad dv^p + \underset{1}{\Gamma^p_{qr}} v^q d\xi^r = 0.$$

(46) Ved. B. **70**, pp. 33-35; B. **78**, pp. 118-119. Cfr. **73**, I; **94**, p. 192; **55**, p. 95; **89**, p. 286.
(47) Ved. B. **70**, pp. 34-35.

Generalmente si suppone che la *deviazione* (n. 17) per una connessione affine *sia nulla* ([48]); allora nelle (26.1) l'ultimo termine per la (17.4) diviene semplicemente $\tau d\xi^p$; e quando sia $\tau = 1$ la (26.1) prende la forma più comunemente adottata (secondo il Cartan) per rappresentare il trasporto affine dei punti, in una varietà a connessione affine. Vediamo che ad ogni modo *la deviazione non ha alcuna influenza sul trasporto dei vettori.*

Notiamo ancora che la connessione affine *quale connessione vettoriale*, si può costruire direttamente assegnando un campo di rappresentazioni affini (omografie vettoriali) al finito, fra gli spazi tangenti alla X_n considerati quali spazi vettoriali: precedendo poi in modo analogo a quello seguito per le connessioni proiettive (e anzi, più semplice).

27. Le considerazioni svolte al n. 21 per le connessioni proiettive in generale si completano per le connessioni affini in modo semplice e interessante. Il trasporto affine a distanza finita lungo le geodetiche uscenti da un punto $\underset{o}{\xi}$ si rappresenta così:

$$v^p = A^p_{\cdot q} \underset{o}{v^q} \tag{27.1}$$

ove (cfr. le (21.4), (21.5)) ∇_p indicando ora la derivazione covariante affine di parametri G^r_{st},

$$A^p_{\cdot q} = A^p_q - (G^p_{qr})_o(\xi^r - \underset{o}{\xi^r}) - \frac{1}{2}(\nabla_s G^{(p)}_{qr})_o(\xi^r - \underset{o}{\xi^r})(\xi^s - \underset{o}{\xi^s}) - \tag{27.2}$$

$$- \frac{1}{3!}(\nabla_t \nabla_s G^{(p)}_{qr})_o(\xi^r - \underset{o}{\xi^r})(\xi^s - \underset{o}{\xi^s})(\xi^t - \underset{o}{\xi^t}) + \dots .$$

Le (27.1) al variare di $\underset{o}{\xi}$ dànno un particolare campo di rappresentazioni affini al finito, cui è subordinata la supposta connessione affine: intrinsecamente determinate dalla connessione medesima. Ma la nota costruzione delle *coordinate affini normali* ([49]) di origine $\underset{o}{\xi}$ dà luogo a un secondo campo di rappresentazioni affini al finito, cui è subordinata la connessione affine supposta se essa è simmetrica ($G^r_{st} = G^r_{ts}$): altrimenti, ad esso è subordinata la connessione simmetrica *ad essa associata* (di parametri $G^r_{(st)}$). Precisamente:

([48]) Un trasporto dei punti, che ha deviazione non nulla, è associato a una connessione affine in H. **19**.

([49]) Ved. per le connessioni simmetriche **7**; **11**, p. 562; **40**, p. 85; **41**, p. 58; pel caso generale B. **60**, p. 67 e seg. Le notazioni G^r_{st}, G^r_{stp}, ... nella (27.3) corrispondono a $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, $\Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau}$, ... di B. **60**, p. 68.

per le coordinate normali di origine $\underset{o}{\xi}$ si esprimono le primitive coordinate curvilinee mediante le formule (60, loc. cit.)

$$\xi^r = \underset{o}{\xi}^r + \eta^r - \frac{1}{2!}\underset{o}{G}{}^r_{st}\eta^s\eta^t - \frac{1}{3!}G^r_{stp}\eta^s\eta^t\eta^p - \dots \tag{27.3}$$

Ora: poniamo

$$\varphi^{p}_{\cdot q} = \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^q} = A^p_q - \underset{o}{G}{}^p_{(qt)}\eta^t - \frac{1}{2!}G^p_{(qtr)}\eta^t\eta^r - \dots \tag{27.4}$$

Le $\varphi^{p}_{\cdot q}$ sono i coefficienti delle rappresentazioni affini cui accennavamo. Effettivamente la legge di trasformazione delle $\varphi^{p}_{\cdot q}$ in un cambiamento delle coordinate curvilinee è appunto quella occorrente,

$$\varphi^{p'}_{\cdot q} = A^{p'}_p(\xi)A^q_{q'}(\underset{o}{\xi})\varphi^{p}_{\cdot q} \tag{27.5}$$

(corrispondente alla (12.10)), per dare origine a un campo di rappresentazioni affini al finito. Il corrispondente trasporto affine dei vettori, dal punto $\underset{o}{\xi}$ a un qualunque punto ξ, è quello *pel quale sono invarianti le componenti del vettore trasportato rispetto al riferimento curvilineo normale di origine* $\underset{o}{\xi}$. Infatti il vettore che, nel punto ξ, ha nel sistema (ξ^r) le componenti $v^p = \varphi^{p}_{\cdot q}\underset{o}{v}^q$ è quello che nello stesso punto ha nel corrispondente riferimento normale affine di origine $\underset{o}{\xi}$ le componenti $\underset{o}{v}^q$.

Il confronto dei due campi di rappresentazioni affini al finito $A^{p}_{\cdot q}$, $\varphi^{p}_{\cdot q}$ si fa agevolmente, riferendosi appunto a coordinate normali di origine $\underset{o}{\xi}$. Tenuto conto che, in coordinate normali (che contrassegniamo con un indice $_N$) si ha

$$\left\{\begin{aligned}
&\underset{o}{S}{}_{st}^{\cdot\cdot r} \overset{*}{=} \underset{o}{\overset{N}{G}}{}^r_{st} \overset{*}{=} \underset{o}{C}{}_{st}^{\cdot\cdot r}\\
&\underset{o}{S}{}_{st\cdot p}^{\cdot\cdot r} \overset{*}{=} (\nabla_p \overset{N}{G}{}^r_{st})_0 \overset{*}{=} \underset{o}{C}{}_{st\cdot p}^{\cdot\cdot r} - \underset{o}{C}{}_{vt}^{\cdot\cdot r}\underset{o}{C}{}_{sp}^{\cdot\cdot v} - \underset{o}{C}{}_{sv}^{\cdot\cdot r}\underset{o}{C}{}_{tp}^{\cdot\cdot v}\\
&\underset{o}{S}{}_{st\cdot pq}^{\cdot\cdot r} \overset{*}{=} (\nabla_q\nabla_p \overset{N}{G}{}^r_{st})_0 \overset{*}{=} \underset{o}{C}{}_{st\cdot pq}^{\cdot\cdot r} - \underset{o}{C}{}_{pq}^{\cdot\cdot v}\underset{o}{S}{}_{st\cdot v}^{\cdot\cdot r} - \underset{o}{C}{}_{sq}^{\cdot\cdot v}\underset{o}{S}{}_{vt\cdot p}^{\cdot\cdot r} - \underset{o}{C}{}_{tq}^{\cdot\cdot v}\underset{o}{S}{}_{sv\cdot p}^{\cdot\cdot r} -\\
&\qquad - \underset{o}{C}{}_{sp\cdot q}^{\cdot\cdot v}\underset{o}{C}{}_{vt}^{\cdot\cdot r} - \underset{o}{C}{}_{tp\cdot q}^{\cdot\cdot v}\underset{o}{C}{}_{sv}^{\cdot\cdot r} - \underset{o}{C}{}_{vt\cdot q}^{\cdot\cdot r}\underset{o}{C}{}_{sp}^{\cdot\cdot v} - \underset{o}{C}{}_{sv\cdot p}^{\cdot\cdot r}\underset{o}{C}{}_{tp}^{\cdot\cdot v}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right. \tag{27.6}$$

ove $C_{st}^{\cdot\cdot r} = S_{st}^{\cdot\cdot r}$, $C_{st\cdot p}^{\cdot\cdot r}$, $C_{st\cdot pq}^{\cdot\cdot r}, \dots$ sono i successivi tensori normali ([50]) della

([50]) Per le connessioni simmetriche: **11**, p. 566; **40**, p. 89; **41**, p. 68. Pel caso generale: B. **60**, p. 69 e seg.

connessione affine, ricaviamo che i due campi $A^{\cdot p}_{q}$, $\varphi^{\cdot p}_{\cdot q}$ di rappresentazioni affini al finito *coincidono allora e solo che per la connessione tutti i tensori normali sono nulli.* Ma naturalmente *perchè coincidano le connessioni* che tali rappresentazioni al finito determinano, *basta l'annullarsi del primo tensore normale,* che è il *tensore di torsione.*

Da quanto precede risulta anche, ovviamente, che nella costruzione di rappresentazioni al finito cui corrisponda la connessione affine assegnata, alle coordinate normali di origine $\underset{o}{\xi}$ si possono anche sostituire coordinate geodetiche, di ordine ≥ 1, nel punto medesimo.

§ 7. Connessioni metriche; connessioni euclidee.

28. Veniamo ora alle *connessioni metriche subordinabili a connessioni affini*: che sono la connessione metrica di WEYL (generalizzata da CARTAN), e la connessione euclidea secondo CARTAN, che comprende come caso particolare la connessione riemanniana, o « di LEVI-CIVITA » ([51]).

Conviene fare *la costruzione al finito* partendo non da un campo di rappresentazioni omografiche, ma senz'altro da un campo di rappresentazioni affini al finito. Siano queste

$$Z^p = A^{\cdot p}_{q}(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) Z^q \qquad (A^{\cdot p}_{q}(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) = A^p_q). \tag{28.1}$$

Assegniamo *un campo di coni quadrici* negli spazi affini tangenti:

$$g_{rs} Z^r Z^s = 0. \tag{28.2}$$

Assegnare questi coni equivale naturalmente a dare alla X_n *una metrica riemanniana a meno di una arbitraria trasformazione conforme*; cioè un tensore metrico g_{rs} *a meno di un arbitrario fattore scalare.* Esprimiamo che per le rappresentazioni affini al finito (28.1) il campo di coni (28.2) è invariante: per questo si dovrà avere, identicamente nelle $\underset{o}{\xi}^r$ ed ξ^r,

$$g_{rs}(\xi) A^{\cdot r}_{p}(\xi, \underset{o}{\xi}) A^{\cdot s}_{q}(\xi, \underset{o}{\xi}) = \psi(\xi, \underset{o}{\xi}) g_{pq}(\underset{o}{\xi}), \tag{28.3}$$

ove $\psi(\xi, \underset{o}{\xi})$ è un fattore scalare arbitrario, tale soltanto che sia

$$\psi(\underset{o}{\xi}, \underset{o}{\xi}) = 1. \tag{28.4}$$

([51]) Ved. **1**, **10**, **12**, **16**, **20**; **93**, pp. 44-45; **94**, p. 193; **100**, p. 69.

I coefficienti G^r_{st} della connessione affine cui dànno luogo le supposte rappresentazioni al finito sono dati dalle formule analoghe alle (13.3), o da sviluppi analoghi a (13.1):

$$A^{\cdot r}_{\cdot s}(\underset{0}{\xi}, \xi) = \delta^r_s - (\xi^t - \underset{0}{\xi^t})G^r_{st}(\underset{0}{\xi}) - \dots \tag{28.5}$$

Tenuto conto di queste formule le (28.3) ci dànno agevolmente la condizione necessaria e sufficiente *perchè la connessione affine conservi* (cioè: le rappresentazioni al finito lungo una curva cui essa dà luogo conservino) *il campo di coni quadrici* (28.2):

$$\nabla_t g_{rs} = Q_t \cdot g_{rs}, \tag{28.6}$$

ove Q_t è un vettore affine covariante arbitrario.

Si ricavano, nel modo ben noto ([52]), le più generali espressioni dei parametri G^r_{st} tali che valgano le (28.6):

$$G^r_{st} = \left\{ {r \atop st} \right\} - \frac{1}{2}(\delta^r_s Q_t + \delta^r_t Q_s - g^{rp} g_{st} Q_p) + S_{st}^{\cdot\cdot r} - g^{rp}(g_{sq} S_{pt}^{\cdot\cdot q} + g_{tq} S_{ps}^{\cdot\cdot q}) \tag{28.7}$$

ove i simboli $\left\{ {r \atop st} \right\}$ sono relativi a g_{rs}, e il tensore $S_{st}^{\cdot\cdot r}$ (emisimmetrico rispetto ad s, t: tensore di torsione della connessione) è arbitrario.

Il fatto, ben noto, che per un cambiamento del fattore arbitrario di g_{rs},

$$^*g_{rs} = \rho(\xi^1, \dots, \xi^n) \cdot g_{rs} \tag{28.8}$$

Q_t ha la legge di trasformazione

$$^*Q_t = Q_t + \partial_t \log \rho \tag{28.9}$$

si può interpretare ([53]) considerando g_{rs} come *un tensore affine di peso* 0 *ed eccesso* 1 (cioè anche, *grado* 1), e conseguentemente riguardando non $\nabla_r g_{st}$ (calcolata coi parametri G^r_{st} della connessione affine): ma

$$\overset{(W)}{\nabla_r} g_{st} = \nabla_r g_{st} - Q_r g_{st} \tag{28.10}$$

quale derivata covariante di g_{st} (che dunque risulta nulla). In generale, *tensore affine di peso* p, *grado* g sarà un ente rappresentabile in relazione a ciascun riferimento curvilineo e a ciascuna normalizzazione del tensore fondamentale g_{rs} da un sistema $E^{\dots s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_h}$ che ha la legge di trasformazione

([52]) Cfr. **16**, p. 73.
([53]) Cfr. H. **51**, pp. 426-427.

(cfr. la (7.7))

$$E^{\dots s_1' \dots s_k'}_{r_1' \dots r_h'} = \rho^g \Delta^p A^{r_1}_{r_1'} \dots A^{r_h}_{r_h'} A^{s_1'}_{s_1} \dots A^{s_k'}_{s_k} E^{\dots s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_h}. \tag{28.11}$$

La derivata covariante è (cfr. le (17.11), (18.16))

$$\begin{aligned} \overset{(W)}{\nabla_t} E^{\dots s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_h} &= \partial_t E^{\dots s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_h} - (g Q_r + p G^p_{pr}) E^{\dots s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_h} + \\ &+ \sum_1^h {}_j G^p_{r_j t} E^{\dots s_1 \dots s_k}_{r_1 \dots r_{j-1} p r_{j+1} \dots r_h} - \sum_1^k {}_j G^{s_j}_{pt} E^{\dots s_1 \dots s_{j-1} p s_{j+1} \dots s_k}_{r_1 \dots r_h}. \end{aligned} \tag{28.12}$$

Il tensore derivato ha lo stesso grado g e lo stesso peso p.

La connessione affine di parametri (28.7), che conserva il campo di coni quadrici (28.2) e quindi *la metrica angolare* determinata da g_{rs}, è una *connessione metrica di Weyl*: che si riduce a una *connessione euclidea* quando, di più, per una conveniente normalizzazione delle g_{rs} *si possono rendere tutte nulle le* Q_r; alla *connessione riemanniana* quando inoltre la torsione è nulla. Su questo sarebbe superfluo insistere: ricordiamo soltanto che le condizioni perchè una assegnata connessione affine sia *metrica*, o in particolare *euclidea* (o, se è a torsione nulla, *riemanniana*) si trovano esprimendo le condizioni perchè esistano g_{rs}, Q_t tali che valga la (28.6); oppure perchè esista g_{rs} tale che valga, con $Q_t = 0$, la (28.6): in forma esplicita tali condizioni sono state indicate pel secondo caso da EISENHART e VEBLEN [54] e poi, pel caso generale, da uno di noi [55], e sarebbe superfluo riportarle.

§ 8. Connessioni metriche non-euclidee.

29. Le connessioni *affini* e in particolari *metriche, euclidee, riemanniane,* almeno nell'ipotesi dell'assenza di *deviazione,* sono in sostanza riconducibili a leggi di trasporto di vettori, e quindi le possiamo dire connessioni (lineari) *vettoriali.* Diamo ora un esempio di connessioni lineari *puntuali,* cioè non riducibili a leggi di trasporto di vettori: come è la connessione *proiettiva* in generale (e anche la connessione *conforme*). Tali sono, almeno generalmente, le connessioni proiettive *per le quali esiste un campo di quadriche* (non specializzate) *degli spazi tangenti conservato dalla connessione*: che diremo *connessioni (metriche) non-euclidee* perchè, manifestamente, conservano anche le metriche non-euclidee definite sugli spazi tangenti dalle supposte quadriche, prese ciascuna, nel corrispondente spazio, come assoluto [56].

(54) **6.**

(55) B. **78**, pp. 124-125.

(56) Cfr. **57, 58, 68; 69, 74, 75, 77**; B. **78**, p. 127 e seg.; **81**; **87, 88, 89, 90, 91**; **100, 108.**

Sia dato dunque un campo di quadriche degli spazi tangenti,

$$G_{\lambda\mu} z^\lambda z^\mu = 0, \tag{29.1}$$

ove per semplicità supponiamo che i riferimenti proiettivi locali appartengano *a un* B-*riferimento* per la X_n. Supponiamo anche, e questa è una effettiva restrizione ma appare assai naturale, che le quadriche (29.1) *non passino pei rispettivi punti di contatto* degli spazi tangenti che le contengono; onde risulterà $G_{oo} \neq 0$. Poniamo allora [57]

$$\gamma_{\lambda\mu} = c \frac{G_{\lambda\mu}}{G_{oo}}. \qquad (c = \text{cost. arbitr.} \neq 0) \tag{29.2}$$

Mentre $G_{\lambda\mu}$ è da considerarsi un *tensore geometrico* proiettivo, simmetrico, di valenza covariante 2, $\gamma_{\lambda\mu}$ risulterà un *tensore analitico, di peso e grado nullo,* soddisfacente alla condizione $\gamma_{oo} = c$. Supponiamo, in modo da non escludere, accanto al caso generale che dà luogo alle connessioni metriche *non-euclidee,* il caso limite delle connessioni *euclidee,* che le quadriche (29.1) siano o *non specializzate,* o *specializzate tangenzialmente una volta.* In entrambi i casi gli iperpiani polari dei punti di contatto degli spazi tangenti rispetto alle corrispondenti quadriche dànno agli spazi tangenti delle *determinazioni affini,* in relazione alle quali i coni circoscritti dai punti di contatto alle quadriche (29.1) medesime dànno luogo (§ prec.) a una *metrica riemanniana* e quindi a una connessione euclidea, riemanniana. Precisamente: posto

$$\Phi_\lambda = \frac{\gamma_{\lambda o}}{c} = \frac{\gamma_{o\lambda}}{c} = \frac{G_{o\lambda}}{G_{oo}}, \quad g_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu} - c\Phi_\lambda \Phi_\mu \qquad (\Phi_o = 1;\ g_{\lambda o} = g_{o\lambda} = 0) \tag{29.3}$$

gli iperpiani detti sopra, iperpiani impropri delle determinazioni affini in parola, sono gli iperpiani $\Phi_\lambda z^\lambda = 0$, e g_{rs} è un *tensore affine,* che a meno di un fattore costante è il tensore fondamentale della metrica riemanniana cui accennavamo.

Ciò premesso: con procedimento analogo, anzi sostanzialmente identico, a quello accennato al n. 28, ricaviamo dalla condizione (analoga alla (28.3)) perchè un campo (13.4) di rappresentazioni omografiche al finito conservi il campo di quadriche (29.1) la seguente condizione, perchè la connessione proiettiva determinata da quelle rappresentazioni al finito conservi pure il campo di quadriche:

$$\nabla_\lambda \gamma_{\mu\nu} = Q_\lambda \gamma_{\mu\nu}, \tag{29.4}$$

ove Q_λ è un vettore proiettivo covariante arbitrario, le derivate intendendosi

(57) Ved. B. 78, p. 128.

calcolate con un sistema di parametri proiettivi della connessione. E allo stesso modo che si ottengono le (28.7) troviamo che i parametri proiettivi della più generale derivazione proiettiva che conservi il campo di quadriche (29.1) sono

$$(29.5)\qquad \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} - \frac{1}{2}(Q_\lambda \delta^\nu_\mu + Q_\mu \delta^\nu_\lambda - \gamma^{\nu\tau}\gamma_{\lambda\mu} Q_\tau) + \Sigma^{\nu}_{\lambda\mu} - \gamma^{\nu\tau}(\gamma_{\lambda\omega}\Sigma^{\omega}_{\tau\mu} + \gamma_{\mu\omega}\Sigma^{\omega}_{\tau\lambda})$$

ove $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}$ sono « simboli di CHRISTOFFEL » costruiti, secondo VEBLEN, per $\gamma_{\lambda\mu}$ come gli usuali simboli $\left\{ {r \atop st} \right\}$ si costruiscono per un tensore affine γ_{st} (58); si ha

$$(29.6)\qquad \Sigma^{\nu}_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{2}\delta^\nu_o \delta^r_\lambda \delta^s_\mu \sigma^o_{rs},$$

σ^o_{rs} essendo dato dalla (23.6); infine, il vettore proiettivo T_λ che figura nella (23.6) è arbitrario, e il vettore proiettivo covariante Q_λ e il tensore proiettivo, emisimmetrico rispetto a λ, μ, $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ (analitici, di peso e grado 0 entrambi) sono pure arbitrari. Però non è restrittivo identificare, disponendo dell'esistenza di un vettore proiettivo covariante Φ_λ che è determinato dal campo di quadriche, T_λ con questo vettore Φ_λ: il che equivale a *fissare* l'espressione (10.4) di $d\xi^o$, ponendo

$$(29.7)\qquad d\xi^o = -\Phi_r d\xi^r.$$

Poco sopra abbiamo parlato di « *derivazione* » e non di *connessione* proiettiva, e infatti i parametri $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ dànno luogo a una derivazione proiettiva che *formalmente* soddisfa alle (29.4): ma in generale è una derivazione proiettiva *di seconda specie* (n. 19), che non dà luogo dunque a una connessione proiettiva.

Esprimiamo che la derivazione proiettiva in oggetto *è invece di prima specie* scrivendo che sussistono (con ω opportunamente scelto) le (19.5). Troviamo le condizioni

$$(29.8)\qquad Q_o = -2\omega$$

$$(29.9)\qquad \Sigma^{\nu}_{\tau\lambda}\Phi_\nu + \frac{1}{c}(\gamma_{\lambda\mu} S_{\tau o}^{\cdot\cdot\mu} - \gamma_{\tau\mu} S_{\lambda o}^{\cdot\cdot\mu}) + \frac{1}{2}(Q_\lambda \Phi_\tau - Q_\tau \Phi_\lambda) + \frac{1}{2}\delta^r_\lambda \delta^s_\tau (\partial_s \Phi_r - \partial_r \Phi_s) = 0$$

onde ricaviamo, tenute presenti le (29.6), (23.6), (29.7)

$$(29.10)\qquad S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot\nu}\Phi_\nu = \Phi_{[\lambda} Q_{\tau]} - \frac{2}{c}\gamma_{\nu[\lambda} S_{\tau]o}^{\cdot\cdot\nu}.$$

---

(58) **57**, p. 66; **69**, p. 1402, ove la notazione è appunto quella qui usata. Nel nostro caso, secondo SCHOUTEN e STRUIK (**108**, p. 83, form. (8.5)) dovremmo piuttosto usare la notazione $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}$ per quello che qui è $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\} + \frac{1}{2}\delta^\nu_o \delta^r_\lambda \delta^s_\mu \sigma^o_{rs} - \frac{1}{2}\gamma^{\nu t}(\gamma_{\lambda o}\delta^s_\mu \sigma^o_{ts} + \gamma_{\mu o}\delta^r_\lambda \sigma^o_{tr})$. Si tenga presente che $\partial_\nu = \delta^r_\nu \partial_r$.

Anche soddisfatte queste condizioni (che valgono a determinare ad es. le componenti $S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot o}$ di $S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$, note le $S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot r}$) l'arbitrarietà resta grandissima. In particolare quando sia

$$(29.11) \quad \begin{cases} c = -1, \; \Phi_r = 0, \; Q_\lambda = 0, \; S_{rs}^{\cdot\cdot t} = 0, \\ \gamma_{rt} S_{so}^{\cdot\cdot t} + \gamma_{st} S_{ro}^{\cdot\cdot t} = 0 \qquad \text{(onde } \Gamma_{rs}^o = -\Gamma_{sr}^o = \gamma_{rt}\Gamma_{os}^t, \text{ ecc.)} \end{cases}$$

si ritrova una connessione utilizzata da Schouten e v. Dantzig ([59]); e quando sia

$$(29.12) \qquad c = 1, \; Q_\lambda = -2\Phi_\lambda, \; -2\Sigma_{\mu\nu}^{\lambda} = \left(\left\{ {\lambda \atop \mu 0} \right\} - \delta_\mu^\lambda\right)\Phi_\nu - \left(\left\{ {\lambda \atop \nu 0} \right\} - \delta_\nu^\lambda\right)\Phi_\mu$$

un'altra indicata da Veblen ([60]). Più semplice, e a differenza di queste, *determinata dall'assegnazione del campo di quadriche*, è la connessione non-euclidea trovata da uno di noi due ([61]), soddisfacente a queste condizioni: a) *di essere a deviazione nulla*; b) *di avere le stesse geodetiche della connessione riemanniana che ha* g_{rs} *quale tensore metrico fondamentale*; c) *di essere a torsione nulla*. Le condizioni a), b) portano come conseguenza che il tensore affine $S_{rs}^{\cdot\cdot p} g_{pt}$ deve essere *emisimmetrico*; e dànno, pei parametri *normalizzati* della connessione, le espressioni

$$(29.13) \quad \begin{aligned} \underset{1}{\Gamma_{st}^r} &= \left\{ {r \atop st} \right\}_g + \delta_s^r \Phi_t + \delta_t^r \Phi_s + S_{st}^{\cdot\cdot r}; \quad \underset{1}{\Gamma_{ot}^r} = \delta_t^r; \quad \underset{1}{\Gamma_{\beta o}^\alpha} = \delta_\beta^\alpha \\ \underset{1}{\Gamma_{st}^o} &= \partial_t \Phi_s - \left(\left\{ {p \atop st} \right\}_g + S_{st}^{\cdot\cdot p}\right)\Phi_p - \Phi_s \Phi_t - \frac{1}{c} g_{st} \end{aligned}$$

(i simboli $\left\{ {p \atop st} \right\}_g$ essendo costruiti per g_{rs}).

In particolare quando si fissi la scelta degli iperpiani $\overset{o}{B}_\lambda$ dei riferimenti locali, facendoli coincidere con gli iperpiani polari dei punti di X_n rispetto alle corrispondenti quadriche (29.1), abbiamo naturalmente $\Phi_r = 0$, onde

$$(29.14) \qquad \underset{1}{\Gamma_{st}^r} \overset{*}{=} \left\{ {r \atop st} \right\}_g + S_{st}^{\cdot\cdot r}, \quad \underset{1}{\Gamma_{st}^o} \overset{*}{=} -\frac{1}{c} g_{st};$$

e aggiungendo infine la condizione, c), *dell'annullarsi della torsione*, abbiamo

([59]) Ved. p. es. **69**, p. 1400 e seg.; B. **78**, p. 129. Le (29.11) naturalmente hanno valore invariante soltanto per le trasformazioni (3.3) delle sole coordinate curvilinee.

([60]) **57**, p. 74; B. **78**, p. 129.

([61]) Ved. B. **78**, p. 128 e seg. Si può notare che, per le applicazioni alla Relatività, una maggiore complessità può essere necessaria, in quanto occorre un tensore affine emisimmetrico F_{rs}: che nelle teorie di Veblen e di Schouten e v. Dantzig risulta, in sostanza, dalla presenza di una *deviazione* non nulla.

quella particolare connessione non-euclidea determinata dal campo di quadriche, cui avevamo accennato:

$$\underset{1}{\Gamma}{}^r_{st} \stackrel{*}{=} \left\{ {r \atop st} \right\}_g, \quad \underset{1}{\Gamma}{}^0_{st} \stackrel{*}{=} -\frac{1}{c} g_{st}. \tag{29.15}$$

Per $c \to \infty$ essa diviene la *connessione riemanniana* determinata da g_{rs}; ma anche nel caso generale essa presenta semplicità non minore di quella della connessione riemanniana ([62]).

30. È assai probabile che costruzioni analoghe a quelle ora esposte possano utilmente servire nello studio delle connessioni *conformi*, che possono riguardarsi come un caso particolare di connessioni proiettive, ma per una X_n cui sono associati *degli spazi proiettivi* (n + 1)-*dimensionali* in cui sono date quadriche n-dimensionali. Si rientra così in quella generalizzazione della nozione di spazio, indicata dal KÖNIG ([63]); come già da molto tempo è stato osservato dallo SCHOUTEN ([64]). Ma sia sulle varietà a connessione conforme, che sulle differenti connessioni che possono darsi a uno spazio di KÖNIG — cui sono dedicati parecchi studi recenti, dovuti a uno di noi e ad altri Autori ([65]) — non possiamo qui soffermarci: rimandiamo a lavori ulteriori, e all'opera d'insieme preannunciata nella Introduzione, per l'esposizione delle nostre vedute sull'argomento.

BIBLIOGRAFIA

1918 - 1. H. WEYL: *Reine Infinitesimalgeometrie.* « Mathem. Zeitschrift », 2, 1918, 384-411.

1919 - 2. R. KÖNIG: *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre.* « Jahresber. D. M. Ver. », 28, 1919, 213-228.

1921 - 3. H. WEYL: *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.* « Göttinger Nachrichten », 1921, 99-112.

1922 - 4. E. CARTAN: *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion.* « Comptes Rendus », Paris, 174, 1922, 593-595.

([62]) Non era da aspettarsi di trovare, in una connessione non-euclidea *determinata* dal campo di quadriche, elementi che non siano già anche nella connessione riemanniana corrispondente: giacchè l'assoluto della metrica non-euclidea locale è *determinato*, nella geometria euclidea locale di tensore metrico g_{rs}, quale ipersfera dello spazio tangente col centro nel punto di contatto, e raggio $\sqrt{-c}$.

([63]) Ved. **2**

([64]) **18**, **34**.

([65]) Ved. circa le connessioni conformi **101**, H. **102**; **103**, **109** (per citare soltanto i lavori più recenti); circa gli spazi di König e generalizzazioni **79**, **98**, H. **106**.

1922 - **5.** E. Cartan: *Sur les espaces généralisés et la théorie de la Relativité.* Ibid., 734-737,
» - **6.** L. P. Eisenhart, O. Veblen: *The Riemann Geometry and its generalization.* « Proceedings of the Nat. Acad. of the U. S. A. », 8, 1922, 19-23.
» - **7.** O. Veblen: *Normal coördinates for the geometry of paths.* Ibid., 192-197.
» - **8.** L. P. Eisenhart: *Spaces with corresponding paths.* Ibid., 8, 1922, 233-238.
» - **9.** O. Veblen: *Projective and affine geometry of paths.* Ibid., 347-350.

1923 - **10.** H. Weyl: *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Berlin, Springer, 1923.
» - **11.** O. Veblen, T. Y. Thomas: *The geometry of paths.* « Transactions Amer. Math. Soc. », 25, 1923, 551-608.
» - **12.** E. Cartan: *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la Relativité généralisée.* « Annales Ec. Norm. Sup. », (3), 40, 1923, 325-412; 41, 1924, 1-25; 42, 1925, 17-88.
» - **13.** E. Cartan: *Les espaces à connexion conforme.* « Annales Soc. Polon. », 2, 1923, 171-221.

1924 - **14.** E. Cartan: *Sur les variétés à connexion projective.* « Bulletin Soc. Mathém. », 52, 1924, 205-241.
» - **15.** E. Cartan: *Sur la connexion projective des surfaces.* « Comptes Rendus », Paris, 178, 1924, 750-752.
» - **16.** J. A. Schouten: *Der Ricci-Kalkül.* Berlin, Springer, 1924.
» - **17.** J. A. Schouten: *On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements.* « Proceedings Kon. Akad. », Amsterdam, 27, 1924, 407-424.
» - **18.** J. A. Schouten: *Sur les connexion conformes et projectives de M. Cartan et la connexion linéaire générale de M. König.* « Comptes Rendus », Paris, 178, 1924, 2044-2046.
» - **19.** V. Hlavaty: *Sur le déplacement linéaire du point.* « Vestník Kral. Ceské Spol. Nauk. », Praga, 2, 1924, 13, 8 p.
» - **20.** E. Cartan: *Les récentes généralisations de la notion d'espace.* « Bull. Sc. Mathém. », 48, 1924, 294-320.

1925 - **21.** O. Veblen: *Remarks on the foundations of geometry.* « Bull. Amer. Mathém. Soc. », 31, 1925, 121-141.
» - **22.** T. Y. Thomas: *On the projective and equiprojective geometry of paths.* « Proceed. Nat. Acad. », 11, 1925, 199-203.
» - **23.** O. Veblen, J. M. Thomas: *Projective normal coördinates for the geometry of paths.* Ibid., 204-207.
» - **24.** J. M. Thomas: *Note on the projective geometry of paths.* Ibid., 207-209.
» - **25.** T. Y. Thomas: *Note on the projective geometry of paths.* « Bull. Amer. Math. Soc. », 31, 1925, 318-322.
» - **26.** T. Y. Thomas: *Announcement of a projective theory of affinely connected manifolds.* « Proceed. Nat. Acad. », 11, 1925, 588-589.
» - **27.** J. A. Schouten: *On the conditions of integrability of covariant differential equations.* « Transactions Amer. Math. Soc. », 27, 1925, 441-473.
» - **28.** J. A. Schouten: *Projective and conformal invariants of half-symmetrical connections.* « Proceedings Kon. Akad. », Amsterdam, 28, 1925, 334-336.
» - **29.** E. Cartan: *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés.* « Acta Mathem. », 48, 1925, 1-42.

1926 - **30.** J. A. Schouten: *Ueber die Projektivkrümmung und konformkrümmung halbsymmetrischer Uebertragungen.* « In memoriam Lobatschewskij », Kazan, 1926, 90-98.

1926 - **31.** J. M. Thomas: *On normal coördinates in the geometry of paths.* « Proceed. Nat. Acad. », 12, 1926, 58-63.

» - **32.** O. Veblen, J. M. Thomas: *Projective invariants of affine geometry of paths.* « Annals of Mathem. », (2), 27, 1926, 279-296.

» - **33.** T. Y. Thomas: *A projective theory of affinely connected manifolds.* « Mathem. Zeitschrift », 25, 1926, 723-733.

» - **34.** J. A. Schouten: *Erlanger Programm und Uebertragungslehre: neue Gesichtpunkte zur Grundlegung der Geometrie.* « Rendic. Palermo », 50, 1926, 142-169.

1927 - **35.** E. Cartan: *La géométrie des groupes de transformations.* « Journal de Mathém. », 6, 1927, 1-119.

» - **36.** E. Bompiani: *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.* « Rendic. Lincei », (6), 5, 1927, 383-389.

» - **37.** E. Bortolotti: *Sistemi assiali e connessioni nelle* V_n. Ibid., 390-395.

» - **38.** M. S. Knebelman: *Groups of collineations in a space of paths.* « Proceed. Nat. Acad. », 13, 1927, 396-400.

» - **39.** T. Y. Thomas: *The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths.* « Annals of Mathem. », (2), 28, 1927, 549-561.

» - **40.** O. Veblen: *Invariants of quadratic differential forms.* « Cambridge, at the Univ. Press », 1927 (« Cambridge Tracts », n° 24).

» - **41.** L. P. Eisenhart: *Non-Riemannian Geometry.* New-York, 1927 (« Amer. Mathem. Soc. Colloquium Publications », VIII).

» - **42.** M. H. A. Newman: *A gauge-invariant Tensor calculus.* « Proceed. Royal Soc. London », A. 116, 1927, 603-623.

» - **43.** V. Hlavaty: *Sur les déplacements isohodoïques.* « L'Einsegn. Mathém. », 26, 1927, 84-97.

» - **44.** V. Hlavaty: *Théorie des densités dans le déplacement général.* « Annali di Matem. », (4), 5, 1927-28, 73-83.

1928 - **45.** A. J. Mc Connell: *Il trasporto parallelo di un vettore lungo un circuito finito.* « Rendiconti Lincei », (6), 7, 1928, 208-213 (Nota I) e 306-309 (Nota II: *Caso di uno spazio Riemanniano*).

» - **46.** V. Hlavaty: *Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas « A projective theory of affinely connected manifolds ».* « Mathem. Zeitschrift », 28, 1928, 142-146.

» - **47.** H. P. Robertson: *Note on projective coördinates.* « Proceed. Nat. Acad », 14, 1928, 153-154.

» - **48.** O. Veblen: *Projective Tensors and connections.* Ibid., 154-166.

» - **49.** O. Veblen: *Differential Invariants and Geometry.* « Atti Congresso Internazionale », Bologna 1928, 1, 181-189.

» - **50.** T. H. Thomas: *Concerning the *G group of transformations.* « Proceed. Nat. Acad. », 14, 1928, 728-734.

1929 - **51.** J. A. Schouten, V. Hlavaty: *Zur Theorie der allgemeinen linearen Uebertragung.* « Mathem. Zeitschrift », 30, 1929, 414-432.

» - **52.** O. Veblen: *Generalized projective geometry.* « Journal London Mathem. Soc. », 4, 1929, 140-160.

» - **53.** H. P. Robertson, H. Weyl: *On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry.* « Bull. Amer. Mathem. Soc. », 35, 1929, 686-690.

» - **54.** H. Weyl: *On the foundations of general infinitesimal geometry.* Ibid., 716-725.

» - **55.** J. H. C. Whitehead: *On a class of projectively flat affine connections.* « Proceedings London Mathem. Soc. », (2), 32, 1929, 93-114.

1930 - **56.** S. GOLAB: *Ueber verallgemeinerte projektive Geometrie.* « Prace Matem. Fiz. », Varsavia, 37, 1930, 91-153.

» - **57.** O. VEBLEN: *A generalization of the quadratic differential form.* « The Quarterly Journal of Math. », Oxford Series, 1, 1930, 60-76.

» - **58.** O. VEBLEN, B. HOFFMANN: *Projective Relativity.* « Phys. Review », 36, 1930, 810-822.

» - **59.** G. THOMSEN: *Topologische Fragen der Differentialgeometrie XVI: Ueber die topologischen Invarianten der Differentialgleichung* $y'' = f(x, y)y'^3 + g(x, y)y'^2 + h(x, y)y' + k(x, y)$. « Abhandlungen Mathem. Semin. Hamb. Univ. ». 7, 1930, 301-328.

» - **60.** E. BORTOLOTTI: *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo.* « Annali di Matem. », (4), 8, 1930, 53-101.

» - **61.** J. A. SCHOUTEN, S. GOLAB: *Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen.* (I) « Mathem. Zeitschrift », 32, 1930, 192-214 e (II) « Annali di Matematica », (4), 8, 1930, 141-157.

» - **62.** L. P. EISENHART: *Projective normal coördinates.* « Proceed. Nat. Acad. », 16, 1930, 731-740.

» - **63.** J. H. C. WHITEHEAD: *A method of obtaining normal representations for a projective connection.* Ibid., 754-760.

» - **64.** E. BORTOLOTTI: *Connessioni proiettive.* « Bollettino Un. Matem. Italiana », 9, 1930, 288-294; e 10, 1931, 28-34, 83-90.

1931 - **65.** J. H. C. WHITEHEAD: *The representation of projective spaces.* « Annals of Mathem. », (2), 32, 1931, 327-360.

» - **66.** E. BORTOLOTTI: *Differential invariants of direction and point displacements.* Ibid., 361-377.

» - **67.** E. BORTOLOTTI: *Forme di Fubini e connessioni proiettive nelle ipersuperficie di* S_n. « Rendiconti Semin. Fac. Sc. Cagliari », 1, 1931, 38-44.

» - **68.** B. HOFFMANN: *Projective Relativity and the Quantum Field.* « Phys. Review », 37, 1931, 88-89.

» - **69.** J. A. SCHOUTEN, D. van DANTZIG: *Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie.* « Proceedings Kon. Akad. », Amsterdam, 34, 1931, 1398-1407.

1932 - **70.** E. BORTOLOTTI: *Sulle connessioni proiettive.* « Rendiconti Palermo », 56, 1932, 1-57.

» - **71.** D. van DANTZIG: *Theorie des projektiven Zusammenhangs* n*-dimensionaler Räume.* « Mathem. Annalen », 106, 1932, 400-454.

» - **72.** R. WEITZENBÖCK: *Ueber projektive Differentialinvarianten, VII.* « Proceedings Kon. Akad. », Amsterdam, 35, 1932, 462-468.

» - **73.** D. van DANTZIG: *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie.* Ibid., 524-534 (I. *Einordnung der Affingeometrie*); 535-542 (II. X_{n+1} *mit eingliediger Gruppe*).

» - **74.** J. A. SCHOUTEN, D. van DANTZIG: *Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie* (G. F. I). Ibid., 642-655.

« - **75.** J. A. SCHOUTEN, D. van DANTZIG: *Zur generellen Feldtheorie. Diracsche Gleichungen und Hamiltonsche Funktion.* (G. F. II). Ibid., 844-852.

» - **76.** R. WEITZENBÖCK: *Ueber den Reduktionssatz bei affinem und projektivem Zusammenhang.* Ibid., 1220-1229.

» - **77.** J. A. SCHOUTEN, D. van DANTZIG: *Generelle Feldtheorie.* (G. F. III). « Zeitschrift für Physik », 78, 1932, 639-667.

» - **78.** E. BORTOLOTTI: *Spazi proiettivamente piani.* « Annali di Matem. », (4) 11, 1932, 111-134.

1932 - **79.** R. KÖNIG: *Zur Grundlegung der Tensorrechnung.* « Jahersber. D. Math. Ver. », 41, 1932, 169-189.

» - **80.** V. HLAVATY, S. GOLAB: *Zur Theorie der Vektor- und Punktkonnexion.* « Prace Matem. Fiz. », Varsavia, 39, 1932, 119-130.

1933 - **81.** O. VEBLEN: *Projektive Relativitätstheorie.* Berlin, Springer 1933 (« Ergebnisse der Mathem. », II, 1).

» - **82.** D. van DANTZIG: *Ueber projektive Differentialgeometrie.* « Jahresber. D. Math. Ver. », 42, 1933, Zweite Abt. (Angelegenheiten), p. 25.

» - **83.** V. HLAVATY: *Invariants projectifs d'une hypersurface.* « Rendiconti Palermo », 57, 1933, 402-432.

» - **84.** V. HLAVATY: *Connexion projective et déplacement projectif.* « Annali di Matem », (4), 12, 1933, 217-294.

» - **85.** V. HLAVATY: *Ueber eine Art der Punktkonnexion.* « Mathem. Zeitschrift », 38, 1933, 135-145.

» - **86.** W. MAYER: *Zum Tensorkalkül in Vektorräumen Riemannscher Mannigfaltigkeiten.* « Monatshefte Math. Phys. », 40, 1933, 283-293.

» - **87.** J. A. SCHOUTEN: *Zur generellen Feldtheorie*; *Ableitung des Impulsenergiestrom-projektors aus einem Variationsprinzip.* (G. F. IV). « Zeitschrift für Physik », 81, 1933, 129-138.

» - **88.** J. A. SCHOUTEN; *Zur generellen Feldtheorie. Raumzeit und Spinraum.* (G. F. V). Ibid., 405-417.

» - **89.** J. A. SCHOUTEN, D. van DANTZIG: *On projective connexions and their application to the general Field-Theory.* (G. F. VI). « Annals of Mathem. », (2), 34, 1933, 271-312.

» - **90.** J. A. SCHOUTEN: *Zur generellen Feldtheorie. Semivektoren und Spinraum.* (G. F. VII). « Zeitschrift für Physik », 84, 1933, 92-111.

1934 - **91.** J. A. SCHOUTEN, J. HAANTJES: *Generelle Feldtheorie.* VIII. *Autogeodätische Linien und Weltlinien.* Ibid , 89, 1934, 357-369.

» - **92.** D. van DANTZIG: *On the general projective differential geometry.* III. *Projektive pointfield-algebra and -analysis.* « Proceedings Kon. Akad. », Amsterdam, 37, 1934, 150-155.

» - **93.** D. J. STRUIK: *Theory of linear connections.* Berlin, Springer 1934 (« Ergebnisse d. Mathem. », III, 2).

» - **94.** J. L. VANDERSLICE: *Non-holonomic Geometries.* « Amer. Journal of Mathem. », 56, 1934, 153-193.

» - **95.** R. KÖNIG, E. PESCHL: *Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum.* « Leipziger Berichte », 86, 1934, 129-154 (I), 267-298 (II), 383-410 (III) e 87, 1935, 223-250 (IV).

» - **96.** T. Y. THOMAS: *The differential invariants of generalized spaces.* « Cambridge Univ. Press », Cambridge 1934.

» - **97.** S. FINIKOFF: *Sur les couples de surfaces dont les tangentes asymptotiques aux points homologues concourent.* « Atti R. Accad. Torino », 70, 1934-35, 212-219.

» - **98.** K. MORINAGA: *On parallel displacements in an* n*-dimensional Space to which* N*-dimensional General Vector Spaces are attached.* « Journal Hiroshima Univ. », (A). 5, 1934, 13-30.

1935 - **99.** E. CARTAN: *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés.* Paris, Hermann 1935 (« Act. Sc. et Ind. », 194, « Exp. de Géom. », V).

» - **100.** J. A. SCHOUTEN: *La théorie projective de la Relativité.* « Annales Inst. Poincaré », Paris, 5, 1935, 51-88.

1935 - **101.** O. Veblen: *Formalism for conformal geometry.* « Proceeding Nat. Acad. », 21, 1935, 168-175.

» - **102.** V. Hlavaty: *Zur Konformgeometrie.* I. *Eichinvariante Konnexion*; II. *Anwendungen, insbesondere auf das Problem der Affinnormale*; III. *Anwendungen auf die Kurventheorie.* « Proceedings Kon. Akad. », 3, Amsterdam, 38, 1935, 281-286, 738-743, 1006-1010.

» - **103.** J. A. Schouten, J. Haantjes: *Ueber allgemeine konforme Geometrie in projektiver Behandlung.* Ibid., 706-708 (I) e 39, 1936, p. 27 (II).

» - **104.** J. A. Schouten, D. van Dantzig: *Was ist Geometrie?* « Abhandlungen Semin für Vektor- und Tensoranalysis », Mosca, 2-3, 1935, 15-50.

» - **105.** V. Hlavaty: *Système complet des invariants d'une courbe dans un espace projectif courbe.* Ibid., 119-150.

» - **106.** V. Hlavaty: *Espaces abstraits courbes de König.* « Rendiconti Palermo », 59, 1935, 1-39.

» - **107.** J. A. Schouten, J. Struik: *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.* (Zweite Aufl.). P. Noordhoff, Groningen 1935 (I. Band: *Algebra und Uebertragungslehre*).

» - **108.** J. A. Schouten, J. Haantjes: *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie.* « Compositio Mathematica », 3, 1936, 1-51.

» - **109.** J. A. Schouten, J. Haantjes: *Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie.* « Mathem. Annalen », 112, 1936, 594-629.

Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

par T. WAZEWSKI (Kraków-Pologne).

Nous montrerons comment les problèmes de l'unicité et de la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations *aux dérivées partielles* du premier ordre [cf. (6)] peuvent être réduits à l'examen de certains systèmes d'équations différentielles *ordinaires*. Nous obtiendrons ainsi des théorèmes se prêtant à la limitation effective des intégrales en question.

Nous nous servons, dans les démonstrations, d'une méthode — convenablement généralisée — que nous avons construite précédemment (1) dans le cas d'une seule équation. Nos théorèmes constituent une généralisation des théorèmes démontrés par A. HAAR (2) au moyen d'une méthode différente, qui ne met pas en évidence le rapport du problème en question avec la théorie des équations différentielles ordinaires.

NOTATIONS. — Désignons par T l'ensemble des points réels $(x, y_1, \dots, y_n)$ pour lesquels on a

$$\text{(T)} \qquad |x| < a, \quad c_\nu + L_\nu |x| \leq y_\nu \leq d_\nu - L_\nu |x|, \qquad (\nu = 1, \dots, n)$$

où

$$L_\nu \geq 0, \quad c_\nu < d_\nu, \quad a \leq \frac{d_\nu - c_\nu}{2L_\nu}.$$

Nous désignerons par $S(u)$ la section de l'ensemble T par le plan $x = u$.

HYPOTHÈSE H. — Nous supposons que les fonctions $\sigma_i(x, z_1, \dots, z_p)$ $(i = 1, \dots, p)$ sont continues et non négatives dans l'ensemble des points $(x, z_1, \dots, z_p)$ pour lesquels on a $0 \leq x < a$, $z_j \geq 0$, $(j = 1, \dots, p)$. Nous supposons ensuite que la fonction σ_i $(i = 1, \dots, p)$ est croissante (au sens large) dans l'intervalle fermé $(0, +\infty)$ séparément par rapport à chacune des variables $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_p$. En supposant que $k_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, p)$, nous

(1) « Rendic. d. R. Accad. Naz. dei Lincei », novembre 1933, p. 372.
(2) « C. R. », 2-VII-1928 et « Acta Lit. ac. Sc. Univ. Szeged. », T. IV, p. 103.

désignerons par $z_1 = \omega_1(x, k_1, ..., k_p), ..., z_p = \omega_p(x, k_1, ..., k_p)$ l'intégrale supérieure [1] du système

$$\frac{dz_i}{dx} = \sigma_i(x, z_1, ..., z_p), \qquad (i = 1, ..., p) \tag{1}$$

issue du point $x = 0$, $z_1 = k_1, ..., z_p = k_p$. Nous supposons que cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leq x < a$.

LEMME. — Admettons l'hypothèse H et supposons qu'en tout point de l'ensemble T les fonctions $\psi_i(x, y_1, ..., y_n)$ $(i = 1, ..., p)$ possèdent des dérivées partielles du premier ordre continues et vérifiant les inégalités

$$\left|\frac{\partial\psi_i(x, y_1, ..., y_n)}{\partial x}\right| \leq \sigma_i(|x|, |\psi_1|, ..., |\psi_p|) + \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial y_\nu}\right| \tag{2}$$

et que l'on ait, en plus, en tout point de la section $S(0)$

$$|\psi_i(0, y_1, ..., y_n)| \leq k_i, \qquad (i = 1, ..., p). \tag{3}$$

Cela posé, on aura, en tout point de l'ensemble T, les inégalités

$$|\psi_i(x, y_1, ..., y_n)| \leq \omega_i(|x|, k_1, ..., k_n), \qquad (i = 1, ..., p). \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. — Les points $(x, ..., y_n)$ de T pour lesquels $x \geq 0$ forment un ensemble T_1 auquel nous nous bornons pour le moment. Soit $\varphi(x_1, ..., y_n)$ une fonction possédant dans T_1 des dérivées partielles continues du premier ordre.

Désignons par $M(u)$ la valeur maxima de φ dans la section $S(u)$ de T_1, par $M'_+(u)$ et $M'_-(u)$ les dérivées à droite et à gauche de $M(u)$.

Cela étant, il existe pour tout x $(0 \leq x < a)$ un point B de la section $S(x)$ pour lequel on a [2]

$$M(x) = \varphi(B); \quad M'_+(x) = \frac{\partial\varphi(B)}{\partial x} - \sum_{\nu/1}^{n} \left|\frac{\partial\varphi(B)}{\partial y_\nu}\right| L_\nu .$$

Une propriété identique subsiste pour la dérivée à gauche lorsque $x > 0$. Définissons $M_i(x)$ à partir de ψ_i de la même façon que nous venons de définir $M(x)$ à partir de φ. Il existera, pour toute valeur de x $(0 \leq x < a)$,

---

[1] Pour la définition et l'existence de l'intégrale supérieure du système (1) v. E. KAMKE, *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*, (« Acta mathematica », T. 58, p. 74 s. s.). Dans le cas de l'unicité, l'intégrale supérieure se confond avec l'intégrale au sens ordinaire.

[2] Cf. T. WAZEWSKI, *Sur l'unicité etc.*, « Rendiconti Lincei », T. XVIII, novembre 1933, p. 372.

un point B_i $(i=1,\ldots, p)$ de la section $S(x)$ pour lequel on aura

$$M_i(x)=\psi_i(B_i);\quad (M_i'(x))_+=\frac{\partial\psi_i(B_i)}{\partial x}-\sum_{\nu/1}^{n}\left|\frac{\partial\psi_i(B_i)}{\partial y_\nu}\right|L_\nu. \tag{5}$$

En désignant par $W_i(x)$ la valeur maxima de $|\psi_i|$ dans la section $S(x)$ nous obtiendrons [cf. (2), (5) et l'hypothèse H] les inégalités

$$(M_i'(x))_+\leq \sigma_i(x, |\psi_i(B_i)|,\ldots, |\psi_{i-1}(B_i)|, |M_i(x)|, |\psi_{i+1}(B_i)|,\ldots, |\psi_p(B_i)|)\leq$$
$$\leq \sigma_i(x, W_1(x),\ldots, W_{i-1}(x), |M_i(x)|, W_{i+1}(x),\ldots, W_p(x)).$$

En désignant par $N_i(x)$ la valeur maxima de $-\psi_i(x)$ dans la section $S(x)$ nous obtiendrons les inégalités analogues

$$(N_i'(x))_+\leq \sigma_i(x, W_1(x),\ldots, W_{i-1}(x), |N_i(x)|, W_{i+1}(x),\ldots, W_p(x)).$$

Mais $W_i(x)=\max(M_i(x), N_i(x))$. Nous aurons donc ou bien

$$0\leq W_i(x)=M_i(x)=|M_i(x)| \quad \text{et} \quad (M_i'(x))_+=(W_i'(x))_+$$

ou bien

$$0\leq W_i(x)=N_i(x)=|N_i(x)| \quad \text{ot} \quad (N_i'(x))_+=(W_i'(x))_+.$$

Dans chacun de ces cas nous aurons évidemment

$$(W_i'(x))_+\leq \sigma_i(x, W_1,\ldots, W_{i-1}, W_i, W_{i+1},\ldots, W_p), \qquad (0\leq x< a).$$

Une inégalité identique subsistera pour la dérivée à gauche. En observant que $W_i(0)\leq k_i$ [cf. (3)], nous en déduirons les inégalités $W_i(x)\leq\omega_i(x, k_1,\ldots, k_p)$ (¹) (pour $0\leq x<a$) d'où il résulte que les inégalités (4) subsistent dans T_1. En remplaçant x par $-x$ nous vérifions que ces inègalités ont lieu dans l'ensemble T tout entier, c. q. f. d.

