ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

---

49. BAND.

MIT 3 DOPPELTAFELN, 3 TAFELN UND 184 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Auskünfte.

Anfrage.

Bücherschau.

Zur Theorie des räumlichen Fachwerks.

Von Dr. Ing. Alexander Hasch in Wien.

Mit 3 Doppeltafeln in Lithographie.

I. Einleitung.

Zweck dieser Arbeit ist es, die theoretische Berechnung des wichtigsten räumlichen Fachwerks — des Kuppelfachwerks — weiter auszuführen als dies bis jetzt geschehen ist, namentlich in Bezug auf einseitige ungünstigste Belastungen, die immer nur eine sehr spärliche Behandlung erfahren haben.

Vor allem aber ist es nötig, diejenigen wichtigsten Methoden der Theorie des räumlichen Fachwerks zusammen zu fassen, welche entweder im folgenden Anwendung finden oder aber den Anstoß zu vorliegender Arbeit gaben und so die Ansätze und teilweisen Ausführungen derselben erkennen lassen.

Schwedler sagt (die Konstruktion der Kuppeldächer, Zeitschrift für Bauwesen 1866): „... bei den bisherigen Betrachtungen ist die ungleichförmige Belastung nicht berücksichtigt worden, da durch diese die Berechnung sehr kompliziert wird, *indem die elastischen Verschiebungen der einzelnen Punkte* in dieselbe eintreten müssen.

Für die Praxis kann man indessen die Kenntnis der Grenzen der Änderungen der Spannungen nicht entbehren und sind dieselben deshalb durch die nachstehenden einfachen Anschauungen, wenn auch vielleicht etwas zu weit, bestimmt worden. ... (Für die Grenzen der Spannungen der einzelnen Sparren-, Ring- und Diagonalstäbe sind nun die bekannten Schwedlerschen Annahmen gemacht). ... Bei Berechnung der Diagonale ist zu erwägen, daß neben dem Durchmesser, welcher die Belastung begrenzt, ein belasteter und ein unbelasteter Sparren liegt, und daß die Spannung beider, wenn sie in zwei verschiedenen gleichförmig belasteten Kuppeln gelegen wären, sich wie die Belastungen p und q pro Flächeneinheit verhalten würden. Nimmt man an, daß durch die Diagonalen die ganze Spannungsdifferenz übertragen wird, so ist diese Annahme jedenfalls zu groß, wenn aber die Diagonalen derselben widerstehen können, so sind sie als ausreichend stark zu erachten“.

Also analytisch ausgedrückt: (siehe Figur 1):

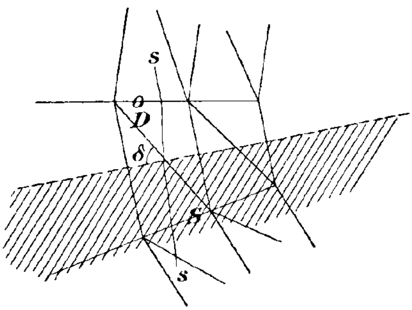
$$D \cos \delta + S = 0, \quad D = -\frac{S}{\cos \delta}.$$

Über den Winddruck als diejenige Ursache, welche die größten Spannungen hervorruft, spricht Schwedler gar nicht.

Die Schwierigkeit, eine möglichst zutreffende Annahme über die ungünstigste Belastung zu treffen, tritt namentlich deutlich bei den Diagonalen hervor.

Zusammenfassung: einseitige Belastungen sind ganz vermieden; die einzige Belastungsart (Winddruck überhaupt ausgenommen) in Bezug auf ungünstigste Spannungen der einzelnen Stabgattungen ist die der gleichförmigen, totalen Ringbelastung.

Fig. 1.



Der nächste Schritt in der Entwicklung der Berechnung von Fachwerkkuppeln war die Spannungsbestimmung mittelst von Knotenpunkt zu Knotenpunkt fortschreitender Kräftezerlegung.

Gewissermaßen als Normalkuppelfachwerk halten wir uns im folgenden eine statisch bestimmte[1]) Schwedlerkuppel vor Augen, deren Knotenpunkte auf einer Drehungsfläche liegen und deren Sparrenausteilung eine regelmäßige ist. Die Berechnung eines derartigen Schwedlergeflechtes erfolgt immer durch wiederholte Lösung der Aufgabe: Drei in einem Punkt m angreifende Kräfte $S_1\,S_2\,S_3$, deren Richtungen bekannt sind, so zu bestimmen, daß sie einer ebenfalls in m angreifenden Kraft P das Gleichgewicht halten. Die Lösung geschieht graphisch, bei erforderlicher großer Genauigkeit analytisch. Die allgemeine Berechnung eines Schwedlergeflechtes kann nun nach den zwei Methoden erfolgen:

1. nach Föppl.[2]) (Ähnlich der Culmannschen Methode in der Ebene).

---

1) Unter einem statisch bestimmten Fachwerke soll immer ein solches verstanden werden, bei welchem 1. die notwendige Stabzahl vorhanden ist, 2. die dem Fachwerk eigentümliche Funktionaldeterminante $\gtrless 0$ ist. (Dieser letztere Punkt entscheidet bekanntlich, ob die Anordnung der vorhandenen notwendigen Stäbe ein steifes Gebilde erzeugt oder nicht. Ist die Funktionaldeterminante $= 0$, so ist Labilität des Fachwerks vorhanden, und zwar entweder „endliche Beweglichkeit" oder „unendlich kleine Beweglichkeit" {Momentmechanismus}).

2) Föppl, Das Fachwerk im Raume.

2. nach Müller-Breslau[1]) mittelst Anwendung des Satzes aus der projektiven Geometrie: drehen sich die Seiten eines veränderlichen n-Eckes um feste Punkte, die auf einer Geraden liegen, und verschieben sich hierbei $(n-1)$ Ecken längs beliebiger gegebenener Geraden, so beschreibt auch die letzte Ecke eine Gerade. (Dabei ist natürlich das n-Eck veränderlich in Bezug auf Seitenlängen und Winkel).

Bei Belastung eines Knotenpunktes durch eine irgendwie gerichtete Einzellast kommt immer nur eine bestimmte Stabgruppe bei der Lastübertragung auf die Widerlagerknotenpunkte in Betracht.

Die *Netzwerkkuppel* kann auf dieselbe Weise aus einem Kugelflechtwerk (Föppl) abgeleitet werden, wie eine Schwedlerkuppel, nur muß das dabei zugrunde gelegte Kugelflechtwerk eine andere Stabanordnung besitzen. Bei den Schwedlergeflechten fallen je zwei Dreiecke der Mantelfläche in eine Ebene; bei den Netzwerken ist jedes Dreieck der Mantelfläche unabhängig von den beiden Nachbardreiecken desselben Geschosses. (Um zu erklären, warum im folgenden immer Netzwerkkuppeln mit ungerader Seitenzahl angewandt wurden, sei erwähnt, daß symmetrische Netzwerkgeflechte mit gerader Seitenzahl Fachwerke mit „endlicher Beweglichkeit“, daher praktisch unbrauchbar sind; das ganze labile Fachwerk bildet einen geschlossenen Mechanismus entstanden aus einer zwangläufigen kinematischen Kette, so daß sich der überschüssige Zwang in der Kette mit dem Kettenschluß verträgt).

Die Berechnung der Stabspannungen kann geschehen:

1. nach der Methode von Föppl.[2]) Dieselbe führt wieder die Berechnung der Stabspannungen eines Netzwerkgeschosses selbst bei unregelmäßigem Grundriß und allgemeinster Lage und Richtung der angreifenden Kraft schließlich auf die Aufgabe der Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten zurück. Eine in einem Knotenpunkt angreifende Kraft versetzt sämtliche Stäbe in Spannung (in Zonen unterhalb dieses Knotenpunktes).

2. mittelst Anwendung des Verfahrens von Henneberg auf die Netzwerkgeflechte.

Dieses ist hier von Wichtigkeit, weil das von Müller-Breslau gegebene Verfahren zur Beurteilung ungünstigster (einseitiger) Belastungen auf den Begriff der zwangläufigen kinematischen Kette in Verbindung mit Berechnung elastischer Knotenpunktsverschiebungen nach einer Methode gegründet ist, welche der Hennebergschen Spannungsbestimmung nachgebildet ist.

---

1) Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralblatt der Bauverwaltung 1891—1892.

2) Föppl, Das Fachwerk im Raume.

Dasselbe gibt bekanntlich eine Stabspannung in der Form:

$$S = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_a Z_a + \mathfrak{S}_b Z_b + \mathfrak{S}_c Z_c + \ldots + \mathfrak{S}_n Z_n.$$

Dabei sind $\mathfrak{S}_a, \ldots, \mathfrak{S}_n$ unabhängig von den Lasten; die Spannungen $\mathfrak{S}_0$ müssen für jeden Belastungsfall ermittelt werden. $Z_a, Z_b, Z_c, \ldots, Z_n$ bedeuten die Spannungen der beseitigten Stäbe. Setzt man die Spannungen in den „Ersatzstäben" gleich Null, so erhält man ebensoviele Gleichungen ersten Grades als Kräfte Z vorhanden sind, ist also imstande die letzteren zu berechnen. Bedingung ist jedoch, daß die Nennerdeterminante jener Gleichungen einen von Null verschiedenen Wert annimmt. (Sonst wäre nämlich das Fachwerk entweder eines von „endlicher Beweglichkeit", oder aber von „unendlich kleiner Beweglichkeit" oder ein sog. „Momentmechanismus").

Die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte. (Elastische Formänderungen).

Die allgemeine Untersuchung der Formänderung eines statisch bestimmten räumlichen Fachwerks kann man nach einem Verfahren ausführen (Müller-Breslau)[1]), welches sich dem oben gezeigten für die Ermittlung der Spannkräfte anschließt.

Die Längen der beseitigten Stäbe seien $z_a z_b z_c \ldots$, die Längen der Ersatzstäbe $y', y'', y''', \ldots$ Schreibt man den letzteren zunächst die wirklichen Änderungen $\Delta y', \Delta y'', \Delta y''', \ldots$ zu, so erhält man für die Verschiebung δ_m, welche irgend ein Knotenpunkt m nach einer bestimmten Richtung erfährt, den Ausdruck:

$$\delta_m = \delta_{m0} + \delta'_m \Delta y' + \delta''_m \Delta y'' + \delta'''_m \Delta y''' + \ldots,$$

worin δ_{m0} den Wert von δ_m für den Fall bedeutet, daß die Längenänderungen von Δy sämtlicher Ersatzstäbe gleich Null angenommen werden, während $\delta'_m, \delta''_m, \ldots$ beziehungsweise die den Zuständen $\Delta y' = 1$, $\Delta y'' = 1, \ldots$ entsprechenden Werte von δ_m vorstellen.

Ferner hat man für die Änderungen von $z_a, z_b, \ldots$,

$$\begin{cases} \Delta z_a = \Delta_0 z_a + \Delta' z_a \Delta y' + \Delta'' z_a \Delta y'' + \Delta''' z_a \Delta y''' + \ldots \\ \Delta z_b = \Delta_0 z_b + \Delta' z_b \Delta y' + \Delta'' z_b \Delta y'' + \Delta''' z_b \Delta y''' + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man die Δy berechnen; dadurch sind auch die δ_m bekannt.

---

1) Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralblatt der Bauverwaltung 1891—1892.

Kinematische Ermittlung der Stabkräfte. Einflußzahlen. Einflußlinien der Senkungen (Müller-Breslau). [1])

Es soll die Spannung S_{ik} irgend eines Stabes ik (Länge $= s_{ik}$) in der Form:

$$S_{ik} = \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \ldots + \varkappa_m P_m + \ldots$$

dargestellt werden, wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ die Einflußzahlen sind. Zur Lösung dieser für die Beurteilung des gefährlichsten Belastungszustandes wichtigen Aufgabe erhält man die Gleichung

$$S_{ik} \Delta s_{ik} = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \ldots + P_m \delta_m + \ldots,$$

in welcher $\delta_1, \delta_2, \ldots$ die Projektionen der Verschiebungen der Punkte 1, 2, 3, ... auf die Richtungen von $P_1, P_2, \ldots$ bedeuten, und man findet die *Einflußzahlen* mittelst der Beziehung: $\varkappa_m = \frac{\delta_m}{\Delta s_{ik}}$. Die Aufgabe der Berechnung der Einflußzahlen ist nur ein einfacher spezieller Fall der früher behandelten Darstellung der elastischen Verschiebungen. Dort handelte es sich um die Ortsveränderungen der Knotenpunkte infolge von Längenänderungen sämtlicher Stäbe; hier wird nach dem Einfluß einer einzigen willkürlichen Längenänderung gefragt. Setzt man diese letztere gleich 1, so erhält man: $\varkappa_m = \delta_m$. Hat man nun für einen bestimmten Stab die der Längenänderung $\Delta s_{ik} = 1$ entsprechenden Verrückungen der übrigen Knotenpunkte mittelst eines Verschiebungsplanes (nach Williots für den Raum erweiterter Methode) bestimmt, und diese erhaltenen Verrückungen der Einfachheit halber in je drei Komponenten ξ, η, ζ zerlegt, so ist man imstande, dies im wesentlichen so auszunützen:

a) der Einfluß lotrechter Lasten $P_1, P_2, \ldots$ auf die gesuchte Spannung ist dann $S_{ik} = \Sigma P \zeta$.

b) der Einfluß einer lotrechten Last $P = 1$, welche sich längs eines Sparrens und hierauf längs des obersten Ringes bewegt, kann durch eine *Einflußlinie der Senkungen* ζ dargestellt werden.

c) kann man den Einfluß $S_{ik} = \Sigma P_m \delta_m$ einer Gruppe von in Meridian-Ebenen liegenden Lasten P_m (z. B. der Windkräfte nach Loessl) berechnen.

Damit ist aber nur der eine Stab S_{ik} erledigt, für welchen eben der ganze Verschiebungsplan gezeichnet wurde.

---

1) Müller-Breslau, Beitrag zur Thorie des räumlichen Fachwerks, Centralblatt der Bauverwaltung 1891—1892.

Anmerkung. Man kann hierbei die Einführung der zwangläufigen kinematischen Kette auch zur Anwendung des Verfahrens „der um 90^0 gedrehten Verschiebungen" benützen.

II. Einflußräume; Einflußflächen und -Linien.

Netzwerkkuppel; Schwedlerkuppel. Verallgemeinertes System der Berliner Reichstagskuppel.

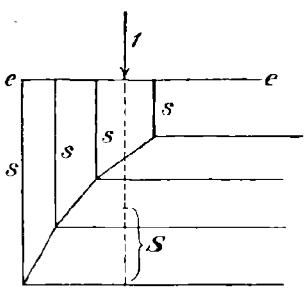
Die wichtigste Methode der allgemeinen Berechnung ebener (sowohl Fachwerk- als auch Vollwand-)Baukonstruktionen bildet die der „Einfluß- oder Influenzlinien" irgend einer „Wirkung Z". Wir fassen hier Z vorläufig nur als Stabspannung auf.

Rebhann war der erste, der analytisch bewies, daß es für Diagonalstäbe eines ebenen Fachwerks im allgemeinen einen neutralen oder „Nullpunkt" geben müsse. Die einfache graphische Konstruktion und den Beweis dazu gab dann C. Culmann. Müller-Breslau erweiterte dies durch die Benützung der sog. „Zustände $A = 1$ und $B = 1$", um so direkt die Einflußlinie der Stabspannung" für einen bestimmten Stab zu konstruieren.

Es soll nun in den folgenden Zeilen in der Berechnung des Kuppelfachwerks, deren Entwicklung oben in gedrängtester Form mit besonderer Betonung des für diesen Aufsatz Wesentlichsten, bis zur teilweisen Bestimmung der ungünstigsten Lasten hinauf, gegeben wurde, der Schritt zum Allgemeinsten getan werde.

Es sei ein beliebiges Kuppelgeflecht gegeben. Die Lastübertragung findet nur an den Knotenpunkten statt; wir denken uns dieselbe etwa durch Ständer vermittelt. Oben sei auf dieselben eine materielle Ebene gelegt, die entsprechend den Lastübertragungspunkten zerschnitten gedacht wird (so wie die Längsträger, welche auf den Querträgern ruhen, in der ebenen Theorie).

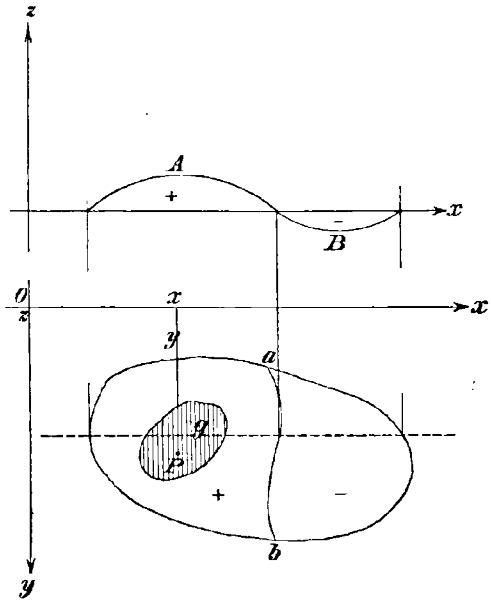
Fig. 2.



Über dieselben wandere nun eine Einzellast = 1. Bei einer allgemeinen aber ganz bestimmten Lage dieser wandernden Last = 1 besteht im Kuppelfachwerk ein ganz bestimmter Spannungszustand. Trägt man nun für einen bestimmten Stab S die ihm entsprechende Spannung auf der Lastlotrechten auf (s. Figur 2), und tut dies für jede Lage der Last 1, so entsteht für den Stab eine „Einfluß- oder Influenzfläche". Die „Wirkung" ist gleich der Stabspannung.

Betrachten wir zunächst eine solche allgemeine Einflußfläche. Die entstehenden Räume A, B (s. Fig. 3) nennen wir „Einfluß- oder Influenzräume“, die Linien $a\,b$ „neutrale oder Nulllinien“ (eine Verwechslung mit den Nulllinien eines Möbiusschen Nullsystems ist wohl nicht möglich); auch gibt es „neutrale oder Nullflächen“.

Fig. 3.



Es ist nun:

$$dZ = p \cdot dx \cdot dy \cdot \eta,$$

also

$$Z = \iint\limits_g p \cdot dx \cdot dy \cdot \eta$$

p = Belastung für die Flächeneinheit.

Ist die Belastung gleichförmig verteilt, also p = const., so ist

$$Z = p \iint\limits_g \eta \cdot dx \cdot dy,$$

d. h.

$$Z = p.\, K,$$

wobei K = Einflußraum über dem Gebiete G.

Anmerkung: K ist nur in der Darstellung und nicht in der Dimension ein Körper. Daß diese Gleichung nur eine Zahlengleichung ist, sieht man auch daraus, daſs die Dimensionen links und rechts nicht übereinstimmen.

Allgemein ist für ein senkrechtes Lastsystem

$$Z = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + \ldots = \sum P \cdot \eta.$$

Die Ermittlung von max Z und min Z bei gegebenem Einflußraume ist dieselbe wie in der Ebene.

Als Belastung ziehen wir von jetzt an nur die gleichförmig verteilte (natürlich auch partiell) in Betracht.

Bevor wir in der allgemeinen Betrachtung weitergehen, sei erwähnt, daß man den oben aufgestellten Begriff auch „Einflußfläche über Ebenen“ nennen kann; daß diese Form für Flechtwerkträger[1]) (bei all-

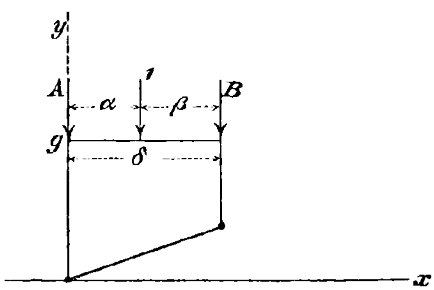
1) Wir sagen bei den theoretischen Untersuchungen gewöhnlich „Fachwerk“ oder „Flechtwerk“ ohne zwischen „Fachwerk“ und „Fachwerkträger“ immer streng

gemeinster Form und Lage derselben) nicht brauchbar ist, sieht man sofort ein. Wohl kann man bei einem Flechtwerkträger allgemeinster Form sich „Einflußflächen um Punkte“ denken (dadurch entstanden, daß man die in einem Flechtwerkknotenpunkt angreifende „Kraft 1“ sich beliebig gedreht denkt und immer auf der Richtung derselben den jeweiligen Spannungsbetrag S aufträgt), doch auch diese sind der Natur der Sache nach ohne Bedeutung für die wirkliche Berechnung der ungünstigsten Stabspannungen.[1])

a) Das Netzwerkgeflecht.

Denken wir uns nun die Stabspannung in einem bestimmten Stabe S für die Laststellungen a, b, c ermittelt und über a, b, c aufgetragen. Es läßt sich dann leicht zeigen: Die Einflußlinie zwischen zwei Nachbarknotenpunkten ist eine Gerade.

Fig. 4.



Ferner: Die Einflußfläche zwischen drei Nachbarknotenpunkten ist eine Ebene.

Man hat nämlich im ersten Fall (s. Fig. 4):

$$\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{A}{\beta} = \frac{B}{\alpha} = \frac{1}{\delta} = c,$$

$$A \cdot S_a + BS_b = 1 \cdot S_\alpha,$$

$$S_\alpha = S_b \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \alpha = C \cdot \alpha,$$

also eine Gerade.

Da die Einflußlinien ab, bc, ca (s. Fig. 5) Gerade sind, so ist auch die Einflußfläche zwischen drei Knotenpunkten eine Ebene. Denn durch den beliebigen Ort ω der Einzellast = 1 kann man einen Strahl durch einen der Nachbarknotenpunkte, etwa durch b ziehen; zerlegt man nun 1 in zwei Komponanten bei b und β, so hat man in Bezug auf γ dieselben Verhältnisse, wie früher bei g.

---

zu unterscheiden; es ist dies erlaubt, weil man ja die Auflagerbedingungen in jedem Auflagerknotenpunkte durch „Auflagerstäbe“ ersetzen kann, wodurch sofort der zuerst wesentlich erscheinende Unterschied so gut wie verschwindet.

1) Demnächst sollen einmal die interessanten Beziehungen besprochen werden, welche bei Inangriffnahme eines Flechtwerks (beziehungsweise eines Flechtwerkträgers) durch ein *„gebundenes Kräftesystem“* zwischen diesen äußeren Kräften, den durch dasselbe im Flechtwerk hervorgerufenen Stabspannungen und gewissen, mit dem Flechtwerk zusammenhängenden charakteristischen Flächen bestehen. (Anwendung der Astatik auf die Flechtwerktheorie).

Dadurch ist also für den Mantel des Netzwerkgeflechtes als Einflußfläche eine Polyederfläche bestimmt, die aus lauter Dreiecken besteht

Wir haben vorausgesetzt, daß die Knotenpunkte der Kuppel auf einer Drehungsfläche liegen. Wegen der Symmetrie des ganzen Kuppelfachwerks genügt es bei der Bestimmung der Einflußflächen der Spannungen für sämtliche Kuppelstäbe nur die Belastungsfälle: 1^t in Knotenpunkt A, in B, u. s. w. (s. Fig. 6) d. h. also nur in je einem

Fig. 5.

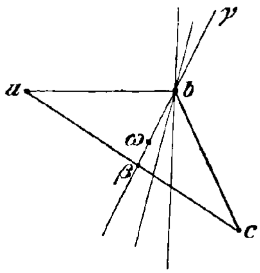
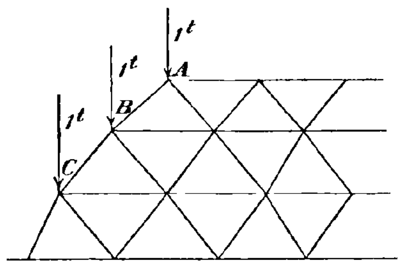


Fig. 6.



Knotenpunkt eines Ringes zu betrachten. Diese zur Bestimmung der Einflußflächen sämtlicher Stabgattungen ausreichenden n Belastungsfälle (n = Geschofszahl der Kuppel) sollen heißen;

$$\text{Zustand } A = 1, \quad \text{Zustand } B = 1, \quad \text{Zustand } C = 1 \text{ u. s. w.}$$

Für jeden solchen „Zustand" müssen die Stabspannungen bestimmt werden (nach den früher angegebenen Methoden). *Beim Netzwerkgeflecht sind stets sämtliche Stäbe (unterhalb des belasteten Knotenpunktes) in Spannung.*

b) Das Schwedlergeflecht.

Zur wirklichen Ausführung der Methode der „Einfluß- oder Influenzräume" dienen hier wieder die Belastungsfälle, welche wir als die

Fig. 7.

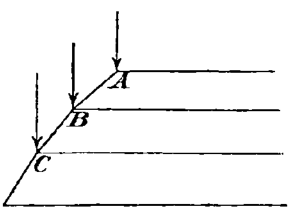
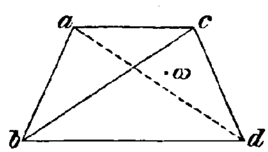


Fig. 8.

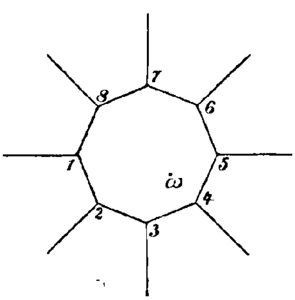


Zustände $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, ... bezeichnet haben, im ganzen n (= Geschoßzahl) Zustände.

Hier tritt nun ein Umstand ein, den wir schon in a) (in Bezug auf den Raum des Laternenringes) stillschweigend übergangen haben.

Steht nämlich in ω über einem Trapezfelde die Einzellast $= 1$, so liegen um dieselbe vier benachbarte Lastübertragungspunkte. Im ersten Augenblick erscheint es, als ob es drei wären und man infolgedessen 1 sofort in drei Komponenten zerlegen könnte, und ähnlich so die Einflußflächen der Stabspannungen zu konstruieren, wie es beim Netzwerkgeflechtmantel der Fall war. Man muß diesen Gedanken aber sofort aufgeben. Es ist nämlich auf der früher erwähnten, der leichteren Vorstellung wegen eingeführten Ebene *ee*, welche die Lastübertragung vermittelt, Schnitt *ad* von derselben Berechtigung wie (der durch die vorhandene Diagonale bestimmte) *bc*. Man erkennt dies aber auch daraus, daß eine zugelassene zweifache Zerlegung von 1 (Lasteinheit) einmal nach *bcd* (s. Fig. 8), ein anderes Mal nach *abd* (bei der angenommenen Lage von ω) nicht ein und denselben Wert des Einflusses auf die Stabspannungen gibt, also falsch ist. Überdies spielt die in das Feld eingespannte Diagonale schon deswegen nicht die ihr oben zugedachte Rolle, weil sie ja auch ganz fehlen kann. (Um beim statisch bestimmten Geflecht zu bleiben, stelle man sich etwa vor, daß die Diagonalen eines Geschosses, höchstens bis auf drei, entfernt und im Laternenring zur Bildung eines sogenannten „Scheibenringes“ oder in sonstiger Anordnung verwendet wurden.[1]))

Fig. 9.



Wären die vier Knotenpunkte des Trapezfeldes absolut feste Punkte, so wäre die Zerlegung der Last 1 (im Punkte ω) nach diesen vier vertikalen Komponenten ∞^1fach möglich. Diese Erörterung läßt sich auch ganz analog auf den noch allgemeineren Fall des Laternpolygons des Kuppelfachwerks (das System des Geflechtes ist hiebei ganz gleichgültig) anwenden. Es haben nun infolge der Elastizität des ganzen Stabgebildes die Punkte 1, 2, . . ., 8 (s. Fig. 9) gewisse Senkungsfähigkeiten (+ oder —). Das Fachwerk ist ein statisch bestimmtes und setzt sich den auf dasselbe einwirkenden Lasten gegenüber in einer und nur in einer ganz bestimmten Weise ins Gleichgewicht. Es ist diejenige Zerlegung der im Punkt ω wirkenden Last $= 1$ die wirklich eintretende, welche die wahre Formänderungs-

1) Die Prüfung, ob bei diesem Austausch von Stäben das Fachwerk auch wirklich *ein stabiles bleibt*, ist eine Sache für sich.

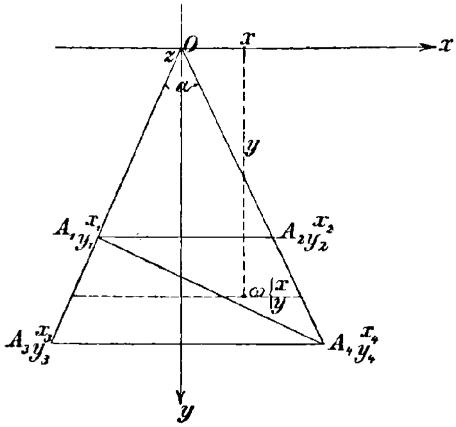
arbeit des Fachwerks zu einem Minimum macht.[1]) Dabei ist aber vorausgesetzt, (was wir auch immer tun werden, wenn nicht eigens anderes hervorgehoben):

1. ein spannungsloser Anfangszustand;

2. die Temperaturänderung $\Delta t = 0$;

3. unverschiebbare Widerlagerknotenkunkte $\Delta c = 0$. (Die beweglichen Auflager seien reibungslos).

Fig. 10.

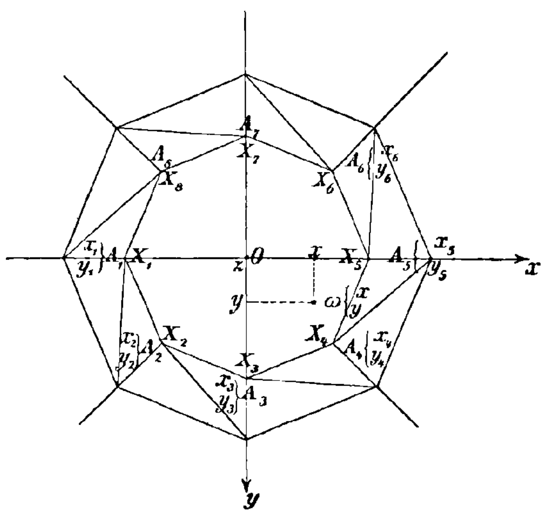


Es sei nun irgend ein Kuppelgeflecht gegeben; seine Laternringknotenpunkte heißen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$. ($n$ = Anzahl der Sparren).

Die für eine bestimmte Stellung der Last 1 auf der Laternenfläche im Punkte $\omega\,(x, y)$ sich ergebenden Komponenten seien entsprechend: $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$.

Die Last wandere über die ganze Laternenfläche. Welches ist die Einflußfläche der wahren inneren Deformationsarbeit des Kuppelfachwerks?

Fig. 11.



Die wahre Deformationsarbeit ist

$$(1)\quad A = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 s}{Ef}.$$

Dabei sind: S die Stabspannungen für den ins Auge gefaßten bestimmten Belastungsfall, s die Stablänge, f der Stabquerschnitt, E der Elastizitätsmodul (der für sämtliche Stäbe konstant sei).

1) Daß hier bei der Benützung des Minimumsatzes von Alberto Castigliano eine neue allgemeine Form der „Deformationsarbeit" angewendet werden muß, wird sich später zeigen.

Für eine bestimmte Laststellung ω erhält man die Komponenten X_1, X_2, ..., X_n immer aus der Bedingung, daß die Formänderungsarbeit ein Minimum wird. Die Komponenten X_1, ..., X_n, die das Min A erzeugen, lassen sich aus dem Gleichungssystem:

$$(2) \qquad \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial A}{\partial X_n} = 0$$

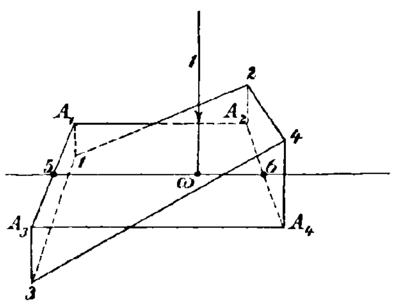
berechnen.

Es ist nämlich:

$$(3) \qquad S = S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n \ldots,$$

wobei S_1 die Stabspannung entsprechend der Last $= 1$ im Knotenpunkte A_1 u. s. w. ist. Führt man (3) in das System (2) ein, so erhält man ein System homogener, linearer Gleichungen in den $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Dasselbe gibt in diesem Falle (außer $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., was hier der Natur der Sache nach keine Rolle spielt) ein ganz bestimmtes Verhältnis $X_1 : X_2 : X_3 : \ldots : X_n$ der Unbekannten, unabhängig von der Größe der wandernden Last; d. h. geometrisch, es ist dadurch ein ganz bestimmter Ort der Laternenfläche hervorgehoben, in welchem eben die wandernde Last stehen muß, damit das Min A eintritt. Im allgemeinen ist dieses analytische Minimum der Formänderungsarbeit über der Laternenfläche *vorhanden*, und fällt dessen Ort mit der Kuppelachse zusammen. Die Fläche der Deformationsarbeiten ist eine in Bezug auf die Kuppelachse *symmetrische*.

Fig. 12.



Wir gehen nun zur allgemeinen Berechnung der Größen X_1, X_2, X_3, ..., X_n, selbst über.[1]) Mit einem Trapezfelde (s. Fig. 10) sei der

1) Als ein spezieller Fall der obigen Aufgabe, der auch nicht ohne praktisches Interesse ist, sei folgender erwähnt: eine ideelle gewichtslose Ebene ruht auf n Vertikalstäben von verschiedener Länge und verschiedenem Querschnitt; E_1, E_2, ..., E_n seien die Elastizitätsmoduln der einzelnen Stabmaterialien. In einem beliebigen Punkte ω der Ebene wirkt auf dieselbe die Last $= 1^t$; wie groß sind die n Komponenten, welche auf die Vertikalstäbe übertragen werden?

Nennt man die Spannung in einem Auflagerstab allgemein S, so kann diese durch

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 + \ldots$$

dargestellt werden.

Verwandelt man nämlich die statisch unbestimmte Stützung in eine *statisch bestimmte*, d. h. entfernt man alle übrigen Stützen bis auf drei, und nennt die

Einfachheit halber begonnen. Die Einflußlinien längs der Sparrenstab- und Ringstabzüge seien schon bestimmt. Fig. 12 zeigt ein Trapezfeld mit denselben.

Wir schlagen zur Bestimmung *der Gleichung der Einflußfläche* folgenden Weg ein:

Es muß die wahre innere Deformationsarbeit ein Minimum sein. Dabei ist aber fest zu halten:

Bei vollkommen willkürlicher Bewegung des Punktes ω über das ganze Feld ist die mögliche Komponentenmannigfaltigkeit ∞^3; bei einem bestimmten Punkte ω ist diese nur mehr ∞^1. Die Festlegung des Punktes ω hat aber auch im Ausdrucke der Formänderungsarbeit Berücksichtigung zu finden. Mit anderen Worten es muß

$$A = \sum \frac{1}{2} \frac{S^2 s}{Ef}$$

ein Minimum werden unter den Bedingungen:

$$(4) \qquad \sum_1^n X_\nu \cdot x_\nu = P \cdot x, \text{ und da } P = 1, \quad \sum_1^n X \cdot x = x,$$

$$(5) \qquad \sum_1^n X_\nu \cdot y_\nu = P \cdot y, \quad „ \quad „ \quad P = 1, \quad \sum_1^n X \cdot y = y,$$

oder aber, wenn wir

$$\sum_1^n X \cdot x - x = \varphi = 0$$

---

so erhaltenen Spannungen S_0, behält man weiter die statisch bestimmte Stützung bei und setzt $X_1 = 1$, so erhält man die Spannungen S_1 u. s. w.; es ergeben sich so $(n - 3)$ „Zustände $X = 1$“, weil es $(n - 3)$ statisch unbestimmbare Größe X giebt. Um nun die $X_1, X_2, \ldots, X_{n-3}$ zu bestimmen, wendet man auf alle Zustände $X_1 = 1$, $X_2 = 1, \ldots, X_{n-3} = 1$ das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, indem man als „virtuelle“ Verschiebungen die dem statisch bestimmten Zustand entsprechenden Verschiebungen annimmt; dadurch erhält man so viele Arbeitsgleichungen als unbekannte Größen X vorhanden sind und kann letztere leicht berechnen. Hat man die X, so sind auch die übrigen Stabspannungen (Auflagerkomponenten) leicht bestimmt. Man sieht, daß sich auf diesen Fall eine ganz analoge Methode anwenden läßt, wie bei der Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke. Als wesentlich für diesen speziellen Fall ist die Unabhängigkeit der Verschiebungen der Stützpunkte zu betrachten. (Man hätte auch davon ausgehen können, daß die Größen X so zu wählen sind, daß die Formänderungsarbeit des ganzen Systems ein Minimum wird). Bei dem Hinweis auf das Riesenflechtwerk der Weltausstellung zu *Saint-Louis* werden wir noch einmal auf diese Methode zurückkommen.

und

$$\sum_1^n X \cdot y - y = \psi = 0$$

setzen und die Methode der unbestimmten Multiplikatoren anwenden, folgt, daß

$$A = A + \lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \psi \tag{6}$$

ein Minimum werden muß, wobei λ und μ unbestimmte Multiplikatoren sind. Damit dies eintritt, muß das Gleichungssystem bestehen:

$$\frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_3} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X_4} = 0. \tag{7}$$

Die Gleichung (4), (5), (7) ermöglichen die Berechnung der Größen X_1, X_2, X_3, X_4, λ, μ, von welchen uns nur die vier ersten interessieren.

Anmerkung. Die Funktion A soll *„ideelle Formänderungsarbeit"* heißen. Man hat schon früher für den Ausdruck

$$A + Z_1 + Z_2,$$

(wobei A die gewöhnliche Formänderungsarbeit, ohne Rücksicht auf Temperaturänderungen und Verschiebungen der unbeweglich konstruierten Auflager, ist, und Z_1, Z_2 zwei Zusatzglieder sind, welche beziehungsweise die Temperaturänderungen und die Längenänderungen der ideellen Auflagerstäbe berücksichtigen) den Namen „ideelle Formänderungsarbeit" gebraucht, und es ist auf diesen wesentlichen Unterschied wohl zu achten.

Entwickelt man die erste der Gleichungen (7), so hat man:

$$\sum \frac{Ss}{Ef} \cdot \frac{\partial S}{\partial X_1} + \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 = 0$$

oder

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_1 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_1 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_1 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_1 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 = 0.$$

Ebenso findet man die drei übrigen Gleichungen:

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_2 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_2 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_2 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_2 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2 = 0,$$

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_3 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_3 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_3 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_3 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_3 + \mu \cdot y_3 = 0,$$

$$X_1 \cdot \sum \frac{S_4 S_1 s}{Ef} + X_2 \cdot \sum \frac{S_4 S_2 s}{Ef} + X_3 \cdot \sum \frac{S_4 S_3 s}{Ef} + X_4 \cdot \sum \frac{S_4 S_4 s}{Ef} + \lambda \cdot x_4 + \mu \cdot y_4 = 0,$$

wobei die Σ (Summe) über das ganze Fachwerk zu erstrecken ist.

Setzen wir

$$\sum \frac{S_1 S_1 s}{Ef} = \alpha_{11}, \qquad \sum \frac{S_1 S_2 s}{Ef} = \alpha_{12}, \qquad \sum \frac{S_1 S_3 s}{Ef} = \alpha_{13} \text{ u. s. w.}$$

wobei

$$\begin{cases} \alpha_{12} = \alpha_{21} \text{ u. s. w.} \\ \alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{33} = \alpha_{44} \end{cases}$$

ist (die Koeffizienten α sind in gewissem Sinne Fachwerkkonstante), so erhalten wir für die Berechnung von X_1, X_2, X_3, X_4, λ, μ zusammengestellt, folgende 6 Gleichungen:

$$(7') \qquad \begin{cases} \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \alpha_{14} X_4 + x_1 \cdot \lambda + y_1 \cdot \mu = 0 \\ \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \alpha_{24} X_4 + x_2 \cdot \lambda + y_2 \cdot \mu = 0 \\ \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 + \alpha_{34} X_4 + x_3 \cdot \lambda + y_3 \cdot \mu = 0 \\ \alpha_{41} X_1 + \alpha_{42} X_2 + \alpha_{43} X_3 + \alpha_{44} X_4 + x_3 \cdot \lambda + y_4 \cdot \mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (4') \\ (5') \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 \; X_1 + x_2 \; X_2 + x_3 \; X_3 + x_4 \; X_4 = x \\ y_1 \; X_1 + y_2 \; X_2 + y_3 \; X_3 + y_4 \; X_4 = y. \end{cases}$$

Man kann durch Elimination von λ und μ sich 4 weitere Gleichungen abgeleitet denken, die nur $X_1 \, X_2 \, X_3 \, X_4$ linear enthalten, von denen 2 homogen und 2 nichthomogen sind:

$$\begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0 \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 = 0 \\ x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = x \\ y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4 = y. \end{cases}$$

Diese Gleichungen kann man sich sofort nach den X_1, X_2, X_3, X_4 aufgelöst denken. (Die Größen a_1, a_2 ... b_1, b_2, b_3 ... sind Zahlenkoeffizienten, entstanden aus denen der Gleichungen (7').)

Es folgt aus dieser Auflösung (etwa durch allmähliche Elimination), *daß die Größen X lineare Funktionen der Punktkoordinaten x, y sind. Aus Gleichung* (3) *folgt, daß auch die Spannung S eine lineare Funktion der Koordinaten x, y des Punktes ω ist;* mit anderen Worten, es ist bewiesen, daß die *Einflußfläche* einer beliebigen *Stabspannung* innerhalb eines *Trapezfeldes eine Ebene ist.*

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch kurz die Einflußverhältnisse in der Laternenfläche (Text Fig. 2). Es muß auch hier bei Festlegung eines bestimmten Punktes ω die Funktion (6) zu einem Minimum werden. Man hat die Gleichungen:

$$(7^*)\begin{cases}\alpha_{11}X_1+\alpha_{12}X_2+\alpha_{13}X_3+\alpha_{14}X_4+\alpha_{15}X_5+\cdots+\alpha_{1n}X_n+\lambda\cdot x_1+\mu\cdot y_1=0\\ \alpha_{21}X_1+\alpha_{22}X_2+\alpha_{23}X_3+\alpha_{24}X_4+\alpha_{25}X_5+\cdots+\alpha_{2n}X_n+\lambda\cdot x_2+\mu\cdot y_2=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{n1}X_1+\alpha_{n2}X_2+\alpha_{n3}X_3+\alpha_{n4}X_4+\alpha_{n5}X_5+\cdots+\alpha_{nn}X_n+\lambda\cdot x_n+\mu\cdot y_n=0\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(4^*)\\(5^*)\end{matrix}\begin{cases}x_1\,X_1+x_2\,X_2+x_3\,X_3+x_4\,X_4+\cdots\cdots+x_n\,X_n=x\\ y_1\,X_1+y_2\,X_2+y_3\,X_3+y_4\,X_4+\cdots\cdots+y_n\,X_n=y.\end{cases}$$

Diese $(n+2)$ linearen Gleichungen bestimmen die $(n+2)$ Unbekannten $X_1\ldots X_n$, λ, μ. Man sieht wieder sofort, daß aus diesem Gleichungssystem sich die X_1, $X_2\ldots X_n$ als lineare Funktionen der Punktkoordinaten x, y bestimmen lassen. Es sind also auch die *Einflußflächen der Stabspannungen S über der Laternenfläche (unabhängig vom Kuppelsystem) Ebenen.*

An die wirkliche Auflösung der Gleichungen (7*) (4*) (5*) ist, weil sie viel zu zeitraubend wäre, wohl nicht zu denken; sie sollten uns nur dazu dienen das Gesetz der Einflußflächen zu finden. Spricht man also von Einflußflächen der Stabspannungen eines Kuppelfachwerks, so hat man immer zweierlei im Auge zu behalten:

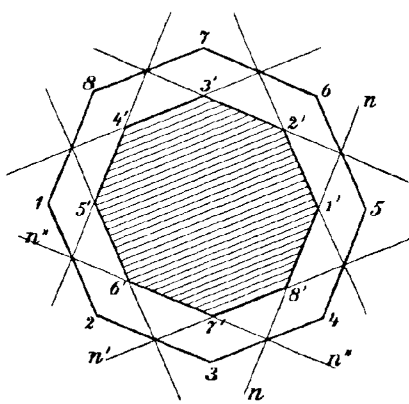
1. Die Einflußlinien der Stabspannungen längs der Sparrenstab- und Ringstabzüge (diese sind in den Zeichnungen der Tafeln dargestellt),
2. Die Einflußflächen über den Trapezflächen und der Laternenfläche, die nach dem Vorhergehenden Ebenen sind.

Anmerkung. Von den vertikalen Lasten ist tatsächlich nur die gleichförmig verteilte im Auge behalten worden. Man könnte nun noch zu schief stehenden Lasten übergehen und deren Einfluß allgemein durch Einflußflächen darzustellen versuchen. Dieser Fall ist aber praktisch nicht von Bedeutung; denn wirken Einzellasten von schiefer Richtung auf die Knotenpunkte, so ist dies bei bestimmter Windrichtung ein Belastungsfall, für den man einen Kräfteplan zeichnet. Läßt man dann alle Windrichtungen als gleich möglich zu (wie man es bei Kuppeln gewöhnlich tut), so gilt der am ungünstigsten in Anspruch genommene Stab einer Stabgattung als Norm.[1])

1) Wir haben oben immer als mobile vertikale Belastung die *Schneelast* im Auge gehabt. In einem vereinzelten aber vom theoretischen Standpunkte sehr interessanten Fall werden auch Menschengedränge und andere mobile Lasten überhaupt auf das Geflecht wirken. Es ist dies so bei dem für die *Weltausstellung in Saint-Louis* als „clou“ geplantem Kugelflechtwerk mit sehr großem Durch-

Es wurde oben gezeigt, daß innerhalb des Laternenraumes die Einflußfläche einer Stabspannung eine Ebene ist. Sei nun nn die Nulllinie (Schnittlinie der Einflußebene mit der Grundebene, von welcher aus die Einflufsstrecken aufgetragen werden) innerhalb der Laternenfläche für einen bestimmten Stab eines Geschosses; $n'n'$, $n''n''$ ... seien die Nulllinien (innerhalb der Laterne) für die cyklisch nächstfolgenden Stäbe derselben Gattung und desselben Geschosses, so sieht man, daß sich infolge der Achsensymmetrie der Kuppel innerhalb des Laternenpolygons 1, 2, 3, ..., n, ein *Kernpolygon* 1′, 2′, ..., n' für diese Stäbe zeichnen läßt. Wie der Name sagt, ist seine Bedeutung folgende: Innerhalb von 1′, 2′, ..., n' (des Kernes) stehende Lasten rufen in sämtlichen Stäben, auf welche sich derselbe bezieht, gleichartige Spannungen hervor; steht die Last (= 1) außerhalb des Kernpolygons (jedoch noch innerhalb des Laternenpolygons), so sind diese Spannungen ungleichartig.

Fig. 13.



Eine andere Frage ist die nach etwaiger Vereinfachung der Konstruktion der Einflußlinien. Man weiß, eine Einflußlinie eines Fachwerkstabes in der Ebene geht geradlinig unter mehreren Lastübertragungspunkten hindurch. Dort ist es leicht, dies zu zeigen, da die analytischen Gesetze für die Spannungsgrößen relativ einfach sind. Man kann hier eine Vereinfachung mittelst projektiver Geometrie versuchen. Wir wollen, um diese vereinfachende Behandlung zu zeigen, ein Kuppelfachwerk allgemeinster Form betrachten und seine Berechnung auf die oben vorgeführte Einflußmethode zurückführen.

Es sei ein Kuppelgeflecht mit *elliptischem Grundriß* gegeben. (Bisher hatten wir immer als Knotenpunktfläche eine Drehungsfläche vorausgesetzt). Man kann sich immer denken, daß dieses Kuppelfachwerk

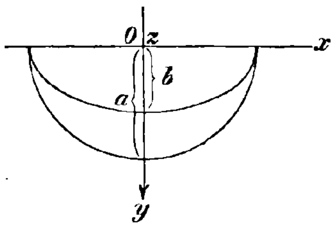
---

messer, dessen Äquatorknotenpunkte durch eine große Anzahl von Fachwerkpfeilern gestützt werden. In das Flechtwerk selbst werden horizontale Böden eingebaut, woraus sich die oben erwähnte Belastung ergiebt. Leider ist es dem Verfasser bis jetzt nicht gelungen, die für dieses Bauwerk in Saint-Louis angestellten theoretischen Berechnungen oder schematische Skizzen der Konstruktion desselben zu erhalten.

aus einem Drehungsfachwerke entstanden ist (s. Fig. 14). Das kugelförmige und das ellipsoidische Fachwerk sind bekanntlich zwei räumlich affine Gebilde und zwar ist hier die Papierebene die „Affinitätsebene“ und die darauf senkrechte Strahlenrichtung die „Richtung der Affinitätsstrahlen“.

Das die Affinität kennzeichnende Verhältnis ist $\frac{b}{a}$. Jede Strecke des Ellipsoidgebildes hat mit der entsprechenden im Kugelgebilde eine x- und z-Komponente von gleicher Größe, die y-Komponente dagegen ist im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt.

Fig. 14.



Leicht läßt sich nun beweisen:

Affinen Belastungen der beiden affinen Fachwerkkuppeln entsprechen affine Kräftepläne.

(Affine Belastungen sind solche, welche affine Kraftstrecken zur Darstellung haben.) Um dies zu beweisen, denken wir uns etwa bei beiden Kuppeln einen Fachwerkknoten herausgeschnitten, an welchem man die Spannungsbestimmung (Zeichnung des räumlichen Kräftepolygons) beginnen kann, an dem also eine „äußere Kraft“ und drei Fachwerkstäbe angreifen. Um in beiden Kuppelgeflechten diese drei Stabspannungen zu bestimmen, wenden wir die Föpplsche Methode an. Das jedem der zwei Knotenpunkte entsprechende Kräftepolygon ist ein räumliches Viereck. Dasselbe zerfällt durch die Strecke der „Hilfskraft“ in zwei Dreiecke. Wir fassen nun diejenigen zwei Dreiecke ins Auge, welche je einer Kuppel entsprechen und je die äußere Kraft als Seite enthalten. In denselben sind die äußeren Kraftstrecken als affin vorausgesetzt, ebenso je die Richtungen der beiden anderen Seiten. Da einander affin entsprechende Geradenpaare affine Schnittpunkte besitzen, so sind auch die dritten Punkte der oben betrachteten zwei Kräftedreiecke entsprechende Punkte. Da sich aber der ganze räumliche Kräfteplan, der dem jeweiligen Spannungszustande entspricht, aus solchen Dreiecken zusammengesetzt denken läßt, so kommt man durch schrittweise Anwendung des soeben Gefundenen zu dem oben behaupteten Satz.

Damit ist die allgemeinste Berechnung dieser Kuppeln, nämlich mittelst ungünstigster einseitiger Belastungen, wesentlich vereinfacht. Da nämlich das ellipsoidische Kuppelfachwerk einer Symmetrie um seine Achse entbehrt, so wäre die Bestimmung der Einflußflächen mittelst direkter Spannungsberechnung im ellipsoidischen Fachwerke durch Zeichnung von nur solchen Kräfteplänen, welche den Belastungen von 1^t längs *der Knotenpunkte eines Sparrens* entsprechen, unmöglich. Mittelst der oben aufgestellten Beziehung aber zwischen den Spannungsgrößen beider Kuppelfachwerke bei affinen Belastungen kann man die Einflußflächen der Stabspannungen für das ellipsoidische Fachwerk in folgender einfacher Weise bestimmen. Man berechnet zuerst das Hilfskugelfachwerk wie früher gezeigt wurde. Faßt man eine beliebige Spannung im Kugelfachwerk heraus, so findet man die Größe der entsprechenden Spannung im ellipsoidischen, wenn man die y-Komponente der ersteren im Verhältnis von $\frac{b}{a}$ verkürzt. Weiter läßt sich zeigen: Die von den irgend einer Stabspannung entsprechenden neutralen Linien beim Kreiskuppelfachwerk in der xy-Ebene gebildeten Figuren sind *affin* zu denjenigen, welche dem entsprechenden Stabe beim ellipsoidischen angehören. Denkt man sich nämlich die einander entsprechenden Spannungen eines Stabes (für einander entsprechende Belastungen von je 1^t) in Komponenten nach den Achsen x, y, z zerlegt, so folgt aus der Affinitätsbeziehung, daß die x- und z-Komponenten immer gleich, die y-Komponenten im Verhältnis von $\frac{b}{a}$ verkürzt, also auch immer gleichzeitig Null sind.

Eine ähnliche geometrische Beziehung zwischen den Einflußflächen der Spannungen zweier einander entsprechender Stäbe besteht *nicht*. Wohl aber besteht sie, wenn man die einander entsprechenden Stabspannungen in die drei Komponenten S_x, S_y, S_z zerlegt; dann sind die den Komponenten S_x und S_z entsprechenden Einflußflächen affin, bei den S_y geht wegen der zweiten Verkürzung in der y-Richtung die Affinität verloren.

Dadurch ist es also möglich, selbst bei elliptischem Grundriß im Vergleich zur Verwickeltheit der allgemeinen Berechnung räumlicher Fachwerke in relativ einfacher Weise bei großen Kuppelfachwerken (sind doch Gaswerkkuppeln mit 25—30 m Halbmesser nichts Außergewöhnliches) einseitige ungünstigste (Schnee-)Lasten in Betracht zu ziehen.

Es sei endlich hier darauf hingewiesen, daß man ähnliche Beziehungen zwischen den Spannungsbildern von Kuppelfachwerken ableiten kann, welche sich im kreisförmigen Grundriß vollständig decken, jedoch gegeneinander abgeflacht oder überhöht sind.

Es wären nun weiter aus den oben analytisch abgeleiteten Grundbegriffen zu bestimmen:

1) Die Beziehungen der Einflußlinien untereinander,

2) der Einflußflächen der einzelnen Felder für eine bestimmte Stabgattung zu einander, sowie auch

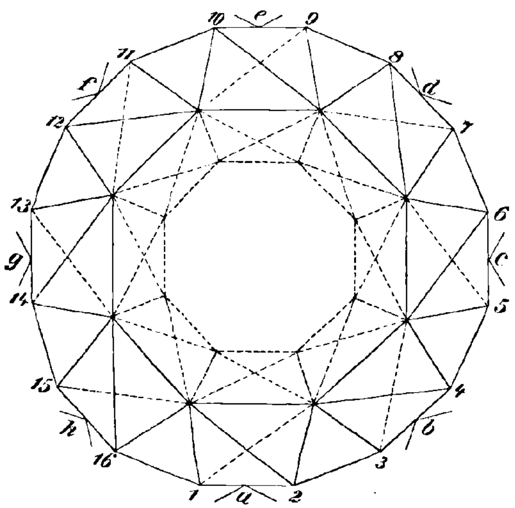
3) diejenigen zwischen Einflußlinien und Einflußebenen untereinander.

Ob dazu der *analytische* oder der *projektiv-geometrische Weg* der gangbarere ist, wird die Zukunft lehren.

c) Verallgemeinertes System der Berliner Reichstagskuppel.

In letzterer Zeit ist das System der Berliner Reichstagskuppel seiner Vorteile wegen in den Vordergrund des Interesses gerückt, namentlich wegen besonders zweckmäßiger Art der Lagerung mit horizontal freien und Tangentiallagern und relativ großer elastischer Steifheit im Vergleich zu anderen Geflechten. (Vgl. Zschetzsche, Die Kuppel des Berliner Reichstagshauses, Zeitschrift der österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1901; Zimmermann, Über Raumfachwerke, Berlin 1901 u. a.) Fig. 15 stellt schematisch ein verallgemeinertes System dieser Art dar. (Man kann es ein „gemischtes" Kuppelgeflecht nennen, allerdings in anderer Bedeutung als dies Zimmermann tut.) 1, 2, ... 16 sind horizontal freie Lager, *a*, *b*, *c*, ... *h* Tangentiallager. In demselben bestehen Einflußflächen über Dreiecksfachen und solche über Trapezfachen nebeneinander. Alles oben Gesagte gilt auch hier.

Fig. 15.



III. Beispiele.

In den beiliegenden Tafeln sind eine Schwedler- und eine Netzwerkkuppel mit Anwendung der im vorigen abgeleiteten Begriffe berechnet. Die Kräftepläne erfordern, nach den in der Einleitung — allerdings nur in knapper Form — erwähnten Methoden ihrer Herstellung keinerlei weitere Erklärung. Die Zeichnungen zeigen weiter die Spannungszustände der Geflechte für Belastungen in den einzelnen Knotenpunkten derselben. Das Ziel jeder derartigen Berechnung eines Geflechtes ist die Gewinnung der „Einflußzahlen" der Stabspannungen für die einzelnen Knotenpunkte desselben.

Schlußbemerkung. Im obigen theoretischen Teil ist gefunden worden, daß man zu unterscheiden hat zwischen 1) den leicht bestimmbaren Einflußlinien längs der Sparren- und Ringstabzüge, und 2) den Einflußebenen der einzelnen Fache (den Laternraum mit eingeschlossen), welche relativ schwer bestimmbar sind.

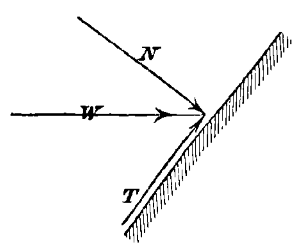
Mit Rücksicht hierauf kann man für die *praktische Anwendung* die Regel aufstellen:

Es ist am besten jeden Teil der aus *Eigengewicht, Schneelast und Winddruck* bestehenden Belastung gesondert zu betrachten.

1) Der Einfluß des Eigengewichts wird am schnellsten durch die schon von Schwedler gegebene graphische Methode bestimmt.

2) Die Schneelast (80—100 kg/m^2 Grundriß). Bisher wurde im allgemeinen die Schwedlerkuppel mit Schnee gänzlich belastet gedacht, und diese Belastung zum Eigengewicht derselben zugeschlagen. Zeichnet man sich den Kuppelgrundriß mit den entsprechenden Spannungszahlen, so kann man auf strenger Grundlage einseitige ungünstigste Belastungen berücksichtigen (streifenartig). Dabei umgeht man die (bis jetzt) schwierige Bestimmung der Einflußflächen im Fach; man hat nur die Spannungszahlen zu bestimmen und die Belastung der Kuppel entsprechend auf die einzelnen Knotenpunkte zu verteilen.

Fig. 16.



3) Der Winddruck. Von der in horizontaler Richtung angenommenen Windstärke wirkt (nach Loessl) nur die Normalkomponente N. Dies ergibt als Knotenlasten (auf der vom Wind bestrichenen Kuppelseite) nur Kräfte senkrecht zur Sparrenkurve, die in der Ebene derselben liegen. Für diesen Belastungszustand berechnet man das Geflecht. Maßgebend ist — allseitig möglichen Winddruck vorausgesetzt — die für eine Stabgattung sich ergebende größte Spannung. (Der Einfachheit halber wurden schon oben schiefstehende äußere Kräfte von der Untersuchung der Einflußflächen ausgenommen.)

Die algebraische Addition dieser drei Einflüsse auf die Stabspannung gibt bekanntlich die zwei Grenzspannungen, für welche der Stab zu dimensionieren ist.

IV. Einflußflächen (-Räume) für die statisch nicht bestimmbaren Größen X.

Die Einflußflächen für die Werte S und C (Stabspannungen und Auflagerkräfte) lassen sich mit Hilfe der Gleichungen

$$S = S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 + \cdots$$

$$C = C_0 + C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \cdots$$

leicht finden, sobald die Einflußflächen für die Größen X_1, X_2, X_3, ... gegeben sind. Im folgenden sollen diese X-Flächen ermittelt werden.

Des übersichtlichen Zusammenhanges wegen seien analoge Größenbezeichnungen gewählt, wie sie in der Ebene durchwegs üblich sind.

Die statisch nicht bestimmbaren Größen X_1, X_2, ... müssen bekanntlich den Gleichungen genügen

$$(1)\left\{\begin{array}{l} L_1 - \Sigma \varepsilon t S_1 s = \Sigma S_0 S_1 \varrho + X_1 \Sigma S_1^2 \varrho + X_2 \Sigma S_2 S_1 \varrho + X_3 \Sigma S_3 S_1 \varrho + \cdots \\ L_2 - \Sigma \varepsilon t S_2 s = \Sigma S_0 S_2 \varrho + X_1 \Sigma S_1 S_2 \varrho + X_2 \Sigma S_2^2 \varrho + X_3 \Sigma S_3 S_2 \varrho + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Dabei sind L_1, L_2 ... die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte für die Zustände $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ... und $\varrho = \frac{s}{Ef}$.

Die Größen X erhält man durch Auflösung der Gleichungen (1) bei zunächst unbelastet gedachtem Kuppelfachwerk in der Form:

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} X_1 = \alpha_1(L_1 - \Sigma \varepsilon t S_1 s) + \beta_1(L_2 - \Sigma \varepsilon t S_2 s) + \\ \qquad\qquad + \gamma_1(L_3 - \Sigma \varepsilon t S_3 s) + \cdots \\ X_2 = \alpha_2(L_1 - \Sigma \varepsilon t S_1 s) + \beta_2(L_2 - \Sigma \varepsilon t S_2 s) + \\ \qquad\qquad + \gamma_2(L_3 - \Sigma \varepsilon t S_3 s) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Dabei sind α_1, β_1, γ_1, ... α_2, β_2, γ_2, ... Größen, welche nur einmal berechnet zu werden brauchen (nur abhängig von der Form des Fachwerks).

Die von der Belastung abhängigen Werte ergeben sich als:

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} X_1 = -\alpha_1 \Sigma S_0 S_1 \varrho - \beta_1 \Sigma S_0 S_2 \varrho - \gamma_1 \Sigma S_0 S_3 \varrho - \cdots \\ X_2 = -\alpha_2 \Sigma S_0 S_1 \varrho - \beta_2 \Sigma S_0 S_2 \varrho - \gamma_2 \Sigma S_0 S_3 \varrho - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen (3) lassen sich die Einflußflächen für die Größen X_1, X_2, ... sofort finden, sobald die Einflußflächen für die Summen $\Sigma S_0 S_1 \varrho, \quad \Sigma S_0 S_2 \varrho, \ldots$ bekannt sind.

Es wandere wieder die vertikale Lasteinheit P über das statisch bestimmte Hauptfachwerk. Diese Last P erzeugt in den Stäben des Hauptfachwerks die Spannkräfte S_0; die durch irgend welche Änderungen Δs der Stablängen hervorgerufene Senkung δ ihres Angriffspunktes ist durch die Gleichung

$$P\delta = \Sigma S_0 \cdot \Delta s$$

gegeben (Voraussetzung: Verschiebungen der Stützpunkte und Reibungswiderstände an den Auflagern gleich Null); speziell für die der Ursache $X_1 = 1$ entsprechenden Verschiebungen δ_1 und $\Delta_1 s$ gilt:

$$P\delta_1 = \Sigma S_0 \Delta_1 s = \Sigma S_0 \cdot \frac{S_1 s}{Ef},$$

woraus $$\Sigma S_0 S_1 \varrho = P\delta_1,$$ oder wenn $P = 1$,

(5) $$\delta_1 = \Sigma S_0 S_1 \varrho$$ folgt.

Trägt man die Senkungen (positiv oder negativ) der Knotenpunkte des Fachwerks bei einer beliebigen Belastung des Geflechtes von einer horizontalen Ebene aus auf der jeweiligen Senkrechten durch den Knotenpunkt auf, so soll das so entstehende von Dreiecken begrenzte Polyeder das *„Biegungspolyeder des Kuppelfachwerks“* heißen. Dabei ist vorausgesetzt, daß immer eine Kante der Biegungsfläche des Fachwerks in der Richtung eines Kuppeldiagonalstabes liegt (welche dem Biegungspolygon des Diagonalstabzuges entspricht.)

Der zwischen der Biegungsfläche und der horizontalen Ebene liegende Raum heiße *„Biegungsraum des Kuppelfachwerks“* für die gegebene Belastung. Entsprechend den „Biegungspolygonen der Gurtungen“ der ebenen Fachwerke kann man auch hier *„Biegungslinien“ der Sparrenstab-, Ringstab-, Diagonalstabzüge der Kuppel* unterscheiden.

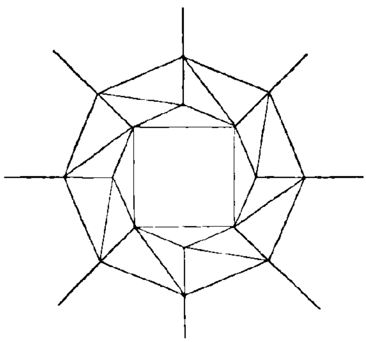
Nun ist δ_1 die Ordinate der Biegungsfläche für den Zustand $X_1 = 1$, daher folgt:

Die Einflußfläche für den Ausdruck $\Sigma S_0 S_1 \varrho$ stimmt mit der für den Belastungszustand $X_1 = 1$ berechneten Biegungsfläche des Hauptnetzes überein. Dieser Satz gilt jedoch *nur für die Netzwerkkuppel* und zwar nur für den Netzwerkteil derselben, weil der Natur der Sache nach für den Raum der Laterne keine Biegungsfläche vorhanden ist.

Dieser Satz bietet bei der Netzwerkkuppel eine wesentliche Erleichterung. Für das Schwedler-Geflecht und dasjenige des Berliner Reichstagshauses gilt dieser Satz nicht. Es stimmen nämlich bei denselben im allgemeinen der einem Fache entsprechende Teil der Biegungsfläche und der entsprechende der Einflußfläche von $\Sigma S_0 S_1 \varrho$, welcher eine Ebene ist, da die Einflußfläche von S_0 bezw. ΣS_0, also auch von $\Sigma S_0 S_1 \varrho$ eine solche ist (Benützung des Übereinanderlegens), nicht überein.

Aus Fig. 17 z. B. sieht man sofort, daß wohl eine Biegungsfläche über einem Teile der Laterne, wie über den Trapezfachen vorhanden ist, jedoch keine Übereinstimmung mit der über der Laterne ebenen Einflußfläche von $\Sigma S_0 S_1 \varrho$.

Fig. 17.



Die Gleichungen:

$$(5) \begin{cases} X_1 = -(\alpha_1 \delta_1 + \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \delta_3 + \cdots) P \\ X_2 = -(\alpha_2 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 + \gamma_2 \delta_3 + \cdots) P \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

welche eine schnelle Berechnung der Einflußflächen für die X ermöglichen, gelten nur für das Netzwerkgeflecht (mit und ohne Sparren).

Aus Obigem sieht man wieder, daß das Verfahren der Bestimmung der Einflußflächen für die statisch nicht bestimmbaren Größen X wohl noch immer verwickelt, doch — entsprechend der einfacheren Natur des Fachwerks — beim Netzwerkgeflecht einfacher ist als bei den anderen. Bei diesen letzteren muß man also behufs Bestimmung der Einflußflächen der Größen X direkt diejenigen der Ausdrücke $\Sigma S_0 S_1 \varrho$, $\Sigma S_0 S_2 \varrho$, ... bestimmen (auch innerhalb der Trapez- und Laternfelder).

Begnügt man sich mit Einfluß- (Spannungs-)Zahlen an den Knotenpunkten, so kann man die auf dieselbe Weise reduzierte Biegungsfläche (nur an den einzelnen Knotenpunkten Senkungszahlen) anwenden.

Wien, im Juli 1902.

Bedeutung der Tafelfiguren:

Fig. **1a**, **1b**, **1c**: Zusammenstellung der „Einflußzahlen" für die einzelnen Stabgattungen des vorliegenden Schwedlergeflechtes.

Fig. **2a**, **2b**, **2c**: Darstellung der Einflußlinien für die einzelnen in den Figuren **1a**, **1b**, **1c** bezeichneten Stäbe, längs der Sparren und längs des Laternenringes.

Fig. **3a**, **3b**, **4a**, **4b**, **5a**, **5b**: Darstellung der einzelnen Spannungszustände $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$ für das Schwedlergeflecht.

Fig. **6a**, **6b**, **7a**, **7b**: Darstellung der analogen Spannungszustände für das Netzwerkgeflecht.

Fig. **8a**, **8b**, **9a**, **9b**: Darstellung der Einflußräume für die Stäbe **1a**, **1b**, **8a**, **8b** des Netzwerkgeflechtes.

Über einige Gelenksysteme mit ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Elementen.

Von P. Somoff in Warschau.

I. Verbindung eines Kurbelvierecks mit einem ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Systeme.

1. *Gegenstand der Untersuchung.* Die Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems wird bekanntlich durch die Bewegung *zweier* seiner Punkte bestimmt, wobei diese Bewegungen unabhängig von einander gegeben werden können. Wird ein ähnlich-veränderliches System P durch zwei seiner Punkte M', M'' mit zwei verschiedenen Gliedern eines Kurbelvierecks verbunden, dessen Glieder A_1, A_2, A_3, A_4 sind und von welchem ein Glied, A_4, fest bleibt, so wird jeder Punkt des Systems P eine bestimmte Bewegung erhalten, deren Eigenschaften sowohl von den Eigenschaften des Gelenkvierecks wie auch von der Lage der Punkte M' und M'' in demselben abhängen.

Ähnliches kann man auch von einem ebenen affin-veränderlichen Systeme Q sagen. Die Bewegung desselben wird durch willkürlich gegebene Bewegungen *dreier* seiner Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt. Werden diese Punkte M', M'', M''' in einem Kurbelviereck, aber nur nicht alle in einem und demselben Gliede des letzteren genommen, so wird die Bewegung eines jeden Punktes des Systems Q sowohl mit den Eigenschaften des Kurbelvierecks wie auch mit der Lage der Punkte M', M'', M''' in demselben eng zusammenhängen.

Die Punkte M', M'', M''' sollen in der Folge *Grundpunkte* der Systeme P oder Q heißen.

Es ist bekannt, daß jeder Punkt M_0 des mittleren Gliedes A_2 eines Kurbelvierecks eine algebraische *Kurve* σ_0 vom 6. Grade beschreibt. Wenn man beachtet, daß die Cartesischen Koordinaten eines Punktes M des Systems P oder Q durch die Koordinaten der Grundpunkte linear ausgedrückt werden, so kann man von Anfang an sehen, daß die von dem Punkte M beschriebene *Kurve* σ auch vom 6. Grade ist und im ganzen dieselben Eigenschaften wie die Kurve σ_0 besitzt, aber dabei als eine Verallgemeinerung der letzteren betrachtet werden kann. Cayley und Roberts haben zuerst allgemeine Eigenschaften der Linie σ_0 untersucht und Roberts[1]) hat ihre Gleichung auf eine ein-

1) Roberts, Proceedings of the London Mathem. Soc. 1875.

fache symmetrische Form gebracht. Weiter unten (§ 6) werden wir genauer sehen, daß die Form der Gleichung, welche eine *Linie* σ bestimmt, in der Tat mit der Form der Gleichung der *Linie* σ_0 zusammenfällt. Der wesentliche Unterschied besteht aber darin, daß man bei Hinzunahme des Systems P oder Q eine größere Zahl von Parametern zur Verfügung hat, so daß man größere Mannigfaltigkeit in der Form der Linien σ und im Falle, daß sie bestimmten Forderungen genügen sollen, eine größere Freiheit in der Auswahl derselben erhält. Bei einem gegebenen Kurbelviereck nämlich hängt die ganze Mannigfaltigkeit der Kurven σ_0 nur von 2 Parametern, den Koordinaten des Punktes M im Gliede A_2 ab; wird aber ein System P angeschlossen, so hat man schon 6 Parameter zur Verfügung: die 4 Koordinaten, welche die Lage der Grundpunkte in den Gliedern des Kurbelvierecks und die 2 Parameter, welche die Lage des Punktes M im Systeme P selbst in Bezug auf die Grundpunkte M' und M'' bestimmen. Wenn das System Q mit dem Kurbelviereck verbunden wird, so hängt die Linie σ von 8 Parametern ab, von denen 6 die Lage der Grundpunkte M', M'', M''' im Kurbelviereck und zwei andere die Lage des Punktes M im Systeme Q bestimmen.

Dieser Umstand gibt die Veranlassung dazu, die Verbindungen des Kurbelvierecks mit den Systemen P und Q näher zu untersuchen. Dabei werden wir voraussetzen, daß diese letzteren Elemente auch durch Gelenksysteme verwirklicht werden. Zum Systeme P soll der verallgemeinerte Pantograph (Plagiograph) von Sylvester und zum Systeme Q ein Gelenksystem, welches in meiner Arbeit: „Über einige Anwendungen der Kinematik veränderlicher Systeme auf Gelenkmechanismen“[1]) beschrieben ist, genommen werden.

Praktische Anwendungen werden in dieser Arbeit nicht im Vordergrunde stehen, wenn auch einige Resultate dieser Art genannt werden können (§§ 11, 17, 23, 24); das Hauptziel der Untersuchung im I. Teile besteht aber darin, einige Eigenschaften sowohl des Kurbelvierecks wie auch der beiden oben genannten veränderlichen Systeme von einer neuen Seite zu beleuchten.

Anmerkung. Die Hinzufügung eines Seitenzweiges aus zwei *festen* durch Drehpaarungen miteinander und mit dem Kurbelviereck verbundenen Gliedern würde auch, anstatt zweier, sechs Parameter zu unserer Verfügung und dabei nur einen sechsgliedrigen Mechanismus geben, wogegen das System P in Verbindung mit dem Kurbelviereck einen Mechanismus von 8 und das System Q einen Mechanismus von

1) Diese Zeitschrift Bd. 46 (1901), S. 199.

16 und sogar 18 Gliedern bildet. Die Linien aber, welche dann von den Punkten des hinzugefügten Zweiges beschrieben werden, unterscheiden sich schon wesentlich von der Koppelkurve σ_0. Solche sechsgliedrige Mechanismen, welche zudem schon öfters und zu verschiedenen praktischen Zwecken untersucht wurden, werden wir weiter nicht betrachten, da dieses unserer oben gestellten Aufgabe nicht mehr entspricht.

2. *Verbindungen der Systeme P und Q mit dem Kurbelviereck.* Um die Lagen der Grundpunkte dieser Systeme in dem Kurbelviereck anschaulicher anzugeben, werden wir mit M_i oder M_i' denjenigen Grundpunkt dieses oder jenes Systems bezeichnen, welcher im Gliede A_i des Kurbelvierecks liegt. Dann können wir folgende wesentlich verschiedene Fälle einer Anschließung des Systems P oder Q an das Kurbelviereck unterscheiden. *Für das System P:*

1. (M_4, M_1), 2. (M_4, M_2), 3. (M_1, M_3), 4. (M_1, M_2)

und *für das System Q*:

5. (M_4, M_4', M_1), 6. (M_4, M_4', M_2), 7. (M_4, M_1, M_3),
8. (M_4, M_1, M_2), 9. (M_4, M_1, M_1'), 10. (M_4, M_2, M_2'),
11. (M_1, M_2, M_3), 12. (M_1, M_1', M_3), 13. (M_1, M_1', M_2),
14. (M_1, M_2, M_2').

Dabei soll immer vorausgesetzt werden, daß A_4 das unbewegliche Glied des Kurbelvierecks ist.

Wir werden übrigens nicht alle 14 Fälle betrachten. Wenn ein Punkt, M_4, eines ähnlich-veränderlichen Systems fest bleibt, so beschreiben bekanntlich alle übrigen Punkte ähnliche Linien mit proportionalen Geschwindigkeiten, daher stellt der Fall 1, wo der Punkt M_1 im Gliede A_1 liegt und also einen Kreis beschreibt, eine „einförmige" kreislinige Bewegung dieses Systems dar. Ebenso beschreiben im Falle 2 alle Punkte des Systems P solche Linien, die der Bahn des Punktes M_2 ähnlich sind; dieser Punkt aber, da er dem Gliede A_2 angehört, beschreibt eine gewöhnliche Koppelkurve. In den Fällen 5 und 6 besteht die Bewegung des affin-veränderlichen Systems in einer einfachen Schiebung, und daher sind die Bahnen aller seiner Punkte ebenfalls untereinander ähnlich. Alle diese Fälle, sowie die Fälle 9, 10, 12, 13 und 14, wo der Abstand zweier Grundpunkte des affin-veränderlichen Systems unveränderlich bleibt, können außer Acht gelassen werden. Somit werden wir nur folgende 5 Fälle genauer untersuchen: Bei dem ähnlich-veränderlichen Systeme P:

(1) I (M_1, M_3), II (M_1, M_2),

und bei dem affin-veränderlichen Systeme Q:

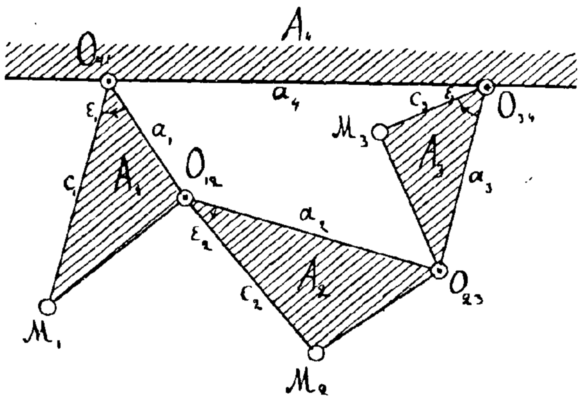
III (M_4, M_1, M_3), IV (M_4, M_1, M_2), V (M_1, M_2, M_3).

Die Lagen der Grundpunkte in den ihnen entsprechenden Gliedern des Kurbelvierecks sollen dabei durch Polarkoordinaten folgendermaßen bestimmt werden. Es seien (Fig. 1)

$$(1)\qquad c_1 = O_{41} M_1, \quad \varepsilon_1 = \sphericalangle (O_{12} O_{41} M_1)$$

die Koordinaten des Punktes M_1, indem O_{41} als Pol und $O_{41} O_{12}$ als Achse der Polarkoordinaten im Gliede A_1 angenommen wird; ebenso sollen für den Punkt M_2 die Koordinaten

Fig. 1.



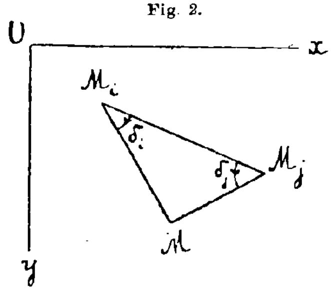
$$(2)\qquad c_2 = O_{12} M_2, \quad \varepsilon_2 = \sphericalangle (O_{23} O_{12} M_2)$$

und für den Punkt M_3 die Koordinaten

$$(3)\qquad c_3 = O_{34} M_3, \quad \varepsilon_3 = \sphericalangle (O_{23} O_{34} M_3)$$

genommen werden. Außerdem werden wir im unbeweglichen Gliede A_4 den Drehpunkt O_{41} als Anfangspunkt und die Gerade $O_{41} O_{34}$ als Abscissenachse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems nehmen und die Koordinaten des Punktes M_4 in diesem Systeme mit x_4, y_4 bezeichnen.

Fig. 2.



3. *Koordinaten, welche die Lage der Punkte in den veränderlichen Systemen P und Q bestimmen.* Die Lage eines Punktes M (x, y) eines ähnlich-veränderlichen Systems P in Bezug auf zwei Grundpunkte desselben, $M_i(x_i, y_i)$ und $M_j(x_j, y_j)$, soll in der Folge durch die Winkel (Fig. 2)

$$(4)\qquad \delta_i = \sphericalangle (M_j M_i M), \quad \delta_j = \sphericalangle (M_i M_j M)$$

bestimmt werden. Indem man

$$(5)\qquad \operatorname{tg} \delta_i = k_i, \quad \operatorname{tg} \delta_j = k_j$$

setzt, bekommt man:

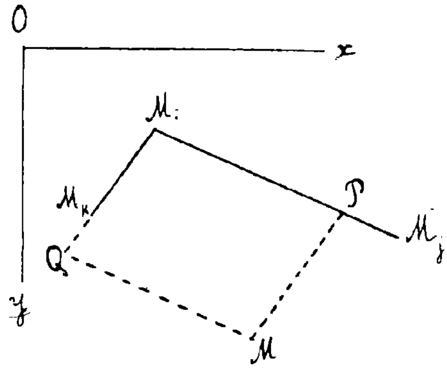
$$x = \frac{k_i x_i + k_j x_j + k_i k_j (y_i - y_j)}{k_i + k_j},$$

$$y = \frac{k_i y_i + k_j y_j - k_i k_j (x_i - x_j)}{k_i + k_j}.$$

In dem affin-veränderlichen Systeme Q wird die Lage eines Punktes $M(x, y)$ in Bezug auf seine drei Grundpunkte $M_i(x_i\ y_i)$, $M_j(x_j\ y_j)$, $M_k(x_k\ y_k)$ durch die Verhältnisse (Fig. 3)

$$m_j = \frac{M_i P}{M_i M_j}, \quad m_k = \frac{M_i Q}{M_i M_k}$$

Fig. 3.



bestimmt werden, wo P und Q in den Geraden $M_i M_j$ und $M_i M_k$ liegen und mit den Punkten M_i und M die Ecken eines Parallelogramms bilden. Sodann haben wir:

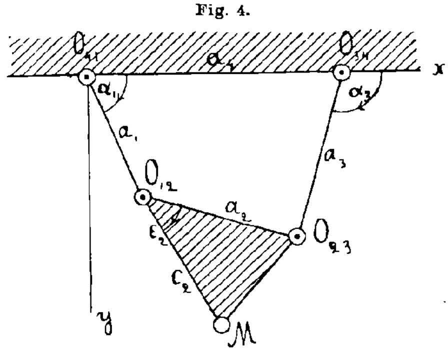
$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= m_i x_i + m_j x_j + m_k x_k, \\ y &= m_i y_i + m_j y_j + m_k y_k, \end{aligned}$$

mit der Bedingung:

$$(8) \qquad m_i + m_j + m_k = 1.$$

4. *Bestimmung der Lage des ganzen Gelenksystems.* Da wir nur einige Vergleiche zwischen den Bahnlinien der Punkte des Systems P oder Q, wenn dasselbe einem Kurbelviereck angeschlossen wird, und den gewöhnlichen Koppelkurven anstellen wollen, so brauchen wir nicht die Gleichungen dieser Linien in den Koordinaten x, y auszudrücken, da zudem diese Gleichungen wie diejenigen der Koppelkurven vom 6. Grade sind. Für unseren Zweck wird es sogar genügen die beiden Koordinaten nicht als Funktionen eines und desselben Parameters auszudrücken, sondern diese Koordinaten als Funktionen zweier Parameter stehen zu lassen und dabei nötigenfalls die Abhängigkeit derselben von einander zu beachten.

Fig. 4.



Als solche Parameter werden wir die Winkel α_1 und α_3, welche die Geraden $O_{41}\,O_{12}$ und $O_{34}\,O_{23}$ (Fig. 4) mit der festen Geraden $O_{41}\,O_{34}$ bilden, annehmen. Diese Winkel sind durch die Gleichung

$$(9) \qquad g_3 \cos\alpha_1 - g_1 \cos\alpha_3 + \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = n$$

verbunden, wo

$$(10) \qquad g_1 = \frac{a_4}{a_1}, \quad g_3 = \frac{a_4}{a_3}, \quad n = \frac{a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2}$$

gesetzt ist und a_1, a_2, a_3, a_4 die Längen der Glieder A_1, A_2, A_3, A_4, d. h. die Entfernungen zwischen ihren Drehpunkten bezeichnen.

5. *Die Koppelkurven σ_0 und die von den Punkten des Systems P oder Q beschriebenen Linien σ.* Wenn ein Punkt M_0 dem Gliede A_2 eines Kurbelvierecks angehört und seine Lage in diesem Gliede durch die Koordinaten c_2, ε_2 (§ 2) bestimmt wird, so werden seine Koordinaten x, y in der festen Ebene, bei der in § 2 angenommenen Lage der Koordinatenachsen durch die Formeln

$$(11)\qquad \begin{aligned} x &= \quad A\cos\alpha_1 + B\sin\alpha_1 + C\cos\alpha_3 + D\sin\alpha_3 + E,\\ y &= -B\cos\alpha_1 + A\sin\alpha_1 - D\cos\alpha_3 + C\sin\alpha_3 + E' \end{aligned}$$

ausgedrückt, wo

$$(12)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{a_1}{a_2}(a_2 - c_2\cos\varepsilon_2), & B &= \frac{a_1}{a_2}c_2\sin\varepsilon_2,\\ C &= \frac{a_3}{a_2}c_2\cos\varepsilon_2, & D &= -\frac{a_3}{a_2}c_2\sin\varepsilon_2,\\ E &= \frac{a_4}{a_2}c_2\cos\varepsilon_2, & E' &= \frac{a_4}{a_2}c_2\sin\varepsilon_2 \end{aligned}$$

ist.

Wenn man beachtet, daß die Koordinaten aller Punkte aller beweglicher Glieder des Kurbelvierecks lineare Funktionen der Cosinus und Sinus der Winkel α_1 und α_3 sind und daß andererseits die Koordinaten irgend eines Punktes M des Systems P oder Q, wie die Formeln (6) und (7) zeigen, linear durch die Koordinaten seiner Grundpunkte ausgedrückt werden, diese Punkte aber dem Kurbelviereck angehören, so sieht man leicht ein, daß die Koordinaten des Punktes M auch lineare Funktionen der Cosinus und Sinus von α_1 und α_2 sind. Wenn man alle Substitutionen vollzieht, um diese Funktionen zu bilden, so überzeugt man sich, daß *die Formeln* (11) *und* (9) *in allen Fällen die Bahnen der Punkte M bestimmen, gleichgültig, ob diese Punkte dem Kurbelviereck selbst oder einem an dasselbe angeschlossenen ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Systeme angehören.*

Alle diese Fälle unterscheiden sich nur durch den Bestand der Koeffizienten und die Zahl der in ihnen enthaltenen Parameter.

Da die Bahngleichung zwischen den Koordinaten x, y in allen Fällen durch Elimination der Winkel α_1 und α_3 aus den Gleichungen (11) und (9) erhalten wird, so können wir schließen, daß *die Linien σ alle allgemeinen Eigenschaften der Koppelkurven besitzen, dabei aber als eine Verallgemeinerung derselben auftreten, da ihre Gleichungen, bei einem gegebenen Kurbelviereck, nicht von 2 sondern von 6 oder 8 Parametern abhängen,* wie es schon in § 1 bemerkt wurde.