Considérons maintenant le système d'équations

$$\frac{\partial z_i}{\partial x}=f_i\left(x, y_1,\ldots, y_n, z_1,\ldots, z_p, \frac{\partial z_i}{\partial y_1},\ldots, \frac{\partial z_i}{\partial y_n}\right). \qquad (i=1,\ldots, p) \tag{6}$$

où $z_i(x, y_1,\ldots, y_n)$ désignent les fonctions inconnues et le deuxième membre de la i-ème équation ne contient pas de dérivées des fonctions $z_1,\ldots, z_{i-1}, z_{i+1},\ldots, z_p$.

THÉORÈME 1. — Adoptons l'hypothèse H et supposons que dans le domaine d'existence (²) de f_i $(i=1,\ldots, p)$ on ait:

$$|f_i(x,\ldots, y_n, \bar z_1,\ldots, \bar z_p, \bar q_{i,1},\ldots, \bar q_{i,p})-f_i(x,\ldots, y_n, z_1,\ldots, z_p, q_{i,1},\ldots, q_{i,p})|\leq$$
$$\leq\sigma_i(|x|, |\bar z_1-z_1|,\ldots, |\bar z_p-z_p|)+\sum_{\nu/1}^{n}L_\nu|\bar q_{i,\nu}-q_{i,\nu}|.$$

(¹) Ceci résulte facilement des raisonnements se trouvant dans le travail cité plus haut de M. KAMKE, p. 76 s. s.

(²) Dans les théorèmes 1, 2, 3 il suffit de supposer que les inégalités figurant dans leurs prémisses sont vérifiées dans des ensembles dont le nombre de dimensions est plus petit. Pour le cas $p=1$, cf. T. WAZEWSKI, loc. cit., au bas de la page 372 et S. TURSKI: *Sur l'unicité etc.*, « Annales de la Soc. Polon. d. Math. », T. XII, p. 81.

Soient $z_1 = \chi_1, \dots, z_p = \chi_p$ et $z_1 = \rho_1, \dots, z_p = \rho_p$ deux intégrales du système (6) qui possèdent dans T des dérivées partielles continues du premier ordre et qui remplissent dans la section $S(0)$ les inégalités

$$|\chi_i(0, y_1, \dots, y_n) - \rho_i(0, y_1, \dots, y_n)| \leq k_i, \qquad (i = 1, \dots, p).$$

On aura alors dans T les inégalités

$$|\chi_i(x, y_1, \dots, y_n) - \rho_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq \omega_i(|x|, k_1, \dots, k_p).$$

Pour le démontrer, il suffit de poser $\psi_i = \chi_i - \rho_i$ et d'appliquer le lemme précédent.

Théorème 2. — Conservons relativement aux f_i les hypothèses du théorème précédent et supposons en plus que le système d'équations ordinaires (1) admette une intégrale unique passant par l'origine $(0, \dots, 0)$ et que cette intégrale soit nulle dans l'intervalle $0 \leq x < a$.

Soient $z_1 = \chi_1, \dots, z_p = \chi_p$ et $z_1 = \rho_1, \dots, z_p = \rho_p$ deux intégrales du système (6) qui possèdent dans T des dérivées partielles continues du premier ordre et qui sont identiques dans la section $S(0)$ [c.-à.-d. $\chi_i(0, y_1, \dots, y_n) \equiv \equiv \rho_i(0, y_1, \dots, y_n)$]. Cela étant, ces intégrales sont identiques dans T.

Ceci résulte du théorème précédent lorsqu'on pose $k_i = 0$. Voici finalement une conséquence de notre lemme:

Théorème 3. — Conservons l'hypothèse H et supposons que, dans le domaine d'existence de f_i, on ait

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p, q_{i,1}, \dots, q_{i,p})| \leq \sigma_i(|x|, |z_1|, \dots, |z_p|) + \sum_{\nu/1}^{n} L_\nu |q_{i,\nu}|.$$

Soit $z_1 = \chi_1, \dots, z_p = \chi_p$ une intégrale du système (6) possédant dans T des dérivées partielles continues du premier ordre et vérifiant sur la section $S(0)$ les inégalités $|\chi_i(0, y_1, \dots, y_n)| \leq k_i$. Sous ces conditions, on aura $|\chi_i| \leq \omega_i(|x|, k_1, \dots, k_p)$ en tout point de T.

Sulle condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi di forma parametrica.

Memoria di GIANFRANCO CIMMINO (a Napoli).

Sunto. - *Viene provato, togliendo alcune restrizioni che occorrevano nelle dimostrazioni di altri autori, che, per un integrale doppio di forma parametrica, le condizioni che esso sia semidefinito positivo e semiregolare, oltrechè necessarie, sono anche sufficienti perchè esso sia inferiormente semicontinuo in tutto un campo.*

In un recente lavoro di R. CACCIOPPOLI [1] si trovano formulate, come condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità inferiore in tutto un campo degli integrali doppi di forma parametrica, le seguenti: 1°) che l'integrale da minimizzare sia *semidefinito positivo* (cioè che la relativa funzione integranda F non sia mai negativa), 2°) che esso sia *semiregolare* (cioè che la relativa funzione E di Weierstrass non sia mai negativa).

Il fatto che queste condizioni riescono necessarie, come si mostra facilmente con esempi [2], mentre poi riescono sufficienti le analoghe condizioni nel caso degl'integrali semplici [3] (caso in cui esse non sono, però, più necessarie) rendeva presumibile il teorema enunciato da R. CACCIOPPOLI nel suo studio citato; in questo egli peraltro, ponendosi nelle ipotesi più generali e considerando superficie supposte soltanto *quadrabili* [4], si limita a dimostrare che per la semicontinuità dell'integrale è sufficiente, o che esso sia semidefinito e regolare (cioè $F \geq 0$, $E > 0$), oppure definito e semiregolare

---

(1) *Gli integrali doppi di forma parametrica nel calcolo delle variazioni*, « Atti del R. Ist. Veneto », **93**, 705-730, (1935).

(2) Cfr. R. CACCIOPPOLI, loc. cit., p. 717 e p. 724.

(3) L. TONELLI, *Calcolo delle Variazioni*, t. I, p. 275. Si noti che il termine *quasi-regolare* dell'enunciato di TONELLI non ha lo stesso significato del termine *semiregolare* qui usato. Ammessa l'esistenza delle derivate seconde della F, la condizione di semiregolarità nel senso qui indicato porta di conseguenza quella di quasi-regolarità nel senso di TONELLI (v. TONELLI, loc. cit., p. 211).

(4) Secondo la teoria sviluppata dallo stesso R. CACCIOPPOLI, che trovasi riassunta nel Capitolo I del lavoro citato.

($F > 0$, $E \geq 0$). Lo scopo della presente ricerca è quello di colmare l'ultima lacuna rimasta, provando, cioè, la sufficienza delle condizioni $F \geq 0$, $E \geq 0$.

Mi pongo qui nell'ipotesi semplificatrice che le superficie di cui si tratta siano *regolari* ([5]). È intuitivamente chiaro che tale ipotesi di regolarità deve essere sovrabbondante; ma, dato che il risultato finale si presenta così notevolmente semplice, mi è parso non privo d'interesse stabilirlo per ora soltanto sotto ipotesi di natura elementare per le superficie, evitando così le più delicate considerazioni che si richiederebbero nel caso generale.

Si noti infine che, se mi limito a considerare il caso degl'integrali doppi, i ragionamenti esposti si estendono tuttavia immediatamente anche al caso degl'integrali n-pli.

§ 1. **Preliminari sulle superficie.**

1. Siano $x(u, v)$, $y(u, v)$ due funzioni continue con derivate parziali prime continue in un dominio limitato D del piano uv, la cui frontiera sia composta da un numero finito di archi di curva dotati in ogni punto di tangente variabile con continuità. Diciamo Σ l'immagine del dominio D sul piano xy nella trasformazione

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{1}$$

La Σ sarà una *superficie piana* che potrà ricoprirsi più volte, ed eventualmente, in alcuni punti, anche infinite volte, vale a dire che una stessa coppia di valori x, y può essere la trasformata di più (eventualmente anche infinite) coppie u, v. Per *frontiera* e *punti interni* di Σ s'intendono rispettivamente i corrispondenti in (1) della frontiera e dei punti interni di D.

L'*area* (semplice) di Σ è fornita dall' $\iint\limits_D \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, dudv$, l'*area totale* dall' $\iint\limits_D \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv$; la *parte positiva* e la *parte negativa dell'area* di Σ sono fornite rispettivamente dalla semisomma e dalla semidifferenza fra l'area totale e l'area semplice.

Se il punto (x, y) è l'immagine in (1) di un numero finito n di punti (u, v), in nessuno dei quali lo jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ si annulli (oltre eventualmente ad altri punti (u, v), in ciascuno dei quali lo jacobiano medesimo sia zero),

([5]) Nel senso specificato al n.° 2.

il numero n si dirà l'*ordine totale* di (x, y) rispetto a Σ; e se fra gli n punti (u, v) ve ne sono n_1 in cui lo jacobiano è positivo ed n_2 in cui esso è negativo, i due numeri n_1 ed n_2 verranno detti rispettivamente *ordine positivo* ed *ordine negativo* di (x, y) rispetto a Σ, e la loro differenza $n_1 - n_2$ sarà l'*ordine* (semplice) di (x, y) rispetto a Σ.

L'insieme dei punti di Σ per cui non resta così definito l'ordine, cioè l'insieme dei punti (x, y) che corrispondono secondo (1) a infiniti punti (u, v), oppure sono immagini di punti (u, v) in cui lo jacobiano si annulla deve necessariamente riuscire trascurabile agli effetti della integrazione che fornisce l'area di Σ, sicchè questa potrà ottenersi anche integrando l'ordine rispetto alle variabili x, y, sull'insieme dei punti (x, y) pei quali l'ordine stesso è stato definito. E analogamente l'area totale, la parte positiva e la parte negativa dell'area di Σ si potranno ottenere ordinatamente mediante un'integrazione rispetto alle variabili x, y dell'ordine totale, dell'ordine positivo e dell'ordine negativo.

Per l'ordine di un punto interno (x, y) rispetto a Σ si può dare anche la seguente definizione, equivalente all'altra: congiungendo (x, y) con un punto che descriva la frontiera di Σ nel verso che corrisponde in (1) al verso positivo ([6]) sulla frontiera di D, il raggio congiungente descriverà un cammino angolare equivalente (quando si trascurino angoli di eguale ampiezza percorsi in versi contrari) a un numero finito di angoli giri nel verso positivo o nel verso negativo, oppure equivalente a zero; il numero, corrispondentemente positivo, negativo o nullo, di questi angoli giri dà l'ordine del punto (x, y) rispetto a Σ.

2. Date tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ continue con le derivate parziali prime nel dominio D, l'immagine S nello spazio xyz del dominio D, secondo le equazioni

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{2}$$

si dirà una *superficie regolare* di dominio base D, e le (2) si diranno una *rappresentazione parametrica regolare* di S.

I *punti interni* e la *frontiera* di S sono ordinatamente i corrispondenti secondo (2) dei punti interni e della frontiera di D.

([6]) Cioè il verso indicato dall'asse tangente che con la normale interna forma una coppia ordinata congruente alla coppia degli assi coordinati x, y.

L'*area* di S, fornita dall' $\iint\limits_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y,\,z)}{\partial(u,\,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,\,x)}{\partial(u,\,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\right)^2}\,dudv$, nel caso particolare che S si riduca a una superficie piana, diventa l'area totale di questa.

3. Supponiamo ora di avere una successione di coppie di funzioni $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, tutte continue in D insieme con le derivate parziali prime, e tali che, uniformemente in D, sia

$$\lim_{n\to\infty} x_n(u,\,v) = x(u,\,v), \qquad \lim_{n\to\infty} y_n(u,\,v) = y(u,\,v). \tag{3}$$

Indichiamo con Σ_n la superficie piana rappresentata da

$$x = x_n(u,\,v), \quad y = y_n(u,\,v). \tag{4}$$

Sia, poi, $\Sigma(\rho)$ una porzione di Σ, che abbia una distanza positiva ρ dalla frontiera di Σ (per esempio, l'insieme di tutti i punti di Σ aventi distanza $> \rho$ dalla frontiera), essendo ρ una quantità inferiore al semidiametro di Σ; e diciamo $D(\rho)$ quella porzione di D, che ha per immagine in (1) $\Sigma(\rho)$.

Poichè le (3) sussistono uniformemente in D, tutti i punti di $\Sigma(\rho)$ faranno parte di Σ_n, da un certo valore di n in poi, ciascuno con lo stesso ordine semplice, come è chiaro in base alla interpretazione geometrica di questo, cui abbiamo accennato in fine del n.° 1. La porzione di Σ_n che si viene così ad ottenere sarà l'immagine in (4) di un'altra porzione $\Delta_n(\rho)$ di D, e riuscirà

$$\iint\limits_{D(\rho)} \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\,dudv = \iint\limits_{\Delta_n(\rho)} \frac{\partial(x_n,\,y_n)}{\partial(u,\,v)}\,dudv, \tag{5}$$

giacchè tanto il primo che il secondo membro rappresentano l'area di $\Sigma(\rho)$.

4. Sia data una successione di superficie regolari S_n, con le rappresentazioni parametriche regolari

$$x = x_n(u,\,v), \quad y = y_n(u,\,v), \quad z = z_n(u,\,v), \tag{6}$$

e col dominio base D; e si supponga che, uniformemente in D, sia

$$\lim_{n\to\infty} x_n(u,\,v) = x(u,\,v), \quad \lim_{n\to\infty} y_n(u,\,v) = y(u,\,v), \quad \lim_{n\to\infty} z_n(u,\,v) = z(u,\,v), \tag{7}$$

laddove le (2) forniscano a loro volta una rappresentazione parametrica regolare della superficie regolare S.

Da quanto abbiamo osservato nel n.° precedente discende facilmente la seguente proposizione:

Dette F_1, F_2, F_3 *tre costanti,* ρ *una quantità opportunamente piccola,* $S(\rho)$ *la porzione di* S *che rimane, quando si tolgono da* S *tutti i punti aventi distanza* $\leq \rho$ *dalla frontiera,* $D(\rho)$ *l'insieme dei punti di* D *avente per immagine* $S(\rho)$ *in* (2), *si potrà determinare, da un certo valore di* n *in poi, un altro campo* $\Delta_n(\rho) < D$, *tale che riesca*

$$(8)\qquad \iint\limits_{D(\rho)} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = \iint\limits_{\Delta_n(\rho)} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ \frac{\partial x_n}{\partial u} & \frac{\partial y_n}{\partial u} & \frac{\partial z_n}{\partial u} \\ \frac{\partial x_n}{\partial v} & \frac{\partial y_n}{\partial v} & \frac{\partial z_n}{\partial v} \end{vmatrix} du dv,$$

almeno tutte le volte che la funzione integranda al primo membro abbia un minimo valore assoluto positivo in D.

Infatti, escludendo il caso privo d'interesse che le F_1, F_2, F_3 siano tutte nulle, diciamo ξ, η, ζ i coseni direttori di un asse equiverso al vettore di componenti F_1, F_2, F_3; diciamo poi ξ', η', ζ' e ξ'', η'', ζ'' i coseni direttori di altri due assi, che col primo formino una terna ortogonale. e definiamo in D due nuove funzioni $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ mediante le posizioni

$$(9)\qquad \alpha = \xi' x + \eta' y + \zeta' z, \quad \beta = \xi'' x + \eta'' y + \zeta'' z,$$

e analogamente le due funzioni $\alpha_n(u, v)$, $\beta_n(u, v)$, mediante le stesse posizioni con le x_n, y_n, z_n invece delle x, y, z.

Ciò posto, la (8) si riduce, a meno del fattore costante $\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$, alla seguente

$$\iint\limits_{D(\rho)} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} du dv = \iint\limits_{\Delta_n(\rho)} \frac{\partial(\alpha_n, \beta_n)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Siamo così ricondotti al caso del n.° precedente; infatti la frontiera della superficie piana Σ, rappresentata da $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$, col dominio base D, per ρ sufficientemente prossimo a zero, avrà una distanza positiva dalla frontiera di quella porzione $\Sigma(\rho)$ della Σ stessa, che corrisponde alla porzione $D(\rho)$ di D, giacchè, in base alle (9), i punti (α, β) di Σ possono pensarsi come le proiezioni, su un piano perpendicolare al vettore di componenti F_1, F_2, F_3, dei punti (x, y, z) di S; e il coseno dell'angolo formato da codesto piano col piano tangente a S, coincidendo a meno del fattore costante $\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}$ con la funzione integranda del primo membro di (8), resterà in valore assoluto inferiormente limitato da una quantità positiva.

§ 2. **Ipotesi e generalità sugli integrali.**

5. Fissiamo adesso le ipotesi che intendiamo di supporre verificate per l'integrale di cui studieremo la semicontinuità. L'integrale sarà del tipo

$$I=\iint_D F(x,\ y,\ z;\ X,\ Y,\ Z)dudv, \tag{10}$$

dove le x, y, z, espresse in funzione u, v, forniscono una rappresentazione parametrica regolare di una superficie regolare S col dominio base D (n.° 2), e dove si è posto per brevità

$$X=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)},\quad Y=\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)},\quad Z=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}. \tag{11}$$

Per la $F(x,\ y,\ z;\ X,\ Y,\ Z)$ supporremo, in primo luogo, che essa sia continua, insieme con le derivate parziali prime, rispetto a X. Y, Z, al variare del punto $(x,\ y,\ z)$ in un *campo* (insieme aperto) A, nel quale sia contenuta la superficie S, e per ogni terna di valori X, Y, Z non tutti nulli; in secondo luogo, che essa sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto a X, Y, Z, sicchè varrà l'equazione di EULERO

$$F(x,\ y,\ z;\ X,\ Y,\ Z)=XF_X+YF_Y+ZF_Z; \tag{12}$$

infine, per ogni punto $(x,\ y,\ z)$ del campo A e ogni coppia di punti $(X,\ Y,\ Z)$, $(A,\ B,\ C)$ diversi dall'origine supporremo verificate le due disuguaglianze

$$F(x,\ y,\ z;\ X,\ Y,\ Z)\geq 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} E(x,y,z;X,Y,Z;A,B,C)&=F(x,y,z;A,B,C)-AF_X(x,y,z;X,Y,Z)-\\ &-BF_Y(x,y,z;X,Y,Z)-CF_Z(x,y,z;X,Y,Z)\geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Si consideri una qualsiasi successione di superficie regolari S_n, con le rappresentazioni parametriche regolari (6) e col dominio base D, per cui siano verificate, uniformemente in D, le relazioni di limite (7); definendo le X_n Y_n, Z_n con posizione analoga alla (11), si costruisca l'integrale doppio

$$I_n=\iint_D F(x_n,\ y_n,\ z_n;\ X_n,\ Y_n,\ Z_n)dudv. \tag{15}$$

Il nostro scopo è di dimostrare che riesce

$$\lim_{n \to \infty} \min. I_n \geq I. \tag{16}$$

A tal fine, proveremo che, in conseguenza delle indicate ipotesi, la differenza $I_n - I$, o si può scindere nella somma di vari termini, dei quali alcuni sono non negativi, mentre gli altri, per valori opportunamente scelti dell'indice n, si possono ridurre in valore assoluto inferiori a una quantità positiva piccola a piacere, oppure, sempre per opportuni valori di n si può far diventare maggiore di una quantità positiva grande a piacere. Poichè le ipotesi fatte sulla successione delle S_n sussistono del pari per ogni sottosuccessione di essa, dal nostro ragionamento si concluderà dunque che, in ogni successione estratta dalla $I_1 - I$, $I_2 - I, \ldots$, esistono infiniti termini superiori a una quantità negativa prefissata a piacere, ciò che prova appunto la (16).

6. Premettiamo, in questo numero, alcuni lemmi riguardo alle funzioni $F(x, y, z; X, Y, Z)$ verificanti le ipotesi enunciate or ora.

Se, per una certa terna di valori x, y, z, *esistono tre costanti non tutte nulle* λ, μ, ν, *tali che, qualunque sia il punto* X, Y, Z *diverso dall'origine, riesca* (7)

$$\lambda F_X(x;\, X) + \mu F_Y(x;\, X) + \nu F_Z(x;\, X) = 0, \tag{17}$$

allora la F(x; X) *non può essere che identicamente zero al variare di* X, Y, Z.

Invero, dall'ipotesi fatta discende che, qualunque siano le quantità A, B, C, t, la $F(x, y, z;\, A + \lambda t,\, B + \mu t,\, C + \nu t)$ è indipendente da t; in particolare, $F(x;\, \lambda t)$ è zero qualunque sia t. Detta τ un'altra quantità arbitraria, sarà quindi, tenendo conto dell'omogeneità,

$$\frac{F(x;\, A\tau + \lambda t) - F(x;\, \lambda t)}{\tau} = \frac{|\tau|}{\tau} F(x;\, A).$$

Ma il primo membro, per $\tau \to 0$, deve avere il limite determinato e finito

$$AF_X(x;\, \lambda t) + BF_Y(x;\, \lambda t) + CF_Z(x;\, \lambda t),$$

mentre il secondo membro tende a $F(x;\, A)$ o a $-F(x;\, A)$, secondochè $\tau \to 0$ per valori positivi o per valori negativi. Ciò non implica contraddizione

(7) Per brevità, qui e in seguito, per ciascuna delle terne di argomenti da cui dipendono le funzioni che si considerano, scriviamo soltanto il primo argomento.

soltanto nel caso che $F(x;\ A)$ sia zero, onde, per l'arbitrarietà di A, B, C, resta provato quanto si voleva.

Se, per una data terna di valori x, y, z, *la* F(x; X) *non è identicamente zero al variare di* X, Y, Z, *allora l'insieme* $\mathcal{E}$, *degli eventuali punti* X, Y, Z, *oltre all'origine, in cui* F(x; X) = 0, *è un insieme convesso costituito da semirette per l'origine, formanti tutte con una certa direzione angoli di ampiezza non superiore a una certa quantità* $< \frac{\pi}{2}$.

Dal fatto che la funzione E di Weierstrass non è mai negativa segue, invero, che, per ogni t,

$$F(x;\ A) \geq \frac{d}{dt} F(x;\ X + At),$$

onde, integrando rispetto a t e sostituendo poi le X, Y, Z con le stesse quantità moltiplicate per $1 - t$, risulta, per t compreso fra 0 ed 1,

$$F(x;\ At + X(1 - t)) \leq F(x;\ A)t + F(x;\ X)(1 - t).$$

Pertanto, se (A, B, C) e (X, Y, Z) sono due punti in cui la F è inferiore a una certa quantità ω, in ogni punto del segmento che li congiunge la F sarà pure inferiore ad ω. L'insieme $\mathcal{E}(\omega)$ dei punti (X, Y, Z) in cui riesce $F(x;\ X) \leq \omega$ (e quindi, in particolare, $\mathcal{E}_0$) è un insieme convesso.

Poichè inoltre, per l'omogeneità di F, è chiaro che $\mathcal{E}_0$ si compone di semirette per l'origine, basterà provare ormai che $\mathcal{E}_0$ non può essere formato da tutti i punti compresi in un angolo diedro con lo spigolo passante per l'origine, perchè allora manifestamente esisteranno piani passanti per l'origine e non aventi ulteriori punti in comune con $\mathcal{E}_0$, ed essendo $\mathcal{E}_0$ un insieme chiuso, per una direzione perpendicolare a un piano cosiffatto si verificherà evidentemente quanto afferma l'enunciato.

Ma se $\mathcal{E}_0$ contenesse tutta una retta r per l'origine, esso sarebbe necessariamente formato da rette parallele a r, e lo stesso varrebbe per l'insieme $\mathcal{E}(\omega)$, qualunque sia ω; sicchè F dovrebbe essere costante su ogni retta parallela a r, cioè, detti λ, μ, ν i coefficienti di direzione di r, varrebbe identicamente la (17), ciò che, in base al lemma precedente, contraddice l'ipotesi che $F(x;\ X)$ non sia identicamente nulla.

Se, per una data terna di valori x, y, z, *la* F(x; X) *non è identicamente zero al variare di* X, Y, Z, *ad ogni quantità positiva* ω *sufficientemente piccola si potranno far corrispondere una quantità* $\theta > 0$ *e un raggio* r, *tali che,* *per ogni raggio formante con* r *un angolo minore di* $\frac{\pi}{2}+\theta$, *detti* ξ, η, ζ *i rispettivi coseni direttori, riesca* $F(x; \xi) > \omega$.

Infatti, l'insieme dei punti comuni all'insieme $\mathcal{E}_0$ considerato or ora e alla superficie sferica di centro nell'origine e raggio unità, secondo quanto risulta dalla dimostrazione precedente, se non è vuoto, è tutto contenuto in un emisfero, senza nessun punto in comune col cerchio massimo che delimita l'emisfero stesso. Egualmente accadrà per l'insieme dei punti comuni ad $\mathcal{E}(\omega)$ e alla medesima sfera, quando ω è sufficientemente prossimo a zero, per ragione di continuità. Detto θ il minimo della distanza sferica da un punto di $\mathcal{E}(\omega)$ a un punto del suddetto cerchio massimo ed r il raggio perpendicolare al piano di questo e situato nel semispazio che non contiene $\mathcal{E}(\omega)$, è chiaro allora che, per r e θ così definiti, si verificherà quanto afferma l'enunciato.

§ 3. **Semicontinuità degl'integrali.**

7. Per raggiungere lo scopo indicato in fine del n.° 5, ci converrà distinguere due diversi casi, secondo quanto adesso stabiliremo. Fissiamo anzitutto una quantità positiva σ, minore sia del massimo di F che del massimo di $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ su S. Diciamo $S(\sigma)$ quella porzione di S, in cui riesce $F > \sigma$, $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} > \sigma$, e $D(\sigma)$ la porzione di D, che ha per immagine, in (2), $S(\sigma)$ e la sua frontiera. Scomponiamo poi $D(\sigma)$ in un numero finito di domini parziali $D^{(h)}(\sigma)$, ciascuno limitato da un numero finito di archi di curva dotati in ogni punto di tangente variabile con continuità. Sia δ il massimo dei diametri dei domini $D^{(h)}(\sigma)$, e siano $S^{(h)}(\sigma)$, $S_n^{(h)}(\sigma)$ le porzioni, rispettivamente di S e di S_n, corrispondenti a $D^{(h)}(\sigma)$. Fissata poi ancora una quantità positiva ρ, minore del semidiametro di $S^{(h)}(\sigma)$, togliamo da $S^{(h)}(\sigma)$ e, per n sufficientemente grande, da $S_n^{(h)}(\sigma)$ tutti i punti aventi dalle rispettive frontiere una distanza minore di ρ, e diciamo $S^{(h)}(\rho, \sigma)$, $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ rispettivamente le porzioni rimanenti, e $D^{(h)}(\rho, \sigma)$, $D_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ le corrispondenti porzioni di $D^{(h)}(\sigma)$.

Ciò posto, potranno presentarsi le due alternative seguenti:

1) o, per ogni σ, esiste un numero positivo P_σ tale che, per una opportuna decomposizione di $D(\sigma)$, per valori di δ e ρ arbitrariamente prossimi a zero e per valori di n arbitrariamente grandi, riesca

$$\sum_h \text{area}\, S_n^{(h)}(\rho, \sigma) \leq P_\sigma,$$

2) oppure, per σ abbastanza piccolo, comunque si assegni un numero positivo P, si possono trovare un δ_P, un ρ_P e un n_P tali che, per ogni decomposizione di $D(\sigma)$ con $\delta < \delta_P$ e per $\rho < \rho_P$, $n > n_P$, sia

$$\sum_h \text{area}\, S_n^{(h)}(\rho, \sigma) > P.$$

A proposito di queste alternative, aggiungiamo qui un'osservazione, che ci tornerà utile in seguito. Siano $\xi^{(h)}$, $\eta^{(h)}$, $\zeta^{(h)}$ i coseni direttori di un asse, che con la normale in un punto variabile di $S^{(h)}(\sigma)$ formi un angolo di ampiezza limitata superiormente da una quantità minore di $\frac{\pi}{2}$, cioè tale che $|\xi^{(h)}X + \eta^{(h)}Y + \zeta^{(h)}Z|$ sia limitato inferiormente in $D^{(h)}(\sigma)$ da una quantità maggiore di zero, e determiniamo, come è indicato nel n.° 4, un insieme $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma) < D^{(h)}(\sigma)$, tale che sia

$$(18) \qquad \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} (\xi^{(h)}X_n + \eta^{(h)}Y_n + \zeta^{(h)}Z_n)\,du\,dv = \iint\limits_{D^{(h)}(\rho,\sigma)} (\xi^{(h)}X + \eta^{(h)}Y + \zeta^{(h)}Z)\,du\,dv.$$

Ebbene, detta $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ la porzione di $S_n(\sigma)$ corrispondente a se vale l'alternativa 1), oppure l'alternativa 2), allora la circostanza specificata in 1), o rispettivamente in 2), si presenterà egualmente, ove si sostituiscano le $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ con le $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$.

Ciò riuscirà manifesto, ove si riconosca che, fissati ρ, σ e la decomposizione di $D(\sigma)$ in domini parziali $D^{(h)}(\sigma)$, e presa a piacere una quantità positiva $\rho' < \rho$, da un certo valore di n in poi $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ conterrà $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e $S_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ conterrà $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$. Ora a tale proposito si può osservare che $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ risulta definita come quella porzione di $S_n^{(h)}(\sigma)$, che è contenuta entro il cilindro formato da tutte le rette con la direzione $\xi^{(h)}$, $\eta^{(h)}$, $\zeta^{(h)}$ condotte per i punti della frontiera di $S^{(h)}(\rho', \sigma)$, onde, prendendo n sufficientemente grande, si potrà rendere minore di una quantità prefissata piccola a piacere la distanza di ogni punto di $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ da $S^{(h)}(\rho', \sigma)$, così come la distanza di ogni punto di $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ da $S^{(h)}(\rho, \sigma)$. Sicchè, essendo $S^{(h)}(\rho, \sigma)$ contenuta in $S^{(h)}(\rho', \sigma)$ ed essendo maggiore di zero la distanza tra la frontiera di $S^{(h)}(\rho, \sigma)$ e quella di $S^{(h)}(\rho', \sigma)$, è chiaro come, sempre per n sufficientemente grande, delle due porzioni $S_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e $T_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ di $S_n^{(h)}(\sigma)$ la prima debba esser contenuta nella seconda; e allo stesso modo si vede come, a sua volta, $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ sia contenuta in $S_n^{(h)}(\rho', \sigma)$.

8. Supponiamo ora che si presenti l'alternativa 1). In ogni dominio parziale $D^{(h)}(\sigma)$ fissiamo un punto $(u^{(h)}, v^{(h)})$ e, convenendo di rappresentare

il valore assunto da una funzione di u, v nel punto $(u^{(h)}, v^{(h)})$ con l'aggiunta alla lettera, che simboleggia quella funzione, dell'indice superiore h, determiniamo, secondo quanto è detto nel n.° 4, un campo $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma) < D^{(h)}(\sigma)$, tale che risulti

$$(19) \qquad \iint\limits_{D^{(h)}(\rho,\sigma)} [XF_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \ldots] du dv = \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} [X_n F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \ldots] du dv,$$

laddove si noti che, in virtù di (12) e (13), la funzione integranda al primo membro sarà certamente sempre superiore a una quantità maggiore di zero in tutto il dominio $D^{(h)}(\sigma)$, purchè la quantità δ si scelga sufficientemente piccola. Diciamo infine $T_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ la porzione di S_n corrispondente a $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e chiamiamo $D(\rho, \sigma)$ e $\Delta_n(\rho, \sigma)$ rispettivamente la somma delle porzioni $D^{(h)}(\rho, \sigma)$ e quella delle porzioni $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ di $D^{(h)}(\sigma)$.

Chiarito in tal modo il significato dei simboli, scriviamo la seguente identità:

$$(20) \qquad I_n - I = \iint\limits_{D-\Delta_n(\rho,\sigma)} F(x_n; X_n) du dv - \iint\limits_{D-D(\sigma)} F(x; X) du dv - \iint\limits_{D(\sigma)-D(\rho,\sigma)} F(x; X) du dv +$$
$$+ \sum_h \Bigg[\iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} \{ F(x_n; X_n) - F(x^{(h)}; X_n) \} du dv + \iint\limits_{D^{(h)}(\rho,\sigma)} \{ F(x^{(h)}; X^{(h)}) - F(x; X) \} du dv +$$
$$+ \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} F(x^{(h)}; X_n) du dv - F(x^{(h)}; X^{(h)}) \cdot \operatorname{mis} D^{(h)}(\rho, \sigma) \Bigg].$$

Agli ultimi due termini sotto al segno di Σ in questa uguaglianza sostituiamo un'altra espressione ad essi equivalente: tenendo presenti le (12) e (13), scriviamo cioè

$$\iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} F(x^{(h)}; X_n) du dv - F(x^{(h)}; X^{(h)}) \cdot \operatorname{mis} D^{(h)}(\rho, \sigma) = \iint\limits_{D^{(h)}(\rho,\sigma)} [(X - X^{(h)}) F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \ldots] du dv +$$
$$+ \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} F(x^{(h)}; X_n) du dv - \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} [X_n F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \ldots] du dv,$$

oppure anche, indicando con $\bar{\Delta}_n^{(h)}$ un campo arbitrariamente fissato in $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ e ricordando l'espressione (14) della funzione E di Weierstrass,

$$(21) \qquad \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)} F(x^{(h)}; X_n) du dv - F(x^{(h)}; X^{(h)}) \cdot \operatorname{mis} D^{(h)}(\rho, \sigma) = \iint\limits_{D^{(h)}(\rho,\sigma)} [(X - X^{(h)}) F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \ldots] du dv +$$
$$+ \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)-\bar{\Delta}_n^{(h)}} F(x^{(h)}; X_n) du dv + \iint\limits_{\bar{\Delta}_n^{(h)}} E(x^{(h)}; X^{(h)}; X_n) du dv - \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho,\sigma)-\bar{\Delta}_n^{(h)}} [X_n F_X(x^{(h)}; X^{(h)}) + \ldots] du dv.$$

Ciò posto, dato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, fissiamo, come è evidentemente sempre possibile, un σ, minore del massimo di F e del massimo di $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ su S, così prossimo a zero che il secondo integrale al secondo membro di (20) risulti minore di ε. Prendendo δ sufficientemente prossimo a zero, potremo poi sempre ottenere che, per n sufficientemente grande, risulti in tutto $D^{(h)}(\sigma)$

$$(22) \qquad | F(x_n ; X_n) - F(x^{(h)} ; X_n) | < \frac{\varepsilon}{P_\sigma} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2},$$

come si riconosce tenendo presente il fatto che, per quanto si è supposto, le $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, $z_n(u, v)$ sono uniformemente continue in D, e ricordando la supposta omogeneità di F.

Inoltre, per la supposta continuità delle $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$, prendendo, ove occorra, un δ ancora più prossimo a zero, si potrà far sì che, in tutto $D^{(h)}(\sigma)$, sia

$$(23) \qquad | F(x^{(h)} ; X^{(h)}) - F(x ; X) | < \varepsilon, \quad | (X - X^{(h)}) F_X(x^{(h)} ; X^{(h)}) + \ldots | < \varepsilon.$$

Infine, prendendo anche ρ abbastanza piccola. potremo ottenere che il terzo integrale al secondo membro di (20) sia $< \varepsilon$.

Premesso ciò, esaminiamo i diversi termini in cui resta decomposta la differenza $I_n - I$, secondo le formole (20) e (21). Il primo integrale al secondo membro di (20) è non negativo, per (13); il secondo e il terzo sono minori di ε; il primo integrale sotto al segno di Σ è, per (22), in valore assoluto minore di

$$\frac{\varepsilon}{P_\sigma} \cdot \iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}\, du dv = \frac{\varepsilon}{P_\sigma} \cdot \text{area } T_n^{(h)}(\rho, \sigma);$$

il secondo è, per (23), in valore assoluto minore di $\varepsilon \cdot \text{mis}\, D^{(h)}(\rho, \sigma)$; il terzo e il quarto sono sostituiti dal secondo membro di (21), dove il primo integrale è pure, per (23), in valore assoluto minore di $\varepsilon \cdot \text{mis}\, D^{(h)}(\rho, \sigma)$, il secondo e il terzo sono non negativi, per (13) e (14), e l'ultimo, che va poi preso col segno meno, sarà non positivo, ove si determini il campo $\bar{\Delta}_n^{(h)}$, del quale possiamo ancora disporre ad arbitrio, come l'insieme dei punti di $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ in cui è positiva la funzione integranda.

Per l'osservazione fatta nel n.° 7, poichè supponiamo che sia verificata l'alternativa 1), potremo determinare δ e ρ prossimi a zero ed n grande come ora si è detto, in maniera tale che riesca inoltre

$$\sum_h \text{area } T_n^{(h)}(\rho, \sigma) \leq P_\sigma .$$

Si riconosce allora come, in base a (20) e (21), la differenza $I_n - I$ resti decomposta in una somma di termini, di cui alcuni positivi o nulli e i rimanenti complessivamente limitati in valore assoluto dalla quantità $\varepsilon(3 + 2 \operatorname{mis} D)$, che, per l'arbitrarietà di ε, si può rendere piccola a piacere.

9. Passiamo adesso al caso che si verifichi l'alternativa 2) (n.º 7). In ogni punto di $S(\sigma)$, per il modo come abbiamo definita questa porzione di S, riesce

$$F\left(x;\ \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right) > \frac{\sigma}{M},$$

ove si indichi con M il massimo di $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ su S.

Diciamo $C(\sigma)$ un intorno di $S(\sigma)$ formato da tutti i punti aventi da $S(\sigma)$ distanza minore di una data quantità, e $C^{(h)}(\sigma)$ l'intorno di $S^{(h)}(\sigma)$ formato dai punti aventi da $S^{(h)}(\sigma)$ distanza minore della stessa quantità. Per ragione di continuità, in ogni punto (x, y, z) di $C(\sigma)$, la F, per una opportuna terna di valori, con somma dei quadrati eguale ad 1, dei secondi argomenti, si manterrà superiore a una costante maggiore di zero. In base al terzo lemma del n.º 6, detta ω una quantità positiva sufficientemente prossima a zero, sarà allora possibile determinare, non appena il massimo diametro δ dei domini di decomposizione $D^{(h)}(\sigma)$ sia abbastanza piccolo, una costante θ e, per ogni dominio parziale $D^{(h)}(\sigma)$, un raggio $r^{(h)}$, tali che, detti ξ, η, ζ i coseni direttori di un qualsiasi raggio formante con $r^{(h)}$ un angolo di ampiezza minore di $\theta + \frac{\pi}{2}$, per ogni punto (x, y, z) di $C^{(h)}(\sigma)$, riesca $F(x, \xi) > \omega$.

Supponiamo inoltre che δ sia pure così prossimo a zero, che, per ciascuna delle porzioni $S^{(h)}(\sigma)$, la normale in un punto variabile formi sempre con una certa direzione, un angolo di ampiezza non superiore a una fissata quantità θ' minore di θ.

Ciò posto, si potrà determinare un $\alpha > 0$ e una direzione $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)})$ formante con $r^{(h)}$ un angolo minore di θ, tale che $|\xi^{(h)} X + \eta^{(h)} Y + \zeta^{h} Z|$ sia limitato inferiormente, in $D^{(h)}(\sigma)$, da una quantità maggiore di zero e tale che sia

$$\iint\limits_{D_n^{(h)}(\rho,\sigma)} |X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)}|\, du dv \geq \alpha \cdot \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma). \tag{24}$$

Infatti, fra le direzioni $(\xi^{(h)}, \eta^{h)}, \zeta^{(h)})$ formanti con $r^{(h)}$ un angolo $< \theta$ e tali che $|\xi^{(h)} X + \eta^{(h)} Y + \zeta^{(h)} Z|$ superi in tutto $D^{(h)}(\sigma)$ una costante maggiore di zero, vi sono certamente tutte quelle formanti con una certa direzione fissa un angolo minore di $\frac{\theta - \theta'}{2}$. Fra queste se ne potranno scegliere tre $(\xi_i^{(h)}, \eta_i^{(h)}, \zeta_i^{(h)})$ $(i = 1, 2, 3)$ formanti un triedro non degenere; e, qualunque siano X_n, Y_n, Z_n, riuscirà

$$\sum_{i=1,2,3} (\xi_i^{(h)} X_n + \eta_i^{(h)} Y_n + \zeta_i^{(h)} Z_n)^2 \geq N^2 \cdot (X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2),$$

dove N^2 si potrà porre uguale al quadrato del determinante $\begin{vmatrix} \xi_1^{(h)}, & \eta_1^{(h)}, & \zeta_1^{(h)} \\ \xi_2^{(h)}, & \eta_2^{(h)}, & \zeta_2^{(h)} \\ \xi_3^{(h)}, & \eta_3^{(h)}, & \zeta_3^{(h)} \end{vmatrix}$, diviso per la somma dei quadrati dei minori di 2° grado del determinante medesimo. In ogni punto di $D_n^{(h)}(\rho, \sigma)$, sarà verificata una almeno delle tre disuguaglianze

$$|\xi_i^{(h)} X_n + \eta_i^{(h)} Y_n + \zeta_i^{(h)} Z_n| \geq \frac{N}{\sqrt{3}} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

sicchè le $\xi_i^{(h)}$, $\eta_i^{(h)}$, $\zeta_i^{(h)}$, per un valore almeno di i, dànno luogo alla (24), ove si ponga $\alpha = \frac{N}{3\sqrt{3}}$; onde si riconosce pure che α non dipende da δ, ma soltanto da θ e θ'.

Fissate in tal modo le $\xi^{(h)}$, $\eta^{(h)}$, $\zeta^{(h)}$ ([8]), determiniamo poi al solito modo il $\Delta_n^{(h)}(\rho, \sigma)$ in maniera che valga la (18). Per n sufficientemente grande e $\rho' < \rho$, $\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ conterrà $D_n^{(h)}(\rho, \sigma)$, e pertanto sarà pure

$$\iint\limits_{\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)} |X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)}| \, du dv > \alpha \cdot \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma). \tag{25}$$

E se indichiamo con $\bar{\Delta}_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ l'insieme dei punti di $\Delta_n^{(h)}(\rho', \sigma)$ in cui è

$$X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)} > 0, \tag{26}$$

da (18) e (25) deduciamo

$$\iint\limits_{\bar{\Delta}_n^{(h)}(\rho', \sigma)} (X_n \xi^{(h)} + Y_n \eta^{(h)} + Z_n \zeta^{(h)}) du dv > \frac{1}{2} \alpha \cdot \text{area } S_n^{(h)}(\rho, \sigma) + \tag{27}$$
$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_{D_n^{(h)}(\rho', \sigma)} (X \xi^{(h)} + Y \eta^{(h)} + Z \zeta^{(h)}) du dv.$$

([8]) Le $\xi^{(h)}$, $\eta^{(h)}$, $\zeta^{(h)}$ verranno a dipendere da n, in quanto che, al variare di n, in generale si dovrà scegliere volta a volta uno diverso fra i tre assi del triedro fissato; ma ciò non ha importanza per la dimostrazione del testo.

D'altra parte, la (26) assicura che il vettore X_n, Y_n, Z_n forma un angolo acuto con $(\xi^{(h)}, \eta^{(h)}, \zeta^{(h)})$, e pertanto forma un angolo $< \theta + \frac{\pi}{2}$ con $r^{(h}$, onde, non appena n sia sufficientemente grande affinchè $S_n(\sigma)$ sia contenuta nell'intorno $C(\sigma)$ di $S(\sigma)$ considerato in principio di questo n.°, risulterà

(28) $$\iint\limits_{\bar{\Delta}_n^{(h)}(\rho',\sigma)} F(x_n; X_n)\,du\,dv \geq \omega \cdot \iint\limits_{\bar{\Delta}_n^{(h)}(\rho',\sigma)} \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}\,du\,dv.$$

Ma l'integrale al secondo membro di questa disuguaglianza evidentemente supera quello al primo membro della (27). Sommando, dunque, rispetto ad h, e tenendo conto del fatto che F non è mai negativa, da (27) e (28) si ricava infine

$$\iint\limits_{D} F(x_n; X_n)\,du\,dv > \frac{1}{2}\omega\alpha \cdot \sum_h \text{area}\, S_n^{(h)}(\rho,\sigma) + \frac{1}{2}\omega \sum_h \iint\limits_{D_n^{(h)}(\rho',\sigma)} (X\xi^{(h)} + Y\eta^{(h)} + Z\zeta^{(h)})\,du\,dv.$$

Dei due termini al secondo membro, il secondo è limitato superiormente in valor assoluto da $\frac{1}{2}\omega \cdot \text{area}\, S$, mentre il primo, poichè ci troviamo ora nell'alternativa 2) del n.° 7, si potrà rendere grande a piacere; infatti, come abbiamo rilevato, ω ed α sono quantità fissate indipendentemente da ρ e δ, per tutti i valori sufficientemente piccoli di queste. E con ciò resta completata la dimostrazione.

Sur une méthode de détermination des figures d'équilibre relatif, voisines des ellipsoïdes, d'une masse liquide homogène en rotation.

Memoria di N. NERONOFF (a Leningrado).

1. Les figures d'équilibre relatif, voisines des ellipsoïdes, d'une masse liquide homogène en rotation ont été l'objet des recherches bien connues de POINCARÉ (« Acta Mathematica », t. VII, 1885) se bornant à la première approximation. Cependant déjà la thèse de LIAPOUNOFF datant de 1884: *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation* nous montre que son auteur connaît l'existence de quelques surfaces algébriques représentant en première approximation la surface libre du liquide tournant. Notamment, vers la fin de cet ouvrage nous trouvons un petit nombre de lignes consacrées à des formes nouvelles d'équilibre relatif d'un liquide en rotation par lui signalées. Les raisons qui ont amené LIAPOUNOFF à ne faire que mentionner ces formes sont expliquées dans la première de ses leçons professées en 1918 à l'Université d'Odessa et ayant pour sujet la question de la forme des corps celestes (¹). Précisément, comme on n'avait trouvé que la première approximation, les approximations deuxièmes et suivantes demeurant inconnues, il était impossible d'établir l'existence des formes nouvelles d'équilibre. Ainsi la méthode que LIAPOUNOFF avait d'abord suivie dans l'examen de cette question reste inconnue. Il remarque seulement dans la susdite leçon qu'étant revenu à ce sujet à presque vingt ans d'intervalle et ayant modifié la méthode, il a, cette fois, démontré rigoureusement l'existence des formes d'équilibre trouvées (*Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation,* 1906-1914).

Dans le présent Mémoire on expose une méthode qui conduit à des figures d'équilibre relatif du liquide tournant, représentant en première approximation certaines surfaces algébriques d'ordres troisième et quatrième.

(¹) « Bulletin de l'Académie des Sciences de U. R. S. S. », n.° 1, p. 25.

2. Considérons une série entière à trois variables ξ, η, ζ et à coefficients constants b, c, d, e, f,...

$$b(\xi^2+\eta^2)+c\zeta^2+d(\xi^2+\eta^2)^2+e\zeta^4+f\zeta^2(\xi^2+\eta^2)+\ldots \tag{1}$$

ne renfermant que les puissances paires des variables et symétrique par rapport à ξ et η. Convergeant absolument et uniformément dans un domaine qui comprend l'origine des coordonnées $O(\xi=\eta=\zeta=0)$, la série ci-dessus représente dans ce domaine une fonction continue admettant des dérivées partielles en nombre illimité. Désignons par m_1 et m_2 respectivement le minimum et le maximum de la somme de la série considérée dans le même domaine. L'équation

$$a=b(\xi^2+\eta^2)+c\zeta^2+d(\xi^2+\eta^2)^2+e\zeta^4+f\zeta^2(\xi^2+\eta^2)+\ldots, \tag{2}$$

où le coefficient constant a satisfait à l'inégalité

$$m_1<a<m_2, \tag{3}$$

correspond, dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires avec les axes OX, OY, OZ, à une surface ayant OZ pour axe de révolution.

Soit une masse liquide homogène qui tourne uniformément autour de l'axe immobile de coordonnées OZ et se trouve dans un état d'équilibre relatif. Les éléments de cette masse s'attirent mutuellement suivant la loi de NEWTON. La pression exercée sur la surface libre est supposée constante. Nous chercherons l'équation de cette surface, sous la forme (2) à coefficients indéterminés, en considérant les axes de coordonnées OX et OY comme invariablement liés au liquide tournant et en supposant

$$a>0,\quad c>b>0. \tag{4}$$

Convenons d'admettre que les coefficients d, e, f,..., sont petits en valeur absolue relativement aux trois premiers a, b, c et traitons les coefficients du groupe de termes de la série (2), qui forment un polynôme entier homogène de degré quatrième et plus élevé par rapport aux variables ξ, η, ζ, comme de petites quantités d'un seul et même ordre croissant avec le degré du polynôme en question. Dans le présent mémoire, n'ayant en vue qu'une première approximation, nous nous bornons dans tous nos calculs aux termes du premier degré par rapport aux trois coefficients d, e, f en vertu de quoi il n'y a lieu de retenir dans l'équation (2) de la surface que les termes ne depassant point le quatrième dégré par rapport à ξ, η, ζ. Il résulte de ces considérations que la surface cherchée différera peu de l'ellipsoïde de révolution (MACLAURIN) dont l'équation

$$a = b(\xi^2 + \eta^2) + c\zeta^2 \tag{5}$$

s'obtient de l'équation (2) en posant $d = e = f = ... = 0$.

Le potentiel U des forces d'attraction du liquide tournant agissant sur un point intérieur $M(x, y, z)$ de masse égale a l'unité s'exprime par l'intégrale triple étendue à tout le volume v occupé par le liquide

$$U = k\rho \iiint_v \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}, \tag{6}$$

où k désigne le coefficient figurant dans la formule de la loi de l'attraction de NEWTON, ρ la densité du liquide et

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \tag{7}$$

la distance du point $M(x, y, z)$ au point arbitraire $P(\xi, \eta, \zeta)$ du volume v.