6. *Die Gleichung der Linie σ.* Roberts hat gezeigt[1]), daß die Gleichung einer gewöhnlichen Koppelkurve in die Form

$$M^2 + N^2 = R^2 \tag{13}$$

gebracht werden kann, wo M und N ganze Funktionen der Koordinaten sind, und jede von ihnen zwei solche Polynome zweiten Grades enthält, die, gleich Null gesetzt, Kreislinien bestimmen, und wo R ein eben solches Polynom enthält. Aus § 5 folgt, daß die Gleichung der Linie σ in allen Fällen in eine ähnliche Form gebracht werden kann. Diese Gleichung kann unmittelbar durch Elimination von α_1 und α_3 aus den Gleichungen (11) und (9) gefunden werden. Indem wir

$$x - E = \xi, \quad y - E' = \eta, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} A &= \varrho_1 \cos \lambda_1, \quad B = \varrho_1 \sin \lambda_1, \\ C &= \varrho_3 \cos \lambda_3, \quad D = \varrho_3 \sin \lambda_3 \end{aligned} \tag{15}$$

setzen, so daß

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho_1 \cos(\alpha_1 - \lambda_1) + \varrho_3 \cos(\alpha_3 - \lambda_3), \\ \eta &= \varrho_1 \sin(\alpha_1 - \lambda_1) + \varrho_3 \sin(\alpha_3 - \lambda_3) \end{aligned} \tag{16}$$

wird, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_1) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_1) &= \varrho_1 + \varrho_3 \cos[(\alpha_1 - \alpha_3) - (\lambda_1 - \lambda_3)], \\ \xi \sin(\alpha_1 - \lambda_1) - \eta \cos(\alpha_1 - \lambda_1) &= \varrho_3 \sin[(\alpha_1 - \alpha_3) - (\lambda_1 - \lambda_3)]; \end{aligned} \tag{17}$$

woraus

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\varrho_1 \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_1) - 2\varrho_1 \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_1) + \varrho_1^2 = \varrho_3^2. \tag{18}$$

Aus denselben Gleichungen (16) folgt:

$$\xi \cos(\alpha_1 - \lambda_3) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_3) = \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) + \varrho_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_3)$$

oder, wenn man die Bedingung (9) benützt:

$$\begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_3) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_3) &= \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) \\ &\quad + n\varrho_3 - g_3 \varrho_3 \cos \alpha_1 + g_1 \varrho_3 \cos \alpha_3. \end{aligned} \tag{19}$$

Aus den Gleichungen (16) aber erhält man:

$$\xi \cos \lambda_3 - \eta \sin \lambda_3 = \varrho_1 \cos[\alpha_1 - (\lambda_1 - \lambda_3)] + \varrho_3 \cos \alpha_3.$$

Indem wir aus den beiden letzten Gleichungen $\cos \alpha_3$ eliminieren, bekommen wir:

$$\begin{aligned} \xi \cos(\alpha_1 - \lambda_3) + \eta \sin(\alpha_1 - \lambda_3) + g_3 \varrho_3 \cos \alpha_1 + g_1 \varrho_1 \cos[\alpha_1 - (\lambda_1 - \lambda_3)] \\ = g_1 \xi \cos \lambda_3 - g_1 \eta \sin \lambda_3 + n\varrho_3 + g_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Gleichungen (18) und (20) können in der Form

$$\begin{aligned} p \cos \alpha_1 + q \sin \alpha_1 &= s, \\ p' \cos \alpha_1 + q' \sin \alpha_1 &= s' \end{aligned} \tag{21}$$

1) Proceedings of the London Mathem. Soc. 1875.

geschrieben werden, wo

$$
(22)\qquad \begin{aligned}
p &= 2\varrho_1(\xi \cos\lambda_1 - \eta \sin\lambda_1),\\
q &= 2\varrho_1(\xi \sin\lambda_1 + \eta \cos\lambda_1),\\
s &= \xi^2 + \eta^2 + \varrho_1^2 - \varrho_3^2,\\
p' &= \xi \cos\lambda_3 - \eta \sin\lambda_3 + g_1\varrho_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) + g_3\varrho_3,\\
q' &= \xi \sin\lambda_3 + \eta \cos\lambda_3 + g_1\varrho_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_3),\\
s' &= g_1(\xi \cos\lambda_3 - \eta \sin\lambda_3) + \varrho_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) + n\varrho_3
\end{aligned}
$$

ist. Durch Elimination von α_1 aus den Gleichungen (21) erhalten wir die Gleichung der Kurve σ in der Form

$$
(23)\qquad (p's - ps')^2 + (q's - qs')^2 = (qp' - pq')^2.
$$

Diese Gleichung könnte man der Robertsschen Form noch näher bringen; wir werden uns aber damit nicht weiter aufhalten.

7. *Über die Vergleichung einer gegebenen Linie mit einer Linie σ.* Es sei eine Linie

$$
(24)\qquad f(x, y) = 0
$$

gegeben; damit ein Punkt M des Systems P oder Q, wenn dasselbe an ein Kurbelviereck angeschlossen wird, diese Linie beschreibt, ist es notwendig, daß die Ausdrücke (11), in die Gleichung (24) eingesetzt, eine solche Beziehung zwischen den Winkeln α_1 und α_3

$$
(25)\qquad F(\alpha_1, \alpha_3, A, B, C, D, E, E') = 0
$$

ergeben, welche mit der Bedingung (9) identisch ist. Die Möglichkeit, dieser Forderung zu genügen, hängt davon ab, ob die Parameter A, B, C, D, E und E' entsprechender Weise gewählt werden können. Dabei stehen uns zur Verfügung: 1) die Längen a_1, a_2, a_3, a_4 der Glieder des Kurbelvierecks, 2) die Koordinaten, welche die Lage der Grundpunkte des Systems P oder Q in dem Kurbelvierecke bestimmen, und 3) die Koordinaten, welche die Lage des Punktes M im Systeme P oder Q angeben.

Wenn die genaue Erfüllung der oben genannten Forderung nicht möglich ist, so bleibt die Aufgabe bestehen: die Bedingungen zu finden, damit die Linie σ in gewissen Grenzen sich an die gegebene Linie (24) möglichst nahe anschmiegt. Diese Methode kann auch auf die gewöhnliche Koppelkurve angewendet werden.

Wir werden übrigens auf die analytische Untersuchung dieser Frage nicht eingehen und werden nur einige einfachere Fälle betrachten, wo eine genauere Identifizierung der Bedingungen (25) und (9) sich als möglich erweist.

8. *Koefficientenausdrücke in den Formeln* (11) *für die fünf in § 2 angegebenen Hauptfälle.* Indem wir uns der in §§ 2, 3 und 4 eingeführten Bezeichnungen erinnern, finden wir: *im Falle I*:

$$(26)\quad \begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos(\alpha_1 + \varepsilon_1), & y_1 &= c_1 \sin(\alpha_1 + \varepsilon_1),\\ x_3 &= a_4 + c_3 \cos(\alpha_3 + \varepsilon_3), & y_3 &= c_3 \sin(\alpha_3 + \varepsilon_3), \end{aligned}$$

$$(27)\quad \begin{aligned} A &= \frac{k_1 c_1}{k_1 + k_3}(\cos\varepsilon_1 + k_3 \sin\varepsilon_1) = c_1 \frac{\sin\delta_1 \cos(\varepsilon_1 - \delta_3)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)},\\ B &= -\frac{k_1 c_1}{k_1 + k_3}(\sin\varepsilon_1 - k_3 \cos\varepsilon_3) = -c_1 \frac{\sin\delta_1 \sin(\varepsilon_1 - \delta_3)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)},\\ C &= \frac{k_3 c_3}{k_1 + k_3}(\cos\varepsilon_3 - k_1 \sin\varepsilon_3) = c_3 \frac{\sin\delta_3 \cos(\varepsilon_3 + \delta_1)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)},\\ D &= -\frac{k_3 c_3}{k_1 + k_3}(\sin\varepsilon_3 + k_1 \cos\varepsilon_3) = -c_3 \frac{\sin\delta_3 \sin(\varepsilon_3 + \delta_1)}{\sin(\delta_1 + \delta_3)},\\ E &= \frac{k_3 a_4}{k_1 + k_3} = a_4 \frac{\cos\delta_1 \sin\delta_3}{\sin(\delta_1 + \delta_3)},\\ E' &= \frac{k_1 k_3 a_4}{k_1 + k_3} = a_4 \frac{\sin\delta_1 \sin\delta_3}{\sin(\delta_1 + \delta_3)}; \end{aligned}$$

im Falle II:

$$x_1 = c_1 \cos(\alpha_1 + \varepsilon_1), \quad y_1 = c_1 \sin(\alpha_1 + \varepsilon_1),$$

$$(28)\quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos\varepsilon_2 + a_1 \cos\alpha_1 - \frac{a_1}{a_2} c_2 \cos(\alpha_1 + \varepsilon_2) + \frac{a_3}{a_2} c_2 \cos(\alpha_3 + \varepsilon_2),\\ y_2 &= \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2 + a_1 \sin\alpha_1 - \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin(\alpha_1 + \varepsilon_2) + \frac{a_3}{a_2} c_2 \sin(\alpha_3 + \varepsilon_2), \end{aligned}$$

$$(29)\quad \begin{aligned} A &= \frac{k_1 c_1 a_2 (\cos\varepsilon_1 + k_2 \sin\varepsilon_1) - k_2 c_2 a_1 (\cos\varepsilon_2 - k_1 \sin\varepsilon_2) + k_2 a_1 a_2}{(k_1 + k_2) a_2},\\ B &= \frac{-k_1 c_1 a_2 (\sin\varepsilon_1 - k_2 \cos\varepsilon_1) + k_2 c_2 a_1 (\sin\varepsilon_2 + k_1 \cos\varepsilon_2) - k_1 k_2 a_1 a_2}{(k_1 + k_2) a_2},\\ C &= \frac{k_2 a_3 c_2}{(k_1 + k_2) a_2}(\cos\varepsilon_2 - k_1 \sin\varepsilon_2),\\ D &= -\frac{k_2 a_3 c_2}{(k_1 + k_2) a_2}(\sin\varepsilon_2 + k_1 \cos\varepsilon_2),\\ E &= \frac{k_2 a_4 c_2}{(k_1 + k_2) a_2}(\cos\varepsilon_2 - k_1 \sin\varepsilon_2),\\ E' &= \frac{k_2 a_4 c_2}{(k_1 + k_2) a_2}(\sin\varepsilon_2 + k_1 \cos\varepsilon_2); \end{aligned}$$

im Falle III sind x_4, y_4 konstant und x_1, y_1, x_3, y_3 werden nach den Formeln (26) bestimmt und

$$(30)\quad \begin{aligned} A &= m_1 c_1 \cos\varepsilon_1, & B &= -m_1 c_1 \sin\varepsilon_1,\\ C &= m_3 c_3 \cos\varepsilon_3, & D &= -m_3 c_3 \sin\varepsilon_3,\\ E &= m_4 x_4 + m_3 a_4 & E' &= m_4 y_4, \end{aligned}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1;$$

im Falle IV sind x_4, y_4 konstant, x_1, y_1, x_2, y_2 werden durch die Formeln (28) ausgedrückt und

$$
(31) \qquad
\begin{aligned}
A &= m_1 c_1 \cos\varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2}(a_2 - c_2 \cos\varepsilon_2),\\
B &= -m_1 c_1 \sin\varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2,\\
C &= m_2 \frac{a_3}{a_2} c_2 \cos\varepsilon_2,\\
D &= -m_2 \frac{a_3}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2,\\
E &= m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos\varepsilon_2 + m_4 x_4,\\
E' &= m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2 + m_4 y_4,\\
&\qquad m_1 + m_2 + m_3 = 1;
\end{aligned}
$$

im Falle V werden $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, x_3$ durch die Formeln (26) und (28) bestimmt und

$$
(32) \qquad
\begin{aligned}
A &= m_1 c_1 \cos\varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2}(a_2 - c_2 \cos\varepsilon_2),\\
B &= -m_1 c_1 \sin\varepsilon_1 + m_2 \frac{a_1}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2,\\
C &= m_2 \frac{a_3}{a_2} c_2 \cos\varepsilon_2 + m_3 c_3 \cos\varepsilon_3,\\
D &= -m_2 \frac{a_3}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2 - m_3 c_3 \sin\varepsilon_3,\\
E &= m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \cos\varepsilon_2 + m_3 a_4,\\
E' &= m_2 \frac{a_4}{a_2} c_2 \sin\varepsilon_2,\\
&\qquad m_1 + m_2 + m_3 = 1.
\end{aligned}
$$

9. *Bewegungen, bei denen ein Punkt M des Systems P oder Q fest bleibt.* Der Punkt M bleibt unbeweglich, wenn bei allen Werten von α_1 und α_3, die der Bedingung (9) genügen,

$$
(33) \qquad
\begin{aligned}
A\cos\alpha_1 + B\sin\alpha_1 + C\cos\alpha_3 + D\sin\alpha_3 &= x - E = \text{const.}\\
-B\cos\alpha_1 + A\sin\alpha_1 - D\cos\alpha_3 + C\sin\alpha_3 &= y - E' = \text{const.}
\end{aligned}
$$

ist. Wenn die Winkel α_1 und α_3 nicht beständig einander gleich bleiben, so folgt daraus:

$$
(34) \qquad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0,
$$

und für die Lage des Punktes M:

$$
(35) \qquad x = E, \quad y = E'.
$$

Ist aber bei jeder Lage des Kurbelvierecks

$$
\alpha_1 = \alpha_3
$$

also das Kurbelviereck ein gelenkiges Parallelogramm, welches nicht in ein Antiparallelogramm übergeht, so sind die Bedingungen

(36) $$A + C = 0, \quad B + D = 0$$

genügend.

Bei einem gewöhnlichen Kurbelviereck sind die Bedingungen (34) oder (36) nicht erfüllbar, ohne daß eine von den Größen a_1, a_2, a_3, a_4 gleich Null wird; dann geht aber das Kurbelviereck in ein unbewegliches Dreieck über.

Im *Falle I*, wenn δ_1 und δ_3 von Null verschieden sind, werden die Bedingungen (34) nur durch die Annahme

(37) $$c_1 = 0, \quad c_3 = 0$$

erfüllt; dabei fallen aber die Punkte M_1 und M_3 mit den unbeweglichen Drehpunkten O_{41} und O_{34} zusammen, und das ganze ähnlich-veränderliche System P bleibt dann unbeweglich. Bei der Voraussetzung

(38) $$\delta_1 = 0, \quad \delta_3 = 0,$$

welche mit der Annahme, daß der Punkt M in der Geraden $M_1 M_3$ liegt, gleichbedeutend ist, kommen wir zu demselben Ergebnis. Es sei nämlich:

$$\frac{M_1 M}{M_3 M} = \frac{\mu_1}{\mu_3};$$

anstatt der Formeln (6) hat man dann:

$$x = \frac{\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3}{\mu_1 + \mu_3}, \quad y = \frac{\mu_3 y_1 + \mu_1 y_3}{\mu_1 + \mu_3}.$$

Wenn man die Ausdrücke (26) hierin einsetzt, findet man:

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_1 \cos \varepsilon_1, \quad B = -\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} c_1 \sin \varepsilon_1,$$

$$C = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} c_3 \cos \varepsilon_3, \quad D = -\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} c_3 \sin \varepsilon_3,$$

was bei den Voraussetzungen (34) wieder mit der Annahme (37) gleichbedeutend wird.

Indem wir die Voraussetzung (38) wieder fallen lassen, wollen wir jetzt die Annahme (36), welche einem gelenkigen Parallelogramm entspricht, näher betrachten. Daß die Bedingungen (36) jetzt mit der Beweglichkeit des Systems P verträglich sind, kann man schon aus dem bekannten Falle einer „einförmigen Bewegung" des ähnlich-veränderlichen Systems einsehen.[1]) Die Lage des un-

1) Beschreiben zwei Punkte eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems ähnliche Bahnen, in denen sie entsprechende Lagen einnehmen, so bleibt der Ähnlichkeitspol fest.

beweglichen Punktes M wird jetzt in dem Systeme P durch die Koordinaten

$$k_1 = \frac{c_3 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - c_1}, \quad k_3 = \frac{c_1 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_1 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - c_3}$$

und in der festen Ebene durch die Koordinaten

$$x = \frac{c_1^2 - c_1 c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_1^2 + c_3^2 - 2 c_1 c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} a_4, \quad y = - \frac{c_1 c_3 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{c_1^2 + c_3^2 - 2 c_1 c_3 \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} a_4$$

bestimmt. Die Lage der Punkte M_1 und M_3 in den Gliedern A_1 und A_3 kann dabei frei gewählt werden.

Ähnliche Schlüsse gelten auch für den *Fall II.*

Im *Falle III,* wenn die Winkel α_1 und α_3 einander nicht gleich sind, kann es außer dem Punkte M_4 keine anderen unbeweglichen Punkte geben. Wenn aber $\alpha_1 = \alpha_3$ ist, so hat man für den festen Punkt die Bedingungen

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad m_1 c_1 + m_3 c_3 = 0$$

oder

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \pi, \quad m_1 c_1 - m_3 c_3 = 0.$$

Die Bedingung

(39) $$m_1 c_1 \pm m_3 c_3 = 0$$

zeigt, daß es jetzt unendlich viele feste Punkte gibt, welche eine durch den Punkt M_4 gehende Gerade bilden. Wir haben hier offenbar den Fall einer einfachen Schiebungsbewegung des affin-veränderlichen Systems.

Ähnliches stellt auch der *Fall IV* dar.

Eine größere Beachtung verdient der *Fall V. Das ist der einzige Fall, wo das System Q bei jeder Form des Kurbelvierecks, mit demselben so verbunden werden kann, daß ein Punkt des Systems fest bleibt.* Dazu haben wir die Bedingungen:

(40) $$\begin{aligned} m_2 a_1 a_2 + m_1 a_2 c_1 \cos \varepsilon_1 - m_2 a_1 c_2 \cos \varepsilon_2 &= 0, \\ m_1 a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + m_2 a_1 c_2 \sin \varepsilon_2 &= 0, \\ m_2 a_3 c_2 \cos \varepsilon_2 + m_3 a_2 c_3 \cos \varepsilon_3 &= 0, \\ m_2 a_3 c_2 \sin \varepsilon_2 + m_3 a_2 c_3 \sin \varepsilon_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1, \quad m_2 a_3 c_2 + m_3 a_2 c_3 = 0$$

oder

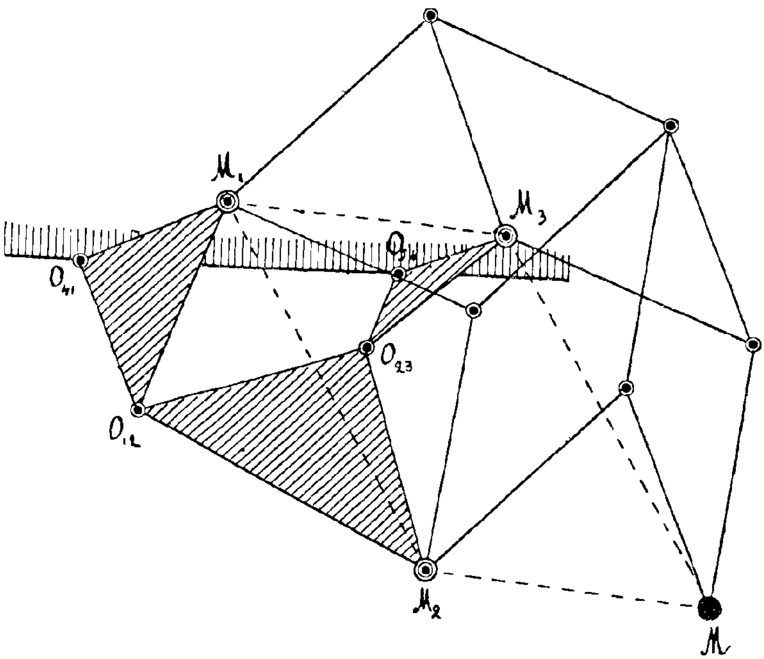
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \pi, \quad m_2 a_3 c_2 - m_3 a_2 c_3 = 0.$$

Ein Paar dieser Gleichungen, die ersten zwei von den Gleichungen (40) und die Bedingung

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

können dazu dienen, um 5 von den 9 Elementen $m_1, m_2, m_3, c_1, \varepsilon_1, c_2, \varepsilon_2, c_3, \varepsilon_3$ zu bestimmen; somit bleibt noch eine große Auswahl für die Lage der Grundpunkte im Systeme Q und dementsprechend für die Lage des festen Punktes M frei. Es ist bemerkenswert, daß die Gleichungen (40) a_4 nicht enthalten. In der Figur 5 ist genommen: $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = 2:3:1:4$,

Fig. 5.



so daß $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ und das Kurbelviereck also ein durchschlagender Mechanismus ist, und weiter $m_1 = -1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, so daß die Punkte M_1, M_2, M_3 und M die Ecken eines Parallelogramms sind; endlich ist

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2},\ \varepsilon_2 = \frac{\pi}{4},\ \varepsilon_3 = \frac{5\pi}{4},\ c_1 = a_1,\ c_2 = a_2\sqrt{2},\ c_3 = a_3\sqrt{2}$$

genommen.

10. *Ein anderer das letzte Ergebnis betreffender Standpunkt.* Ein ebenes affin-veränderliches System hat sechs Freiheitsgrade; wenn also ein Punkt von ihm festgehalten wird, so bleiben noch vier Freiheitsgrade übrig, über die man auf verschiedene Weise verfügen kann, um eine zwangläufige Bewegung des Systems zu erhalten: man kann die Bahnen noch zweier Punkte und ihr Geschwindigkeitsverhältnis aufstellen, oder auch die Bahnen dreier Punkte angeben, wobei die Geschwindigkeitsverhältnisse dieser Punkte in jeder Lage des Systems schon bestimmte sein werden. Die oben betrachtete Bewegung des Systems Q entspricht eben diesem letzteren Falle: ein Punkt M ist fest, die Punkte M_1 und M_3 befinden sich auf gegebenen Kreislinien und der Punkt M_2 beschreibt eine Koppelkurve. Im allgemeinen können diese Linien willkürlich gewählt werden und brauchen nicht Bahnen der Punkte eines und desselben Kurbelvierecks zu sein; es ist aber bemerkenswert, daß wenn man für diese Linien die Bahnen dreier Punkte annimmt, welche den beweglichen Gliedern eines Kurbelvierecks angehören und in diesen Gliedern bestimmte Lagen einnehmen, solche Geschwindigkeitsverhältnisse dieser Punkte bei der betrachteten Bewegung des affin-veränderlichen Systems sich ergeben, wie sie in der Tat bei der Bewegung des Kurbelvierecks bestehen. Dabei können die Zahlen m_1, m_2, m_3 unter der Bedingung

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

sowie die Koordinaten

$$x = E, \quad y = E'$$

des festen Punktes M im Voraus gegeben werden; die Formeln (32) für E und E' bestimmen dann c_2 und ε_2, also die Lage des Punktes M_2 in der Koppel des Kurbelvierecks, und die Gleichungen (40) bestimmen darauf c_1, ε_1 und c_3, ε_3, d. h. die Lagen der Punkte M_1 und M_3 in den Kurbeln desselben Mechanismus. Daraus schließen wir: *Es kann eine solche Bewegung eines affin-veränderlichen Systems angegeben werden, daß ein willkürlich gegebener Punkt desselben festgehalten wird und irgend drei andere seiner Punkte dreien beweglichen Gliedern eines und desselben willkürlich gegebenen Kurbelvierecks angehören.*

11. *Praktische Anwendung eines in § 9 angegebenen Ergebnisses.* In § 9 wurde unter anderem gezeigt, daß nur in dem Falle das System P an ein Kurbelviereck so angeschlossen werden kann, daß ein Punkt M des letzteren bei jeder Lage des Kurbelvierecks fest bleibt, wenn das Kurbelviereck ein Parallelogramm ist. Es gibt aber solche Lagen des gelenkigen Parallelogramms, wo es in ein Antiparallelogramm übergeht; dann setzt sich der Punkt M in Bewegung.[1] Daraus schließen wir folgendes: *Wird der Punkt M durch irgend welche mechanische Mittel festgehalten, so wird das Parallelogramm dadurch gehindert in ein Antiparallelogramm überzugehen* (Fig. 6).

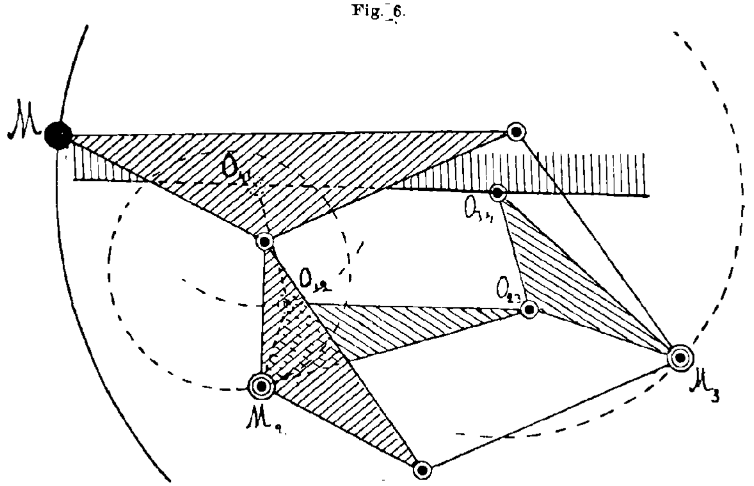
Das System P wird am einfachsten durch einen Plagiographen von Sylvester verwirklicht. Da dieser Mechanismus aus vier gelenkig mit einander verbundenen Gliedern besteht, so wird das genannte Ziel

---

1) In § 16 wird gezeigt, daß dieser Punkt dann einen Kreis beschreibt.

mit derselben Einfachheit erreicht wie durch den bekannten Dreikurbelmechanismus, welcher außer dem Grundparallelogramme ebenfalls noch vier bewegliche Glieder enthält. Der oben angegebene Mechanismus hat aber einen Vorzug: beim Dreikurbelmechanismus, wenn die Kurbeln des Parallelogramms volle Umdrehungen machen, muß auch die dritte Kurbel ganze Umdrehungen vollziehen; während im Systeme P der

Fig. 6.



feste Punkt M so gewählt werden kann, daß das um ihn drehbare Glied des Plagiographen nur eine schwingende Bewegung macht, wobei die Amplitude derselben in gewissen gegebenen Grenzen bleiben kann.

12. *Zur Frage über die geradlinige Bewegung des Punktes M.* Es sei

$$ax + by + c = 0$$

die Gleichung der Geraden, die von dem Punkte M des Systems P oder Q beschrieben werden soll. Nach § 7 finden wir dazu die Bedingung:

$$(aA - bB)\cos\alpha_1 + (aB + bA)\sin\alpha_1 + (aC - bD)\cos\alpha_3$$
$$+ (aD + bC)\sin\alpha_3 + aE + bE' + c = 0.$$

Da dieselbe $\cos(\alpha_1 - \alpha_3)$ nicht enthält, so kann man daraus schon unmittelbar schließen, daß ihre Übereinstimmung mit der Bedingung (9), also auch eine geradlinige Bewegung des Punktes M bei keinem Falle der Anschließung des Systems P oder Q an ein Kurbelviereck möglich ist.

Das Gesagte bezieht sich auch auf die gewöhnlichen Koppelkurven, und wir haben hiermit einen einfachen Beweis für die Unmöglichkeit, mittelst eines einfachen Kurbelvierecks in einer *genauen* Geraden zu führen.

Was die angenäherte Zeichnung der geraden Linien mittelst der Systeme P und Q betrifft, so ist es nicht der Mühe wert sich damit aufzuhalten, da solche Mechanismen mindestens 7 bewegliche Glieder enthalten, während schon fünfgliedrige genaue Geradführungen möglich sind.

13. *Bestimmung der Punkte im Systeme P oder Q, welche Kreislinien beschreiben.* Bei der Bewegung eines gewöhnlichen Kurbelvierecks bilden die kreislinigen Koppelkurven eine Ausnahme: von den Punkten der Koppel beschreiben nur die Drehpunkte O_{12} und O_{23} Kreislinien. Andere solche Punkte gibt es nicht, wenn nur das Kurbelviereck kein Parallelogramm oder kein Rhomboid mit paarweise zusammengefallenen Gliedern darstellt; in den zwei letzten Fällen erscheint die Kreislinie als ein Zweig der Koppelkurve, deren anderer Zweig vom vierten Grade ist und dann beschrieben wird, wenn das Parallelogramm in ein Antiparallelogramm oder der andere Mechanismus in ein wirkliches Rhomboid übergeht. Die Verbindung des Systems P oder Q mit dem Kurbelviereck führt zu anderen Ergebnissen: es erweist sich, daß *die Linie σ bei jeder Form des Kurbelvierecks einen kreislinigen Zweig aussondern kann,* wenn nur die 6 oder 8 zur Verfügung stehenden Parameter (§ 1) entsprechend gewählt werden. Setzen wir:

$$x - E = \xi, \quad y - E' = \eta \tag{41}$$

und nehmen den Punkt (E, E'), dessen Lage bei der Untersuchung selbst nach den Formeln des § 8 bestimmt werden soll, zum neuen Koordinatenanfange; es sei ferner

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi - 2b\eta + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \tag{42}$$

die Gleichung des zu beschreibenden Kreises. Dem in § 7 Gesagten gemäß schreiben wir:

$$\begin{aligned} &2(AC+BD)\cos(\alpha_1-\alpha_3) - 2(aA-bB)\cos\alpha_1 - 2(aC-bD)\cos\alpha_3 \\ &+2(BC-AD)\sin(\alpha_1-\alpha_3) - 2(aB+bA)\sin\alpha_1 - 2(aD+bC)\sin\alpha_3 \\ &+A^2+B^2+C^2+D^2+a^2+b^2-r^2 = 0, \end{aligned} \tag{43}$$

und wir wollen jetzt die Übereinstimmung dieser Bedingung mit der Formel (9) herstellen. Die linke Seite dieser letzteren stellt eine solche Funktion von α_1 und α_3 dar, die durch gleichzeitiges Wechseln der Vorzeichen von α_1 und α_3 nicht geändert wird. Damit die Formel (43) dieselbe Eigenschaft besitze, ist es notwendig, daß die Summe aller Glieder, welche mit α_1 und α_3 ihr Zeichen wechseln, für sich allein gleich Null sei. Somit zerfällt die Bedingung in die beiden folgenden:

$$(44)\quad (BC - AD \sin(\alpha_1 - \alpha_3) - (aB + bA)\sin\alpha_1 - (aD + bC)\sin\alpha_3 = 0,$$

$$(45)\quad 2(AC + BD)\cos(\alpha_1 - \alpha_3) - 2(aA - bB)\cos\alpha_1 - 2(aC - bD)\cos\alpha_3 \\ + A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0,$$

von denen die erste bei allen Werten von α_1 und α_3, die der Bedingung (9) genügen, erfüllt und die zweite mit dieser Bedingung identisch werden muß. Die Bedingung (44) ist aber nur dann mit (9) verträglich, wenn

$$(46)\qquad BC - AD = 0,$$

$$(47)\qquad aB + bA = 0,$$

$$(48)\qquad aD + bC = 0$$

ist. Um dieses genauer zu beweisen, genügt es, einige spezielle Lagen des Kurbelvierecks, nämlich solche, bei welchen zwei seiner Glieder in einer Geraden zusammenfallen, zu betrachten. Eigentlich müßte man alle drei Haupttypen dieses Mechanismus untersuchen, je nachdem die beiden Kurbeln oder nur eine von ihnen volle Umdrehungen machen kann oder beide Kurbeln nur schwingen können; da aber der Gedankengang in allen Fällen derselbe bleibt, werden wir nur den letzten Fall betrachten. Der Kürze wegen werden wir unter A_1, A_2, A_3, A_4 nicht nur die einzelnen Glieder des Kurbelvierecks sondern auch die Geraden, welche die Drehpaarungen verbinden, verstehen. Im Falle, daß die Geraden A_1 und A_3 mit A_4 zusammenfallen können, kann man $\alpha_1 = 0$ nehmen und daraus folgt:

$$(49)\qquad (BC - AD) + (aD + bC) = 0,$$

oder $\alpha_3 = \pi$, und dann ist

$$(50)\qquad (BC - AD) + (aB + bA) = 0.$$

Außerdem können die Geraden A_2 und A_3 oder auch A_1 und A_2 in eine Gerade fallen, und dann hat man im ersteren Falle:

$$\frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{a_4} = \frac{\sin\alpha_1}{a_2 + a_3} = \frac{\sin\alpha_3}{a_1}$$

und im zweiten Falle

$$\frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{a_4} = \frac{\sin\alpha_1}{a_3} = \frac{\sin\alpha_3}{a_1 + a_2}.$$

Dem entsprechend bekommt man aus (44):

$$a_4(BC - AD) + (a_2 + a_3)(\alpha B + bA) + a_1(aD + bC) = 0,$$
$$a_4(BC - AD) + a_3(aB + bA) + (a_1 + a_2)(aD + bC) = 0,$$

und in Verbindung mit (49) und (50):

$$a_4(BC - AD) + (a_1 + a_2 + a_3)(aD + bC) = 0.$$

Da a_4 und $a_1 + a_2 + a_3$ nicht einander gleich sein können, so folgen aus der letzten Gleichung die Bedingungen (46), (47) und (48), von denen übrigens nur zwei voneinander verschieden sind. Im Falle, daß die Geraden A_1 und A_3 nicht mit A_4, dafür aber mit A_2 auf zweierlei Weise zusammenfallen können, kommen wir zu demselben Schlusse.

Der Vergleich von (45) mit (9) gibt weiter:

$$(51)\quad \frac{aA - bB}{g_3} = \frac{aC - bD}{-g_1} = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + a^2 + b^2 - r^2}{2n} = -(AC + BD).$$

Somit müssen 7 Elemente A, B, C, D, a, b, r fünf Bedingungen genügen.

In der Voraussetzung, daß keiner von den Koeffizienten A, B, C, D gleich Null ist, und indem man

$$(52)\qquad \frac{D}{C} = \frac{B}{A} = k$$

setzt, bekommt man:

$$ak + b = 0,$$

und dann geben die Gleichungen (51):

$$(53)\qquad a = Ag_1 = -Cg_3,$$

$$(54)\qquad r^2 = (1 + k^2)\left(1 + \frac{g_1^2}{g_3^2} + g_1^2 - 2n\frac{g_1}{g_3}\right),$$

und endlich, wenn man die Ausdrücke (10) beachtet:

$$(55)\quad B = kA, \quad C = -\frac{g_1}{g_3}A = -\frac{a_3}{a_1}A, \quad D = -k\frac{g_1}{g_3}A = -k\frac{a_3}{a_1}A,$$

$$(56)\qquad \begin{aligned} a = g_1 A = \frac{a_4}{a_1}A, \quad b = -kg_1 A = -k\frac{a_4}{a_1}A, \\ r = \pm\frac{a_2}{a_1}\sqrt{1 + k^2}\cdot A; \end{aligned}$$

wobei A und k willkürlich bleiben.

Wenn einer von den Koeffizienten, z. B. A, gleich Null vorausgesetzt wird, so muß infolge von (46) B oder C auch gleich Null sein. Im Falle

$$A = 0, \quad C = 0$$

geben die Bedingungen (47), (48) und (51):

$$(57)\qquad D = -\frac{a_3}{a_1}B,$$

$$(58)\qquad a = 0, \quad b = -g_1, \quad B = -\frac{a_4}{a_1}B, \quad r = \pm\frac{a_2}{a_1}B,$$

wobei B willkürlich bleibt. Im Falle, daß

$$A = 0, \quad B = 0$$

ist, hat man:

$$\begin{aligned} \xi &= \quad C \cos \alpha_3 + D \sin \alpha_3, \\ \eta &= -D \cos \alpha_3 + C \sin \alpha_3; \end{aligned}$$

die Koordinaten ξ, η genügen also der Gleichung des Kreises

$$\xi^2 + \eta^2 = C^2 + D^2$$

bei allen Werten von C und D. Das Zentrum dieses Kreises wird durch die Koordinaten E, E' bestimmt.

14. *Die Winkelgeschwindigkeit dieser Kreisbewegung.* Es seien ω_1 und ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Kurbeln des Kurbelvierecks; sie sind infolge der Bedingung (9) durch die Gleichung

$$\omega_3 = \frac{g_3 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}\, \omega_1$$

verbunden. Indem man dieses benützt und die Ausdrücke (55) in die Formeln (11) einführt, findet man:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} (y + k g_1 A)\, \omega_1, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)} (x - g_1 A)\, \omega_1; \end{aligned}$$

und hieraus, wenn man die Formeln (56) beachtet, erhält man die gesuchte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{g_1 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}\, \omega_1. \tag{59}$$

Wir sehen, daß diese Winkelgeschwindigkeit weder von der Lage der Grundpunkte des Systems P oder Q im Kurbelviereck, noch von der Lage des Punktes M zu diesen Grundpunkten abhängt.

Dieselbe Formel (59) bekommt man im Falle, daß $A = 0$, $C = 0$ ist. Wenn aber $A = 0$, $B = 0$ ist, so hat man:

$$\omega = \omega_1.$$

15. *Untersuchung der möglichen Fälle der Kreisbewegung.* Wir haben in § 13 folgende drei Fälle für das Bestehen einer kreislinigen verallgemeinerten Koppelkurve σ gefunden: 1) Wenn A, B, C, D alle von Null verschieden sind und die Bedingungen (55) erfüllt werden; 2) wenn $A = 0$, $C = 0$ ist, mit der Bedingung (57); 3) wenn $A = 0$, $B = 0$ ist, ohne andere Bedingungen. Diese Fälle werden wir zur Abkürzung mit (*), (**) und (***) bezeichnen. Wir wollen jetzt sehen, wieweit diese Fälle durch die in § 2 aufgestellten Mechanismen I, II, III, IV und V verwirklicht werden können.

Vor allem, wenn wir die diesen Fällen entsprechenden Bedingungen auf das gewöhnliche Kurbelviereck anwenden, können wir uns jetzt überzeugen, daß in der Tat keine Koppelkurve einen kreisförmigen Zweig aussondern kann, natürlich die bekannten speziellen Fälle ausgeschlossen. Wenn wir aber zur verallgemeinerten Koppelkurve übergehen, finden wir folgendes.

Mechanismus I. Im Falle (*) verlangen die Bedingungen (55):

$$k = -tg(\varepsilon_1 - \delta_3) = -tg(\varepsilon_3 - \delta_1), \tag{60}$$

$$c_3 a_1 \sin\delta_3 \cos(\varepsilon_3 + \delta_1) + c_1 a_3 \sin\delta_1 \cos(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0. \tag{61}$$

Daraus folgt:

$$c_3 a_1 \sin\delta_3 \sin(\varepsilon_3 + \delta_1) + c_1 a_3 \sin\delta_1 \sin(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0$$

und daher:

$$c_3^2 a_1^2 \sin^2\delta_3 = c_1^2 a_3^2 \sin^2\delta_1. \tag{62}$$

Den Gleichungen (60) und (62) kann man auf verschiedene Weise genügen. Wenn c_1, ε_1, c_3, ε_3, d. h. die Lagen der Punkte M_1 und M_3 in den Gliedern A_1 und A_3 des Kurbelvierecks gegeben sind, so haben wir zwei Gleichungen für δ_1 und δ_3, können also die Lage des Punktes M im Systeme P bestimmen.

Im Falle (**) haben wir anstatt (60) die Bedingungen:

$$\cos(\varepsilon_1 - \delta_3) = 0, \quad \cos(\varepsilon_3 + \delta_1) = 0 \tag{63}$$

und wieder die Gleichung (62). Diesen Forderungen kann man z. B. dadurch genügen, daß man c_1, ε_1, ε_3 willkürlich wählt und dann aus (63) δ_1 und δ_3 und aus (62) c_3 bestimmt. Somit können jetzt bei einem gegebenen Kurbelviereck die Lagen der Grundpunkte nicht ganz willkürlich genommen werden; ist aber das getan, so müssen schon die Längen a_1 und a_3 zweier Glieder des Kurbelvierecks der Gleichung (62) entsprechend genommen werden.

Im Falle (***), wenn man in Betracht zieht, daß $k_1 = tg\delta_1$, $k_3 = tg\delta_3$ nur gleichzeitig verschwinden können (§ 3), so sind Bedingungen $A = 0$, $B = 0$ (oder auch $C = 0$, $D = 0$) nicht erfüllbar, den Fall ausgeschlossen, daß einer von den Grundpunkten des Systems P mit einem der festen Drehpunkte zusammenfällt. Im letzteren Falle aber, wenn also z. B. $c_1 = 0$ ist, kann der andere Grundpunkt, welcher im Gliede A_3 liegt, willkürlich genommen werden; alle Punkte des Systems P beschreiben dann Kreislinien, was übrigens selbstverständlich ist, da dann die Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems eine

„einförmige" kreislinige wird. Das Kurbelviereck spielt dann schon keine Rolle, und man kann sagen, daß in dem Sinne, wie es in § 13 verstanden wurde, der Fall (***) beim Mechanismus I nicht möglich ist.

Die Ergebnisse, welche den Fällen (*) und (**) entsprechen, kann man auch von einem anderen Standpunkte betrachten. Da das ebene ähnlich-veränderliche System vier Freiheitsgrade besitzt, so wird seine Bewegung zwangläufig, wenn die Bahnen irgend welcher drei von seinen Punkten gegeben werden; und dann sind schon die Geschwindigkeitsverhältnisse dieser Punkte ganz bestimmte. Wenn man diese Bahnen in Form von Kreislinien wählt, so wird bei gewissen Lagen der Mittelpunkte und Größen der Radien dieser Kreise das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zweier der Kreisbewegungen in jeder Lage des Mechanismus mit demjenigen Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zusammenfallen, welches die beiden Kurbeln eines gegebenen Kurbelvierecks besitzen. Es folgt daraus, daß, wenn man im Mechanismus I den Punkt M mittelst einer hinzugefügten Kurbel in demselben Kreise führt, welchen dieser Punkt ohnedies schon beschreibt, das Glied A_2 des Kurbelvierecks aber wegnimmt, dieselbe Drehungstransformation mit dem Systeme P erreicht wird, wie sie beim gewöhnlichen Kurbelvierecke erfolgt.

Mechanismus II. Es kann leicht gezeigt werden, daß bei ihm alle drei Fälle (*), (**) und (***) bei jeder Form des Kurbelvierecks möglich sind. Wir wollen nur den letzten Fall betrachten, in welchem, wie wir oben gesehen haben, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Punkte (E, E') zusammenfällt. Nachdem man die Lagen der Punkte M_1 und M_2 im Kurbelvierecke willkürlich angenommen hat, kann man die Lage des den Kreis beschreibenden Punktes M_1 den den Bedingungen $A = 0$, $B = 0$ gemäß, aus den Formeln (29) finden, indem man k_1 und k_2 bestimmt:

$$k_1 k_2 (a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + a_1 c_2 \sin \varepsilon_2) + k_1 a_2 c_1 \cos \varepsilon_1 + k_2 a_1 (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2) = 0,$$
$$k_1 k_2 [a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 - a_1 (a_2 - c_2 \cos \varepsilon_2)] - k_1 a_2 c_1 \sin \varepsilon_1 + k_2 a_1 c_2 \sin \varepsilon_2 = 0.$$

Wir sehen also, daß die Lage des Punktes M im Systeme P von a_3 und a_4 nicht abhängt; die Formeln (29) für C, D, E, und E' zeigen außerdem, daß der Radius des Kreises von a_1 und a_4 und die Lage seines Mittelpunktes von a_1 und a_3 unabhängig ist. In der Figur 7 sind

$$c_1 = a_1, \quad \varepsilon_1 = \tfrac{3}{2}\pi, \quad c_2 = \tfrac{3}{2} a_2, \quad \varepsilon_2 = 0$$

genommen, und daher

$$k_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad k_2 = -2, \quad a = \tfrac{6}{5} a_4, \quad b = -\tfrac{3}{5} a_4, \quad r = \tfrac{3}{5}\sqrt{5}\, a.$$ [1]

1) Man vergleiche mit der Figur 1.