Les expressions pour les composantes X, Y, Z de l'attraction totale parallèles aux axes de coordonnées s'écriront sous la forme

$$\begin{aligned} X &= k\rho \iiint_v \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi d\eta d\zeta, \\ Y &= k\rho \iiint_v \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi d\eta d\zeta, \\ Z &= k\rho \iiint_v \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \tag{8}$$

Transportons l'origine des coordonnées au point $M(x, y, z)$ et introduisons les coordonnées polaires dans l'espace r, θ, φ suivant les formules

$$\xi - x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad \eta - y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad \zeta - z = r\cos\theta. \tag{9}$$

Les équations (6) et (8) se transforment comme il suit:

$$\begin{aligned} U &= k\rho \iiint_v r \sin\theta \, dr d\theta d\varphi, \\ X &= k\rho \iiint_v \sin^2\theta \cos\varphi \, dr d\theta d\varphi, \\ Y &= k\rho \iiint_v \sin^2\theta \sin\varphi \, dr d\theta d\varphi, \\ Z &= k\rho \iiint_v \sin\theta \cos\theta \, dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

L'intégration se trouve être plus simple à effectuer sur les expressions de X, Y, Z que sur celles de U. C'est pourquoi nous nous en tiendrons aux premières. Procédons d'abord à l'intégration par rapport à la variable r. A cet effet, ayant recours à la formule de Taylor nous réduisons l'équation (2) de la surface, transcrite pour abréger comme ceci:

$$F(\xi,\ \eta,\ \zeta) = 0, \tag{11}$$

à la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&F(x, y, z) + (\xi - x)F^{(1)}_x + (\eta - y)F^{(1)}_y + (\zeta - z)F^{(1)}_z + \frac{1}{1\cdot 2}[(\xi - x)^2 F^{(2)}_{xx} + \\
&+ (\eta - y)^2 F^{(2)}_{yy} + (\zeta - z)^2 F^{(2)}_{zz} + 2(\xi - x)(\eta - y)F^{(2)}_{xy} + 2(\xi - x)(\zeta - z)F^{(2)}_{xz} + \\
&+ 2(\eta - y)(\zeta - z)F^{(2)}_{yz}] + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}[(\xi - x)^3 F^{(3)}_{xxx} + (\eta - y)^3 F^{(3)}_{yyy} + (\zeta - z)^3 F^{(3)}_{zzz} + \\
&+ 3(\xi - x)^2(\eta - y)F^{(3)}_{xxy} + 3(\xi - x)^2(\zeta - z)F^{(3)}_{xxz} + 3(\xi - x)(\eta - y)^2 F^{(3)}_{xyy} + \\
&+ 3(\eta - y)^2(\zeta - z)F^{(3)}_{yyz} + 3(\xi - x)(\zeta - z)^2 F^{(3)}_{xzz} + 3(\eta - y)(\zeta - z)^2 F^{(3)}_{yzz} + \\
&+ 6(\xi - x)(\eta - y)(\zeta - z)F^{(3)}_{xyz}] + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}[(\xi - x)^4 F^{(4)}_{xxxx} + (\eta - y)^4 F^{(4)}_{pyyy} + \\
&+ (\zeta - z)^4 F^{(4)}_{zzzz} + 4(\xi - x)(\eta - y)^3 F^{(4)}_{xyyy} + 4(\xi - x)(\zeta - z)^3 F^{(4)}_{xzzz} + \\
&+ 4(\xi - x)^3(\eta - y)F^{(4)}_{xxxy} + 4(\eta - y)(\zeta - z)^3 F^{(4)}_{yzzz} + 4(\xi - x)^3(\zeta - z)F^{(4)}_{xxxz} + \\
&+ 4(\eta - y)^3(\zeta - z)F^{(4)}_{yyyz} + 12(\xi - x)^2(\eta - y)(\zeta - z)F^{(4)}_{xxyz} + 12(\xi - x)(\eta - y)^2(\zeta - z)F^{(4)}_{xyyz} + \\
&+ 12(\xi - x)(\eta - y)(\zeta - z)^2 F^{(4)}_{xyzz} + 6(\xi - x)^2(\eta - y)^2 F^{(4)}_{xxyy} + \\
&+ 6(\xi - x)^2(\zeta - z)^2 F^{(4)}_{xxzz} + 6(\eta - y)^2(\zeta - z)^2 F^{(4)}_{yyzz}].
\end{aligned} \tag{12}$$

Calculons les valeurs des dérivées qui y entrent

$$F(x, y, z) = -a + b(x^2 + y^2) + cz^2 + d(x^2 + y^2)^2 + ez^4 + fz^2(x^2 + y^2),$$

$$\begin{aligned}
&F^{(1)}_x = 2bx + 4dx(x^2 + y^2) + 2fxz^2, \\
&F^{(1)}_y = 2by + 4dy(x^2 + y^2) + 2fyz^2, \\
&F^{(1)}_z = 2cz + 4ez^3 + 2fz(x^2 + y^2), \\
&F^{(2)}_{xx} = 2b + 4d(3x^2 + y^2) + 2fz^2, \\
&F^{(2)}_{yy} = 2b + 4d(x^2 + 3y^2) + 2fz^2, \\
&F^{(2)}_{zz} = 2c + 12ez^2 + 2f(x^2 + y^2), \\
&F^{(2)}_{xy} = 8dxy,\ F^{(2)}_{xz} = 4fxz,\ F^{(2)}_{yz} = 4fyz, \\
&F^{(3)}_{xxx} = 24dx,\ F^{(3)}_{yyy} = 24dy,\ F^{(3)}_{zzz} = 24ez, \\
&F^{(3)}_{xxy} = 8dy,\ F^{(3)}_{xxz} = 4fz,\ F^{(3)}_{xyy} = 8dx,\ F^{(3)}_{yyz} = 4fz, \\
&F^{(3)}_{xzz} = 4fx,\ F^{(3)}_{yzz} = 4fy,\ F^{(3)}_{xyz} = 0,\ F^{(4)}_{xxxx} = 24d,\ F^{(4)}_{yyyy} = 24d,\ F^{(4)}_{zzzz} = 24e, \\
&F^{(4)}_{xxxy} = 0,\ F^{(4)}_{xxxz} = 0,\ F^{(4)}_{xyyy} = 0,\ F^{(4)}_{yyyz} = 0,\ F^{(4)}_{xzzz} = 0,\ F^{(4)}_{yzzz} = 0, \\
&F^{(4)}_{xxyz} = 0,\ F^{(4)}_{xyyz} = 0,\ F^{(4)}_{xyzz} = 0,\ F^{(4)}_{xxyy} = 8d,\ F^{(4)}_{xxzz} = 4f,\ F^{(4)}_{yyzz} = 4f.
\end{aligned} \tag{13}$$

Portons les valeurs trouvées plus haut de la fonclion F et de ses dérivées partielles de même que les valeurs des différences $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ tirées des formules (9) dans l'équation (12). Nous avons

$$A + \alpha + (B + \beta)r + (C + \gamma)r^2 + \delta r^3 + \varepsilon r^4 = 0, \tag{14}$$

où sont introduites les désignations abrégées suivantes:

$$\begin{aligned}
&A = -a + b(x^2 + y^2) + cz^2,\\
&B = 2(bx \sin\theta \cos\varphi + by \sin\theta \sin\varphi + cz \cos\theta),\\
&C = b \sin^2\theta + c \cos^2\theta,\\
&\alpha = d(x^2 + y^2)^2 + ez^4 + fz^2(x^2 + y^2),\\
&\beta = [4dx(x^2 + y^2) + 2fxz^2] \sin\theta \cos\varphi + [4dy(x^2 + y^2) + 2fyz^2] \sin\theta \sin\varphi +\\
&\qquad + [4ez^3 + 2fz(x^2 + y^2)] \cos\theta,\\
&\gamma = [2d(3x^2 + y^2) + fz^2] \sin^2\theta \cos^2\varphi + [2d(x^2 + 3y^2) + fz^2] \sin^2\theta \sin^2\varphi +\\
&\qquad + [6ez^2 + f(x^2 + y^2)] \cos^2\theta + 8dxy \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi +\\
&\qquad + 4fxz \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + 4fyz \sin\theta \cos\theta \sin\varphi,\\
&\delta = 2(2d \sin^2\theta + f \cos^2\theta)(x \cos\varphi + y \sin\varphi) \sin\theta + 2z(2e \cos^2\theta + f \sin^2\theta) \cos\theta,\\
&\varepsilon = d \sin^4\theta + e \cos^4\theta + f \sin^2\theta \cos^2\theta.
\end{aligned} \tag{15}$$

Faisons observer que α, β, γ, δ, ε sont de petites quantités du premier ordre par rapport aux coefficients d, e, f. Ces derniers étant aussi petits que l'on voudra en valeur absolue la surface cherchée est convexe tout comme la surface de l'ellipsoïde de révolution qui s'obtient de la première en posant $d = e = f = 0$.

C'est pour cette raison que l'équation (14) doit donner deux valeurs réelles de r, r_1' et r_2', l'une positive, l'autre négative, voisines des racines r_1 et r_2 de l'équation

$$A + Br + Cr^2 = 0. \tag{16}$$

Nous avons

$$r_1 = \frac{-B + R}{2C}, \quad r_2 = \frac{-B - R}{2C}, \tag{17}$$

où

$$R = \sqrt{B^2 - 4AC}. \tag{18}$$

Dans la dernière égalité c'est la valeur arithmétique du radical R qui est prise. Les racines de l'équation (14) seront respectivement

$$r_1' = r_1 + \Delta r_1, \quad r_2' = r_2 + \Delta r_2. \tag{19}$$

Dans les développements de Δr_1 et Δr_2 nous ne retenons que les termes renfermant les premières puissances des petites quantités α, β, γ, δ, ε

$$(20)\qquad \begin{aligned} \Delta r_1 &= -\frac{1}{R}(\alpha + \beta r_1 + \gamma r_1^2 + \delta r_1^3 + \varepsilon r_1^4), \\ \Delta r_2 &= \frac{1}{R}(\alpha + \beta r_2 + \gamma r_2^2 + \delta r_2^3 + \varepsilon r_2^4). \end{aligned}$$

Effectuons dans l'expression (10) de X l'intégration par rapport à la variable r et présentons le résultat conformément à l'exposé de LAPLACE [1] sous la forme

$$(21)\qquad X = \varkappa\rho\int_0^\pi d\theta\int_0^\pi (r_1' + r_2')d\varphi.$$

Tirant parti des égalités (17), (18), (19), (20) nous trouvons la somme des racines r_1' et r_2'

$$(22)\qquad r_1' + r_2' = -\frac{B+\beta}{C} + \frac{\gamma B}{C^2} - \frac{\delta(B^2 - AC)}{C^3} + \frac{\varepsilon B(B^2 - 2AC)}{C^4},$$

où A, B, C, γ, δ, ε peuvent se calculer d'après les formules (15). Portons la valeur ainsi trouvée de la somme des racines dans l'intégrale (21) et effectuons les deux intégrations restantes par rapport à θ et φ qui se simplifient extrêmement grâce à l'absence dans l'expression de cette somme du radical R. Toutes les quadratures à pratiquer sont élémentaires. Après des calculs assez longs nous recevons le resultat simple suivant:

$$(23)\qquad \begin{aligned} X = \frac{\pi k\rho x}{2\lambda^7(1-\lambda^2)}\Big\{ & 4\lambda^4(1+\lambda^2)[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{ad}{b^2}(1+\lambda^2)^2[-\lambda(15+\lambda^2) + (15 + 6\lambda^2 - \lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{ae}{b^2}[-\lambda(15+13\lambda^2) + 3(1+\lambda^2)(5+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{af}{b^2}(1+\lambda^2)[\lambda(15+7\lambda^2) - (15+12\lambda^2+\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\Big\} + \\ & + \frac{\pi k\rho}{8\lambda^9}x(x^2+y^2)[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\ & - 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] - \\ & - \frac{\pi k\rho}{2\lambda^9}xz^2[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\ & - 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right], \end{aligned}$$

---

(1) *Mécanique céleste,* t. II, livre III, Chap. I, p. 3-22.

où

$$\lambda^2 = \frac{c-b}{b}. \tag{24}$$

L'expression de Y s'obtient de la précédente par permutation des lettres x et y. Quant à l'expression de Z, nous nous bornons en la formant aux termes en z et z^3. Les autres peuvent être trouvés d'après les expressions connues de X et Y. Nous aurons

$$\begin{aligned} Z = \frac{\pi k \rho z}{\lambda^7(1+\lambda^2)} \Big\{ & 4\lambda^4(1+\lambda^2)^2(-\lambda + \operatorname{arctg}\lambda) - \\ & - \frac{ad}{b^2}(1+\lambda^2)^2[-\lambda(15+\lambda^2) + (15+6\lambda^2-\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] - \\ & - \frac{ae}{b^2}[-\lambda(15+13\lambda^2) + 3(1+\lambda^2)(5+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] - \\ & - \frac{af}{b^2}(1+\lambda^2)[\lambda(15+7\lambda^2) - (15+12\lambda^2+\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] \Big\} + \\ & + \frac{\pi k \rho z^3}{3\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\ & - 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] + \dots. \end{aligned} \tag{25}$$

Une fois connues X, Y, Z, on peut trouver U d'après l'équation

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz. \tag{26}$$

Il suit de là que U est une fonction entière rationnelle du quatrième degré

$$U = G(x^2+y^2) + Hz^2 + I(x^2+y^2)^2 + Kz^4 + Lz^2(x^2+y^2) + \text{const.}, \tag{27}$$

où les coefficients G, H, I, K, L se calculent d'après les formules

$$\begin{aligned} G = \frac{\pi k \rho}{4\lambda^7(1+\lambda^2)} \Big\{ & 4\lambda^4(1+\lambda^2)[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{ad}{b^2}(1+\lambda^2)^2[-\lambda(15+\lambda^2) + (15+6\lambda^2-\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{ae}{b^2}[-\lambda(15+13\lambda^2) + 3(1+\lambda^2)(5+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{af}{b^2}(1+\lambda^2)[\lambda(15+7\lambda^2) - (15+12\lambda^2+\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] \Big\}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$(28)\qquad H = \frac{\pi k\rho}{2\lambda^7(1+\lambda^2)}\Big\{4\lambda^4(1+\lambda^2)^2(-\lambda+\operatorname{arctg}\lambda) -$$

$$-\frac{ad}{b^2}(1+\lambda^2)^2[-\lambda(15+\lambda^2)+(15+6\lambda^2-\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] -$$

$$-\frac{de}{b^2}[-\lambda(15+13\lambda^2)+3(1+\lambda^2)(5+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] -$$

$$-\frac{af}{b^2}(1+\lambda^2)[\lambda(15+7\lambda^2)-(15+12\lambda^2+\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\Big\},$$

$$I = \frac{\pi k\rho}{32\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) -$$

$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right],$$

$$K = \frac{\pi k\rho}{12\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) -$$

$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right],$$

$$L = -\frac{\pi k\rho}{4\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) -$$

$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right].$$

Pour vérifier nos calculs nous portons la valeur de U dans l'équation de POISSON

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi k\rho$$

et voyons qu'elle est satisfaite identiquement.

Désignons par ω la vitesse angulaire du liquide tournant. Alors le potentiel U' de la force centrifuge du point M sera égal à

$$(30)\qquad U' = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+\text{const.}$$

C'est pourquoi

$$(31)\quad U+U' = \left(G+\frac{\omega^2}{2}\right)(x^2+y^2)+Hz^2+I(x^2+y^2)^2+Kz^4+Lz^2(x^2+y^2)+\text{const.}$$

Or il est connu (¹) que l'équation

$$(32)\qquad U+U' = \text{const.}$$

(¹) APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 1921, t. IV, p. 46; TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 81.

donne une surface d'égale pression et par conséquent pour une certaine valeur de la constante arbitraire qui y figure elle doit coïncider avec l'équation (2) de la surface libre du liquide tournant. De là découle le système suivant d'équations:

$$\frac{G + \frac{\omega^2}{2}}{b} = \frac{H}{c} = \frac{I}{d} = \frac{K}{e} = \frac{L}{f}. \tag{33}$$

Portons ici les valeurs des coefficients G, H, I, K, L empruntées aux équations (28) ne conservant dans les expressions de G et H que les termes ne contenant pas les petits multiplicateurs $\frac{ad}{b^2}, \frac{ae}{b^2}, \frac{af}{c^2}$. Les équations (33) prendront la forme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b}\left\{\omega^2 + \frac{2\pi k\rho}{\lambda^3}[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda]\right\} &= \frac{4\pi k\rho}{c\lambda^3}(1+\lambda^2)(-\lambda + \operatorname{arctg}\lambda) = \\
&= \frac{\pi k\rho}{16 d\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\
- 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda)&\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] = \\
&= \frac{\pi k\rho}{6e\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\
- 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]&\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] = \\
&= -\frac{\pi k\rho}{2f\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\
- 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]&\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right].
\end{aligned} \tag{34}$$

Les équations (34) admettent la solution évidente $d = e = f = 0$ qui nous ramène aux ellipsoïdes de MACLAURIN, aux termes du sixième ordre près. Admettant que les coefficients d, e, f ne sont pas simultanément égaux à zéro et ayant en vue qu'aucun des facteurs du produit

$$[5\lambda(21+11\lambda^2) - 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right],$$

comme il apparaîtra dans la suite, ne s'annule, nous obtenons l'autre solution

$$8d = 3e = -f. \tag{35}$$

Les deux équations restantes du système (34) s'écriront sous la forme

$$\frac{\omega^2}{2\pi k\rho} = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctg} \lambda - \frac{3}{\lambda^2}, \tag{36}$$

$$5\lambda(21 + 11\lambda^2)(35 + 30\lambda^2 + 3\lambda^4) + \\ + 192\lambda^7 - 3[(35 + 30\lambda^2 + 3\lambda^4)^2 + 64\lambda^6] \operatorname{arctg} \lambda = 0. \tag{37}$$

La première d'entre elles est bien connue dans la théorie des ellipsoïdes de MACLAURIN. La deuxième fait voir qu'il n'appartient pas à chaque ellipsoïde de MACLAURIN de posséder une figure voisine d'équilibre dont l'équation de la surface libre puisse être représentée sous la forme (2). A la suite de POINCARÉ nous appelerons l'ellipsoïde pourvu de cette dernière propriété ellipsoïde de bifurcation. C'est pour lui seulement que doit être remplie l'équation ci-dessus (37). Nous allons montrer qu'il existe un couple de racines réelles $\pm\lambda_0$ de cette équation égales en valeur absolue et opposées en signe. En effet pour une valeur de λ satisfaisant à l'inégalité $|\lambda| < 1$ la partie gauche de l'équation (37) se développe en série

$$30\lambda^5 - 10\lambda^7 + \ldots = 0 \tag{38}$$

et pour des valeurs positives assez petites de λ sera certainement positive.

D'autre part en tenant compte de l'ordre des termes de l'équation (37) nous voyons que pour des valeurs assez grandes de λ supposé positif la partie gauche de notre équation est négative. Or, comme elle est une fonction impaire de λ, il en résulte l'existence des deux racines ci-dessus considérées et par conséquent l'existence de l'ellipsoïde de bifurcation. Comme la substitution de $\lambda = 1$ dans l'équation envisagée donne un résultat positif, ces deux racines satisfont à l'inégalité $\lambda_0 > 1$.

En tenant compte des égalités (35) présentons l'équation (2) de la surface libre sous la forme

$$a = b(x^2 + y^2) + cz^2 - \frac{f}{24}[3(x^2 + y^2)^2 + 8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2)]. \tag{39}$$

On peut transformer le polynôme harmonique qui se trouve dans les crochets de l'égalité précédente en passant aux coordonnées polaires dans l'espace r, θ, φ

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{40}$$

et en pratiquant la substitution suivante

$$t = \cos\theta. \tag{41}$$

Il s'exprime alors par le polynôme X_4 de LEGENDRE

$$X_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \tag{42}$$

sous la forme

$$3(x^2 + y^2)^2 + 8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2) = 8r^4 X_4 . \tag{43}$$

Par conséquent l'équation (39) s'écrira en coordonnées polaires dans l'espace sous la forme

$$a = r^2(b \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta) - \frac{f}{3} r^4 X_4 . \tag{44}$$

En comparant l'équation obtenue avec celle de l'ellipsoïde de MACLAURIN nous voyons que le terme complémentaire entrant dans l'équation (44) s'exprime par les fonctions sphériques zonales.

Il y a quelque intérêt à indiquer la position réciproque de la surface algébrique du quatrième ordre obtenue par nous et de l'ellipsoïde de MACLAURIN qui y correspond. Trouvons d'abord les parallèles correspondant à l'intersection de la nouvelle surface avec cet ellipsoïde. Il est évident que ce problème se ramène à déterminer les racines du polynôme de LEGENDRE X_4. Nous recevons sans peine

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= - \operatorname{tg} \theta_2 = 2\sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{6}}}, \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= - \operatorname{tg} \theta_4 = 2\sqrt{1 + \sqrt{\frac{5}{6}}}. \end{aligned} \tag{45}$$

Chacun des deux couples de parallèles obtenus est disposé symétriquement par rapport au plan des coordonnées XOY. D'ailleurs les parallèles caractérisés par les angles θ_1 et θ_2 sont plus éloignés de ce plan que les parallèles correspondant aux angles θ_3 et θ_4. Il est facile de démontrer que pour $f > 0$ la nouvelle surface est située, près du pôle et de l'équateur, à l'extérieur de l'ellipsoïde correspondant de MACLAURIN et par contre à l'intérieur de cet ellipsoïde entre les parallèles caractérisés par les angles θ_1 et θ_3 et aussi par θ_2 et θ_4. Pour $f < 0$ c'est la circonstance inverse qui a lieu.

Parmi les problèmes connexes avec les matières traitées dans le présent Memoire signalons quelques-uns dont la solution offre un certain intérêt. Par exemple, la méthode ci-dessus exposée peut être appliquée à la recherche des figures ovoïdes d'équilibre relatif du liquide tournant qui correspondent à l'équation (2), laquelle dans ce cas doit être complétée par des termes contenant les puissances impaires de ζ. Dans ces conditions une grande partie des calculs effectués dans ce travail restera en valeur. Enfin on peut passer aux figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes de JACOBI en supprimant dans l'équation (2) la symétrie des variables ξ et η. Dans ce cas nous aurons affaire à des quadratures elliptiques.

Su una formula di K. Petr per il calcolo numerico degl' integrali definiti.

Memoria di Giovanni Ricci (a Pisa).

Sunto. - *Si danno le condizioni necessarie e sufficienti per la validità di una formula di* K. Petr, *la quale fornisce uno sviluppo adatto per il calcolo numerico degl' integrali definiti.*

1. Più di venti anni fa (¹) K. Petr pubblicò senza dimostrazione la seguente formula pel calcolo numerico degl' integrali definiti

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h\,\{f(a)+f(b)\} + A_2h^2\,\{f'(a)-f'(b)\} + \ldots$$

$$\ldots + A_kh^k\{f^{(k-1)}(a)+(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(b)\} + \ldots + A_nh^n\{f^{(n-1)}(a)+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(b)\} + R_n,$$

dove

$$h = b - a,$$

$$A_{2k} = \binom{n-k}{k}\frac{1}{2(4n-2)6(4n-6)\ldots(4k-2)(4n-4k+2)},$$

$$A_{2k+1} = \binom{n-k-1}{k}\frac{1}{2(4n-2)6(4n-6)\ldots(4k-2)(4n-4k+2)(4k+2)},$$

$$R_n = \frac{(-1)^n(n!)^2h^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)!}f^{(2n)}(\xi), \qquad (a<\xi<b).$$

L' interesse di questo tipo di sviluppo apparisce evidente osservando che il resto R_n è $O(h^{2n+1})$ mentre l' ultimo termine contiene h^n e mancano i termini contenenti $h^{n+1}, \ldots, h^{2n}$.

Recentemente G. N. Watson (²) è ritornato su tale formula nell' intento

(¹) K. Petr, *O jedné formuli pro vypocet urecitych integrálu,* [« Casopis pro pestování Matematiky a Fisiky », **44** (1915), 454-455].

(²) G. N. Watson, *Ueber eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale* [« Casopis... », **65** (1935), 1-7].

di dimostrare l'equivalenza del resto di K. PETR e di uno sviluppo di J. GEBAUER; per questo si è deciso a ricercare le condizioni necessarie e sufficienti per la validità dello sviluppo di K. PETR, e ha dato i primi risultati di tale indagine. Egli, dopo aver osservato che i coefficienti A_k, qualunque sia la parità di k, possono scriversi sotto la forma

$$A_k = \frac{n!(2n-k)!}{(2n)!(n-k)!k!} = \frac{1}{k!}\frac{\binom{2n-k}{n}}{\binom{2n}{n}}, \qquad (k=0, 1, \dots, n) \tag{1}$$

ha dimostrato precisamente la seguente proposizione:

Sia n *intero* $\geqq 0$ *e* A_k *dato dalla* (1). *Esiste un numero* θ, *con* $0<\theta<1$, *per il quale vale l'uguaglianza* [3]

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} F(a+h) = F(a) + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k h^k \{F^{(k)}(a) + (-1)^{k+1}F^{(k)}(a+h)\} + R_n, \\ R_n = \dfrac{(-1)^n (n!)^2 h^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} F^{(2n+1)}(a+\theta h), \qquad (0<\theta<1) \end{cases}$$

nelle seguenti ipotesi:

$F(x)$, $F'(x), \dots, F^{(2n)}(x)$ *esistono (finite e) continue per* $a \leqq x \leqq a+h$,
$F^{(2n+1)}(x)$ *esiste per* $a < x < a+h$.

Più in generale pel resto R_n *sono valevoli le forme*

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} R_n = \dfrac{(-1)^n \Gamma(n-\mu+1)\Gamma(n-\nu+1)h^{2n+1}}{(2n)!\Gamma(2n-\mu-\nu+2)} \theta^\mu (1-\theta)^\nu F^{(2n+1)}(a+\theta h) \\ (0 \leqq \mu \leqq n, \quad 0 \leqq \nu \leqq n, \quad 0<\theta<1), \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} R_n = \dfrac{(-1)^n h^{2n+1}}{(2n)!} \theta^n (1-\theta)^n \dfrac{\psi(1)-\psi(0)}{\psi'(\theta)} F^{(2n+1)}(a+\theta h) \\ (0<\theta<1), \end{cases}$$

dove, in quest'ultima, la funzione $\psi(t)$ *è continua per* $0 \leqq t < 1$, *differenziabile per* $0<t<1$ *e inoltre* $\psi'(t) \neq 0$, *per* $0<t<1$ [4].

---

(3) Per $n=0$ la somma al secondo membro in (P) è da considerarsi nulla perchè vuota di termini. Conveniamo di porre $F^{(0)}(x) = F(x)$. Convenzioni analoghe varranno pel seguito.

(4) La dimostrazione è talmente semplice ed elegante che conviene accennarla qui: Posto

$$\Phi(t) = t^n(1-t)^n, \quad \chi(t) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i h^i F^{(i)}(a+ht)\Phi^{(2n-i)}(t),$$

È sorto in noi il desiderio di vedere se le ipotesi di G. N. WATSON fossero sovrabbondanti, e una indagine ci ha condotto ad un risultato positivo e, in un certo senso, definitivo; poichè siamo giunti a dimostrare che (detto all'ingrosso) *la formula* (P) *di* K. PETR *è valida nelle minime ipotesi che ci abilitano a scriverla.* Precisamente:

TEOREMA (A). — *Se*

$F(x), F'(x), \dots, F^{(n)}(x)$ *esistono (finite) per* $a \leqq x \leqq a+h$, $(n \geq 0,\ F^{(0)}(x) = F(x))$
$F^{(n+1)}(x), \dots, F^{(2n+1)}(x)$ *esistono per* $a < x < a+h$,

allora vale lo sviluppo (P).

Naturalmente, in queste più larghe ipotesi, la dimostrazione ne risulta più laboriosa e la difficoltà si supera procedendo per gradi con l'uso di polinomî ausiliarî, prima pari e poi dispari, fino a dimostrare la (P); da questa ricaviamo il teorema seguente, analogo a quello ormai classico di E. ROCHE relativo alla formula (abbreviata) di TAYLOR.

TEOREMA (B). — *Siano* $F(x)$ *e* $G(x)$ *definite per* $a \leqq x \leqq a+h$,
esistano (finite) $F^{(n)}(x)$ *e* $G^{(n)}(x)$ *per* $a \leqq x \leqq a+h$, $(n \geq 0)$
esistano $F^{(2n+1)}(x)$ *e* $G^{(2n+1)}(x)$ *per* $a < x < a+h$;
poniamo, con A_k *dato dalla* (1),

$$R_n(F;\ a,\ h) = -\sum_{k=0}^{n} A_k h^k \{ F^{(k)}(a) + (-1)^{k+1} F^{(k)}(a+h) \}$$

e $R_n(G;\ a,\ h)$ *abbia significato analogo.*

Esiste un punto ξ, *con* $a < \xi < a+h$, *per il quale è*

$$\begin{vmatrix} R_n(F;\ a,\ h) & R_n(G;\ a,\ h) \\ F^{(2n+1)}(\xi) & G^{(2n+1)}(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Osserviamo che per $n = 0$ questo teorema si riduce a quello classico di CAUCHY.

La nostra dimostrazione ci sembra interessante, perchè può orientarci sulla strada da seguire quando si voglia stabilire una formula come la (P) nella quale entrino in giuoco i valori di $F(x)$ e delle derivate anche in un certo numero di punti intermedî dell'intervallo $(a,\ a+h)$, in analogia con

---

risulta

$$\chi'(t) = h^{2n+1} F^{(2n+1)}(a+ht) t^n (1-t)^n, \qquad \text{per } 0 < t < 1$$

e, applicando il classico teorema di CAUCHY

$$\{ \chi(1) - \chi(0) \} \psi'(\theta) = \{ \psi(1) - \psi(0) \} \chi'(\theta),$$

si perviene al risultato.

quello che si fa in varie formule, ormai classiche, sul calcolo degl' integrali definiti [5].

2. In tutto il seguito supporremo che per $F(x)$ valgano le ipotesi del Teorema (A), e porremo $b = a + h$, $F^{(0)}(x) = F(x)$.

Lemma 1.° — *Sia* $F^{(k)}(a) = F^{(k)}(b) = 0$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$. *Allora esiste un punto* ξ *con* $a < \xi < b$ *tale che* $F^{(2n+1)}(\xi) = 0$.

Questa proposizione è (una generalizzazione, anzi) una immediata conseguenza del Teorema di M. Rolle; infatti in base a questo $F'(x)$ si annulla in a, in b e in un punto interno dell' intervallo (a, b), e così procedendo $F^{(n)}(x)$ si annulla in a, in b e in n punti (distinti) interni dell' intervallo (a, b); e procedendo ancora, $F^{(2n+1)}(x)$ si annulla in un punto interno dell' intervallo (a, b).

3. Lemma 2.° — *Sia* $F^{(k)}(a) = (-1)^k F^{(k)}(b)$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$. *Allora esiste un punto* ξ, *con* $a < \xi < b$, *tale che* $F^{(2n+1)}(\xi) = 0$.

Si può evidentemente supporre $a = -1$, $b = +1$, caso al quale ci si riconduce colla trasformazione

$$y = \frac{2}{b-a}\, x - \frac{b+a}{b-a}.$$

Sia $P(x)$ un polinomio pari di grado $\leqq 2n$, e poniamo

$$P(x) = c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2n} x^{2n}.$$

Derivando otteniamo [6]

$$P^{(k)}(x) = 0^{\underline{k}} c_0 + 2^{\underline{k}} c_2 x^{2-k} + \ldots + (2n)^{\underline{k}} c_{2n} x^{2n-k},$$

e $P^{(k)}(x)$ risulta pari o dispari secondochè k è pari o dispari; quindi in particolare

$$P^{(k)}(1) = (-1)^k P^{(k)}(-1).$$

Scegliamo i coefficienti c_{2i} di $P(x)$ in guisa da avere $P^{(k)}(1) = F^{(k)}(1)$; questo è possibile poichè basta che gli $n+1$ coefficienti soddisfino al sistema di $n+1$ equazioni lineari

$$0^{\underline{k}} c_0 + 2^{\underline{k}} c_2 + \ldots + (2n-2)^{\underline{k}} c_{2n-2} + (2n)^{\underline{k}} c_{2n} = F^{(k)}(1), \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

il cui determinante (pel fatto che $\alpha^{\underline{k}} = \alpha^k + b_1 \alpha^{k-1} + \ldots + b_{k-1}\alpha + b_k$ con i b indipendenti da α) risulta evidentemente di valore uguale al determinante

[5] Vedi p. es. M. Picone, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Catania, 1923, Cap. V, § 2, pp. 564-602.

[6] Poniamo per α reale e k intero positivo $\alpha^{\underline{k}} = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)$, e anche $\alpha^{\underline{0}} = 1$.

delle differenze (o di VANDERMONDE) degli $n+1$ interi $0, 2, \ldots, 2n-2, 2n$ e quindi non nullo.

Per il modo come è scelto $P(x)$, per la funzione $F(x) - P(x)$ è

$$F^{(k)}(-1) - P^{(k)}(-1) = 0, \quad F^{(k)}(1) - P^{(k)}(1) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

ed essendo soddisfatte le condizioni del Lemma 1.° esiste un punto ξ con $-1 < \xi < 1$ nel quale $F^{(2n+1)}(\xi) - P^{(2n+1)}(\xi) = 0$; essendo $P(x)$ di grado $2n$ al massimo, risulta $F^{(2n+1)}(\xi) = 0$, e il Lemma 2.° è dimostrato.

4. Veniamo a dimostrare il Teorema (A). Possiamo anche qui supporre $a = -1$, $a + h = 1$ e, in accordo con le notazioni del Teorema (B), poniamo

$$R_n(F; -1, 2) = -\sum_{k=0}^{n} A_k 2^k \{ F^{(k)}(-1) + (-1)^{k+1} F^{(k)}(1) \}, \tag{4.1}$$

e si tratta di dimostrare che esiste un punto ξ, con $-1 < \xi < 1$, pel quale si ha

$$R_n(F; -1, 2) = \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!} F^{(2n+1)}(\xi), \qquad (-1 < \xi < 1). \tag{4.2}$$

Sia $P(x)$ un polinomio dispari di grado $\leq 2n+1$

$$P(x) = c_1 x + c_3 x^3 + \ldots + c_{2n+1} x^{2n+1}$$

le cui derivate sono

$$P^{(k)}(x) = 1^{\underline{k}} c_1 x^{1-k} + 3^{\underline{k}} c_3 x^{3-k} + \ldots + (2n+1)^{\underline{k}} c_{2n+1} x^{2n+1-k}, \qquad (k=0, 1, \ldots) \tag{4.3}$$

e risultano polinomi pari o dispari secondochè k è dispari o pari, e in particolare

$$P^{(k)}(-1) + (-1)^k P^{(k)}(1) = 0, \qquad (k=0, 1, \ldots). \tag{4.4}$$

Determiniamo (e vedremo che è possibile) i coefficienti di $P(x)$ in guisa da avere

$$P^{(k)}(-1) + (-1)^{k+1} P^{(k)}(1) = F^{(k)}(-1) + (-1)^{k+1} F^{(k)}(1), \qquad (k=0, 1, \ldots, n); \tag{4.5}$$

se poniamo per semplicità di scrittura

$$F^{(k)}(-1) + (-1)^{k+1} F^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} 2a_k, \qquad (k=0, 1, \ldots, n)$$

per le (4.4) occorre e basta che siano verificate le $n+1$ uguaglianze

$$P^{(k)}(1) = a_k, \qquad (k=0, 1, \ldots, n)$$

cioè, per le (4.3), che sia verificato il sistema lineare nelle c

$$1^{\underline{k}} c_1 + 3^{\underline{k}} c_3 + \ldots + (2n-1)^{\underline{k}} c_{2n-1} + (2n+1)^{\underline{k}} c_{2n+1} = a_k, \qquad (k=0, 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

il cui determinante (per un' osservazione analoga a quella fatta al numero precedente) è uguale al determinante delle differenze degl' interi 1, 3,..., $2n+1$ e quindi non nullo.

Poichè per la (4.5) è

$$F^{(k)}(-1) - P^{(k)}(-1) = (-1)^k \{ F^{(k)}(1) - P^{(k)}(1) \}, \tag{4.7}$$

la funzione $F(x) - P(x)$ si trova nelle condizioni contemplate al Lemma 2°, e quindi esiste un punto ξ, con $-1 < \xi < 1$, nel quale è

$$F^{(2n+1)}(\xi) - P^{(2n+1)}(\xi) = 0,$$

cioè

$$F^{(2n+1)}(\xi) = (2n+1)!\, c_{2n+1}. \tag{4.8}$$

Per le (4.1) e (4.7) è

$$R_n(F; -1, 2) = R_n(P; -1, 2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_k 2^{k+1} a_k,$$

quindi, per questa e la (4.8), la (4.2) risulterà dimostrata non appena avremo provato che il coefficiente c_{2n+1} ottenuto dal sistema lineare (4.6) verifica l' uguaglianza

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{k+1} A_k a_k,$$

che si può anche scrivere, tenuto conto dell' espressione di A_k assegnata dalla (1) al n. 1,

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \binom{2n-k}{n} a_k. \tag{4.9}$$

5. In considerazione del sistema lineare (4.6) poniamo

$$D(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1^0 & 3^0 & \ldots (2n-1)^0 & a_0 \\ 1^1 & 3^1 & \ldots (2n-1)^1 & a_1 \\ 1^n & 3^n & \ldots (2n-1)^n & a_n \end{vmatrix}, \quad \Delta = D((2n+1)^0, (2n+1)^1, \ldots, (2n+1)^n);$$

risulta allora

$$c_{2n+1} = \frac{1}{\Delta} D(a_0, a_1, \ldots, a_n), \tag{5.1}$$

e così ci siamo ridotti a dimostrare che il secondo membro di (4.9) e il secondo membro di (5.1) sono uguali, cioè sono identici nelle indeterminate $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Per procedere nel modo più semplice diamo alle indeterminate a_0, $a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ sistemi di valori linearmente indipendenti e scegliamo, come più convenienti, gli $n+1$ sistemi

$$a_0 = \alpha^0_-,\ a_1 = \alpha^1, \dots,\ a_n = \alpha^n_-, \qquad (\alpha = 1, 3, \dots, 2n-1,\ 2n+1)$$

il cui determinante è $\Delta \neq 0$. Poiche

$$D(\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^n_-) = \begin{cases} 0, & \text{per } \alpha = 1, 3, \dots, 2n-1 \\ \Delta, & \text{per } \alpha = 2n+1 \end{cases}$$

basterà dunque dimostrare che (posto $\alpha = 2s+1$):

$$(5.2)\quad \gamma_s = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{k!} \binom{2n-k}{n} (2s+1)^k = \begin{cases} 0, & \text{per } s = 0, 1, \dots, n-1 \\ (-1)^n 2^{2n}, & \text{per } s = n. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\frac{(2s+1)^k_-}{k!} = \frac{(2s+1)(2s)(2s-1)\dots(2s-k+2)}{k!} = \binom{2s+1}{k},$$

e quindi

$$(5.3)\qquad \gamma_s = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{2s+1}{k} \binom{2n-k}{n}$$
$$= \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k 2^k \binom{2s+1}{k} \binom{2n-k}{n}.$$

Sia $0 \leqq s \leqq n-1$, cioè $1 \leqq 2s+1 \leqq 2n-1$, e consideriamo il polinomio in x

$$Q_s(x) = \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k 2^k \binom{2s+1}{k} (1+x)^{2n-k} = (1+x)^{2n-2s-1} \sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k 2^k \binom{2s+1}{k} (1+x)^{2s+1-k}$$
$$= (1+x)^{2n-2s-1}(1+x-2)^{2s+1}$$
$$= -(1+x)^{2n-2s-1}(1-x)^{2s+1}.$$

L'espressione γ_s in (5.3) è il coefficiente del termine in x^n del polinomio $Q_s(x)$ e per dimostrare che $\gamma_s = 0$ per $0 \leqq s \leqq n-1$ osserviamo che

$$Q_s\left(\frac{1}{x}\right) = -\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2n-2s-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2s+1} = \frac{-1}{x^{2n}}(x+1)^{2n-2s-1}(x-1)^{2s+1}$$

cioè identicamente

$$Q_s(x) + x^{2n} Q_s\left(\frac{1}{x}\right) = 0;$$

fissando l'attenzione sul coefficiente del termine in x^n risulta $\gamma_s + \gamma_s = 0$, cioè $\gamma_s = 0$ per $s = 0, 1, \dots, n-1$, ed è dimostrata la prima in (5.2).

Rimane da considerare il caso $s = n$ cioè da determinare γ_n dato dalla

(5.3); consideriamo il polinomio

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 2^k \binom{2n+1}{k} (1+x)^{2n-k}$$
$$= \frac{1}{1+x} \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k 2^k \binom{2n+1}{k} (1+x)^{2n+1-k} + 2^{2n+1}(1+x)^0 \right\}$$
$$= \frac{1}{1+x} \{ (1+x-2)^{2n+1} + 2^{2n+1} \} = \frac{1}{1+x} \{ (x-1)^{2n+1} + 2^{2n+1} \}.$$

Si calcola subito

$$Q_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x} \left\{ -\frac{(x+1)^{2n+1}}{x^{2n}} + 2^{2n+1}x \right\}$$

quindi

$$x^{2n} Q_n\left(\frac{1}{x}\right) = -Q_n(x) + 2^{2n+1} \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

cioè identicamente

$$x^{2n} Q_n\left(\frac{1}{x}\right) = -Q_n(x) + 2^{2n+1}(1 - x + x^2 - \dots + x^{2n}).$$

Poichè γ_n è il coefficiente di x^n tanto in $Q_n(x)$ quanto in $x^{2n}Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$, risulta

$$\gamma_n = -\gamma_n + (-1)^n 2^{2n+1},$$

da cui

$$\gamma_n = (-1)^n 2^{2n},$$

e le (5.2) risultano dimostrate. E con queste anche la (3.1) e il Teorema (A).

6. Dimostriamo adesso il Teorema (B) del n. 1, che è immediata conseguenza di ciò che precede. Osserviamo prima di tutto che detti c e c' due numeri reali qualunque vale la relazione distributiva

$$R_n(cF + c'G;\, a, h) = cR_n(F;\, a, h) + c'R_n(G;\, a, h).$$

Ponendo

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} R_n(F;\, a, h) & R_n(G;\, a, h) \\ F(x) & G(x) \end{vmatrix}$$

per la relazione precedente risulta

$$R_n(\varphi;\, a, h) = R_n(F;\, a, h)R_n(G;\, a, h) - R_n(G;\, a, h)R_n(F;\, a, h) = 0.$$

Per il Teorema (A) esiste un punto ξ, con $a < \xi < a+h$ nel quale

$$\varphi^{(2n+1)}(\xi) = 0, \qquad (a < \xi < a + h)$$

e il Teorema (B) è dimostrato.

7. Come ultima osservazione mostriamo come dal Teorema (B), con l'opportuna scelta della funzione $G(x)$, possiamo ricavare le forme (I) e (II) di G. N. WATSON del resto R_n (n. 1).

Intanto, notiamo ovviamente che la forma (I) segue dalla (II) ponendo in questa

$$\psi(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} u^{n-\mu}(1-u)^{n-\nu} du.$$

Consideriamo la (II): si può supporre, senza alterare la generalità, $a=0$, $h=1$ e si tratta di dimostrare

$$R_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^n(1-\theta)^n \frac{\psi(1)-\psi(0)}{\psi'(\theta)} F^{(2n+1)}(\theta), \qquad (0<\theta<1); \tag{7.1}$$

possiamo ancora supporre

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=0, \quad \psi'(t)>0 \quad \text{per} \quad 0<t<1. \tag{7.2}$$

Aggiungiamo l'ipotesi

$$\psi(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{t} \psi'(u)du. \tag{7.3}$$

Poniamo

$$G(x) = \frac{1}{(2n)!}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{(x-z)^{2n}}{z^n(1-z)^n}\psi'(z)dz, \qquad (0<x<1) \tag{7.4}$$

e con questo risulta [7]

$$\begin{cases} G^{(k)}(x) = \dfrac{1}{(2n-k)!}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{(x-z)^{2n-k}}{z^n(1-z)^n}\psi'(z)dz, & (0<x<1) \\ & (k=0,1,\dots,2n) \\ G^{(2n+1)}(x) = \dfrac{\psi'(x)}{x^n(1-x)^n}. & (0<x<1) \end{cases} \tag{7.5}$$

Si vede subito che per $x \to +0$ e per $x \to 1-0$ esistono finiti i limiti di $G^{(n)}(x)$; infatti, per fissare le idee consideriamo l'estremo destro e l'andamento per $x \to 1-0$. $G^{(n)}(x)$ risulta una funzione crescente di x per $\frac{1}{2} \leq x < 1$

(7) Ved. per es. U. DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale.* Vol II (Pisa, 1909), pp. 605-608

ed è

$$n!\, G^{(n)}(x) < \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{(1-z)^n}{z^n(1-z)^n}\, \psi'(z)dz < \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2^n \psi'(z)dz = 2^n \psi(1).$$

Dunque esistono le derivate

$$G^{(k)}(0), \quad G^{(k)}(1), \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

e la funzione $G(x)$ soddisfa alle condizioni richieste per la validità del Teorema (B). Poniamo

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k G^{(k)}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\psi'(z)}{z^n(1-z)^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{(2n-k)!} (x-z)^{2n-k} \right\} dz$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\psi'(z)}{z^n(1-z)^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2n)!} \binom{n}{k} (x-z)^{2n-k} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{(x-z)^n (x-z+1)^n}{z^n(1-z)^n}\, \psi'(z)dz,$$

e quindi, essendo $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, risulta:

$$\Phi_1(0) = \lim_{x \to +0} \Phi_1(x) = \frac{1}{(2n)!} \int_{\frac{1}{2}}^{0} (-1)^n \psi'(z)dz = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, \psi(0).$$

Analogamente si calcola

$$\Phi_2(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} A_k G^{(k)}(x) = -\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\psi'(z)}{z^n(1-z)^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A_k}{(2n-k)!} (x-z)^{2n-k} \right\} dz$$

$$= -\frac{1}{(2n)!} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{(x-z)^n (x-z-1)^n}{z^n(1-z)^n}\, \psi'(z)dz,$$

e quindi

$$\Phi_2(1) = \lim_{x \to 1-0} \Phi_2(x) = -\frac{(-1)^n}{(2n)!}\, \psi(1).$$

$$R_n(G; 0, 1) = -(\Phi_1(0) + \Phi_2(1)) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\psi(1) - \psi(0)).$$

Tenendo conto di questa e dell' ultima delle (7.5), dal Teorema (B) segue la (7.1).

Postulates for Linear Connections in Abstract Vector Spaces [1].

By A. D. MICHAL (Pasadena, California, U. S. A.).

Introduction. — In recent years a large portion of the work in n-dimensional differential geometry [2] has been centered around the notion of a linear connection. My studies on infinitely many dimensional differential geometries [3] in functional spaces have led me to the introduction of functional linear connections. Early in the development of these infinitely many dimensional geometries it became clear that some of the main properties of linear connections could be abstracted in normed vector spaces. In 1933 definitive results were obtained along this direction and the first chapter in abstract differential geometry was written [4].

(1) Presented to the « American Math. Soc. », Dec. 1, 1933, under a slightly different title. Cf. « Bulletin of A. M. S. », abstract n.° 337, Vol. 39 (November, 1933).

(2) The recent literature on *finite dimensional* differential geometry is extensive. We refer the reader to the following representative books on the subject. L. P. EINSENHART, *Riemannian Geometry* (1926), *Non-Riemannian Geometry* (« A. M. S. Coll. Publications », Vol. VIII, 1927), *Continuous Groups of Transformations* (1933); J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkul* (1924); O. VEBLEN, *Invariants of Quadratic Differential Forms* (1927), *Projective Relativitätstheorie* (« Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete », 1933); T. Y. THOMAS, *Differential Invariants of Generalized Spaces* (1934); DUSCHEK-MAYER, *Lehrbuch Der Differentialgeometrie* (vol. I and II, 1930); T. LEVI-CIVITA, *The Absolute Differential Calculus* (1927); E. CARTAN, *Leçons sur La Géométrie Des Espaces De Riemann* (1928), *La Théorie Des Groupes Finis Et Continus Et L'Analysis Situs* (« Mémorial des Sciences Mathématiques », fasc. 42, 1930); G. VITALI, *Geometria Nello Spazio Hilbertiano* (1929); W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie* (vol. II, 1923); H. WEYL, *Space-Time-Matter* (« English translation », 1921); O. VEBLEN and J. H. C. WHITEHEAD, *The Foundations of Differential Geometry* (1932); D. J. STRUIK, *Theory of Linear Connections* (« Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete », 1934): V. HLAVATY, *Les Courbes De La Variété Générale à* n *Dimensions* (« Mémorial des Sciences Mathématiques », Fasc. 63, 1934).

(3) A. D. MICHAL, « American Journal of Math. », vol. 50 (1928), pp. 473-517. This paper was previously presented to the American Math. Soc. at the New York meeting, October 1927 (Cf. « Bulletin of A. M. S. », vol. 34, Jan. 1928, pp. 8-9 for the abstracts). Following the publication of this initial paper on the subject there appeared numerous papers on functional differential geometry and related topics by F. CONFORTO, A. KAWAGUCHI, M. KERNER, A. D. MICHAL, G. C. MOISIL, T. S. PETERSON and H. P. THIELMAN.

(4) A. D. MICHAL, « Bull. of American Math. Soc. », Vol. 39 (1933), pp. 879-881.

Since then several new theorems on differentials and total differential equations in abstract vector spaces were proved and were helpful in a drastic reduction of the postulates as well as in deriving new theorems on abstract linear connections.

Before we proceed with a brief description of the contents of the various paragraphs of our paper we shall make a few remarks on the reasons for choosing normed vector spaces as manifolds and on the nature of an abstract differential geometry. From the work of E. CARTAN and others it has become clear that a differential geometry is concerned not with one space but with several spaces and their interconnections by means of interspace functional transformations. One of the spaces is often called the underlying manifold and the remaining spaces, the associated manifolds. We take the point of view that the universe of discourse of a differential geometry consists of a collection of spaces and a set of inter-space functional transformations *at least one of which possesses a differential.*

Moreover the differentiability of at least one of these transformations plays an essential role in the theory. In actual practice some of these inter-space functional transformations are only required to *induce* differentiable transformations between maps of the spaces. The maps are usually instances of abstract normed vector spaces such as number spaces and functional spaces.

As far as the author has been able to ascertain, the most general spaces over which *uique* differentials can be defined are normed vector spaces (1) (BANACH spaces are normed vector spaces with a real number system as the multiplier number system). Differentials can be defined in more general spaces but we have not been able to prove that the differential of a given function in such general spaces is unique. Because of the above reasons it appears that normed vector spaces are of fundamental importance for the differential geometer. The degree of generality of normed vector spaces is however considerable, for it must be remembered that abstract HILBERT space (2) is a special kind of a normed vector space and that most of the functional spaces (3) of analysis are instances of an abstract normed vector space.

---

(1) Numerous references to papers on abstract space theory can be found in M. FRÉCHET, *Les Espaces Abstraits* (1928), and in S. BANACH, *Théorie Des Opérations Linéaires* (1932).

(2) M. H. STONE, *Linear Transformations in Hilbert Space* (« A. M. S. Colloquium publications », 1932), where references are given to HILBERT'S, RIESZ'S and v. NEUMANN'S papers.

(3) For the theory of functionals and related subjects see G. C. EVANS, *Functionals And Their Applications* (« A. M. S. colloquium publications », 1918); V. VOLTERRA, *Theory of Functionals* (1930); P. LÉVY, *Analyse Fonctionnelle* (1922). See also FRÉCHET'S and BANACH'S books.

The first paragraph contains a few preliminary theorems on the differentials of functions depending linearly on one or more abstract parameters. In particular a fundamental theorem is proved on the total differential of the inverse of a solvable linear function $f(x, \alpha)$ (See Theorem 1.4).

In § 2 we give six postulates, in addition to the vector space postulates, for a linear connection and we present a functional instance for their consistency. It is worthwhile to mention here that as a rule we abstract the forms rather than the coefficients of forms. A notable exception to this general procedure is furnished by the postulates for a normed vectorial ring given in § 6. On the basis of the postulates of § 2 we are enabled to give in § 3 the definition of a curvature form (curvature for brevity). Theorem 3.7 of § 3 and Theorems 4.1 and 4.2 of § 4 deal with solvable linear functions that satisfy abstract total differential equations. We hope to make clear elsewhere the fundamental nature of these theorems in connection with the differential geometry of the group manifold of continuous transformation groups with *abstract parameters*. A brief treatment of parallelism of abstract vector fields with respect to a given curve in the underlying vector manifold is given in § 5.

A set of postulates is given in § 6 with a special end in view. A vector space E_2, a normed vectorial ring, is introduced and amongst the postulated functional operations is a *class* of linear functions, called contractions, on E_2 to the real numbers. On the basis of these postulates we make a definition of a *class* of « generalized RICCI » forms. The functional instance presented for the consistency of the postulates contains *a continuous infinitude of contractions* and hence a *continuous infinitude of « generalized Ricci » forms.*

Finally in § 7 postulates are given for a second linear connection in addition to the postulates of § 2 for the first linear connection. The fundamental identity relating the two curvatures is contained in Theorem 7.2.

The author has initiated elsewhere (¹) the study of « Riemannian » differential geometries in abstract vector spaces. The postulates for such a geometry lead to *two* abstract « CHRISTOFFEL symbols of the second kind » that are special linear connections of the kind treated in § 2 and § 7 of the present paper.

§ 1. **Preliminary theorems on Fréchet differentials.** — We shall give in this paragraph a few new theorems on FRÉCHET differentials in abstract

(¹) A. D. MICHAL, « Bull. of American Math. Soc. », vol. 39 (1933), abstracts 332 and 333, p. 879.

vector spaces that will be needed in the development of our subject. By an abstract vector space (vector space for short) we mean a complete normed linear abstract space closed under multiplication by real numbers. Such spaces are often called BANACH spaces in the literature.

There is a real advantage gained in using the same symbol for a norm $\|\dots\|$ in the simultaneous consideration of several vector spaces. Similar remarks hold good for the symbols $+$, 0, and $=$ in the simultaneous consideration of real numbers and vector spaces. We shall adhere to these simplifications in notation throughout our paper. There need not be any confusion in these matters as the context will make clear the meaning of the symbols used.

We begin with the

THEOREM 1.1. — *Let* E_1, E_2 *and* E_3 *be three vector spaces. If* $F(x, \alpha)$ *is a function* (1) *on* $E_1((x_0)_a)E_2$ *to* E_3, *linear* (2) *in* α *and possessing a partial differential* $F(x, \alpha; \delta x)$ *that is continuous in* x, *then the total differential* $F(x, \alpha; \delta x, \delta\alpha)$ *exists*, (3) *is continuous in* x, α, δx, $\delta\alpha$, *and is given by*

$$F(x, \alpha; \delta x, \delta\alpha) = F(x, \alpha; \delta x) + F(x, \delta\alpha). \tag{1.1}$$

Proof:

$$\begin{aligned}&\| F(x+\delta x, \alpha+\delta\alpha) - F(x, \alpha) - F(x, \alpha; \delta x) - F(x, \delta\alpha) \| \\ \leq &\| F(x+\delta x, \alpha) - F(x, \alpha) - F(x, \alpha; \delta x \| + \| F(x+\delta x, \delta\alpha) - F(x, \delta\alpha) \|.\end{aligned}$$

From our hypotheses on $F(x, \alpha; \delta x)$ and a few results of M. KERNER (4)

(1) All functions considered in this paper will be, without explicit mention, single valued. We use E. H. MOORE's convenient terminology « $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is a function on $c_1 c_2 \dots c_n$ to c » to denote that Φ is a function whose ith argument ranges over a class of elements c_i and whose values are elements in the class c. We shall also use the symbol $c_i(s)$ to denote that the ith argument of the function Φ ranges over the subset s of the class c_i. The classes c_i will be usually vector spaces and the subsets s will usually be open neighborhoods $(x_0)_a$, i. e., the set of elements x that satisfy the inequality $\|x - x_0\| < a$ for a fixed element x_0 and fixed positive number a. Most of the theorems in the paper continue to hold if more general connected sets s are used in the place of $(x_0)_a$. Without any further statement we shall restrict ourselves to functions for which the substitution of equal elements is a valid operation.

(2) Additive and continuous (and hence homogeneous of degree one).

(3) In order to do away with long circumlocutions we shall understand throughout our paper, unless a statement to the contrary is made, that statements on properties of a function will hold good for all values of the arguments lying in the domains of definition of the function and that assertions on properties of differentials of a function will hold good for all such values of the arguments of the given function and for *all* values of the *new* arguments that the differential introduces. For example, the assertions for $F(x, \alpha; \delta x, \delta\alpha)$ in Theorem 1.1 are understood to hold for all x in $(x_0)_a$, all α in E_2, all δx in E_1, and all $\delta\alpha$ in E_2.

(4) « Annals of Math. », vol. 34 (1933), pp. 548-552.

we obtain the inequalities

$$\| F(x+\delta x,\ \delta\alpha) - F(x,\ \delta\alpha) \| \leq \int_0^1 \| F(x+s\delta x.\ \delta\alpha;\ \delta x) \|\, ds \tag{1.2}$$

and (1)

$$\int_0^1 \| F(x+s\delta x,\ \delta\alpha;\ \delta x) \|\, ds \leq m \, \| \delta x \| \, \| \delta\alpha \| . \tag{1.3}$$

The inequality (1.3) holds for $\| \delta x \|$ sufficiently small and m is a fixed positive number. Hence given an $\varepsilon > 0$, there exists a $\rho_1 > 0$ and a $\rho_2 > 0$ such that

$$\| F(x+\delta x,\ \alpha) - F(x,\ \alpha) - F(x,\ \alpha;\ \delta x) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \| \delta x \| \quad \text{for} \quad \| \delta x \| < \rho_1$$

and

$$\int_0^1 \| F(x+s\delta x,\ \delta\alpha;\ \delta x) \|\, ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \| \delta\alpha \| \quad \text{for} \quad \| \delta x \| < \rho_2 .$$

Let ρ be the smaller of ρ_1 and ρ_2. From the above inequalities we obtain

$$\| F(x+\delta x,\ \alpha+\delta\alpha) - F(x,\ \alpha) - F(x,\ \alpha;\ \delta x) - F(x,\ \delta\alpha) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} (\| \delta x \| + \| \delta\alpha \|)$$

for $\| \delta x \| < \rho$ and all $\delta\alpha$. Since for arbitrary δx, $\delta\alpha$ (greater of $\| \delta x \|$ and $\| \delta\alpha \|) \equiv \| \delta x,\ \delta\alpha \| \geq \frac{1}{2} (\| \delta x \| + \| \delta\alpha \|)$ we see that

$$\| F(x+\delta x,\ \alpha+\delta\alpha) - F(x,\ \alpha) - F(x,\ \alpha;\ \delta x) - F(x,\ \delta\alpha) \| \leq \varepsilon \| \delta x,\ \delta\alpha \| \quad \text{for} \quad \| \delta x,\ \delta\alpha \| < \rho .$$

But clearly $F(x,\ \alpha;\ \delta x) + F(x,\ \delta\alpha)$ is continuous and additive in δx, $\delta\alpha$. Hence the last inequality shows that $F(x,\ \alpha;\ \delta x,\ \delta\alpha)$ exists and is given by (1.1). Moreover the continuity of $F(x,\ \alpha;\ \delta x,\ \delta\alpha)$ in x, α, δx, $\delta\alpha$ is obtained readily by observing that $F(x,\ \alpha;\ \delta x)$ is linear in α, linear in δx, and that $F(x,\ \delta\alpha)$ is linear in $\delta\alpha$.

(1) It is well known that if the FRÉCHET differential of a function exists then the GATEAUX differential also exists and the two are equal. Hence if a function $F(x,\ \alpha)$ is linear in α, one can show readily with the aid of a theorem of BANACH (see S. BANACH, « Fundamenta Mathematicae », vol. 3 (1922), p. 157) that the GATEAUX differential $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{F(x+\lambda\delta x,\ \alpha) - F(x,\ \alpha)}{\lambda}$, if it exists, is linear in α. Similarly for the FRÉCHET differential $F(x,\ \alpha;\ \delta x)$.

The following more general theorem can be proved in a similar fashion.

THEOREM 1.2. — *Let* $E_1, E_2, \dots, E_n$, E *be* $n+1$ *vector spaces. If* $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ *is a function on* $E_1((x_0)_a)E_2 \dots E_n$ *to* E, *multilinear in* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ *and possessing a partial differential* $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; \delta x)$ *that is continuous in* x, *then the partial differentials* $F(x, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}; \delta x, \delta\alpha_5)$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ *exist, are continuous (jointly) in all their variables, and are given by*

$$(1.4)\quad F(x, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}, \delta x, \delta\alpha_i) = F(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; \delta x) + F(x, \alpha_1, \dots, \delta\alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}).$$

We next prove.

THEOREM 1.3. — *Let* E_1, E_2, E_3 *be three vector spaces and let* $F(x, \alpha)$ *be a function on* $E_1((x_0)_a)E_2$ *to* E_3 *with the following properties:*

1) $F(x, \alpha)$ *is linear in* α.

2) *The first partial differential* $F(x, \alpha; \delta_1 x)$ *exists.*

3) *The second partial differential* $F(x, \alpha; \delta_1 x; \delta_2 x)$ *exists and is continuous in* x.

Then the differential $F(x, \alpha; \delta x, \delta\alpha)$ *exists and is continuous in* $x, \alpha, \delta x, \delta\alpha$; *and the second differential* $F(x, \alpha; \delta_1 x; \delta_2 x, \delta\alpha)$ *exists, is continuous in* $x, \alpha, \delta_1 x, \delta_2 x, \delta\alpha$, *and is given by*

$$(1.5)\qquad F(x, \alpha; \delta_1 x; \delta_2 x, \delta\alpha) = F(x, \alpha; \delta_1 x; \delta_2 x) + F(x, \delta\alpha; \delta_1 x).$$

Proof: From the existence of the second differential $F(x, \alpha; \delta_1 x; \delta_2 x)$ it follows that $F(x, \alpha; \delta_1 x)$ is continuous in x. The hypotheses of Theorem 1.1 are thus satisfied. An application of Theorem 1.1 shows the validity of the first part of our theorem. To prove the second part, we first observe that $F(x, \alpha; \delta_1 x)$ is bilinear in α and $\delta_1 x$. An application of Theorem 1.2 to $F(x, \alpha; \delta_1 x)$ completes the proof of the theorem.

An extension of Theorem 1.3 to higher differentials can be given.

In ordre that there will be no misunderstanding in the later paragraphs, we shall give here a definition of a solvable linear function.

Definition of a solvable linear function. Let E_1, E_2, E_3 be vector spaces. A function $f(x, \alpha)$ on $E_1((x_0)_a)E_2$ to E_3, linear in α, is said to be solvable linear function, if there exists a function $\bar{f}(x, \beta)$ on $E_1((x_0)_a)E_3$ to E_2 (called the inverse function) such that

$$(1.6)\qquad \begin{cases} f(x, \bar{f}(x, \beta)) = \beta \\ \bar{f}(x, f(x, \alpha)) = \alpha. \end{cases}$$

Clearly the inverse function $\bar{f}(x, \beta)$ is unique and by a theorem of BANACH ([1]) and SCHAUDER ([2]) it is linear in β. Thus $f(x, \alpha)$ is the inverse function of $\bar{f}(x, \beta)$ and so $f(x, \beta)$ is itself a solvable linear function.

THEOREM 1.4 — *Let* E_1, E_2, E_3 *be vector spaces. If* $f(x, \alpha)$ *is a solvable linear function on* $E_1((x_0)_a)E_2$ *to* E_3 *such that the first partial differential* $f(x, \alpha; \delta x)$ *exists and is continuous in* x, *then the inverse function* $\bar{f}(x, \beta)$ *possesses a first partial differential* $\bar{f}(x, \beta; \delta x)$ *that is continuous in* x *and linear in* β.

Proof: From our hypotheses it follows with the aid of a theorem proved elsewhere ([3]) that $\bar{f}(x, \beta; \delta x)$ exists and is given by

$$\bar{f}(x, \beta; \delta x) = -\bar{f}(x, f(x, \bar{f}(x, \beta); \delta x)). \tag{1.7}$$

Clearly $f(x, \alpha; \delta x)$ is linear in α. Hence the theorem follows from well known results on the continuity of functions of functions ([4]) and a theorem of KERNER ([5]).

§ 2. **Postulates for a linear connection.** — In this paragraph we give a set of postulates for a linear connection. Some of the consequences of these postulates are developed sufficiently so as to bring out the *curvature* expression and some of its fundamental properties.

We deal with two vector spaces: E, the underlying manifold of our geometry, and E_1, an associated manifold of elements that will sometimes be called, for historical reasons, « contravariant vectors ». The following notations will be used in this paragraph unless otherwise indicated.

$x, x_1, x_2, \ldots, y, y_1, y_2, \ldots, z, z_1, z_2, \ldots$:	variables	ranging	over	E
Capital Latin and all Greek letters:	»	»	»	E_1
Remaining lower case Latin letters:	»	»	»	R,

the real number system.

Postulate 1. There exists a function $\Gamma(x, V, y)$, called a linear connection, on $E((x_0)_a)E_1E$ to E_1, where x_0 is a fixed element of E and a is a fixed positive number.

([1]) S. BANACH, « Studia Mathematica », vol. 1 (1929), p. 238.

([2]) J. SCHAUDER, « Studia Mathematica », vol. 2 (1930), pp. 1-6.

([3]) A. D. MICHAL and V. ELCONIN, « Bull. of American Math. Soc. », vol. 40 (1934), abstracts 228, p. 530 and 386, pp. 814-815. To be published in full elsewhere.

([4]) M. FRÉCHET, « Annales Sc. Ec. Normale », vol. 12 (1925). See also T. HILDEBRANDT and L. GRAVES, « Trans. of A. M. S. », vol. 29 (1927).

([5]) M. KERNER, « Annals of Math. », loc. cit.

Postulate 2. $\Gamma(x,\ V_1 + V_2,\ y) = \Gamma(x,\ V_1,\ y) + \Gamma(x,\ V_2,\ y)$.

Postulate 3. $\Gamma(x,\ V,\ y_1 + y_2) = \Gamma(x,\ V,\ y_1) + \Gamma(x,\ V,\ y_2)$.

Postulate 4. $\| \Gamma(x,\ V,\ y) \| \leq A \| V \| \| y \|$, where A is a fixed positive number.

Postulate 5. The first partial differential $\Gamma(x,\ V,\ y;\ \delta x)$ exists.

Postulate 6. $\Gamma(x,\ V,\ y;\ \delta x)$ is continuous in x.

Clearly these postulates together with the postulates for the vector spaces E and E_1 form a consistent system. This can be seen most easily by taking an instance in which the vector spaces E and E_1 are both the real number space with the absolute value as norm. A logical analysis of the above six postulates together with the postulates for the vector spaces E and E_1 will not be given here. The postulates as they stand above are not enumerated in a form suitable for independence considerations. They have however the advantage of simplicity and perspicuity over the postulate system that is stated for such a purpose.

The reader will have no difficulty in giving non-trivial instances of our postulates from the realm of n-dimensional differential geometries (1) as well as from the author's (2) infinitely many dimensional differential geometries.

We give here briefly *one* of the many new instances of our postulates. Let the vector space E be the well known « space of continuous functions » x^d. Before going any further in this instance we are forced to make a digression and make clear a few matters of notation. We shall write continuous real variables as indices and shall denote a RIEMANN integration over the whole range of an index by repeating that index once as a subscript and once as a superscript. The real functions x^d of a real variable d are defined and continuous over $d_1 \leq d \leq d_2$, the norm is defined by

$$\| x^d \| = \max_{d_1 \leq d \leq d_2} | x^d |,$$

and the other operations are interpreted in the usual manner. We take the vector space E_1 to be also a space of continuous functions V^α defined over $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ with a norm defined by

$$\| V^\alpha \| = \max_{\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2} | V^\alpha |.$$

(1) Cf. the bibliography for finite dimensional differential geometry given in the introduction.

(2) A. D. MICHAL, « Amer. Journal of Math. », loc. cit., and « Proc. of the National Academy of Sciences », 1930-1931 (four papers), loc. cit.

A linear connection can be taken to be the functional $\Gamma^\alpha[x^d, V^\beta, \delta x^b]$ defined by (1)

$$\Gamma^\alpha[x^d, V^\beta, \delta x^b) = \Gamma^\alpha_{\beta b}[x^d]V^\beta \delta x^b + \Gamma^\alpha_b[x^d]V^\alpha \delta x^b, \tag{2.1}$$

where $\Gamma^\alpha_{\beta b}[x^d]$ is a functional whose values are continuous functions of the three variables α, β, b and where $\Gamma^\alpha_b[x^d]$ is a functional whose values are continuous functions of the two variables α, b.

The partial FRÉCHET differential of the linear connection can be taken to be in the normal form

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma^\alpha[x^d, V^\beta, \delta_1 x^b; \delta_2 x^c] = &({}'\Gamma^\alpha_{\beta b}[x^d]V^\beta + {}'\Gamma^\alpha_b[x^d]V^\alpha)\delta_1 x^b \delta_2 x^b \\ &+ (\Gamma^\alpha_{\beta b, c}[x^d]V^\beta + \Gamma^\alpha_{b,c}[x^d]V^\alpha)\delta_1 x^b \delta_2 x^c, \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

where ${}'\Gamma^\alpha_{\beta b}[x^d]$, ${}'\Gamma^\alpha_b[x^d]$, $\Gamma^\alpha_{\beta b, c}[x^d]$, $\Gamma^\alpha_{b,c}[x^d]$ are four functionals of x^d whose values are continuous functions of their respective free variables.

Clearly for any chosen positive numbers a and A there exist functionals of the form (2.1) and (2.2) such that all our postulates are satisfied by them for the given a and A.

§ 3. The curvature form. — From the existence of the partial differential $\Gamma(x, V, y; \delta x)$ follows the continuity in x of $\Gamma(x, V, y)$ while from Postulates 2, 3, and 4 follows the continuity of $\Gamma(x, V, y)$ in V and y separately. Hence the theorem.

THEOREM 3.1. — *The linear connection* $\Gamma(\mathrm{x}, \mathrm{V}, \mathrm{y})$ *is continuous jointly in the three variables* x, V, y *and is a bilinear function of* V *and* y.

From the continuity of $\Gamma(x, V, y; \delta x)$ in x and this theorem we have.

THEOREM 3.2. — *The partial differential* $\Gamma(\mathrm{x}, \mathrm{V}, \mathrm{y}; \delta\mathrm{x})$ *is continuous in the set* x, V, y, δx *and is a trilinear function of* V, y *and* δx.

DEFINITION OF $B(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x)$. — *A function* (2) $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{V}, \delta_1\mathrm{x}, \delta_2\mathrm{x})$, *the curvature (form), is defined by*

$$\begin{aligned} B(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x) = &\Gamma(x, V, \delta_1 x; \delta_2 x) - \Gamma(x, V, \delta_2 x; \delta_1 x) \\ &+ \Gamma(x, \Gamma(x, V, \delta_1 x), \delta_2 x) - \Gamma(x, \Gamma(x, V, \delta_2 x), \delta_1 x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

in terms of the postulated linear connection $\Gamma(\mathrm{x}, \mathrm{V}, \delta_1\mathrm{x})$ *and its partial differential* $\Gamma(\mathrm{x}, \mathrm{V}, \delta_1\mathrm{x}; \delta_2\mathrm{x})$.

(1) In this instance, the variables b, c, d, e, f are real variables ranging over the closed interval (d_1, d_2), and α, β, γ are real variables ranging over the closed interval (α_1, α_2).

(2) We remind the reader of the convention about the range of the arguments of functions. Here, of course, x ranges over the region $(x_0)_a$.

THEOREM 3.3. — *The curvature* B(x, V, δ_1x, δ_2x) *defined in* (3.1) *is continuous in the set* x, V, δ_1x, δ_1x. *Moreover it is a trilinear function of* V, δ_1x *and* δ_2x, *and satisfies the identity*

$$B(x,\ V,\ \delta_1 x,\ \delta_2 x) = -B(x,\ V,\ \delta_2 x,\ \delta_1 x). \tag{3.2}$$

We are thus led to the following fundamental theorem, whose proof can be obtained by a slight modification of the proof of a more general existence theorem on total differential equations in abstract vector spaces [1].

THEOREM 3.4. — *If*

$$B(x,\ V,\ \delta_1 x,\ \delta_2 x) \equiv 0 \tag{3.3}$$

then there exists one and only one function ξ(x) *that enjoys the following properties:*

a) ξ(x) *satisfies the total differential equation*

$$\xi(x;\ \delta x) = -\Gamma(x,\ \xi(x),\ \delta x); \tag{3.4}$$

b) ξ(x) *takes on the arbitrarily given initial value* ξ_0 *for* x = x$_0$;

c) *the first differential of* ξ(x) *exists and is given by* (3.4);

d) *the second differential of* ξ(x) *exists, is symmetric in* δ_1x *and* δ_2x, *and is given explicitly by*

$$\xi(x;\delta_1 x;\delta_2 x) = \Gamma(x,\ \Gamma(x,\ \xi(x),\ \delta_2 x),\ \delta_1 x) - \Gamma(x,\ \xi(x),\ \delta_1 x;\ \delta_2 x). \tag{3.5}$$

In the last theorem the initial parameter ξ_0 is an arbitrarily chosen element in the vector space E_1 while x_0 is a fixed element of E. To exhibit the dependence of the solution function $\xi(x)$ on the initial abstract parameters x_0 and ξ_0, let us write $\xi(x,\ x_0,\ \xi_0)$ in the place of $\xi(x)$. We shall prove.

THEOREM 3.5. — *The function* ξ(x, x$_0$, α) *of Theorem* 3.4 *is a linear function of* α.

Proof: It can be shown that

$$\xi(x,\ x_0,\ \alpha) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(x,\ x_0,\ \alpha), \tag{3.6}$$

where $\xi_0 = \alpha$ and

$$\xi_{n+1}(x,\ x_0,\ \alpha) = \alpha - \int_0^1 \Gamma(x_0 + s(x-x_0),\ \xi_n(x_0 + s(x-x_0),\ x_0,\ \alpha),\ x - x_0)ds, \tag{3.7}$$

the integral [2] being in the sense of KERNER-GRAVES.

---

[1] A. D. MICHAL and V. ELCONIN, loc. cit.

[2] L. GRAVES, « Trans. of Am. Math. Soc. », vol. 29 (1927); M. KERNER, « Prace Matematyczno-Fizyczne », vol. XL (1932).

On making use of the continuity properties of the linear connection Γ and employing a complete induction on (3.7) we find that for each n $\xi_n(x, x_0, \alpha)$ is a linear function of α. But $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(x, x_0, \alpha)$ exists equal to $\xi(x, x_0, \alpha)$. Hence an application of a theorem of BANACH [1] on the linearity of the limit function of a convergent sequence of linear functions shows the validity of our theorem.

Both Theorem 3.4 and Theorem 3.5 are local theorems in the sense that the initial parameter x_0 of the vector space E is fixed and is not an arbitrarily chosen element from some fixed set of elements. The following theorem is a theorem « in the large » and follows without much difficulty from another general existence theorem [2] of MICHAL and ELCONIN.

THEOREM 3.5. — *Under the hypothesis of Theorem* 3.4 *there exists a convex region* [3] W *in* $E((x_0)_a)$ *such that the conclusions of Theorem* 3.4 *and Theorem* 3.5 *hold for all* x *in* W *and for an arbitrarily chosen element* $\bar{x}$ *in* W *instead of the fixed element* x_0.

THEOREM 3.6. — *If there exists a solution* $\xi(x)$ *of the total differential equation*

$$\xi(x;\, \delta x) = -\Gamma(x,\, \xi(x),\, \delta x),$$

then

$$B(x,\, \xi(x),\, \delta_1 x,\, \delta_2 x) \equiv 0 \tag{3.8}$$

in x, $\delta_1 x$, $\delta_2 x$.

Proof: For such a $\xi(x)$, the second differential $\xi(x;\, \delta_1 x;\, \delta_2 x)$ is given by (3.5). By the postulates and previous theorems we see that $\xi(x;\, \delta_1 x;\, \delta_2 x)$ is continuous in x. Hence by a theorem of KERNER [4] on the symmetry of second FRÉCHET differentials, we have

$$\xi(x;\, \delta_1 x;\, \delta_2 x) = \xi(x;\, \delta_2 x;\, \delta_1 x).$$

This however is condition (3.8) for the given $\xi(x)$.

THEOREM 3.7. — *If there exists a family of solutions* $F(x, \alpha)$, *linear in* α (α *ranging over a vector space, say* E_2), *of the total differential equation*

$$\xi(x;\, \delta x) = -\Gamma(x,\, \xi(x),\, \delta x)$$

such that $F(x, \alpha)$ *is a solvable linear function (with* $\bar{F}(x, V)$, *a function*

(1) S. BANACH, « Fundamenta Math. », loc. cit.

(2) A. D. MICHAL and V. ELCONIN, loc. cit.

(3) A region W is convex if $x, y \in W$ implies that $tx + (1-t)y \in W$ for $0 \leq t \leq 1$.

(4) M. KERNER, « Annals of Math. », loc. cit.

on $E((x_0)_a)E_1$ *to* E_2, *its inverse function), then*

$$B(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x) \equiv 0 \tag{3.9}$$

in x, V, $\delta_1 x$ *and* $\delta_2 x$, *and the linear connection can be expressed in the form*

$$\Gamma(x, V, \delta x) = -F(x, \bar{F}(x, V); \delta x), \tag{3.10}$$

where $F(x, \alpha; \delta x)$ *is a partial differential of* $F(x, \alpha)$.

Proof: By hypothesis we have

$$F(x, \alpha; \delta x) = -\Gamma(x, F(x, \alpha), \delta x). \tag{3.11}$$

Hence by an application of Theorem 3.6 we see that

$$B(x, F(x, \alpha), \delta_1 x, \delta_2 x) \equiv 0 \tag{3.12}$$

in x, α, $\delta_1 x$, $\delta_2 x$. From the arbitrariness of the parameter α, it follows that we may take

$$\alpha = \bar{F}(x, V), \tag{3.13}$$

where $\bar{F}(x, V)$ is the inverse function to the solvable linear function $F(x, \alpha)$. Hence from identities of type (1.6) and from (3.12) we obtain the desired condition (3.9) of the theorem. Finally on substituting in (3.11) the expression for α as given by (3.13) we obtain the expression (3.10) for the linear connection.

COROLLARY: *Under the hypotheses of Theorem* 3.7 *the linear connection* $\Gamma(x, V, \delta x)$ *can also be written in the form*

$$\Gamma(x, V, \delta x) = F(x, \bar{F}(x, V; \delta x)), \tag{3.14}$$

where $\bar{F}(x, V; \delta x)$ *is a partial differential of* $\bar{F}(x, V)$, *the inverse function to the solvable linear function* $F(x, \alpha)$.

Proof: From the fundamental identities (1.6) we have

$$F(x, \bar{F}(x, V)) = V. \tag{3.15}$$

With the aid of Theorem 1.1, Theorem 1.4 and a theorem of FRÉCHET [1] on the differentials of functions of functions, we obtain the formula

$$F(x, \bar{F}(x, V); \delta x) + F(x, \bar{F}(x, V; \delta x)) = 0. \tag{3.16}$$

The expression (3.14) for the linear connection follows readily from (3.16) and the relation (3.10) of Theorem 3.7. The result (3.14) also follows directly from (3.15) and (3.7).

[1] M. FRÉCHET, « Annales Sc. Ec. Normale Sup. », loc. cit.

Before we continue the abstract theory in the next paragraph, it would be instructive to write down the curvature form for the functional instance of the postulates. We retain here the same notations used in the brief treatment at the end of § 2. Clearly

$$\Gamma^\alpha[x^b, \Gamma^\beta[x^d, V^\gamma, \delta_1 x^b], \delta_2 x^c] = (\lambda^\alpha_{\gamma bc} V^\gamma + \lambda^\alpha_{bc} V^\alpha)\delta_1 x^b \delta_2 x^c, \tag{3.17}$$

where

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda^\alpha_{\gamma bc} &= \Gamma^\beta_{\gamma b}\Gamma^\alpha_{\beta c} + \Gamma^{(\gamma)}_b \Gamma^\alpha_{\gamma c} + \Gamma^\alpha_{\gamma b}\Gamma^\alpha_c, \\ \lambda^\alpha_{bc} &= \Gamma^\alpha_b \Gamma^\alpha_c, \end{aligned} \right. \tag{3.18}$$

and the parenthesis around γ in $\Gamma^{(\gamma)}_b$ denotes that the variable γ is an exception to the integration convention and is thus a free variable.

We thus have the curvature form of our functional instance

$$B^\alpha[x^d, V^\beta, \delta_1 x^b, \delta_2 x^c] = (\omega^\alpha_{\beta bc} V^\beta + \omega^\alpha_{bc} V^\alpha)\delta_1 x^b \delta_2 x^c, \tag{3.19}$$

where the functionals $\omega^\alpha_{\beta bc}$ and ω^α_{bc} of x^d are given respectively by

$$\left\{ \begin{aligned} \omega^\alpha_{\beta bc} = {} & \Gamma^\alpha_{\beta b, c} - \Gamma^\alpha_{\beta c, b} + \Gamma^\gamma_{\beta b}\Gamma^\alpha_{\gamma c} - \Gamma^\gamma_{\beta c}\Gamma^\alpha_{\gamma b} + \Gamma^{(\beta)}_b \Gamma^\alpha_{\beta c} \\ & - \Gamma^{(\beta)}_c \Gamma^\alpha_{\beta b} + \Gamma^\alpha_{\beta b}\Gamma^\alpha_c - \Gamma^\alpha_{\beta c}\Gamma^\alpha_b \end{aligned} \right. \tag{3.20}$$

and

$$\omega^\alpha_{bc} = \Gamma^\alpha_{b, c} - \Gamma^\alpha_{c, b}. \tag{3.21}$$

§ 4. **Additional theorems on linear connections and curvature.** — In this paragraph we give a few theorems (Theorems 4.1 and 4.3) that make use of the postulates for a linear connection given in paragraph 2 as well as some new postulates that are put in the form of hypotheses of theorems. The hypotheses of Theorem 4.2 below do not employ the given postulates of paragraph 2.

THEOREM 4.1. — *Let* E_2 *be a vector space, distinct or not from the vector spaces* E *and* E_1 *of the postulates. Let* $G(x, \alpha)$ *be a function on* $E((x_0)_a)E_2$ *to* E_1 *that enjoys the following properties:*

1) $G(x, \alpha)$, *for each* α *of* E_2, *satisfies the total differential equation*

$$\xi(x; \delta x) = -\Gamma(x, \xi(x), \delta x) \tag{4.1}$$

2) $G(x, \alpha)$ *is a solvable linear function of* α. *Let* $\bar{G}(x, \beta)$, *a function on* $E((x_0)_a)E_1$ *to* E_2, *be its inverse function.*

Then the function $F(x, \xi_0)$ *defined by*

$$F(x, \xi_0) = G(x, \bar{G}(x_0, \xi_0)) \tag{4.2}$$

is the unique solution of the total equation (4.1) *that takes on the initial* *value* ξ_0 *for* $x = x_0$. *Furthermore* $F(x, \xi_0)$ *is a solvable linear function with inverse function* $\bar{F}(x, \xi_0)$ *given by*

$$\bar{F}(x, \xi_0) = G(x_0, \bar{G}(x, \xi_0)). \tag{4.3}$$

Proof: Obviously $F(x, \xi_0)$ satisfies the total equation (4.1) and has the property

$$F(x_0, \xi_0) = \xi_0. \tag{4.4}$$

An application of Theorem 3.7 shows that $B(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x) \equiv 0$. Hence by Theorem 3.4, the function $F(x, \xi_0)$ is the unique solution with the property (4.4).

From the fundamental relations (1.6) for solvable linear functions and from our hypotheses on $G(x, \alpha)$ we obtain by an evident calculation

$$F(x, \bar{F}(x, \xi_0)) = \xi_0 = \bar{F}(x, F(x, \xi_0)).$$

This completes the proof of the theorem.

The next theorem does not make use of the postulates for a linear connection.

THEOREM 4.2. — *Let* E, E_1, E_2 *be three vector spaces. Let* $F(x, \alpha)$ *be a solvable linear function on* $E((x_0)_b)E_2$ *to* E_1 *with* $\bar{F}(x, \beta)$, *a function on* $E((x_0)_b)E_1$ *to* E_2, *as its inverse function. Further assume that the first partial differential* $F(x, \alpha; \delta_1 x)$ *exists; and that the second partial differential* $F(x, \alpha; \delta_1 x; \delta_2 x)$ *exists continuous in* x. *Then there exist two functions* $\Delta(x, V, \delta x)$ *and* $B_\Delta(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x)$ *defined by*

$$\Delta(x, V, \delta x) = F(x, \bar{F}(x, V; \delta x)) \tag{4.5}$$

and

$$\left\{ \begin{aligned} B_\Delta(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x) &= \Delta(x, V, \delta_1 x; \delta_2 x) - \Delta(x, V, \delta_2 x; \delta_1 x) \\ &\quad + \Delta(x, \Delta(x, V, \delta_1 x), \delta_2 x) - \Delta(x, \Delta(x, V, \delta_2 x), \delta_1 x) \end{aligned} \right. \tag{4.6}$$

respectively. Moreover

$$B_\Delta(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x) \equiv 0. \tag{4.7}$$

Proof: With the aid of Theorem 1.4 we see that $\bar{F}(x, V; \delta x)$ exists and hence the function $\Delta(x, V, \delta x)$ is well defined. The function $\Delta(x, V, \delta x)$ can also be written in the form

$$\Delta(x, V, \delta x) = -F(x, F(x, V); \delta x). \tag{4.8}$$

On making special use of the theorems on FRÉCHET differentials developed in § 1 one can show without much difficulty that the first partial differential $\Delta(x, V, \delta_1 x; \delta_2 x)$ of $\Delta(x, V, \delta_1 x)$ exists, is a trilinear function of V, $\delta_1 x$ and $\delta_2 x$, is continuous in the set $x, V, \delta_1 x, \delta_2 x$, and is given by

$$(4.9) \qquad \begin{aligned}\Delta(x, V, \delta_1 x; \delta_2 x) = & - F(x, \bar{F}(x, V); \delta_1 x; \delta_2 x) \\ & - F(x, \bar{F}(x, V; \delta_2 x); \delta_1 x).\end{aligned}$$

Hence $B_\Delta(x, V, \delta_1 x, \delta_2 x)$ is well defined, is a trilinear function of V, $\delta_1 x$ and $\delta_2 x$, and is continuous in the set $x, V, \delta_1 x, \delta_2 x$.

From the relation

$$(4.10) \qquad \bar{F}(x, \Delta(x, V, \delta_1 x)) = \bar{F}(x, V; \delta_1 x)$$

we obtain by an evident calculation the result

$$(4.11) \qquad \Delta(x, \Delta(x, V, \delta_1 x), \delta_2 x) = - F(x, \bar{F}(x, V; \delta_1 x); \delta_2 x).$$

We have however the symmetry relation

$$(4.12) \qquad F(x, \bar{F}(x, V); \delta_1 x; \delta_2 x) = F(x, \bar{F}(x, V); \delta_2 x; \delta_1 x).$$

The identity (4.7) follows now readily from (4.6), (4.9), (4.11) and (4.12).

COROLLARY: *Under the hypotheses of Theorem* 4.2 *there exist two positive numbers* A *and* $a \leq b$ *with respect to which the function* $\Delta(x, V, \delta x)$ *satisfies the postulates for a linear connection* $\Gamma(x, V, \delta x)$.

The vector spaces E_1 and E considered in the postulates may or may not be identical. Under both circumstances the curvature $B(x, V, y, z)$ based on the linear connection $\Gamma(x, V, y)$ was seen to satisfy the identity

$$B(x, V, y, z) = - B(x, V, z, y).$$

In case the vector space E is identical with E_1, the sum

$$B(x, U, V, W) + B(x, W, U, V) + B(x, V, W, U)$$

is well defined, and the important question arises as to the form of the connection Γ in order that this cyclical sum vanish. It follows immediately from Theorem 4.2 and its corollary that this cyclical sum vanishes when the connection is the $\Delta(x, V, \delta x)$ of the theorem and the vector spaces E and E_1 are identical.

If the vector spaces E and E_1 are distinct, the symmetry of the connection $\Gamma(x, V, y)$ in V and y has no meaning. However if the vector spaces are identical and $\Gamma(x, U, V)$ is symmetric in U and V, then the partial differential $\Gamma(x, U, V; W)$ is also symmetric in U and V. Hence by direct calculation we obtain:

THEOREM 4.3. — *If the vector space* E *of the postulates is identical with* E_1 *and if the connection* $\Gamma(x, U, V)$ *is symmetric in* U *and* V, *then the curvature form* $B(x, U, V, W)$ *based on this symmetric linear connection satisfies the cyclical identity*

$$B(x, U, V, W) + B(x, W, U, V) + B(x, V, W, U) = 0.$$

§ 5. **Definition of parallelism with respect to a curve.** — Let $x(t)$ be a function whose argument is a real variable t and whose values are in the vector space E. We assume $x(t)$ to have the following properties:

1) $x(t)$ is defined and admits a continuous derivative (in the norm) for t in $t_0 \leq t \leq t_1$.

2) $x(t_0) = x_0$, where x_0 is the element of E given in the postulates.

3) $\| x(t) - x_0 \| < a$ for all t in (t_0, t_1).

Clearly there always exists such functions $x(t)$.

The set of values of the function $x(t)$ as t ranges over the interval (t_0, t_1) will be called a « curve » with $x(t_0)$ and $x(t_1)$ as its end points and parameterized with a parameter t. The same curve can be parameterized with a different parameter s by the usual (considered in classical geometry) parameter transformation $s = f(t)$, where $f(t)$ is a real valued increasing function of t. We observe that a curve as defined above lies wholly in a convex region of the vector space E.

Consider now the abstract differential equation

$$\frac{dV}{dt} = -\Gamma\left(x, V, \frac{dx}{dt}\right)$$

where $y = x(t)$ is a given curve and Γ our postulated linear connection. Let

$$\Omega(t, V) \equiv -\Gamma\left(x(t), V, \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

then the above differential equation can be written in the form

$$\frac{dV}{dt} = \Omega(t, V),$$

where $\Omega(t, V)$ is linear in V. Since $\Omega(t, V)$ is continuous in t for t in (t_0, t_1) it follows that $\Omega(t, V)$ is continuous in the set t, V. Therefore the hypotheses of a known existence theorem [1] are satisfied and we have the theorem:

[1] M. KERNER, « Prace Matematyczno-Fizyczne », loc. cit.

THEOREM. — *If* $y = x(t)$ *is the equation of a given curve described above, then there exists a number* $\bar{t} \leq t_1$ *such that for* t *in* $t_0 \leq t < \bar{t}$ *the differential equation*

$$\frac{dV}{dt} = -\Gamma\left(x, V, \frac{dx}{dt}\right)$$

has one and only one solution $V(t)$, *with continuous derivative* $\frac{dV}{dt}$, *that takes on the initial value* V_0 *for* $t = t_0$.

Thus at each point $x(t)$ of the given curve for $t_0 \leq t < \bar{t}$ there is associated a unique element, « contravariant » vector $V(t)$, whenever $V(t_0)$ is arbitrarily given. $V(t)$ may be called a *parallel vector field along the given curve.* Hence for any chosen t' in $t_0 \leq t < \bar{t}$, there exists a unique « contravariant » vector $V(t')$, which we may call the vector parallel to $V(t_0)$ with respect to the given curve and localized at the point t' on the curve.

§ 6. **A set of postulates with a normed vectorial ring.** — We consider in this paragraph a new set of postulates that involve a *normed vectorial ring* and a class of operations called contractions. This leads to a *class* of abstract « Ricci » forms. The author has been led to this class of objects by this studies pertaining to infinitely dimensional functional geometries.

We take a vector space E_1 and consider another associated manifold E_2 that we call a normed vectorial ring with a class of contractions. By this we mean a vector space E_2 (with elements σ, τ, Φ, ψ, ω, ω_1, ω_2, ω_3...) that satisfies the following postulates (1).

Postulate A. There exists a bilinear function $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ on E_2^2 to E_2.

Postulate B. $\Phi(\Phi(\omega_1, \omega_2), \omega_3) = \Phi(\omega_1, \Phi(\omega_2, \omega_3))$, the associativity condition.

Postulate C. There exists a non-empty class of linear functions $\{C(\omega)\}$ on E_2 to R.

Postulate D. $C(\Phi(\omega_1, \omega_2)) = C(\Phi(\omega_2, \omega_1))$.

Postulate E. There exists a bilinear function $f(\omega, V)$ on E_2E_1 to E_1 such that $f(\omega, V) = 0$ for all V in E_1 implies $\omega = 0$.

Postulate F. $f(\Phi(\omega_1, \omega_2), V) = f(\omega_1, f(\omega_2, V))$.

Finally we postulate:

Postulate G. There exists a function $\omega(x, V)$ on $E_1((x_0)_b)E_1$ to E_2, linear in V.

Postulate H. The first partial differential $\omega(x, V; \delta x)$ exists and is continuous in x.

(1) An independent set of postulates will require long circumlocutions and a lengthy investigation.

Postulate I. $f(\omega(x, V), \delta x) = f(\omega(x, \delta x), V)$.

Postulate J. There exists a function $\psi(x, V, \delta x)$ on $E_1(x_0)_b)E_1^2$ to E_2, continuous separately in x and in δx.

Postulate K. $f(\psi(x, V, \delta_1 x), \delta_2 x) = f(\omega(x, V; \delta_2 x), \delta_1 x)$.

For convenience of notation we write the function $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ simply as $\omega_1\omega_2$ and the function $f(\omega, V)$ simply as ωV. It is clear from postulate F that $f(\Phi(\omega_1, \omega_2), V)$ can be written as $\omega_1\omega_2 V$ without any ambiguity.

THEOREM. — *There exist two positive numbers* A *and* $a \leq b$ *such that the symmetric linear connection defined by*

$$\Gamma(x, V, \delta x) = \omega(x, V)\delta x \tag{6.1}$$

satisfies the six postulates for a linear connection given in section 2 *if in these postulates the vector space* E *is taken identical to* E_1. *Moreover* $\psi(x, V, \delta x)$ *is bilinear in* V *and* δx, *and*

$$\Gamma(x, V, \delta x) = \Gamma(x, \delta x, V)$$
$$\psi(x, V, \delta x) = \psi(x, \delta x, V).$$

In terms of this simplified notation, the curvature form based on the present symmetric connection (6.1) can be written as follows after a few rearrangements

$$\begin{cases} B((x, V, \delta_1 x, \delta_2 x) = (\psi(x, V, \delta_1 x) - \omega(x, V; \delta_1 x) + \omega(x, \omega(x, V)\delta_1 x) \\ \qquad\qquad - \omega(x, \delta_1 x)\omega(x, V))\delta_2 x. \end{cases} \tag{6.2}$$

Thus to each contraction function $C(\omega)$ of the class $\{C(\omega)\}$ postulated in Postulate C there corresponds an abstract « Ricci » form given by

$$C(\psi(x, V, \delta_1 x) - \omega(x, V; \delta_1 x) + \omega(x, \omega(x, V)\delta_1 x) - \omega(x, \delta_1 x)\omega(x, V)). \tag{6.3}$$

To show the consistency of the set of postulates consisting of the vector space postulates and the postulates A–K, we shall give an instance arising from the author's [1] studies on functional differential geometries. One of the interesting features of this instance is found in the existence of a class of contraction functions $\{C(\omega)\}$ consisting of an infinite number of contraction functions $C(\omega)$. There thus exists an infinite set of « Ricci » forms. It is of interest to note that in the well known finite dimensional differential geometries there exists only *one* contraction within a multiplicative constant.

We take the vector space E (vector space E_1 is taken identical to E) to be the « space of continuous functions x^a » considered in § 2. For the

[1] A. D. MICHAL, loc. cit.

normed vectorial ring E_2 with a class of contractions we take the set of ordered pairs of continuous functions (ω^b_c, ω^d) with the following interpretation of the elements and operations. Let

$$\sigma \equiv (\sigma^b_c, \sigma^d), \quad \tau \equiv (\tau^b_c, \tau^d),$$

where σ^b_c and τ^b_c are continuous on the square $d_1 \leq b,\ c \leq d_2$, and σ^d and τ^d are continuous on the interval (d_1, d_2). Take

$\sigma + \tau \equiv (\sigma^b_c + \tau^b_c, \sigma^d + \tau^d)$, addition of elements;

$r\sigma \equiv (r\sigma^b_c, r\sigma^d)$, multiplication by real numbers r;

$\Phi(\sigma, \tau) \equiv (\sigma^b_e \tau^e_c + \sigma^b \tau^b_c + \sigma^b_c \tau^{(c)}, \sigma^d \tau^d)$;

$\|\sigma\| \equiv (d_2 - d_1) \max\limits_{b,c} |\sigma^b_c| + \max\limits_{d} |\sigma^d|$;

$f(\sigma, V) \equiv \sigma^b_c V^c + \sigma^b V^b$;

$C(\sigma) \equiv \sigma^b_b$ or σ^{b_1}, where b_1 is any chosen number in (d_1, d_2), or

$$\sigma^b_b + \int_{d_1}^{d_2} \sigma^b \, db, \text{ etc.}$$

Next we take for x^e in $\max\limits_e |x^e - x^e_0| < a$

$$\omega(x, V) \equiv (\omega^b_c[x, V], \ \omega^d[x, V]), \tag{6.4}$$

where $\omega^b_c[x, V]$ and $\omega^d[x, V]$ are functionals of the continuous functions x^e and V^f, and are given respectively by

$$\omega^b_c[x, V] = \Gamma^b_{dc}[x] V^d + \Gamma^b_{*c}[x] V^b + \Gamma^b_{c*}[x] V^{(c)} \tag{6.5}$$

and

$$\omega^d[x, V] = \Gamma^d_b[x] V^b + \Gamma^d[x] V^d. \tag{6.6}$$

The values of the five functionals Γ in (6.5) and (6.6) can be taken as continuous functions of all their respective free variables.

To satisfy the symmetry postulate I we restrict two of the functionals Γ to satisfy the relations

$$\Gamma^b_{dc}[x] = \Gamma^b_{cd}[x], \quad \Gamma^b_{*c}[x] = \Gamma^b_c[x]. \tag{6.7}$$

By classical methods one can show that conditions (6.7) are necessary and sufficient for the symmetry of our linear connection. Our symmetric linear connection $\Gamma(x, V, \delta x)$ can be written as follows

$$\Gamma^b_{cd}[x] V^c \delta x^d + \Gamma^b_{c*}[x] V^c \delta x^c + \Gamma^b_c[x](V^c \delta x^b + V^b \delta x^c) + \Gamma^b[x] V^b \delta x^b. \tag{6.8}$$

Finally we have to define a $\psi(x, V, \delta x)$ function for our instance. To do this we need the expression for the partial differential $\omega(x, V; \delta x)$. We restrict the functionals (6.5) and (6.6) so that $\omega(x, V; \delta x)$ exists for our instance and is given explicitly by

$$(6.9) \qquad \begin{cases} \omega(x, V; \delta x) \equiv (\omega^b_{c,d}[x, V]\delta x^d + {}^b\omega^b_c[x, V]\delta x^b + {}_c\omega^b_c[x, V]\delta x^{(c)}, \\ \qquad\qquad \omega^b_{,d}[x, V]\delta x^d + {}^b\omega^b[x, V]\delta x^b) \end{cases}$$

where the values of the five functionals ω are assumed to be continuous functions of all their respective free variables. We note howerer that the continuous indices written on the left of an ω functional do not indicate an additional argument for the values of the functional but are merely used as a notational device to denote the various « types of functional derivatives ». For example, ${}^b\omega^b_c[x, V]$ is a functional whose values are continuous functions of two variables b and c and not necessarily continuous functions of three variables with two arguments filled in with the same letter.

We now take

$$(6.10) \qquad \begin{cases} \psi(x, V, \delta x) \equiv (\omega^b_{c,d}[x, V]\delta x^c + {}_d\omega^b_d[x, V]\delta x^{(d)} + \omega^b_{,d}[x, V]\delta x^b, \\ \qquad\qquad {}^b\omega^b_c[x, V]\delta x^{(c)} + {}^b\omega^b[x, V]\delta x^b). \end{cases}$$

§ 7. **A second linear connection and curvature form.** — In this section we shall deal with the consequences of new postulates in addition to the six postulates of § 2 and the postulates for the vector spaces E and E_1. Besides the vector spaces E and E_1 we shall be concerned with still another associated manifold, a vector space E_2. The elements of this new vector space E_2 may habitually be called « covariant vectors ». It should be noted howerer that in some of the instances the elements of E_2 may be contravariant vectors.

Throughout the present paragraph, unless otherwise stated, we shall use the letters $L, M, \Lambda, \eta, \theta, \ldots$ with or without subscripts, for elements of E_2. All the other letters used will be in accordance with the conventions layed down for the notations of § 2.

Postulate 7. There exists a function $\Lambda(x, \eta, y)$, a second linear connection, on $E(x_0)_a)$ $E_2 E$ to E_2.

Postulate 8. $\Lambda(x, \eta_1 + \eta_2, y) = \Lambda(x, \eta_1, y) + \Lambda(x, \eta_2, y)$.

Postulate 9. $\Lambda(x, \eta, y_1 + y_2) = \Lambda(x, \eta, y_1) + \Lambda(x, \eta, y_2)$.

Postulate 10. $\|\Lambda(x, \eta, y)\| < B\|\eta\|\,\|y\|$, where B is a fixed positive number.

Postulate 11. The first partial differential $\Lambda(x, \eta, y; \delta x)$ exists.

Postulate 12. $\Lambda(x, \eta, y; \delta x)$ is continuous in x.

Postulate 13. There exists a function $[\xi, \eta]$ on $E_1 E_2$ to R.

Postulate 14. $[\xi_1 + \xi_2, \eta] = [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta]$.

Postulate 15. $[\xi, \eta_1 + \eta_2] = [\xi, \eta_1] + [\xi, \eta_2]$.

Postulate 16. $[\xi, \eta]$ is continuous in ξ.

Postulate 17. $[\xi, \eta]$ is continuous in η.

Postulate 18. If $[\xi, \eta] = 0$ for all ξ of E_1 then $\eta = 0$.

Postulate 19. If $[\xi, \eta] = 0$ for all η of E_2 then $\xi = 0$.

Postulate 20. — $[\Gamma(x, \xi, y), \eta] = [\xi, \Lambda(x, \eta, y)]$.

The functional instance presented in paragraph two for the consistency of the eight postulates for the first linear connection can be used to show the consistency of Postulates 1-20 together with the postulates for the three vector spaces E, E_1 and E_2.

The first linear connection given in (2.1) is

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta b}[x^d]\xi^{\beta}\delta x^b + \Gamma^{\alpha}_{b}[x^d]\xi^{\alpha}\delta x^b. \tag{7.1}$$

It is clear how one can restrict the functionals $\Gamma^{\alpha}_{\beta b}[x^d]$ and $\Gamma^{\alpha}_{b}[x^d]$ so that

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta b}[x^d]\eta_{\alpha}\delta x^b + \Gamma^{(\beta)}_{b}[x^d]\eta_{\beta}\delta x^b \tag{7.2}$$

would satisfy the postulates for the second linear connection $\Lambda(x, \eta, \delta x)$. We further interpret $[\xi, \eta]$ as $\xi^{\alpha}\eta_{\alpha}$. In this instance we interpret the vector space to be a « space of continuous functions η_{α} » defined over the interval (α_1, α_2). Clearly Postulates 18 and 19 are satisfied by virtue of the fundamental lemma of the calculus of variations. Postulate 20 is obviously satisfied and all the remaining postulates can be satisfied by making evident restrictions on the functionals $\Gamma^{\alpha}_{\beta b}[x^d]$ and $\Gamma^{\beta}_{b}[x^d]$.

Definition of second curvature form (1) $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \eta, \delta_1\mathrm{x}; \delta_2\mathrm{x})$

$$\begin{aligned} L(x, \eta, \delta_1 x, \delta_2 x) = {} & \Lambda(x, \eta, \delta_1 x; \delta_2 x) - \Lambda(x, \eta, \delta_2 x; \delta_1 x) \\ & + \Lambda(x, \Lambda(x, \eta, \delta_2 x), \delta_1 x) - \Lambda(x, \Lambda(x, \eta, \delta_1 x), \delta_2 x), \end{aligned} \tag{7.3}$$

a function defined on $E((x_0)_a)E_2E^2$ to E_2.

The whole content of paragraphs 2, 3, 4 and 5 can by obvious modifications be made to hold good for the second linear connection. We leave the details for the reader. For example, the correspondent of Theorem 3.3 is

THEOREM 7.1 — *The second curvature* $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \eta, \delta_1\mathrm{x}, \delta_2\mathrm{x})$ *defined in* (7.3) *is continuous in the set* x, η, $\delta_1\mathrm{x}$, $\delta_2\mathrm{x}$. *Moreover it is a trilinear function of* η, $\delta_1\mathrm{x}$ *and* $\delta_2\mathrm{x}$, *and satisfies the identity*

$$L(x, \eta, \delta_1 x, \delta_2 x) = - L(x, \eta, \delta_2 x, \delta_1 x).$$

There is a simple and fundamental relation between the two curvature

(1) Compare third and fourth term with the third and fourth term respectively of $B(x, \xi, \delta_1 x, \delta_2 x)$. Furthermore $B(x, \xi, \delta_1 x, \delta_2 x)$ corresponds to integrability conditions $\delta_1\delta_2\xi - \delta_2\delta_1\xi = 0$ while L corresponds to integrability conditions $\delta_2\delta_1\eta - \delta_1\delta_2\eta = 0$.

forms $B(x, \xi, \delta_1 x, \delta_2 x)$ and $L(x, \eta, \delta_1 x, \delta_2 x)$. We embody this result in the following theorem.

THEOREM 7.2 — *The two curvature forms* $B(x, \xi, \delta_1 x, \delta_2 x)$ *and* $L(x, \eta, \delta_1 x, \delta_2 x)$ *are related by the following identity*

$$[B(x, \xi, \delta_1 x, \delta_2 x), \eta] = [\xi, L(x, \eta, \delta_1 x, \delta_2 x)]. \tag{7.4}$$

Proof: On taking partial differentials of

$$[\Gamma(x, \xi, \delta_1 x), \eta] = [\xi, \Lambda(x, \eta, \delta_1 x)] \tag{7.5}$$

we obtain

$$[\Gamma(x, \xi, \delta_1 x; \delta_2 x), \eta] = [\xi, \Lambda(x, \eta, \delta_1 x; \delta_2 x)]. \tag{7.6}$$

The result (7.6) is justified on making use of the postulates and the well known theorem that « differentiable functions of differentiable functions possess differentials ».

From (7.5) we obtain

$$[\Gamma(x, \Gamma(x, \xi, \delta_1 x), \delta_2 x), \eta] = [\Gamma(x, \xi, \delta_1 x), \Lambda(x, \eta, \delta_2 x)]. \tag{7.7}$$

Again by employing (7.5) on the right hand side of (7.7) we find that

$$[\Gamma(x, \Gamma(x, \xi, \delta_1 x), \delta_2 x), \eta] = [\xi, \Lambda(x, \Lambda(x, \eta, \delta_2 x), \delta_1 x)]. \tag{7.8}$$

The use of (7.6) and (7.8) in an evident calculation proves the theorem.

COROLLARY: *A necessary and sufficient condition that* $B(x, \xi, \delta_1 x, \delta_2 x)$ *vanish identically is that* $L(x, \eta, \delta_1 x, \delta_2 x)$ *vanish identically.*

DEFINITION. — *The linear function of* δx

$$\xi(x; \delta x) + \Gamma(x, \xi(x), \delta x) \tag{7.9}$$

may be called the « covariant » differential of the « contravariant » vector field $\xi(x)$ while the linear function of δx

$$\eta(x; \delta x) - \Lambda(x, \eta(x), \delta x) \tag{7.10}$$

may be called the « covariant » differential of the « covariant » vector field $\eta(x)$.

Let

$$\xi(x : \delta x) \equiv \xi(x; \delta x) + \Gamma(x, \xi, \delta x) \tag{7.11}$$

and

$$\eta(x : \delta x) \equiv \eta(x; \delta x) - \Lambda(x, \eta, \delta x). \tag{7.12}$$

THEOREM 7.3 — *If* $f(x)$ *is defined by*

$$f(x) = [\xi(x), \eta(x)],$$

and if $\xi(x)$ *and* $\eta(x)$ *possess first differentials, then*

$$f(x; \delta x) = [\xi(x : \delta x), \eta(x)] + [\xi(x), \eta(x : \delta x)].$$

Proof:

$$[\xi(x : \delta x), \eta(x)] = [\xi(x ; \delta x), \eta(x)] + [\Gamma(x, \xi(x), \delta x), \eta(x)].$$

Hence a special use of Postulate 20 yields the result

$$[\xi(x : \delta x), \eta(x)] = [\xi(x ; \delta x), \eta(x)] + [\xi(x), \Lambda(x, \eta(x), \delta x)].$$

Clearly

$$[\xi(x), \eta(x : \delta x)] = [\xi(x), \eta(x ; \delta x)] - [\xi(x), \Lambda(x, \eta(x), \delta x)].$$

The theorem is now immediate from this and the preceding relation.