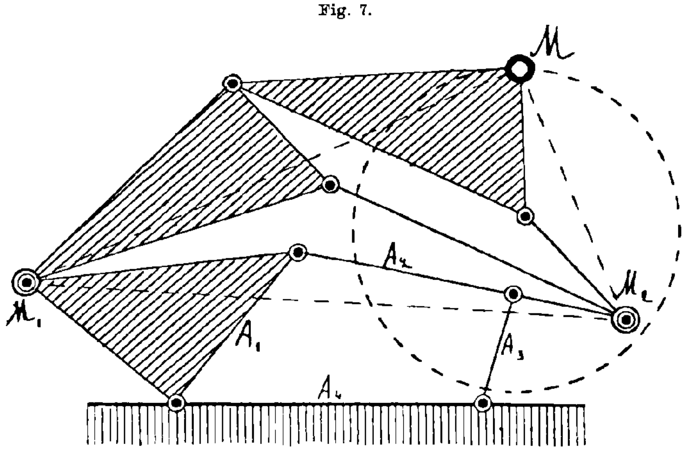
Mechanismus III. Um den Bedingungen des Falles (*) zu genügen, muß man, den Formeln (30) gemäß,

$$k = -tg\,\varepsilon_1 = -tg\,\varepsilon_3, \tag{64}$$

$$a_1 m_3 c_3 \pm a_3 m_1 c_1 = 0 \tag{65}$$

nehmen. Aus der Gleichung (65) sieht man, daß es unendlich viele Punkte gibt, welche Kreislinien beschreiben, und daß diese Punkte in einer Geraden liegen. Das folgt übrigens schon unmittelbar daraus, daß, wenn in einem affin-veränderlichen Systeme ein Punkt fest bleibt, alle anderen Punkte einer durch ihn gehenden Geraden ähnliche Linien beschreiben, die den festen Punkt zu ihrem gemeinsamen Ähnlichkeitspole haben. Wir finden also, daß eine solche Bewegung des affin-veränderlichen Systems möglich ist, bei welcher ein Punkt fest bleibt

Fig. 7.



alle Punkte einer ihn enthaltenden Geraden Kreise beschreiben und noch zwei andere Punkte zweien Kurbeln eines Kurbelvierecks angehören. Da ein ebenes affin-veränderliches System sechs Freiheitsgrade besitzt, so kann seine Bewegung immer auf solche Weise gegeben werden, daß einer von seinen Punkten fest bleibt und drei andere Punkte gegebene Linien beschreiben; die Geschwindigkeitsverhältnisse werden dann aber schon ganz bestimmte sein müssen. Aus dem betrachteten Falle ersehen wir aber, daß bei gewisser Wahl der Grundpunkte das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zweier von ihnen in jeder Lage des Mechanismus mit ebensolchem Verhältnisse der beiden Kurbeln eines Kurbelvierecks zusammenfallen kann.

Die Bedingungen des Falles (**) ergeben:

$$\cos\varepsilon_1 = 0, \quad \cos\varepsilon_3 = 0, \quad a_1 m_3 c_3 \pm a_3 m_1 c_1 = 0 \tag{66}$$

und können auch erfüllt werden.

Die Bedingungen des Falles (***) werden erfüllt, wenn man

$$(67) \qquad m_1 = 0, \quad m_3 + m_4 = 1$$

nimmt. Dieser Fall ist aber von keinem Interesse, da die Gleichung (67) die Punkte der Geraden $M_3 M_4$ bestimmt; es ist aber ohnedies klar, daß bei der Kreisbewegung des Punktes M_3 alle Punkte dieser Geraden Kreislinien beschreiben.

Beim *Mechanismus IV* kommen wir zu ähnlichen Schlüssen: auch bei ihm ist eine Kreisbewegung eines seiner Punkte möglich.

Der *Mechanismus V* läßt erst recht eine Kreisbewegung eines seiner Punkte zu. Werden fünf von den Größen $c_1, \varepsilon_1, c_2, \varepsilon_2, c_3, \varepsilon_3$ willkürlich genommen, so bestimmen die Bedingungen (55) die sechste derselben und die Parameter m_1, m_2, m_3.

16. *Eine Beziehung zwischen dem gelenkigen Parallelogramm und Antiparallelogramm.* In § 9 wurde eine Bewegung des an ein gelenkiges Parallelogramm angeschlossenen Systems P betrachtet, bei der ein bestimmter Punkt M von P fest blieb, und in § 11 wurde eine praktische Anwendung dieser Bewegung gezeigt, welche durch das Festhalten dieses Punktes erreicht wird. Wird dieser Punkt frei gelassen, so kann das Parallelogramm in ein Antiparallelogramm übergehen, und dann setzt sich der Punkt M in Bewegung. Wir wollen zeigen, daß dann dieser Punkt einen Kreis beschreibt. Bei den Bedingungen (36):

$$(68) \qquad A + C = 0, \quad B + D = 0$$

geben die Formeln (11):

$$(69) \qquad \begin{aligned} x &= A(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) + B(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) + E, \\ y &= -B(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) + A(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_3) + E', \end{aligned}$$

also

$$(70) \qquad (x - E)^2 + (y - E')^2 = 2(A^2 + B^2)[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_3)].$$

Im Falle eines Parallelogramms oder Antiparallelogramms, da jetzt

$$g_1 = g_3 = \frac{a_2}{a_1}, \quad n = 1$$

ist, bekommt man aus (9):

$$1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_3) = \frac{a_2}{a_1}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3).$$

Aus den Formeln (69) hat man aber:

$$(A^2 + B^2)(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_3) = A(x - E) - B(y - E'),$$

wodurch die Gleichung (70) die Form

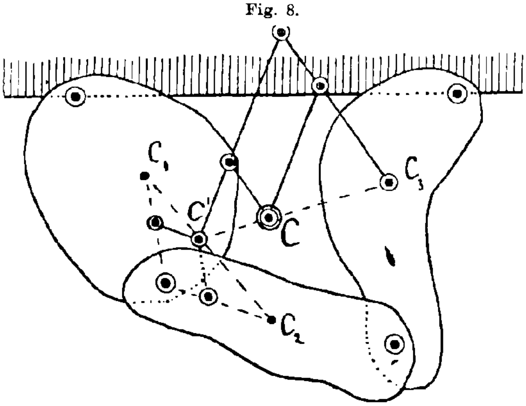
$$(x - E)^2 + (y - E')^2 - 2\frac{a_2}{a_1}A(x - E) + 2\frac{a_2}{a_1}B(y - E') = 0$$

annimmt. Diesen Kreis beschreibt derjenige Punkt M des Systems P, dessen Koordinaten, k_1, k_3, in diesem Systeme den Bedingungen (68) genügen, welcher also im Falle eines Parallelogramms fest bleibt (Fig. 6).

17. *Andere Anwendungen der Systeme P und Q.*

a) *Darstellung der Bewegung des Massenmittelpunktes eines ebenen Gelenksystems.* Aus der Eigenschaft, daß der Massenmittelpunkt zweier Körper die Entfernung zwischen den Massenmittelpunkten derselben im konstanten Verhältnisse teilt, folgt, daß der Massenmittelpunkt C dreier Körper, deren Massenmittelpunkte C_1, C_2, C_3 sind, demjenigen affin-veränderlichen Systeme angehört, das die Punkte C_1, C_2, C_3 zu seinen Grundpunkten hat. Indem man diese Bemerkung auf ein Kurbelviereck mit einem unbeweglichen Gliede anwendet, erhält man die Möglichkeit, durch eine Verbindung des Systems Q mit diesem Kurbelviereck die Bewegung seines Massenmittelpunktes darzustellen. Die Verbindung muß offenbar nach Art des Mechanismus V hergestellt werden. Übrigens kann man jetzt auch einfacher verfahren, indem man anstatt des Systems Q ein sechsgliedriges System gebraucht, welches aus zwei gewöhnlichen Pantographen besteht (Fig. 8), wobei zwei Glieder des Kurbelvierecks selbst als Elemente eines dieser Pantographen benützt werden können. Selbstverständlich wird dabei die Masse des hinzugefügten Systems in Vergleich mit der Masse des Kurbelvierecks vernachlässigt.

Fig. 8.



Neulich wurde von O. Fischer ein anderes Gelenksystem angegeben, um die Bewegung des Massenmittelpunktes eines Kurbelvierecks darzustellen.[1]) Diesem Systeme liegt der Begriff der *Hauptpunkte* des Mechanismus zu Grunde, und es enthält ebenfalls sechs Glieder.

Um die Bewegung des Massenmittelpunktes eines mehrgliedrigen Gelenksystems darzustellen, kann man sich mehrerer affin-veränderlicher Systeme bedienen. Wenn man beachtet, daß die Bewegung eines ebenen affin-veränderlichen Systems durch die Bewegung dreier seiner Punkte bestimmt wird, so kann man leicht einsehen, daß für ein Gelenksystem

1) Diese Zeitschr. Bd. 47 (1902), S. 435.

von $n > 3$ Gliedern $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ Systeme Q nötig sind, je nachdem die Zahl n eine gerade oder eine ungerade ist.

b) *Ein Fall der konformen Abbildung in der Ebene.* Jede solche konforme Abbildung in der Ebene, bei welcher jeder Kreis wieder in einen Kreis übergeht, kann bekanntlich (Satz von Liouville) aus einer Transformation durch reziproke Radienvektoren und einer Ähnlichkeitstransformation zusammengesetzt werden. Diese konforme Transformation kann also durch eine Verbindung eines Inversors mit dem Systeme P dargestellt werden. Man muß nur dazu bemerken, daß die Zahl aller möglichen konformen Abbildungen der genannten Art ∞^6 ist, während man bei dem dazu dienenden Gelenksysteme nur über vier Parameter verfügen kann, da von den vier Parametern der Ähnlichkeitstransformation — den Koordinaten des Ähnlichkeitspoles, dem Ausdehnungskoeffizienten und der Drehung, — bei dem gegebenen Mechanismus nur die ersten zwei bequem geändert werden können. Jedenfalls aber kann eine jede im voraus gegebene konforme Transformation der genannten Art durch eine Verbindung eines Inversors mit einem Systeme P verwirklicht werden.

II. Aus ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Gliedern gebildete kinematische Ketten.

1. *Freiheitsgrade solcher Ketten.* Es sei eine einfache, geschlossene kinematische Kette S gegeben, die aus n veränderlichen Gliedern $A_1, A_2, \cdots A_n$ besteht. Von diesen Gliedern soll vorausgesetzt werden, daß jedes von ihnen, einzeln genommen, im gegebenen Raume μ Freiheitsgrade besitzt, und daß sie miteinander durch *bestimmte* kinematische Paare verbunden sind, also jedes von ihnen nur einen Freiheitsgrad in Bezug auf die Nachbarglieder hat. Wenn

$$n \geqq \mu$$

und die Kette frei ist, so hat sie n Freiheitsgrade; sind aber einem ihrer Glieder $k \leqq \mu$ Freiheitsgrade weggenommen, so verliert die ganze Kette ebenso viele Freiheitsgrade. Im Falle, daß

$$n = \mu + 1$$

ist und ein Glied der Kette festgehalten wird, verliert die Kette μ Freiheitsgrade, und sie wird zwangläufig.

Diese Betrachtung wollen wir auf Ketten anwenden, deren Glieder ebene ähnlich-veränderliche Systeme sind. Dann ist $\mu = 4$, und eine

Kette, die aus solchen Gliedern gebildet ist, wird zwangläufig, wenn $n = 5$ ist und ein Glied dieser Kette festgehalten wird. Somit bekommen wir einen ebenen *Mechanismus, der aus vier beweglichen ähnlich-veränderlichen Systemen besteht.*

Dieselbe Betrachtung, wenn sie auf ebene affin-veränderliche Systeme, welche in der Ebene 6 Freiheitsgrade besitzen, angewandt wird, führt uns zu dem Schlusse, daß eine Kette, die aus 7 solchen Gliedern gebildet ist, von denen ein Glied festgehalten wird, zwangläufig ist. Wir erhalten somit einen ebenen *Mechanismus, der aus sechs beweglichen affin-veränderlichen Gliedern besteht.*

Wenn ein oder mehrere kinematische Paare nicht mehr bestimmte Paare sind, wenn also zwei Nachbarglieder in Bezug auf einander mehr als einen Freiheitsgrad haben, so vergrößert sich entsprechender Weise die Zahl der Freiheitsgrade der ganzen Kette. Damit also diese Kette ihre Zwangläufigkeit nicht verliert, muß die Zahl ihrer Glieder entsprechend vermindert werden. Wenn also zwei Nachbarglieder gegenseitig $1 + k$ Freiheitsgrade haben, wo wir k als einen *Überschuß* der Freiheitsgrade bezeichnen können, so ist die Zahl der Glieder einer zwangläufigen kinematischen Kette:

$$n = \mu + 1 - \sum k, \tag{71}$$

wobei die Summe auf alle Überschüsse der Freiheitsgrade sich erstreckt.

Dieses gibt Ketten, die aus 2 oder 3 ähnlich-veränderlichen oder aus 2, 3, 4 oder 5 affin-veränderlichen Gliedern bestehen.

19. *Grundlage zur Einteilung dieser Ketten.* Diese Angaben führen auch zu einer natürlichen Einteilung der kinematischen Ketten (nach einem Gedanken von Reuleaux) in jedem Raume mit einer gegebenen Zahl von Freiheitsgraden. Unabhängig von der Form der kinematischen Paare, dient als erste Grundlage dazu die Zahl der Überschüsse der Freiheitsgrade in denselben; die weitere Unterordnung erfolgt dann nach der Art, wie diese Überschüsse in der kinematischen Kette verteilt sind. Indem wir dieses auf Ketten anwenden, die aus ähnlich-veränderlichen oder affin-veränderlichen Gliedern gebildet werden, und diese Glieder in Form von Gelenksystemen P oder Q voraussetzen, gelangen wir zu einer Reihe neuer Mechanismen. Wenn dieselben, vielleicht mit wenigen Ausnahmen, keine praktische Bedeutung haben, — in Folge der Verwickeltheit, mit welcher diese Mechanismen durch gelenkig verbundene *feste* Körper gebildet werden, — so kann doch eine systematische Untersuchung derselben zu verschiedenen solchen Aufgaben über Bewegungstransformationen führen, die kaum auftreten könnten, wenn wir diese Mechanismen als kinematische Ketten mit *festen* Gliedern betrachteten. Zudem würden diese Ketten, welche von dem oben gezeigten Standpunkte aus als *einfache Ketten* erscheinen, andernfalls als *zusammengesetzte Ketten* betrachtet werden müssen, und dann würde die Untersuchung derselben viel verwickelter ausfallen müssen.

20. *Einteilung der genannten Ketten.* Bei der Ausführung dieser Einteilung werden wir unter $A_i A_{i+1}$ das kinematische Paar verstehen, welches die Glieder A_i und A_{i+1} verbindet, und die Zahl der Überschüsse der Freiheitsgrade durch eine darunter gestellte Zahl angeben. Wenn n die Zahl der Glieder ist, so soll das unbewegliche Glied A_n heißen.

Kinematische Ketten, deren Glieder ähnlich-veränderliche Systeme sind.

a) Mit zwei überschüssigen Freiheitsgraden in den kinematischen Paaren — *dreigliedrige Ketten*:

	A_3 A_1	A_1 A_2	A_2 A_3
I	0	0	2
II	0	1	1
III	0	2	0
IV	1	0	1

b) Mit einem überschüssigen Freiheitsgrade oder *viergliedrige Ketten*:

	A_4 A_1	A_1 A_2	A_2 A_3	A_3 A_4
V	0	0	0	1
VI	0	0	1	0

c) Vollständige — *fünfgliedrige Ketten*:

	A_5 A_1	A_1 A_2	A_2 A_3	A_3 A_4	A_4 A_5
VII	0	0	0	0	0.

Die übrigen Fälle der Verteilung der Freiheitsgrade in den kinematischen Paaren führen zu kinematischen Ketten, welche sich von den vorhergehenden nicht wesentlich unterscheiden, da sie in Betreff der Verteilung der Freiheitsgrade zu ihnen symmetrisch sind.

Ketten, deren Glieder affin-veränderliche Systeme sind. Indem wir auf ähnliche Weise verfahren, können wir folgende Gruppen von kinematischen Ketten aufzählen, wobei wir wieder nur *wesentlich* verschiedene Verteilung von Freiheitsgraden beachten, die Überschüsse der letzteren aber, der Kürze wegen, nicht mehr ausführlich aufschreiben wollen.

a)	Vier Überschüsse	drei	Glieder	9	Fälle,
b)	Drei „	vier	„	10	„ ,
c)	Zwei „	fünf	„	9	„ ,
d)	Ein „	sechs	„	3	„ ,
e)	Vollständige Kette	sieben	„	1	„ .

Im ganzen bekommen wir also 39 wesentlich verschiedene kinematische Ketten.

Diesen Mechanismen könnte man noch solche an die Seite stellen, welche gleichzeitig ähnlich-veränderliche und affin-veränderliche Glieder enthalten, indem man sich dabei auf allgemeine Betrachtungen stützt[1]), welche nicht homogene Ketten betreffen, d. h. solche, deren Glieder verschiedene Zahlen von Freiheitsgraden besitzen. Wir werden uns aber damit nicht aufhalten. Was aber die oben aufgezählten Mechanismen betrifft, so werden wir nur die vier ersten, welche auch die einfachsten sind, etwas ausführlicher betrachten, um zu zeigen, wie solche Mechanismen praktisch überhaupt verwirklicht werden können.

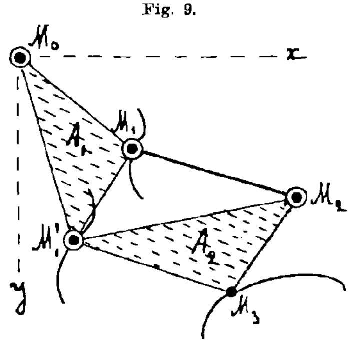
21. *Kinematische Paare dieser Ketten.* Um eine kinematische Kette aus ähnlich-veränderlichen Gliedern zu bilden, kann man dazu das Gelenksystem gebrauchen, welches wir als System P bezeichnet haben, und ebenso für Ketten mit affin-veränderlichen Gliedern das System Q benützen. Dabei entsteht aber die Frage: wie soll man die kinematischen Paare bilden, welche solche Systeme miteinander verbinden? Praktisch kann das auf dreierlei Weise getan werden: a) indem man einen Punkt zwingt eine gegebene Linie zu beschreiben, wobei *ein* Freiheitsgrad verloren geht, b) durch das Festhalten eines Punktes, unter Verlust von *zwei* Freiheitsgraden, und c) indem man für jede Lage des Systems ein bestimmtes Geschwindigkeitsverhältnis zweier seiner Punkte aufstellt, wodurch *ein* Freiheitsgrad verschwindet. Wenn ein Kettenglied an ein unbewegliches Glied angrenzt, so hat die Forderung, daß einer seiner Punkte eine gegebene dem anderen Gliede angehörende Linie beschreibt, einen bestimmten Sinn und kann mittelst eines Hilfsmechanismus verwirklicht werden; wenn aber beide Glieder beweglich sind, so ist diese Linie veränderlich, wobei sie nicht nur ihre Lage sondern auch (im ähnlich-veränderlichen Gliede) ihre Größe und (im affin-veränderlichen Gliede) sogar ihre Form wechselt. Es ist begreiflich, daß eine mechanische Verwirklichung einer solchen

1) P. Somoff, Über Freiheitsgrade kinematischer Ketten. Journ. der russ. Phys.-Chem. Ges. 1887 (russisch).

Linie überhaupt schwer zu erreichen, in einem Gelenksysteme aber, welches nur einzelne isolierte Punkte veränderlicher Systeme enthält, ganz unmöglich ist. Wir müssen daher, wenn zwei benachbarte Glieder keinen gemeinschaftlichen Punkt haben dürfen oder wenn dieses für das kinematische Paar ungenügend ist, auf eine andere Weise die Bewegung dieser Glieder gegeneinander begrenzen: wir können einen Punkt zwingen eine *unveränderliche* Linie zu beschreiben. Eine solche Linie wird nicht mehr aus denselben Punkten des veränderlichen Systems bestehen, da sie in Bezug auf dieses System veränderlich ist; es wird aber auch durch dieses Mittel ein Freiheitsgrad im kinematischen Paare und zugleich in der ganzen Kette vernichtet. Als einfachstes Mittel dieser Art werden wir weiter unten Kurbeln benutzen, deren Drehpunkte zweien veränderlichen Gliedern einer Kette angehören.

22. *Mechanismus I.* Das ähnlich-veränderliche Glied A_1 soll gegenüber dem unbeweglichen Gliede A_3 einen Freiheitsgrad behalten; am einfachsten kann das dadurch erzielt werden, daß ein Punkt M_0 des Gliedes A_3 festgehalten wird und ein anderer seiner Punkte, M_1, eine gegebene Linie σ_1 zu beschreiben genötigt wird. Vom Gliede A_2, welches auch nur einen Freiheitsgrad in Bezug auf A_1 haben soll, können wir voraussetzen, daß es mit A_1 einen gemeinsamen Punkt M_1' hat und daß ein anderer Punkt von ihm, M_2, eine bestimmte Linie im Gliede A_1 beschreibt. Anstatt dessen wollen wir aber, dem in § 21 Gesagten gemäß, die Punkte M_1 und M_2 durch eine Kurbel miteinander verbinden. Endlich, damit A_2 gegen A_3 drei Freiheitsgrade habe, muß man das Glied A_2 einer Bedingung in Bezug auf A_3 unterwerfen; wir bewirken das dadurch, daß wir einen Punkt M_3 des Gliedes A_2 auf einer gegebenen Linie σ_3 führen. Somit erhalten wir einen Mechanismus, der in Fig. 9 abgebildet ist. Die Gelenksysteme, welche die ähnlich-veränderlichen Glieder A_1 und A_2 darstellen, sind hier, wie auch weiter unten bei den übrigen Mechanismen, der Einfachheit wegen durch schraffierte Dreiecke dargestellt; in Wirklichkeit aber sind sie viergliedrige Gelenksysteme P.

Fig. 9.



Es kommt alles darauf hinaus, die Abhängigkeit der Bahn des Punktes M_2 von den gegebenen Bahnen σ_1 und σ_3 zu bestimmen. Dazu haben wir: die Gleichung der Linie σ_1:

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \tag{72}$$

den Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Punkte M_1 und M_1':

$$(73)\qquad \begin{aligned} x_1' &= f(x_1 \cos\gamma - y_1 \sin\gamma), \\ y_1' &= f(x_1 \sin\gamma + y_1 \cos\gamma), \end{aligned}$$

wo

$$f = \frac{M_1' M_0}{M_1 M_0} = \text{const.}, \quad \gamma = \sphericalangle (M_1 M_0 M_1') = \text{const.}$$

ist, die Gleichung der Linie σ_3:

$$(74)\qquad f_3(x_3, y_3) = 0,$$

die Koordinaten von M_3 in Funktion von den Koordinaten der Punkte M_1' und M_2 nach den Formeln (6) ausgedrückt:

$$(75)\qquad \begin{aligned} x_3 &= \frac{k_1' x_1' + k_2 x_2 + k_1' k_2 (y_1' - y_2)}{k_1' + k_2}, \\ y_3 &= \frac{k_1' y_1' + k_2 y_2 - k_1' k_2 (x_1' - x_2)}{k_1' + k_2}, \end{aligned}$$

wo

$$k_1' = \operatorname{tg}(M_2 M_1' M_3), \quad k_2 = \operatorname{tg}(M_1' M_2 M_3)$$

bedeutet, und endlich, da die Punkte M_1, M_2 durch eine Kurbel von der Länge l miteinander verbunden sind,

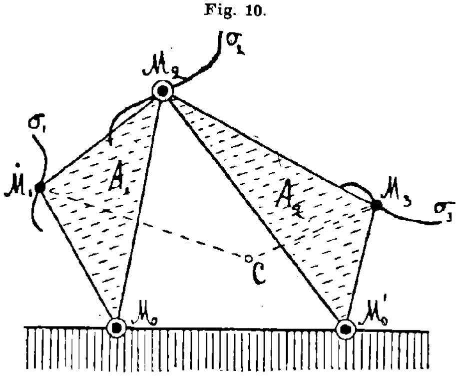
$$(76)\qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0.$$

Die Bahngleichung des Punktes M_2 wird dann durch Elimination von x_1, y_1, x_1', y_1', x_3, y_3 aus den sieben Gleichungen (72), (73), (74), (75) und (76) erhalten.

Wenn die Linien σ_1 und σ_2 Geraden sind, so beschreibt der Punkt M_2 eine Ellipse.

23. *Mechanismus II.* Die einfachste Form eines solchen Mechanismus ist die folgende (Fig. 10). Das Glied A_1 hat einen in der Ebene festen Punkt M_0, und ein anderer seiner Punkte, M_1, wird genötigt eine gegebene Linie σ_1 zu beschreiben; ein dritter Punkt M_2 desselben Gliedes beschreibt dann eine Linie σ_2, die der Linie σ_1 ähnlich ist; σ_1 und σ_2 haben dabei den Punkt M_0 zu ihrem Ähnlichkeitspole. Der Punkt M_1 soll zugleich dem Gliede A_2 angehören, welches somit in Bezug auf A_1 zwei Freiheitsgrade behält. Es möge weiter ein Punkt M_0'

Fig. 10.

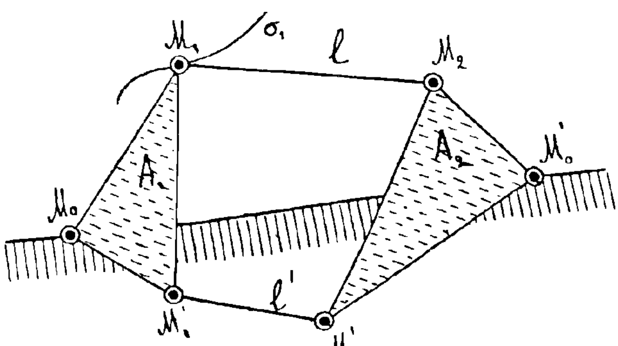


von A_2 in der Ebene fest sein, was der Voraussetzung entspricht, daß A_2 zwei Freiheitsgrade in Bezug auf A_3 besitzt. Ein dritter Punkt M_3 des Gliedes A_2 wird dann eine Linie beschreiben, welche der Linie σ_2 und folglich auch der Linie σ_1 ähnlich ist; der Ähnlichkeitspol von σ_2 und σ_3, der Punkt M_0', fällt aber mit demjenigen der Linien σ_1 und σ_2 nicht zusammen. Der Ähnlichkeitspol C von σ_1 und σ_3 kann durch die bekannte Konstruktion als Durchschnittspunkt zweier Kreise gefunden werden.

Dieser Mechanismus, welcher in theoretischer Beziehung also von keinem Interesse ist, kann aber eine praktische Anwendung finden: er kann nämlich dazu dienen, eine Linie in eine ihr ähnliche zu transformieren in dem Falle, daß der Ähnlichkeitspol dieser Linien materiell nicht vorhanden ist, wenn also der gewöhnliche Pantograph oder Plagiograph nicht ausreicht. Das kommt vor, wenn das lineare Verhältnis beider Linien nur wenig von Eins verschieden ist und diese Linien parallel zu einander sind oder nur wenig von einer solchen Lage abweichen, und wenn also, in einem Mechanismus, die Geschwindigkeiten entsprechender Punkt einer ähnlichen Forderung genügen sollen.

Eine andere Form des Mechanismus II ist in der Fig. 11 abgebildet. Das Glied A_1 hat einen festen Punkt M_0, und ein anderer Punkt von ihm, M_1, beschreibt eine gegebene Linie σ_1; A_2 hat auch einen festen Punkt M_0' und behält gegen A_1 zwei Freiheitsgrade dadurch, daß zwei seiner Punkte, M_2 und M_2', mit zweien Punkten, M_1 und M_1', von A_1 durch feste Kurbeln l, l' verbunden sind. Die Bewegung des Punktes M_1 wird dann in eine andere bestimmte Bewegung des Punktes M_2 transformiert. Analytische Beziehungen, welche diese Transformation bestimmen, können leicht auf dieselbe Weise zusammengestellt werden, wie es in § 22 gezeigt wurde. Es sollen nur folgende spezielle Fälle angeführt werden.

Fig. 11.



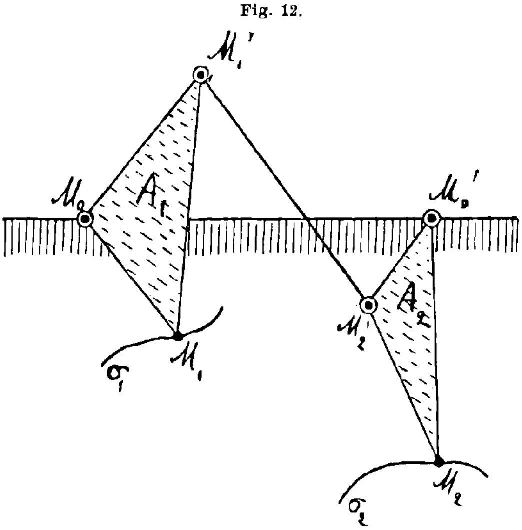
Wenn $M_0M_1 = M_0M_1'$, $M_0M_2 = M_0M_2'$ und $l = l'$ genommen ist, so beschreibt bei der Bewegung des Punktes M_1 auf einem kleinen

Kreise der Punkt M_2 in entgegengesetzter Richtung eine geschlossene Kurve vierter Ordnung, die sich nur wenig von einem Kreise unterscheidet.

Wenn der Punkt M_1 die Gerade $M_0 M_1$ und also M_1' die Gerade $M_0 M_1'$ beschreibt, so beschreiben die Punkte M_2 und M_2' auch gerade Linien $M_0' M_2$ und $M_0' M_2'$; wenn dabei die Punkte M_1, M_1' sich dem Punkte M_0 nähern, so entfernen sich die Punkte M_2, M_2' vom Punkte M_0', und umgekehrt; die Kurbeln l und l' vollführen dann elliptische Bewegungen.

24. *Mechanismus III.* Bei ihm sind die beiden Überschüsse der Freiheitsgrade in einem kinematischen Paare $(A_1 A_2)$ vereinigt, d. h. A_2 hat in Bezug auf A_1, und umgekehrt, drei Freiheitsgrade, während die übrigen zwei Paare, $(A_0 A_1)$ und $(A_2 A_0)$, bestimmte sind. Wir werden uns wieder auf den einfachsten Fall eines solchen Mechanismus beschränken. Es sei der Punkt M_0 des Gliedes A_1 unbeweglich (Fig. 12), während ein anderer Punkt M_1 desselben eine gegebene Linie σ_1 in der festen Ebene beschreibt; ebenso soll ein Punkt M_0' des Gliedes A_2 unbeweglich sein und ein anderer Punkt M_2 eine gegebene Linie zu beschreiben genötigt werden. Die Punkte M_1', M_2' der Glieder A_1, A_2 sind durch eine Kurbel mittelst Drehpaarungen miteinander verbunden, wodurch zwei Überschüsse von Freiheitsgraden in dem kinematischen Paare $(A_1 A_2)$ übrig bleiben.

Fig. 12.



Ein solcher Mechanismus kann von Nutzen sein, wenn bei der Konstruktion eines Gelenkmechanismus auf einer Seite einer festen Ebene (z. B. auf einem Reißbrette) die festen Achsen einiger von den Gliedern des Mechanismus demselben nicht erlauben volle Umläufe auszuführen — ein Fall, welcher schon bei einem gewöhnlichen Kurbelviereck öfters vorkommt. Der betrachtete Mechanismus erlaubt *ein gegebenes Gelenksystem so in Teile zu zerlegen, daß jeder derselben seine Bewegung relativ zu den andern behält, aber dabei nicht mehr gehindert wird alle ihm geometrisch möglichen Lagen einzunehmen.*

Beispielshalber wollen wir diese Bemerkung auf das Gallowaysche Kurbelviereck $B_1 B_2 B_3 B_4$ (Fig. 13) anwenden. In diesem Mechanismus sind die angrenzenden Glieder paarweise gleich, $B_1 = B_4$, $B_2 = B_3$, und das feste Glied ist das kleinere; dann dient es als ein Drehungsverdoppler. Wenn die beiden Glieder B_1, B_3 ihre Drehpaarungen in einer und derselben Ebene enthalten, so ist eine stetige Drehung dieser Glieder nicht möglich, da es solche Lagen gibt, in welchen die Drehpaarungen dieser Bewegung hinderlich werden. Der Mechanismus III erlaubt, das Gallowaysche Kurbelviereck so zu zerlegen, daß die Glieder B_1 und B_3 vom Gliede B_2 abgetrennt sich bewegen, während die relative Bewegung aller drei Glieder dieselbe

Fig. 13.

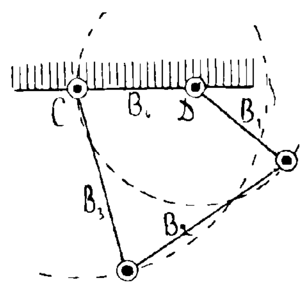
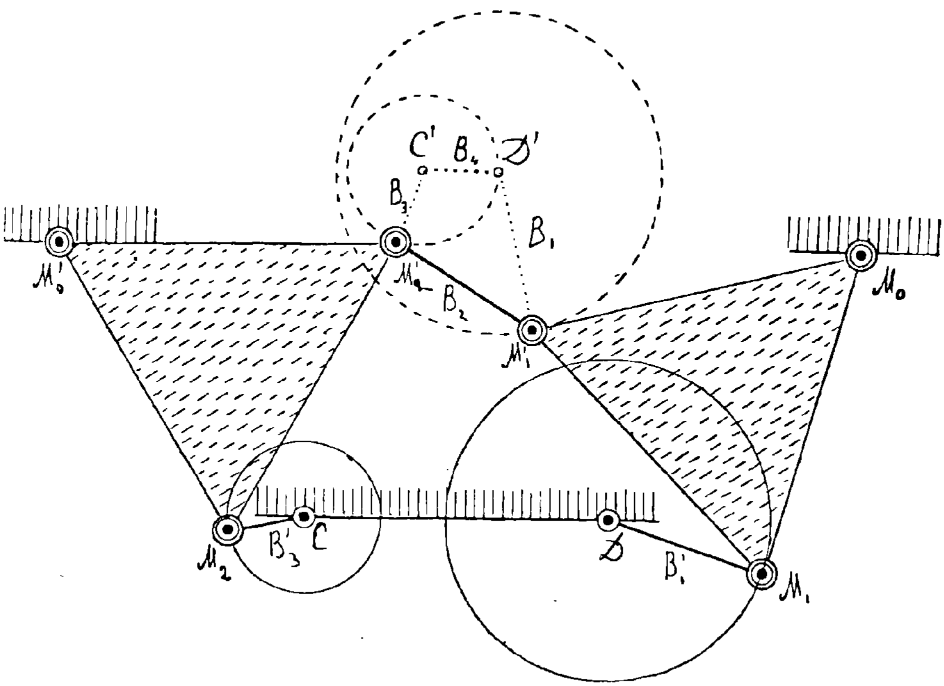


Fig. 14.



bleibt. Zu diesem Zwecke muß man die Punkte M_1 und M_2 des Mechanismus III mittelst zweier Kurbeln auf Kreisen führen (Fig. 14). Die Mittelpunkte C und D, sowie die Radien r_1 und r_3 dieser Kreise können durch eine einfache Konstruktion so bestimmt werden, daß die Gerade $M_1'M_2'$, deren Punkte $M_1'M_2'$ in Folge der Ähnlichkeitstransformation ebenfalls Kreise beschreiben, eine mit dem Gliede B_2 des gegebenen Gallowayschen Kurbelvierecks identische Bewegung vollführt. In der Fig. 14 ist

$$M_0M_1 = M_0M_1', \quad M_0M_2 = M_2M_2'$$

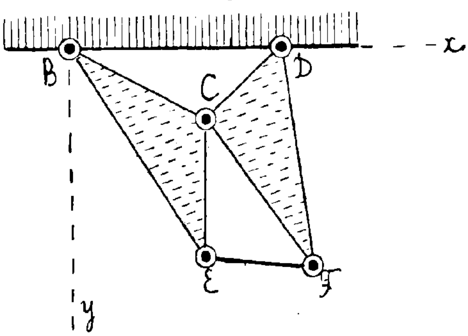
genommen; dann ist

$$r_1 = B_1, \quad r_3 = B_3.$$

Natürlich müssen die beiden ähnlich-veränderlichen Dreiecke groß genug genommen werden, damit keiner von den festen Drehpunkten M_0, M_0' den vollen Kreisbewegungen der Punkte M_1, M_1', M_2, M_2' hinderlich wird. Außerdem müssen die Drehpaarungen so ausgeführt sein, daß das Glied $M_1'M_2'$ *über* einem der ähnlich-veränderlichen Dreiecke und *unter* dem anderen sich hinbewegen kann.

Das in dem obigen Beispiele gezeigte Ziel kann auch ohne ähnlich-veränderliche Systeme erreicht werden, indem man zwei gelenkige Parallelogramme benützt. Die Koppel eines solchen Gelenkvierecks hat bekanntlich eine fortschreitende Kreisbewegung; und man kann in den Koppeln zweier solcher Parallelogramme solche Punkte nehmen, die genügend weit entfernt von allen Drehpaarungen bleiben, und durch eine Verbindung dieser Punkte miteinander durch eine Kurbel eine solche Bewegung für dieselbe erhalten, wie sie von der Koppel eines gegebenen Kurbelvierecks ausgeführt wird. Der Mechanismus III hat aber nicht den Nachteil, welcher beim gelenkigen Parallelogramme auftritt, daß derselbe sich in ein Antiparallelogramm verwandeln kann, und hat außerdem folgenden Vorzug: wollten wir die relativen Längen der Glieder eines Kurbelvierecks ändern, so müßte man die Lagen von vier Drehpaarungen und die Längen von vier Kurbeln der beiden Hilfsparallelogramme wechseln, während bei dem Mechanismus III die Abänderung nur von zweien, die Punkte M_1 und M_2 führenden Kurbeln genügt.

Fig. 15.



25. *Mechanismus IV.* Er hat einen Überschuß der Freiheitsgrade in den Paaren (A_2A_3) und (A_3A_1). Die einfachste Art eines solchen

Mechanismus erhält man, indem man je einen Punkt der Glieder A_1 und A_2 in der Ebene festhält und das kinematische Paar $(A_1 A_2)$ so einrichtet, wie es beim Mechanismus I gezeigt wurde. Wir erhalten somit ein Gelenksystem, welches als ein Kurbelviereck $BEFDB$ (Fig. 15) betrachtet werden kann, bei dem die beiden Kurbeln durch ähnlich-veränderliche Systeme ersetzt sind und, um die dadurch erscheinenden zwei Überschüsse von Freiheitsgraden zu tilgen, diese beiden Systeme noch durch eine Drehpaarung C miteinander verbunden sind. Man kann übrigens leicht einsehen, daß dann der Punkt C immer einen Kreis beschreibt. Die Koordinaten von E und F werden nämlich, nach der Eigenschaft des ähnlich-veränderlichen Systems, durch die Koordinaten von C linear ausgedrückt. Wenn wir die Koordinaten des letzteren Punktes in die Gleichung, welche die Unveränderlichkeit der Entfernung EF ausdrückt, einsetzen, so erhalten wir eine Gleichung zweiten Grades, die sich als eine Kreisgleichung erweist. Dieses kann übrigens leicht auch auf geometrischem Wege gefunden werden.

Fig. 16.

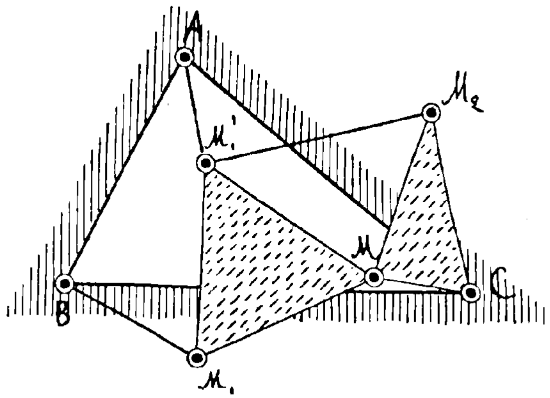
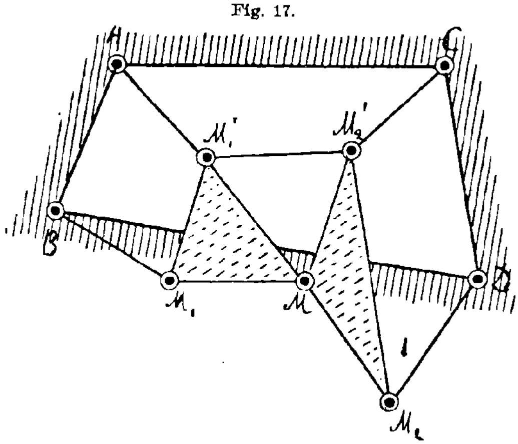


Fig. 17.



Die Punkte E und F beschreiben Linien, die der Bahn des Punktes C ähnlich sind und zu ihren Ähnlichkeitspolen mit der letzteren die Punkte B und D haben; ihre Geschwindigkeiten sind derjenigen des Punktes C proportional; daher sind die Bahnen von E und F ebenfalls Kreise und werden mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen. Die Radien r_1, r_2 der von den Punkten E und F beschriebenen

Kreise verhalten sich zum Radius des Kreises von C, wie BE zu BC und DF zu DC; und wenn man beachtet, daß r_1 und r_2 im allgemeinen nicht gleich sind, andererseits aber die Entfernung EF konstant bleibt, so muß man daraus schließen, daß die Mittelpunkte der beiden Kreise zusammen fallen, d. h. die Gerade EF dreht sich einfach um einen festen Punkt.

26. *Abänderungen der Mechanismen I, II, III und IV.* In allen oben beschriebenen Mechanismen sind diejenigen kinematischen Paare, welche einen Überschuß von Freiheitsgraden enthalten und die an das unbewegliche Glied der Kette sich anschließenden Glieder mit dem letzteren verbinden, durch feste Drehpaarungen hergestellt. An Stelle dieses Bewegungszwanges kann auch ein anderer treten; z. B. kann man die Forderung aufstellen, daß zwei Punkte eines solchen Gliedes gegebene Linien in der festen Ebene beschreiben. Werden für diese Linien Kreise genommen, so können wir, um ein kinematisches Paar mit *einem* Überschusse der Freiheitsgrade zu bekommen, zwei Punkte des ähnlich-veränderlichen Gliedes durch zwei Kurbeln mit festen Drehpunkten verbinden.

Fig. 18.

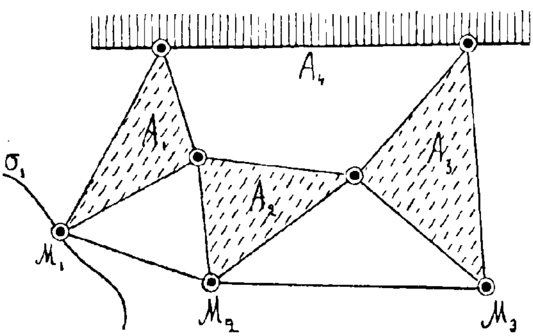
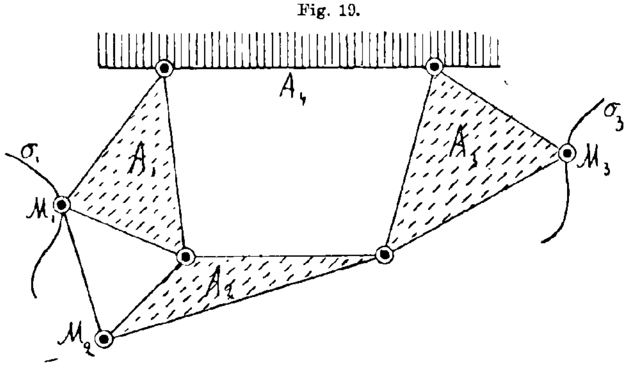


Fig. 19.



Diese Abänderungen der Mechanismen kann man als solche kinematische Ketten betrachten, welche gelenkige Vierecke enthalten, von denen aber einige Glieder veränderlich sind.

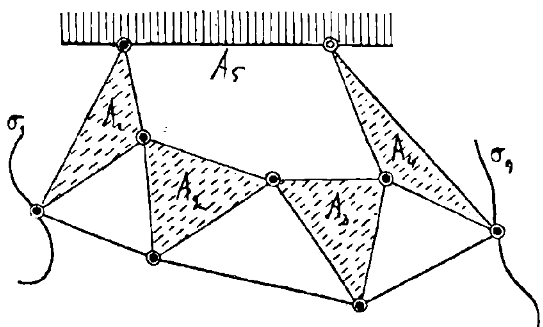
Zur Erläuterung wollen wir das Gesagte auf den Mechanismus IV anwenden. Man kann sich zwei Arten von Mechanismen mit solcher Abänderung vorstellen: 1) solche, bei denen das eine von den Paaren (A_3A_1), (A_2A_3) auf diese Weise abgeändert ist, und 2) solche, bei welchen dieses in den beiden genannten Paaren geschehen ist. Das ergibt die in den Figuren 16 und 17 abgebildeten Mechanismen. In dem ersten von ihnen haben die Vierecke:

BM_1MC zwei veränderliche Glieder,
$AM_1'MC$ „ „ „ ,
$AM_1'M_1B$ ein veränderliches Glied,
$AM_1'M_2C$ „ „ „ .

Der zweite Mechanismus enthält drei gelenkige Vierecke: $AM_1'M_1B$ und $CM_2'M_2D$, in welchen das mittlere Glied veränderlich ist, und ein gewöhnliches Kurbelviereck $CM_2'M_1'A$.

27. *Die Mechanismen V, VI und VII.* Diese Mechanismen können auch von dem eben gezeigten Standpunkte aus betrachtet werden. Die ersten zwei derselben (Fig. 18 und 19) stellen gelenkige Vierecke mit drei veränderlichen Gliedern dar. Da ein solches Viereck, wenn seine Glieder nur durch Drehpaarungen miteinander verbunden werden, drei überschüssige Freiheitsgrade hat, so müssen dieselben getilgt werden, was auf verschiedene Weise erreicht werden kann. Im *Mechanismus V* (Fig. 18) wird ein Punkt M_1 des Gliedes A_1 auf einer gegebenen Linie σ_1 geführt und die Glieder A_1 und A_3 sind mit dem Gliede A_2 durch Koppeln verbunden. Im *Mechanismus VI* (Fig. 19) werden die Punkte M_1 und M_3 der Glieder A_1, A_3 genötigt, gegebene Linien zu beschreiben und die Glieder A_1 und A_2 sind durch eine Koppel verbunden.

Fig. 20.



Man kann diese drei Freiheitsgrade auch dadurch wegnehmen, daß man in jedem der Glieder A_1, A_2, A_3 einen Punkt in der festen Ebene auf einer gegebenen Linie führt; dadurch wird aber eine Verbindung des mittleren Gliedes A_2 mit dem festen Gliede A_4 eingeführt und die kinematische Kette hört dann auf, eine *einfache* Kette zu sein (§ 19).

Der Mechanismus VII stellt eine vollständige aus ähnlich-veränderlichen Gliedern gebildete Kette dar. Eine solche Kette ist in der einfachsten Form in Fig. 20 gezeichnet. Die Mannigfaltigkeit solcher Ketten wird durch die Form der vier ähnlich-veränderlichen Dreiecke, die Entfernung der festen Drehpunkte im Gliede A_5, die Längen der Koppeln und durch die Form der führenden Linien σ_1, σ_4 bedingt.

Über die Benennung und kinematische Unterscheidung der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten sowie über Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung.

Von R. Mehmke in Stuttgart.

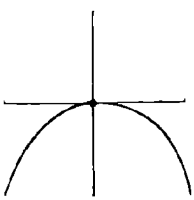
Bezüglich der singulären Punkte ebener und räumlicher Kurven hat mir die Einsichtnahme in den von Herrn v. Mangoldt verfaßten Abschnitt über die Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (III, D 1, 2, insbes. Nr. 3, 19, 29) und in die einschlägigen Arbeiten, die dort wie auch in der „Allgemeinen Theorie der Kurven doppelter Krümmung" von W. Schell (2. Aufl., Leipzig 1898, S. 13—17, 39) angeführt sind, gezeigt, daß es für die acht Hauptarten von Punkten bei Raumkurven, ja sogar für die einfachste Art von Punkten bei ebenen Kurven, zu welcher Art der gewöhnliche Kurvenpunkt gehört, an passenden Namen gänzlich fehlt. Dies veranlaßt mich, hier Namen vorzuschlagen, die ich seit etwa 20 Jahren in meinen Vorlesungen benütze und die auch die Billigung des verstorbenen Chr. Wiener, dem ich sie in den 80er Jahren mitteilte, gefunden haben. Im Streben nach einfacher und anschaulicher Darstellung und zugleich im Hinblick auf Anwendungen, die ich in späteren Veröffentlichungen zu machen beabsichtige, bediene ich mich bei den angeschlossenen analytischen Untersuchungen, deren Ergebnisse ich ebenfalls wiederholt in Vorlesungen entwickelt habe, der Ausdrucksweise der Kinematik, wenigstens des Begriffes der Geschwindigkeiten verschiedener Ordnung. Der Gedanke, die Begriffe Krümmung und Windung in der in § 8 gezeigten Weise zu verallgemeinern, auf den ich durch kinematische Fragen geführt worden bin, scheint mir auch für die reine Geometrie von Bedeutung zu sein (vgl. die Anmerkung auf S. 82). Der verallgemeinerte Krümmungsbegriff ist bereits von Herrn R. Müller, dem ich im März 1897 den fraglichen Gedanken mitgeteilt hatte, in einer kinematischen Arbeit in dieser Zeitschrift Bd. 48 (1902), S. 208—219, mit Erfolg angewendet worden.

§ 1. Namen für die vier bezw. acht Hauptarten von Punkten bei ebenen bezw. räumlichen Kurven.

Zu der Erkenntnis, daß bei den ebenen Kurven vier, bei den Raumkurven acht Hauptarten von Punkten unterschieden werden müssen, gelangt man wohl am leichtesten auf die folgende Weise. Betrachten wir die Kurve als Bahn eines bewegten Punktes, dann können wir von der zu untersuchenden Stelle aus in zwei Richtungen, vorwärts und rückwärts, auf der Kurve weitergehen. Bei einer ebenen Kurve wird die ganze Ebene durch die zu jener Stelle gehörige Tangente der Kurve und irgend eine Sekante (z. B. die Normale) in vier Quadranten geteilt. Bezeichnet man als den ersten Quadranten immer den, in welchen man beim Vorwärtsschreiten auf der Kurve zunächst gelangt, so wird man beim Rückwärtsschreiten in irgend einen der vier Quadranten kommen, was vier Fälle gibt. Die bei einer Raumkurve möglichen acht Fälle entspringen ähnlicherweise dem Umstande, daß durch die Schmiegungsebene der Kurve, eine von ihr verschiedene, aber die Tangente enthaltende Ebene (z. B. die rektifizierende Ebene) und eine beliebige durch den Punkt gehende, die Tangente nicht enthaltende Ebene (z. B. die Normalebene) der Raum in acht Oktanten zerlegt wird.[1])

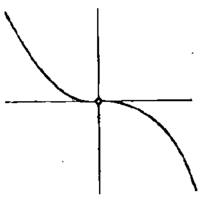
Was nun zuerst die Benennungen bei ebenen Kurven betrifft, so habe ich in dieser Zeitschrift Band 35 (1890), S. 4 den Namen *Einseitpunkt* für alle die Punkte vorgeschlagen, bei denen (wie beim gewöhnlichen Punkt) die Kurve in der Nähe des betreffenden Punktes, ohne hier eine Rückkehrstelle zu haben, auf einer und derselben Seite der Tangente bleibt (Fig. 1). Dieser Name sollte den Gegensatz zum *Wendepunkt* (Fig. 2) ausdrücken, bei welchem sich die Kurve von

Fig. 1.



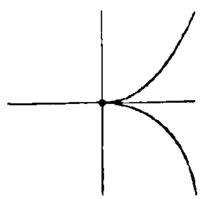
Einseitpunkt.

Fig. 2.



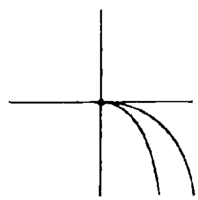
Wendepunkt.

Fig. 3.



Spitze.

Fig. 4.



Schnabel.

einer Seite der Tangente nach der andern wendet — wieder ohne daß eine Rückkehrstelle vorhanden wäre. Weil mir inzwischen kein besserer, überhaupt kein anderer Name bekannt geworden ist, behalte ich denselben bei, ebenso behalte ich bei die Namen *Spitze* für den Rückkehrpunkt erster Art (Fig. 3) und *Schnabel* für den Rückkehrpunkt zweiter Art (Fig. 4), worin ich z. B. mit B. Gugler (Lehrbuch der deskriptiven Geometrie, 4. Aufl., Stuttgart 1880, S. 180) übereinstimme. Den Rück-

1) Im wesentlichen denselben Gedanken finde ich bei F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1902, S. 438 und 439, angewendet.

kehrpunkt zweiter Art „Schnabelspitze“ statt kurz Schnabel zu nennen, ist deshalb unzweckmäßig, weil man durch die Benützung eines zusammengesetzten Wortes in diesem einen Falle sich der Möglichkeit beraubt, für die Raumkurvenpunkte in einfacher Weise Namen zu bilden; das Wort Spitze in gleicher Bedeutung wie Rückkehrpunkt (statt nur für den Rückkehrpunkt erster Art) zu gebrauchen, was manche tun, verbietet sich nach Annahme des Wortes Schnabel von selbst.

Bezüglich der scheinbaren Gestalt einer Raumkurve in der Nähe irgend eines ihrer Punkte sind bekanntlich[1]) die drei Fälle zu unterscheiden, ob das Auge sich in einem beliebigen Punkte des Raumes, d. h. nicht in der zu jener Stelle gehörigen Schmiegungsebene befindet — ich spreche in diesem Falle vom *gewöhnlichen Anblick* der fraglichen Kurvenstelle — oder ob das Auge in der Schmiegungsebene liegt, aber nicht in der Tangente, oder endlich in der Tangente, in welch' letzterem Falle ich vom *Tangentenanblick* der Kurvenstelle spreche. Nimmt man im Anschluß an die bekannten acht Modelle von Chr. Wiener, die (mit unwesentlichen Änderungen) in den Figuren 5—12 parallelperspektivisch dargestellt sind, die Tangente der Kurve im betrachteten Punkt zur x-Achse, die Hauptnormale zur y-Achse, die Binormale zur z-Achse, die Grundrißtafel parallel der xy- oder Schmiegungs-Ebene, die Aufrißtafel parallel der xz- oder rektifizierenden Ebene, die Seitenrißtafel parallel der yz- oder Normal-Ebene, dann zeigt der Grundriß den gewöhnlichen Anblick der Kurvenstelle, der Seitenriß den Tangentenanblick, während der Aufriß dem Anblick der Kurvenstelle entspricht, den sie beim Betrachten aus einem beliebigen, d. h. nicht in der Tangente befindlichen Punkte der Schmiegungsebene darbietet. Ich bezeichne nun die acht Hauptarten von Raumkurvenpunkten durch zusammengesetzte Wörter, wobei mir der *gewöhnliche Anblick das Grundwort, der Tangentenanblick die nähere Bestimmung* liefert. Für die Beschreibung der einzelnen Fälle ist es noch zweckdienlich, den Achsen und Tafeln die übliche Stellung zu geben, so daß die $+x$-Achse von links nach rechts, die $+y$-Achse von hinten nach vorn, die $+z$-Achse von unten nach oben geht. Dann lassen sich die Oktanten durch die Beiwörter rechts bezw. links, vorn bezw. hinten, oben bezw. unten unterscheiden, oder (weniger anschaulich, aber für analytische Untersuchungen zweckmäßiger) durch die Vorzeichen der Koordinaten der in ihnen befindlichen Punkte, so daß bei x das Vorzeichen $+$ rechts bedeutet, das Vorzeichen $-$ links usw. Man erhält auf diese Weise für die acht Arten von Kurvenpunkten

---

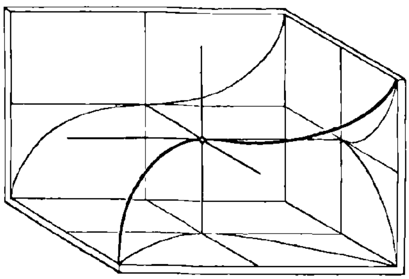
1) S. z. B. H. Fine, On the singularities of curves of double curvature, Diss. Leipzig 1886 = Am. J. Math. 8 (1886), p. 156.

Zeichenverbindungen, die weder mit den von Staudt (Geometrie der Lage, S. 113f.), noch mit den von Chr. Wiener (diese Zeitschrift, Bd. 25, 1880, S. 95f.) benützten übereinstimmen, die mir jedoch für die Anwendungen am geeignetsten zu sein scheinen.

Die Kurve sei in solche Lage gebracht, daß man beim „Vorlauf", d. h. wenn man vom betrachteten Punkt aus in der Kurve vorwärts schreitet, in den Oktanten rechts-vorn-oben (+ + +) kommt. Als

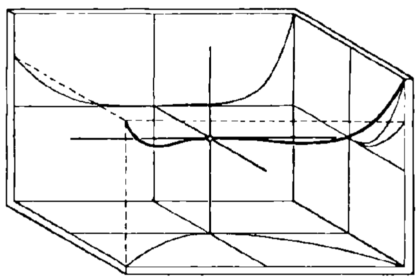
1. Fall werde der untersucht, in welchem der „Rücklauf" in den Oktanten links-vorn-unten (— + —) führt (s. Fig. 5). Der (nach dem Obigen aus dem Grundriß zu ersehende) gewöhnliche Anblick ist hier der eines Einseitpunktes, denn im Grundriß haben wir beim Rücklauf eine Bewegung nach links vorn. Der Tangentenanblick — nach dem Früheren aus dem Seitenriß zu erkennen — ist der einer Spitze, weil

Fig. 5.



(— + —). Spitzeneinseitpunkt.

Fig. 6.



(— + +). Schnabeleinseitpunkt.

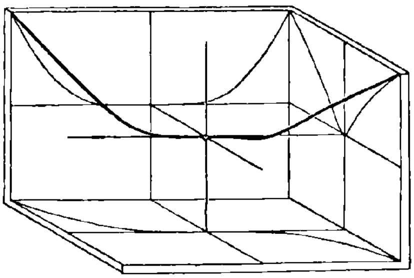
die Kurve im Seitenriß beim Rücklauf nach vorn unten geht. Daher ist gemäß den oben für die Namengebung aufgestellten Grundsätzen hier von einem *Spitzeneinseitpunkt* zu sprechen. Wie der Aufriß zeigt, erblickt man beim Betrachten der Kurvenstelle aus einem nicht in der Tangente befindlichen Punkt der Schmiegungsebene einen scheinbaren Wendepunkt. Zu diesem Fall gehören außer dem gewöhnlichen Kurvenpunkt noch zahlreiche singuläre Punkte (s. § 6), weshalb es nicht angeht, einen Spitzeneinseitpunkt schlechtweg als gewöhnlichen oder regulären Kurvenpunkt zu bezeichnen, wie das häufig geschieht.

2. Fall: Rücklauf nach links vorn oben (— + +) (s. Fig. 6). Gewöhnlicher Anblick der eines Einseitpunktes, Tangentenanblick der eines Schnabels, folglich: *Schnabeleinseitpunkt.* Erscheint von der Schmiegungsebene (nicht Tangente) aus gesehen als Einseitpunkt.

3. Fall: Rücklauf nach links hinten oben (— — +) (s. Fig. 7). Gewöhnlicher Anblick: Wendepunkt; Tangentenanblick: Einseitpunkt, deshalb *Einseitwendepunkt.* Dieser Name paßt in sofern recht gut, als die Kurve auf einer und derselben Seite der Schmiegungsebene bleibt. Erscheint von der Schmiegungsebene aus gesehen als Einseitspunkt.

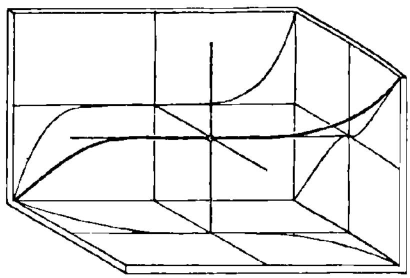
4. Fall: Rücklauf nach links hinten unten (— — —) (s. Fig. 8). Dieser Fall ist dadurch ausgezeichnet, daß der Punkt unabhängig von der Lage des Auges immer als Wendepunkt erscheint. Ich gebe ihm

Fig. 7.



(— — +). Einseitwendepunkt.

Fig. 8.

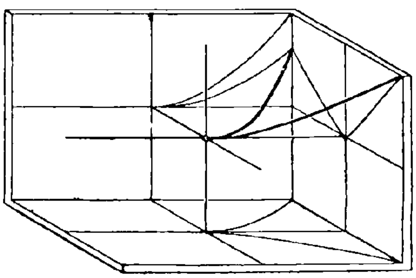


(— — —). Echter Wendepunkt.

deshalb den Namen *echter Wendepunkt,* statt „Wende-Wendepunkt", wie er in Befolgung des früheren Grundsatzes eigentlich zu nennen wäre.

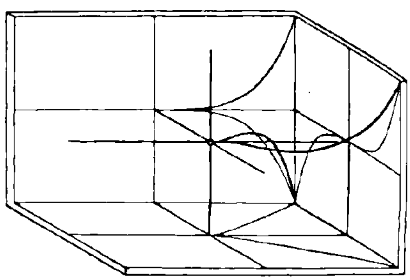
5. Fall: Rücklauf nach rechts hinten oben (+ — +) (s. Fig. 9). Gewöhnlicher Anblick: Spitze; Tangentenanblick: Einseitpunkt, folglich

Fig. 9.



(+ — +). Einseitspitze.

Fig. 10.



(+ — —). Wendespitze.

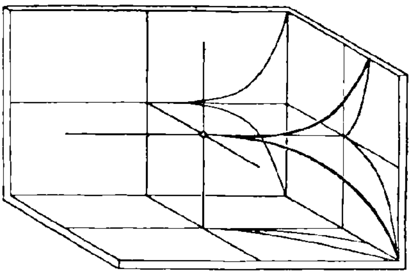
Einseitspitze, ein die Sache treffender Name, da die Spitze auf einer und derselben Seite der Schmiegungsebene liegt. Erscheint von der Schmiegungsebene aus gesehen als Schnabel.

6. Fall: Rücklauf nach rechts hinten unten (+ — —) (s. Fig. 10). Gewöhnlicher Anblick: Spitze; Tangentenanblick: Wendepunkt, somit *Wendespitze,* in Übereinstimmung damit, daß die Spitze sich von einer Seite der Schmiegungsebene nach der andern wendet. Erscheint aus einem beliebigen Punkt der Schmiegungsebene betrachtet als Spitze.

7. **Fall:** Rücklauf nach rechts vorn unten $(+ + -)$ (s. Fig. 11). Gewöhnlicher Anblick: Schnabel; Tangentenanblick: Spitze; deshalb *Spitzenschnabel.* Anblick aus einem beliebigen Punkt der Schmiegungsebene: Spitze.

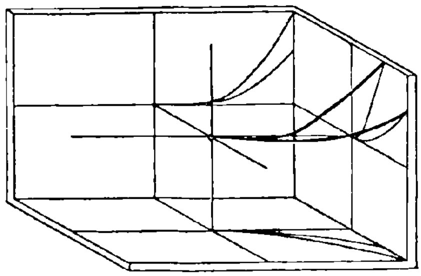
8. **Fall:** Rücklauf nach rechts vorn oben $(+ + +)$ (s. Fig. 12). Dieser Fall zeichnet sich wie der vierte dadurch aus, daß immer der-

Fig. 11.



$(+ + -)$. Spitzenschnabel.

Fig. 12.



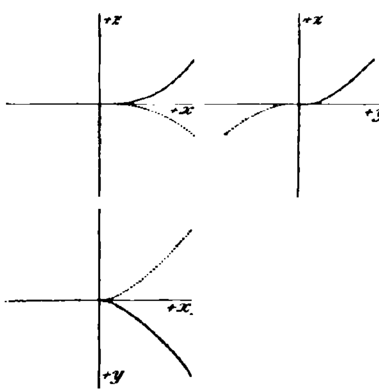
$(+ + +)$. Echter Schnabel.

selbe Anblick sich darbietet, nämlich der eines Schnabels, wo auch das Auge sich befinden mag. Ich wähle deshalb den Namen *echter Schnabel* (statt „Schnabel-Schnabel“).

Diese Zusammenstellung hat gezeigt, daß es bei den Raumkurven je zwei Arten von Einseitpunkten, Wendepunkten, Spitzen und Schnäbeln gibt.

Es ist beachtenswert, daß die Gestalt eines Raumkurvenpunktes aus dem Namen mit Sicherheit abgeleitet werden kann. Nehmen wir zum Beispiel die Wendespitze. Man zeichne zuerst (s. Fig. 13) im Grund-, Auf- und Seitenriß die Koordinatenachsen und den vorwärtslaufenden Teil der Kurve — in der Figur voll ausgezogen — der immer nach rechts vorn oben gehen und im Grund- und Aufriß die x-Achse, im Seitenriß die y-Achse berühren muß. Nun zeichne man den rückwärtslaufenden Kurventeil (in der Figur punktiert) so ein, daß er mit dem vorwärtslaufenden Teil gemeinsame Tangente erhält und daß im Grundriß dem gewöhnlichen Anblick entsprechend eine Spitze, im Seitenriß dem Tangentenanblick entsprechend ein Wendepunkt entsteht. Man sieht

Fig. 13.



5*

dann aus diesen beiden Rissen, daß man beim Rücklauf in den Oktanten rechts hinten unten kommt, wonach sich der Aufriß ergänzen läßt.

Den Figuren 5—13 ist ein linkshändiges (französisches) Koordinatensystem zu Grunde gelegt. Wählte man statt dessen ein rechtshändiges (englisches) Koordinatensystem, so würde jede der dargestellten Formen sich in ihr Spiegelbild bezüglich der xy-Ebene verwandeln. Diese neuen Formen sind jedoch als nicht wesentlich verschieden von den ursprünglichen anzusehen.

§ 2. Analytische Kennzeichen der verschiedenen Arten von Kurvenpunkten.

Es bezeichne p einen beweglichen Punkt, der eine beliebige Kurve beschreibt, und zugleich die Lage des Punktes, in deren Nähe die Gestalt seiner Bahn untersucht werden soll. Betrachten wir p im Sinne von Möbius und Grassmann als Punkt mit der unveränderlichen Masse 1, dann stellt bekanntlich

$$p' = \frac{dp}{dt}$$

die Geschwindigkeit von p nach Größe und Richtung, d. h. als Vektor dar, ebenso

$$p'' = \frac{d^2p}{dt^2}$$

die als Vektor aufgefaßte Beschleunigung oder Geschwindigkeit 2. Ordnung, allgemein

$$p^{(n)} = \frac{d^np}{dt^n}$$

seine Geschwindigkeit n-ter Ordnung.[1]) Wir setzen die Geschwindigkeiten aller Ordnungen als vorhanden und stetig voraus. Jedoch seien im Zeitpunkt t, welchem die Lage p entspricht, beliebig viele der Geschwindigkeiten gleich Null, und die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung, welche nicht Null ist, habe die Ordnung α. Dann ist, wenn p_1 die dem Zeitpunkt $(t + \triangle t)$ entsprechende Lage des bewegten Punktes vorstellt, nach dem Taylorschen Satze:

$$p_1 = p + \frac{\triangle t^\alpha}{\alpha!} \cdot p^{(\alpha)} + \frac{\triangle t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} p^{(\alpha+1)} + \cdots {}^{2)},$$

1) Dasselbe würde gelten, wenn p den Träger des bewegten Punktes in Bezug auf einen beliebigen festen Ursprung, d. h. den Vektor bezeichnete, der seinen Anfangspunkt im Ursprung, seinen Endpunkt im bewegten Punkt hat.

2) Das $+$ bedeutet natürlich geometrische Addition. Nach Grassmann ist die Summe eines Punktes von der Masse 1 und eines Vektors derjenige Punkt von der Masse 1, der durch Verschiebung des gegebenen Punktes um den gegebenen Vektor entsteht.

folglich

$$\frac{\alpha!}{\triangle t^\alpha}(p_1 - p) = p^{(\alpha)} + \frac{\triangle t}{\alpha + 1} p^{\alpha+1} \ldots$$

In dieser Gleichung steht links ein mit der Sehne pp_1 paralleler Vektor.[1]) Läßt man den absoluten Wert von $\triangle t$ unbegrenzt abnehmen, so nähert sich die Gerade pp_1 unbegrenzt der Bahntangente in p, also die linke Seite einem zur Tangente parallelen Vektor, während die rechte Seite den Vektor $p^{(\alpha)}$ zur Grenze hat. *Daher wird die Richtung der Bahntangente im Punkte p durch die Richtung des Vektors $p^{(\alpha)}$, d. h. durch die Richtung der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung angegeben, die an jener Stelle nicht Null ist.*[2])

Von den auf $p^{(\alpha)}$ folgenden Geschwindigkeiten $p^{(\alpha+1)}$ usw. können beliebig viele parallel zu $p^{(\alpha)}$ sein.[3]) Die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung, welche nicht parallel zu $p^{(\alpha)}$ ist, habe die Ordnung β. Dann liegt der Punkt

$$q = p + \frac{\triangle t^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\triangle t^{\alpha+1}}{(\alpha + 1)!} + \cdots + \frac{\triangle t^{\beta-1}}{(\beta - 1)!} p^{(\beta-1)}$$

offenbar auf der zur Stelle p gehörigen Bahntangente, und folglich ist

$$\frac{\beta!}{\triangle t^\beta}(p_1 - q) = p^{(\beta)} + \frac{\triangle t}{\beta + 1} p^{(\beta+1)} + \cdots$$

ein Vektor, der zur Geraden qp_1, also auch zur Verbindungsebene der Bahntangente mit dem Punkte p_1 parallel ist. Geht man wieder zur Grenze $\triangle t = 0$ über, so verwandelt sich diese Ebene in die Schmiegungsebene der Bahn im Punkte p, während die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung den Grenzwert $p^{(\beta)}$ annimmt. *Somit ist die Schmiegungsebene der Bahn im Punkte p parallel dem Vektor*

$$p^{(\beta)} = \frac{d^\beta p}{dt^\alpha}$$

d. h. parallel der Geschwindigkeit niedrigster Ordnung von p, die nicht parallel zur Bahntangente ist.

Durch die beiden Geschwindigkeiten $p^{(\alpha)}$ und $p^{(\beta)}$ ist die Schmiegungsebene der Bahn im Punkte p bestimmt. Von den auf $p^{(\beta)}$ folgenden Geschwindigkeiten $p^{(\beta+1)}$ u. s. w. können beliebig viele parallel zur Schmiegungsebene sein. Die Geschwindigkeit niedrigster Ordnung,

---

1) Nach Grassmann ist die Punktdifferenz $(p_1 - p)$ gleich dem von p nach p_1 gehenden Vektor. (S. auch Anm. 3.)

2) Vgl. diese Zeitschrift, Bd. 35 (1890), S. 3.

3) Parallel nennen wir nicht nur Vektoren gleicher Richtung, sondern auch entgegengesetzter Richtung.

welche nicht parallel zur Schmiegungsebene ist, habe die Ordnung γ. Wir schreiben die frühere Gleichung für p_1 jetzt so:

$$\begin{aligned} p_1 - p = & \frac{\triangle t^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\triangle t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} p^{(\alpha+1)} + \cdots \\ & + \frac{\triangle t^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \frac{\triangle t^{\beta+1}}{(\beta+1)!} p^{(\beta+1)} + \cdots \\ & + \frac{\triangle t^\gamma}{\gamma!} p^{(\gamma)} + \cdots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung stehen in der ersten Reihe lauter Vektoren, die zur Tangente parallel sind, in der zweiten Reihe lauter zur Schmiegungsebene parallele Vektoren. Wir denken uns p_1 so nahe bei p, d. h. $\triangle t$ so klein genommen, daß in jeder der drei Reihen das erste Glied die Summe der folgenden überwiegt oder die Gleichung näherungsweise geschrieben werden kann:

$$p_1 - p = \frac{\triangle t^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\triangle t^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \frac{\triangle t^\gamma}{\gamma!} p^{(\gamma)}.$$

Der Vektor pp_1 erscheint hier in drei Komponenten zerlegt, die den Geschwindigkeiten der Ordnungen α, β, γ parallel sind, und zwar wird z. B. die erste Komponente gleiche Richtung haben wie $p^{(\alpha)}$, oder aber die umgekehrte Richtung, je nachdem $\triangle t^\alpha$ positiv oder negativ ist. Die einer Zunahme von t entsprechende Bewegungsrichtung gelte als Vorlauf. Ihm entspricht ein positiver Wert von $\triangle t$, etwa

$$\triangle t = + \tau,$$

womit man

$$p_1 - p = \frac{\tau^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{\tau^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \frac{\tau^\gamma}{\gamma!} p^{(\gamma)}$$

erhält. Die Komponenten des Vektors pp_1 sind jetzt wegen der positiven Zahlfaktoren gleichgerichtet mit den Vektoren $p^{(\alpha)}$, $p^{(\beta)}$, $p^{(\gamma)}$, oder wenn man sich diese Vektoren von p ausgehend denkt, so muß p_1 in dem von ihnen eingeschlossenen Oktanten liegen. Mit anderen Worten: *Beim Vorlauf kommt man in den Raum, der von den als Vektoren betrachteten und an p angetragenen Geschwindigkeiten $p^{(\alpha)}$, $p^{(\beta)}$, $p^{(\gamma)}$ der Ordnungen α, β, γ eingeschlossen wird.*

Der rückläufigen Bewegung entspricht eine Abnahme von t oder ein negatives $\triangle t$. Sei

$$\triangle t = - \tau,$$

dann wird

$$p_1 - p = \frac{\tau^\alpha}{\alpha!} (-1)^\alpha p^{(\alpha)} + \frac{\tau^\beta}{\beta!} (-1)^\beta p^{(\beta)} + \frac{\tau^\gamma}{\gamma!} (-1)^\gamma p^{(\gamma)}.$$

Daraus folgt: *Beim Rücklauf kommt man in den von den Vektoren* $(-1)^\alpha p^{(\alpha)}$, $(-1)^\beta p^{(\beta)}$, $(-1)^\gamma p^{(\gamma)}$ *eingeschlossenen Raum.*

Die Faktoren $(-1)^\alpha$, $(-1)^\beta$, $(-1)^\gamma$ haben den Wert $+1$ oder -1, je nachdem die (ihrer Natur nach positiven ganzen) Zahlen α, β, γ gerade oder ungerade sind. Es genügt also, *der Reihe nach für jede der Zahlen* α, β, γ $+$ *oder* $-$ *zu setzen, je nachdem sie gerade oder ungerade ist, und die erhaltene Zeichenverbindung mit den unter den Figuren 5—12 stehenden zu vergleichen, um zu erkennen, zu welcher der acht Hauptarten von Kurvenpunkten der untersuchte Bahnpunkt gehört.*

Je nachdem die Vektoren $p^{(\alpha)}$, $p^{(\beta)}$, $p^{(\gamma)}$ zu einander liegen, wie die $+x$-, $+y$-, $+z$-Achse eines linkshändigen oder eines rechtshändigen Koordinatensystems, wird es sich unmittelbar um die in den genannten Figuren dargestellten Formen oder um ihre Spiegelbilder in Bezug auf eine wagerechte Ebene handeln.

Die wichtigen Zahlen α, β, γ haben übrigens auch eine einfache rein geometrische Bedeutung: *Es ist* α *die Zahl derjenigen Schnittpunkte einer beliebigen durch* p *gelegten, die Kurventangente nicht enthaltenden Ebene mit der Kurve, die man sich in* p *zusammengefallen zu denken hat,* β *die entsprechende Zahl für eine beliebige durch die Tangente gelegte, aber von der Schmiegungsebene verschiedene Ebene,* γ *die entsprechende Zahl für die Schmiegungsebene.*[1]) Der Beweis ist auf verschiedene Art leicht zu erbringen.[2])

Bei einem gewöhnlichen Kurvenpunkt hat man $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$. Jeder Punkt, für den $\gamma > 3$ ist, soll ein singulärer Punkt heißen. Zur Abkürzung werde die Zahlenverbindung (α, β, γ) das *Zeichen* des Kurvenpunktes genannt.

---

1) Es stimmen also die Zahlen α, β, γ mit den Zahlen l, m, n in Björlings Arbeit, Arch. M. Ph. (2) 8 (1890), S. 83, überein.

2) Z. B., da nach Grassmann die Bedingung für das Vereinigtliegen eines Punktes und einer Ebene das Verschwinden ihres äußeren Produktes ist, werden die Schnittpunkte einer durch p gehenden Ebene ε mit der Kurve durch die Wurzeln folgender Gleichung in $\triangle t$ geliefert:

$$0 = [p_1 \varepsilon] = \frac{\triangle t^\alpha}{\alpha!}[p^{(\alpha)}\varepsilon] + \cdots + \frac{\triangle t^\beta}{\beta!}[p^{(\beta)}\varepsilon] + \cdots + \frac{\triangle t^\gamma}{\gamma!}[p^{(\gamma)}\varepsilon] + \cdots.$$

Die dem Punkte p entsprechende Wurzel $\triangle t = 0$ ist augenscheinlich α-fach, oder β-fach, oder γ-fach, je nachdem die Ebene ε die Tangente nicht enthält: $[p^{(\alpha)}\varepsilon] \gtrless 0$, oder die Tangente enthält und von der Schmiegungsebene verschieden ist:
$$[p^{(\alpha)}\varepsilon] = 0, \; \ldots \; [p^{(\beta-1)}\varepsilon] = 0, \quad [p^{(\beta)}\varepsilon] \gtrless 0,$$
oder mit der Schmiegungsebene zusammenfällt:
$$[p^{(\alpha)}\varepsilon] = 0, \; \ldots \; [p^{(\beta-1)}\varepsilon] = 0, \quad [p^{(\beta)}\varepsilon] = 0, \; \ldots \; [p^{(\gamma-1)}\varepsilon] = 0, \quad [p^{(\gamma)}\varepsilon] \gtrless 0.$$

§ 3. Beispiele.

Zur Erläuterung der gewonnenen Ergebnisse mögen folgende Beispiele dienen. Bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems ist bekanntlich im allgemeinen kein Punkt in Ruhe, also für jeden Systempunkt $\alpha = 1$. Es gibt aber in jedem Augenblick unendlich viele Systempunkte — sie erfüllen eine Fläche dritter Ordnung F^3 — deren Bahnen vierpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen, für die also $\gamma = 4$ ist.[1] Alle Punkte dieser Fläche, bei denen die Geschwindigkeit und die Beschleunigung nicht parallel sind, also $\beta = 2$ ist und bei denen auch die Geschwindigkeit vierter Ordnung nicht parallel zur Schmiegungsebene, d. h. γ nicht größer als 4 ist, beschreiben deshalb augenblicklich Bahnstellen mit dem Zeichen (1, 2, 4), d. h. Schnabeleinseitpunkte (s. Fig. 6). Die Schmiegungsebene ist bei ihnen der Beschleunigung parallel, gerade wie bei den gewöhnlichen Bahnstellen, die von den außerhalb F^3 liegenden Systempunkten beschrieben werden. Nun liegt auf der Fläche F^3 die sog. Wendekurve i^3, eine Raumkurve dritter Ordnung, bei deren sämtlichen Punkten Geschwindigkeit und Beschleunigung parallel sind, also $\beta = 3$ ist, falls nicht etwa die Geschwindigkeiten erster und dritter Ordnung auch parallel sind. Die Punkte dieser Kurve durchlaufen demnach, worauf ihr Name hinweist, für gewöhnlich Wendepunkte in ihren Bahnen, aber es gibt nach § 1 zwei gestaltlich ganz verschiedene Arten von Wendepunkten, und es fehlt in der kinematischen Literatur jede Angabe über die wirkliche Gestalt der hier auftretenden Wendepunkte. Bis auf die gleich zu besprechenden Ausnahmepunkte werden von den Punkten der Wendekurve augenblicklich Bahnstellen mit dem Zeichen (1, 3, 4), d. h. Einseitwendepunkte (Fig. 7) erzeugt. Die Schmiegungsebene ist jedesmal zu den Geschwindigkeiten erster und dritter Ordnung parallel. Nun enthält die Wendekurve im allgemeinen auch eine endliche Zahl von Punkten, bei denen die Geschwindigkeit vierter Ordnung, aber nicht diejenige fünfter Ordnung, zur Schmiegungsebene parallel, also $\gamma = 5$ ist. Diese Punkte beschreiben Bahnstellen mit dem Zeichen (1, 3, 5), also echte Wendepunkte (Fig. 8). Es ist nämlich, wie ohne Beweis angeführt sei, der Ort der Systempunkte, bei denen augenblicklich die Geschwindigkeiten von den Ordnungen $\varkappa$, λ, μ einer und derselben Ebene parallel sind, eine Fläche dritter Ordnung $\Phi_{\varkappa, \lambda, \mu}$[2], einem Schnittpunkte der Wendekurve mit der Fläche $\Phi_{1, 3, 4}$ kommt deshalb

---

1) Vgl. etwa, auch zum Folgenden, A. Schönflies, Geometrie der Bewegung, Leipzig 1886, §§ 8 und 9.

2) Es ist F^3 selbst eine der Flächen Φ, nämlich $\Phi_{1,2,3}$.

im allgemeinen die fragliche Ausnahmestellung zu. Auf der Fläche F^3 befindet sich ferner eine Raumkurve sechster Ordnung c^6, deren Punkte Bahnen mit fünfpunktig berührender Schmiegungsebene besitzen ($\gamma = 5$). Diese Punkte durchlaufen daher im allgemeinen Bahnstellen mit dem Zeichen (1, 2, 5); es sind dies Spitzeneinseitpunkte, die sich von den gewöhnlichen Punkten im Aussehen wenig unterscheiden (vgl. auch § 9).

§ 4. Ausdruck für die Krümmung und mögliche Werte derselben.

Es werde nun der Punkt p_1 unendlich nahe bei p angenommen und dt für $\triangle t$ geschrieben. Aus § 2 übernehmen wir die Gleichung für $(p_1 - p)$, nämlich:

$$(1) \qquad p_1 - p = \frac{dt^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)} + \frac{dt^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} p^{(\alpha+1)} + \cdots$$
$$+ \frac{dt^\beta}{\beta!} p^{(\beta)} + \cdots$$

Für das Bogenelement ds können wir die Länge der Sehne, d. h. des Vektors pp_1 nehmen, der die linke Seite von Gleichung (1) bildet. Bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung ist dieselbe gleich der Länge des ersten Gliedes der rechten Seite von (1), des Vektors $\frac{dt^\alpha}{\alpha!} p^{(\alpha)}$. Man hat folglich, wenn allgemein die Größe der Geschwindigkeit $n$ter Ordnung, d. h. die Länge des Vektors $p^{(n)}$, mit v_n bezeichnet wird:

$$(2) \qquad ds = \frac{dt^\alpha}{\alpha!} v_\alpha.$$

Die Tangente in p_1 ist parallel der Geschwindigkeit p_1' dieses Punktes. Mit Hilfe des Taylorschen Satzes erhält man, da p_1 dem Zeitpunkte $(t + dt)$ entspricht und die Vektoren $p', p'', \ldots p^{(\alpha-1)}$ verschwinden:

$$(3) \qquad p_1' = \frac{dt^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} p^{(\alpha)} + \cdots + \frac{dt^{\beta-1}}{(\beta-1)!} p^{(\beta)} + \cdots.$$

Der sog. Kontingenzwinkel, der spitze Winkel zwischen den Tangenten in p und p_1, werde mit $d\varphi$ bezeichnet. Er ist gleich dem Winkel, den der Vektor p_1' mit der Kurventangente in p einschließt und läßt sich mit Hilfe der senkrechten Projektion dieses Vektors auf die Hauptnormale in p bestimmen, welche Projektion gleich dem Produkt aus $d\varphi$ und der Länge des genannten Vektors ist. Die Länge von p_1' ist bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung gleich der Länge des ersten Gliedes der rechten Seite von (3), d. i.

$$\frac{dt^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} v_\alpha.$$

Andererseits ist die Projektion von p_1' auf die Hauptnormale gleich der Summe der Projektionen der auf der rechten Seite von (3) stehenden Glieder, oder, weil die Glieder mit Exponenten kleiner als β Vektoren parallel zur Tangente vorstellen und folglich zur Projektion keinen Beitrag liefern, wird bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung die fragliche Projektion auch gleich

$$\frac{dt^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\bar{v}_\beta,$$

wenn man allgemein die Projektion der Geschwindigkeit $n$ter Ordnung auf die Hauptnormale mit $\bar{v}_n$ bezeichnet. Also hat man

$$d\varphi\frac{dt^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}v_\alpha=\frac{dt^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\bar{v}^\beta$$

oder

$$d\varphi=dt^{\beta-\alpha}\frac{(\alpha-1)!}{(\beta-1)!}\frac{\bar{v}_\beta}{v_\alpha}. \tag{4}$$

Demnach ergibt sich für die Krümmung $k=\frac{d\varphi}{ds}$ der Kurve im Punkte p zunächst

$$k=\frac{\alpha!\,(\alpha-1)!}{(\beta-1)!}\frac{\bar{v}_\beta}{v_\alpha^2}\lim dt^{\beta-2\alpha}\Big|_{dt=0}.$$

Wie man sieht, erhält die Krümmung bloß unter der Bedingung

$$2\alpha=\beta$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Wert, nämlich

$$k=\frac{\alpha!\,(\alpha-1)!}{(\beta-1)!}\frac{\bar{v}_\beta}{v_\alpha^2}\,{}^{1)}, \tag{5}$$

während

$$k=0 \quad \text{wird für } 2\alpha<\beta \text{ und}$$

$$k=\infty \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 2\alpha>\beta.$$

---

1) Eine leichte Umformung ergibt für den Krümmungshalbmesser

$$\varrho=\frac{(2\alpha)!}{2(\alpha!)^2}\frac{v_\alpha^2}{\bar{v}_{2\alpha}},$$

in Übereinstimmung mit der in dieser Zeitschrift Bd. 35 (1890), S. 5 für die Bewegung in der Ebene auf andere Weise abgeleiteten Formel (7). Im Fall eines gewöhnlichen Bahnpunktes, $\alpha=1$, kommt man zu der allbekannten Beziehung

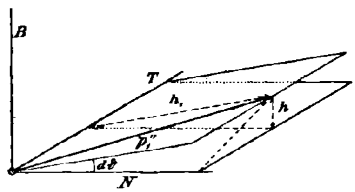
$$\bar{v}_2=\frac{v_1^2}{\varrho}.$$

Die Gleichung $2\alpha = \beta$ erfordert, daß β eine gerade Zahl sei, was nur bei Einseitpunkten und Schnäbeln zutrifft. Hiernach ist eine endliche, von Null verschiedene Krümmung bloß in Einseitpunkten (Fig. 5 und 6) und Schnäbeln (Fig. 11 und 12) möglich, während in einem Wendepunkte (Fig. 7 und 8) und in einer Spitze (Fig. 9 und 10) die Krümmung bloß einen der beiden Werte Null und Unendlich haben kann.[1])

§ 5. Ausdruck für die Windung und mögliche Werte derselben.