Integrazione con quadrature delle equazioni di Dirac.

Memoria di Angelo Tonolo (a Padova).

Sunto. - *L'A. integra per quadrature il sistema differenziale di* Dirac *della meccanica ondulatoria dell'elettrone magnetico, nell'ipotesi che non vi sia campo elettromagnetico esterno, dando le formule di rappresentazione dei suoi integrali, sia nel* problema di Cauchy, *sia in un* problema di tipo misto.

Le equazioni di Dirac della meccanica ondulatoria dell'elettrone magnetico costituiscono, come è noto, un sistema di quattro equazioni differenziali nelle quali figurano in modo lineare ed omogeneo quattro funzioni del posto e del tempo e le loro derivate parziali di prim'ordine. In assenza di potenziali, e dal puro punto di vista matematico, io mi sono proposto il problema dell'integrazione con quadrature di questo sistema. Più precisamente ho cercato di dare, sia le formule di rappresentazione dei suoi integrali in tutto lo spazio e per ogni valore del tempo, nell'ipotesi di conoscerli in un determinato istante, sia di dare le espressioni in discorso in uno spazio finito limitato da una superficie chiusa e per ogni tempo, supponendo che gli integrali siano dati in un determinato istante nello spazio considerato e invece in ogni istante sopra tutto il contorno. Ho risolto la prima quistione ricorrendo alla formula di Weber relativa all'equazione $\Delta_2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + kU = 0$ adoperata con opportune condizioni iniziali, essendo noto che ogni quaderna di soluzioni del sistema di Dirac, privo di potenziali, costituisce altrettante soluzioni di una equazione di tipo siffatto. Ho dato la risoluzione della seconda quistione ricorrendo ad una formula che ho assegnato qualche anno fa, estensione di quella di Kirchhoff, per l'equazione in discorso. Un giudizioso maneggio di questa formula permette di presentare gli integrali del nostro sistema sotto quella forma che il problema richiede.

Nei due problemi il risultato al quale sono pervenuto si può enunciare così: Gli integrali del sistema di Dirac, in assenza di campo elettromagnetico esterno, si ottengono dai primi membri delle stesse equazioni sostituendo al posto delle componenti del semi-vettore dell'onda polarizzata quattro opportune funzioni del posto e del tempo, e cambiando segno alla costante che figura nelle equazioni [1].

§ 1. **Richiamo di due formule relative all'integrazione dell'equazione $\underset{2}{\Delta} U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + kU = 0$.**

1. Riferiamo lo spazio ordinario a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, e consideriamo ivi l'equazione

$$\underset{2}{\Delta} U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + kU = 0, \quad \underset{2}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

ove t rappresenta il tempo e k una costante alla quale si può attribuire qualunque valore positivo, o negativo, compreso lo zero. Siano $f(Q)$, $\varphi(Q)$ due funzioni regolari del punto Q variabile nello spazio, P e t rispettivamente un punto fisso e un istante positivo di tempo completamente arbitrari. Si consideri la sfera di centro P e raggio $r = t$ la cui superficie indichiamo con Σ. Poniamo:

$$F(P, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \frac{f(Q)}{r}\, d\Sigma, \quad \Phi(P, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \frac{\varphi(Q)}{r}\, d\Sigma, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} U(P, t) = \Phi(P, t) + \frac{\partial F(P, t)}{\partial t} + \frac{kt}{2} F(P, t) - \\ - \int_0^t \left[F(P, r)\frac{\partial}{\partial t} + \Phi(P, r)\right] \frac{\partial}{\partial r} I_0(\sqrt{k}\sqrt{t^2 - r^2})\, dr, \end{aligned} \tag{3}$$

ove $I_0(\rho)$ è la funzione di BESSEL non oscillante di ordine zero e di argomento $\rho = \sqrt{k}\sqrt{t^2 - r^2}$.

La (3) è la *formula di* WEBER la quale assegna il valore dell'integrale U

---

[1] Nella Memoria: *Le problème de* CAUCHY *pour une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles* [« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. IV, (1935)], il Signor THÉODORESCO ha fatto un'applicazione del suo metodo generale d'integrazione alle equazioni di DIRAC, sempre in assenza di campo elettromagnetico esterno, metodo che costituisce una bella estensione di quello classico di HADAMARD per la risoluzione del problema di CAUCHY relativo alle equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine di tipo iperbolico.

dell'equazione (1) nel punto P e nell'istante positivo t con le condizioni di CAUCHY

$$U(P, 0) = f(P), \quad \frac{\partial U(P, 0)}{\partial t} = \varphi(P).$$

2. Sia U una soluzione regolare dell'equazione (1) per ogni valore del tempo e in un campo finito S di cui $P(x, y, z,)$ rappresenta un suo punto interno generico e σ il relativo contorno del quale n indica la normale diretta verso lo spazio S. Conveniamo, ora e nel seguito, di rappresentare con $[h]$ ciò che diventa una generica funzione h del posto e del tempo — che ora conviene denotare con τ — quando al posto di τ si ponga $t - r$, essendo t un istante positivo di tempo fissato, ma qualunque, ed r la distanza fra il punto P, ritenuto fisso, di S e un punto Q variabile invece sopra σ. Il valore di U nel punto P e nell'istante t si può ottenere con la formula seguente (¹):

$$(4) \qquad 4\pi U(P, t) = k \int_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right) + \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \tau} \right\}_{\tau=0} dS +$$

$$+ k \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \left\{ U \frac{d}{dn}\left(\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right) - \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{dU}{dn} \right\} d\tau - \frac{k}{2}\int_\sigma [U] \frac{dr}{dn} d\sigma -$$

$$- \int_\sigma \left[\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial U}{\partial \tau} \right] d\sigma,$$

dove I_1 è la funzione di BESSEL non oscillante di ordine uno e di argomento $\rho = \sqrt{k}\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}$.

Relativamente a questa formula (4) è da notare che il processo tenuto per ottenerla esige che t sia superiore ad un certo limite positivo t_1, il quale è dato dalla massima delle distanze del punto P da tutti i punti Q del contorno σ. Perciò la (4), e tutte le sue conseguenze che otterremo in seguito, saranno valide purchè i valori del tempo t ottemperino alla limitazione in discorso, anche se questa non sarà esplicitamente dichiarata.

§ 2. **Problema di Cauchy per le equazioni di Dirac. Sua risoluzione con quadrature.**

Scriviamo le equazioni di DIRAC della meccanica ondulatoria dell'elettrone magnetico, nell'ipotesi che non via campo elettromagnetico esterno, sotto la

(¹) A. TONOLO, *Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate* [« Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », (1933), Anno IV].

forma

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t} + i\dfrac{\partial\varphi_4}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_4}{\partial y} + i\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial z} + k\varphi_1 = 0 \\[2mm] f_2 = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial\varphi_4}{\partial t} + i\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y} - i\dfrac{\partial\varphi_4}{\partial z} + k\varphi_2 = 0 \\[2mm] f_3 = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} - i\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} - i\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} + k\varphi_3 = 0 \\[2mm] f_4 = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} - i\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + i\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} + k\varphi_4 = 0, \end{cases}$$

nelle quali φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sono le componenti del semi-vettore dell'onda polarizzata, k una costante $\left(= \dfrac{m_0}{h}\right.$, avendo assunto eguale ad uno la velocità della luce, m_0 la massa dell'elettrone, h la costante di PLANCK), ed i l'unità immaginaria. Considerando in esse le φ_i come funzioni incognite del posto (x, y, z) e del tempo t, proponiamoci la risoluzione del seguente:

Problema di CAUCHY: Dare le formule di rappresentazione degli integrali φ_i in ogni punto dello spazio e per qualunque valore positivo del tempo, supponendo di conoscere ivi le funzioni φ_i per $t = 0$.

Per risolvere questo problema ricordiamo le seguenti identità di facile verifica

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f_3}{\partial t} + i\dfrac{\partial f_4}{\partial x} + \dfrac{\partial f_4}{\partial y} + i\dfrac{\partial f_3}{\partial z} - kf_1 = \Delta_2\varphi_1 - \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} - k^2\varphi_1 \\[2mm] \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f_4}{\partial t} + i\dfrac{\partial f_3}{\partial x} - \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - i\dfrac{\partial f_4}{\partial z} - kf_2 = \Delta_2\varphi_2 - \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - k^2\varphi_2 \\[2mm] \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f_1}{\partial t} - i\dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_2}{\partial y} - i\dfrac{\partial f_1}{\partial z} - kf_3 = \Delta_2\varphi_3 - \dfrac{\partial^2\varphi_3}{\partial t^2} - k^2\varphi_3 \\[2mm] \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f_2}{\partial t} - i\dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + i\dfrac{\partial f_2}{\partial z} - kf_4 = \Delta_2\varphi_4 - \dfrac{\partial^2\varphi_4}{\partial t^2} - k^2\varphi_4 . \end{cases}$$

Ne consegue che se le φ_i sono integrali delle equazioni di DIRAC, le stesse funzioni verificano l'equazione

$$(7)\qquad \Delta_2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - k^2\varphi = 0.$$

Inoltre osserviamo che la conoscenza degli integrali φ_i nell'istante $t = 0$ permette la determinazione anche delle rispettive derivate iniziali $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right)_{t=0}$. Ciò si vede subito sostituendo le funzioni φ_i per $t = 0$ nelle equazioni di DIRAC;

queste sono allora univocamente risolubili rispetto alle singole derivate $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ per $t=0$. Diciamo $\dot{\varphi}_i^{(0)}$ il risultato di questa risoluzione, mentre indichiamo con $\varphi_i^{(0)}$ le funzioni φ_i per $t=0$. Poniamo cioè

$$(8) \qquad (\varphi_i)_{t=0} = \varphi_i^{(0)}, \quad \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{\varphi}_i^{(0)} \qquad (i=1, 2, 3, 4).$$

In forza della formula di WEBER, richiamata nel paragrafo precedente, e che nel caso dell'equazione (7) per $\varphi=\varphi_i$ diventa

$$(9) \qquad \varphi_i(P,t) = \Phi_i(P,t) + \frac{\partial F_i(P,t)}{\partial t} - \frac{k^2 t}{2} F_i(P,t) - \\ -\int_0^t \left\{ F_i(P,r)\frac{\partial}{\partial t} + \Phi_i(P,r) \right\} \frac{\partial}{\partial r} I_0(ik\sqrt{t^2-r^2})dr,$$

ove

$$F_i(P,t) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varphi_i^{(0)}(Q)}{r} d\Sigma, \quad \Phi_i(P,t) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\dot{\varphi}_i^{(0)}(Q)}{r} d\Sigma,$$

vediamo che le funzioni φ_i (P, t) determinate dalle (9) soddisfano all'equazione (7), e inoltre esse, e le loro derivate prime rispetto a t, si riducono per $t=0$ rispettivamente alle funzioni $\varphi_i^{(0)}$ e $\dot{\varphi}_i^{(0)}$. Il nostro problema sarà perciò completamente risolto se proveremo che queste funzioni φ_i verificano le equazioni di DIRAC e sono le sole funzioni suscettibili di soddisfare a tutte le condizioni del problema enunciato. Ciò si dimostra presto nel seguente modo. Pensiamo sostituite nei primi membri delle (5) al posto delle φ_i le espressioni (9), e diciamo f_i il risultato di queste sostituzioni. Poichè le nostre φ_i soddisfano all'equazione (7), in luogo delle identità (6) avremo le altre

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{i}\frac{\partial f_3}{\partial t} + i\frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial y} + i\frac{\partial f_3}{\partial z} - kf_1 = 0 \\ &\frac{1}{i}\frac{\partial f_4}{\partial t} + i\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} - i\frac{\partial f_4}{\partial z} - kf_2 = 0 \\ &\frac{1}{i}\frac{\partial f_1}{\partial t} - i\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - i\frac{\partial f_1}{\partial z} - kf_3 = 0 \\ &\frac{1}{i}\frac{\partial f_2}{\partial t} - i\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + i\frac{\partial f_2}{\partial z} - kf_4 = 0. \end{aligned} \right.$$

Concludiamo che le funzioni f_i verificano l'equazione

$$\Delta_2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - k^2 f = 0,$$

perchè le f_i sono integrali di un sistema simile al sistema (5), ove si cambi k in $-k$. Ma per $t=0$ ogni f_i è identicamente nulla, perchè le nostre φ_i e le loro derivate $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ si riducono rispettivamente per $t=0$ alle funzioni $\varphi_i^{(0)}$ e $\dot{\varphi}_i^{(0)}$, le quali, per il modo col quale abbiamo determinate le $\dot{\varphi}_i^{(0)}$, soddisfano per $t=0$ alle equazioni di DIRAC. Annullandosi le f_i nell'istante iniziale, le identità (10) ci dicono che in questo istante sono nulle anche le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial t}$. Perciò, in forza della formula di WEBER applicata alle f_i, queste funzioni si annullano in ogni punto dello spazio e per qualsiasi valore positivo del tempo. c. d. d.

Resta a provare ancora l'unicità delle funzioni $\varphi_i(P, t)$. Infatti un altro sistema di soluzioni che soddisfa a tutte le condizioni del problema, dovrebbe anche soddisfare alla equazione (7) con le stesse condizioni iniziali relative alle funzioni $\varphi_i(P, t)$ e alle loro derivate prime rispetto al tempo. Ora, per un noto teorema di HOLMGREN, il problema di CAUCHY per l'equazione (7) non ha che l'unica soluzione data dalla formula di WEBER.

Alle formule (9) si può dare una forma estetica. Fissiamo le idee, ad esempio, sulla funzione $\varphi_1(P, t)$. Dal sistema di DIRAC si ricava

$$\dot{\varphi}_1^{(0)} = -\frac{\partial \varphi_2^{(0)}}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi_2^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial z} - ik\varphi_3^{(0)},$$

e sostituendo nella espressione di $\Phi_1(P, t)$ si ottiene

$$4\pi\Phi_1(P, t) = \int_\Sigma \frac{-\frac{\partial \varphi_2^{(0)}}{\partial \xi} + i\frac{\partial \varphi_2^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial \zeta} - ik\varphi_3^{(0)}}{r}\, d\Sigma,$$

ove, per evitare confusione, abbiamo indicato con ξ, η, ζ le coordinate del punto Q variabile sopra Σ, riserbando invece i simboli x, y, z per denotare quelle del punto fisso P. Si può anche scrivere [1]:

$$4\pi\Phi_1(P, t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\, d\Sigma + i\frac{\partial}{\partial y}\int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\, d\Sigma - \frac{\partial}{\partial z}\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\, d\Sigma - ik\int_\Sigma \frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\, d\Sigma.$$

---

(1) La giustificazione del passaggio è assai semplice l'ho data nella precedente ricerca: *Integrazione con quadrature di un particolare sistema di* DIRAC [Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI; Casa Editrice Rossetti, Pavia, (1936)].

Ne consegue che

$$4\pi\varphi_1(P,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma + i\frac{\partial}{\partial y}\int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \frac{\partial}{\partial z}\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma - ik\int_\Sigma \frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\,d\Sigma +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \frac{k^2 t}{2}\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \int_0^t \frac{\partial^2 I_0}{\partial r\partial t}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* +$$

$$+\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* - i\frac{\partial}{\partial y}\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* + ik\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*\right\},$$

avendo indicato con Σ^* la superficie della sfera generica di centro P e raggio variabile r $(0 \leq r \leq t)$.

Se si osserva che

$$\left\{\frac{\partial I_0}{\partial r}\right\}_{r=t} = \frac{k^2 t}{2},$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* = \frac{k^2 t}{2}\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma + \int_0^t \frac{\partial^2 I_0}{\partial r\partial t}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*,$$

si riconosce che si può scrivere

$$4\pi\varphi_1(P,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* - \int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma\right\} +$$

$$+ i\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^* - \int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*\right\} - ik\left\{\int_\Sigma \frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*\right\}.$$

Un analogo calcolo si può eseguire per trasformare le espressioni di $\varphi_2(P,t)$, $\varphi_3(P,t)$, $\varphi_4(P,t)$ date dalla (9) per $i = 2, 3, 4$. Possiamo ora presentare la formula precedente della $\varphi_1(P,t)$. e le altre tre relative alle $\varphi_i(P,t)$ $(i = 2, 3, 4)$, sotto una forma assai espressiva. Poniamo:

$$\psi_1 = \frac{i}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \frac{i}{4\pi}\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_3^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*, \qquad \psi_3 = \frac{i}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \frac{i}{4\pi}\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_1^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*,$$

$$\psi_2 = \frac{i}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varphi_4^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \frac{i}{4\pi}\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_4^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*, \qquad \psi_4 = \frac{i}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma - \frac{i}{4\pi}\int_0^t \frac{\partial I_0}{\partial r}\,dr\int_{\Sigma^*}\frac{\varphi_2^{(0)}}{r}\,d\Sigma^*.$$

$$k' = -k.$$

Si hanno allora le seguenti espressioni definitive delle funzioni $\varphi_i(P, t)$:

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_1(P, t) &= \frac{1}{i}\frac{\partial\psi_3}{\partial t} + i\frac{\partial\psi_4}{\partial x} + \frac{\partial\psi_4}{\partial y} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial z} + k'\psi_1 \\
\varphi_2(P, t) &= \frac{1}{i}\frac{\partial\psi_4}{\partial t} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial x} - \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - i\frac{\partial\psi_4}{\partial z} + k'\psi_2 \\
\varphi_3(P, t) &= \frac{1}{i}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - i\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y} - i\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + k'\psi_3 \\
\varphi_4(P, t) &= \frac{1}{i}\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - i\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y} + i\frac{\partial\psi_2}{\partial z} + k'\psi_4,
\end{aligned}\right.$$

nelle quali formule i secondi membri si ottengono dai primi membri delle equazioni (1) di Dirac sostituendo al posto delle φ_i le funzioni $\psi_i(P, t)$ e cambiando k in $-k$.

§ 3. **Problema misto per le equazioni di Dirac. Sua risoluzione con quadrature.**

Relativamente alle equazioni (5) di Dirac, proponiamoci la risoluzione del seguente

Problema misto: Dare le formule di rappresentazione degli integrali φ_i nei punti interni di uno spazio finito S limitato da una superficie chiusa regolare σ e per qualunque valore positivo del tempo, supponendo di conoscere le funzioni φ_i sopra σ in qualsiasi istante positivo di tempo, e nello spazio S per $t=0$.

Dimostriamo dapprima che i dati del problema sul contorno σ, congiunti al fatto che le φ_i devono ivi soddisfare alle equazioni (5), bastano per determinare in ogni istante di tempo anche tutte le derivate parziali delle funzioni φ_i in ogni punto di σ. Infatti le derivate temporali delle φ_i sono note sopra σ perchè queste funzioni sono ivi conosciute per ogni t. Per determinare le derivate spaziali cominciamo a prendere un pezzo di σ il quale, per fissare le idee, sia di equazione $z = z(x, y)$. Su esso sono date le funzioni $\varphi_i(x, y, z, t)$ per ogni t, quindi ivi sono note anche le derivate totali

$$\frac{d}{dx}\varphi_i(x, y, z(x, y), t), \quad \frac{d}{dy}\varphi_i(x, y, z(x, y), t).$$

Ma si ha, con ovvia applicazione del teorema della derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}p, \quad \frac{d\varphi_i}{dy} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}q, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

A queste otto equazioni associamo le quattro equazioni di DIRAC: abbiamo un sistema di dodici equazioni lineari non omogenee nelle dodici incognite $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}$. Risolvendolo otteniamo queste derivate spaziali sopra il pezzo di superficie $z = z(x, y)$ espresse per elementi noti, quali sono le derivate totali $\frac{d\varphi_i}{dx}, \frac{d\varphi_i}{dy}$, le derivate temporali $\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}$, e le funzioni φ_i, Non ci occupiamo della effettiva determinazione di queste derivate parziali. Adunque delle funzioni φ_i sappiamo che nello spazio S e per ogni t soddisfano all'equazione

$$\underset{2}{\Delta}\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - k^2\varphi = 0,$$

sopra σ conosciamo i loro valori e quelli delle rispettive quattro derivate parziali del prim'ordine in ogni istante di tempo, le quali unitamente alle φ_i, ivi verificano le equazioni di DIRAC, infine nello spazio S, e per $t = 0$, soddisfano pure a queste equazioni. Un accorto maneggio della formula (4) condurrà ad una esplicita espressione di ogni funzione φ_i valida nei punti interni di S e per valori positivi del tempo superiori ad un certo limite che contiene i soli dati contenuti nel problema enunciato. Per fissare le idee prendiamo in considerazione la funzione φ_1, e per evitare ogni confusione, indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate di un punto variabile nello spazio S e sul contorno σ, con τ il tempo pure variabile, mentre riserviamo la notazione x, y, z per denotare le coordinate di un punto P fisso interno ad S, ma del resto qualunque, la lettera t per indicare un istante positivo di tempo, pure qualsiasi, purchè superiore a quel certo limite t_1 di cui abbiamo fatto parola relativamente alla formula (4).

Per la determinazione della funzione $\varphi_1(P, t)$ applichiamo la (4); si ha

$$(11) \qquad 4\pi\varphi_1(P, t) = -k^2\int_S \left\{\varphi_1 \frac{\partial}{\partial t}\frac{I_1(\rho)}{\rho} + \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right\}_{\tau=0} dS -$$
$$-k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\left\{\varphi_1\frac{d}{dn}\frac{I_1(\rho)}{\rho} - \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{d\varphi_1}{dn}\right\}d\tau + \frac{k^2}{2}\int_\sigma[\varphi_1]\frac{dr}{dn}d\sigma -$$
$$-\int\left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dn} - \varphi_1\frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right]d\sigma,$$

nella quale $\rho = ik\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}$.

I ragionamenti che abbiamo fatto ci permettono di dire che sopra σ è conosciuta la $\frac{d\varphi_1}{dn}$ per ogni τ. In S la $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}$ per $\tau = 0$ è pure determinata in forza delle equazioni di Dirac per $\tau = 0$, essendo dati in S i valori delle φ_i in questo istante. Quindi il secondo membro della (11) dà una esplicita espressione della $\varphi_1(P, t)$ in funzioni dei dati del problema. Si tratta ora di trasformarla in modo da ottenerne un'altra equivalente, ma che abbia una forma espressiva. A ciò servono i calcoli che andiamo a sviluppare.

Dalle equazioni (5) otteniamo

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta} - ik\varphi_4$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} = i\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} + i\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} - i\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta} - k\varphi_4$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi} + i\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} - ik\varphi_3,$$

donde

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\cos n\xi + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\cos n\eta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta}\cos n\zeta = i\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\cos n\eta - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\cos n\xi\right\} +$$
$$+ i\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\cos n\zeta - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\eta\right\} + \left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\xi - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\cos n\zeta\right\} -$$
$$- \left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}(\cos n\xi - i\cos n\eta) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\cos n\zeta\right\} - k\{\varphi_4(i\cos n\xi + \cos n\eta) + i\varphi_3\cos n\zeta)\}.$$

Ne consegue, sostituendo nella formula (11),

$$(12) \qquad 4\pi\varphi_1(P, t) = -k^2\int_S\left\{\varphi_1\frac{\partial}{\partial t}\frac{I_1(\rho)}{\rho} + \frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right\}_{\tau=0} dS - k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{d}{dn}\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau +$$
$$+ k^2 i\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\cos n\eta - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\cos n\xi\right\}d\tau +$$
$$+ k^2 i\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\cos n\zeta - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\eta\right\}d\tau +$$
$$+ k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\xi - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\cos n\zeta\right\}d\tau -$$
$$- k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}(\cos n\xi - i\cos n\eta) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\cos n\zeta\right\}d\tau -$$
$$- k^3\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\{\varphi_4(i\cos n\xi + \cos n\eta) + i\varphi_3\cos n\zeta)\}d\tau + \frac{k^2}{2}\int_\sigma[\varphi_1]\frac{dr}{dn}d\sigma -$$

$$-i\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\cos n\eta-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\cos n\xi\right]\frac{d\sigma}{r}-i\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\cos n\zeta-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\eta\right]\frac{d\sigma}{r}-$$

$$-\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\xi-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\cos n\zeta\right]\frac{d\sigma}{r}+$$

$$+\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}(\cos n\xi-i\cos n\eta)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\cos n\zeta\right]\frac{d\sigma}{r}+$$

$$+k\int_\sigma[\varphi_4(i\cos n\xi+\cos n\eta)+i\varphi_3\cos n\zeta]\frac{d\sigma}{r}+$$

$$+\int_\sigma[\varphi_1]\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma-\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right]\frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r}.$$

Cominciamo a trasformare l'integrale di spazio

$$A=-\int_S\left\{\varphi_1\frac{\partial}{\partial t}\frac{I_1(\rho)}{\rho}+\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right\}_{\tau=0}dS. \tag{13}$$

Si ha, in forza della terza equazione di Dirac,

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}+\frac{\partial\varphi_2^{(0)}}{\partial\xi}-i\frac{\partial\varphi_2^{(0)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi_1^{(0)}}{\partial\zeta}+ik\varphi_3^{(0)}=0,$$

avendo indicato con $\varphi_i^{(0)}$ le determinazioni delle φ_i per $\tau=0$.

Sostituendo nella precedente (13), con ovvia integrazione per parti, si ricava

$$\begin{aligned}A=&-\frac{\partial}{\partial t}\int_S\varphi_1^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS-\int_S\varphi_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS+\\&+i\int_S\varphi_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS-\int_S\varphi_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS+ik\int_S\varphi_3^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS\\&-\int_\sigma\{\varphi_2^{(0)}(\cos n\xi-i\cos n\eta)+\varphi_1^{(0)}\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}d\sigma,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\rho_0=ik\sqrt{t^2-r^2}.$$

Prendiamo in esame i tre integrali

$$B=\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\cos n\eta-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\cos n\xi\right\}d\tau, \tag{15}$$

(16) $$C=\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\cos n\zeta-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\eta\right\}d\tau,$$

(17) $$D=\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\xi-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\cos n\zeta\right\}d\tau.$$

Possiamo scrivere

$$B=\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}d\tau-\int_\sigma\cos n\xi d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}d\tau.$$

Osserviamo che

$$\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau=\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau+$$

$$+\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}d\tau-\frac{1}{2}\int_\sigma\cos n\eta[\varphi_1]\frac{\partial r}{\partial\xi}d\sigma,$$

perchè

$$\left[\varphi_1\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right]=\frac{1}{2}[\varphi_1],\quad\text{essendo}\quad\left[\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right]=\left\{\frac{I_1(\rho)}{\rho}\right\}_{\rho=0}=\frac{1}{2}.$$

Ne consegue che

$$\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\int_0^{t-r}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}d\tau=\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau-$$

$$-\int_\sigma\cos n\eta d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau+\frac{1}{2}\int_\sigma[\varphi_1]\cos n\eta\frac{\partial r}{\partial\xi}d\sigma,$$

donde, posto

$$V=\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau,$$

si ha

(18) $$B=\int_\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\cos n\eta-\frac{\partial V}{\partial\eta}\cos n\xi\right)d\sigma-$$

$$-\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_1\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\eta-\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\xi\right\}d\tau+\frac{1}{2}\int_\sigma[\varphi_1]\left\{\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos n\eta-\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos n\xi\right\}d\sigma.$$

Se ora si ricorda, che indicando con n un vettore unitario situato lungo la normale a σ, ha luogo l'identità

$$\int_\sigma n \wedge \operatorname{grad} V d\sigma = 0,$$

si conclude che il primo integrale del secondo membro della (18) è nullo, e perciò si ottiene

$$B = \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \cos n\eta - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \cos n\xi \right\} d\tau = - \tag{19}$$

$$- \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \varphi_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos n\eta - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos n\xi \right\} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\sigma [\varphi_1] \left\{ \frac{\partial r}{\partial \xi} \cos n\eta - \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos n\xi \right\} d\sigma.$$

Procedendo in modo analogo si ricava

$$C = \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \cos n\zeta - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} \cos n\eta \right\} d\tau = \tag{20}$$

$$- \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \varphi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos n\zeta - \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos n\eta \right\} d\tau + \frac{1}{2} \int_\sigma [\varphi_2] \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos n\zeta - \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos n\eta \right\} d\sigma.$$

$$D = \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} \cos n\xi - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \cos n\zeta \right\} d\tau = \tag{21}$$

$$- \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \varphi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos n\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos n\zeta \right\} d\tau + \frac{1}{2} \int_\sigma [\varphi_2] \left\{ \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos n\xi - \frac{\partial r}{\partial \xi} \cos n\zeta \right\} d\sigma.$$

Trasformiamo il sesto integrale della formula (12), cioè

$$E = - \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \cos n\xi - i \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} \cos n\eta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \cos n\zeta \right\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau. \tag{22}$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{ \varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta \} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau = \tag{23}$$

$$= \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta\} \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\sigma [\varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta]\, d\sigma .$$

Si osservi che si può scrivere

$$- \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta\} \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau +$$

$$+ \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \cos n\zeta \right\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\sigma [\varphi_2 \cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta]\, d\sigma -$$

$$- \int_\sigma d\sigma \, \{\varphi_2^{(0)} (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1^{(0)} \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} d\sigma ,$$

perchè sia il primo che il secondo membro di questa identità vale

$$\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \{\varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta\}\, d\tau .$$

Perciò dalla (23) si ricava

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau =$$

$$= \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \left\{ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \cos n\zeta \right\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau +$$

$$+ \int_\sigma \{\varphi_2^{(0)} (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1^{(0)} \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} d\sigma ,$$

donde la trasformazione definitiva

$$E = - \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2 (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau + \tag{24}$$

$$+ \int_\sigma \{\varphi_2^{(0)} (\cos n\xi - i \cos n\eta) + \varphi_1^{(0)} \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} d\sigma .$$

Ci resta ancora a trasformare gli integrali

$$(25)\qquad F = -\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\cos n\eta - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\cos n\xi\right]\frac{d\sigma}{r},$$

$$(26)\qquad G = -\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\cos n\zeta - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}\cos n\eta\right]\frac{d\sigma}{r},$$

$$(27)\qquad H = -\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta}\cos n\xi - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\cos n\zeta\right]\frac{d\sigma}{r}.$$

Osserviamo che

$$\frac{\partial[\varphi_1]}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right] - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right]\frac{\partial r}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial[\varphi_1]}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right] - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right]\frac{\partial r}{\partial \eta},$$

donde

$$\int_\sigma \left\{\frac{\partial[\varphi_1]}{\partial \xi}\cos n\eta - \frac{\partial[\varphi_1]}{\partial \eta}\cos n\xi\right\}\frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right]\left\{\frac{\partial r}{\partial \eta}\cos n\xi - \frac{\partial r}{\partial \xi}\cos n\eta\right\}\frac{d\sigma}{r} =$$

$$= \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\cos n\eta - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\cos n\xi\right]\frac{d\sigma}{r}.$$

In forza dell'identità notissima

$$\int_\sigma n \wedge \operatorname{grad}\frac{[\varphi_1]}{r}\, d\sigma = 0,$$

cioè

$$\int_\sigma n \wedge \frac{1}{r}\operatorname{grad}[\varphi_1] d\sigma + \int_\sigma n \wedge [\varphi_1]\operatorname{grad}\frac{1}{r}\, d\sigma = 0,$$

concludiamo che

$$\int_\sigma \left\{\frac{\partial[\varphi_1]}{\partial \xi}\cos n\eta - \frac{\partial[\varphi_1]}{\partial \eta}\cos n\xi\right\}\frac{d\sigma}{r} = \int_\sigma [\varphi_1]\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\cos n\xi - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\cos n\eta\right\} d\sigma,$$

e quindi la trasformazione finale

$$(28)\qquad F = -\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\cos n\eta - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\cos n\xi\right]\frac{d\sigma}{r} = -\int_\sigma [\varphi_1]\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\cos n\xi - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\cos n\eta\right\} d\sigma +$$

$$+ \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right]\left\{\frac{\partial r}{\partial \eta}\cos n\xi - \frac{\partial r}{\partial \xi}\cos n\eta\right\}\frac{d\sigma}{r}.$$

Analogamente si trova

$$(29)\quad G=-\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\cos n\zeta-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\eta\right]\frac{d\sigma}{r}=-\int_\sigma[\varphi_2]\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\cos n\eta-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\cos n\zeta\right\}d\sigma+$$

$$+\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}\right]\left\{\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos n\eta-\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos n\zeta\right\}\frac{d\sigma}{r},$$

$$(30)\quad H=-\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\zeta}\cos n\xi-\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\cos n\zeta\right]\frac{d\sigma}{r}=-\int_\sigma[\varphi_2]\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\cos n\zeta-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\cos n\xi\right\}d\sigma+$$

$$+\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}\right]\left\{\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos n\zeta-\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos n\xi\right\}\frac{d\sigma}{r}.$$

Con le nuove espressioni di A, B, C, D, E, F, G, H, risulta

$$(31)\quad 4\pi\varphi_1(P,t)=-k^2\int_S\varphi_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS+ik^2\int_S\varphi_2^{(0)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS-$$

$$-k^2\int_S\varphi_1^{(0)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS-k^2\frac{\partial}{\partial t}\int_S\varphi_1^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS+ik^3\int_S\varphi_3^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}dS-$$

$$-k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_1\frac{d}{dn}\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau-k^2i\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_1\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\eta-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\xi\right\}d\tau-k^2i\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_2\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\zeta-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\eta\right\}d\tau-k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\varphi_2\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\xi-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\cos n\zeta\right\}d\tau-$$

$$-k^2\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_2(\cos n\xi-i\cos n\eta)+\varphi_1\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau-$$

$$-k^3\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_4(i\cos n\xi+\cos n\eta)+i\varphi_3\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}d\tau+$$

$$+\frac{k^2}{2}\int_\sigma[\varphi_1]\frac{dr}{dn}d\sigma+\frac{k^2i}{2}\int_\sigma[\varphi_1]\left\{\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos n\eta-\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos n\xi\right\}d\sigma+$$

$$+\frac{k^2i}{2}\int_\sigma[\varphi_2]\left\{\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos n\zeta-\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos n\eta\right\}d\sigma+\frac{k^2}{2}\int_\sigma[\varphi_2]\left\{\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos n\xi-\right.$$

$$-\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos n\zeta\Big\} d\sigma + \int_\sigma [\varphi_1] \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + i\int_\sigma [\varphi_1] \Big\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \cos n\eta -$$

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\cos n\xi\Big\} d\sigma + i\int_\sigma [\varphi_2] \Big\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \cos n\zeta - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \cos n\eta \Big\} d\sigma +$$

$$+\int_\sigma [\varphi_2] \Big\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \cos n\xi - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \cos n\zeta \Big\} d\sigma -$$

$$-\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right] \frac{dr}{dn}\frac{d\sigma}{r} - i\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right] \Big\{ \frac{\partial r}{\partial \xi}\cos n\eta - \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos n\xi \Big\} \frac{d\sigma}{r} -$$

$$-i\int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}\right] \Big\{ \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos n\zeta - \frac{\partial r}{\partial \zeta}\cos n\eta \Big\} \frac{d\sigma}{r} - \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}\right] \Big\{ \frac{\partial r}{\partial \zeta}\cos n\xi -$$

$$-\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos n\zeta \Big\} \frac{d\sigma}{r} + \int_\sigma \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}(\cos n\xi - i\cos n\eta) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\cos n\zeta\right] \frac{d\sigma}{r} +$$

$$+ k\int_\sigma [\varphi_4(i\cos n\xi + \cos n\eta) + i\varphi_3\cos n\zeta] \frac{d\sigma}{r}.$$

Si osservi che la somma del sesto, settimo, ottavo, nono integrale, e quella relativa agli integrali che sono moltiplicati per $\frac{k^2}{2}$ e per $\frac{k^2 i}{2}$ valgono rispettivamente

$$-k^2\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_1(\cos n\xi + i\cos n\eta) - \varphi_2\cos n\zeta\} \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau +$$

$$+k^2\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_1(i\cos n\xi - \cos n\eta) - i\varphi_2\cos n\zeta\} \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau +$$

$$+k^2\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2(i\cos n\eta - \cos n\xi) - \varphi_1\cos n\zeta\} \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{I_1(\rho)}{\rho} d\tau,$$

$$\frac{k^2}{2}\int_\sigma \{[\varphi_1](\cos n\xi + i\cos n\eta) - [\varphi_2]\cos n\zeta\} \frac{\partial r}{\partial \xi} d\sigma -$$

$$-\frac{k^2}{2}\int_\sigma \{[\varphi_1](i\cos n\xi - \cos n\eta) - i[\varphi_2]\cos n\zeta\} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\sigma -$$

$$-\frac{k^2}{2}\int_\sigma \{[\varphi_2](i\cos n\eta - \cos n\xi) - [\varphi_1]\cos n\zeta\} \frac{\partial r}{\partial \zeta} d\sigma.$$

Se in queste due somme parziali si combinano fra loro gli addendi corrispondenti, cioè il primo addendo della prima somma col primo addendo della seconda, ecc., si riconosce che la somma totale vale

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad & k^2 \frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_1(\cos n\xi + i\cos n\eta) - \varphi_2 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho}\, d\tau - \\
& - k^2 \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_1(i\cos n\xi - \cos n\eta) - i\varphi_2 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho}\, d\tau - \\
& - k^2 \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2(i\cos n\eta - \cos n\xi) - \varphi_1 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho}\, d\tau .
\end{aligned}
$$

Alla somma degli integrali estesi al contorno σ che sono indipendenti dalla costante k si può dare la forma seguente [1]

$$
\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{[\varphi_1](\cos n\xi + i\cos n\eta) - [\varphi_2]\cos n\zeta}{r}\, d\sigma + \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{[\varphi_1](i\cos n\xi - \cos n\eta) - i[\varphi_2]\cos n\zeta}{r}\, d\sigma + \\
(33)\qquad & + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{[\varphi_2](i\cos n\eta - \cos n\xi) - [\varphi_1]\cos n\zeta}{r}\, d\sigma + \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \frac{[\varphi_2](\cos n\xi - i\cos n\eta) + [\varphi_1]\cos n\zeta}{r}\, d\sigma .
\end{aligned}
$$

Le trasformazioni eseguite portano a scrivere

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad & 4\pi\varphi_1(P, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big\{k^2 \int_S \varphi_1^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\, dS + \\
& + k^2 \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_2(\cos n\xi - i\cos n\eta) + \varphi_1 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho}\, d\tau - \\
& - \int_\sigma \frac{[\varphi_2](\cos n\xi - i\cos n\eta) + [\varphi_1]\cos n\zeta}{r}\, d\sigma \Big\} + \frac{\partial}{\partial x}\Big\{k^2 \int_S \varphi_2^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\, dS + \\
& + k^2 \int_\sigma d\sigma \int_0^{t-r} \{\varphi_1(\cos n\xi + i\cos n\eta) - \varphi_2 \cos n\zeta\} \frac{I_1(\rho)}{\rho}\, d\tau -
\end{aligned}
$$

---

(1) Cfr. A. TONOLO, *Integrazione con quadrature di un particolare sistema di* DIRAC, loc. cit. in (1) a pag. 226.

$$-\int_\sigma \frac{[\varphi_1](\cos n\xi + i\cos n\eta) - [\varphi_2]\cos\zeta}{r}\,d\sigma\Big\} - \frac{\partial}{\partial y}\Big\{ik^2\int_S \varphi_2^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS +$$

$$+ k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_1(i\cos n\xi - \cos n\eta) - i\varphi_2\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau -$$

$$-\int_\sigma \frac{[\varphi_1](i\cos n\xi - \cos n\eta) - i[\varphi_2]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma\Big\} + \frac{\partial}{\partial z}\Big\{k^2\int_S \varphi_1^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS +$$

$$+ k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_2(\cos n\xi - i\cos n\eta) + \varphi_1\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau -$$

$$-\int_\sigma \frac{[\varphi_2](\cos n\xi - i\cos n\eta) + [\varphi_1]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma\Big\} - k\Big\{ - ik^2\int_S \varphi_3^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS +$$

$$+ k^2\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_4(i\cos n\xi + \cos n\eta) + i\varphi_3\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau -$$

$$-\int_\sigma \frac{[\varphi_4](i\cos n\xi + \cos n\eta) + i[\varphi_3]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma\Big\}.$$

Per determinare le altre tre funzioni $\varphi_2(P, t))$, $\varphi_3(P, t)$, $\varphi_4(P, t)$, basta osservare che la quarta equazione di DIRAC può ricavarsi dalla terza scambiando fra loro φ_1 e φ_2; φ_3 e φ_4; y in $-y$; z in $-z$, e quindi $\cos n\eta$ in $-\cos n\eta$, $\cos n\zeta$ in $-\cos n\zeta$. Perciò l'esplicita espressione di $\varphi_2(P, t)$ potrà ottenersi dalla (34) eseguendo questi scambi. Per avere poi $\varphi_3(P, t)$, $\varphi_4(P, t)$, si noti che le prime due equazioni di DIRAC si possono fare discendere dalla terza e dalla quarta mutando φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 rispettivamente in φ_3, φ_4, φ_1, φ_2 e inoltre x, y, z in $-x$, $-y$, $-z$, e perciò $\cos n\xi$, $\cos n\eta$, $\cos n\zeta$ in $-\cos n\xi$, $-\cos n\eta$, $-\cos n\zeta$. Quindi le espressioni delle funzioni $\varphi_3(P, t)$, $\varphi_4(P, t)$ si ricaveranno da quelle che dànno $\varphi_1(P, t)$, $\varphi_2(P, t)$ ivi eseguendo questi cambiamenti. Riteniamo superfluo aggiungere alla (34) le formule relative alle tre funzioni $\varphi_2(P, t)$, $\varphi_3(P, t)$, $\varphi_4(P, t)$ perchè ad esse, e alla precedente $\varphi_1(P, t)$, si può dare la forma estetica seguente. Poniamo:

$$\psi_1 = -\frac{ik^2}{4\pi}\int_S \varphi_3^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS + \tag{35}$$

$$+\frac{k^2}{4\pi}\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_4(i\cos n\xi + \cos n\eta) + i\varphi_3\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{[\varphi_4](i\cos n\xi+\cos n\eta)+i\,[\varphi_3]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma,$$

(36)
$$\psi_2=-\frac{ik^2}{4\pi}\int_S \varphi_4^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS+$$

$$+\frac{k^2}{4\pi}\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_3(i\cos n\xi-\cos n\eta)-i\varphi_4\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{[\varphi_3](i\cos n\xi-\cos n\eta)-i\,[\varphi_4]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma,$$

(37)
$$\psi_3=-\frac{ik^2}{4\pi}\int_S \varphi_1^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS-$$

$$-\frac{k^2}{4\pi}\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_2(i\cos n\xi+\cos n\eta)+i\varphi_1\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{[\varphi_2](i\cos n\xi+\cos n\eta)+i[\varphi_1]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma,$$

(38)
$$\psi_4=-\frac{ik^2}{4\pi}\int_S \varphi_2^{(0)}\frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0}\,dS-$$

$$-\frac{k^2}{4\pi}\int_\sigma d\sigma\int_0^{t-r}\{\varphi_1(i\cos n\xi-\cos n\eta)-i\varphi_2\cos n\zeta\}\frac{I_1(\rho)}{\rho}\,d\tau+$$

$$+\int_\sigma \frac{[\varphi_1](i\cos n\xi-\cos n\eta)-i[\varphi_2]\cos n\zeta}{r}\,d\sigma,$$

$$k'=-k.$$

Ovviamente si riconosce che si può scrivere

(39)
$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_1(P,t)&=\frac{1}{i}\frac{\partial\psi_3}{\partial t}+i\frac{\partial\psi_4}{\partial x}+\frac{\partial\psi_4}{\partial y}+i\frac{\partial\psi_3}{\partial z}+k'\psi_1\\
\varphi_2(P,t)&=\frac{1}{i}\frac{\partial\psi_4}{\partial t}+i\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-i\frac{\partial\psi_4}{\partial z}+k'\psi_2\\
\varphi_3(P,t)&=\frac{1}{i}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-i\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-i\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+k'\psi_3\\
\varphi_4(P,t)&=\frac{1}{i}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}-i\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+i\frac{\partial\psi_2}{\partial z}+k'\psi_4,
\end{aligned}\right.$$

nelle quali formule i secondi membri si ricavano dai primi membri delle equazioni (1) di DIRAC surrogando al posto delle φ_i le funzioni $\psi_i(P, t)$ assegnate dalle (35), (36), (37), (38) e cambiando k in $-k$.

I ragionamenti che abbiamo fatto sono fondati sull'ipotesi che il problema misto che abbiamo enunciato abbia effettivamente una soluzione suscettibile di soddisfare a tutte le condizioni. Questo ammesso, è facile riconoscere che tale soluzione è unica. Infatti un altro sistema di soluzioni che soddisfa a tutte le condizioni enunciate, dovrebbe anche soddisfare all'equazione (7) con i dati di CAUCHY per $t=0$ relativi allo spazio S e con le determinazioni per ogni tempo sopra il contorno σ che limita S. Ora con queste condizioni l'equazione (7) non può ammettere che una sola soluzione [1].

---

(1) Cfr. HADAMARD, *Le problème de* CAUCHY *et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (Hermann, Paris, 1932), Appendice II, n. 222. La dimostrazione è data per l'equazione delle onde cilindriche; ovviamente si estende alla equazione (7). PICONE, *Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione* [« Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. V, (1934)].

Contributo alla teoria degli operatori lineari.

Memoria di SALVATORE PINCHERLE † (a Bologna) (*).

SOMMARIO. — *Introduzione.* — PARTE PRIMA - Cap. I: *Lo spazio delle successioni e gli operatori lineari.* - Cap. II: *Lo scarto dalla permutabilità.* - Cap. III: *Un operatore elementare.* - Cap. IV: *Gli operatori normali.* — PARTE SECONDA - Cap. V: *Lo spazio delle serie di potenze e la derivazione funzionale.* - Cap. VI: *Gli operatori normali di rango zero.* - Cap. VII: *Gli operatori normali di rango uno.* - Cap. VIII: *Gli operatori normali di rango* r.

Introduzione.

Il presente lavoro si propone, nella sua prima parte, lo studio, condotto nel modo più possibilmente elementare, del comportamento degli operatori lineari in uno spazio S ad infinite dimensioni i cui elementi sono vettori definiti mediante le loro componenti rispetto ad una base opportunamente scelta. Premesse alcune osservazioni d'indole generale, si esaminano le proprietà degli scarti degli operatori in S rispetto ad un operatore fisso (fondamentale), lo scarto nullo equivalendo alla permutabilità; per l'operazione di scarto si verificano singolari analogie coll'operazione di ordinaria derivazione nel campo delle funzioni di una variabile. Viene poi scelto, come operatore fondamentale, uno speciale operatore M che viene detto *elementare,* equivalente in sostanza a quello (operatore θ di CASORATI) che nel calcolo delle differenze finite fa passare da a_n ad a_{n+1}: lo studio dello scarto rispetto ad $\dot{M}$ dà luogo a notevoli osservazioni e a reiterate analogie col calcolo delle derivate.

Fissata una base nello spazio S, si studiano gli operatori normali rispetto a questa base, cioè quelli nella cui matrice sono nulli tutti gli elementi a sinistra della diagonale principale. Questi si classificano in operatori di rango finito ed infinito, e, fra i primi, si distinguono quelli di rango zero o *dilatazioni*: si mostra poi come quelli di rango n siano decomponibili in un prodotto di dilatazioni e di operatori di rango uno.

(*) Alcuni dei risultati qui contenuti trovansi riassunti nella Nota postuma: S. PINCHERLE, *Sulla permutabilità negli operatori lineari,* « Bollettino dell'Un. Mat. It. », t. 15 (1936), pp. 153-161; va inoltre avvertito che — colla scomparsa del compianto Maestro — l'ultimo capitolo della presente Memoria è rimasto incompleto, ciò che però non nuoce all'organicità del lavoro. *N. d. R.*

Nella seconda parte, lo spazio S viene specificato assegnandogli come base la successione delle potenze nulla ed intere positive di una variabile x, ed assumendo come operatore elementare la moltiplicazione per x. Lo scarto rispetto a questa, al quale è dato il nome di *derivata funzionale*, già studiato da me in antichi lavori, dà luogo ad interessanti raffronti fra lo spazio S, i cui elementi sono le serie di potenze, e lo spazio costituito dall'insieme degli operatori lineari in S: alle costanti, alla variabile x e alle sue potenze, alla derivazione D, all'esponenziale nel primo, fanno rispettivamente riscontro nel secondo l'operatore elementare M ed i suoi permutabili, la derivazione ordinaria D e le sue potenze, la derivazione funzionale, l'operatore θ. Fra le dilatazioni dello spazio S, offre particolare interesse l'operatore xD, che viene indicato con X e al quale si riconducono le altre; si danno le relazioni fra le potenze di X e i prodotti $x^m D^m$ $(m = 1, 2, 3, ...)$, nelle quali intervengono i noti coefficienti di fattoriali; estendendo poi in vario modo lo spazio funzionale in cui tali operatori sono applicabili, si ottengono notevoli sviluppi, dapprima in via puramente formale, indi dando loro condizioni opportune per la validità effettiva. Il calcolo delle dilatazioni si completa associando a ciascuna di esse una funzione che ne viene detta la *determinante* e dalla cui struttura si conclude a quella dell'operatore. Nell'ultimo capitolo, viene fatta l'applicazione dei risultati precedenti al caso degli operatori normali di rango qualunque, i quali, negli spazi considerati, coincidono colle forme differenziali lineari del tipo di FUCHS, di ordine finito od infinito.

PARTE PRIMA

CAP. I. – **Lo spazio delle successioni e gli operatori lineari.**

§ I.

1. In ciò che segue, verranno considerate successioni di infiniti numeri reali o complessi; una tale successione, $a_0, a_1, ..., a_n, ...$, verrà considerata come *data* quando sia data una legge che permetta, per ogni intero n positivo o nullo, di assegnare l'elemento della successione corrispondente a questo indice n. Gli elementi $a_0, a_1, a_2, ...$ della successione verranno detti *coefficienti* o, meglio, *coordinate* della successione stessa; la successione che può riguardarsi come un ente o *vettore* di uno spazio ad una infinità numerabile di dimensioni, si designerà con una minuscola greca, seguita, quando occorra, dall'indicazione delle coordinate od, anche, da questa sola indicazione; così, si scriverà: la successione α, o la successione $\alpha(a_0, a_1, ...)$ o, semplicemente, la successione $(a_0, a_1, ...)$.

2. L'insieme o spazio delle successioni si indicherà S; ogni singola successione è un elemento o vettore di S. Verrà detta *base* dello spazio S il sistema delle successioni

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_0(1, 0, 0. 0, \ldots) \\ \varepsilon_1(0, 1, 0, 0, \ldots) \\ \varepsilon_2(0, 0. 1, 0, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

ε_n è dunque il vettore di cui tutte le coordinate sono nulle, eccettuata la $n+1^{sima}$ che è uguale ad 1.

3. Due successioni $\alpha(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $\beta(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ si diranno *uguali* se, e soltanto se, è

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots .$$

Da questa definizione risultano senz'altro verificate le solite proprietà logiche dell'uguaglianza:

$$\alpha = \alpha; \quad \text{se } \alpha = \beta, \text{ è } \beta = \alpha; \quad \text{se } \alpha = \beta \text{ e } \beta = \gamma, \text{ è } \alpha = \gamma.$$

4. Date le successioni $\alpha(a_0, a_1, \ldots)$, $\beta(b_0, b_1, \ldots)$, la successione

$$(a_0 + b_0, \ a_1 + b_1, \ a_2 + b_2, \ldots)$$

si dirà *somma* delle successioni α e β, e si indicherà con $\alpha + \beta$. Da questa definizione segue immediatamente quella della successione $\alpha + (\beta + \gamma)$, e sono senz'altro verificate le proprietà dell'addizione:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

La definizione di somma si estende al caso di un numero finito di vettori, con conservazione delle leggi commutativa ed associativa. La successione $(0, 0, 0, \ldots)$ è detta successione nulla o *zero* dello spazio S e si indica con 0; si ha:

$$0 + 0 = 0, \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

5. Avendosi k successioni fra loro uguali, siano $\alpha(a_0, a_1, \ldots)$, la somma di queste si indicherà con $k\alpha$, e si ha per definizione:

$$k\alpha = (ka_0, \ ka_1, \ ka_2, \ldots).$$

Questa relazione, così stabilita per k intero, positivo o nullo, si assumerà come definizione di $k\alpha$ per ogni numero k reale o complesso; pel prodotto del vettore α per un numero valgono immediatamente le seguenti proprietà:

$$0 \cdot \alpha = 0, \quad (h + k)\alpha = h\alpha + k\alpha, \quad k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \quad h(k\alpha) = hk\alpha = k(h\alpha).$$

Da ciò, e dalla definizione di somma, segue il significato dell'espressione

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$$

combinazione lineare dei vettori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

6. Il concetto di somma può estendersi al caso di infiniti addendi. Si abbia la successione di vettori

$$\alpha_0(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, \dots), \quad \alpha_1(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots), \dots, \quad \alpha_\nu(a_{\nu 0}, a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu n}, \dots), \dots;$$

colla scrittura $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu$ si deve intendere il vettore le cui coordinate sono

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu 0}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu 1}, \dots, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu n}, \dots .$$

Questa definizione, estensione di quella data al n.° precedente, richiede naturalmente che le serie $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ siano convergenti, e, se si vuole conservare la legge commutativa, che esse siano assolutamente convergenti. Questa ipotesi verrà sottintesa quando si tratti, in ciò che segue, di somme di infiniti vettori.

In base a questa definizione, segue che la somma $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$, ossia

$$(a_0, 0, 0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, 0, \dots) + (0, 0, a_2, 0, 0, \dots) + \dots$$

non è altro che il vettore $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Risulta da ciò che ogni elemento α di S, cioè ogni successione $a_0, a_1, a_2, \dots$, può venire espressa in forma di serie

$$a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_\nu\varepsilon_\nu + \dots . \tag{2}$$

7. Lo spazio S è un insieme *lineare*, intendendosi con ciò che se α e β sono elementi di S, è tale $h\alpha + k\beta$, essendo h e k numeri qualunque. Un insieme S_1 di elementi di S si dirà *parte aliquota* di S se è lineare nel senso ora detto. Se dunque $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sono elementi di S_1, sono elementi di S_1 tutti i vettori della forma $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$.

§ II.

8. Diremo *operatore nello spazio S* ogni procedimento che, applicato ad un elemento di S, produce uno o più elementi determinati di S. Un operatore può essere applicabile a qualsiasi elemento di S, o soltanto ad alcuni; applicato ad un elemento, può produrre un unico elemento, e si dice allora *univoco*; *plurivoco* nel caso contrario.

In ciò che segue verranno considerati operatori generalmente univoci (quando non sia esplicitamente indicato il contrario) e *lineari,* aventi cioè le proprietà:

1) che se l'operatore, applicato ai vettori α e β produce rispettivamente i vettori α_1 e β_1, applicato ad $\alpha + \beta$ produce $\alpha_1 + \beta_1$;

2) che se l'operatore, applicato ad α produce α_1, applicato a $k\alpha$ produce il vettore $k\alpha$, qualunque sia il numero k.

9. Gli operatori lineari si rappresenteranno colle maiuscole latine; se l'operatore A applicato al vettore α produce il vettore α_1, si scriverà

$$A(\alpha) = \alpha_1 .$$

Per l'operatore A, le condizioni di linearità sono

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \quad A(k\alpha) = kA(\alpha); \tag{3}$$

da queste si deduce

$$A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots) = k_1 A(\alpha_1) + k_2 A(\alpha_2) + \dots, \tag{4}$$

relazione che si applicherà formalmente anche ad un numero infinito di vettori. La scrittura $\Sigma\, k_\nu \alpha_\nu$, dove $\alpha_\nu = (a_{\nu 0}, a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu n}, \dots)$, rappresenta il vettore di coordinate $\Sigma_\nu\, k_\nu a_{\nu 0}$, $\Sigma_\nu\, k_\nu a_{\nu 1}, \dots$, $\Sigma_\nu\, k_\nu a_{\nu n}, \dots$; perchè esso abbia significato effettivo, è necessario che le singole serie $\Sigma_\nu\, k_\nu a_{\nu n}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ siano convergenti, e convergenti assolutamente se si vuole conservare la proprietà commutativa.

10. Si verifica subito che se A, B sono due operatori lineari, lo stesso è del prodotto AB (applicazione di A al risultato di $B(\alpha)$). Gli operatori lineari in S formano dunque un gruppo, che si indicherà con G.

Al gruppo G appartengono in particolare:

a) L'operatore zero, che applicato a qualsiasi elemento di S, produce l'elemento zero. Esso si indicherà con O; e dunque, per ogni α, $O(\alpha) = 0$.

b) L'operatore identico, che applicato a qualsiasi elemento di S, riproduce l'elemento stesso; esso si indicherà con 1; e, per ogni α, $1(\alpha) = \alpha$.

c) L'omotetia di parametro k, operatore A che per ogni α, dà $k\alpha$.

d) La dilatazione, di coefficienti $k_0, k_1, \dots, k_\nu, \dots$, che applicata ai vettori base di S (n.° 2), dà $A(\varepsilon_0) = k_0\varepsilon_0$, $A(\varepsilon_1) = k_1\varepsilon_1, \dots$, $A(\varepsilon_\nu) = k_\nu\varepsilon_\nu, \dots$.

11. Può accadere che un operatore lineare A sia tale da dare il medesimo risultato quando lo si applichi a due vettori distinti: $A(\alpha) = A(\beta)$; ne risulta $A(\alpha - \beta) = 0$. L'operatore A ammette quindi la *radice* (non nulla) $\alpha - \beta$. Un tale operatore viene detto *degenere di prima specie.*

Può accadere che un operatore lineare A sia tale da fare corrispondere allo spazio S non questo intero spazio, ma una sua parte S_1. Questa ne sarà una parte aliquota (n.° 6), costituirà cioè un sottospazio lineare di S. L'operatore si dirà allora *degenere di seconda specie* (¹). Un operatore che ammetta entrambe le specie di degenerescenza si dirà *degenere*; si dirà *non degenere* se non ammette nè l'una nè l'altra.

12. Un operatore lineare A si applichi agli elementi base di S. Esso produrrà determinati vettori

$$A(\varepsilon_0) = \eta_0, \quad A(\varepsilon_1) = \eta_1, \ldots, \quad A(\varepsilon_\nu) = \eta_\nu, \ldots \tag{5}$$

e sia

$$\eta_\nu = (a_{\nu 0},\ a_{\nu 1}, \ldots,\ a_{\nu n}, \ldots).$$

L'operatore A essendo supposto non degenere, le η_ν sono tutte diverse fra loro e tutte diverse da zero.

Essendo $\alpha = (k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ un vettore di S, esso può scriversi (n.° 5)

$$\alpha = \Sigma\, k_\nu \varepsilon_\nu\,;$$

applicando a questo l'operatore A si ottiene

$$A(\alpha) = \Sigma_\nu\, k_\nu A(\varepsilon_\nu) = \Sigma_\nu\, k_\nu \eta_\nu\,,$$

e quindi $A(\alpha)$ ammette come coordinate le serie $\Sigma_\nu k_\nu a_{\nu 0},\ \Sigma_\nu k_\nu a_{\nu 1}, \ldots,\ \Sigma_\nu k_\nu a_{\nu n}, \ldots$, per le quali si ricordi l'osservazione alla fine del n.° 9.

Segue da ciò che A è definito in tutto S dallo specchio di numeri

$$\left\{\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \ldots a_{0n} \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}\right. ;$$

questo specchio, che si compendia nella scrittura $\|a_{\nu n}\|$, si dice *matrice* dell'operatore A. Dare la matrice equivale a dare l'operatore, e perciò si può scrivere senza inconveniente $A = \|a_{\nu n}\|$. Per l'operatore nullo, tutti gli $a_{\nu n}$ sono nulli; per l'operatore identico, è

$$a_{\nu n} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad n = \nu \\ 0 & \text{»} \quad n \neq \nu. \end{cases}$$

(¹) Negli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni, una specie di degenerescenza porta con sè necessariamente l'altra. Invece, negli spazi ad un numero infinito di dimensioni, le due specie possono presentarsi separatamente, come ho notato per primo (« Rendic. del R. Istituto Lombardo », S. II, T. 30, 1897) e come è stato poi ritrovato da varî Autori: cfr. pure, su ciò, il n.° 34 del presente lavoro.

13. Si possono stabilire, per gli operatori del gruppo G, i concetti:

a) di uguaglianza. Due operatori A, B si diranno uguali quando, essendo $\|a_{n\nu}\|$, $\|b_{n\nu}\|$ le rispettive matrici, è $a_{n\nu}=b_{n\nu}$ per tutti i valori di n e di ν. Si scrive allora $A=B$, o $\|a_{n\nu}\|=\|b_{n\nu}\|$. Sono evidentemente verificate le leggi logiche della uguaglianza: $A=A$; se $A=B$, è $B=A$; se $A=B$ e $B=C$, è $A=C$.

b) di somma. Dati gli operatori $A=\|a_{n\nu}\|$, $B=\|b_{n\nu}\|$, sia $A(\alpha)=\alpha_1$, $B(\alpha)=\alpha_2$: l'operatore C, tale che sia $C(\alpha)=\alpha_1+\alpha_2$, verrà detto somma degli operatori A e B, ed indicato con $A+B$; essendo poi $C(\varepsilon_\nu)=\sum\limits_n(a_{\nu n}+b_{\nu n})\varepsilon_n$, ne segue che la matrice di $A+B$ è $\|a_{n\nu}+b_{n\nu}\|$. Sono evidentemente verificate le proprietà commutativa ed associativa dell'addizione, nonchè la $A+O=A$.

c) di moltiplicazione per un numero k. Per k intero, nullo o positivo, risulta dalla definizione di somma che la matrice di kA è data da $\|ka_{n\nu}\|$. Questa uguaglianza

$$k\|a_{n\nu}\|=\|ka_{n\nu}\|$$

verrà assunta come definizione di kA per ogni altro numero k. In particolare, il prodotto di A per $k=0$ dà l'operatore O.

d) di combinazione lineare. Dalle posizioni precedenti viene dato il significato dell'espressione $k_1A_1+k_2A_2+\ldots+k_rA_r$, la cui matrice è $\|k_1a_{n\nu}^{(1)}+k_2a_{n\nu}^{(2)}+\ldots+k_ra_{n\nu}^{(r)}\|$ se $A_i=\|a_{n\nu}^{(i)}\|$. Se questa si riduce a zero, le A_1, $A_2,\ldots$, A_r sono linearmente dipendenti, legate cioè dalla relazione

$$k_1A_1+k_2A_2+\ldots+k_rA_r=0.$$

14. Avendosi i due operatori $A=\|a_{n\nu}\|$, $B=\|b_{n\nu}\|$, si applichi l'operatore A a $B(\varepsilon_\mu)$; si avrà

$$AB(\varepsilon_\mu)=b_{\mu 0}A(\varepsilon_0)+b_{\mu 1}(A\varepsilon_1)+b_{\mu 2}A(\varepsilon_2)+\ldots,$$

ossia

$$AB(\varepsilon_\mu)=\sum_n b_{\mu n}a_{n0}\varepsilon_0+\sum_n b_{\mu n}a_{n1}\varepsilon_1+\ldots+\sum_n b_{\mu n}a_{n\nu}\varepsilon_\nu+\ldots.$$

La matrice del prodotto operatorio AB è dunque

$$\|p_{\mu\nu}\|=\|b_{\mu 0}a_{0\nu}+b_{\mu 1}a_{1\nu}+\ldots+b_{\mu n}a_{n\nu}+\ldots\|.$$

Analogamente, la matrice del prodotto BA è data da $\|q_{\mu\nu}\|=\|\sum\limits_n b_{n\nu}a_{\mu n}\|$.

Non è in generale $AB=BA$; il prodotto degli elementi del gruppo G non è quindi in generale permutabile, le condizioni perchè sia tale essendo

$$\sum_n b_{n\nu}a_{\mu n}=\sum_n a_{n\nu}b_{\mu n}. \tag{6}$$

Sotto la presupposta assoluta convergenza delle coordinate di $A(BC)$, vale per gli elementi del gruppo G la proprietà associativa.

CAP. II. - **Lo scarto dalla permutabilità.**

§ I.

15. Nel gruppo G degli operatori lineari dello spazio S, sia fissato un operatore univoco e non degenere, F. Siano A e B due operatori permutabili con F; da

$$AF = FA, \quad BF = FB,$$

si deduce, ammettendosi la proprietà associativa,

$$ABF = AFB = FAB;$$

essendo dunque A e B permutabili con F, lo è anche il loro prodotto; gli operatori permutabili con F formano dunque un gruppo, sotto-gruppo di G. Questo gruppo verrà indicato con $\mathfrak{F}_F$, o semplicemente con $\mathfrak{F}$ quando non sia necessario di ricordare l'operatore principale F; ad esso appartiene l'operazione identica e di ogni suo elemento P l'inverso P^{-1} (supposto esistente) (1).

16. Fissato l'operatore F ed essendo A un operatore qualunque, l'operatore

$$AF - FA$$

si dirà *scarto dalla permutabilità* di A rispetto ad F; esso si indicherà con A'_F e, quando non vi possa essere ambiguità, semplicemente con A'. Se A è permutabile con F, si ha $A' = 0$. Si ha poi $A'_F = - F'_A$.

17. L'operazione di scarto è distributiva rispetto alla somma: si ha cioè

(1) $$(A + B)' = A' + B'; \quad \text{in particolare} \quad (A + P)' = A'.$$

Si ha pure

$$(cA)' = cA'.$$

Essa agisce su un prodotto di operatori secondo una forma del tutto analoga alla regola di derivazione di un prodotto; infatti:

(2) $$\begin{aligned}(AB)' &= ABF - FAB = ABF - AFB + AFB - FAB = \\ &= A(BF - FB) + (AF - FA)B = AB' + A'B.\end{aligned}$$

In particolare, per essere $P' = 0$, sarà $(AP)' = A'P$. Gli operatori P si comportano dunque, rispetto all'operazione di scarto, come le costanti rispetto alla derivazione ordinaria.

(1) Gli operatori permutabili con F si indicheranno colla lettera P, affetta o no da indici

Per un prodotto di più fattori, si ha

$$(A_1A_2 \dots A_{m-1}A_m)' = A_1A_2 \dots A_{m-1}A'_m + A_1A_2 \dots A'_{m-1}A_m + \dots \\ \dots + A_1A_2' \dots A_{m-1}A_m + A_1'A_2 \dots A_{m-1}A_m. \tag{3}$$

In particolare, se i fattori sono uguali:

$$(A^m)' = A^{m-1}A' + A^{m-2}A'A + \dots + AA'A^{m-2} + A'A^{m-1}; \tag{4}$$

se inoltre accade che A ed A' siano fra loro permutabili, viene

$$(A^m)' = mA^{m-1}A', \tag{5}$$

dove è ancora manifesta l'analogia col calcolo delle derivate [1].

18. Ottenuto lo scarto di A rispetto ad F, si può cercare lo scarto dello scarto o *scarto secondo*; esso si indicherà con A''. Si ha dunque:

$$A'' = (AF - FA)F - F(AF - FA) = AF^2 - 2FAF + F^2A.$$

Analogamente si definisce lo scarto terzo A''', che è dato da

$$A''' = AF^3 - 3FAF^2 + 3F^2AF - F^3A,$$

ed in generale lo scarto m^{simo}, per il quale si ottiene senza difficoltà, per induzione, la formula

$$A^{(m)} = AF^m - mFAF^{m-1} + \binom{m}{2}F^2AF^{m-2} - \dots + (-1)^mF^mA. \tag{6}$$

Lo scarto secondo del prodotto AB è dato, per la (2), da

$$(AB)'' = ((AB)')' = (AB' + A'B)' = AB'' + 2A'B' + A''B$$

e si trova senza difficoltà, per induzione, che lo scarto m^{simo} del prodotto è dato dalla formula:

$$(AB)^{(m)} = AB^{(m)} + mA'B^{(m-1)} + \binom{m}{2}A''B^{(m-2)} + \dots + mA^{(m-1)}B' + A^{(m)}B. \tag{7}$$

In particolare, si ha

$$(AP)^{(m)} = A^{(m)}P.$$

19. Il comportamento di un operatore riguardo alla permutabilità rispetto ad F può dare luogo ad uno dei seguenti casi:

a) L'operatore A può essere permutabile rispetto ad F; il suo scarto A' è lo zero.

---

[1] L'analogia fra il calcolo dello scarto di operatori lineari e quello ordinario delle derivate è stata da me segnalata in una Nota pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia di Bologna » nel 1903; proponevo allora per lo scarto il nome di derivata operativa.

b) L'operatore A non è permutabile rispetto ad F; il suo scarto non è dunque nullo, ma è nullo il suo scarto m^{simo} (non l'$m-1^{simo}$) e lo sono quindi tutti i successivi. L'operatore si dirà allora permutabile dell'ordine m. Gli operatori P, permutabili in senso proprio, si diranno pertanto permutabili di prim'ordine.

c) Può infine accadere che tutti gli scarti successivi, per grande che ne sia l'ordine, siano differenti dallo zero; si vedrà al n.° 24 come esistano effettivamente tali operatori.

Se A e B sono permutabili rispettivamente degli ordini p e q, il loro prodotto è permutabile dell'ordine $p+q-1$. Si ponga $p+q-1=m$. Si ha, per la (7),

$$(AB)^{(m)} = AB^{(m)} + mA'B^{(m-1)} + \dots + \binom{m}{p-1} A^{(p-1)}B^{(m-p+1)} +$$
$$+ \binom{m}{p} A^{(p)}B^{(m-p)} + \dots + A^{(m)}B\,;$$

ora, per essere B permutabile dell'ordine $q=m-p+1$, è nullo il termine $\binom{m}{p-1} A^{(p-1)}B^{(m-p+1)}$ con tutti i precedenti; per essere A dell'ordine p, è nullo il termine $\binom{m}{p} A^{(p)}B^{(m-p)}$ con tutti i seguenti, onde è $(AB)^{(m)}=0$. Gli operatori del caso *b)* formano dunque un gruppo di cui $\mathfrak{F}$ è sottogruppo.

20. Due operatori aventi rispetto ad F il medesimo scarto hanno per differenza un operatore a scarto nullo, cioè un operatore P.

Due operatori aventi rispetto ad F il medesimo scarto m^{simo}, hanno per differenza un operatore permutabile dell'ordine m.

21. Dopo gli operatori del gruppo $\mathfrak{F}$, i più semplici, in ordine al loro scarto rispetto ad F, sono i permutabili del secondo ordine, definiti da

$$A'' = AF^2 - 2FAF + F^2A = 0,$$

equivalente ad $A' = P$.

Dati due operatori A ed A_1 permutabili del secondo ordine, i loro scarti A' ed A_1' sono del primo: $A'=P$ e $A_1'=P_1$; moltiplicando a destra la prima di queste per $P^{-1}P_1$ e posto $P^{-1}P_1 = P_2$, si ha

$$A_1' = A'P_2 = (AP_2)',$$

e quindi (n.° 20)

(8) $$A_1 = AP_2 + P_3.$$

Inversamente, se A è un permutabile di secondo ordine, lo è ogni operatore della forma (8), poichè ne risulta $A_1' = (AP_2)' = A'P_2$, indi $A_1'' = A''P_2$, onde, dall'essere $A'' = 0$, ne segue $A_1'' = 0$.

22. Un operatore S tale che sia

$$SF = -FS \tag{9}$$

verrà detto *semi-permutabile* rispetto ad F. Esso non può essere nel tempo stesso permutabile, a meno di coincidere coll'operatore nullo, poichè se fosse anche $SF = FS$, ne risulterebbe $FS = 0$, e quindi, poichè F è supposto non degenere, ciò non può essere se non è $S = 0$. Invece ogni S è permutabile con F^2, poichè, moltiplicando la (9) successivamente a sinistra e a destra per F, viene

$$FSF = -F^2S = -SF^2, \quad \text{onde} \quad F^2S = SF^2.$$

Essendo S semi-permutabile, si vede subito che lo è anche il suo scarto S'. Ogni operatore A permutabile con F^2, ma non con F, ha il suo scarto semi-permutabile, poichè da $AF^2 = F^2A$ si deduce

$$AF^2 - FAF + FAF - F^2A = (AF - FA)F + F(AF - FA) = 0,$$

onde

$$A'F = -FA'.$$

23. Il prodotto PS, dove P è permutabile ed S semi-permutabile, dà

$$FPS = PFS = -PSF,$$

esso è dunque semi-permutabile. Il prodotto di due semi-permutabili S ed S_1 dà

$$FSS_1 = -SFS_1 = SS_1F,$$

ed è quindi permutabile. L'insieme dei permutabili e dei semi-permutabili costituisce dunque un gruppo misto (nel senso di LIE) e i permutabili ne costituiscono un sotto-gruppo.

24. È facile ora accertare l'esistenza della classe *c)* menzionata al n.° 19, cioè di quelli operatori i cui scarti, di ordine comunque grande, non risultano mai nulli.

Essendo infatti S un operatore (non nullo) semi-permutabile, dalla (9) si deduce

$$S' = SF - FS = -2FS;$$

da questa (n.° 17)

$$S'' = -2FS' = 4F^2S, \quad S''' = -8F^3S, \ldots, \quad S^{(m)} = (-2)^m F^m S. \ldots$$

e, poichè la F è supposta non degenere, la $S^{(m)}$ non può essere nulla per alcun valore di m.

§ II.

25. Fra gli operatori permutabili del secondo ordine con F, se ne consideri uno, che verrà detto U, il quale soddisfi alla relazione

$$UF - FU = 1\,; \tag{10}$$

esso è definito all'infuori di un permutabile P additivo. Per quanto si è visto al n.° 21, ogni altro permutabile del secondo ordine potrà scriversi sotto la forma

$$A = UP + P_1\,. \tag{8}$$

Poichè è $U' = 1$, la formula (5), applicata ad U, darà

$$(U^m)' = mU^{m-1}, \tag{11}$$

dove si vede che l'operazione di scarto agisce su di U come la derivazione ordinaria agisce sulla variabile, mentre si conferma che, come si è osservato al n.° 17, i permutabili P si comportano come le costanti nel calcolo ordinario. Ne segue che lo scarto di un operatore della forma

$$P_0 + P_1U + P_2U^2 + \dots + P_mU^m$$

è dato da

$$P_1 + 2P_2U + 3P_3U^2 + \dots + mP_mU^{m-1}.$$

26. Come si è visto, la forma generale dei permutabili del secondo ordine è data dalla (8); si può ora mostrare che

$$P_0 + P_1U + \dots + P_{m-1}U^{m-1} \tag{12}$$

è la forma generale dei permutabili di ordine m. Si riconosce subito che una espressione di questa forma è permutabile dell'ordine m; inversamente, ogni permutabile di ordine m ammette la forma medesima. Ciò è già dimostrato per il caso di $m = 2$; si supponga dimostrato per m, e si riconoscerà facilmente che vale per $m + 1$. Se infatti A è tale che sia $A^{(m+1)} = 0$, ne seguirà $(A')^m = 0$ e quindi sarà, per il supposto,

$$A' = P_0 + P_1U + \dots + P_{m-1}U^{m-1}.$$

Si costruisca ora l'operatore

$$B = P_0U + \frac{1}{2}P_1U^2 + \dots + \frac{1}{m-1}P_{m-2}U^{m-1} + \frac{1}{m}P_{m-1}U^m\,;$$

formando B', secondo la regola data al n.° precedente, verrà $B' = A'$, onde la differenza $A - B$ sarà un operatore P. È dunque $\dot{A} = B + P$, e quindi A è della forma (12):

$$A = P + P_0 U + \frac{1}{2} P_1 U^2 + \ldots + \frac{1}{m} P_{m-1} U^m, \qquad \text{c. d. d..}$$

27. Si ammetta, per l'operatore U, l'esistenza di un numero g (autovalore) e, in corrispondenza, di un elemento ω_0 non nullo di S (*autoelemento* o *elemento invariante*) tale che sia

(13) $$U(\omega_0) = g\omega_0.$$

Riprendendo la relazione (10), si ha

$$(UF - FU)(\omega_0) = \omega_0,$$

e quindi, posto $F(\omega_0) = \omega_1$, verrà

$$U(\omega_1) = g\omega_1 + \omega_0.$$

Analogamente, posto $F(\omega_1) = \omega_2$, si avrà

$$U(\omega_2) = g\omega_2 + 2\omega_1,$$

e così via. Si viene pertanto a costruire una successione di elementi

$$\omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2 \ldots$$

di cui il primo soddisfa alla (13), mentre gli altri sono definiti da

$$F(\omega_0) = \omega_1, \quad F(\omega_1) = \omega_2, \ldots, \quad F(\omega_{n-1}) = \omega_n, \ldots$$

e vale per essi la relazione ricorrente

(14) $$U(\omega_n) = g\omega_n + n\omega_{n-1},$$

che si è avuta per $n = 1, 2$, e che, supposta vera per n, si verifica subito per $n + 1$.

28. Gli elementi $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ costituiscono la base di uno spazio lineare Ω contenuto in S. Essi sono linearmente indipendenti, poichè, se si ammettesse una relazione lineare

(15) $$c_0\omega_0 + c_1\omega_1 + \ldots + c_p\omega_p = 0$$

fra $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_p$, ma non fra i precedenti $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{p-1}$, ne verrebbe, applicando la U e tenendo conto delle (14), (15),

$$c_1\omega_0 + 2c_2\omega_1 + 3c_3\omega_2 + \ldots + pc_p\omega_{p-1} = 0,$$

contro l'ipotesi.

29. Le (14) mostrano che lo spazio Ω è trasformato in sè da U, e la matrice della trasformazione è data da

$$\begin{Vmatrix} g & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 1 & g & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 2 & g & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 3 & g & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Indicando con E l'operatore $U-g$, si ha $E(\omega_n)=n\omega_{n-1}$, e quindi

$$E(c_0\omega_0+c_1\omega_1+\ldots+c_n\omega_n+\ldots)=c_1\omega_0+2c_2\omega_1+\ldots+nc_n\omega_{n-1}+\ldots$$

ed

$$E^{-1}(c_0\omega_0+c_1\omega_1+\ldots+c_n\omega_n+\ldots)=\bar{c}\omega_0+c_0\omega_1+c_1\frac{\omega_2}{2}+\ldots+c_n\frac{\omega_{n+1}}{n+1}+\ldots$$

dove $\bar{c}$ è arbitraria. L'analogia colle regole di derivazione e di integrazione delle serie di potenze è manifesta.

§ III.

30. Non è priva d'interesse l'espressione dello scarto di un operatore A rispetto alle potenze dell'operatore principale F. Essendo

$$A''=A'F-FA'=AF^2-2FAF+F^2A$$

si ha, sommando con $2FA'=2FAF-2F^2A$,

$$AF^2-F^2A=2FA'+A''.$$

Analogamente, si trova

$$AF^3-F^3A=3F^2A'+3FA''+A'''.$$

Ammettendo che la regola che appare da questi primi casi sia stata verificata fino alla potenza m^{sima} di F, che si abbia cioè

$$(16)\qquad AF^{m-1}-F^{m-1}A=(m-1)F^{m-2}A'+\binom{m-1}{2}F^{m-3}A''+\ldots+A^{(m-1)},$$

si vede che la regola stessa vale per la potenza m^{sima}. Infatti, formando lo scarto nei due membri della precedente secondo il n.° 17, viene

$$(17)\qquad AF^m-FAF^{m-1}-F^{m-1}A'=(m-1)F^{m-2}A''+\binom{m-1}{2}F^{m-3}A'''+\ldots+A^{(m)};$$

moltiplicando ora la (16) a sinistra per F, è

$$FAF^{m-1}=F^mA+(m-1)F^{m-1}A'+\binom{m-1}{2}F^{m-2}A''+\ldots+FA^{(m-1)};$$

sostituendo in (17) e riducendo, si ha infine

$$(18) \qquad AF^m = F^m A + mF^{m-1}A' + \binom{m}{2} F^{m-2}A'' + \dots + mFA^{(m-1)} + A^{(m)};$$

la formula vale dunque per ogni potenza intera positiva di F.

31. Il secondo membro della (18) può scriversi simbolicamente

$$(F + A)^{(m)},$$

dove s'intenda che va fatto lo sviluppo colla regola del binomio, attribuendo ad F gli esponenti e sostituendo per A gli esponenti cogli indici corrispondenti di scarti successivi: con ciò, il primo termine sarebbe $F^m A^{(0)}$, ed è ovvio che $A^{(0)}$ coincide con A.

32. Dando nella (18) all'esponente m successivamente i valori 0, 1, 2,..., si hanno le uguaglianze

$$A = A, \quad AF = FA + A', \quad AF^2 = F^2A + 2FA' + A'', \dots,$$
$$AF^m = F^m A + mF^{m-1}A' + \dots + A^{(m)}.$$

Moltiplicando rispettivamente per i termini a_0, a_1, a_2,... di una successione arbitraria e sommando, si ottiene, denotando con P l'operatore permutabile con F

$$P = a_0 + a_1F + a_2F^2 + \dots,$$

lo sviluppo

$$(19) \quad AP = \Sigma_n \frac{1}{n!}[1\cdot 2\cdot 3\dots na_n + 2\cdot 3\dots(n+1)a_{n+1}F + 3\cdot 4\dots(n+2)a_{n+2}F^2 + \dots]A^{(n)}.$$

Qui si vede che il coefficiente di $\frac{1}{n!}A^{(n)}$ è ottenuto applicando a P la regola di derivazione ordinaria, trattando F come se fosse una variabile indipendente. Questa analogia si può rendere più manifesta indicando con $\frac{d^nP}{dF^n}$ l'espressione chiusa nella parentesi quadra; in tal modo la formula (19) viene scritta sotto la forma

$$(20) \qquad AP = PA + \frac{dP}{dF}A' + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{dF^2}A'' + \dots + \frac{1}{n!}\frac{d^nP}{dF^n}A^{(n)} + \dots,$$

che richiama nel modo più palese il classico sviluppo di TAYLOR.

33. Come si è già avvertito, si astrae per ora dalle considerazioni di convergenza, che richiederebbero anzitutto una specificazione dello spazio S; lo sviluppo precedente, se ad infiniti termini, non ha dunque fino ad ora che un significato formale. Il significato è però effettivo se A è permutabile d'ordine finito con F, poichè in tale caso le $A^{(n)}$ sono nulle da un indice n in avanti. ed anche se il permutabile P si riduce ad un polinomio in F, nel quale caso le $\frac{d^nP}{dF^n}$ sono nulle da un indice n in avanti.

CAP. III. - **Un operatore elementare.**

§ I.

34. Nello spazio S, la cui base è costituita (n.° 2) dagli elementi ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$, verrà considerato l'operatore, che si dirà *elementare*, definito da

$$M(\varepsilon_0) = \varepsilon_1, \quad M(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \ldots, \quad M(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1}, \ldots. \tag{1}$$

Come si vede, esso coincide coll'operatore fondamentale, $\theta = \Delta + 1$, del calcolo delle differenze finite. La potenza m^{sima} di M è definita da

$$M^m(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+m}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

La matrice di M è data da

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}. \tag{2'}$$

La M non è degenere di prima specie (n.° 11), perchè, essendo $\alpha = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \ldots$ un elemento di S, la $M(\alpha) = 0$ non può verificarsi se non è $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = 0$. È invece degenere di seconda specie, poichè fa corrispondere allo spazio S la parte aliquota di S avente per base ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$.

35. Sia dato in S un operatore A, definito da

$$A(\varepsilon_n) = a_{n0}\varepsilon_0 + a_{n1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{n\nu}\varepsilon_\nu + \ldots.$$

Il suo scarto $A' = AM - MA$ rispetto ad M darà

$$A'(\varepsilon_0) = a_{10}\varepsilon_0 + (a_{11} - a_{00})\varepsilon_1 + (a_{12} - a_{01})\varepsilon_2 + \ldots + (a_{1.n} - a_{0.n-1})\varepsilon_n + \ldots$$
$$A'(\varepsilon_1) = a_{20}\varepsilon_0 + (a_{21} - a_{10})\varepsilon_1 + (a_{22} - a_{11})\varepsilon_2 + \ldots + (a_{2.n} - a_{1.n-1})\varepsilon_n + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A'(\varepsilon_n) = a_{m+1.0}\varepsilon_0 + (a_{m+1.1} - a_{m.0})\varepsilon_1 + (a_{m+1.2} - a_{m.1})\varepsilon_2 + \ldots + (a_{m+1.n} - a_{m.n-1})\varepsilon_n + \ldots,$$

per modo che la matrice di A' è data da

$$\| a'_{m.n} \| = \| a_{m+1.n} - a_{m.n-1} \|. \tag{3}$$

S'intende che le $a_{m.n}$ col secondo indice negativo vanno sostituite collo zero.

36. La forma della matrice di A' permette di ottenere subito gli operatori permutabili con M, che indicheremo ancora colla lettera P, affetta o no da indici. Per questi è $A' = 0$ e, per conseguenza, le $a_{m.n}$ dovranno soddisfare per ogni coppia di indici alla condizione

$$(4) \qquad a_{m+1.n} - a_{m.n-1} = 0.$$

Dalla (4) si vede che $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, \ldots$ possono essere assunti arbitrariamente, mentre è

$$a_{m.n} = 0 \text{ per } m > n, \quad a_{nn} = a_{00}, \quad a_{m.n} = a_{0,n-m} \text{ per } m < n,$$

donde risulta per la matrice di A' la forma

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|.$$

Ora questa è decomponibile nella somma

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| + \left| \begin{matrix} 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right| + \ldots,$$

i cui singoli termini rappresentano manifestamente gli operatori

$$a_0 1, \quad a_1 M, \quad a_2 M^2, \ldots.$$

Si è così dimostrato che « ogni operatore P permutabile con M è formalmente rappresentabile nella forma

$$(6) \qquad P = a_0 + a_1 M + a_2 M^2 + \ldots \text{ ».}$$

37. Il risultato ottenuto al n.° 35 permette anche di risolvere la seguente questione: « dato un operatore

$$B = \| b_{m.n} \|,$$

trovare un secondo operatore A di cui B sia lo scarto rispetto ad M ».

L'operatore A è determinato all'infuori di un P arbitrario. Questo si può scegliere in modo che $A(\varepsilon_0)$ risulti nullo, e quindi indicando con $\| a_{m.n} \|$ la matrice di A, si può fare

$$a_{00} = a_{01} = a_{02} = \ldots = 0.$$

Per la seconda linea, si ha, in forza della (3),

$$b_{0n} = a_{1n} - a_{0.n-1},$$

e, per essere $a_{0.n-1}=0$, viene $a_{1.n}=b_{0.n}$. Per la terza riga, si avrà da (3)

$$a_{2n}=b_{1.n}+a_{1.n-1}=b_{1.n}+b_{0.n-1}$$

ed in generale, formata la matrice A fino alla $m-1^{sima}$ riga, la m^{sima} riga sarà data dagli elementi di ugual posto nella $m-1^{sima}$ riga della matrice B, aumentati dagli elementi arretrati di un posto della $m-1^{sima}$ riga (già costruita) della matrice A stessa. Si ottiene così lo specchio

$$(7) \qquad A=\left\|\begin{array}{lllll} 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{10} & b_{11}+b_{00} & b_{12}+b_{01} & b_{13}+b_{02} \ldots\ldots\ldots \\ b_{20} & b_{21}+b_{10} & b_{22}+b_{11}+b_{00} & b_{23}+b_{12}+b_{01} \ldots\ldots \\ b_{30} & b_{31}+b_{20} & b_{32}+b_{21}+b_{10} & b_{33}+b_{22}+b_{11}+b_{00} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\|.$$

§ II.

38. Al n.° 25 si è considerato un operatore U il cui scarto con un operatore fisso F era l'unità; U veniva determinato all'infuori di un operatore additivo permutabile con F. Assumendo M come operatore fisso, l'operatore U è definito da

$$(8) \qquad U' = UM - MU = 1\,;$$

se $a_{m.n}$ è l'elemento generico della matrice di U, l'elemento $a'_{m.n}$ della U' sarà. in virtù della (3), dato da $a'_{m.n}=a_{m+1.n}-a_{m.n-1}$, e per essere $U'=1$, verrà

$$a'_{m.n}=0 \text{ per } m \neq n, \quad a'_{m.m}=1.$$

Essendo così conosciuto lo scarto di U, la determinazione di U si riconduce al problema del n.° 37, dove ora si ha $b_{m.n}=a'_{m.n}$. Giovandosi della matrice (7), in cui il P additivo arbitrario resta determinato facendo nulli tutti gli elementi della prima linea della matrice, si ottiene

$$U=\left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\|,$$

equivalente a

$$(9) \qquad U(\varepsilon_n) = n\varepsilon_{n-1}\,;$$

e, conservando la lettera U per questo operatore, che si dirà *associato* di M, la soluzione generale della (8) sarà data da $U+P$, essendo P arbitrario.

39. L'operatore U, ammettendo la radice ε_0, è degenere di prima specie (n.° 11), mentre M lo è di seconda. Le potenze di U soddisfano alle relazioni

$$(9') \qquad U^2(\varepsilon_n) = n(n-1)\varepsilon_{n-2}, \dots \quad U^m(\varepsilon_n) = n(n-1)\dots(n-m+1)\varepsilon_{n-m} ;$$

U^m ammette le radici $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$. Essendo sempre m un numero intero positivo, la potenza di U di esponente $-m$ dà, applicata ad ε_n,

$$(10) \quad U^{-m}(\varepsilon_n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\varepsilon_{n+m} + a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_{m-1}\varepsilon_{m-1},$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ sono costanti arbitrarie.

40. Al n.° 27, prendendo in esame l'operatore U associato ad un operatore generico F, si sono tratte alcune conseguenze ammettendo per U l'esistenza di un elemento invariante (autoelemento). Per l'operatore U considerato nel presente paragrafo, cioè associato ad M, un simile elemento invariante può essere costruito nel seguente modo. Se un elemento

$$\omega_k = a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n + \dots$$

di S deve essere invariante per U, deve essere

$$(11) \qquad U(\omega_k) = k\omega_k,$$

ossia

$$a_1\varepsilon_0 + 2a_2\varepsilon_1 + 3a_3\varepsilon_2 + \dots + na_n\varepsilon_{n-1} + \dots = k(a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n + \dots);$$

si deve quindi avere

$$a_1 = ka_0, \quad 2a_2 = ka_1, \dots \quad na_n = ka_{n-1}, \dots,$$

da cui

$$a_n = a_0 \frac{k^n}{n!}.$$

L'elemento ω_k esiste dunque formalmente per ogni valore di k, il che è quanto dire che U ammette come *spettro* l'insieme di tutti i numeri reali o complessi; esisterà effettivamente sotto opportune condizioni di convergenza, che si specificheranno nelle varie determinazioni dello spazio S. La sua espressione è

$$(12) \qquad \omega_k = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}\varepsilon_n .$$

41. Essendo $\alpha = \Sigma\, a_n\varepsilon_n$ un elemento dato in S, ed η un elemento da determinarsi, l'equazione

$$(13) \qquad U(\eta) - k\eta = \alpha$$

(della forma dell'equazione di FREDHOLM di seconda specie) si può risolvere facilmente; posto infatti

$$\eta = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n + \dots,$$

si deduce dalla (13)

$$c_1 - kc_0 = a_0,\quad 2c_2 - kc_1 = a_1, \dots,\quad nc_n - kc_{n-1} = a_{n-1}, \dots.$$

In questo sistema, la c_0 è arbitraria; si ricava poi

$$c_1 = a_0 + kc_0,\quad c_2 = \frac{k^2}{2}\left(c_0 + \frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k^2}\right),\quad c_3 = \frac{k^3}{3!}\left(c_0 + \frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k^2} + \frac{2a_2}{k^3}\right), \dots.$$

Da queste. viene presunta per c_n l'espressione

$$(14)\qquad c_n = \frac{k^n}{n!}\left(c_0 + \frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k^2} + \frac{2a_2}{k^3} + \dots + \frac{(n-1)!\, a_{n-1}}{k^n}\right),$$

che si dimostra senza difficoltà col solito metodo dell'induzione completa. La soluzione della (13) è dunque formalmente data da

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}\left(c_0 + \frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k^2} + \dots + \frac{(n-1)!\, a_{n-1}}{k^n}\right)\varepsilon_n$$

che (n.° 40) si può scrivere

$$(14')\qquad \eta = c_0\omega_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + 2a_2k^{n-3} + \dots + (n-1)!\, a_{n-1}\right)\varepsilon_n,$$

dove la prima parte è la soluzione ω_k trovata per l'equazione

$$(11)\qquad U(\varphi) = k\varphi;$$

onde si conclude che la soluzione generale della (13) è data dalla sommatoria $\Sigma \frac{1}{n!}(a_0k^{n-1} + \dots + (n-1)!\, a_{n-1})\varepsilon_n$, aumentata, per l'arbitrarietà di c_0, di una soluzione arbitraria della (11).

42. Trovata la soluzione della (11) nella forma (12), si noti che ne viene

$$M(\omega_k) = a_0\left(\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + \frac{k^2}{2!}\varepsilon_3 + \dots + \frac{k^n}{n!}\varepsilon_{n+1} + \dots\right);$$

ora questa non è altro che la derivata ordinaria di ω_k rispetto a k; si potrà dunque scrivere

$$(15)\qquad M(\omega_k) = \frac{d\omega_k}{dk} \quad \text{e così} \quad M^r(\omega_k) = \frac{d^r\omega_k}{dk^r}.$$

È da notare che mentre la M, operando su ω_k, coincide colla derivazione rispetto a k, la M diviene la derivazione rispetto ad x se si riguardano le ε_n come le potenze successive di una variabile x.

§ III.

43. Detta ω la soluzione (astraendo da un moltiplicatore numerico arbitrario) dell'equazione (11), si è visto che è $M(\omega) = \frac{d\omega}{dk}$, che si indicherà con ω'. Per la definizione della U, cioè per la (8), sarà

$$UM(\omega) - MU(\omega) = \omega$$

onde

$$U(\omega') - k\omega' = \omega.$$

Analogamente, posto $M^2(\omega') = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \omega''$, si avrà

$$U(\omega'') - k\omega'' = 2\omega',$$

ed in generale, essendo $\omega^{(n)} = M^n(\omega) = \frac{d^n\omega}{dk^n}$,

$$U(\omega^{(n)}) - k\omega^{(n)} = n\omega^{(n-1)}. \tag{16}$$

Da questa segue che

$$(U - k)^r(\omega^{(n)}) = n(n-1)\ldots(n-r+1)\omega^{(n-r)} \tag{17}$$

e, se è $r > n$, la $\omega^{(n)}$ sarà radice di $(U-k)^r$.

44. Sia

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

un polinomio in z. Sostituendo alla variabile z il simbolo operatorio U, si ottiene un operatore che verrà indicato con $f(U)$. Ogni invariante di U lo è di $f(U)$, poichè dalla (11) segue $U^2(\omega_k) = k^2\omega_k, \ldots, U^n(\omega_k) = k^n\omega_k$, onde

$$f(U)(\omega_k) = f(k)\omega_k\,; \tag{18}$$

$f(k)$ è l'autovalore di $f(U)$ corrispondente ad ω_k.

45. Da quanto precede risulta che se è data una equazione nell'elemento incognito φ,

$$f(U)(\varphi) = 0, \tag{19}$$

saranno sue soluzioni gli elementi invarianti di U corrispondenti alle radici dell'equazione algebrica $f(z) = 0$, caratteristica dell'equazione (19). Si supponga dapprima che questa ammetta sole radici semplici, $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Ad ognuna di queste corrisponderà un elemento ω_{k_i}, che sarà soluzione di $U(\omega_{k_i}) - k_i\omega_{k_i} = 0$, e quindi radice dell'operatore $f(U)$. Si hanno così n elementi $\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_n}$ di S che sono soluzioni della (19), insieme a tutte le loro combinazioni lineari a coefficienti costanti. Le soluzioni $\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_n}$ sono linearmente indipendenti; se infatti fosse

$$c_1\omega_{k_1} + c_2\omega_{k_2} + \dots + c_n\omega_{k_n} = 0,$$

applicando a questa relazione successivamente le $U, U^2, \dots, U^{n-1}$ verrebbe

$$c_1 k_1{}^r \omega_{k_1} + c_2 k_2{}^r \omega_{k_2} + \dots + c_n k_n{}^r \omega_{k_n} = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n-1):$$

sarebbe quindi zero il determinante di VANDERMONDE relativo alle $k_1, k_2, \dots, k_n$, contro l'ipotesi che esse siano tutte distinte.

Considerando ora il caso in cui le radici di $f(k)$ non siano tutte distinte, sia k_1 radice multipla dell'ordine r di multiplicità. In tale caso, l'espressione $f(U)$ contiene il fattore $U - k_1$ alla potenza r^{sima} e non a potenza superiore; segue allora dal n.° 43 che le $\omega'_{k_1} = \dfrac{d\omega_{k_1}}{dk_1}, \dots, \omega_{k_1}^{(r-1)} = \dfrac{d^{r-1}\omega_{k_1}}{dk_1{}^{r-1}}$ sono radici di $(U - k_1)^r$. Pertanto, alla radice k_1, r^{upla} dell'equazione caratteristica $f(k) = 0$, corrispondono le r radici $\omega_{k_1}, \omega'_{k_1}, \omega''_{k_1}, \dots \omega_{k_1}^{(r-1)}$ dell'operatore $f(U)$. Fra queste non può esservi una relazione lineare

$$c_0\omega_{k_1} + c_1\omega'_{k_1} + \dots + c_{r-1}\omega_{k_1}^{(r-1)} = 0,$$

poichè, applicando a questa la $U - k$ successivamente, spariscono via via dalla relazione la ω_{k_1}, la ω'_{k_1}, ecc., donde risulta che devono essere zero tutte le $c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$.

Si può così formare lo specchio delle radici di $f(U)$; essendo nel caso generale $k_1, k_2, \dots, k_s$ le radici dell'equazione caratteristica, degli ordini rispettivi di multiplicità $r_1, r_2, \dots, r_s$, saranno radici di $f(U)$ le

$$(20) \qquad \omega_{k_i}, \ \omega'_{k_i}, \dots, \ \omega_{k_i}^{(r_i-1)} \qquad (i = 1, 2, \dots, s;\ r_1 + r_2 + \dots + r_s = n)$$

e le loro combinazioni lineari, potendosi facilmente dimostrare, con metodi usuali, la loro indipendenza lineare e il fatto che ogni radice di $f(U)$ deve essere una combinazione lineare delle (20).

§ IV.

46. La considerazione in S degli operatori R permutabili con U, dà luogo ad una osservazione che non è priva d'interesse. Dall'essere

$$(21) \qquad UR = RU,$$

e ponendo $R(\varepsilon_n) = \alpha_n$, si avrà, tenuto conto della (9),

$$UR(\varepsilon_n) = U(\alpha_n) = RU(\varepsilon_n) = nR(\varepsilon_{n-1}) = n\alpha_{n-1}.$$

La R trasforma dunque la base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ di S in un sistema di elementi α_n, legati dalla relazione

$$U(\alpha_n) = n\alpha_{n-1} \tag{22}$$

del tutto analoga alla (9). Questa relazione viene a generalizzare quella ben nota che lega gli elementi di un sistema di polinomi di APPELL, ai quali gli α_n si riconducono nel caso particolare accennato alla fine del n.° 42.

47. Dalla formula ricorrente (22) si deduce facilmente la forma degli elementi $\alpha_n = R(\varepsilon_n)$. Ponendo infatti

$$\alpha_n = c_{n0}\varepsilon_0 + c_{n1}\varepsilon_1 + c_{n2}\varepsilon_2 + \ldots,$$

da $UR(\varepsilon_0) = RU(\varepsilon_0) = 0$, onde $R(\varepsilon_0) = c\varepsilon_0$, si dedurrà che le c_{0n} sono tutte nulle ad eccezione di c_{00}, che indicheremo con c_0. Venendo ad α_1, si avrà

$$U(\alpha_1) = U(c_{10}\varepsilon_0 + c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + \ldots) = c_{11}\varepsilon_0 + 2c_{12}\varepsilon_1 + 3c_{13}\varepsilon_2 + \ldots = \alpha_0 = c_0\varepsilon_0,$$

onde risulta che c_{10} è arbitrario e verrà indicato con c_1, mentre è $c_{11} = c_0$ e le $c_{12}, c_{13}, \ldots$ sono nulle, talchè si ha

$$\alpha_1 = c_1\varepsilon_0 + c_0\varepsilon_1;$$

per α_2, sarà

$$U(\alpha_2) = U(c_{20}\varepsilon_0 + c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + \ldots) = c_{21}\varepsilon_0 + 2c_{22}\varepsilon_1 + 3c_{23}\varepsilon_2 + \ldots = 2\alpha_1 = 2c_1\varepsilon_0 + 2c_0\varepsilon_1,$$

da cui c_{20} è arbitrario e si indicherà con c_2, $c_{21} = 2c_1$, $c_{22} = c_0$, $c_{23} = c_{24} = \ldots = 0$, onde

$$\alpha_2 = c_2\varepsilon_0 + 2c_1\varepsilon_1 + c_0\varepsilon_2.$$

Si presume così per α_n la forma

$$\alpha_n = c_0\varepsilon_n + nc_1\varepsilon_{n-1} + \binom{n}{2}c_2\varepsilon_{n-2} + \ldots + nc_{n-1}\varepsilon_1 + c_n\varepsilon_0: \tag{23}$$

ed invero si ha

$$U(\alpha_n) = nc_0\varepsilon_{n-1} + n(n-1)c_1\varepsilon_{n-2} + \ldots + nc_{n-1}\varepsilon_0 = n\alpha_{n-1};$$

dunque effettivamente viene verificata la (22).

48. Dalla forma (23) ottenuta per la α_n, si deduce facilmente l'espressione delle R in funzione della U. È evidente che ogni serie di potenze di U, a coefficienti costanti, rappresenta un operatore permutabile con U; ora, l'espressione data dalla (23) per le α_n permette di dimostrare la reciproca. Posto infatti lo sviluppo

$$c_0 + c_1 U + \frac{c_2}{1 \cdot 2} U^2 + \ldots + \frac{c_n}{n!} U^n + \ldots, \tag{24}$$

questo, applicato come operatore ad ε_n, dà

$$c_0\varepsilon_n + nc_1\varepsilon_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}c_2\varepsilon_{n-2} + \dots + c_n\varepsilon_0,$$

cioè precisamente l'espressione trovata per la α_n.

Cap. IV. - Gli operatori normali.

§ I.

49. Un operatore lineare definito dalle relazioni

$$L(\varepsilon_n) = a_n\varepsilon_n \tag{1}$$

si dirà una *dilatazione* in S. Le $(a_n) = a_0, a_1, a_2, \dots$ costituiscono una successione, che si dirà la *caratteristica* di L; la dilatazione L è data quando ne sia data la caratteristica. Per indicare le dilatazioni, useremo di norma la maiuscola L affetta o no da indici, e, volendo porre in evidenza la caratteristica, si scriverà $L_{(a_n)}$.

50. Essendo

$$L_{(a_n)}(\varepsilon_n) = a_n\varepsilon_n, \quad L_{(b_n)}(\varepsilon_n) = b_n\varepsilon_n,$$

ne risulterà

$$(L_{(a_n)} + L_{(b_n)})(\varepsilon_n) = (a_n + b_n)\varepsilon_n;$$

si può dunque scrivere

$$L_{(a_n)} + L_{(b_n)} = L_{(a_n+b_n)}. \tag{2}$$

Parimente risulta

$$L_{(a_n)}L_{(b_n)}(\varepsilon_n) = a_nb_n\varepsilon_n,$$

che si può scrivere

$$L_{(a_n)}L_{(b_n)} = L_{(a_nb_n)}. \tag{3}$$

Per le L valgono dunque l'addizione e la moltiplicazione colle loro leggi formali; se dunque $f(x, y, z, \dots)$ è simbolo di funzione razionale intera delle variabili $x, y, z, \dots$, si potrà scrivere

$$f(L_{(a_n)}, L_{(b_n)}, L_{(c_n)}, \dots) = L_{f(a_n, b_n, c_n, \dots)}. \tag{4}$$

L'insieme delle L costituisce un gruppo permutabile, cui appartiene l'identità.

51. Se tutte le a_n sono diverse da zero, la $L_{(a_n)}$ è non degenere e ammette l'inversa $L_{\left(\frac{1}{a_n}\right)}$.

Se uno o più dei numeri della successione (a_n) sono nulli, la $L_{(a_n)}$ ammette le corrispondenti ε_n come radici e trasforma lo spazio S nella parte di questo determinata dalle ε_n rimanenti: essa possiede così la degenerescenza dell'una e dell'altra specie (n.° 11). Quando le $L_{(a_n)}$, $L_{(b_n)}, \ldots$ non sono degeneri, la relazione (4) vale per qualunque funzione razionale $f(x, y, \ldots)$, intera o fratta.

52. Data la dilatazione $L_{(a_n)}$, si ha

$$ML_{(a_n)}(\varepsilon_n) = a_n\varepsilon_{n+1}, \quad L_{(a_n)}M(\varepsilon_n) = a_{n+1}\varepsilon_{n+1}.$$

Dunque, se $L_{(a_{n+1})}$ è la dilatazione di caratteristica $(a_{n+1}) = a_1, a_2, a_3, \ldots$,

$$L_{(a_n)}M = ML_{(a_{n+1})}. \tag{5}$$

Analogamente,

$$L_{(a_n)}M^2 = ML_{(a_{n+1})}M;$$

ma, per la (5),

$$L_{(a_{n+1})}M = ML_{(a_{n+2})},$$

onde

$$L_{(a_n)}M^2 = M^2L_{(a_{n+2})},$$

ed in generale si trova che

$$L_{(a_n)}M^r = M^rL_{(a_{n+r})}. \tag{6}$$

53. Risulta dalla formula precedente che ogni prodotto operativo della forma

$$M^{r_1}L_{(a_n)}M^{r_2}L_{(b_n)}M^{r_3}L_{(c_n)}\ldots M^{r_{p-1}}L_{(h_n)}M^{r_p} \tag{7}$$

può riportarsi al semplice prodotto di una L moltiplicata (a sinistra) per una potenza di M. Basterà mostrare che così è per un prodotto $M^{r_1}L_{(a_n)}M^{r_2}L_{(b_n)}M^{r_3}$, il procedimento essendo il medesimo per un prodotto (7) qualsiasi. Si ha dapprima, per la (6),

$$M^{r_1}L_{(a_n)}M^{r_2}L_{(b_n)}M^{r_3} = M^{(r_1)}L_{(a_n)}M^{r_2+r_3}L_{(b_{n+r_3})};$$

indi, essendo ancora per la (6) $L_{(a_n)}M^{r_2+r_3} = M^{r_2+r_3}L_{(a_{n+r_2+r_3})}$, viene

$$M^{r_1}L_{(a_n)}M^{r_2}L_{(b_n)}M^{r_3} = M^{r_1+r_2+r_3}L_{(a_{n+r_2+r_3})}L_{(b_{n+r_3})}.$$

Si vede dunque che il prodotto (7) è ridotto alla forma semplice $M^pL_{(g_n)}$, dove l'esponente p è la somma $r_1+r_2+r_3+\ldots$ degli esponenti singoli delle M in (7), e la caratteristica (g_n) ha per elemento generico il prodotto

$$g_n = a_{n+r_2+r_3+\ldots+r_p}\, b_{n+r_3+r_4+\ldots+r_p}\, c_{n+r_4+\ldots+r_p}\ldots h_{n+r_p}.$$

§ II.