Um die Windung w der Kurve im Punkte p berechnen zu können, haben wir den spitzen Winkel $d\vartheta$ zwischen den Schmiegungsebenen in p und dem unendlich benachbarten Punkt p_1 zu bestimmen. Von der zweiten Schmiegungsebene können wir annehmen, daß sie durch die Tangente in p geht; sie ist außerdem parallel zur Beschleunigung p_1'' von p_1. Um diese Ebene zu erhalten, verlege man den Vektor p_1'', ohne seine Richtung zu ändern, mit seinem Anfangspunkt nach p und verbinde dann seinen Endpunkt mit der Tangente T in p durch eine Ebene. Der fragliche Endpunkt habe (s. Fig. 14) den Abstand h von der Schmiegungsebene in p und den Abstand h_1 von der Tangente T, dann ist

Fig. 14.



(a) $$d\vartheta = \frac{h}{h_1}\cdot$$

Es ist h gleich der senkrechten Projektion des Vektors p_1'' auf die Binormale B der Kurve in p. (Über die Vorzeichen wird am Schlusse von § 8 das Nötige gesagt werden). Statt h_1 kann auch die nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung davon verschiedene senkrechte Projektion des Vektors p_1'' auf die Hauptnormale N in p genommen werden.[2]) Der Taylorsche Satz gibt nun:

$$p_1'' = p'' + \frac{dt}{1!}p''' + \frac{dt^2}{2!}p^{\mathrm{IV}} + \cdots$$

1) Für ebene Kurven hat Chr. Wiener in seiner darstellenden Geometrie, 1. Bd. (Leipzig 1884), S. 205—207, diese Ergebnisse abgeleitet und zwar rein geometrisch durch Betrachtung der zugehörigen Evoluten.

2) Diese Projektion ist gleich einer Kathete in dem in Fig. 14 eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck, das h_1 als Hypotenuse und h als die dem Winkel $d\vartheta$ gegenüber liegende Kathete hat, wobei h von höherer Ordnung unendlich klein ist als h_1.

oder

$$(6) \qquad p_1'' = \frac{dt^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} p^{(\alpha)} + \cdots$$
$$+ \frac{dt^{\beta-2}}{(\beta-2)!} p^{(\beta)} + \cdots$$
$$+ \frac{dt^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!} p^{(\gamma)} + \cdots$$

Die Projektion von p_1'' auf die Binormale B ist gleich der Summe der Projektionen der Vektoren auf der rechten Seite von (6), von welchen die vor $p^{(\gamma)}$ kommenden parallel zur Schmiegungsebene sind, sodaß ihre Projektionen auf B verschwinden, während die auf $p^{(\gamma)}$ folgenden als unendlich klein höherer Ordnung nicht in Betracht kommen. Wenn daher allgemein die Binormalkomponente der Geschwindigkeit n-ter Ordnung, d. h. die Projektion des Vektors $p^{(n)}$ auf die Binormale, durch $\bar{\bar{v}}_n$ bezeichnet wird, erhält man

$$(\mathrm{b}) \qquad h = \frac{dt^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!} \bar{\bar{v}}_\gamma.$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$(\mathrm{c}) \qquad h_1 = \frac{dt^{\beta-2}}{(\beta-2)!} \bar{v}_\beta.$$

Daraus folgt wegen Gleichung (a):

$$(7) \qquad d\vartheta = dt^{\gamma-\beta} \frac{(\beta-2)!}{(\gamma-2)!} \frac{\bar{\bar{v}}_\gamma}{\bar{v}_\beta}.$$

Für die gesuchte Windung ergibt sich daher

$$w = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\alpha!\,(\beta-2)!}{(\gamma-2)!} \frac{\bar{\bar{v}}_\gamma}{v_\alpha \bar{v}_\beta} \lim dt^{\gamma-\beta-\alpha}\Big|_{dt=0}.$$

Die Gleichung zeigt, daß eine endliche von Null verschiedene Windung, und zwar vom Werte

$$(8) \qquad w = \frac{\alpha!\,(\beta-2)!}{(\gamma-2)!} \frac{\bar{\bar{v}}_\gamma}{v_\alpha \bar{v}_\beta} \;{}^{1)}$$

---

1) Für einen gewöhnlichen Bahnpunkt ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$) ist die Bedingung $\alpha + \beta = \gamma$ erfüllt und es ergibt sich $w = \frac{\bar{\bar{v}}_3}{v_1 \bar{v}_2}$, oder nach Einführung des Windungshalbmessers $r = \frac{1}{w}$:

$$\bar{\bar{v}}_3 = \frac{v_1 \bar{v}_2}{r},$$

welche Beziehung bekannt ist.

dann und bloß dann vorhanden ist, wenn die Beziehung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

besteht, daß man aber

$$w = 0 \text{ erhält für } \alpha + \beta < \gamma$$

und

$$w = \infty \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \alpha + \beta > \gamma.$$[1]

Sind α und β beide ungerade oder beide gerade, so ist zur Erfüllung der Bedingung

$$\alpha + \beta = \gamma$$

notwendig, daß γ gerade sei; ist eine der Zahlen α und β ungerade, die andere gerade, so erfordert jene Bedingung ein ungerades γ. Zu diesen Fällen gehören die Zeichenverbindungen $--+$ (Einseitwendepunkt), $+++$ (echter Schnabel), $-+-$ (Spitzeneinseitpunkt) und $+--$ (Wendespitze). Wir haben somit gefunden:

Eine endliche, von Null verschiedene Windung kann bloß bei Spitzeneinseitpunkten (Fig. 5), Einseitwendepunkten (Fig. 7), Wendespitzen (Fig. 10) und echten Schnäbeln (Fig. 12) vorkommen; in einem Schnabeleinseitpunkt (Fig. 6), einem echten Wendepunkt (Fig. 8), einer Einseitspitze (Fig. 9) und einem Spitzenschnabel (Fig. 11) ist die Windung entweder Null oder unendlich.

§ 6. Einteilung der Raumkurvenpunkte nach den möglichen Werten der Krümmung und Windung.

Sowohl bei der Krümmung als bei der Windung sind die drei Fälle, daß entweder ein endlicher, nicht verschwindender Wert, oder der Wert 0, oder der Wert ∞ vorhanden ist, als wesentlich verschieden anzusehen. Denn die Zahlen α, β, γ, von deren gegenseitigen Größenverhältnissen jene Fälle abhängen, sind wegen ihrer geometrischen Bedeutung (s. § 2) projektiv unveränderlich, weshalb durch kollineare

---

1) Daß der Torsionsradius 0, oder nicht 0 und nicht ∞, oder ∞ ist, je nachdem $\alpha + \beta \gtreqless \gamma$, hat bereits mein Kollege Herr Wölffing im Archiv d. Mathem. u. Physik (2) 15 (1897), S. 149, gezeigt, ohne zu wissen, daß ich dieses Ergebnis und einige sich daran knüpfende Folgerungen damals schon seit einem Jahrzehnt in meinen Vorträgen zu entwickeln pflegte. Übrigens hat Herr Wölffing dort auch die sphärische Krümmung, sphärische Torsion und einige verwandte Größen in ähnlicher Weise behandelt.

Transformation der gegebenen Kurvenstelle kein Fall in einen andern übergeführt werden kann. Nach den Ergebnissen der letzten beiden Paragraphen sind sowohl beim Spitzeneinseitpunkt als auch beim echten Schnabel bezüglich der Krümmung und ebenso bezüglich der Windung alle drei Fälle möglich, also je neun Fälle zu unterscheiden. Beim Schnabeleinseitpunkt und beim Spitzenschnabel dagegen sind bei der Krümmung wohl alle drei Fälle, bei der Windung aber nur zwei Fälle möglich, was im ganzen je sechs verschiedene Fälle gibt. Ähnliches hat man — es erscheinen bloß Krümmung und Windung vertauscht — beim Einseitwendepunkt und bei der Wendespitze. Beim echten Wendepunkt und der Einseitspitze endlich treten bei der Krümmung und Windung je nur zwei Fälle auf, sodaß bei diesen beiden Arten von Kurvenpunkten bloß je vier Fälle bestehen. Im ganzen gibt es daher $2 \cdot 9 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 50$ Fälle, und diese Fälle sind nach dem zu Anfang Bemerkten im Sinne der projektiven Geometrie, natürlich auch vom Standpunkt der Kinematik betrachtet, wesentlich verschieden. Es folgt eine Übersicht der möglichen Fälle.

Name des Punktes	Zahl der möglichen Fälle bezüglich der Krümmung	Windung	im ganzen
1. Spitzeneinseitpunkt . . . . . $(-+-)$	3	3	9
2. Schnabeleinseitpunkt . . . . . $(-++)$	3	2	6
3. Einseitwendepunkt . . . . . . $(--+)$	2	3	6
4. Echter Wendepunkt . . . . . $(---)$	2	2	4
5. Einseitspitze . . . . $(+-+)$	2	2	4
6. Wendespitze . . . . $(+--)$	2	3	6
7. Spitzenschnabel . . . . $(++-)$	3	2	6
8. Echter Schnabel . . . . $(+++)$	3	3	9

Es ist leicht zu zeigen, daß alle diese 50 Fälle wirklich bestehen. Betrachten wir einige, nach verbreiteten Anschauungen recht unwahrscheinliche Fälle. Sei etwa ein echter Wendepunkt mit unendlich großer Krümmung und unendlich großer Windung anzugeben. Die Zahlen α, β, γ müssen hier alle drei ungerade sein, ferner $2\alpha > \beta$ und

$\alpha + \beta > \gamma$. Die einfachste Lösung ist $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$.[1]) Oder ein echter Schnabel mit der Krümmung Null und der Windung Null: Einfachstes Beispiel $\alpha = 2$, $\beta = 6$, $\gamma = 10$.[2]) Oder eine Spitze mit der Krümmung Null und einer endlichen, von Null verschiedenen Windung: Einfachstes Beispiel die Wendespitze mit $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$. Nicht überflüssig ist vielleicht die Bemerkung, daß ein singulärer Punkt gestaltlich mit einem gewöhnlichen Kurvenpunkt vollständig übereinstimmen kann: Einfachster Fall $\alpha = 3$, $\beta = 6$, $\gamma = 9$[3]); in der Tat ist dies zwar ein singulärer Punkt, aber ein Spitzeneinseitpunkt mit einer endlichen, von Null verschiedenen Krümmung und Windung.[4])

§ 7. Berührungsordnung und Schmiegungsordnung.

Die Ordnung der Berührung zwischen einer Kurve und ihrer Tangente im Punkt p erklären wir für unsere Zwecke am bequemsten als die Ordnung, von welcher der Kontingenzwinkel $d\varphi$ unendlich klein wird, wenn man das Bogenelement ds unendlich klein erster Ordnung setzt.[5]) Zufolge den Gleichungen (2) und (4) in § 4 ist ds von derselben Ordnung unendlich klein wie dt^α, oder dt von derselben Ordnung, wie $ds^{\frac{1}{\alpha}}$ und $d\varphi$ von derselben Ordnung wie $dt^{\beta-\alpha}$, d. h. von derselben Ordnung wie $ds^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}$. Wenn daher die Berührungsordnung mit ν bezeichnet wird, ist

(9) $$\nu = \frac{\beta - \alpha}{\alpha}.$$ [6])

---

1) Die Kurve mit den Koordinatengleichungen

$$x = t^3, \quad y = t^5, \quad z = t^7$$

hat im Ursprung einen solchen Punkt.

2) Im Ursprung vorhanden bei der Kurve mit den Koordinatengleichungen

$$x = t^2 + t^3, \quad y = t^6, \quad z = t^{10}.$$

3) Beispiel der im Ursprung liegende Punkt der Kurve mit den Koordinatengleichungen

$$x = t^3 + t^4, \quad y = t^6, \quad z = t^9.$$

4) Andererseits gibt es auch zahlreiche Spitzeneinseitpunkte, die das Auge sofort als singuläre Punkte erkennt, z. B. wird ein Spitzeneinseitpunkt mit der Krümmung und Windung Null, wie der mit dem Zeichen (1, 4, 7), von überall her gesehen außergewöhnlich flach erscheinen.

5) Diese Erklärung ist leicht auf die von Cauchy gegebene (vgl. v. Mangoldt a. a. O. S. 18) und die von Möbius (Barycentrischer Calcul, 1827, § 75, S. 90 = Werke Bd. 1, S. 98) zurückzuführen. Vergl. auch die folgende Anmerkung.

6) Für $\alpha = 1$ wird $\nu = \beta - 1$, gleich der um 1 verminderten Zahl β, welche angibt, eine wieviel-punktige Berührung zwischen der Kurve und ihrer Tangente

Der obigen Erklärung entsprechend sei unter der *Schmiegungsordnung,* die als Maß für die Innigkeit des Anschmiegens der Kurve an ihre Schmiegungsebene dienen soll, die Ordnung verstanden, von welcher der Winkel $d\vartheta$ zwischen zwei unendlich benachbarten Schmiegungsebenen unendlich klein ist, das Bogenelement ds wieder als unendlich klein erster Ordnung vorausgesetzt. Nach § 5 Gleichung (7) ist $d\vartheta$ von derselben Ordnung unendlich klein, wie $dt^{\gamma-\beta}$, aber dt, wie schon bemerkt, von derselben Ordnung wie $ds^{\frac{1}{\alpha}}$, demnach $d\vartheta$ von derselben Ordnung wie $ds^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha}}$. Man erhält folglich, wenn die Schmiegungsordnung mit v bezeichnet wird:

$$v = \frac{\gamma-\beta}{\alpha}. \tag{10}$$

Als normale, weil beim gewöhnlichen Kurvenpunkt vorkommende Werte sind $\nu = 1$ und $v = 1$ anzusehen. Deshalb liegt es nahe, bei der Berührungsordnung und bei der Schmiegungsordnung je die drei Fälle > 1, $= 1$, < 1 zu unterscheiden. Es führt dies aber zu derselben Einteilung der Kurvenpunkte, wie sie in § 6 nach den möglichen Werten der Krümmung und Windung vorgenommen worden ist. Denn man hat

$$1 - \nu = \frac{2\alpha-\beta}{\alpha} \text{ und } 1 - v = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha},$$

je nachdem also

$$\nu \gtreqless 1,$$

ist auch

$$2\alpha \lesseqgtr \beta, \text{ d. h. } k \begin{cases} = 0 \\ \text{nicht } 0 \text{ und nicht } \infty\text{[1]}), \\ = \infty \end{cases}$$

---

besteht. Es wird gewöhnlich übersehen, daß die letztere Erklärung des Begriffes der Berührungsordnung bei singulären Punkten mit $\alpha > 1$ nicht mehr anwendbar ist. Die Berührungsordnung soll ja ein Maß für die Innigkeit des Anschmiegens der Kurve an ihre Tangente sein, man würde aber z. B., von der Gleichung $\nu = \beta - 1$ ausgehend, für einen Einseitpunkt mit $\alpha = 3$, $\beta = 4$, dessen Krümmung ∞ ist und bei dem die außerordentliche Flüchtigkeit der Berührung zwischen Kurve und Tangente vom Auge sofort erkannt wird, die Berührungsordnung 3 erhalten, einen wesentlich höheren Wert, als beim gewöhnlichen Kurvenpunkt ($\nu = 1$), und denselben Wert, wie bei einem Einseitpunkt $\alpha = 1$, $\beta = 4$, dessen Krümmung Null ist und der dem Auge wesentlich flacher erscheint als ein gewöhnlicher Punkt. Die obige Formel liefert dagegen die den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Werte $\nu = \frac{1}{3}$ bezw. $\nu = 3$.

1) Auf dieselbe Art habe ich das schon in dieser Zeitschrift a. a. O. S. 5 bewiesen.

und je nachdem

$$v \gtreqless 1,$$

ist

$$\alpha + \beta \lesseqgtr \gamma,$$

d. h.

$$w \begin{cases} = 0 \\ \text{nicht } 0 \text{ und nicht } \infty. \\ = \infty \end{cases}$$

Noch leichter ist dieser Zusammenhang, wenigstens bei den oben gegebenen Erklärungen der Berührungsordnung und Schmiegungsordnung, unmittelbar aus den Formeln

$$k = \frac{d\varphi}{ds}, \quad w = \frac{d\vartheta}{ds}$$

zu ersehen, denn dieselben zeigen, daß der Wert k (w) Null, oder nicht Null und nicht unendlich, oder unendlich sein wird, je nachdem die Ordnung der unendlich kleinen Größe $d\varphi$ $(d\vartheta)$ größer, gleich oder kleiner ist als diejenige von ds, d. h. je nachdem $\nu\,(v) \gtreqless 1$.

§ 8. Krümmungen und Windungen verschiedener Ordnung.

Ist die Krümmung $k = \frac{d\varphi}{ds}$ in einem Kurvenpunkte Null oder unendlich, so erfüllt sie ihren Zweck nicht mehr, beim Vergleich zweier Kurvenstellen derselben Art als Maß für die stärkere oder schwächere Biegung einer Kurve in der Nähe eines Punktes zu dienen, oder als Maß für die Schnelligkeit, mit welcher ein, die Kurve mit bestimmter Schnelligkeit durchlaufender Punkt sich von der zugehörigen Tangente entfernt. Ebenso ist es mit der Windung als einem Maße für die schnellere oder langsamere Entfernung eines die Kurve beschreibenden Punktes von der Schmiegungsebene, die zur betrachteten Stelle gehört. Man erhält jedoch bei einem Kurvenpunkte mit der Berührungsordnung ν und der Schmiegungsordnung v wieder endliche und nicht verschwindende, also zu einem zahlenmäßigen Vergleich geeignete Werte, wenn man die Quotienten

$$k_\nu = \frac{d\varphi}{ds^\nu} \tag{11}$$

und

$$w_v = \frac{d\vartheta}{ds^v} \tag{12}$$

bildet, bei denen jedesmal Zähler und Nenner von derselben Ordnung unendlich klein sind. Es soll k_ν die Krümmung ν-ter Ordnung, w_v die

Windung v-ter Ordnung genannt werden.[1]) Die Krümmung (Windung) in irgend einem Punkt wird offenbar Null oder unendlich, wenn die Berührungsordnung (Windungsordnung) in jenem Punkte größer bezw. kleiner ist als die Ordnungszahl der Krümmung (Windung). Die Gleichungen (2) und (4) in § 4, (7) in § 5 ergeben ohne weiteres

$$k_\nu = \frac{(\alpha!)^\nu (\alpha - 1)!}{(\beta - 1)!} \frac{\overline{v}^{\beta}}{v_\alpha^{\nu+1}} \tag{13}$$

und

$$w_v = \frac{(\alpha!)^v (\beta - 2)!}{(\gamma - 2)!} \frac{\overline{\overline{v}}_\gamma}{v_\alpha^v \overline{v}_\beta}, \tag{14}$$

wo für ν und v die Werte aus Gleichung (9) und (10) in § 7 eingesetzt werden können.

Über die Vorzeichen sei noch folgendes bemerkt. Die Geschwindigkeiten v_n sind als absolute Längen positiv zu nehmen. Wie üblich, werde vorausgesetzt, daß die Bogenlänge s mit t wächst, was darauf hinauskommt, der Tangente T im betrachteten Kurvenpunkte die Richtung des Vektors $p^{(\alpha)}$ als positive Richtung zu geben. Bei der Hauptnormale betrachte man als positive Seite die, auf welche die Projektion der Geschwindigkeit $p^{(\beta)}$ fällt. Dann wird $\overline{v}_\beta$, also auch die Krümmung einer beliebigen Ordnung, wenn sie endlich und von Null verschieden ist, immer positiv. Die positive Richtung in der Binormalen B wähle man so, daß die positiven Teile der Tangente, Hauptnormale und Binormale zu einander liegen, wie diejenigen der Achsen eines Koordinatensystems gebräuchlicher Art. Dann wird $\overline{\overline{v}}_\gamma$ und ebenso die Windung einer jeden Ordnung positiv oder negativ, je nachdem

1) Von geometrischen Sätzen, in denen diese Begriffe eine Rolle spielen, seien bloß folgende, ohne Beweis, mitgeteilt:

Haben zwei Kurven in einem gemeinsamen singulären Punkt der Berührungsordnung ν dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegungsebene, so bleibt das Verhältnis ihrer Krümmungen ν-ter Ordnung in diesem Punkt unverändert, wenn man beide Kurven einer und derselben beliebigen kollinearen Transformation unterwirft (das Verhältnis jener Krümmungen ist eine „projektive Invariante").

Haben zwei Kurven in einem gemeinsamen singulären Punkt der Schmiegungsordnung v dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegungsebene, so ist das Verhältnis ihrer Windungen v-ter Ordnung in diesem Punkt eine projektive Invariante. Im Falle $v = 1$ gilt letzterer Satz noch, wenn die Kurven in dem gemeinsamen Punkt dieselbe Schmiegungsebene, aber verschiedene Tangenten haben. Für den Fall gewöhnlicher Kurvenpunkte habe ich diese und eine Reihe verwandter Sätze, die in ähnlicher Weise verallgemeinert werden können, in dieser Zeitschrift Bd. 36 (1891), S. 56—60, mitgeteilt. Es liegt nahe, den Begriff des Gaußschen Krümmungsmaßes einer Fläche ähnlich wie den der Krümmung einer Kurve für den Fall eines singulären Flächenpunkts zu verallgemeinern, ein Gedanke, den ich bei anderer Gelegenheit durchzuführen beabsichtige.

die Projektion der Geschwindigkeit $p^{(\gamma)}$ auf die Binormale nach der positiven oder negativen Seite der letzteren fällt, oder was dasselbe ist, je nachdem die Vektoren $p^{(\alpha)}, p^{(\beta)}, p^{(\gamma)}$ zu einander liegen, wie die positiven Achsenhälften eines linkshändigen Koordinatensystems, oder nicht. Wie schon in § 2 bemerkt wurde, gelten im ersteren Falle die Fig. 5—12, während im letzteren an Stelle der dort abgebildeten Kurven ihre Spiegelbilder in Bezug auf die xy-Ebene treten müssen. Wir stoßen hier auf die Unterscheidung positiv und negativ gewundener Kurvenstellen, mit der sich auch die Herren Kneser[1]) und Staude[2]) beschäftigt haben.

§ 9. Beispiele.

Nehmen wir die in § 3 angefangene Betrachtung der bei der Bewegung eines starren räumlichen Systems im gewöhnlichsten Falle von den Systempunkten beschriebenen Bahnstellen wieder auf, um die Ergebnisse der §§ 4—8 auf dieselben anzuwenden. Die von den gewöhnlichen Punkten der Fläche F^3 beschriebenen Schnabeleinseitpunkte mit dem Zeichen (1, 2, 4) haben eine endliche, nicht verschwindende Krümmung, dagegen die Windung Null, und ebenso ist es bei den Spitzeneinseitpunkten (1, 2, 5), welche die Punkte der in F^3 liegenden Ausnahmekurve c^6 beschreiben; die Windungsordnung ist im ersten Fall 2, im zweiten 3, also besteht für diese Punkte eine endliche, von Null verschiedene Windung 2-ter bezw. 3-ter Ordnung. Die gewöhnlichen Punkte der Wendekurve i^3 beschreiben Einseitwendepunkte mit dem Zeichen (1, 3, 4), also mit der Krümmung Null und einer endlichen, von Null verschiedenen Windung; wegen der Berührungsordnung 2 ist eine endliche, nicht verschwindende Krümmung 2-ter Ordnung vorhanden. Bei den von den Ausnahmepunkten der Wendekurve beschriebenen echten Wendepunkten (1, 3, 5) sind die Krümmung und die Windung beide Null; die Berührungsordnung und die Windungsordnung beträgt 2, sodaß die Krümmung und die Windung 2-ter Ordnung endlich und nicht Null sind.

Man bemerke, daß für die Erzielung möglichst flacher Bahnstellen, d. h. solcher, die einer Geraden sich möglichst anschmiegen, die gewöhnlichste ebene Bewegung eines starren Systems günstiger ist, als die gewöhnlichste räumliche Bewegung, da bei der ersteren der Ballsche Punkt einen Einseitpunkt (1, 4) mit der Berührungsordnung 3 beschreibt, während bei der letzteren die Berührungsordnung der erzeugten Bahnstellen sich nicht über 2 erhebt.

1) J. f. Math. 113 (1894), S. 89.
2) Am. J. Math. 17 (1895), S. 359.

Zum Ostwaldschen Axiom der Mechanik.[1])

Von E. Förster in Göttingen.

Die Bemühungen, das sogenannte „*Ostwaldsche Axiom*" des größten Energieumsatzes als Grundprinzip an die Spitze der analytischen Mechanik zu stellen und aus demselben, ähnlich wie aus den Prinzipien von D'Alembert, Gauß u. s. w. die Bewegungsgesetze eines beliebigen Systems materieller Punkte abzuleiten, haben bekanntlich zu einem negativen Resultate geführt.[2]) In der Tat überzeugt man sich leicht, daß es im allgemeinen *überhaupt keine* Bewegung gibt, welche den Anforderungen des Ostwaldschen Satzes Genüge leistet.

Es entsteht nun die Frage, ob es nicht möglich sei, diesem Mangel dadurch abzuhelfen, daß man den Satz in zweckentsprechender Weise abändert, ohne den charakteristischen Grundgedanken desselben zu verwischen. Das Folgende stellt einen Versuch einer solchen Abänderung dar, nach welcher der Ostwaldsche Satz nur als eine neue Formulierung des längst bekannten Gaußschen Prinzipes des kleinsten Zwanges erscheint. Ein *neues Grundgesetz* der Mechanik ist damit freilich *nicht* gewonnen, was wohl auch von vornherein nicht zu erwarten war. Es soll vielmehr einzig und allein der richtige Kern des Ostwaldschen Satzes bloßgelegt werden, wobei auch die eigenartige Ausdrucksweise, die der Satz in dieser Fassung gestattet, vielleicht nicht ohne Interesse sein dürfte.

Um zu einer zweckmäßigen Abänderung des Ostwaldschen Theoremes zu gelangen, gehen wir von der folgenden Betrachtung aus: Das genannte Theorem verlangt, daß unter allen jenen *virtuellen* Bewegungen eines Systemes materieller Punkte, welche außer den Systemsbedingungen noch dem *Energiesatze*:

$$(1) \qquad T + U = \text{Konstante}$$

genügen, für die *wirkliche* Bewegung der „Energieumsatz" ein Maximum, oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft, der Zuwachs der lebendigen Kraft T ein Extremum sei. Ist also der Anfangszustand des Systems, d. h. sind die Werte der Koordinaten und Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte zur Zeit t, gegeben, und ist die potentielle Energie U

1) Ostwald, Lehrbuch d. allg. Chemie, II, S. 37, 1891.

2) Vgl. etwa: Zemplén, Über den Energieumsatz in der Mechanik, Annalen d. Physik, **10**, 2, S. 419, 1903, woselbst auch die einschlägige Literatur.

als Funktion der Koordinaten bekannt, dann sollen unter allen jenen *virtuellen* Beschleunigungen x'', y'', z'', welche mit dem Energiesatze (1) und den Systemsbedingungen vereinbar sind, gerade jene herausgefunden werden, für welche bei beliebig kleinen Werten von τ der Zuwachs der lebendigen Kraft:

$$\varDelta T = T_{t+\tau} - T_t$$

ein Extremum ist.

Entwickeln wir $\varDelta T$ nach Potenzen von τ, so ergibt sich:

$$\varDelta T = \tau \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{1}{3!} \cdot \tau^3 \cdot \frac{d^3 T}{dt^3} + \cdots.$$

Das erste Glied, $\frac{dT}{dt} \cdot \tau$, ist nach (1) gleich $-\frac{\partial U}{dt} \cdot \tau$ oder:

$$\frac{dT}{dt} \cdot \tau = -\frac{dU}{dt} \cdot \tau = -\sum \left[\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z'\right] \cdot \tau,$$

wo die Summe über die Koordinaten sämtlicher Massenpunkte zu erstrecken ist. Unter dem Summenzeichen kommen aber nur die Koordinaten und Geschwindigkeiten vor, d. h. $\frac{dT}{dt}$ ist von den Beschleunigungen völlig unabhängig und somit für alle betrachteten virtuellen Bewegungen gleich. Soll also $\varDelta T$ für beliebig kleine Werte von τ ein Extremum sein, so muß $\frac{d^2 T}{dt^2}$ ein solches sein. Diese Forderung ist aber, wie eine einfache Rechnung ergibt, überhaupt unerfüllbar, außer wenn das System anfangs in Ruhe war. *Im allgemeinen bestimmt demnach das Ostwaldsche Axiom überhaupt keine Bewegung.*

Ganz anders gestaltet sich aber die Sache, wenn wir statt $\varDelta T$ oder $\frac{d^2 T}{dt^2}$ den folgenden Ausdruck betrachten:

$$\Theta = \frac{d^2 T}{dt^2} - \tfrac{1}{2} \sum m\,(x''^2 + y''^2 + z''^2);$$

denn ersetzen wir die Forderung eines Extremums für $\frac{d^2 T}{dt^2}$ durch die Forderung, daß Θ *ein Maximum sein soll, so erhalten wir die bekannten Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.* Nach (1) ist nämlich

$$\Theta = -\frac{d^2 U}{dt^2} - \tfrac{1}{2} \sum m\,(x''^2 + y''^2 + z''^2);$$

$$-\Theta = \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x} x'' + \frac{\partial U}{\partial y} y'' + \frac{\partial U}{\partial z} z''\right] + \sum \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} z'^2 + \cdots\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum m\,(x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

$$= \sum \frac{1}{2m} \left[\left(m x'' + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(m y'' + \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(m z'' + \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] + \Phi,$$

wo Φ ein Aggregat von Gliedern bedeutet, die nur von den Koordinaten und den Geschwindigkeiten, nicht aber von den Beschleunigungen abhängen. Soll Θ ein Maximum sein, dann muß, da Φ als Konstante zu behandeln ist,

$$Z = \sum \frac{1}{m}\left[\left(mx'' + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(my'' + \frac{d\, U}{\partial y}\right)^2 + \left(mz'' + \frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] = -2\,\Theta - 2\Phi$$

ein Minimum sein. Z ist nichts anderes als der analytische Ausdruck für den Gaußschen „Zwang“, und unsere Forderung des Maximums für Θ deckt sich demnach mit dem bekannten Gaußschen Satze des kleinsten Zwanges. Wie aus diesem fließen also auch aus der Bedingung

$$(2) \qquad \Theta = \text{Max.}$$

in Verbindung mit (1) die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen.

Zieht man es vor, statt des Umweges über das Gaußsche Prinzip direkt aus (1) und (2) die Bewegungsgleichungen abzuleiten, so bietet dies selbstverständlich keinerlei Schwierigkeiten. Zunächst findet man wie vorhin

$$\Theta = -\sum\left[\frac{\partial U}{\partial x}x'' + \frac{\partial U}{\partial y}y'' + \frac{\partial U}{\partial z}z''\right] - \tfrac{1}{2}\sum m\left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right) - \cdots.$$

Aus (2) folgt, da die Koordinaten und Geschwindigkeiten *gegeben* sind, also nicht mit variiert werden dürfen:

$$(3) \quad \delta\,\Theta = 0 = -\sum\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + mx''\right)\delta x'' + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + my''\right)\delta y'' + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + mz''\right)\delta z''\right].$$

Sind die Bedingungen des Systems in der Form von μ Gleichungen

$$\varphi_i\left(x_1 y_1 z_1 \cdots z_n\right) = 0, \qquad (i = 1, 2 \cdots \mu),$$

gegeben, so unterliegen die Variationen $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z'' \cdots$ noch den μ Bedingungen

$$(4) \qquad \sum\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\delta x'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\delta y'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\delta z''\right] = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots \mu),$$

wozu noch als letzte Bedingung (1) hinzukommt. Differentiiert man (1) nach t, so erhält man

$$\frac{d\,T}{dt} + \frac{d\,U}{dt} = 0 = \sum m\left(x'x'' + y'y'' + z'z''\right) + \sum\left(\frac{\partial U}{\partial x}x' + \frac{\partial U}{\partial y}y' + \frac{\partial U}{\partial z}z'\right).$$

Die Variation von (5) ergibt demnach für die $\delta x'' \cdots$ die Bedingung

$$(6) \qquad \sum m\left(x'\delta x'' + y'\delta y'' + z'\delta z''\right) = 0.$$

Aus (3), (4) und (6) folgt in der bekannten Weise, wenn λ_i und μ vorläufig unbestimmte Funktionen der $x, y, z; x', y', z'$ sind:

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
m x'' + \frac{\partial U}{\partial x} &= \mu \cdot m \cdot x' + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}; \\
m y'' + \frac{\partial U}{\partial y} &= \mu \cdot m \cdot y' + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}; \\
m z'' + \frac{\partial U}{\partial z} &= \mu \cdot m \cdot z' + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Entweder sind sämtliche x', y', z' gleich Null, also das System anfangs in Ruhe; dann stimmen die Gleichungen (7) ersichtlich mit den bekannten Bewegungsgleichungen überein. Sind aber irgend welche der x', y', z' von Null verschieden, dann multiplizieren wir die Gleichungen (7) bezw. mit x', y', z' und addieren alle so entstehenden Gleichungen für alle Systempunkte. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\sum m (x'x'' + y'y'' + z'z'') + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' \right) \\
&\qquad = \mu \cdot \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \sum \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} z' \right].
\end{aligned}
$$

Die linke Seite verschwindet wegen (5), die Doppelsumme auf der rechten Seite verschwindet ebenso wegen $\varphi_i (x_1 \cdots z_n) = 0$, und es bleibt nur übrig:

$$\mu \cdot \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Da nach Voraussetzung nicht alle x', y', z' verschwinden, muß also $\mu = 0$ sein, und die Gleichungen (7) *fallen wieder mit den bekannten Bewegungsgleichungen zusammen.*

Daß ferner tatsächlich ein Maximum vorhanden ist, ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der zweiten Variation von Θ. Es ist:

$$
\begin{aligned}
\delta^2 \Theta = &- \sum \left[\left(m x'' + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \delta^2 x'' + \left(m y'' + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \delta^2 y'' + \left(m z'' + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \delta^2 z'' \right] \\
&- \sum m (\delta x''^2 + \delta y''^2 + \delta z''^2);
\end{aligned}
$$

Die erste der beiden Summen rechts ist nach (7) gleich

$$- \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \sum \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \delta^2 x'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \delta^2 y'' + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \delta^2 z'' \right],$$

verschwindet also wegen (4). Die zweite Summe rechts ist wesentlich positiv, mithin $\delta^2 \Theta$ negativ und das behauptete Maximum tatsächlich vorhanden.

Die Bedingungen (1) und (2) liefern also zusammen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. —

Sollen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen *zweiter* Art in *allgemeinen* Koordinaten $q_1 \cdots q_{3n}$ erhalten werden, dann braucht man nur ganz analog den Ausdruck

$$\Theta = \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\Delta} T_\mu T_\nu$$

unter Berücksichtigung des Energiesatzes zum Maximum zu machen. Dabei bedeutet[1]):

Δ die Determinante der quadratischen Form $T = \frac{1}{2} \sum_{i, k} a_{ik} q_i' q_k'$;

$A_{\mu\nu}$ die adjungierte Unterdeterminante zu $a_{\mu\nu}$;

T_μ die Differenz: $T_\mu = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\mu'} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}$.

Θ hängt demnach einzig und allein von der lebendigen Kraft T ab; der Gaußsche Satz des kleinsten Zwanges erscheint in zwei Teile zerlegt, nämlich (1) und (2), wovon (2) nur die Änderung der *kinetischen* Energie berücksichtigt, während die *potentielle* Energie erst durch (1) eingeführt wird.

Eine ganz besonders treffende Ausdrucksweise ergibt sich für diese neue Formulierung des Gaußschen Prinzips, wenn man versucht, dieselbe in Worte zu kleiden. Für die Funktionen $\frac{d^2 T}{dt^2}$ und $\frac{1}{2} \sum m (x''^2 + y''^2 + z''^2)$ scheinen sich dann die Bezeichnungen „Beschleunigung der lebendigen Kraft" und „lebendige Kraft der Beschleunigung" wie von selbst darzubieten, obwohl dieselben vom mechanischen Standpunkte kaum zu rechtfertigen sind und nur die *Analogie* der betrachteten Formeln mit jenen für die Beschleunigung und die lebendige Kraft andeuten sollen. Führen wir diese *symbolischen* Bezeichnungen ein, dann ergibt sich der folgende Satz, der sich dem Gedächtnisse leicht einprägt:

„Betrachten wir alle jene virtuellen Bewegungen eines Systemes, die mit den Anfangsbedingungen und den Bedingungsgleichungen des Systemes, sowie *mit dem Energiesatze* verträglich sind;

---

1) Siehe: A. Waßmuth, Über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik. Wiedemanns Annalen 54, p. 164; 1895.

Dann ist unter allen diesen virtuellen Bewegungen für die wirkliche Bewegung die „Beschleunigung der lebendigen Kraft“, vermindert um die „lebendige Kraft der Beschleunigung“ ein Maximum.“

Göttingen, den 26. Februar 1903.

Anmerkung: Die im vorstehenden gegebene Fassung des Ostwaldschen Axioms findet sich, wie ich nachträglich bemerke, schon bei A. Voß, „Über ein energetisches Grundgesetz der Mechanik“ Sitzungsber. d. k. bayr. Akad. d. Wiss. 1901.

Die „Lebendige Kraft der Beschleunigung“ tritt dort als „Beschleunigung der halben relativen kinetischen Energie“ auf; der Beweis des Satzes deckt sich genau mit dem im vorigen gegeben zweiten direkten Beweise, während die Zurückführung des Satzes auf das Gaußsche Prinzip, die mir hauptsächlich von Interesse zu sein scheint, dortselbst nicht durchgeführt ist.

Zur Frage der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie.

Von E. MÜLLER in Wien.

Unzweifelhaft kommt in den mathematischen Wissenszweigen das Streben nach einheitlichen Bezeichnungen immer mehr zum Durchbruch. Es ist daher zu begrüßen, daß Herr Mehmke gelegentlich der Besprechung des Lehrbuchs der darstellenden Geometrie von M. Bernhard (S. 144 des letzten Bandes dieser Zeitschrift) zur Frage der Bezeichnungen in der darstellenden Geometrie Stellung genommen und damit zu einer Diskussion über den Gegenstand Veranlassung gegeben hat. Vielleicht trägt eine vorurteilslose Besprechung der Frage zur Förderung der Einheitlichkeit bei, deren Nutzen wohl jeder zugeben wird, der Schriften verschiedener Verfasser über unseren Gegenstand gelesen hat. Um wie vieles leichter liest sich eine Abhandlung, mit deren Bezeichnungsweise man vertraut ist!

Daß Herr Mehmke seit Jahren Punkte mit kleinen, Geraden mit großen lateinischen Buchstaben auch in der darstellenden Geometrie bezeichnet, war mir erfreulich zu hören, da ich gleichfalls diese Bezeichnungsweise bevorzuge. Verdient sie aber einen Vorzug? Ich vermute, wir sind beide durch die Beschäftigung mit H. Graßmanns Schriften an diese Bezeichnung gewöhnt worden. Nach Gründen für sie suchend, bin auch ich darauf gekommen, daß man den Punkt, trotz anderer wissenschaftlicher Auffassungen, gewöhnlich als Element der räumlichen Gebilde betrachtet, und es daher passend ist, die zufolge dieser Auffassung in den Figuren häufiger auftretenden Punkte mit den in der Schrift am häufigsten auftretenden kleinen Buchstaben, Geraden also mit den eine Ausnahmestellung einnehmenden großen Buchstaben, des lateinischen Alphabetes natürlich, zu bezeichnen. Unzweifelhaft sind auch die kleinen Buchstaben, selbst wenn man sie sorgfältig zeichnet, rascher herstellbar als die großen und nehmen weniger Raum ein. Wohl kann man, wie mir ein Kollege einwarf, die großen Buchstaben in beliebiger Kleinheit schreiben. Dann werden aber die kleinen Buchstaben, da man einen Größenunterschied zwischen den beiden Arten immer wahren muß, zu klein. Leider ist es durch die ausgezeichneten Werke von Fiedler, Wiener und Rohn-Papperitz, welche um die Einführung konsequenter Bezeichnungen sich große Verdienste erworben haben, noch üblicher geworden, Punkte mit großen und Geraden mit kleinen Buchstaben zu bezeichnen, während schon vorher Klingenfeld in seinem „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" (Nürnberg 1851, 2. Aufl. 1871) und K. Pohlke in den verschiedenen Auflagen seiner Darstellenden Geometrie (Berlin 1860—1876) die umgekehrte Bezeichnung verwendet haben.[1])

Zur Bezeichnung von Ebenen eignen sich wohl am besten die kleinen und großen Buchstaben des griechischen Alphabets. Die Zeichen für Ebenen von denen für Punkte durch fetten Druck zu unterscheiden, wie es Fiedler und Wiener machen, erscheint mir unvorteilhaft, weil in der Schrift diese Unterscheidung schwierig ist, und weil man beim Sprechen die Zeichen wieder durch ein Beiwort unterscheiden muß, was schon bei „Klein—a" und „Groß—A" lästig wird. Ich verwende für Ebenen gewöhnlich kleine griechische Buchstaben, für ausgezeichnete Ebenen, wie Projektionsebenen, und für krumme Flächen große griechische Buchstaben. Die Spuren, oder auch Spurparallelen einer Ebene α sind dann mit A_1, A_2 zu bezeichnen. Rohn-Papperitz haben für Ebenen durchgehends große griechische Buchstaben gewählt, wahrscheinlich um für die Winkelbezeichnung die kleinen Buchstaben aufzusparen. Da aber die ausdrückliche Bezeichnung von Winkeln in der darstellenden Geometrie seltener nötig wird, kann man bei ihr ebenfalls kleine griechische Buchstaben verwenden, wenn man im Text das Winkel-

1) Während des Druckes habe ich bemerkt, daß schon in: F. Wolff, Die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen, Leitfaden für den Unterricht am Kgl. Gewerbe-Institut, Berlin 1835, Punkte immer mit kleinen lateinischen Buchstaben, sowie Grundriß, Aufriß, Seitenriß von p mit p', p'', p''' bezeichnet werden. R. Mehmke.

zeichen $\sphericalangle \alpha$, $\hat{\alpha}$ oder das Wort „Winkel" hinzufügt.[1]) In den Figuren wird der Buchstabe ohnedies neben einem Bogen stehen. Von Vorteil für das rasche Verständnis mancher Figuren ist eine einfache Bezeichnung des rechten Winkels. Ich verwende dafür einen Bogen, in den ich statt des Winkelzeichens einen Punkt setze.

Zur Bezeichnung von Längenzahlen (Koordinaten, Abständen etc.) benutze ich, um mit der für Punkte nicht in Widerspruch zu geraten, kleine Buchstaben des deutschen Alphabets.

Auf einer einheitlichen Bezeichnung beruht die Verwendbarkeit der abgekürzten Bezeichnungen für Verbindungs- und Schnittgebilde, wie sie Rohn-Papperitz in die darstellende Geometrie eingeführt haben. Schade, daß sich die Verfasser hierbei nicht inniger an die Graßmannschen Bezeichnungen anschlossen. Wird z. B. die Schnittlinie zweier Ebenen α und β mit $[\alpha\beta]$ bezeichnet, dann kann man zuweilen auch ihre Projektionen, ohne Einführung eines neuen Buchstaben $[\alpha\beta]'$, $[\alpha\beta]''$ nennen. Vorteilhaft erschien mir insbesondere die Anwendung des Graßmannschen Ergänzungszeichens $|$ in dem Sinne, daß $|A$ die unendlich ferne Gerade der Lotebenen zu A (die zur Richtung von A senkrechte Stellung) und $|\alpha$ den unendlich fernen Punkt der Lote zu α (die zur Stellung von α senkrechte Richtung) bezeichnen sollen.[2]) Dann bedeutet z. B. $[p|\alpha]$ oder, wenn man will, $p|\alpha$ das aus p auf α gefällte Lot und $[p|A]$ die durch p gehende Lotebene von A. Liegt A im Unendlichen, dann soll $|A$ die zur Stellung A senkrechte Richtung, und liegt a im Unendlichen, $|a$ die zur Richtung a senkrechte Stellung bezeichnen. Nach diesen Festsetzungen bedeutet dann $\|A$ die Richtung (den unendlich fernen Punkt) von A und $\|\alpha$ die Stellung (die unendlich ferne Gerade) von α, also z. B. $[B|A]$ die durch B parallel zu A gelegte Ebene. Ferner kann $[p\alpha]$ ohne Zweideutigkeit als Zeichen für den Abstand des Punktes p von der Ebene α betrachtet werden.

Was die Bezeichnung der verschiedenen Risse eines Elementes anlangt, so scheint mir hierfür Einheitlichkeit von ebensogroßem Werte, ist aber vielleicht, wegen der Konstanz der Bezeichnung in jeder Schule, noch schwieriger zu erreichen. Man müßte aber die Angelegenheit nicht vom Standpunkte der Gewohnheit, sondern der Zweckmäßigkeit betrachten. Obgleich da und dort noch manche andere Bezeichnungsweisen gebräuchlich sind, scheint es sich mir in erster Linie

1) Die Bezeichnung des Winkels zweier Gebilde durch darüber gesetztes Winkelzeichen, also $\widehat{AB}$ statt $\sphericalangle AB$ erscheint mir bequemer.

2) C. Reuschle, Die Deck-Elemente, Stuttgart 1882 hat $|\alpha$ das *Zenith* von α und $|A$ die *Zenithlinie* von A genannt und auf die Verwendbarkeit dieser Begriffe in der darstellenden Geometrie hingewiesen.

um die Frage zu handeln: Sollen wir die Projektionen eines Punktes p durch angefügte obere oder untere Zeiger unterscheiden, also mit p', p'', p''' oder p_1, p_2, p_3 bezeichnen? Trotzdem ich mich ein Jahrzehnt lang in die letztere Bezeichnung eingewöhnt hatte, bin ich doch wieder auf die erstere, als die zweckmäßigere, zurückgekommen und zwar aus folgendem Grunde. Es ist sehr bequem und auch allgemein gebräuchlich, eine Anzahl gleichberechtigter Elemente mit demselben Buchstaben, jedoch verschiedenen unteren Zeigern (z. B. $p_1, p_2, \ldots p_n$) zu bezeichnen. Darauf müßte man bei Verwendung der unteren Zeiger zu obigem Zwecke verzichten. Darum ist es wünschenswert, daß sich die Bezeichnung $p', p'', p''', p^{IV}, \ldots$ für die verschiedenen Risse eines Punktes allgemein einbürgere.

Es wäre aber vorteilhaft, den Grundsatz, durch obere Zeiger Projektionen zu bezeichnen, noch weiter durchzuführen. Bei orthogonal- und schief-axonometrischen sowie perspektiven Darstellungen werden die Bildpunkte oft ebenso wie die Punkte des Originals bezeichnet. Für manche Erörterungen ist eine Unterscheidung nötig; ich würde dann

p^o für die orthogonale Projektion (axonometrisch)
p^s „ „ schiefe „
p^c „ „ centrale „

vorschlagen[1]), woraus dann die Bezeichnungen p'^o, p'^s, p'^c für die betreffenden Grundrisse sich ergeben. Auch die durch Umlegung erhaltenen Punkte und Geraden sollten dann durch obere Zeiger, etwa $\bar{p}, p^*, p^u$ bezeichnet werden, hingegen könnte man p_s für den Schatten des Puntes p aufsparen.

Bestimmung des Schwerpunktes einer krummlinig begrenzten ebenen Fläche mit Hilfe des Polarplanimeters von Amsler.[2])

Von G. L. Tiraspolskij in Tomsk (Sibirien).

Wenn von einer Fläche ABC der Schwerpunkt zu bestimmen ist, so legen wir sie zwischen die Koordinatenachsen OX und OY, welche in den Punkten A und B berühren mögen. Um den Abstand des Schwerpunktes von der Achse OY zu finden, zerlegen wir die Fläche

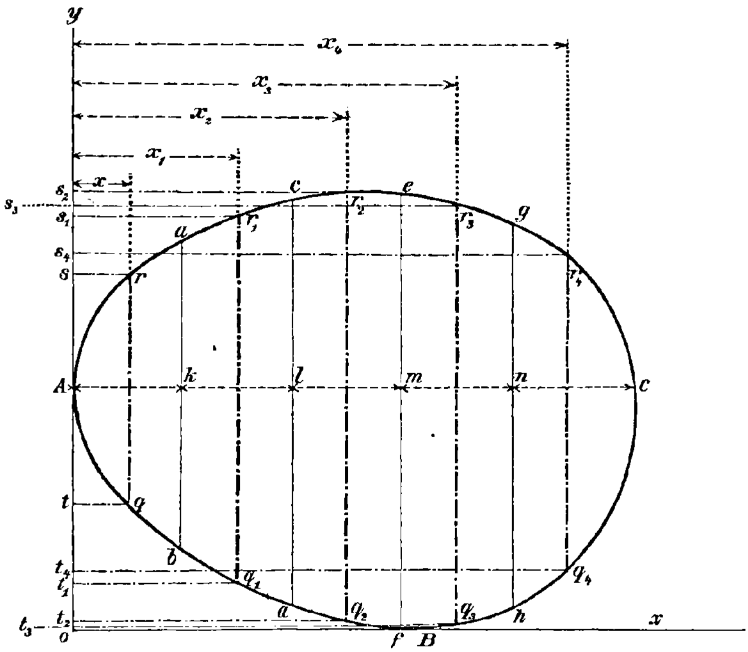
1) Rohn-Papperitz schreiben p_s und p_c.

2) Die Übersetzung dieses ursprünglich russisch geschriebenen Beitrages für die Zeitschrift ist von R. Mehmke.

ABC in Streifen durch eine Reihe von Parallelen ab, cd, $\cdots$ zu OY. Aus der Statik weiß man, daß der Abstand $\bar{x}$ des Schwerpunkts der ganzen Fläche von der Achse OY wird:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p}, \qquad (\Sigma p = F),$$

wo p den Inhalt irgend einer der Flächen Aab, $acdb$, $cefd$, $\cdots$, x den Abstand ihres Schwerpunkts von OY bezeichnet. Wenn wir die



Zerlegung so vornehmen, daß die Höhen dieser Streifen unter sich und der Einheit gleich werden, z. B. gleich 1 cm:

$$Ak = ke = em = mn = \cdots = 1 \text{ cm},$$

so kann jede Fläche durch eine mittlere Linie bestimmt werden, nämlich

$$Aab = rq \cdot 1 \text{ cm},$$

$$acdb = r_1 q_1 \cdot 1 \text{ cm},$$

$$cefd = r_2 q_2 \cdot 1 \text{ cm}$$

u. s. w.

Hierbei kann man die Linien rq, $r_1 q_1$, $\cdots$ näherungsweise erhalten, indem man über die Schwerpunkte der betreffenden Flächen fährt, also:

$$F \cdot \bar{x} = \Sigma p x = rq \cdot x + r_1 q_1 \cdot x_1 + \cdots$$
$$= rq \cdot rs + r_1 q_1 \cdot s_1 r_1 + \cdots,$$

oder:

$$F \cdot \bar{x} = \text{Fläche } srqts + \text{Fläche } s_1 r_1 q_1 t_1 s_1 + \cdots$$

Diese Flächen werden, wie die ganze Fläche F, mit dem Planimeter bestimmt. Den unbeweglichen Fuß des Planimeters stellt man außerhalb der Flächen auf und mit dem Fahrstift umfährt man, beim Punkt A beginnend, die Fläche $AsrqtA$ und weiter ohne Aufhören und Ablesen die Fläche $As_1 r_1 q_1 t_1 A$ u. s. w. Hierauf gibt die Ablesung am Planimeter den Wert $F \cdot \bar{x}$, woraus $\bar{x}$ durch Division mit F erhalten wird. In Bezug auf die Achse OX ebenso verfahrend erhält man $\bar{y}$. Wenn die Höhe nc der letzten Fläche größer oder kleiner als 1 cm ist, so verkürzt oder verlängert man die mittlere Linie $r_4 q_4$ im Verhältnis $nc : 1$. In Wirklichkeit ist es nicht nötig, die Parallelen ab, cd, $\cdots$ auszuführen. Es genügt, die Reihe der Parallelen rq, $r_1 q_1$, $\cdots$ so zu bestimmen, daß rq im Abstand $1/2$ cm von OY geführt ist und die übrigen in je 1 cm Abstand folgen, und dann mit dem Planimeter die Grenzen der Fläche $AsrqtA$ u. s. w. entlang den Kanten eines Zeichenwinkels zu durchfahren, oder noch besser — genauer und schneller — mit Hilfe der Reißschiene, indem man den Fahrstift des Planimeters senkrecht mit der Reißschiene und wagrecht entlang der Reißschiene führt. Die Höhen Ak, kl, lm, $\cdots$ kann man auch von der Einheit verschieden nehmen, es ist nur nötig, daß sie untereinander gleich sind und daß die Ablesung am Planimeter im Verhältnis der Höhe zu 1 vergrößert wird. Wenn die untersuchte Fläche eine Symmetrieachse hat, nimmt man diese als eine Koordinatenachse und wendet das angedeutete Verfahren nur einmal an.

Eine Bemerkung zur Graphischen Statik.

Von N. J. Hatzidakis in Athen.

Hat man zwei Systeme von Kräften, von denen einige den beiden Systemen *gemeinsam* angehören, so verfährt man gewöhnlich zur Konstruktion des Kräfte- und des Seilpolygons auf folgende Weise (vgl. z. B. *J. Petersen, Lehrbuch der Statik fester Körper, deutsch von v. Fischer-Benzon*, S. 145—146, § 122): Diejenigen Teile der zwei Kräftepolygone, welche den gemeinsamen Kräften entsprechen, sind zueinander parallel, können mithin durch eine bestimmte parallele Verschiebung zur Deckung miteinander gebracht werden. Dadurch erfährt aber auch der Pol O eine parallele Verschiebung. Es können also auf diese Weise die den gemeinsamen Kräften entsprechenden Teile der Seilpolygone als Seilpolygone betrachtet werden, die *demselben* Kräftepolygon, aber *verschiedenen* Polen O und O_1 (der neuen Lage von O nach der Verschiebung) entsprechen. Und für diese ist (a. a. O. S. 143—144, § 119) schon eine Konstruktionsregel angegeben. Ein Schüler von mir in der Militärschule, Herr Aris Chronis, hat mich nun neuerdings darauf aufmerksam gemacht, daß man obige Konstruktion noch mehr erleichtern kann, wenn man auf folgende Weise verfährt: Die parallelen Teile der Kräftepolygone können zusammenfallen. Praktisch wird dies dadurch erreicht, daß, nachdem man schon das dem einen beider Systeme von Kräften entsprechende Kräftepolygon konstruiert hat, die Konstruktion des anderen Kräftepolygons von den gemeinsamen Kräften ausgehend beginnt und zwar als diesen gemeinsamen Kräften entsprechenden Teil des zweiten Kräftepolygons den denselben entsprechenden Teil des ersten betrachtet, was, da der Anfang der Kräftepolygone überhaupt beliebig, offenbar gestattet ist. Dadurch wird nun erreicht, daß die Beziehung derjenigen Teile der Seilpolygone, die den gemeinsamen Kräften entsprechen, noch einfacher als früher wird: *sie sind nämlich jetzt offenbar parallel* (der Pol ist natürlich derselbe).

Kleinere Mitteilungen.

Ein Satz über die Zweikörperbewegung.

Folgender Satz scheint in der mathematischen Literatur nicht vorzukommen.[1])

Wirken auf zwei frei bewegliche, einander anziehende oder abstoßende Massenpunkte keine äußeren Kräfte, so schneiden die Tangenten, die man in diesen Punkten an ihre Bahnen ziehen kann, eine beliebige feste Ebene in zwei Punkten, deren Verbindungslinie fortwährend durch einen festen Punkt geht.

Er ist in geometrischem Sinne dualistisch zu dem von Poinsot[2]) herrührenden Satze:

Die Verbindungsebenen jener Tangenten mit einem beliebigen festen Punkt schneiden sich fortwährend auf einer festen Ebene.

Mit Hilfe Graßmannscher Methoden führt man den Beweis wie folgt. Seien p und p' die beiden Punkte, m und m' ihre Massen, k und k' die auf sie wirkenden Kräfte, als Vektoren betrachtet, dann ist:

$$m\frac{d^2p}{dt^2} = k, \quad m'\frac{d^2p'}{dt^2} = k', \quad k + k' = 0.$$

Verbindet man die erste Gleichung mit p, die zweite mit p' durch äußere Multiplikation und addiert, so kommt

$$m\left[p\frac{d^2p}{dt^2}\right] + m'\left[p'\frac{d^2p'}{dt^2}\right] = [pk] + [p'k'] = 0$$

oder

$$m\frac{d}{dt}\left[p\frac{dp}{dt}\right] + m'\frac{d}{dt}\left[p'\frac{dp'}{dt}\right] = 0,$$

woraus durch Integration

$$m\left[p\frac{dp}{dt}\right] + m'\left[p'\frac{dp'}{dt}\right] = C.$$

Weil auf der linken Seite Linienteile („Stäbe") stehen, so stellt die Integrationskonstante C eine Liniengröße („Schraube") vor. Multipliziert man die letzte Gleichung einmal mit einer beliebigen Ebene α, dann mit einem beliebigen Punkt a, so ergibt sich

$$m\left[p\frac{dp}{dt}\cdot\alpha\right] + m'\left[p'\frac{dp'}{dt}\cdot\alpha\right] = [C\alpha],$$

$$m\left[p\frac{dp}{dt}\cdot a\right] + m'\left[p'\frac{dp'}{dt}\cdot a\right] = [Ca],$$

was der analytische Ausdruck für die beiden Sätze ist. Wie man sieht, ist der feste Punkt $[C\alpha]$ des ersten Satzes der Nullpunkt von α in dem durch die Schraube C bestimmten Nullsystem und die feste Ebene $[Ca]$ des zweiten Satzes die Nullebene von a in diesem Nullsystem. Letztere Ebene ist übrigens die „invariable" Ebene von Laplace in Bezug auf den Punkt a.

Stuttgart. R. Mehmke.

1) Diesen Satz zu beweisen, habe ich schon 1883 als Prüfungsaufgabe gestellt.
2) Vgl. W. Schell, Theorie der Bewegung u. der Kräfte, 2. Aufl., II, S. 505.

Dezimale Ephemeriden.

In Band 46 dieser Zeitschrift, S. 383, haben wir über eine Petition an den französischen Unterrichtsminister, die darauf abzielte, die regelmäßige Veröffentlichung von Ephemeriden für die Dezimalteilung des Quadranten herbeizuführen, berichtet. Wir können heute mitteilen, daß die Herren J. de Rey-Pailhade, Ingénieur civil des Mines in Toulouse (18, rue Saint-Jacques), und A. Jouffray, Astronom an der Sternwarte in Mustapha-Supérieur in Algier (villa Prima, chemin des Alouettes) die Berechnung solcher Ephemeriden in die Hand genommen haben. In der uns vorliegenden Ankündigung führt M. de Rey-Pailhade etwa aus: Nach den Erfahrungen der Geodäten ist die Zehnteilung des rechten Winkels der Einteilung in Grade, Minuten und Sekunden weit überlegen[1]); die in der französischen Marine angestellten Versuche haben den Beweis geliefert, daß die Seeleute von der Einführung der neuen Winkelteilung großen Gewinn hätten[2]); endlich weiß man, daß auch gewisse umfangreiche astronomische Rechnungen dadurch außerordentlich vereinfacht werden.[3]) Trotz dieser anerkannten Vorteile hat die wissenschaftliche Literatur noch keine regelmäßige Veröffentlichung aufzuweisen, welcher die gegenseitige Stellung der Hauptgestirne in einer zehnteiligen Einheit ausgedrückt entnommen werden könnte. Diese Lücke wird also ausgefüllt werden.

Der Nutzen der neuen Veröffentlichung wird nach Ansicht von M. de Rey-Pailhade darin bestehen, daß die zahlreichen Besitzer dezimal geteilter Instrumente die Angaben der Ephemeriden seitheriger Einrichtung nicht umzurechnen brauchen und die Seeleute sich mit geringen Kosten die Vorteile des Dezimalsystems zu Nutze machen können, daß die Astronomen sich leichter entschließen werden, an neuen Instrumenten dezimal geteilte Kreise anbringen zu lassen und daß man bei allen einschlägigen Rechnungen eine Rechenmaschine wird anwenden können, ohne die bei der Sexagesimalteilung nötigen Verwandlungen vornehmen zu müssen.

Die beiden Herausgeber richten an Sternwarten, gelehrte Gesellschaften, Bibliotheken großer Städte und an Gelehrte, die dem Fortschritt huldigen, die Aufforderung, Bestellungen auf diese Ephemeriden bei einem von ihnen zu machen und etwaige, die Einrichtung betreffende Wünsche ihnen mitzuteilen. Der Subskriptionspreis, der erst nach Lieferung des Werkes eingezogen werden wird, soll höchstens 5 Frs. betragen.

---

1) Vgl. den Bericht über Winkelteilung, im Namen der „Tafelkommission" der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet von R. Mehmke, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 8, (1900), S. 139—158, insbesondere S. 149 Anm. 18 und 19, S. 151 Anm. 22, S. 155 Anm. 32, S. 156 Anm. 36.

2) Vgl. E. Guyou, Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation, Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an 1902, Note C, 1—15.

3) Vgl. den oben genannten Bericht über Winkelteilung, Anm. 37 S. 157—158.

Anfrage.

In den Phil. Transactions vol. 10, for the year 1770, London 1771, findet sich p. 240—256 von Rev. J. Rowning ein „Universal constructor of equations“ beschrieben und abgebildet. Es ist dies einer der ältesten Mechanismen zur Auflösung von Gleichungen und eine hinsichtlich der geometrischen Grundlage (welche die v. Segnersche Konstruktion rationaler ganzer Funktionen bildet) wie der technischen Ausführung sehr beachtenswerte Leistung. (Ich habe die Abbildung verkleinert wiedergegeben in der Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Band I, S. 1067.) Auf p. 251 sagt der Erfinder, daß die „Maschine“ „by an excellant workman of this town“ ausgeführt worden sei und daß er sie der Society anbiete. Weiß jemand, ob dieser Apparat noch vorhanden ist und wo er sich befindet? In der Encyclopédie méthodique, Mathématiques, t. I, Paris 1784, steht p. 659—663 ein mit (V) unterzeichneter Artikel mit der Überschrift „Equations. Construction et usage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puisse être (Algèbre. Machines)“. Wer ist der Verfasser? Bei näherer Prüfung zeigte sich mir, daß dieser Artikel größtenteils eine wörtliche Übersetzung der Abhandlung von Rowning ist, dessen Name nicht genannt wird. Die zu diesem Band der Encyclopédie gehörigen Tafeln sind in der Landesbibliothek zu Stuttgart nicht aufzufinden, ich erinnere mich aber, sie in der Hofbibliothek zu Darmstadt gesehen zu haben und glaube, daß die darin vorhandene Abbildung der fraglichen Maschine mit der von Rowning im wesentlichen übereinstimmt. Nun ist weiter in dem Traité complet de mécanique appliquée aux arts von J.-A. Borgnis, T. VIII, Paris 1820, p. 226—229, eine „machine pour construire les équations, par Clairaut“ beschrieben. Die sehr schön ausgeführte perspektivische Abbildung der Maschine, p. 23 Fig. 1, sieht aus wie eine etwa auf ein Drittel verkleinerte Wiedergabe der oben erwähnten Abbildung, die Rowning von seiner Maschine gibt. Aber abgesehen davon, daß Schatten und Schraffierung fehlen, sind nebensächliche Einzelheiten, z. B. Flügelschrauben, in der Form oft etwas geändert. Darf man daraus schließen, daß ein anderes Exemplar der Maschine als Vorlage gedient hat? Die Erläuterungsfiguren — Darstellungen der v. Segnerschen Konstruktion — stimmen auch mit denen bei Rowning überein, nur sind die Buchstaben manchmal geändert. Es wäre erwünscht, die Figuren bei Borgnis mit denen der Encyclopédie zu vergleichen. Im höchsten Grade rätselhaft ist noch, daß Borgnis die Maschine Clairaut zuschreibt. In den Schriften der Pariser Akademie habe ich keine auf den Gegenstand bezügliche Arbeit von Clairaut finden können. Wer kann hier Aufklärung geben?

Stuttgart. R. Mehmke.

Bücherschau.

Dr. **Hermann Schubert.** Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg. **Niedere Analysis.** Erster Teil. „Sammlung Schubert V.“ (V u. 181 S.) Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung 1902.

Der Verf. trennt diejenigen Teile der Elementarmathematik, die man gewöhnlich unter dem Namen „niedere Analysis“ zusammenfaßt, in zwei Gebiete, je nachdem die ganze Zahl den Ausgangspunkt bildet und die Hauptrolle spielt oder die irrationale Zahl in den Vordergrund tritt. Das erste dieser Gebiete findet in dem vorliegenden Bändchen der „Sammlung Schubert“ durch deren Herausgeber selbst eine vornehmlich auf das Selbststudium berechnete Darstellung. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Lehre von den Kettenbrüchen und den diophantischen Gleichungen werden in einer für Mittelschulzwecke mehr als ausreichenden Ausführlichkeit behandelt; was das Buch als Studienbehelf besonders wertvoll macht, das sind die überaus zahlreichen aus großer Lehrerfahrung geschöpften Beispiele; zu einem Teile derselben sind auch die Lösungen mitgeteilt, wodurch dem Leser die Kontrolle seiner eigenen Arbeit ermöglicht wird.

Über den Stoff selbst ist wenig zu bemerken, da er sich innerhalb der üblichen Grenzen bewegt. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt der Verfasser außer direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmungen a priori Teilungsaufgaben, die er force-majeur-Probleme nennt, dann Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Entstehungsmodalitäten beobachteter Ereignisse (Ursachenprobleme) und Aufgaben über die Wahrscheinlichkeit von Zeugenaussagen (Glaubwürdigkeitsprobleme). Im dritten Abschnitt kommen auch einige Formen unbestimmter Gleichungen zweiten Grades zum Vortrage.

An die Spitze eines jeden Paragraphen sind die Formeln gestellt, die seinen Hauptinhalt bilden, eine Einrichtnng, die Wiederholungszwecken förderlich sein kann.

Wien. CZUBER.

Dr. **Ad. Schwarz. Zur Bilanzrechnung bei Pensions-Instituten.** (15 S.) Leipzig und Wien, F. Deuticke, 1901.

Das kleine Schriftchen behandelt eine bei der Bilanzierung von Pensionsinstituten auftretende spezielle Frage, wie nämlich die Gehaltssteigerung und die in Prozenten des jeweiligen Gehalts ausgedrückte jährliche Steigerung des Anspruchs (auf Invaliden- oder Witwenpension oder auf ein Sterbequartal) in Rechnung zu bringen sei insbesondere auch dann, wenn der letztgenannte Prozentsatz, wie dies mitunter der Fall ist, einmal im Laufe der Dienstzeit eine Änderung erfährt. Der dabei verwendete mathematische Gedanke besteht darin, daß die Steigerungen des Anspruchs in den aufeinanderfolgenden Jahren vom Bilanzzeitpunkt gerechnet eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, vorausgesetzt, daß der Gehalt von Jahr zu Jahr in einer arithmetischen Reihe erster Ordnung ansteigt und daß das Gehaltsprozent, welches den Anspruch ausdrückt, ebenfalls in arithmetischer Reihe wächst; die Differenz dieser letzteren Reihe erfährt, wie schon bemerkt, eine einmalige Abänderung. Die Formeln werden bis zur technischen Durchführung verfolgt.

Wien. Czuber.

Dr. **Wilhelm Reuling**, kaiserlicher Justizrat. **Die Grundlagen der Lebensversicherung.** (XII u. 67 S.) Berlin 1901, Ernst Siegfried Mittler und Sohn.

Die vorliegende Broschüre ist der Wiederabdruck einer vor 33 Jahren, im XV. Bande der Goldschmidtschen Zeitschrift für Handelsrecht, erschienenen Abhandlung, und ihre Neuauflage hat auch heute eine Berechtigung. In überaus glücklicher Weise löst darin der Verfasser die nicht leichte Aufgabe, auf kurzem Wege in das Wesen der Lebensversicherung einzuführen, ohne einen erheblichen mathematischen Apparat aufzuwenden. Das Bedürfnis nach solcher Darstellung ist unstreitig vorhanden, weil es Kreise gibt, die, ohne Versicherungsrechnungen berufsmäßig zu treiben, vermöge ihrer Stellung mit den grundlegenden Begriffen des Versicherungswesens sich vertraut machen sollen. Dazu bietet ihnen das kleine Büchlein ein vorzügliches Mittel, indem es den Grundgedanken der Lebensversicherung, ihre mathematischen Grundlagen, die Struktur der Prämien, die Entstehung der Prämienreserve, den Begriff des mit einer Versicherungsunternehmung verbundenen Risikos und den Unterschied zwischen Gegenseitigkeits- und Aktienunternehmungen klar entwickelt. In den Text selbst sind mathematische Formeln grundsätzlich nicht aufgenommen; dagegen sind in Fußnoten die einfachsten Ansätze so weit geführt, als es zur begrifflichen Erfassung notwendig ist.

Der Verfasser konnte sich, wie er berichtet, mit der üblichen Erklärung für die Bildung einer Lebenswahrscheinlichkeit aus den Zahlen der Absterbeordnung, bei welcher die Lebenden des niederen Alters als mögliche, die Überlebenden des höheren Alters als günstige Fälle gedeutet werden, nie befreunden, und das mit Recht. Denn es handelt sich hier nicht um die Bildung einer Wahrscheinlichkeit a priori, sondern um den empirischen Wert einer hypothetischen Wahrscheinlichkeit. Der vom Verfasser gefundene Ausweg, die Frage so zu formulieren, daß es sich um die Wahrscheinlichkeit handle, eine bestimmte von den l Personen des niederen Alters gehöre der engeren Gruppe der l_1 Personen an, welche das höhere Alter überleben, trifft nicht auf das Wesen der Sache.

Unbegründet ist es, heute über Mangel an Interesse für die Geschichte der Mathematik und an Schriften zu klagen, die ihr gewidmet sind (S. VIII). Unzutreffend bei den heutigen Verhältnissen ist die Angabe, die Kapitalsversicherung auf den Todesfall sei die gebräuchlichste Versicherungsart.

Wien. Czuber.

Dr. **Karl Vetters**, Professor an der k. Gewerbeakademie zu Chemnitz: **„Lehrbuch der darstellenden Geometrie.“** Hannover, Verlag von Gebrüder Jänecke. 1902. 285 S. Preis geb. M. 5.60.

Dieses Lehrbuch der darstellenden Geometrie zeichnet sich durch die Reichhaltigkeit seines Inhaltes aus, indem trotz des geringen Umfanges von 285 Seiten im ersten Teile nicht nur die Projektion in einer Tafel, das Grund- und Aufriß-Verfahren, die Darstellung ebenflächiger Körper und einfacher krummen Linien und Flächen, sondern auch die Beleuchtung und die Schatten-Konstruktion ebenflächiger Körper und Rotationsflächen behandelt wird, woran sich im zweiten Teile noch eine kurze Erörterung der rechtwinkligen Axonometrie, der schiefen Projektion und der Linearperspektive schließt. Zahlreiche gut gewählte Aufgaben, im ganzen 321, sind den einzelnen Abschnitten beigegeben. Das Buch ist nach der Ansicht des Verfassers zwar nicht für Studierende der Mathematik, aber auch nicht für Bauhandwerker, vielmehr für den Gebrauch an höheren technischen Lehranstalten berechnet. Aber gerade mit Rücksicht auf diese Bestimmung vermißt man in dem Buche das Prinzipielle, Methodische, die Formulierung allgemeiner Sätze, die den Leser von dem gerade behandelten Falle unabhängig machen. So wird, um ein Beispiel zu erwähnen, der gewiß fundamentale Prozeß der Abwicklung in Bezug auf seine allgemeine Eigenschaften nirgends eingehend erörtert. Die Schraubenlinie finden wir S. 174 definiert als entstanden durch Aufwicklung einer auf dem abgewickelten Mantel eines Kreiscylinders gezeichneten Geraden; die Abwicklung eines Kreiscylinders aber wird erst im nächsten Abschnitt Seite 183 erledigt in Form der Aufgabe: Das Netz eines schief abgeschnittenen Kreiscylinders zu zeichnen. In mathematischer Hinsicht sind einige Ungenauigkeiten zu verbessern: so werden S. 102 die Bezeichnungen „Tetraeder, Oktaeder“ etc. für die *regulären* Polyeder verwendet; es gibt aber doch auch ein allgemeines Tetraeder u. s. f. Auf S. 150 findet man die Behauptung: „Bei einer krummen Linie liegen niemals drei auf einander folgende Punkte auf einer Geraden“ und weiter unten wird von „unendlichen Zweigen“ einer Kurve gesprochen, während unendlich ferne *Punkte* gemeint sind. Endlich mag noch bemerkt werden, daß der mit „Die freie Perspektive“ überschriebene Abschnitt (S. 272) diese Bezeichnung nicht mit Recht führt, da die Grundebene umgeklappt und der in ihr liegende Grundriß zur Konstruktion verwendet wird.

Die zahlreichen dem Texte eingefügten Figuren sind im allgemeinen gut disponiert und anschaulich. Hier und da wäre eine größere Genauigkeit am Platze: so enthält z. B. die Figur 106 a auf S. 107, die Parallelprojektion eines regulären Dodekaeders, doch zu grobe Ungenauigkeiten und beweist, daß man solche Darstellungen, wegen der vielen Kontrolen, die sich dem Auge darbieten, eben wirklich konstruieren muß. Trotz dieser bei einer neuen Auflage leicht zu beseitigenden Mängel wird namentlich ein in mathematischen Dingen sattelfester Leser in dem Buche mancherlei Anregung und Belehrung finden.

München, Mai 1903. Karl Doehlemann.

J. Schlotke, Direktor a. D. der Gewerbeschule in Hamburg: **Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** I. Teil: Spezielle Darstellende Geometrie. Mit 199 Figuren. 5. Aufl. 167 S. Preis M. 3,60 kart. 3,80. II. Teil: Schatten- und Beleuchtungslehre. Mit 79 Figuren. 3. Aufl. 60 S. Preis M. 2,00 kart. 2,20. III. Teil: Perspektive. Mit 133 Figuren. 2. Aufl. 133 S. Preis M. 4,40 kart. 4,60. Dresden: Verlag von Gerhard Kühtmann, 1902.

Die drei ersten Teile des Schlotkeschen Leitfadens gehören wohl zu den besten elementaren Büchern über darstellende Geometrie. Sie zeichnen sich aus durch eine äußerst klare, durchsichtige und einfache Darstellung, durch vorteilhafte Disposition des Stoffes, durch eine zielbewußte, praktische Methode und durch anschauliche Figuren. Die Eigenschaften der Kegelschnitte, welche in dem Buche Verwendung finden, werden elementar abgeleitet.

Was den ersten Teil betrifft, so beginnt derselbe mit einer kurzen Darstellung der Parallelperspektive bezw. schiefen Projektion, welche die Mittel an die Hand gibt, die Figuren zur Erläuterung des Grund- und Aufriß-Verfahrens besser zu verstehen ev. auch selbst herzustellen. Durch Projektion in zwei Tafeln werden dann der Punkt, die Gerade, die Ebene sowie ebene Durchschnitte von Körpern erledigt. Daran schließt sich die Betrachtung der Kegelschnitte, welche aus dem Umdrehungscylinder und Umdrehungskegel als ebene Schnitte gewonnen werden. Hier mag bemerkt werden, daß die Figuren 55, 56, 78, 82 doch *richtig* in schiefer Projektion konstruiert werden sollten. Die Darstellung des Kegels und Cylinders ist ja ohnedies schon vorausgegangen, die der berührenden Kugeln bietet allerdings gewisse Schwierigkeiten. Der für die Figur charakteristische Schnitt würde sich in der zweiten Figur als Aufriß von selbst darbieten. Es folgt dann ein Kapitel über Durchdringungen mit vielen Übungsbeispielen, sowie die Betrachtung krummer Flächen. — Der zweite Teil behandelt im ersten Abschnitt die Konstruktion der Schlagschatten in den durch Parallelprojektionen dargestellten Abbildungen bei Annahme paralleler Lichtstrahlen und im zweiten Abschnitt kurz, aber ausreichend die Beleuchtungslehre.

Der III. Teil des vorliegenden Buches endlich, die Perspektive, enthält zunächst die perspektive Darstellung räumlicher Objekte unter Annahme einer horizontalen Ebene; dann folgt die freie Perspektive, die Abbildung des Kreises und einfacher Umdrehungskörper, sowie einiges über Schattenkonstruktionen, Spiegelbilder, Stereoskope, endlich die Reliefperspektive. Vielleicht würde es zur Verbreitung des Buches in Künstlerkreisen beitragen, wenn noch gewisse Aufgaben aus der Praxis des *Malers* (z. B. Personen in verschiedenen Tiefen eines Bildes, Figuren auf Treppen u. s. f.) Aufnahme fänden.

München, Mai 1903. KARL DOEHLEMANN.

H. Sicard. Traité de cinématique théorique, avec des notes par A. Labrousse. Verlag von Gauthier-Villars, Paris 1902. VIII u. 185 S. Preis 4 fr. 50 c.

Nach einigen Vorbemerkungen über den Begriff des Vektors und das Moment eines Vektors in Bezug auf einen Punkt etc. (10 S.) behandelt der Verfasser im 1. und 2. Buche auf 34 S. die Bewegung eines einzelnen

Punktes (Geschwindigkeit und Beschleunigung, Anwendungen auf Zentralbewegung etc.). Das 3. Buch entwickelt in geometrischer Darstellung die einfachsten Sätze über die komplane Bewegung eines starren ebenen Systems, die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt und die allgemeine Bewegung eines starren räumlichen Systems, zuletzt noch den Satz von Coriolis über die Zusammensetzung der Beschleunigungen (24 S.). Das vierte beschäftigt sich mit demselben Gegenstande etwas eingehender in analytischer Behandlung (50 S.); in einem 5. Buche finden wir endlich die Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen eines starren Körpers (8 S.). Die Noten von Labrousse (51 S.) betreffen 1) die Formeln von Olinde Rodriques und ihre Anwendung auf eine spezielle Art der Bewegung, 2) die Bewegung eines starren ebenen resp. räumlichen Systems als speziellen Fall der linearen Transformation der Ebene und des Raumes in sich, 3) den linearen Strahlenkomplex und seine Bedeutung für die Kinematik, 4) einen Satz von Schönemann über die Bewegung eines starren räumlichen Systems, von welchem vier Pnnkte gezwungen sind auf festen Flächen zu bleiben, 5) einige Bemerkungen über Gelenkmechanismen, zum Teil ohne Beweise.

Bei dem vorliegenden Buche handelt es sich hiernach um eine gedrängte Übersicht über das gesamte Gebiet der theoretischen Kinematik, und insofern ist es zu einer ersten Orientierung recht wohl zu gebrauchen. Wenn der Verfasser aber meint[1]), das Buch enthalte „tout ce qu'il y a d'essentiel en cinématique“, so dürfen wir dem gegenüber doch nicht verschweigen, daß es die weit verzweigte Fortbildung, welche die geometrische Bewegungslehre in den letzten zwanzig Jahren namentlich in Deutschland gefunden hat, gänzlich außer Acht läßt. In dieser Hinsicht können uns besonders die Abschnitte über die ebene Bewegung, auch im Sinne einer ersten Einführung, nicht völlig befriedigen.

Erwähnt sei ferner die unverkennbare Anlehnung an das wesentlich tiefer eindringende Werk von Koenigs[2]), über das wir früher ausführlich berichtet haben. — Die beigegebenen Figuren sind zum Teil auffallend flüchtig gezeichnet und in den Buchstaben mit verschiedenen Fehlern behaftet.

Braunschweig. R. Müller.

D. Tessari, la costruzione degli ingranaggi ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici (Biblioteca matematica vol. IX). Torino 1902. Fratelli Bocca editori. XV u. 225 S. nebst 8 Figurentafeln.

Das vorliegende Werk behandelt in streng wissenschaftlicher Form und auf kinematisch-geometrischer Grundlage die Konstruktion der Zahnräder in ihrem vollen Umfange. Die Einteilung des vorgetragenen Lehrstoffs ist naturgemäß in der Hauptsache die bisher gebräuchliche: Eine kurze Einleitung (4 S.) gibt die erforderlichen Definitionen und die Problemstellung im allgemeinen, und hieran schließen sich zunächst einige Kapitel über die Konstruktion der Räder für parallele Achsen und konstantes Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeiten. (Grundlegende Konstruktionen, die cykloi-

1) vgl. die Widmungsworte zu Anfang.
2) leçons de cinématique, Paris 1897.

dische mit dem speziellen Falle der einerseits geradlinigen Verzahnung, Satzräder, Evolventen- und Triebstockverzahnung, Hookesche Räder, 93 S.) Der Verfasser wendet sich hierauf zur Betrachtung der Räder mit parallelen Achsen und veränderlichem Verhältnis der Umdrehungsgeschwindigkeiten. (Unrunde Räder, 54 S.) Er beschäftigt sich eingehend und teilweise unter Benutzung analytischer Hilfsmittel mit der mathematisch interessanten Aufgabe, die Gestalt (d. h. die Rollkurve) des zweiten Rades zu bestimmen, wenn die des ersten gegeben ist. Wird außerdem vorgeschrieben, wieviele Umdrehungen des ersten Rades einer Umdrehung des zweiten entsprechen sollen, so ist die Lage der zweiten Radachse nicht mehr willkürlich; sie ergibt sich mit Hilfe einer Fehlerkurve, und gleichzeitig liefert eine einfache Näherungskonstruktion die zugehörige Rollkurve. Eine von Burmester leider ohne Ableitung mitgeteilte Näherungsformel für den Abstand der beiden Radachsen wird von Tessari gleichfalls ohne Beweise übernommen. — Es folgt die Konstruktion der Räder mit sich schneidenden Achsen. (Konische Räder, 31 S.) Dabei wird u. a. das Verfahren von Tredgold zur angenäherten Bestimmung der Zahnformen an einem Beispiel in Grund- und Aufriß ausführlich erläutert. Den Schluß bildet die Theorie und Konstruktion der Räder mit windschiefen Achsen. (Hyperboloidische Räder, 41 S.) Hier fesselt uns insbesondere die geschickte Behandlnng der recht komplizierten Aufgabe: Es ist die Oberfläche der Zähne des einen Rades gegeben, die entsprechende Oberfläche für das andere Rad zu ermitteln. Die Lösung gelingt nach den Regeln der darstellenden Geometrie in verhältnismäßig einfacher Weise, wenn als gegebene Zahnfläche eine bestimmte Ebene oder ein hyperbolisches Paraboloid gewählt wird.

Für den ersten und bei weitem größten Teil des Werkes — soweit es sich nämlich um cylindrische Räder handelt — liegt ein Vergleich mit den entsprechenden Abschnitten von Burmesters Kinematik außerordentlich nahe. Dabei zeigt sich, daß beide Werke in materieller Beziehung keine tiefgehenden Unterschiede aufweisen. Hinsichtlich der Form der Darstellung erscheint uns das Burmestersche Werk noch immer als ein unübertroffenes Muster knapper und dabei doch mathematisch scharfer Ausdrucksweise; die Darlegungen Tessaris sind zwar ebenfalls durchaus klar und wissenschaftlich korrekt, aber wesentlich breiter und reich an Wiederholungen, der Gang der Untersuchung bis ins Einzelne nach pädagogischen Gesichtspunkten sorgfältig gegliedert. Es steht zu erwarten, daß gerade diese Eigenschaften namentlich in technischen Leserkreisen warme Anerkennung finden werden. Auf jeden Fall bedeutet das Buch eine wertvolle Bereicherung unsrer modernen kinematischen Literatur.

Braunschweig. R. Müller.

Neue Bücher.

Arithmetik und Analysis.

1. Cantor, M., Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. 2. Aufl. gr. 8°, X u. 155 S. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. M. 1.80.
2. Grotendorst, N. C., Beginselen der waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten. gr. 8°, 4 en 185 blz. m. 2 tab. Breda, De Koninklijke Militaire Academie. F. 3.20.
3. Rouché, E, et Lévy, Lucien, Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Tome II. Calcul intégral. gr. 8°. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 15.
4. Schouten, P., Die Prinzipien der Lebensversicherungs-Mathemathik. Aus dem Holländischen von T. C. F. Reach, mit einem Vorwort von C. L. Landré. Jena. gr. 8°, VIII u. 159 S. M. 4.50.
5. Thiele, T. N., Theory of observations. Imp. 8 vo, 143 pp. London, Layton 12 s.

Astronomie und Geodäsie.