54. Diremo *operatori normali* in S quelli ivi definiti dalle relazioni

(8) $$A(\varepsilon_n) = a_{n.n}\varepsilon_n + a_{n.n+1}\varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n.n+r}\varepsilon_{n+r} + \dots;$$

nella matrice di un tale operatore sono dunque nulli tutti gli elementi posti a sinistra della diagonale principale. Se i coefficienti $a_{n.\nu}$ sono tutti nulli per $\nu > n + r$, essendo le $a_{n.n+r}$ generalmente diverse da zero, l'operatore normale si dirà rango r; si dirà di rango infinito se il numero dei termini che effettivamente compaiono nel secondo membro delle (8) è infinito.

Se il rango di A è r, sono nulle nella matrice di A, tutte le oblique parallele e a destra della diagonale principale, da quella di posto $r+1$ in avanti.

Le dilatazioni sono gli operatori normali di rango zero.

55. La relazione (8) può scriversi, nel caso del rango r:

(9) $$A(\varepsilon_n) = (a_{n.n} + a_{n.n+1}M + a_{n.n+2}M^2 + \dots + a_{n.n+r}M^r)\varepsilon_n.$$

Si osservino ora le successioni

$$a_{0.0},\ a_{1.1},\ a_{2.2}, \dots;\quad a_{0.1},\ a_{1.2},\ a_{2.3}, \dots;\quad \dots;\quad a_{0.r},\ a_{1.r+1},\ a_{2.r+2}, \dots$$

costituite dalla diagonale principale della matrice di A e dalle oblique di posto 1, 2,... r, ad essa parallele a destra. A queste successioni corrispondono le dilatazioni $L_0, L_1, \dots, L_r$, definite da

$$L_0(\varepsilon_n) = a_{n.n}\varepsilon_n,\quad L_1(\varepsilon_n) = a_{n.n+1}\varepsilon_n, \dots,\quad L_r(\varepsilon_n) = a_{n.n+r}\varepsilon_n,$$

onde la (9) fornisce:

(10) $$A = L_0 + ML_1 + M^2L_2 + \dots + M^rL_r.$$

« Ogni operatore normale di rango r può dunque essere posto sotto la « forma (10) e, reciprocamente, ogni espressione (10) rappresenta un operatore « normale di rango r ».

56. Accanto all'operatore A dato dalla (10), si consideri l'operatore di forma analoga

$$B = L_s + ML_{s+1} + \dots + M^tL_{s+t}.$$

Eseguendo il prodotto AB, si vede che esso è una somma di termini della forma

$$M^hL_kM^pL_q;$$

ora, come risulta dal n.° 53, un tale prodotto può ricondursi alla forma semplice M^nL_s. Ne segue che il prodotto (generalmente non permutabile) di due operatori della forma (10) è un operatore della medesima forma, e se r e t sono i rispettivi ranghi di A e B, il rango di AB è al più $r+t$. Gli operatori normali formano dunque un gruppo.

§ III.

57. Un operatore normale di rango uno è definito da relazioni della forma

$$A(\varepsilon_n) = a_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_{n+1}\,; \tag{11}$$

le a_n e b_n si supporranno tutte *diverse da zero.* Per il n.° 55, esso può scriversi

$$A = L_{(a_n)} - ML_{(b_n)}.$$

Ora vedremo come un tale operatore si possa porre sotto la forma

$$A = L_{(p_n)}(1-M)L_{(q_n)}, \tag{12}$$

dove le caratteristiche delle dilatazioni $L_{(p_n)}$ ed $L_{(q_n)}$ si possono dedurre facilmente dalle (a_n) e (b_n). Infatti, la (12) equivale a

$$A = L_{(p_n)}L_{(q_n)} - L_{(p_n)}ML_{(q_n)}\,;$$

ma per le (3), (5) si ha

$$L_{(p_n)}L_{(q_n)} = L_{(p_nq_n)}, \quad L_{(p_n)}M = ML_{(p_{n+1})},$$

e quindi

$$A = L_{(p_nq_n)} - ML_{(p_{n+1}q_n)},$$

onde deve essere

$$p_nq_n = a_n, \quad p_{n+1}q_n = b_n,$$

dalle quali si ricava

$$p_n = \frac{b_0b_1\dots b_{n-1}}{a_0a_1\dots a_{n-1}}, \quad q_n = \frac{a_0a_1\dots a_{n-1}a_n}{b_0b_1\dots b_{n-1}}. \tag{13}$$

La forma (12) è così pienamente determinata.

58. L'operatore A, definito dalle (11), ammette come numeri invarianti od autovalori (costituenti lo spettro di A) quelli fra i numeri $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ che nella successione non si trovano ripetuti infinite volte. Sia infatti η un elemento invariante (n.° 27) di A; posto $A(\eta) = k\eta$, essendo

$$\eta = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n + \dots$$

dovrà essere

$$c_0(a_0\varepsilon_0 - b_0\varepsilon_1) + c_1(a_1\varepsilon_1 - b_1\varepsilon_2) + \dots + c_n(a_n\varepsilon_n - b_n\varepsilon_{n+1}) + \dots =$$
$$= k(c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n + \dots),$$

da cui

$$c_0(a_0-k) = 0, \quad c_1(a_1-k) - c_0b_0 = 0, \dots, \quad c_n(a_n-k) - c_{n-1}b_{n-1} = 0, \dots. \tag{14}$$

Supponendo dapprima $c_0 \neq 0$, si ha $k = a_0$ e quindi (nell'ipotesi che la a_0 sia diversa da tutte le altre a)

$$c_1 = \frac{c_0 b_0}{a_1 - a_0}, \quad c_2 = \frac{c_0 b_0 b_1}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)}, \ldots, \quad c_n = \frac{c_0 b_0 b_1 \ldots b_{n-1}}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0) \ldots (a_n - a_0)}, \ldots,$$

onde un primo elemento invariante di A è dato da

$$(15) \qquad \eta_0 = c_0 \left(\varepsilon_0 + \frac{b_0}{a_1 - a_0} \varepsilon_1 + \frac{b_0 b_1}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)} \varepsilon_2 + \frac{b_0 b_1 b_2}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_3 - a_0)} \varepsilon_3 + \ldots \right);$$

facendo invece $c_0 = c_1 = \ldots = c_{r-1} = 0$ e c_r differente da zero, si ha $k = a_r$ e quindi (nell'ipotesi che la a_r sia diversa da tutte le a di indice maggiore di r)

$$c_{r+1} = \frac{c_r b_r}{a_{r+1} - a_r}, \quad c_{r+2} = \frac{c_r b_r b_{r+1}}{(a_{r+1} - a_r)(a_{r+2} - a_r)}, \ldots, \quad c_n = \frac{c_r b_r b_{r+1} \ldots b_{n-1}}{(a_{r+1} - a_r)(a_{r+2} - a_r) \ldots (a_n - a_r)},$$

per cui si hanno gli elementi invarianti

$$(16) \qquad \eta_r = c_r \left(\varepsilon_r + \frac{b_r}{a_{r+1} - a_r} \varepsilon_{r+1} + \frac{b_r b_{r+1}}{(a_{r+1} - a_r)(a_{r+2} - a_r)} \varepsilon_{r+2} + \ldots \right).$$

Il moltiplicatore c_0 nella (15) e i moltiplicatori c_r nelle (16) sono arbitrari.

§ IV.

59. Una forma di scomposizione analoga a quella data al n.° 57 per l'operatore di rango uno si può dare per un operatore normale di rango finito qualsiasi. Sia F un operatore di rango r, definito dalle

$$(8') \qquad F(\varepsilon_n) = a_{n.n} \varepsilon_n + a_{n.n+1} \varepsilon_{n+1} + \ldots + a_{n.n+r} \varepsilon_{n+r}.$$

È possibile di decomporre F nella forma

$$(17) \qquad F = G(1 - M)L$$

dove G è un operatore normale di rango $r - 1$, ed L è una dilatazione di cui si indichi con $\left(\frac{1}{h_n}\right)$ la caratteristica; G ed L si determinano nel modo seguente. Si ponga

$$G(\varepsilon_n) = g_{n.n} \varepsilon_n + g_{n.n+1} \varepsilon_{n+1} + \ldots + g_{n.n+r-1} \varepsilon_{n+r-1}, \quad L(\varepsilon_n) = \frac{1}{h_r} \varepsilon_n;$$

sostituendo in (17) viene

$$F(\varepsilon_n) = \frac{1}{h_n} [g_{n.n} \varepsilon_n + (g_{n.n+1} - g_{n+1.n+1}) \varepsilon_{n+1} + (g_{n.n+2} - g_{n+1.n+2}) \varepsilon_{n+2} + \ldots$$
$$\ldots + (g_{n.n+r-1} - g_{n+1.n+r-1}) \varepsilon_{n+r-1} - g_{n+1.n+r} \varepsilon_{n+r}].$$

e da questa, per uguaglianza colla (8'), si ottiene il sistema

$$(18)\qquad \begin{cases} g_{n.n} = h_n a_{n.n} \\ g_{n.n+1} - g_{n+1.n+1} = h_n a_{n.n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_{n.n+r-1} - g_{n+1.n+r-1} = h_n a_{n.n+r-1} \\ - g_{n+1.n+r} = h_n a_{n.n+r} . \end{cases}$$

Cambiando n in $n+1$ nella penultima di queste equazioni, in $n+2$ nella antepenultima,..., in $n+r$ nella prima e sommando, le $g_{n.s}$ si eliminano ottenendosi l'equazione alle differenze in h_n:

$$(19)\qquad a_{n+r.n+r} h_{n+r} + a_{n+r-1.n+r} h_{n+r-1} + \dots + a_{n+1.n+r} h_{n+1} + a_{n.n+r} h_n = 0.$$

Questa equazione ha come coefficienti gli elementi della $n+r^{sima}$ colonna della matrice della F, risalendo dalla linea $n+r^{sima}$ alla n^{sima}. Dalla (19) rimangono arbitrarie le h_0, $h_1, \dots, h_{r-1}$ e vengono determinate le successive h_r, $h_{r+1}, \dots$; da queste, mediante le (18), si deducono le $g_{n.s}$ coefficienti della G.

La decomposizione della F in un prodotto della forma (17) è in conclusione possibile in più modi, potendosi assumere come L qualunque dilatazione che abbia per caratteristica $\left(\frac{1}{h_n}\right)$, dove h_n è un integrale arbitrario (purchè non nullo per alcun n) della (19); in seguito alla scelta di questo, la G riesce univocamente determinata.

60. La G così determinata può, con procedimento analogo, decomporsi in forma di prodotto

$$G = G_1(1-M)L_1$$

dove L_1 è una nuova dilatazione e G_1 è un operatore normale di rango $r-2$; analogamente

$$G_1 = G_2(1-M)L_2,$$

essendo G_2 un operatore normale di rango $r-3$, e così via. Giunti alla

$$G_{r-3} = G_{r-2}(1-M)L_{r-2},$$

dove G_{r-2} è del rango 1, questo, per il n.° 57, si decompone in

$$G_{r-2} = L_{r+1}(1-M)L_r.$$

e quindi, per successive sostituzioni, si ottiene la decomposizione di F nella forma

$$(20)\qquad F = L_{r+1}(1-M)L_r(1-M)\dots L_2(1-M)L_1 .$$

61. Al n.° 57 si è supposto che gli elementi a_n della matrice dell'operatore A di rango uno fossero tutti diversi da zero. Se alcuni di questi fossero zero, si vede facilmente che la decomposizione di A nella forma (12) non è più possibile. Si suppongano nulli i coefficienti $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_s}$, gli altri essendo diversi da zero; si consideri poi l'operatore lineare J definito da

$$J(\varepsilon_{r_i}) = \varepsilon_{r_i} \ (i = 1, 2, \ldots s), \qquad J(\varepsilon_r) = 0 \text{ per } n \neq r_i.$$

L'operatore $A - J$ è allora definito da

$$(A - J)(\varepsilon_n) = a'_n \varepsilon_n - b_n \varepsilon_{n-1};$$

esso verifica dunque le condizioni del n.° 57, poichè è $a'_n = a_n$ per $n \neq r_i$, e $a'_{r_i} = -1$. Esso ammette dunque la scomposizione (12), e quindi A viene a scriversi sotto la forma

(21) $$A = L_1(1 - M)L_0 + J.$$

PARTE SECONDA

CAP. V. - Lo spazio delle serie di potenze e la derivazione funzionale.

§ I.

62. Nei precedenti Capitoli non si è specificata la natura dei vettori unitari $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, costituenti la base dello spazio S, limitandosi (n.i 1 a 6) a postulare per essi alcune proprietà fondamentali. Una specificazione atta a permettere uno studio non più soltanto formale, può venire fatta in svariati modi: per lo scopo che si propone il presente scritto, essa verrà attuata nella maniera seguente.

Sia x una variabile indipendente numerica, reale o complessa. Le sue potenze intere non negative si riguarderanno come costituenti i vettori unitari di uno spazio lineare S_x; riferendoci alle notazioni del Cap. I, porremo dunque

(1) $$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = x, \quad \varepsilon_2 = x^2, \ldots, \quad \varepsilon_n = x^n, \ldots;$$

le serie di potenze

$$\varphi(x) = \Sigma\, a_n x^n,$$

per le quali si astrae in un primo tempo da ogni considerazione di convergenza, costituiscono gli elementi o vettori di questo spazio; valgono per essi le proprietà enunciate nei n.i 1 a 6, e si ammette la conservazione formale delle regole dell'ordinario calcolo algebrico. Questi vettori di S_x verranno di norma indicati colle minuscole dell'alfabeto greco, gli operatori colle maiuscole latine. Gli operatori lineari che mutano lo spazio S_x in sè si diranno *operatori funzionali.*

63. Nello spazio S_x, l'operatore indicato al n.° 34 con M non è altro che la moltiplicazione per x; esso è degenere di seconda specie, poichè fa corrispondere ad S_x il sottospazio avente per base $\varepsilon_1 = x$, $\varepsilon_2 = x^2$, $\varepsilon_3 = x^3, \ldots$. L'operatore M^r coincide colla moltiplicazione per x^r; l'applicazione ad un elemento $\varphi(x)$ di S_x dell'operatore $\Sigma\, a_n M^n$ non è altro che la moltiplicazione di $\varphi(x)$ per $\alpha(x) = \Sigma\, a_n x^n$.

64 Lo scarto di un operatore funzionale A rispetto ad M è dato da

$$A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi); \tag{2}$$

esso verrà detto *derivata funzionale* di A [1]. L'operatore A essendo definito per mezzo delle relazioni

$$A(x^n) = \alpha_n(x),$$

la sua derivata funzionale sarà definita da

$$A'(x^n) = \alpha_{n+1}(x) - x\alpha_n(x).$$

La derivata di A', o derivata funzionale seconda di A, sarà data da

$$A''(\varphi) = A'(x\varphi) - xA'(\varphi) = A(x^2\varphi) - 2xA(x\varphi) + x^2A(\varphi)$$

e, col solito metodo di induzione da n ad $n+1$, si trova senza difficoltà che la derivata funzionale n^{sima}, $A^{(n)}$, di A è data dall'espressione

$$A^{(n)}(\varphi) = A(x^n\varphi) - nxA(x^{n-1}\varphi) + \binom{n}{2}x^2A(x^{n-2}\varphi) - \ldots + (-1)^n x^n A(\varphi). \tag{3}$$

65. Si vede subito che la derivata funzionale è nulla per gli operatori M^r; che per l'operatore θ^h, definito da

$$\theta^h(\varphi(x)) = \varphi(x+h),$$

la derivata funzionale è data da

$$(\theta^h)' = h\varphi(x+h); \tag{4}$$

che per l'operatore S_μ (sostituzione) definito da

$$S_\mu(\varphi(x)) = \varphi(\mu(x)),$$

[1] L'operatore A', così dedotto da A, è stato a più riprese considerato da me e, in seguito, da vari Autori. Ved. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », del 17 febbraio 1895; cfr. l'opera, in collaborazione con U. AMALDI: *Le Operazioni distributive*, pag. 100 (Bologna, Zanichelli, 1901); ved. anche « Mathematische Annalen », T. XLIX, pag. 353.

la derivata funzionale è data da

$$S'_\mu(\varphi(x)) = (\mu(x) - x)\varphi(\mu(x)) = (\mu(x) - x)S_\mu.$$

66. L'operatore U, associato di M, che in relazione all'operatore M del n.° 34 è stato definito al n.° 38 in base alla relazione

$$UM - MU = 1,$$

si trova, seguendo quanto è esposto al detto n.° 38, essere ora definito da

$$U(x^n) = nx^{n-1};$$

esso dunque coincide, nello spazio S_x, con la derivazione ordinaria e verrà perciò indicato secondo l'uso colla lettera D. La sua derivata funzionale, data da

$$(DM - MD)\varphi(x) = D(x\varphi(x)) - xD\varphi(x) = \varphi(x),$$

coincide pertanto colla identità. La derivata funzionale della potenza D^r è fornita da

$$D^r(x\varphi) - xD^r\varphi = rD^{r-1}\varphi,$$

che mostra come D^r si comporti, rispetto alla derivazione funzionale, come x^r rispetto alla derivazione ordinaria.

La (4) mostra che l'operatore θ^h si comporta, rispetto alla derivazione funzionale, come la e^{hx} rispetto alla derivazione ordinaria.

Dalle cose dette emerge il seguente raffronto:

Nello spazio delle serie di potenze:		*Nello spazio degli operatori funzionali:*
Alla derivazione (indicata con D)	*corrisponde*	la derivata funzionale (che indicheremo con δ).
Alla costante c, per la quale è $Dc = 0$,	» »	l'operatore M e le sue funzioni $f(M)$, per le quali è $\delta f(M) = 0$.
Alla variabile indipendente x, per la quale è $Dx = 1$,	» »	l'operatore D, per il quale è $\delta D = 1$.
Alla potenza x^r della variabile, con $Dx^r = rx^{r-1}$,	» »	la potenza r^{sima} di D, con $\delta D^r = rD^{r-1}$.
All'esponenziale e^{hx}, con $De^{hx} = he^{hx}$,	» »	l'operatore θ^h, con $\delta\theta^h = h\theta^h$.
Alla derivazione del prodotto $D(\varphi\psi) = D\varphi\cdot\psi + \varphi\cdot D\psi$,	» »	la derivazione funzionale del prodotto $\delta(AB) = \delta A\cdot B + A\cdot\delta B$.

67. Ogni operatore permutabile con M, applicato all'elemento generico $\varphi(x)$, equivale alla moltiplicazione di $\varphi(x)$ per un elemento fisso $\mu(x)$ di S_x. Infatti, se P è permutabile con M, si avrà:

$$PM(x^n) = MP(x^n), \quad \text{ossia} \quad P(x^{n+1}) = xP(x^n);$$

ponendo $P(x^n) = \mu_n(x)$, le $\mu_n(x)$ soddisfano la relazione

$$\mu_{n+1}(x) = x\mu_n(x);$$

se dunque è $P(1) = \mu(x)$, ne seguirà $P(x) = x\mu(x), \ldots, P(x^n) = x^n\mu(x)$, e quindi. applicando la P a $\varphi(x) = \Sigma\, c_n x^n$, viene

$$P(\varphi(x)) = \mu(x)\varphi(x).$$

Reciprocamente, è evidente che ogni operazione di moltiplicazione è permutabile con M.

68. Dalla formula (3), in cui si faccia $n = 1, 2, 3, \ldots$, si ricavano le:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\varphi) = A(\varphi) \\ A(x\varphi) = xA(\varphi) + A' \\ A(x^2\varphi) = x^2A(\varphi) + 2xA' + A'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A(x^n\varphi) = x^nA(\varphi) + nx^{n-1}A' + \binom{n}{2}x^{n-2}A'' + \ldots + A^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

che sono un caso speciale della formula (18) data al n.° 30. Moltiplicando le (5) per $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ e sommando, ponendo $\Sigma\, c_n x^n = \mu(x)$ ed indicando con $\mu'(x)$, $\mu''(x), \ldots$ le successive derivate di $\mu(x)$, si ottiene la

$$(6) \qquad A(\mu(x)\varphi(x)) = \mu(x)A(\varphi) + \mu'(x)A'(\varphi) + \frac{\mu''(x)}{1\cdot 2}A''(\varphi) + \ldots,$$

che si può dire « formula funzionale di TAYLOR ». Essa rientra come caso speciale nella formula (20) data al n.° 32.

Se in particolare si pone nella (6) $A = \theta^h$, dove θ^h è l'operatore definito da $\theta^h(\varphi(x)) = \varphi(x+h)$, per il quale (n.° 65) si ha

$$(\theta^h)' = h\theta^h, \quad (\theta^h)'' = h^2\theta^h, \ldots, \quad (\theta^h)^{(n)} = h^n\theta^h, \ldots,$$

si ottiene

$$\theta^h(\mu(x)\varphi(x)) = \mu(x+h)\varphi(x+h) = \varphi(x+h)\left(\mu(x) + h\mu'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\mu''(x) + \ldots\right),$$

onde si ritrova per $\mu(x+h)$ l'ordinario sviluppo di TAYLOR.

§ II.

69. Nello spazio S_x ora considerato, un operatore di rango zero o dilatazione è definito (n.° 49) da

$$L(x^n) = a_n x^n, \tag{7}$$

la sua caratteristica indicandosi brevemente con (a_n). Per tali operatori valgono le osservazioni fatte al n.° 50.

70. Nella successione (a_n) si trovino gli elementi nulli $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_m}$ $(r_1 < r_2 < \dots < r_m)$. L'operatore L avrà come radici tutti gli elementi dello spazio

$$c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + \dots + c_m x^{r_m}, \tag{8}$$

dove le $c_1, c_2, \dots, c_m$ sono costanti arbitrarie; esso fa corrispondere allo spazio S_x la sua parte aliquota avente per base

$$1,\ x, \dots,\ x^{r_1-1},\ x^{r_1+1},\ x^{r_1+2}, \dots,\ x^{r_2-1},\ x^{r_2+1}\ x^{r_2+2}, \dots,\ x^{r_m-1},\ x^{r_m+1},\ x^{r_m+2}, \dots.$$

La L^{-1} ammette determinazione solo per gli elementi di questo spazio, e ne ha infinite, potendosi aggiungere ad una di esse un elemento qualsiasi dello spazio (8).

71. La derivata funzionale della dilatazione (7) è data da

$$L'(x^n) = L(x^{n+1}) - xL(x^n) = (a_{n+1} - a_n)x^{n+1}. \tag{9}$$

Così

$$\frac{1}{x} L'(x^n) = (a_{n+1} - a_n)x^n, \quad \frac{1}{x^2} L''(x^n) = (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)x^n, \dots;$$

usando il solito simbolo Δ per la differenza finita, si ha dunque che

$$\frac{1}{x} L', \quad \frac{1}{x^2} L'', \dots, \quad \frac{1}{x^r} L^{(r)}, \dots$$

sono dilatazioni aventi rispettivamente per caratteristiche

$$(\Delta a_n), \quad (\Delta^2 a_n), \dots, \quad (\Delta^r a_n), \dots.$$

Usando il simbolo $\theta = \Delta + 1$ per l'operatore (usuale nel calcolo delle differenze) che fa passare da n ad $n+1$, si vede che le dilatazioni

$$\frac{1}{x} L(x\varphi), \quad \frac{1}{x^2} L(x^2\varphi), \dots, \quad \frac{1}{x^r} L(x^r\varphi), \dots$$

hanno rispettivamente per caratteristiche le successioni

$$(\theta a_n), \quad (\theta^2 a_n), \dots, \quad (\theta^r a_n), \dots.$$

72. Fra le dilatazioni dello spazio S_x, ha un interesse speciale la MD o xD, per la quale valgono le relazioni

(10) $$xD(x^n) = nx^n.$$

Per la frequenza con cui verrà menzionata in ciò che segue, la xD si indicherà più compendiosamente con X. Le sue potenze sono date da

(11) $$X^m(x^k) = k^m x^k;$$

se quindi $f(z)$ indica un polinomio in z o una serie di potenze intere di z, si avrà

(12) $$f(X)(x^k) = f(k)\,x^k.$$

73. Le derivate funzionali successive di X sono

$$X' = M, \quad X'' = 0, \quad X''' = 0, \dots.$$

Per le derivate funzionali delle potenze di X, si ha

(13) $$(X^m)^{(r)}(x^k) = \Delta^r k^m \cdot x^{k+r}.$$

74. Le dilatazioni rappresentate da xD, $x^2D^2, \dots, x^mD^m, \dots$ hanno una relazione interessante con $xD = X$ e le sue iterate. Indicando, per brevità, il fattoriale $k(k-1)\dots(k-m+1)$ con k_m, si ha

(14) $$x^mD^m(x^k) = k(k-1)\dots(k-m+1)x^k = k_m x^k.$$

Ora è nota (e facilmente dimostrabile: ved. n.° 75) la relazione che passa fra le potenze ed i fattoriali; si ha

(15) $$\left\{\begin{array}{l} k_1 = k \\ k_2 = k^2 - k \\ k_3 = k^3 - 3k^2 + 2k \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ k_m = k^m + c_{m.m-1}k^{m-1} + c_{m.m-2}k^{m-2} + \dots + c_{m.1}k. \end{array}\right.$$

dove fra i coefficienti $c_{m.s}$ passa la relazione ricorrente

(16) $$c_{m+1.n} = c_{m.n-1} - mc_{m.n} \quad (c_{m.0} = 0,\ c_{m.m} = 1);$$

e, inversamente, le potenze si esprimono in funzione dei fattoriali colle relazioni

(17) $$\left\{\begin{array}{l} k = k_1 \\ k^2 = k_2 + k_1 \\ k^3 = k_3 + 3k_2 + k_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ k^m = k_m + g_{m.m-1}k_{m-1} + g_{m.m-2}k_{m-2} + \dots + g_{m.1}k_1, \end{array}\right.$$

dove i coefficienti $g_{m.s}$ sono legati dalla relazione ricorrente

$$g_{m+1.n} = g_{m.n-1} + n g_{m.n} \quad (g_{m.0} = 0,\ g_{m.m} = 1). \tag{16'}$$

Sostituendo ora nella (14) al fattoriale k_m la sua espressione (15), si ottiene

$$x^m D^m = X^m + c_{m.m-1} X^{m-1} + c_{m.m-2} X^{m-2} + \ldots + c_{m.1} X, \tag{18}$$

ed analogamente, sostituendo nella (11) a k^m la sua espressione (17), viene

$$X^m = x^m D^m + g_{m.m-1} x^{m-1} D^{m-1} + g_{m.m-2} x^{m-2} D^{m-2} + \ldots + g_{m.1} x D. \tag{19}$$

75. Le relazioni usate al n.° precedente fra le potenze k^m ed i fattoriali k_m emergono con semplicità dalle osservazioni seguenti.

Per $|t| < 1$, vale lo sviluppo

$$(1+t)^k = \Sigma \frac{k_n}{n!} t^n ; \tag{20}$$

ma si ha pure

$$(1+t)^k = e^{k \log(1+t)} = \Sigma \frac{k^n}{n!} \log^n (1+t); \tag{21}$$

se ora, nello sviluppo (20), si sostituisce a k_n l'espressione (15) e si ordina per le potenze di k, confrontando colla (21) viene

$$\log^n (1+t) = t^n + c_{n+1.n} \frac{t^{n+1}}{n+1} + c_{n+2.n} \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \ldots ; \tag{22}$$

le $c_{s.n}$ sono dunque i coefficienti dello sviluppo di $\log^n (1+t)$ per le potenze di t. D'altra parte, sotto la condizione $|e^t - 1| < 1$, si ha

$$e^{kt} = (1 + e^t - 1)^k = \Sigma \frac{k_n}{n!} (e^t - 1)^n ;$$

confrontando collo sviluppo

$$e^{kt} = \Sigma \frac{k^n t^n}{n!}$$

ove a k^n si sostituisca la sua espressione (17), ed uguagliando i coefficienti di k_n nei due membri, viene

$$(e^t - 1)^n = t^n + g_{n+1.n} \frac{t^{n+1}}{n+1} + g_{n+2.n} \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \ldots ; \tag{23}$$

i coefficienti $g_{s.n}$ sono dunque dati dallo sviluppo di $(e^t - 1)^n$ in serie di potenze di t.

76. La (18) dà luogo ad una notevole decomposizione in fattori del prodotto operativo $x^m D^m$. Notando infatti che il secondo membro della detta formula non è altro che il secondo membro della (15) in cui alla variabile numerica k è sostituito il simbolo operatorio X, mentre esso non è altro che un'espressione del prodotto $k(k-1)\dots(k-m+1)$, così si conclude colla formula

(24) $$x^m D^m = X(X-1)(X-2)\dots(X-m+1) \text{ (}^1\text{)}.$$

§ III.

77. Accanto allo spazio S_x, considerato nei precedenti paragrafi, introduciamo quello i cui elementi base sono

(25) $$1, \quad \log x, \quad \log^2 x, \dots, \quad \log^n x, \dots,$$

i logaritmi essendo fissati dalla condizione che, per $x = \rho e^{i\theta}$, sia

$$\log x = \log \rho + i\theta, \quad \text{con} \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Lo spazio lineare avente la (25) per base verrà indicato con S_l; i suoi elementi sono della forma

(26) $$\Sigma\, c_n \log^n x$$

dove, se il numero dei termini è infinito, si prescinde per ora dalle considerazioni di convergenza, ammettendo formalmente il principio d'identità e le regole della somma; in altri termini, la (26) va trattata come un vettore di componenti c_0, c_1, c_2,... in uno spazio ad una infinità numerabile di dimensioni.

78. Lo spazio S_x è parte di S_l. Si ha infatti, per m intero positivo,

(27) $$x^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{m^\nu \log^\nu x}{\nu!}.$$

---

(1) Questa formula è stata data da G. BOOLE nel 1844. L'interesse dell'operatore $X = xD$ è stato messo in rilievo, poco meno di un secolo fa, per opera di matematici inglesi come BOOLE, SYLVESTER, SPOTTISWOODE, GAVES, HARGREAVE, i cui lavori sono quasi tutti pubblicati nelle « Philosophical Transactions ».

Dalla formula di BOOLE si ricava, inversamente, la (18); ora questa formula si può stabilire direttamente per via di induzione. Si ha infatti

$$X^2 = (xD)^2 = xD(xD) = x(xD^2 + D), \quad \text{onde} \quad x^2D^2 = X^2 - X = X(X-1).$$

Ammessa che sia fino all'indice n

$$x^nD^n = X(X-1)\dots(X-n+1),$$

si applichi $X-n$ ai due membri: siccome

$$(X-n)x^nD^n = xD \cdot x^nD^n - nx^nD^n,$$

si ha sviluppando

$$x(nx^{n-1}D^n + x^nD^{n+1}) - nx^nD^n = x^{n+1}D^{n+1}, \qquad \text{c. d. d.}$$

Ma la (27) vale altresì per ogni numero m reale o complesso, per modo che allo spazio S_l appartiene l'insieme delle serie di DIRICHLET. Segue immediatamente, dalla (27), che allo spazio S_l appartengono tutti gli elementi della forma $x^m \log^n x$ (con m reale o complesso ed n intero non negativo) e le loro combinazioni lineari.

Un elemento generico $\alpha = \Sigma\, a_n x^n$ di S_x viene espresso come elemento di S_l da

$$\alpha = a_0 + a_1 \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} \log^\nu x + a_2 \sum_0^\infty \frac{2^\nu}{\nu!} \log^\nu x + \dots + a_n \sum_0^\infty \frac{n^\nu}{\nu!} \log^\nu x + \dots .$$

Le componenti di α nello spazio S_l sono dunque date da

$$(28) \qquad c_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots;\quad c_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots;\quad 2c_2 = a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + \dots; \dots$$
$$\nu!\, c_\nu = a_1 + 2^\nu a_2 + 3^\nu a_3 + \dots; \dots .$$

Si può osservare che, posto

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

le espressioni (28) si ottengono applicando successivamente ad $f(z)$ l'operatore $X = z \dfrac{d}{dz}$ e facendo poi ogni volta $z = 1$.

79. Nello spazio S_l, l'operatore definito al n.° 34 come *elementare* si riduce alla moltiplicazione per $\log x$. Indicando ancora con M la moltiplicazione per x, e dicendo M_1 la moltiplicazione per $\log x$, dalla (27) segue la relazione simbolica

$$(29) \qquad M^k = 1 + kM_1 + \frac{k^2}{1\cdot 2} M_1^2 + \dots + \frac{k^n}{n!} M_1{}^n + \dots .$$

80. L'operatore dato da

$$(30) \qquad A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \log^n a \cdot X^n,$$

applicato all'elemento $\varphi(x) = \Sigma\, c_n x^{k_n}$ di S_l, dà come risultato la $\varphi(ax)$. Infatti. applicando la A ad x^k, che appartiene a S_l qualunque sia il numero k, si ottiene

$$A(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \log^n a \cdot k^n x^k = x^k e^{k \log a} = (ax)^k;$$

come pure, applicandolo a $\Sigma\, c_n x^{k_n}$, si ha, qualunque siano i numeri k_n:

$$A(\Sigma\, c_n x^{k_n}) = \Sigma\, c_n x^{k_n} e^{k_n \log a} = \Sigma\, c_n (ax)^{k_n};$$

se dunque $\varphi(x)$ è una somma di termini della forma $c_n x^{k_n}$, si ha

$$(31) \qquad A\varphi(x) = \varphi(ax).$$

Il secondo membro della (30) essendo lo sviluppo dell' espressione simbolica $e^{X \log a}$ od a^X, si conclude che « il simbolo operatorio a^X, applicato ad « un elemento $\varphi(x) = \Sigma\, c_n x^{k_n}$ di S_l, lo muta in $\varphi(ax)$ ».

81. L' operatore X dà, nello spazio S_l,

$$X(\log^n x) = n \log^{n-1} x,$$

onde, rispetto alla base (25), è l' analogo di ciò che è la derivata ordinaria rispetto alla base (1); esso soddisfa alla

$$XM_1 - M_1 X = 1,$$

ossia è l' associato di M_1.

82. Si ha, per k qualunque,

(11) $$X^m(x^k) = k^m x^k,$$

con m intero positivo; ma dalla (11) stessa risulta subito $X^{-m}(x^k) = \dfrac{1}{k^m} x^k$; infine, essendo p e q numeri interi, e indicata con Y la dilatazione definita da

$$Y(x^k) = k^{\frac{1}{q}} x^k$$

(ove si fissi una delle q determinazioni possibili per $k^{\frac{1}{q}}$), si ha $Y^q = X$, da cui segue

$$X^{\frac{p}{q}}(x^k) = k^{\frac{p}{q}} x^k.$$

Se dunque $f(z)$ è una funzione della forma

$$c_1 z^{m_1} + c_2 z^{m_2} + \dots + c_r z^{m_r} + \dots,$$

con $m_1, m_2, \dots, m_r, \dots$ numeri razionali qualunque, e se si applica ad x^k il simbolo operatorio $f(X)$, si ottiene la

(32) $$f(X)(x^k) = f(k) x^k,$$

che generalizza la (12).

CAP. VI. - Gli operatori normali di rango zero.

83. Si è già accennato, nel n.° 69, agli operatori normali di rango zero o dilatazioni dello spazio S_x. Fra questi, presenta un particolare rilievo l' operatore xD, che per semplicità di scrittura si seguiterà ad indicare con X. Esso è permutabile con ogni dilatazione; inversamente, ogni operatore in S_x permutabile con X è una dilatazione: infatti, se un operatore A è definito in S_x dalle

$$A(x^n) = \alpha_n(x)$$

ed è permutabile con X, si deduce da $AX(x^n) = XA(x^n)$, che è

$$n\alpha_n(x) = x\frac{d\alpha_n(x)}{dx},$$

onde, indicando con c_n una costante,

$$\log \alpha_n(x) = n \log x + \log c_n,$$

e quindi

$$A(x^n) = c_n x^n;$$

A è pertanto una dilatazione.

84. Una dilatazione L essendo definita in S_x dalla sua successione caratteristica (a_n), vale a dire dalle relazioni

$$L(x^n) = a_n x^n, \tag{1}$$

è possibile di farne l'extrapolazione a spazi più generali, per mezzo dello sviluppo funzionale di TAYLOR dato al n.° 68 nella forma

$$L(\varphi(x)\pi(x)) = \varphi(x)L(\pi) + \varphi'(x)L'(\pi) + \frac{1}{1\cdot 2}\varphi''(x)L''(\pi) + \dots. \tag{2}$$

Ora si è visto al n.° 71 che

$$L'(x^n) = \Delta a_n \cdot x^{n+1}, \quad L''(x^n) = \Delta^2 a_n \cdot x^{n+2}, \dots, \quad L^{(r)}(x^n) = \Delta^r a_n \cdot x^{n+r}, \dots$$

e in particolare, per $n = 0$,

$$L'(1) = x\Delta a_0, \quad L''(1) = x^2\Delta^2 a_0, \dots, \quad L^{(r)}(1) = x^r \Delta^r a_0 \dots.$$

Con ciò la (2) diviene, facendovi $\pi(x) = 1$,

$$L(\varphi(x)) = a_0\varphi(x) + \Delta a_0 \cdot x\varphi'(x) + \frac{1}{1\cdot 2}\Delta^2 a_0 \cdot x^2\varphi''(x) + \dots + \frac{1}{n!}\Delta_n a_0 \cdot x^n \varphi^{(n)}(x) + \dots. \tag{3}$$

85. La formula così ottenuta può applicarsi ad una potenza di x di esponente qualsivoglia k (reale o complesso), sotto condizioni di convergenza sulle quali si tornerà in seguito; sotto tali condizioni, la serie di fattoriali

$$L(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n a_0 \cdot x^k, \tag{4}$$

che per k intero positivo riconduce alle equazioni di definizione (1) della L, dà per valori non interi di k l'extrapolazione di $a_n x^n$. Ed infatti la serie che figura nella (4) come coefficiente di x^k, non è altro che quella della nota formula di interpolazione di NEWTON.

86. La (3), applicata a $\log x$, dà

$$L(\log x) = a_0 \log x + \Delta a_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 a_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 a_0 - \dots;$$

ammessa la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n a_0$, ed indicata con b_1 la sua somma, si ha

$$L(\log x) = a_0 \log x + b_1. \tag{5}$$

La medesima formula (3), applicata a $\log^2 x$, ammessa la convergenza della serie che figura come coefficiente di $\log x$ e di quella che è il termine indipendente da x, dà come risultato un' espressione della forma

$$L(\log^2 x) = a_0 \log^2 x + b_1' \log x + b_2,$$

dove si vede che è $b_1' = b_1$, come risulta dalla proprietà $XL = LX$. Mediante il principio di induzione, si conclude senza difficoltà che l'applicazione di (3) a $\log^n x$ dà

$$L(\log^n x) = a_0 \log^n x + nb_1 \log^{n-1} x + \binom{n}{2} b_2 \log^{n-2} x + \dots nb_{n-1} \log x + b_n. \tag{6}$$

Quando la successione (a_n) caratteristica di L è tale da rendere convergenti le serie rappresentanti le $b_1, b_2, \dots$, le (6) permettono di applicare l'operatore L a tutto lo spazio S_l definito al n.° 77.

87. Agli operatori $x^n D^n$ che figurano nei termini dello sviluppo (3), si sostituiscano le loro espressioni, date dalle formule (18) del n.° 74, in forma di polinomi ordinati per le potenze di $X = xD$. Si ottiene così per $L(\varphi)$ il nuovo sviluppo

$$L(\varphi) = k_0 \varphi + k_1 X(\varphi) + \frac{k_2}{1 \cdot 2} X^2(\varphi) + \dots + \frac{k_n}{n!} X^n(\varphi) + \dots, \qquad k_0 = a_0, \tag{7}$$

dove, essendo le $c_{n.s}$ i noti coefficienti di fattoriali (cfr. n.° 74), le k_n sono legate alle $\Delta^n a_0$ (e quindi alle a_n) dalle relazioni

$$k_n = c_{n.n} \Delta^n a_0 + \frac{c_{n+1.n}}{n+1} \Delta^{n+1} a_0 + \frac{c_{n+2.n}}{(n+1)(n+2)} \Delta^{n+2} a_0 + \dots. \tag{8}$$

Inversamente, si ha l'espressione delle $\Delta^n a_0$ mediante le k_n, dalle formule (v. n.° 74)

$$\Delta^n a_0 = g_{n.n} k_n + \frac{g_{n+1.n}}{n+1} k_{n+1} + \frac{g_{n+2.n}}{(n+1)(n+2)} k_{n+2} + \dots, \tag{9}$$

dove le $g_{n.s}$ sono i coefficienti inversi di fattoriali.

Lo sviluppo (7) permette di determinare i coefficienti b_n che compaiono nella espressione (6) di $L(\log^n x)$. Essendo infatti

$$X(\log^n x) = n \log^{n-1} x, \quad X^r(\log^n x) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-r+1)\log^{n-r} x & \text{per } n \geq r \\ 0 & \text{per } n < r, \end{cases}$$

si ha da (7):

$$L(\log^n x) = a_0 \log^n x + nk_1 \log^{n-1} x + \binom{n}{2} k_2 \log^{n-2} x + \dots nk_{n-1} \log x + k_n; \tag{10}$$

le b_n non differiscono dunque dalle espressioni (8).

88. L'operatore L, applicato ad x^n $(n = 0, 1, 2, \dots)$, dà per la sua definizione stessa $a_n x^n$; assumendo però l'espressione (7) per L, e notando che è $X^r(x^n) = n^r x^n$, si ottiene

$$L(x^n) = \left(k_0 + nk_1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} k_2 + \dots + \frac{n^r}{r!} k_r + \dots\right) x^n, \tag{11}$$

onde

$$a_n = k_0 + nk_1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} k_2 + \dots + \frac{n^r}{r!} k_r + \dots .$$

Da ciò un metodo per la risoluzione del sistema lineare

$$x_0 + nx_1 + \frac{n^2}{1 \cdot 2} x_2 + \dots + \frac{n^r}{r!} x_r + \dots = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots); \tag{12}$$

ammessa la convergenza degli sviluppi che intervengono, le incognite x_n saranno date in funzione delle a_n mediante le formule (8).

89. L'applicazione di L a funzioni speciali, dà sviluppi notevoli legati alla successione (a_n) caratteristica di L. Così

$$L(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}. \tag{13}$$

Se per la L si assume lo sviluppo (3), si ha

$$L(e^x) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n a_0 \cdot x^n, \tag{14}$$

onde l'eguaglianza, facile a verificarsi direttamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n a_0 \cdot x^n = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}. \tag{15}$$

Applicando L alla serie geometrica, si ha dalle (1)

$$L\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{16}$$

che è detta la *funzione indicatrice* di L; mentre invece, applicando la (3),

$$L\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n a_0\,\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},\tag{17}$$

da cui la relazione, che coincide colla nota trasformazione di EULER-LINDELÖF:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n a_0\,\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}.\tag{18}$$

Assumendo per successione caratteristica la progressione geometrica a^n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, si ha dallo sviluppo (3)

$$L(\varphi(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{n!}\,x^n\varphi^{(n)}(x)$$

e quindi, sotto condizione di applicabilità dello sviluppo di TAYLOR,

$$L(\varphi(x))=\varphi(x+(a-1)x)=\varphi(ax),$$

ovvia estensione delle equazioni (1) di definizione di L.

§ II.

90. Conviene ora ricercare condizioni che valgano a dare validità effettiva agli sviluppi che nel paragrafo precedente si sono considerati dal punto di vista formale. La dilatazione L essendo data dalla sua successione caratteristica (a_n), si riprenda il suo sviluppo dato dalla

$$L(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\Delta^n a_0\cdot x^n\varphi^{(n)}(x).\tag{3}$$

La funzione $\varphi(x)$ sia analitica (olomorfa) in un'area connessa C, chiusa da una o più curve regolari e posta tutta al finito. Si indichi con $\delta(x)$ il limite inferiore delle distanze del punto x, interno a C, dal contorno di C, e si consideri lo sviluppo tayloriano

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,\varphi^{(n)}(x);\tag{19}$$

per ogni valore di x, il suo raggio di convergenza come serie di potenze di t è non minore di $\delta(x)$ e, per conseguenza, se in un'area C_1 interna a C e per ogni punto x di C_1 è $\delta(x)>\delta_1$, essendo δ_1 un numero positivo, si avrà ivi

$$\frac{1}{n!}\,|\varphi^{(n)}(x)|<\frac{m}{\delta_1{}^n},\tag{20}$$

dove m è il massimo valore assoluto di $\varphi(x)$ entro C_1.

Qualora la serie di potenze $\Sigma\, \Delta^n a_0 \cdot z^n$ abbia un raggio di convergenza non nullo, sia r un numero positivo inferiore a questo raggio per tanto poco quanto si vuole: per la condizione (20) precedente, la condizione di convergenza della (3) verrà certo soddisfatta in un'area C_1 interna a C tale che per ogni suo punto sia

$$\delta(x) > \frac{|x|}{r}. \tag{21}$$

91. Venendo a qualche caso speciale, si noti dapprima quello in cui l'area C è il cerchio di raggio R col centro nell'origine. Poichè ora è $\delta(x) = R - |x|$, la condizione (21) diventa

$$R - |x| > \frac{|x|}{r}, \quad \text{ossia} \quad |x| < \frac{R}{1 + \frac{1}{r}}.$$

Nel caso di $r = 1$, basta che sia $|x| < \frac{R}{2}$: così è per lo sviluppo tayloriano

$$\varphi(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \varphi^{(n)}(x).$$

92. Un altro caso più interessante si ha quando la successione $\Delta^n a_0$ è ologene (¹). Infatti, la condizione (21) è soddisfatta qualunque sia x in C, poichè essa permette di prendere $\delta(x)$ piccolo quanto si vuole; il campo C_1 coincide pertanto con C.

93. Si dirà che un operatore lineare, applicabile alle funzioni analitiche, è *totalmente valido*, quando applicato ad una qualunque funzione analitica $\varphi(x)$, dà come risultato una funzione analitica $\psi(x)$ il cui campo di regolarità coincide con quello di $\varphi(x)$. Il n.° 92 enuncia che « una dilatazione L per la quale « la successione $\Delta^n a_0$ è ologene, è totalmente valida ». Di questa osservazione vale la reciproca. Infatti, se la dilatazione L è totalmente valida, applicata in particolare ad $\frac{1}{1-x}$ essa dovrà dare una funzione col solo punto singolare $x = 1$; ma si ha dalla (17)

$$L\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

(¹) Ricordiamo che una successione $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, è detta *ologene* quando la serie $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ è una trascendente intera.

onde, poichè il secondo membro deve avere il solo punto singolare $x = 1$, la successione $\Delta^n a_0$ è ologene.

94. Alla condizione così trovata per la totale validità della dilatazione L definita dalla (1), che cioè la successione $\Delta^n a_0$ sia ologene, si può sostituire l'altra: « che la serie $\Sigma\, a_n x^n$ definisca una funzione quasi intera, col solo punto singolare $x = 1$ ». Ciò risulta immediatamente dalla relazione di EULER-LINDELÖF, data dalla formula (18) al n.° 89.

95. Si riprenda la relazione (18), che dà una doppia espressione per la funzione $\alpha(x)$ indicatrice di L (n.° 89), e si ponga

$$z = \frac{x}{1-x}; \tag{22}$$

la (18) diviene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \cdot z^n = \frac{1}{1+z}\,\alpha\left(\frac{z}{1+z}\right).$$

$\alpha\left(\frac{z}{1+z}\right)$ converge, se r è il raggio di convergenza di $\Sigma\, a_n x^n = \alpha(x)$, per

$$|z| < |1+z|\, r,$$

cioè in un'area $\mathfrak{A}_r$ limitata dalla circonferenza C_r data da $|z| = |1+z|\, r$ (circonferenza di APOLLONIO nel fascio relativo ai punti $z = 0$ e $z = -1$). L'area $\mathfrak{A}_r$ è quella interna alla circonferenza C_r per $r < 1$, è quella esterna per $r > 1$; in ogni caso $\mathfrak{A}_r$ contiene il punto $z = 0$ e per conseguenza si può concludere che « se la successione a_n è tale che la serie $\Sigma\, a_n x^n$ abbia un « raggio non nullo di convergenza, anche la serie $\Sigma\, \Delta^n a_0 \cdot z^n$ avrà un raggio non « nullo di convergenza ». La reciproca è vera e si dimostra nello stesso modo.

96. I casi speciali più semplici sono:

a) Quello in cui la successione (a_n) è costituita dai valori di un polinomio

$$p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \dots + p_m,$$

ottenuti dando a z i valori 0, 1, 2,.... In questo caso, le differenze $\Delta^n a_0$ sono nulle dall'indice $m+1$ in avanti; l'espressione (3) della L si riduce ad una forma differenziale lineare del tipo di FUCHS, dell'ordine m.

b) Quello in cui la successione (a_n) consta di un numero finito di elementi; essendo $a_n = 0$ per ogni $n > m$, se L viene applicato alla serie

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

sarà

(23) $$L(\varphi) = c_0 a_0 + c_1 a_1 x + c_2 a_2 x^2 + \dots + c_m a_m x^m.$$

Lo spazio S_x viene dunque trasformato nello spazio dei polinomi di grado non superiore ad m. Che l'espressione (23) ora data per $L(\varphi)$ sia conforme alla forma (3), risulta dall'essere

$$c_r = \frac{1}{r!}\varphi^{(r)}(0), \quad \text{onde} \quad L(\varphi) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} a_r \varphi^{(r)}(0) x^r;$$

se R è il raggio di convergenza di $\varphi(x)$ si ha, per $|x| < \frac{R}{2}$,

$$\varphi^{(r)}(0) = \varphi^{(r)}(x) - x\varphi^{(r+1)}(x) + \frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi^{(r+2)}(x) - \dots,$$

onde, sostituendo in (23) ed ordinando,

$$L(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(a_0 - n a_1 + \binom{n}{2} a_2 - \dots + (-1)^m \binom{n}{m} a_m\right) \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(x),$$

che è precisamente la forma (3).

§ III.

97. Estendendo l'operatore L ad un campo più ampio di S_x per mezzo della formula (3), coll'applicarla ad una potenza x^k di esponente qualsiasi, si è ottenuto la (4): l'estensione di L si accompagna con piena analogia alla estensione data alla successione (a_n) mediante la formula di interpolazione di NEWTON. Dando alla funzione di k:

(24) $$a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} \Delta^n a_0, \quad \text{dove} \quad \binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!},$$

nel campo della sua validità, il nome di *funzione determinante* dell'operatore L, si vogliono indicare qui condizioni per questa validità, che è quanto dire per la validità dell'applicazione di L ad x^k con esponente qualsiasi.

a) La (24) è valida per ogni esponente intero positivo o nullo, e dà, per $k = 0, 1, 2, \dots$ la successione caratteristica di L.

b) Se δ è il massimo limite della successione

$$\log |\Delta^n a_0| : \log n$$

è noto che, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, si ha da un indice n in avanti:

(25) $$\left|\binom{k}{n} \Delta^n a_0\right| < n^{\delta - \mathfrak{R}(k) - 1 - \varepsilon},$$

dove $\mathfrak{R}(k)$ indica la parte reale dell'esponente (eventualmente complesso) k.

c) Dalla (25) risulta che la serie (24) converge assolutamente sotto la condizione $\mathfrak{R}(k) > \delta$; in ogni area interna al semipiano così definito nel piano k, essa converge uniformemente e rappresenta per conseguenza una funzione analitica regolare di k.

98. Considerando la serie di potenze

$$(26) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \cdot z^n$$

ed indicando con ρ il suo raggio di convergenza, si possono porre in relazione con ρ i risultati enunciati nel n.° precedente.

a) Se è $\rho > 1$, si indichi con ρ_1 un numero compreso fra 1 e ρ; essendo m un numero positivo assegnabile, si avrà da un indice n in avanti

$$|\Delta^n a_0| < \frac{m}{\rho_1{}^n},$$

onde

$$\log |\Delta^n a_0| < \log m - n \log \rho_1,$$

e quindi

$$\log |\Delta^n a_0| : \log n < \frac{\log m}{\log n} - \frac{n \log \rho_1}{\log n};$$

poichè il primo termine del secondo membro tende a zero, il limite di $\log |\Delta^n a_0|$ sarà negativo e perciò il rapporto $\log |\Delta^n a_0| : \log n$ tende a $-\infty$, per n tendente all'infinito. La serie (24) converge dunque in tutto il piano, ossia essa rappresenta una funzione intera di k.

b) Se è $\rho < 1$, sia ρ_1 un numero compreso fra ρ ed 1; sarà, per infiniti valori di n,

$$\left| \sqrt[n]{\Delta^n a_0} \right| > \frac{1}{\rho_1}$$

onde

$$\frac{1}{n} \log |\Delta^n a_0| > -\log \rho_1 > 0, \quad \text{ossia} \quad \log |\Delta^n a_0| : \log n > -\frac{n}{\log n} \log \rho_1.$$

Pertanto, il massimo limite di $\log |\Delta^n a_0| : \log n$ essendo l'infinito, si conclude che l'area di convergenza per la (24) non esiste; la (24) ha dunque significato per i soli valori interi positivi o nullo di k.

c) Nel caso di $\rho = 1$, a seconda del carattere asintotico della successione $\Delta^n a_0$, la δ può assumere qualunque valore fra $-\infty$ e $+\infty$, e quindi, a seconda di questo carattere, l'area di convergenza di (24) può essere o tutto il piano k, o un semipiano limitato da una parallela all'asse immaginario, o anche mancare affatto.

99. In ciò che precede, si sono ottenute condizioni per la validità effettiva della forma (3) dell'operatore L, cioè per il suo sviluppo secondo le $x^n D^n$; si possono ora cercare condizioni analoghe per lo sviluppo della forma (7), ordinato cioè secondo le potenze di X. A questo oggetto si noti che nel caso *a)* del n.° precedente, ed anche nel caso *c)*, tutte le volte che δ è negativo il semipiano $\Re(k) > \delta$ contiene l'origine $k = 0$, e per conseguenza la serie (24) dà luogo ad una serie di potenze di k avente raggio di convergenza infinito nel primo caso, ed uguale per lo meno a $-\delta$ nel secondo. Per un classico teorema di WEIERSTRASS, questa serie si ottiene sostituendo in (24) alle $\binom{k}{n}$ le loro espressioni

$$\binom{k}{n} = k^n + c_{n,n-1} k^{n-1} + c_{n,n-2} k^{n-2} + \dots + c_{n,1} k$$

(cfr. la form. (15) al n.° 74), indi ordinando per le potenze di k. Si ottiene così

$$a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} k^n, \tag{27}$$

colle

$$h_n = c_{n,n} \Delta^n a_0 + \frac{c_{n+1,n}}{n+1} \Delta^{n+1} a_0 + \frac{c_{n+2,n}}{(n+1)(n+2)} \Delta^{n+2} a_0 + \dots,$$

che coincidono colle k_n date al n.° 87 form. (8).

Essendo

$$L(x^k) = a(k) x^k, \tag{4}$$

ne verrà, per k arbitrario nel caso *a)* del n.° 98 e per lo meno per $|k| < -\delta$ nel caso *c)* se δ è negativo,

$$L(x^k) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} k^n,$$

onde, ricordando che è $X^m(x^k) = k^m x^k$ (n.° 72), viene

$$L(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{n!} X^n(x^k); \tag{28}$$

è così dimostrata la effettiva validità dello sviluppo (7) applicato ad x^k, per i valori di k interni al cerchio di convergenza della (27).

100. L'esempio seguente serve a mostrare come sia possibile di estendere il concetto di funzione determinante (n.° 97), anche a casi in cui gli sviluppi (3) e (7) mancano della convergenza. Si consideri la L_0 definita da

$$L_0(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi^{(n)}(x), \tag{29}$$

in cui è dunque $\Delta^n a_0 = n!$. La funzione determinante sarebbe data da

$$a(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} n!,$$

che è divergente per tutti i valori di k, eccettuati gl'interi nullo o positivi. Dando a k il valore m intero positivo, viene

$$a(m) = 1 + m + m(m-1) + \ldots + m(m-1)\ldots 2 \cdot 1,$$

espressione che soddisfa all'equazione alle differenze

$$a(k+1) = 1 + (k+1)a(k); \tag{30}$$

qui si presenta nel modo più naturale il pensiero di assumere la (30) a definizione della funzione determinante $a(k)$, aggiungendo la condizione $a(0) = 1$.

Il campo funzionale al quale è applicabile lo sviluppo (30) è assai ristretto, essendo limitato ai polinomi interi e alle trascendenti intere di tipo esponenziale; anche applicato a queste, introduce nel risultato singolarità: così si ha

$$L_0(e^{ax}) = \sum_{n\ 0}^{\infty} a^n x^n e^{ax},$$

la quale mostra che l'applicazione di L_0 ad e^{ax} introduce il polo $x = \frac{1}{a}$.

§ IV.

101. Lo studio delle operazioni sugli elementi del gruppo permutabile delle dilatazioni è strettamente collegato con quello delle operazioni sulle rispettive funzioni determinanti, poichè le funzioni determinanti della somma e del prodotto di due dilatazioni coincidono rispettivamente colla somma e col prodotto delle relative funzioni determinanti.

Si consideri dapprima il caso della più semplice funzione determinante, quella di primo grado in k; sia

$$a(k) = a - k.$$

Per la (3), la corrispondente dilatazione sarà la forma differenziale lineare del primo ordine

$$I_a(\varphi(x)) = a\varphi(x) - x\varphi'(x) \quad \text{(simbolicamente } I_a = a - X\text{)}, \tag{31}$$

la quale ha come spazio funzionale di applicazione l'insieme delle funzioni una volta derivabili. Essa ammette la radice cx^a, e le cx^s, con esponente s qualunque, come autoelementi: c è una costante arbitraria.

102. Per la notata corrispondenza fra le dilatazioni e le rispettive funzioni determinanti, le $(a-k)^2$, $(a-k)^3, \ldots, (a-k)^m$ saranno rispettivamente le funzioni determinanti di I_a^2, $I_a^3, \dots, I_a^m$. La I_a^m è una forma differenziale lineare normale di ordine m, il cui integrale generale è dato da

$$x^a(c_0 + c_1 \log x + c_2 \log^2 x + \dots + c_{m-1} \log^{m-1} x), \tag{32}$$

dove le $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ sono costanti arbitrarie.

Se la determinante di una L è funzione razionale intera, colle radici a_1, $a_2, \dots, a_p$ degli ordini rispettivi di multiplicità $r_1, r_2, \dots, r_p$, la L si scriverà

$$L = I_{a_1}^{r_1} I_{a_2}^{r_2} \dots I_{a_p}^{r_p}; \tag{33}$$

essa è una forma differenziale lineare dell'ordine $r_1 + r_2 + \dots + r_p$, di tipo normale, ed il suo integrale generale si scrive immediatamente in base al caso precedente.

103. Un altro caso semplice degno di nota è quello in cui la funzione determinante è la

$$a(k) = \frac{1}{a-k},$$

escludendosi per ora che k possa essere uguale ad a. Dalla successione caratteristica della corrispondente dilatazione, si deduce senza difficoltà

$$\Delta^n a_0 = \frac{n!}{a(a-1)\dots(a-n)};$$

pertanto la I_a^{-1}, nella forma (3), sarà data da

$$I_a^{-1}(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \varphi^{(n)}(x)}{a(a-1)\dots(a-n)}. \tag{34}$$

Applicandola ad una potenza x^k, si ottiene

$$I_a^{-1}(x^k) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{a(a-1)\dots(a-n)}; \tag{35}$$

onde, paragonando colla $I_a^{-1}(x^k) = \dfrac{x^k}{a-k}$, si conclude con la formula

$$\frac{1}{a-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{a(a-1)\dots(a-n)}, \tag{36}$$

convergente per $\Re(k) > \Re(a)$ e ben nota nella teoria delle serie di fattoriali [1].

---

[1] Ved. per es. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, pag. 107 (Paris, Gauthier-Villars, 1920).

104. Dall'essere $I_a^{-1} = (a - X)^{-1}$, si deduce lo sviluppo simbolico

$$I_a^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} X + \ldots + \frac{1}{a^{n+1}} X^n + \ldots, \tag{37}$$

e, paragonando colla (36), si deduce che, per un'area del piano k in cui sia contemporaneamente $|k| < |a|$ e $\mathfrak{R}(k) > \mathfrak{R}(a)$, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{a^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{a(a-1)\ldots(a-n)}; \tag{38}$$

ricordando ora le espressioni (15) date per le k_n nel n.º 74 e sostituendole nella (38), indi uguagliando nei due membri i coefficienti di k^n, viene

$$\frac{1}{a^{n+1}} = \frac{1}{a(a-1)\ldots(a-n)}\left(1 + \frac{c_{n+1.n}}{a-n-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{c_{n+2.n}}{(a-n-1)(a-n-2)} + \frac{c_{n+3.n}}{(a-n-1)(a-n-2)(a-n-3)} + \ldots\right). \tag{39}$$

Sostituendo invece, pure nella (38), al posto di k^n la sua espressione data dalla (17) del medesimo n.º 74, ed uguagliando i coefficienti di $k(k-1)\ldots(k-n)$, si ha

$$\frac{1}{a(a-1)\ldots(a-n)} = \frac{1}{a^{n+1}}\left(1 + \frac{g_{n+1.n}}{a} + \frac{g_{n+2.n}}{a^2} + \frac{g_{n+3.n}}{a^3} + \ldots\right). \tag{40}$$

È da rilevare il notevole riscontro fra le formule ora trovate (39) e (40), e le (15) e (17) del n.º 74.

105. Per la dilatazione I_a^{-r}, la cui funzione determinante è

$$\frac{1}{(a-k)^r}$$

e per la quale si ha lo sviluppo simbolico

$$I_a^{-r} = \frac{1}{a^r}\left(1 + \frac{r}{a} X + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2\cdot a^2} X^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3} X^3 + \ldots\right), \tag{41}$$

si deduce, applicando la (19) del n.º 74:

$$I_a^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+r}}\left(\binom{r+n-1}{n} + \binom{r+n}{n+1}\frac{g_{n+1.n}}{a} + \binom{r+n+1}{n+2}\frac{g_{n+2.n}}{a^2} + \ldots\right)x^n D^n. \tag{42}$$

106. Per mezzo dei risultati conseguiti dal n.º 103 al n.º 105, si possono ottenere senz'altro gli sviluppi delle dilatazioni aventi come funzioni determinanti delle funzioni razionali qualunque, intere o fratte. Basta infatti decomporre la funzione razionale $\alpha(k)$ nei suoi elementi semplici, della forma

$$k^r, \quad \frac{1}{a_i - k}, \quad \frac{1}{(a_i - k)^r},$$

le a_i essendo le radici del denominatore di $\alpha(k)$; la dilatazione avente $\alpha(k)$ come funzione determinante, sarà la somma di quelle le cui funzioni determinanti sono gli elementi suddetti, le quali sono state determinate nei n.[i] precedenti.

107. Aggiungansi le seguenti osservazioni.

a) Se lo sviluppo (41) viene applicato ad una funzione analitica che ammetta l'origine $x = 0$ come punto regolare, lo sviluppo stesso ammette certamente un'area di convergenza circondante l'origine.

b) Gli operatori I_a^{-r} ammettono infinite determinazioni dovute all'esistenza di radici per le loro inverse I_a^r. Applicando I_a^{-r} ad una funzione per la quale la (34) o la (42) risultino convergenti, se ne ottiene una determinazione alla quale si può aggiungere un'espressione (32) a coefficienti c arbitrari.

c) Al n.° 103 si è escluso che I_a^{-1} venisse applicato ad x^k per il caso di $k = a$: infatti, le relazioni

$$I_a^{-1}(x^k) = \frac{x^k}{a - k}, \quad I_a^{-r}(x^k) = \frac{x^k}{(a - k)^r}$$

risultano illusorie per $k = a$. Per interpretarle, si noti che la $I_a^{-1}(x^k)$ può venir completata scrivendo

$$I_a^{-1}(x^k) = \frac{x^k}{a - k} + cx^a, \tag{43}$$

dove c è una costante arbitraria. Ora, poichè ogni determinazione di $I_a^{-1}(x^k)$ è, all'infuori del caso $k = a$, funzione continua di k, è ovvio l'estendere questo concetto di continuità anche al caso di $k = a$, e quindi di porre, ε essendo un numero positivo arbitrariamente piccolo,

$$I_a^{-1}(x^a) = \lim_{\varepsilon = 0} I_a^{-1}(x^{a+\varepsilon}),$$

dove $I_a^{-1}(x^{a+\varepsilon})$ è dato da

$$I_a^{-1}(x^{a+\varepsilon}) = x^a\left(-\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} + c\right)$$

ossia, sviluppando per le potenze di ε,

$$I_a^{-1}(x^{a+\varepsilon}) = x^a\left(c - \frac{1}{\varepsilon} - \log x - \frac{\varepsilon \log^2 x}{1 \cdot 2} - \dots\right).$$

Si dia alla costante c il valore $\frac{1}{\varepsilon}$; verrà

$$I_a^{-1}(x^{a+\varepsilon}) = -x^a \log x - \frac{\varepsilon}{2} x^a \log^2 x - \dots;$$

questa, per $\varepsilon \to 0$, dà come soluzione generale

$$I_a^{-1}(x^a) = -x^a \log x + c_1 x^a, \tag{44}$$

dove c_1 è daccapo una costante arbitraria. Pertanto, quando la I_a^{-1} va applicata ad una serie di potenze (anche non intere) di x, mentre per una potenza generica x^k vale la (43), al termine contenente x^a va applicata la (44).

Un analogo procedimento vale a dare il significato di I_a^{-m} applicato ad x^a; partendo dall'osservazione che

$$I_a(x^a \log^m x) = -mx^a \log^{m-1} x$$

ed

$$I_a^m\left(x^a(c_0 + c_1 \log x + c_2 \log^2 x + \dots + c_{m-1} \log^{m-1} x + \frac{(-1)^m}{m!} \log^m x)\right) = x^a,$$

risulta

$$I_a^{-m}(x^a) = x^a\left(c_0 + c_1 \log x + \dots + c_{m-1} \log^{m-1} x + \frac{(-1)^m}{m!} \log^m x\right); \tag{45}$$

applicando m volte consecutive la (44) ad x^a, la formula (45) viene senz'altro verificata.

CAP. VII. - **L'operatore normale di rango uno.**

§ I.

108. Prima di passare allo studio dell'operatore normale di rango r nello spazio indicato con S nel Capitolo primo, e più particolarmente nello spazio S_x definito al n.° 62, converrà trattare alquanto diffusamente il caso dell'operatore di rango uno. Esso viene definito, nello spazio S, dalle relazioni

$$A(\varepsilon_n) = a_n \varepsilon_n - b_n \varepsilon_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

dove le a_n, b_n, fino a contrario avviso, saranno supposte tutte diverse da zero.

Indicando con L, L_1 le dilatazioni definite da

$$L(\varepsilon_n) = \frac{a_n}{b_n} \varepsilon_n, \quad L_1(\varepsilon_n) = b_n \varepsilon_n,$$

la (1) potrà scriversi

$$A(\varepsilon_n) = (L - M)L_1(\varepsilon_n), \tag{2}$$

essendo M l'operatore elementare definito al n.° 34.

Conviene quindi fissare l'attenzione sulla $L - M$, come parte essenziale dell'operatore A.

Il binomio simbolico $L_k - M$ verrà indicato con B_k, L_k essendo la dilatazione definita dalle $L_k(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_n$; verranno quindi considerati in ciò che segue gli operatori

(3) $$B_k(\varepsilon_n) = (L_k - M)(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

109. Applicando la B_k ad un elemento α di S, dato da

$$\alpha = c_0 \varepsilon_0 + c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n + \dots,$$

si ha

$$B_k(\alpha) = c_0 k_0 \varepsilon_0 + (c_1 k_1 - c_0)\varepsilon_1 + (c_2 k_2 - c_1)\varepsilon_2 + \dots + (c_n k_n - c_{n-1})\varepsilon_n + \dots;$$

il risultato è un elemento $\beta = \Sigma\, g_n \varepsilon_n$ di S, i cui coefficienti g_n sono legati ai coefficienti di α dalle relazioni

(4) $$g_n = c_n k_n - c_{n-1}.$$

A queste relazioni, *aggiunte* delle (3), si può dare forma simbolica: nello spazio lineare avente per base il sistema dei numeri $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, indicando con $\overline{M}$ l'operatore che fa passare da c_n a c_{n+1}, la (4) può scriversi

$$g_n = \overline{B}(c_n) = (L_k - \overline{M}^{-1})(c_n).$$

110. L'inverso dell'operatore $B = L - M$ è dato formalmente dallo sviluppo

(5) $$B^{-1} = (L - M)^{-1} = L^{-1} + L^{-1}ML^{-1} + L^{-1}ML^{-1}ML^{-1} + \\ + L^{-1}ML^{-1}ML^{-1}ML^{-1} + \dots,$$

sviluppo formale che acquista valore effettivo sotto ipotesi convenienti per la successione delle k_n. Applicando la (5) ad ε_n, si ottiene l'espressione formale dell'elemento $\xi_n = B^{-1}(\varepsilon_n)$, sotto la forma

(6) $$\xi_n = \frac{1}{k_n}\varepsilon_n + \frac{1}{k_n k_{n+1}}\varepsilon_{n+1} + \frac{1}{k_n k_{n+1} k_{n+2}}\varepsilon_{n+2} + \dots,$$

le k_n essendo sempre supposte diverse da zero.

§ II.

111. Si assuma ora, come campo delle operazioni, lo spazio S_x la cui base è il sistema delle potenze di esponenti 0, 1, 2,... della variabile x (n.° 62); in questo campo, l'operatore M coincide colla moltiplicazione per la variabile.

L'operatore di rango 1 si riconduce, all'infuori di un fattore L a destra, alla forma $L - M$; essendo $L(x^n) = k_n x^n$, l'operatore si definisce mediante le relazioni

$$(1') \qquad B(x^n) = k_n x^n - x^{n+1}.$$

Con procedimento analogo a quello tenuto al n.° 71, facendo uso cioè del concetto di derivazione funzionale, si può extrapolare l'operatore B, definito dalle (1'), agli elementi di spazi funzionali più generali. Le derivate funzionali successive di B sono date da

$$(7) \qquad B'(x^n) = \Delta k_n \cdot x^{n+1},\ B''(x^n) = \Delta^2 k_n \cdot x^{n+2}, \dots,\ B^{(m)}(x^n) = \Delta^m k_n \cdot x^{n+m}, \dots .$$

Ricorrendo allo sviluppo (6) del n.° 68, in cui porremo $\varphi(x)$ al posto di $\mu(x)$ e l'unità al posto di $\varphi(x)$, avremo

$$(8) \qquad B(\varphi(x)) = B(1)\varphi(x) + B'(1)\cdot D\varphi + \frac{1}{1\cdot 2} B''(1)\cdot D^2\varphi + \dots + \frac{1}{n!} B^{(n)}(1)\cdot D^n\varphi + \dots,$$

e sostituendo per le $B(1)$, $B'(1), \dots$ le loro espressioni ricavate dalle (7) facendovi $n = 0$, si ottiene lo sviluppo

$$(9) \qquad B(\varphi(x)) = (k_0 - x)\varphi(x) + \Delta k_0 \cdot x D\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\Delta^2 k_0 \cdot x^2 D^2\varphi + \dots + \frac{1}{n!}\Delta^n k_0 \cdot x^n D^n \varphi + \dots,$$

applicabile, sotto opportune condizioni di convergenza, agli elementi di ogni spazio di funzioni indefinitamente derivabili. Se, in particolare, si applica la (9) alla potenza x^s della variabile, di esponente s (reale o complesso) qualunque, e si pone

$$k(s) = k_s = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n k_0 \cdot \binom{s}{n},$$

si ottiene la relazione

$$(10) \qquad B(x^s) = k_s x^s - x^{s+1},$$

che coincide colle equazioni di definizione (1') quando s è nullo o intero positivo.

§ III.

112. Dalla (6) si deduce che, nello spazio S_x, la $B^{-1}(1) = \xi_0$ è rappresentata dallo sviluppo

$$(11) \qquad \xi_0 = \frac{1}{k_0} + \frac{x}{k_0 k_1} + \frac{x^2}{k_0 k_1 k_2} + \dots + \frac{x^n}{k_0 k_1 \dots k_n} + \dots .$$

Questo, paragonato allo sviluppo della $\xi_m = B^{-1}(x^m)$ ricavato dalla medesima formula (6), porta alla relazione fra ξ_m e ξ_0:

$$(12) \qquad \xi_m = k_0 k_1 \dots k_{m-1} \xi_0 - \\ - (x^{m-1} + k_{m-1} x^{m-2} + k_{m-1} k_{m-2} x^{m-3} + \dots + k_{m-1} k_{m-2} \dots k_1).$$

113. Conviene ora sottoporre la successione delle k_n ad una limitazione atta a dare agli sviluppi precedenti una effettiva validità. Si farà pertanto l'ipotesi che esista, per $n \to \infty$, il limite di k_n, finito e diverso da zero: sia

$$\lim_{n \to \infty} k_n = k.$$

Le serie ξ_m avranno pertanto $|k|$ come raggio di convergenza. Ricordando che due serie di potenze $\varphi(x)$, $\psi(x)$, aventi il medesimo raggio r di convergenza sono dette *ugualmente* singolari sulla circonferenza se esiste una costante c tale che la serie $\varphi - c\psi$ abbia raggio di convergenza maggiore di r, la (12) mostra che le serie ξ_m sono ugualmente singolari colla ξ_0 e quindi ugualmente singolari fra di loro, per tutti i valori interi positivi di m.

Per un noto teorema di FABRY [1], segue dalla (12) che k è punto singolare per tutte le ξ_m, punto che, in analogia col caso elementare in cui i coefficienti della serie (6) sono le successive potenze intere positive di uno stesso numero, può dirsi *quasi-polo* per le ξ_m.

114. L'operatore B, preso sotto la forma (9), si applichi ad un ramo olomorfo di funzione analitica, sia $\varphi(x)$, dato entro un'area semplicemente connessa C contenente l'origine. Richiamando quanto è stato detto al n.º 90, e, come a quel n.º, indicando con $\delta(x)$ il limite inferiore della distanza del punto x interno a C dal contorno γ dell'area C, si vede che se la serie $\Sigma\, \Delta^n k_0 \cdot x^n$ ha raggio non nullo di convergenza, esisterà un numero positivo r tale che, nell'area C_r interna a C e definita da

$$|x| : |\delta(x)| < r,$$

il secondo membro della (9) sarà uniformemente convergente e rappresenterà in C_r un ramo olomorfo di funzione analitica.

In particolare se la successione $\Delta_n k_0$ è ologene, nel quale caso è $r = \infty$, la $B(\varphi)$ sarà olomorfa in tutta l'area C e l'operatore B potrà dirsi (cfr. il n.º 93) totalmente valido.

§ IV.

115. Applicando l'operatore B definito dalle (1') ad un elemento di S_x:

$$\varphi(x) = \Sigma\, c_n x^n,$$

si ottiene come risultato un elemento, pure appartenente ad S_x, dato da

$$\psi(x) = B(\varphi(x)) = \Sigma\, g_n x^n,$$

(1) Ved. HADAMARD et MANDELBROJT, *La série de Taylor*, pag. 30 (2ème éd.).

i cui coefficienti g_n sono legati alle c_n dalle relazioni

(13) $$g_0 = ck_0, \quad g_1 = c_1k_1 - c_0, \quad g_2 = c_2k_2 - c_1, \dots, \quad g_n = c_nk_n - c_{n-1}, \dots .$$

Dando a B la forma simbolica $B = L - M$, queste relazioni possono riassumersi nella formula $g_n = (L_k - M^{-1})(c_n)$, come è indicato al n.° 109.

Moltiplicando ordinatamente la (13) per 1, k_0, $k_0k_1, \dots$, $k_0k_1 \dots k_{n-1}$ e sommando, si ottiene

(14) $$g_0 + g_1k_0 + g_2k_0k_1 + \dots + g_nk_0k_1 \dots k_{n-1} = c_nk_0k_1 \dots k_n ;$$

e ponendo

(15) $$k_0 = \frac{1}{h_1}, \quad k_0k_1 = \frac{1}{h_2}, \dots, \quad k_0k_1 \dots k_{n-1} = \frac{1}{h_n},$$

viene

(14′) $$g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \dots + \frac{g_n}{h_n} = \frac{c_n}{h_{n+1}}.$$

116. Come primo esempio, si assuma per $\varphi(x)$ un polinomio in x, di grado m; sarà quindi $c_n = 0$ per $n > m$. Ne risulterà per le (13):

$$g_{m+1} = -c_m, \quad g_n = 0 \quad \text{per} \quad n > m+1;$$

$B(\varphi) = \psi(x)$ è dunque un polinomio di grado $m+1$ in x, i cui coefficienti verificano la relazione

(16) $$g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \dots + \frac{g_{m+1}}{h_{m+1}} = 0.$$

Si può enunciare questo risultato dicendo che « l'operatore B trasforma « ogni polinomio di grado m in un polinomio di grado $m+1$, *ortogonale* « alla successione

(17) $$1, \quad \frac{1}{h_1}, \quad \frac{1}{h_2}, \dots, \quad \frac{1}{h_n}, \dots \text{»}.$$

117. La relazione (16) di ortogonalità è dunque condizione necessaria affinchè un polinomio $\psi(x)$ sia trasformato mediante B di un polinomio in x, il cui grado è di un'unità inferiore a quello di $\psi(x)$. Ora questa condizione è anche sufficiente; per ogni polinomio $\psi(x)$ di grado $m+1$ ortogonale alla successione (17), esiste un polinomio $\varphi(x)$ di grado m di cui $\psi(x)$ è il trasformato mediante l'operatore B. Per dimostrarlo, si applichi, termine a termine, alla

$$\psi(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{m+1}x^{m+1}$$

l'operatore B^{-1}, ricordando che $\xi_n = B^{-1}(x^n)$ è dato dalla (6); verrà

$$B^{-1}(\psi(x)) = \Sigma_r g_r \left(\frac{x^r}{k_r} + \frac{x^{r+1}}{k_r k_{r+1}} + \frac{x^{r+2}}{k_r k_{r+1} k_{r+2}} + \dots\right)$$

e, ordinando secondo le potenze di x, si trova che il coefficiente di x^n viene ad essere

$$\frac{g_n}{k_n} + \frac{g_{n-1}}{k_{n-1}k_n} + \frac{g_{n-2}}{k_{n-2}k_{n-1}k_n} + \dots + \frac{g_1}{k_1 k_2 \dots k_n} + \frac{g_0}{k_0 k_1 \dots k_n},$$

ossia, tenuto conto delle posizioni (15),

$$(18) \qquad \frac{1}{k_0 k_1 \dots k_n}\left(g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \dots + \frac{g_n}{h_n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ma si è supposto che la $\psi(x)$ soddisfi alla relazione (16), ed è $g_n = 0$ per $n > m+1$, onde tutte le espressioni (18) sono nulle per $n > m$, e $B^{-1}(\psi(x))$ viene effettivamente ad essere un polinomio di grado m, c. d. d.

118. Per dare una seconda applicazione di quanto si è ottenuto al n.º 115, si riprenda l'ipotesi del n.º 113 circa l'esistenza di un limite k, finito e diverso da zero, per la successione delle k_n, e sia r il modulo di k. Sia ora $\varphi(x) = \Sigma\, c_n x^n$ una serie avente raggio di convergenza $r_1 > r$; essa sarà un elemento dello spazio delle serie di potenze il cui raggio di convergenza supera r, spazio che indicheremo con $S_x^{(r)}$. Preso un numero r_2 compreso fra r ed r_1, per essere $\lim\limits_{x \to \infty} |k_n| = r$, si può determinare un numero positivo m tale che, per ogni n, sia:

$$|k_0 k_1 \dots k_n| < m r_2^n;$$

ma, per l'ipotesi fatta su $\varphi(x)$, essendo r_3 un numero compreso fra r_2 ed r_1 ed m_1 un numero positivo assegnabile, si ha

$$|c_n| < \frac{m_1}{r_3^n},$$

onde

$$|c_n k_0 k_1 \dots k_n| < m m_1 \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^n,$$

e quindi, per essere $r_2 < r_3$,

$$\lim_{n \to \infty} c_n k_0 k_1 \dots k_n = 0.$$

Usufruendo della relazione (14), tenuto conto delle posizioni (15), si conclude che « il risultato dell'operazione B applicata ad un elemento $\varphi(x)$

« di $S_x^{(r)}$ è un elemento $\psi(x) = \Sigma\, g_n x^n$ appartenente pure ad $S_x^{(r)}$, come « risulta dalle (13), e soddisfacente inoltre alla relazione

$$g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \ldots + \frac{g_n}{h_n} + \ldots = 0; \tag{19}$$

« la serie $\psi(x)$ è pertanto ortogonale alla successione (17) ».

119. Sia $\psi(x) = \Sigma\, g_n x^n$ un elemento di $S_x^{(r)}$ ortogonale alla successione (17), soddisfacente cioè alla relazione (19). Da questa risulta

$$g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \frac{g_2}{h_2} + \ldots + \frac{g_n}{h_n} = -\left(\frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} + \frac{g_{n+2}}{h_{n+2}} + \ldots\right).$$

Detto r_1 il raggio di convergenza della serie $\Sigma\, g_n x^n$, è, per ipotesi, $r_1 > r$; e, scelti r_2 e r_3 tali che sia $r < r_3 < r_2 < r_1$, per essere $\lim\limits_{n\to\infty} |k_n| = r$, si possono determinare due numeri positivi m e m_1 in modo che risulti, per ogni n,

$$\left|\frac{1}{h_n}\right| = |k_0 k_1 \ldots k_{n-1}| < m r_3^n$$

$$|g_n| < \frac{m_1}{r_2^n},$$

e quindi anche

$$\left|\frac{g_n}{h_n}\right| < m m_1 \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^n,$$

$$\left|\frac{g_{n+1}}{h_{n+1}} + \frac{g_{n+2}}{h_{n+2}} + \ldots\right| < m m_1 \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^{n+s} = \frac{m m_1 r_2}{r_2 - r_3}\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^n.$$

Dunque

$$\Sigma \left(g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \ldots + \frac{g_n}{h_n}\right) x^n$$

ha raggio di convergenza maggiore dell'unità e quindi la serie

$$\varphi(x) = \Sigma\, \frac{1}{k_0 k_1 \ldots k_n}\left(g_0 + \frac{g_1}{h_1} + \ldots + \frac{g_n}{h_n}\right) x^n$$

ha raggio di convergenza superiore ad r. Ma quest'ultima serie, come risulta dalla (18), non è altro che la $B^{-1}(\psi(x))$; onde $\psi(x)$ è la trasformata mediante B di un elemento $\varphi(x)$ di $S_x^{(r)}$. La condizione (19), necessaria per una tale trasformata come risulta dal n.° 118, è dunque anche sufficiente; cioè:

« Condizione necessaria e sufficiente perchè un elemento $\psi(x)$ di $S_x^{(r)}$

« sia trasformato mediante B di un elemento dello stesso spazio $S_x^{(r)}$, è « che $\psi(x)$ sia ortogonale alla successione (17) ».

§ V.

120. Nell'ipotesi, ammessa fin qui, che le k_n siano diverse da zero. l'operatore B non può avere radici nello spazio S_x, cioè non può esistere in S_x un elemento

$$\omega = \Sigma\, c_n x^n$$

per il quale l'applicazione di B dia come risultato lo zero, a meno che non siano nulli tutti i coefficienti c_n, come si vede subito in base alle (13), che darebbero $c_0 k_0 = 0$, $c_1 k_1 - c_0 = 0$, $c_2 k_2 - c_1 = 0, \ldots$.

Abbandonando invece l'ipotesi che tutte le k_n siano diverse da zero, si supponga ora $k_0 = 0$, $k_n \neq 0$ per $n > 0$. La c_0 è allora arbitraria; la si faccia uguale all'unità, e si avrà dalle (1'):

$$c_1 = \frac{1}{k_1},\ c_2 = \frac{1}{k_1 k_2}, \ldots,\ c_n = \frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_n}, \ldots;$$

si è così ottenuto la radice $\omega_0(x)$ di B, all'infuori di un moltiplicatore costante arbitrario, nella forma

$$\omega_0(x) = 1 + \frac{x}{k_1} + \frac{x^2}{k_1 k_2} + \ldots + \frac{x^n}{k_1 k_2 \ldots k_n} + \ldots. \tag{20}$$

La serie $\omega_0(x)$ ammette $|k| = r$ come raggio di convergenza.

121. Si supponga ora che sia nullo uno dei numeri k_n, sia k_m con $m > 0$, i precedenti ed i seguenti essendo diversi da zero. Le (13) daranno

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0,$$

la c_m sarà arbitraria, e si può fare uguale all'unità, e si otterrà, all'infuori d'un moltiplicatore costante, la radice di B data da

$$\omega_m(x) = x^m + \frac{x^{m+1}}{k_{m+1}} + \frac{x^{m+2}}{k_{m+1} k_{m+2}} + \ldots. \tag{21}$$

Essendo nulle s delle k_n, e siano $k_{m_1}, k_{m_2}, \ldots, k_{m_s}$, si otterrà nel medesimo modo una radice ω_{m_s} rappresentata dalla (21) in cui m andrà sostituito con m_s, mentre i coefficienti c_n con indice inferiore ad m_s saranno tutti nulli. Anche per la (21) risulta r il raggio di convergenza.

122. Al n.° 111 si è visto come le equazioni (3) di definizione dell'operatore B fossero applicabili allo spazio $\bar{S}$ i cui elementi sono le potenze x^s

di esponente qualsiasi della variabile e le loro combinazioni lineari; si ha per $B(x^s)$ lo sviluppo. dedotto dalla (9),

$$B(x^s) = (k_0 - x)x^s + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^n k_0 \cdot \binom{s}{n} \cdot x^s = k(s)x^s - x^{s+1} \tag{22}$$

e le k_n sono extrapolate (sotto le condizioni di convergenza) da

$$k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n k_0 \cdot \binom{s}{n}. \tag{23}$$

Si vuole ora dimostrare che l'operatore B e la derivazione rispetto ad s sono permutabili. Perciò, nell'espressione (9), si faccia la trasformazione delle $x^n D^n$ nelle $X^n = (xD)^n$ indicata al n.° 74; la (9) prenderà la forma

$$B(\varphi) = (k_0 - x)\varphi + \Sigma\, p_n X^n \varphi, \tag{24}$$

le p_n essendo coefficienti dipendenti linearmente dalle $\Delta^n k_0$; facendo $\varphi = x^s$, essendo $X^n x^s = s^n x^s$, viene:

$$B(x^s) = (k_0 - x)x^s + \Sigma\, p_n s^n x^s.$$

Derivando rispetto ad s, viene

$$\frac{\partial}{\partial s} B(x^s) = (k_0 - x)x^s \log x + \Sigma\, p_n x^s (n s^{n-1} + s^n \log x);$$

ora, applicando la (24) a $\varphi = x^s \log x$, si ottiene

$$B(x^s \log x) = B \frac{\partial}{\partial s} \cdot x^s = (k_0 - x)x^s \log x + \Sigma\, p_n X^n \cdot x^s \log x,$$

e poichè si vede subito che è

$$X^n \cdot x^s \log x = (n s^{n-1} + s^n \log x)x^s,$$

così si conclude che le operazioni $\frac{\partial}{\partial s}$ e B, applicate ad x^s, sono permutabili; ed analogamente sono permutabili B e le derivazioni successive rispetto ad s.

123. Ciò posto, si ritorni alla espressione (10) della $B(x^s)$. Formando la seguente funzione, in cui k_s sta per la $k(s)$ del n.° 111:

$$\omega_s(x) = x^s + \frac{x^{s+1}}{k_{s+1}} + \frac{x^{s+2}}{k_{s+1} k_{s+2}} + \dots + \frac{x^{s+n}}{k_{s+1} k_{s+2} \dots k_{s+n}} + \dots, \tag{25}$$

si verifica subito che è

$$B(\omega_s(x)) = k_s x^s; \tag{26}$$

pertanto, se z è una radice di k_s, $\omega_z(x)$ sarà radice dell'operatore B.

Di più, sia z radice multipla di k_s; derivando la (26) rispetto ad s e tenendo conto della permutabilità di B colle derivazioni successive rispetto ad s (n.° 122), si avrà, le derivazioni essendo indicate con accenti:

$$B(\omega_s') = k_s' x^s + k_s x^s \log x,$$
$$B(\omega_s'') = k_s'' x^s + 2k_s' x^s \log x + k_s x^s \log^2 x,$$
$$B(\omega_s''') = k_s''' x^s + 3k_s'' x^s \log x + 3k_s' x^s \log^2 x + k_s x^s \log^3 x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e da queste risulta che, se z è radice doppia, tripla,... di k_s, oltre alla ω_z, sono radici di B la ω_z', le ω_z' ed ω_z'',....

124. Essendo λ un parametro qualsiasi, le cose dette per l'operatore B si possono ripetere per $B - \lambda$, definito entro S_x da

$$(B - \lambda)x^n = (k_n - \lambda)x^n - x^{n+1}. \tag{27}$$

In particolare, l'operatore $B - \lambda$ ammetterà radici in S_x per i valori $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ di λ; per ognuno di questi, si troverà un elemento $\omega_n(x)$ tale che

$$B(\omega_n(x)) = k_n \cdot \omega_n(x);$$

la successione $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$ costituirà dunque lo spettro, e le $\omega_n(x)$ i rispettivi auto-elementi (elementi invarianti) dell'operatore B nello spazio S_x.

CAP. VIII. - Gli operatori normali di rango r.

§ I.

125. Riprendendo lo spazio S definito nel Capitolo primo, determinato dalla base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$, si considereranno in esso gli operatori normali di rango r. Uno di questi, sia H, è definito nello spazio in discorso dalle relazioni

$$H(\varepsilon_n) = a_{n.n}\varepsilon_n + a_{n.n+1}\varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n.n+r}\varepsilon_{n+r} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

e pertanto anche da una matrice che si indicherà per brevità con

$$|H| = |a_{n.n},\ a_{n.n+1}, \dots,\ a_{n.n+r}|.$$

Come nei Capitoli precedenti, la lettera L, affetta o no da indici, indicherà una dilatazione ed M indicherà l'operazione che fa passare dall'indice n ad $n+1$.

126. L'applicazione dell'operatore H ad un elemento generico

$$\alpha = \Sigma\, c_n \varepsilon_n$$

di S, darà l'elemento

(2) $$H(\alpha) = \Sigma\,(a_{n.n}c_n + a_{n-1.n}c_{n-1} + \dots + a_{n-r.n}c_{n-r})\varepsilon_n\,;$$

ne risulta la trasformazione, *associata* di H, che viene ad operare sui coefficienti c_n; essa si indicherà con $\overline{H}$: la sua matrice si ottiene da quella di H mediante lo scambio delle linee colle colonne.

127. Il prodotto di due operatori normali, l'uno H di rango r, dato da

$$|a_{n.n},\ a_{n.n+1},\dots,\ a_{n.n+r}|,$$

l'altro K di rango s, dato da

$$|b_{n.n},\ b_{n.n+1},\dots,\ b_{n.n+s}|,$$

i fattori essendo presi nell'ordine H, K, viene ad avere la matrice

(3) $$|KH| = |a_{n.n}b_{n.n},\ a_{n.n}b_{n.n+1} + a_{n.n+1}b_{n+1.n+1},$$
$$a_{n.n}b_{n.n+2} + a_{n.n+1}b_{n+1.n+2} + a_{n.n+2}b_{n+2.n+2},\dots,\ a_{n.n+r}b_{n+r.n+r+s}|.$$

Esso è di rango $r+s$ (in qualunque ordine lo si eseguisca), ma non è in generale commutativo.

Risulta da ciò che il prodotto H di r operatori normali di rango uno è un operatore normale di rango r. Se i fattori sono della forma $L_i + M$ (n.° 108), il coefficiente di ε_{n+r} in $H(\varepsilon_n)$ sarà l'unità; nel prodotto

(4) $$H_1 = (L_r + M)(L_{r-1} + M)\dots(L_1 + M)L_0$$

dove è $L_0(\varepsilon_n) = k_n\varepsilon_n$, il coefficiente di ε_{n+r} in $H_1(\varepsilon_n)$ è k_n.

L'operatore H si dirà *semplice* quando il coefficiente di ε_{n+r} in $H(\varepsilon_n)$ è uguale alla unità (per $n=0, 1, 2,\dots$); ogni operatore H si può ridurre semplice, moltiplicando a destra per la dilatazione definita da $L(\varepsilon_n) = \dfrac{1}{a_{n.n+r}}\varepsilon_n$.

128. Si vuole ora dimostrare che « ogni operatore normale semplice del « rango r, ammette, ed in più modi, una decomposizione in fattori della « forma (4) ».

Sia dapprima un operatore normale semplice di rango due:

$$H_2(\varepsilon_n) = a_n\varepsilon_n + a_n'\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}\,;$$

si vogliono determinare le dilatazioni:

$$L(\varepsilon_n) = h_n\varepsilon_n,\quad L_1(\varepsilon_n) = k_n\varepsilon_n,$$

per modo che sia

$$H_2 = (L_1 + M)(L + M).$$

Sviluppando, si ha

$$a_n\varepsilon_n + a_n'\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} = h_nk_n\varepsilon_n + (h_n + k_{n+1})\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2},$$

onde

(5) $$h_0 k_0 = a_0, \quad h_0 + k_1 = a_0', \quad h_1 k_1 = a_1, \quad h_1 + k_2 = a_1', \\ h_2 k_2 = a_2, \quad h_2 + k_3 = a_2', \ldots .$$

Qui la k_0 si può lasciare arbitraria; si determinerà h_0 dalla prima, indi k_1 dalla seconda, poi h_1 dalla terza, e così di seguito (sempreché non si giunga ad una $k_r = 0$). Le dilatazioni L e L_1 sono così determinate, all'infuori della costante arbitraria k_0.

129. Venendo ora al caso generale, si ammetta dimostrata la decomposizione degli operatori normali semplici nella forma (4) fino al rango $r-1$, e si voglia mostrare che la decomposizione stessa vale per il rango r. Sia dunque dato l'operatore normale semplice H_r di rango r:

(6) $$H_r(\varepsilon_n) = a_{n.n}\varepsilon_n + a_{n.n+1}\varepsilon_{n+1} + \ldots + a_{n.n+r-1}\varepsilon_{n+r-1} + \varepsilon_{n+r};$$

vogliamo determinare un operatore H_{r-1}, di rango $r-1$:

(7) $$H_{r-1}(\varepsilon_n) = b_{n.n}\varepsilon_n + b_{n.n+1}\varepsilon_{n+1} + \ldots + b_{n.n+r-2}\varepsilon_{n+r-2} + \varepsilon_{n+r-1}$$

ed una dilatazione $L(\varepsilon_n) = k_n\varepsilon_n$, per modo che sia

(8) $$H_r = (L + M)H_{r-1}.$$

Sostituendo le (6) e (7) nella (8) e sviluppando, si ottiene il sistema di relazioni seguente:

(9) $$\left\{\begin{array}{lll} b_{00}k_0 = a_{00} & b_{11}k_1 = a_{11} & \ldots \\ b_{01}k_1 + b_{00} = a_{01} & b_{12}k_2 + b_{11} = a_{12} & \ldots \\ b_{02}k_2 + b_{01} = a_{02} & b_{13}k_3 + b_{12} = a_{13} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b_{0.r-2}k_{r-2} + b_{0.r-3} = a_{0.r-2} & b_{1.r-1}k_{r-1} + b_{1.r-2} = a_{1.r-1} & \ldots \\ k_{r-1} + b_{0.r-2} = a_{0.r-1} & k_r + b_{1.r-1} = a_{1.r} & \ldots \end{array}\right.$$

Qui si possono lasciare arbitrarie le $b_{00}, b_{01}, \ldots, b_{0.r-2}$, indi determinare successivamente le rimanenti $b_{n.\nu}$ e le k_ν; infatti, dalla prima colonna si ricaveranno le $k_0, k_1, \ldots, k_{r-1}$ in funzione delle suddette arbitrarie; dalla seconda colonna si avranno successivamente le $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1.r-1}$ e la k_r; dalla terza le $b_{22}, b_{23}, \ldots, b_{2r}$ e la k_{r+1}, e così di seguito. Se ne conclude che: « Ogni « operatore semplice di rango r è decomponibile nella forma (8), dove la H_{r-1} « contiene $r-1$ costanti arbitrarie ».

Ed essendosi ammessa la decomposizione di H_{r-1} in un prodotto di $r-1$ fattori della forma $L + M$, ne segue per induzione la decomposizione di H_r in un prodotto di r fattori della stessa forma:

(10) $$H_r = (L_r + M)(L_{r-1} + M) \ldots (L_1 + M).$$

Risulta dal n.° 127 che, se H_r non è un operatore semplice, la sua scomposizione in un prodotto di fattori prenderà la forma

$$H_r = (L_r + M)(L_{r-1} + M) \dots (L_1 + M)L_0. \tag{10'}$$

130. Il sistema (9) si può sfruttare in infiniti altri modi. Come costanti arbitrarie si possono p. es. assumere le $k_0, k_1, \dots, k_{r-2}$. Le prime $r-1$ righe della prima colonna dello specchio (9) permetteranno di ricavare le $b_{00}, b_{01}, \dots, b_{0.r-2}$ in funzione delle $k_0, k_1, \dots, k_{r-2}$ che ora fungeranno da costanti arbitrarie; dall'ultima riga di questa prima colonna si ricaverà la k_{r-1}. Dalla seconda colonna si dedurranno poscia le $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1.r-1}$ e dall'ultima riga di questa la k_r; e così via.

§ II.

131. Assumendo come campo operatorio lo spazio S_x, l'operatore di rango r di cui al n.° 125, H, è definito dalle

$$H(x^n) = a_{n.n}x^n + a_{n.n+1}x^{n+1} + \dots + a_{n.n+r}x^{n+r}; \tag{11}$$

le successioni

$$\begin{array}{lllll} a_{00} & a_{11} & a_{22} & \dots & a_{n.n}, \\ a_{01} & a_{12} & a_{23} & \dots & a_{n.n+1}, \\ a_{02} & a_{13} & a_{24} & \dots & a_{n.n+2}, \\ \dots & & & & \end{array}$$

costituiscono le oblique della matrice della H. Di queste si formino le differenze successive

$$\Delta a_{0.s} = a_{1.s+1} - a_{0.s}, \quad \Delta^2 a_{0.s} = a_{2.s+2} - 2a_{1.s+1} + a_{0.s}, \dots;$$

da qui si otterranno gli scarti rispetto all'operatore M

$$\left\{\begin{array}{l} H'(x^n) = H(x^{n+1}) - xH(x^n) = (\Delta a_{n.n}\cdot x^n + \Delta a_{n.n+1}\cdot x^{n+1} + \dots + \Delta a_{n.n+r}\cdot x^{n+r})x, \\ H''(x^n) = (\Delta^2 a_{n.n}\cdot x^n + \Delta^2 a_{n.n+1}\cdot x^{n+1} + \dots + \Delta^2 a_{n.n+r}\cdot x^{n+r})x^2, \\ \dots \end{array}\right. \tag{12}$$

(Cfr. il Cap. II.), e con questi si potrà applicare ad H lo sviluppo (6) del n.° 68: precisamente, ponendo in questo, come al n.° 111, $\varphi(x)$ al posto di $\mu(x)$ e sostituendo la $\varphi(x)$ della detta formula (6) coll'unità, si viene ad ottenere per H lo sviluppo

$$H(\varphi) = H(1)\varphi + H'(1)\cdot D\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}H''(1)\cdot D^2\varphi + \dots, \tag{13}$$

dove, per le (11), (12), è

$$(14)\qquad \begin{cases} H(1) = a_{0.0} + a_{0.1}x + a_{0.2}x^2 + \dots + a_{0.r}x^r, \\ H'(1) = \Delta a_{0.0}\cdot x + \Delta a_{0.1}\cdot x^2 + \Delta a_{0.2}\cdot x^3 + \dots + \Delta a_{0.r}\cdot x^{r+1}, \\ H''(1) = \Delta^2 a_{0.0}\cdot x^2 + \Delta^2 a_{0.1}\cdot x^3 + \Delta^2 a_{0.2}\cdot x^4 + \dots + \Delta^2 a_{0.r}\cdot x^{r+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La (13), sotto opportune condizioni di convergenza, dà l'extrapolazione della H, primitivamente definita dalle (11) solo per le potenze ad esponente intero della variabile, agli spazi i cui elementi sono funzioni φ indefinitamente derivabili. Per le (14), lo sviluppo della $H(\varphi)$ è dunque:

$$(15)\qquad H(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n a_{0.0} + \Delta^n a_{0.1}\cdot x + \dots + \Delta^n a_{0.r}\cdot x^r)\,\frac{x^n D^n \varphi}{n!}.$$

132. Mediante la trasformazione indicata, al n.° 72 e seguenti, fra gli sviluppi secondo le successive $x^n D^n$ e quelli secondo le potenze X^n della $X = xD$, trasformazione data da

$$(16)\qquad x^n D^n = X^n + c_{n.n-1}X^{n-1} + c_{n.n-2}X^{n-2} + \dots + c_{n.1}X$$

dove le $c_{n.\nu}$ sono i coefficienti di fattoriali, la H potrà svilupparsi secondo le potenze di X: precisamente, posto

$$a_0(x) = a_{0.0} + a_{0.1}x + \dots + a_{0.r}x^r, \quad \Delta a_0(x) = \Delta a_{0.0} + \Delta a_{0.1}\cdot x + \dots + \Delta a_{0.r}\cdot x^r, \dots,$$

sarà

$$(17)\qquad H(\varphi) = a_0(x)\varphi +$$

$$+ \sum_{n\;1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\Delta^n a_0(x) + \frac{1}{(n+1)!}c_{n+1.n}\Delta^{n+1}a_0(x) + \frac{1}{(n+2)!}c_{n+2.n}\Delta^{n+2}a_0(x) + \dots\right) X^n(\varphi).$$

SALVATORE PINCHERLE

La sera del 10 luglio 1936-XIV un fulmineo attacco di angina pectoris troncava in Bologna, Sua città adottiva, la nobile esistenza di SALVATORE PINCHERLE: benchè l'illustre Scienziato già avesse superato l'83° anno d'età, pure la notizia della Sua dipartita giunse del tutto inaspettata — e perciò tanto più dolorosa — a chi L'aveva conosciuto fino all'ultimo nella piena freschezza delle Sue forze fisiche ed intellettuali.

Nel PINCHERLE erano mirabilmente connaturate e fuse le più elevate doti di Cittadino e di Uomo, di Scienziato e di Maestro. Di animo estremamente buono, delicato e probo, e di una modestia quasi scontrosa, che ritardò talora il pieno riconoscimento dei Suoi meriti scientifici, Egli ebbe ingegno versatile e soda cultura in svariati rami dello scibile; fu sino alla fine di un'attività instancabile, interessandosi con spirito pronto ed arguto a tutto quanto Lo circondava, e perseverando con giovanile entusiasmo nel lavoro scientifico: del che fa fede la bella e poderosa Memoria postuma che esce in questo stesso fascicolo degli « Annali ».

Innumerevoli scolari, d'ogni ordine di scuole e di varie generazioni, Lo hanno potuto conoscere ed apprezzare attraverso i Suoi libri di testo; molti inoltre ricordano e sempre ricorderanno con riconoscenza affettuosa e devota ammirazione la singolare efficacia del Suo insegnamento, il paterno e spontaneo Suo interessamento, nonchè l'esempio luminoso della Sua vita austera, completamente dedicata alla Scienza ed alla Famiglia.

La vastissima opera scientifica del compianto Maestro si riattacca dapprima a quella del WEIERSTRASS, del quale Egli aveva seguito le lezioni in Berlino nel 1877-78, e si svolge poi per oltre mezzo secolo secondo direttive semplici ed originali, trattando importanti questioni inerenti allo sviluppo di una funzione analitica in serie di funzioni di tipo assegnato, occupandosi in modo magistrale della teoria delle equazioni alle differenze, dei sistemi ricorrenti e di varî algoritmi infiniti, per culminare collo studio degli operatori e degli spazi funzionali, del quale il PINCHERLE è da riguardarsi come un precursore. In tali campi l'insigne Scienziato lascia un'orma profonda con oltre 230 note e memorie; e numerosi e pregevoli sono altresì i Suoi trattati, per la maggior parte di carattere didattico: di tutto ciò verrà detto prossimamente in questi « Annali » coll'ampiezza dovuta.

SALVATORE PINCHERLE, che negli ultimi anni era il Decano dei matematici italiani, godeva in Italia ed all'estero di indiscussa autorità, di cui sovente si valse a pro della Scienza. Così Egli fondò nel 1922 l'Unione Matematica Italiana, della quale fu per nove anni Presidente e di cui diresse fin che visse il « Bollettino », ed organizzò sapientemente — superando gravi difficoltà, retaggio della Grande Guerra — il Congresso Internazionale dei Matematici che si svolse nel 1928 in Bologna, con pieno successo.

Faceva parte della Direzione degli « Annali di Matematica » dal 1918; quando, nel 1923, la stampa di questo glorioso Periodico fu trasportata a Bologna, Egli si dedicò ad esso con grande abnegazione ed appassionato fervore, prodigandogli le Sue cure più amorevoli ed efficaci. Nel presente fascicolo, il primo ch'Egli purtroppo non ha più potuto vedere, noi rivolgiamo con deferente riconoscenza il pensiero alla Memoria di Lui, esternando il cocente rimpianto nostro e di tutti i collaboratori per la Sua scomparsa.

La Direzione

Al compianto prof. SALVATORE PINCHERLE *è succeduto nella Direzione degli* « Annali di Matematica », *per concorde voto dei Colleghi, il prof.* BENIAMINO SEGRE *della R. Università di Bologna.*

INDICE DEL TOMO XV DELLA SERIE 4ª