6. Ephemeriden, astronomisch-nautische, f. d. J. 1905. Deutsche Ausg. Über Veranlassung der Marine-Sektion des k. u. k. Reichskriegsministeriums hrsg. von dem k. k. astronomisch-meteorolog. Observatorium in Triest. 18. Jahrg. gr. 8°, XX u. 26 S. Triest 1902, Schimff. M. 4.
7. Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1905 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1) — (470) f. 1903. Hrsg. v. dem königl. astronom. Rechen-Institut unter Leitung v. J. Bauschinger. (Der Sammlg. Berliner astronom. Jahrbücher 130. Bd.) gr. 8°, X, 537 u. 8 S. Berlin, Dümmler. M. 12.
8. Jahresbericht, astronomischer. Hrsg. v. Walt. F. Wislicenus. 4. Bd. enthaltend die Literatur des J. 1902. gr. 8°, XXXIII u. 648 S. Berlin, Reimer. M. 19.
9. Miller, Wilh., Die Vermessungskunde. Ein Taschenbuch f. Schule u. Praxis. 2. Aufl. gr. 8°, IX u. 174 S. m. 117 Abb. Hannover, Gebr. Jänecke. Geb. in Leinw. M. 3.
10. Mitteilungen der königl. Universitäts-Sternwarte zu Breslau. 2. Bd. Hrsg. v. Jul. H. G. Franz. gr. 4°, IV u. 120 S. m. 6 Taf. Breslau, Maruschke & Berendt. kart. M. 10

S. auch Nr. 34 u. 44.

Darstellende Geometrie, graphische Methoden.

11. Allitsch, Karl, Ein neues graphisches Verfahren zur Ermittelung der Querschnittsflächen der Kunstkörper im Eisenbahn- und Straßenbau. gr. 8°, 22 S. m. e. Zahlentab. u. 3 Taf. Zeichngn. Wien, Spielhagen & Schurig. M. 2.40.
12. Müller, Rhold., Leitfaden f. die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig. 2. Aufl. gr. 8°, VIII u. 95 S. m. Abb. Braunschweig. Vieweg & Sohn. M. 2.50.

13. Vonderlinn, J., Lehrbuch des Projektionszeichnens. 4 Tl. 1. Hälfte: Ebene u. Raumkurven. Abwickelbare Flächen. Die Kugelfläche. Mit 389 Erklärgn. u. 284 Fig. bearb. nach System Kleyer. gr. 8⁰, XI u. 252 S. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 6; geb. M. 7.

Geschichte, Biographien.

14. Königsberger, Leo, Hermann v. Helmholtz. II. Band. Mit zwei Bildnissen in Heliogravure. gr. 8⁰, XVI u. 383 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8; geb. in Leinw. M. 10; in Halbfranz. M. 12.

15. Königsberger, Leo, Hermann von Helmholtz. III. Band. Mit 4 Bildnissen und einem Brieffacsimile. gr. 8⁰, X u. 142 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4; geb. in Leinw. M. 5; in Halbfranz. M. 7.

Mechanik.

16. Appell, P., et Chappuis, J., Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première (latin-sciences on sciences-langues vivantes), conformément aux programmes du 31 mai 1902. In-18 Jésus. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2.75.

17. Appell, Paul, Traité de mécanique rationelle. Tome III. Équilibre et mouvements des milieux continus. gr. in-8, 558 p. avec 70 fig. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 17.

18. Boltzmann, Ludw., Über die Prinzipien der Mechanik. 2 akadem. Antrittsreden. gr. 8⁰, 48 S. Leipzig, Hirzel. M. 1.

19. Christen, T., Das Gesetz der Translation des Wassers in regelmäßigen Kanälen, Flüssen u. Röhren. gr. 8⁰, VII u. 169 S. m. 1 Tab. u. 1 lith. Taf. Leipzig, Engelmann. M. 5.

20. Dubley, R. J., Kinematics of machines: au elementary text-book. 8 vo, 8 + 379 pp. New-York, Wiley. Cloth $ 4.

21. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. IV. Bd.: Mechanik. Red. v. F. Klein. 2. Tl. 2. Heft. gr. 8⁰, S. 149—279 m. Fig. Leipzig, Teubner. M. 3.80.

22. Filon, L. N. F., On an approximate solution for the building of a beam of rectangular crosssection under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinous loading. 4 to. London, Dulau. 5 s.

23. Gedicus, Fr. Wilh., Das System der Kinetik im Grundriß. gr. 8⁰, VIII u. 78 S. Wiesbaden, Bergmann. M. 1.60.

24. Hollefreund, Karl, Die Elemente der Mechanik vom Standpunkte des Hamiltonschen Prinzips. 1. Tl. Progr. gr. 4⁰, 27 S. m. 2 Taf. Berlin, Weidmann. M. 1.

25. Loney, S. L., Solutions of the examples in the elements of Hydrostatics. 12 mo, 146 pp. Cambridge University Press. 5 s.

26. Manno, Richard, Theorie der Bewegungsübertragung als Versuch einer neuen Grundlegung der Mechanik. gr. 8⁰, VI u. 102 S. m. 6 Abb. Leipzig, Engelmann. M. 2.40.

27. Maurer, E. R., Technical Mechanics. Part I. 8 vo, 10 + 158 pp. New York, Wiley. Cloth. $ 2.

28. Thümmler, Fritz, Fliehkraft u. Beharrungsregler. Versuch einer einfachen Darstellung der Regulierungsfrage im Tolleschen Diagramm. gr. 8⁰, 153 S. m. 21 Fig. u. 6 lith. Taf. Berlin, Springer. M. 4.

Physik und Chemie.

29. Becker, Aug., Kristalloptik. Eine ausführl. elementare Darstellung aller wesentl. Erscheinungen, welche die Kristalle in der Optik darbieten, nebst einer historischen Entwicklung der Theorien des Lichts. gr. 8⁰, X u. 362 S. m. 106 Fig. Stuttgart, Enke. M. 8; geb. in Leinw. M. 9.

30. Berner, Otto, Untersuchungen über den Einfluß der Art u. der Wechsels der Belastung auf die elastischen u. bleibenden Formänderungen. gr. 8°, III u. 72 S. m. 5 Fig. u. 5 lith. Taf. Berlin, Springer. M. 2.

31. Blakesley, Thomas H., Geometrical Optics. An elementary treatise upon the theory, and its practical application to the more exact measurement of optical properties. Cr. 8 vo, 128 pp. with 33 diagrams. London, Whittaker. 2 s. 6 d.

32. Crapper, Ellis H., Electric and magnetic circuits. Cr. 8 vo, 379 pp. London, Arnold. 10 s. 6 d.

33. Décombe, L., La compressibilité des gaz réels. (Scientia phys.-mathém. Nr. 21.) In-8° écu, 99 p. avec figures. Paris, Naud. Frs. 2.

34. Doppler, Christian, Über das farbige Licht der Doppelsterne u. einiger anderer Gestirne des Himmels. Versuch einer das Bradleysche Aberrations-Theorem als integr. Teil in sich schließ. allgemeinen Theorie. Zur Feier seines 100. Geburtstages als 1. Veröffentlichung des nach ihm benannten physikal. Prinzips neu hrsg. v. F. J. Studnička. gr. 8°, 25 S. m. 1 Bildnis u. 1 Taf. Prag, Rivnáč. M. —.80.

35. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. V. Bd.: Physik. Red. v. A. Sommerfeld. 1. Tl. 1. Heft. gr. 8°, 160 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. M. 4.80.

36. Fortschritte, die, der Physik. Namen-Register nebst e. Sach-Ergänzungsregister zu Bd. 44 (1888) bis 53 (1897). Unter Mitwirkung v. E. Schwalbe, bearb. v. G. Schwalbe. gr. 8°, XVIII u. 1043 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 60.

37. Graetz, L., Die Elektrizität u. ihre Anwendungen. 10. verm. Aufl. gr. 8°, XVI u. 636 S. m. 540 Abb. Stuttgart, Engelhorn. M. 7; geb. M. 8.

38. Graetz, L., Kurzer Abriß der Elektrizität. 3. verm. Aufl. gr. 8°, VIII u. 197 S. m. 161 Abb. Stuttgart, Engelhorn. geb. in Leinw. M. 3.

39. Green, George, Mathematical Papers. Edited by N. M. Ferrers. Fac-simile reprint. Paris, Herrmann. Frs. 20.

40. Helmholtz, H. von, Vorlesungen über theoretische Physik, Band I^1. Einleitung zu den Vorlesungen über theoretische Physik hrsg. v. Arthur König und Karl Runge. gr. 8°, V u. 50 S. m. 4 Fig. u. 1 Porträt. Leipzig, Barth. M. 3; geb. M. 4.50.

41. Helmholtz, H. von, Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. VI. Theorie der Wärme. Hrsg. v. Franz Richarz. gr. 8°, XII u. 419 S. m. 40 Fig. Leipzig, Barth. M. 16; geb. M. 17.50.

42. Hittorf, W., Über die Wanderungen der Ionen während der Elektrolyse. (1853—1859.) 1. Tl. Hrsg. v. W. Ostwald. (Ostwalds Klassiker Nr. 21.) 2. erweit. Aufl. gr. 8°, 115 S. m. 1 Taf. Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.60.

43. Huygens, Christiaan, Abhandlung über das Licht. Worin die Ursachen der Vorgänge bei seiner Zurückwerfung u. Brechung u. besonders bei der eigentüml. Brechung des isländ. Spates dargelegt sind. (1678.) Hrsg. v. E. Lommel. In 2. Aufl. durchgesehen u. berichtigt v. A. J. v. Oettingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 20). 8°, 115 S. m. 57 Fig. Leipzig, Engelmann. kart. M. 2.

44. Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enthaltend die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Hrsg. v. Herm. J. Klein. 13. Jahrg. 1902. gr. 8°, VIII u. 366 S. m. 5 Taf. Leipzig, Mayer. M. 7.

45. Kayser, H., Die Elektronentheorie. Rede. gr. 8°, 32 S. Bonn, Röhrscheid & Ebbecke. M. —.80.

46. Opitz, Hans R. G., Über das erste Problem der Dioptrik. Progr. gr. 4°, 26 S. m. 5 Fig. Berlin, Weidmann. M. 1.

47. PERRIN, JEAN, Traité de chimie physique. Les principes. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.
48. REEVE, S. A., The thermodynamics of heat engines, including steam tables. 12 mo. 11 + 316 pp. New York, Macmillan. Cloth. $ 2.60.
49. REYNOLDS, OSBORNE, Papers on mechanical and physical subjects. Vol. 3. The sub-mechanics of the Universe. Roy. 8 vo, 272 pp. Cambridge University Press. 10 s. 6 d.
50. RODET, J., Distribution de l'énergie par courants polyphasés. 2e édition entièrement refondue. In-8⁰ avec 213 fig. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 15.
51. SCHREBER, K., Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?" und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichngn. im Text. gr. 8⁰, IV u. 126 S. Leipzig, Teubner. M. 3.60.
52. STEWART, R. WALLACE, The higher text-book of heat. The tutorial physics. Vol. 2. With numerous diagrams and examples. Cr. 8 vo, pp. VII—396. London, Clive. 6 s. 6 d.
53. TILDEN, W. A., The specific heats of metals and the relation of specific heat to atomic weight. Part 2. 4 to. London, Dulau. 1 s.
54. VOIGT, W., Thermodynamik. 1. Bd. Einleitung: Thermometrie, Kalorimetrie, Wärmeleitung. — 1. Tl.: Thermisch-mechanische Umsetzungen. (Sammlung Schubert XXXIX.) gr. 8⁰, XV u. 360 S. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.
55. VOLLER, A., Grundlagen und Methoden der elektrischen Wellentelegraphie (sogen. drahtlosen Telegraphie). Vortrag. Erweiterter Abdr. gr. 8⁰, 52 S. m. 17 Fig. Hamburg, Voß. M. 1.80.
56. WEINSTEIN, B., Thermodynamik und Kinetik der Körper. 2. Band. Absolute Temperatur. Die Flüssigkeiten. Die festen Körper. Thermodynamische Statik u. Kinetik. Die (nicht verdünnten) Lösungen. gr. 8⁰, XVIII u. 586 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 16.
57. WINKELMANN, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. 4. Bd. 1. Hälfte. Elektrizität und Magnetismus. I. gr. 8⁰, VI u. 384 S. m. 142 Abb. Leipzig, Barth. M. 12.

Tafeln.

58. BRUHNS, C., Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen. 6. Ster.-Ausg. gr. 8⁰, XXIV u. 610 S. (Auch engl., franz. u. italien. Ausg.) Leipzig, Engelmann. M. 4.20.
59. BULNHEIM, MAX, Hilfstafeln zur Ermittlung der Belastungszahlen f. die statischen Berechnungen von Hochbaukonstruktionen. qu. Fol. 37 S. Dresden, Kühtmann. kart. M. 3.
60. EGGERT, O., Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten für Koordinatenausgleichungen. Entworfen von Fr. Kreisel. 1 : 10000. 36,5 × 36,5 cm. Nebst Text (3 S. m. 1 Fig., gr. 8⁰) Berlin, Parey. M. 1.
61. FÖRSTER, W., u. LEHMANN, P., Die veränderlichen Tafeln des astronomischen u. chronologischen Teils des preußischen Normalkalenders für 1904. Berlin, statist. Bureau. M. 5.
62. MAC AULAY, ALEX., Five figure logarithmic and other tables. 18 mo. London, Macmillan. 2 s. 6 d.
63. PONS, L., Tables tachéométriques donnant, aussi rapidement que la règle logarithmique, tous les calculs nécessaires à l'emploi du tachéomètre. 2ème éd. In-8⁰. Paris, Béranger. Fr. 10.
64. WRONECKI, TH., Tables trigonométriques centésimales pour le tracé des courbes des voies de communication, augmentées de Tables tachéométriques et de nombreuses tables relatives à la pose des voies de fer. In-8⁰ avec 33 fig. Paris, Béranger. Fr. 12.50.

Verschiedenes.

65. Bibliographie der deutschen naturwissenschaftlichen Literatur. Hrsg. im Auftrage des Reichsamtes des Innern vom deutschen Bureau der internationalen Bibliographie in Berlin. 3. Bd. 1903/04. 1. Abtlg. Nr. 1. Mathematik, Mechanik, Physik, Chemie, Astronomie, Meteorologie. gr. 8°, 48 S. Jena, Fischer. M. 9.
66. Bürklen, O. Th., Formelsammlung u. Repetitorium der Mathematik. Sammlung Göschen Nr. 51.) 2. Aufl. 4. Abdr. 12°, 229 S. m. 18 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
67. Jouffret, E., Traité élémentaire de géometrie à quatre dimensions et introductions à la géometrie à *n* dimensions. gr. in-8, XXIX—213 p. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 7.50.
68. Klussmann, Rud., Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen, welche in den Schulschriften sämtlicher an dem Programmtausche teilnehmenden Lehranstalten erschienen sind. Nebst 2 Registern. 4. Bd. 1896—1900. gr. 8°, VIII u. 347 S. Leipzig, Teubner. M. 8.
69. Mathematical Questions aud Solutions from the Educational Times. Edit. by C. J. Marks. New series. Vol. 3. 8 vo. London, Hodgson. 6 s. 6 d.
70. Richard, Jules, Sur la philosophie des mathématiques. In-18, 250 p. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.25.
71. Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 74. Versammlung zu Karlsbad. 21.—27. IX. 1902. I. Die allgemeinen Sitzungen, die Gesamtsitzung beider Hauptgruppen u. die gemeinschaftlichen Sitzungen der naturwissenschaftl. und der medizinischen Hauptgruppe. gr. 8°, 264 S. m. 10 Abb. Leipzig, Vogel. M. 4.
72. Woolwich Mathematical papers. For admission into the Royal Military Academy. For the years 1893—1902. Edit. by E. J. Brooksmith. Cr. 8 vo. Macmillan. 6 s.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle einlaufenden Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Albrecht, Th., Resultate des internationalen Breitendienstes. Bd. I. (Zentralbureau der internationalen Erdmessung, Neue Folge der Veröffentlichungen Nr. 8.) 4°, I u. 173 S. m. 12 Tafeln. Berlin, Reimer.

Appell, P et Chappuis, J., Leçons de mécanique élémentaires, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 16.

Appell, P., Traité de mécanique rationelle. III. s. N. B. 17.

Baroni, Mario, Sulla ricerca di norme che determinino la stabilità delle costruzione in calcestruzzo armato. Relazione al X Congresso degli Ingegneri ed Architetti Italiani in Cagliari. Mila, Tipografia e litografia degli ingegneri.

Borel, Emile, Leçons sur les fonctions méromorphes professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par Ludovic Zoretti. In-8 avec fig. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3.50.

Bucherer, A. H., Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Leipzig, Teubner.

Coym, G., Geometrie der Ebene. Teil I: (Erster Jahreskursus). Anschauungskursus der Geometrie und Elementarkursus der Konstruktionslehre. Leipzig, Schneider. M. 1.

Décombe, L., La compressibilité des gaz réels, s. N. B. 33.

Eggert, O., Hilfstafel, s. N. B. 60.

Fabre, C., Aide-mémoire de photographie pour 1903, publié sous les auspices de la Société photographique de Toulouse. 28ième année. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.75; cartonné Fr. 2.25.

Freycinet, C. de, De l'expérience en géométrie. In-8, XX—175 p. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 4.

Gedicus, Fr. W., Das System der Kinetik im Grundriß, s. N. B. 23.

Giorgi, Giovanni, Unità razionali di elettromagnetismo. Riassunto di una comunicazione presentata al congresso dell' associazione elettrotecnica italiana il 13 ottobre 1901. (Estratto dell' „Ingegneria Moderna".) Napoli 1901.

— La trazione elettrica sulle ferrovie. Nota. (Estratto dall' „Elettricista".) Roma 1902.

— Il funzionamento del rocchetto di Ruhmkorff. Lettura fatta all' Assemblea generale di Torino dell' Associazione elettrotecnica italiana. (Estratto dagli Atti dell' Assoc. elettrot. ital.) Torino 1902.

— Il sistema assoluto M. Kg. S. (Estratto dall' „Elettricista".) Roma 1903.

Green, George, Mathematical papers, s. N. B. 39.

Gumlich, E., Präzisionsmessungen mit Hilfe der Wellenlänge des Lichts. (Vorträge u. Abhandlgn. hrsg. v. der Zeitschr. „Das Weltall" Heft III.) Berlin 1892, Schwetschke & Sohn.

Helmholtz, H. von, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. I^1, s. N. B. 40.

— Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, s. N. B. 41.

Humbert, C., Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques. gr. in-8. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 16.

Hundhausen, Johannes, Zur Atombewegung. Kritik und Neues. Leipzig, Barth. M. 1.20.

Jouffret, E., Géometrie à quatre dimensions, s. N. B. 67.

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. Leipzig, Teubner.

Königsberger, Leo, Hermann von Helmholtz. II. Bd., s. N. B. 14.

— Dasselbe. III. Bd., s. N. B. 15.

Koppe-Diekmanns Geometrie zum Gebrauch an höheren Unterrichtsanstalten. III. Tl. (2. Aufl.) Ausgabe für Reallehranstalten. Essen, Bädeker. geb. M. 3.20.

Kraus, Konrad, Grundriß der geometrischen Formenlehre für Lehrerinnen-Bildungsanstalten. gr. 8°, 208 S. m. 234 Holzschnitten. Wien, Pichlers Witwe & Sohn. geb. K. 2.40.

Krazer, Adolf, Lehrbuch der Thetafunktionen. (Teubners Sammlung, Bd. XII.) Leipzig, Teubner.

Leman, A., Über Schattenphänomen bei Finsternissen. Vortrag. (Vorträge u. Abhandlgn. hrsg. von der Zeitschr. „Das Weltall" Heft IV.) Berlin 1902, Schwetschke & Sohn.

Leo, N., Hat das Menschenleben einen Zweck? Naturwissenschaftliche Betrachtung. Berlin, Löwenthal. M. 1.50.

Manno, R., Theorie der Bewegungsübertragung, s. N. B. 26.

Nagaoka, H., Shinjō, S. u. Otani, R., Absolute Messung der Schwerkraft in Kyōto, Kanazawa, Tōkyō und Mizusawa mit Rerversionspendeln ausgeführt. (Reprinted from Journ. Sc. Coll. Imp. Univ. Tokyo, vol. XVI.) Tokyo 1902.

Nušl, Fr. et Frič, Josef Jan, Etude sur l'appareil circumzénithal. (Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohème. 1903.) Prague, Académie des Sciences de l'empereur François Joseph I.

d'Ocagne, Maurice, Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. In-4°, 63 p. Paris, Gauthier-Villars.

Ondracek, Josef, Analytische Geometrie ebener Kurven in Büschel-Koordinaten. I. Heft. Ebene Kurven in Normalen-Koordinaten erster Art. Wien, Gerolds Sohn. M. 1.20.

Perrin, J., Traité de chimie physique, s. N. B. 47.

Prytz, H., Om tal til fortsaettelse af regneundervisningen. gr. 8°, 32 S. København, Lehmann & Stage. 50 Øre.

Reynolds, Osborne, Papers on mechanical and physical subjects. Vol. III. s. N. B. 49.

Richard, Jules, Sur la philosophie des mathématiques. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.25.

Schlotke, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Dresden 1902, Kühtmann.
I. Teil. Spezielle darstellende Geometrie. 5. Aufl. M. 3.60; geb. 3.80.
II. „ Schatten- u. Beleuchtungslehre. 3. Aufl. M. 2; geb. M. 2.20.
III. „ Perspektive. 2. Aufl. M. 4.40; geb. 4.60.

— Lehrbuch der graphischen Statik. Zum Gebrauch für mittlere technische Lehranstalten, Bau-, Maschinen- u. Gewerbeschulen. 2. verbesserte u. vermehrte Aufl. Dresden 1902, Kühtmann. M. 4.80; geb. M. 5.

Schwanzer, Adolf, Repetitorium der Elementarmathematik. Zum Gebrauch für die Schüler der humanistischen Gymnasien und Realschulen, sowie für Privatstudierende. München, Kellerer. M. 3.

Wagner, Julius, Über den Anfangsunterricht in der Chemie. Nach der am 28. Februar 1903 in der Aula zu Leipzig gehaltenen Antrittsvorlesung. Leipzig, Barth. M. 1.20.

Weinstein, B., Thermodynamik u. Kinetik der Körper. 2. Bd., s. N. B. 56.

Winkelmann, A., Handbuch der Physik, s. N. B. 57.

Wölffing, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. In 2 Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. Leipzig, Teubner.

Yarkovski, Jean, Hypothèse cinétique de la gravitation universelle en connexion avec la formation des éléments chimiques. Moscou 1888.

Abhandlungsregister 1902.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

[Die Abhandlungen, welche mir und meinen Mitarbeitern nicht zugänglich waren, sind mit * bezeichnet.]

Abkürzungen.

A.A.F.S. Atti dell' Acc. dei Fisiocritici, Siena 4. serie 13.
A.A.I.G. Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des écoles spéciales, Gand 24.
A.A.M. Abh. der K. Bayr. Ak. der Wiss., München 21.
A.A.N. Atti della R. Acc. delle Scienze fis. e mat., Napoli 4.
A.A.P.M. Atti dell' Acc. Peloritana Messina 15—16.
A.A.S. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 23.
A.A.T. Atti della R. Acc. Torino 37.
A.C.P. Annales de Chimie et de Physique, Paris 27.
A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano 3. serie 7.
A.F. Comptes Rendus de l'Association franç. pour l'avancement des sciences 29 (Congrès d'Ajaccio).
A.F.G.P. Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 87—91.
A.G.L. Abh. der K. Sächs. Ges. der Wiss., Leipzig 27.
A.Gr. Archiv der Math. u. Phys., Leipzig 3. Serie 3—4.
A.H. Annalen der Hydrographie u. maritimen Meteorologie, Hamburg 30.
A.H.P. Annalen der Hydrographie, Petersburg 22—23.
A.I.G. Annali idrografici, Genova 2.
A.I.K.G. Akten des internat. Kongresses katholischer Gelehrter, München 5.
A.I.V. Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere et Arti, Venezia 8. serie 3.
A.J.B. The Astronomical Journal, Boston 21—32.
A.J.C. The Astrophysical Journal, Chicago 13—15.
A.J.S. American Journal of Science, New Haven 4. series 13—14.
A.J.U. Allgemeines Journal für Uhrmacherkunde, Halle 26.
A.M.A.P. Atti e Memorie della R. Acc. di Scienze, Lettere ed Arti, Padova 16.
A.M.T. Archives du Musée Teyler, Harlem 2 série 8.
A.N. Archives néerlandaises, Harlem 2 séries 7.
A.N.K. Astron. Nachrichten, Kiel 158; 160.
A.ofM. Annals of Mathematics, Cambridge Mass. 2. series 3.
A.P.L. Annalen der Physik, Leipzig 4. Serie 8—9.
A.R.L. Astronomische Rundschau Lussinpiccolo 3.
A.S.B. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Louvain 26.
A.S.G.N. Annales de la Societé géologique du Nord, Lille 29.
A.S.M.F. Annales de la Societé météorologique de France 50.
A.S.U.J. Annales Scientifiques de l'Université, Jassy 2.
A.T.K. Artilleri-Tidskrift, Kjöbenhavn 1901.
A.U.J. Acta et Commentationes Imp. Univ. Jurjev. 1901.
A.V.A.S. Bihang till K. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar, Stockholm 27.
B.A. Bulletin Astronomique, Paris 19.
B.A.B. Bulletin de l'Ac. Roy. des Sciences, des lettres et des Beaux Arts, Bruxelles 1901—02.

B.A.B.C. Bulletin de l'Association Belge de Chimie, Bruxelles 15.
B.A.Co. Oversigt der K. Vidensk. Selskabets Forhandlingar Kjöbenhavn. 1901.
B.A.M. Beiträge zur Akustik und Musikwissenschaft, Leipzig 3.
B.D. Bulletin des Sciences math., Paris 2. série 26.
B.D.M. Bolletino di Matematica, Bologna 1.
B.G.L. Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss., Leipzig 53—54.
B.H.Z. Berg- und Hüttenmännische Zeitung 1901.
Bi. Biometrica, Cambridge 1.
B.I.C. Bulletin international, Krakau 1901—02.
B.M.E. Bulletin des Sciences Math. et Phys. élémentaires, Paris 7.
B.M.N. Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Budapest 17.
B.R.A.G. Bulletin der Russ. Astronom. Gesellschaft, Petersburg 8.
B.S.A.F. Bulletin de la Société Astronomique de France 14.
B.S.B. Bulletin de la Société Scientifique, Bukarest 11.
B.S.B.A. Bulletin de la Société belge d'Astronomie, Bruxelles 6.
B.S.M.F. Bulletin de la Société Minéralogique de France, Paris 25.
B.S.V. Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, Lausanne 4. série 38.
B.U.K. Nachrichten der Universität Kiew 1901.
B.U.Ka. Nachrichten der Universität Kasan 1901.
B.U.W. Bulletin of the University of Wisconsin, Madison 2.
B.V.A.S. Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps Akad. Förhandlingar, Stockholm 58.
C. Časopis, Prag 31.
C.A.A. Verslagen der K. Ak. van Wetenschappen Amsterdam 9—10.
C.A.C. Berichte der Ak. Krakau 41.
C.I.A. Documents des Congrès internationaux d'Actuaires, Bruxelles 3.
C.I.E. Congrès international d'Electricité, Paris 1.
C.N. The Chemical News 85.
Co. Cosmos Paris 2. série 44.
C.P.L. Communications from the Physical Laboratory at the University, Leiden 72—76; 79.
C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris 134—135.
C.S.S. Comptes Rendus du Congrès des Sociétés savantes, Paris 1901.
D.M. Der Mechaniker, Berlin 10.
D.P.Z. Deutsche Photographenzeitung, Weimar 25.
D.V.M. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 11.
D.V.N. Verhandlungen der Deutschen Naturforscherversammlung, Leipzig 73 (Hamburg).
D.W.B. Das Weltall, Berlin 1.
D.Z.R. De Zee, Rotterdam 23.
E.M. L'enseignement mathématique, Paris 4.
E.M.W. The English Mechanic and World of Science, London 72—73.
E.N. Engineering News 45.
E.P. Električestvo, Petersburg 1901.
F.C. Forstwissenschaftliches Centralblatt, Berlin 24.
F.T. Mémoires de l'Ac. des Sciences, Toulouse 10. série 1.
G.M.B. Gazeta matematica, Bukarest 8.
G.Z. Geographische Zeitschrift, Leipzig 8.
H.H. Hansa, Hamburg 38.
I.A.M. Illustrierte aëronautische Mitteilungen, Strafsburg 6.
I.M. L'Intermédiaire des Mathématiciens 9.
I.P.F. Il Pitagora, Palermo 8—9.
J.A.V.M. Jahresbericht und Abhandlungen des naturwiss. Vereins, Magdeburg 1900—02.
J.B.A.A. Journal of the British Astronomical Association, London 11.
J.E.P. Journal de l'École Polytechnique, Paris 2. séries 7.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 152—153.
J.I.E.E. Journal of the Institution of Electrical Engineers, London 31.
J.M. Journal de Math. pures et appl. Paris 5. séries 7—8.
J.P. Journal de Physique, Paris 4. séries 1.
J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 6.
J.P.G.Z. Jahresbericht der Physikalischen Gesellschaft, Zürich 10.
J.R.M.S. Journal of the Roy. Microscopical Society, London 1901.
J.R.P.C.G. Journal der russ. physicochemischen Gesellschaft, Petersburg 34.
J.S.G. Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur, Breslau 78.
J.S.G.B. Jahrbuch der schiffsbautechnischen Gesellschaft, Berlin 2.
J.T. Mitteilungen der mathematisch-physikalischen Gesellschaft, Tokio 8—9.

J.U.S.A. Journal of the United States Artillery, Fort Munroe, 1901—02.
J.V.C. Jahresbericht des naturwiss. Vereins, Crefeld 1900—1901.
K.L. Kosmos, Lemberg 24.
K.Z. Kriegstechnische Zeitschrift, Berlin 5.
L.E. L'Elettricista, Roma 10.
M. Mathesis, Gand 3. séries 2.
M.A. Math. Annalen, Leipzig 55—56.
M.A.C.B. Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes, Barcelona 3. serie 4.
M.A.G. Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, Wien 1902.
M.A.G.S. Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens, Pola 29.
M.A.L.R. Memorie della R. Acc. dei Lincei, Roma 17.
M.A.Ly. Mém. de l'Ac. des Sciences, Lyon 3. séries 6.
M.A.M.F. Mitteilungen aus dem Markscheiderwesen, Freiberg, Serie 4.
M.A.P. Mémoires de l'Ac. des Sciences, Paris 1902.
M.A.T. Memorie della R. Acc. di Torino 2. serie 51.
M.B. Math. Naturw. Mitteil., Stuttgart 2. Serie 4.
M.F.I. Mitteilungen über Forschungen auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 5—6.
M.H. Monatshefte f. Math. u. Physik, Wien 13.
M.L.A.O. Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium, Lund 2—3; 13—15; 18.
M.M.F. American Math. Monthly, Springfield 9.
M.N.A.S. Monthly Notices of the Astronomical Society, London 61—62.
M.P.D. Mitteilungen der Pollichia, Dürkheim 17.
M.P.G.Z. Mitteilungen der physikalischen Gesellschaft, Zürich 1901—1902.
M.P.L. Mathematikai és physikai lapok, Budapest 10.
M.P.M. Natuur en Geneeskundig Congres, Amsterdam 1901.
M.P.O. Bote der Experimentalphysik und Elementarmathematik, Odessa 27—28.
M.R.B. Marine-Rundschau, Berlin 12.
M.S.B. Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Nat., Bordeaux 6 série 1.
M.S.Co. Det K. Danske Videnskabernes Selskabets Skrifter, Kjöbenhavn 6. Raekke 9—10.
M.S.P.A.O. Miscellaneous Scientific Papers of the Alleghany Observatory 2.
M.S.S.I. Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, Catania 28—31.
M.T.E. Mathematikai és természettudományi értesítö, Budapest 18—19.
M.T.G.W. Mitteilungen des Technologischen Gewerbemuseums, Wien 2. Serie 12.
M.U.S.B. Mitteilungen der Universitätssternwarte Breslau 1.
M.V.A.P. Mitteilungen des Vereins von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik, Berlin 11.
M.V.T. Mitteilungen des Verbands der österreich-ungarischen Versicherungstechniker, Wien 1902.
M.W.R. Monthly Weather Review, Washington 29—30.
M.Z. Meteorologische Zeitschrift, Wien 19.
N. Nature 66.
N.A. Nouvelles Annales de Math. 4. séries 2.
N.A.U. Nova Acta Reg. Soc. Scientiarum, Upsala 3. Serie 20.
N.C.P. Il Nuovo Cimento, Pisa 5. serie 2—4.
N.G.G. Nachrichten von der K. Ges. der Wiss., Göttingen 1901.
N.M.L. Nautical Magasine, London 70.
N.M.N. Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, Christiania 40.
N.O. Natur und Offenbarung, Münster 47—48.
N.R. Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 17.
N.S. Natur und Schule, Leipzig 1.
Ö.V.Z. Österreichische Versicherungszeitung, Wien 29.
P.A. Popular Astronomy, Northfield Miss. 9.
P.A.O.B. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums, Budapest 2.
P.A.O.P. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums, Potsdam 12.
P.A.S.F. Publications of the Astrophysical Society for the Pacific, San Francisco 13.
P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 11.
P.E.M.S. Proceeding of the Edinburgh Math. Society, Edinburgh 20.
P.L.M.S. Proceedings of the London Math. Society 34.
P.M. Philosophical Magazine 6. series 3—5.
P.M.R. Periodico di Matematica, Livorno 2. serie 4.

Pol.M. Il Politecnico, Milano 1900—1901.
P.P.S. Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 41.
P.P.S.E. Proceed. of the Physical Society, Edinburgh 1900—1901.
P.P.S.G. Proceed. of the Philos. Soc., Glasgow 31—32.
P.P.S.L. Proceed. of the Phys. Soc., London 18.
P.R. The Physical Review, New York 14—15.
P.R.I. Proceedings of the Royal Institutions of Great Britain, London 16.
P.R.L. Physical Review, Lancaster 13.
P.R.S.E. Proceed. of the Roy. Soc., London 69.
P.S.B. Procès verbaux de la Soc. des Sciences, Bordeaux 1900—1901.
P.S.K. Publikationen der Sternwarte Kiel 11.
P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 3—4.
Q.J. Quarterly Journal of Math., London 33.
Q.J.M.S. Quart. Journal of the Meteor. Soc., London 28.
R.A. Revue d'Artillerie, Paris 1901.
R.A.G. Rivista di artigleria e genio, Roma 1900—1901.
R.A.L.R. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Roma 5. serie 11 A, B.
R.A.N. Rendiconti della R. Acc. di Scienze fis. et mat., Napoli 3. serie 8.
R.B.A. Reports of the Britisch Association for the advancement of Science 71 (Meeting at Glasgow).
R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 5.
R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Mat., Palermo 16.
R.F.M. Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali, Pavia 3.
R.G.M.M. Revista general de Marina, Madrid 49.
R.G.O. Revue générale des Sciences, Paris 12—13.
R.I.H. Revue internationale d'Horlogerie 1.
R.I.L. Rendiconti del R. Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere, Milano 2. serie 34—35.
R.M.B. Revista maritima brazileira, Rio de Janeiro 37—38.
R.M.M.P. Revue maritime, Paris 147.
R.M.R. Rivista marittima, Roma 34.
R.Q.S. Revue de questions scientifiques, Louvain 1901.
R.S. Revue Scientifique 4. séries 15; 17.
R.T. La Rivista Tecnica 1.
R.T.C. Rivista di Topografica e Catasto 14.
R.T.C.P.B. Recueil de Travaux Chimiques des Pays-Bas et de la Belgique 2. séries 20.
S. Science, New York 2. series 13—16.
S.A.M. Sitzungsber. der math.-phys. Kl. der K. Bayr. Ak. der Wiss., München 1902.
S.A.W. Sitzungsber. der math.-nat. Kl. der K. K. Ak. der Wiss., Wien 110—111.
S.G.M. Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften, Marburg 1901—1902.
S.I.D. Sitzungsber. der naturwiss. Gesellschaft Isis, Dresden 1902.
S.M. Bulletin de la Soc. Math. de France 29—30.
S.M.Am. Bulletin of the American Math. Soc. 9.
S.M.B. Sitzungsberichte der math. Gesellschaft, Berlin 1.
S.M.Ka. Bulletin der physico-mathematischen Gesellschaft, Kasan 11.
S.M.Kh. Mitteilungen der math. Gesellschaft, Charkow 2, Serie 7.
S.M.L. Science Monthly, Lancaster 60.
S.M.M. Sammelschrift der Math. Gesellsch. Moskau 22—23.
S.N.G.B. Sitzungsb. der niederrhein. Ges. f. Natur- und Heilkunde, Bonn 1901.
S.P. Bulletin de la Soc. Philomathique, Paris 9. série 3.
S.P.M.E. Sitzungsber. der phys. med. Gesellsch., Erlangen 33.
S.P.V.K. Sitzungsb. des physiolog. Vereins, Kiel 1899—1900.
T.A.E.S. Transactions of the Amer. Electrochemical Soc. 1.
T.M.W. Terrestrial Magnetism, Washington. 7.
T.N.Z.I. Trans. and Proc. of the New Zealand Institute, Wellington 34.
T.P.B. Taschenbuch für Präcisionsmechaniker, Berlin 3.
T.R.I.A. Trans. of the Roy. Irish Acad., Dublin 31—32.
T.R.S.L. Philos. Trans. of the Roy. Soc., London 198 A.
T.S.M.Am. Transact. of the Amer. Math. Soc., New York 3.
T.W. Praze matematyzno-fizyzne, Warschau 13.
U.C. The University Chronicle, Berkeley 3.
U.M.N. Unterrichtsblätter für Math. u. Naturwiss., Berlin 8.
V.I.G.C. Verhandlungen des internationalen Geographenkongresses, Berlin 7.

V.N.Z. Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft. Zürich 47.
W.A.B. Das Weltall, Berlin 2.
W.M. Wiadomosci matematyczne, Warschau 6.
Z.B.B. Zeitschr. f. Binnenschiffahrt, Berlin 8.
Z.B.D. Zeitschr. des bayr. Dampfkesselrevisionsvereins, München 5.
Z.B.W. Zeitschrift für Beleuchtungswesen 7.
Z.G.V. Zeitschr. f. die gesamte Versicherungswissenschaft, Berlin 1901.
Z.K.M. Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie, Berlin.
Z.L.H. Zeitschr. f. Lüftung und Heizung, Berlin 7.
Z.Ö.C.P. Zeitschr. f. öffentliche Chemie, Plauen 7.
Z.P. Zeitschrift für phys. u. chem. Unterricht 15.
Z.P.C. Zeitschr. f. physikalische Chemie, Leipzig 39—42.
Z.P.P. Zeitschrift f. Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Leipzig 27.
Z.S. Zeitschr. f. Math.u. Phys., Leipzig 48.

A. Allgemeines und Philosophie.

Geschichte der angewandten Mathematik.

1. *R. Mehmke.* Wer hat den Läufer des Rechenschiebers zuerst erfunden? Z.S. 48. 134.

Absolutes Maßsystem.

2. *H. Andriessen.* Das absolute Maßsystem. U.M.N. 8. 50.

3. *N. A. Hesehus.* Die gemeinsame Dimensionalität des elektrischen Potentials und der Oberflächenspannung. P.Z. 3. 561.

Logikkalkül.

4. *P. S. Poretsky.* Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. S.M.Ka. 11. 17.

B. Analysis und Algebra.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

5. *P. A. Nekrasov.* Novyja osnovanija učenija o verojatnostjach summ i srednich veličin. (Neue Grundlagen der Theorie der Summen und Mittelwerte.) S.M.M. 23. 41. 173.

6. *P. Mansion.* Théorèmes de Jacques Bernoulli. A.I.K.G. 5. 427.

7. **d'Arçais.* Un problema di calcolo della probabilità. A.M.A.P. 16.

8. **A. Badoureau.* Récréation mathématique. R.S. (4.) 17. 650.

9. *C. Moreau.* Solution d'un problème de probabilité. A.Gr. (3) 4. 184.

10. *H. Delannoy.* Problème de probabilité. I.M 9. 97.

11. **I. I. Bjelankin.* Über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, die sich wiederholen (russ.). B.U K. 1902 Nr. 2 (7).

12. *W. Gosiewski.* O zadaniu petersburskiem (Über das Petersburger Problem). W.M. 6. 167.

13. **Whitney.* Evolution and the theory of probability. U.C. 3.

Siehe auch 763.

Methode der kleinsten Quadrate.

14. *K. Bohlin.* Sur l'extension d'une formule d'Euler. B.V.A.S. 58. 779.

15. **A. L. Andreini.* Intorno a 2 teoremi relativi alla teorica dei minimi quadrati. R.T.C. 14. 152.

16. *E. Goedseels.* Sur l'application de la méthode de Cauchy aux moindres carrés. A.S.B. 26. 148.

Fehlerrechnung.

17. **A. v. Obermayer.* Ein Apparat zur Veranschaulichung des Fehlergesetzes. M.A.G. 30. 130.

18. **L. Hermann.* Kurvenanalyse und Fehlerrechnung. A.F.G.P. 89. 600.

19. **E. Lindelöf.* Zur Frage von der Bedeutung der Fehlerrechnung bei der harmonischen Analyse von Kurven. A.F.G.P. 87. 597.

20. *C. Trépied.* Influence des erreurs instrumentales sur les coordonnées rectilignes des astres photographiés. C.R. 134. 1097.

21. **Luedecke.* Methode zum Messen der Abweichungen der Bohrlöcher von ihrer ursprünglichen Richtung. B.H.Z. 1901. 276.

22. *K. Pearson.* On the mathematical theory of errors of judgement. T.R.S.L. 198. A. 235.

23. *V. Baggi.* Sul modo di eliminare l'errore dovuto alla disugualianza dei diametri dei collari nei livelli a cannocchiale mobile. A.A.T. 37. 545.

24. **V. Baggi.* Proposto di un nuovo lipo di livello a cannocchiale atto ad eliminare qualsiasi errore strumentale. R.T.C. 14. 161.

Siehe auch 90; 249; 703.

Politische Arithmetik.

25. *D. Hector.* Mathematical treatment of the problem of production, rent interest and wages. T.N.Z.I. 34. 514.

26. **A. Torrents y Monner.* Comparacion matematica entre los distintos modos de calcular les descuentos simple y compuesto. M.A.C.B. (3) 4. No. 10,

Siehe auch 22.

Rentenrechnung.

27. *C. Dizler.* Die Auszahlungsweise in ihrem Einfluß auf die Rentenwerte. Ö.V.Z. 29. No. 45.

Siehe auch 25.

Statistik.

28. *E. Ökinghaus.* Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwicklung und Ausdehnung und die formale Bevölkerungstheorie. M.H. 13. 294.

29. *K. Pearson.* Mathematical contributions to the theory of evolution XI. P.R.S.L. 89. 330.

30. *M. A. Lewenz* and *M. A. Whiteley.* Data for the problem of evolution in man. Bi. 1.

31. *E. G. Brown.* On the phenomena of variation and their symbolic expression. T.N.Z.I. 34. 519.

32. **K. Pearson.* On the systematic fitting of curves to observations and measurements I. Bi. 1.

33. *E. Huber.* Die neueren englischen Sterblichkeitsmessungen. M.V.T. 1902. Heft 6.

34. *K. Pearson.* On the inheritance of the mental characters in man. P.R.S.L. 69. 153

35. **K. Pearson.* On the correlation of intellectual ability with the size and shape of the head. P.R.S.L. 69. 333.

36. **W. Bateson.* Heredity differentiation and other conceptions of biology. P.R.S.L. 69. 193. — *K. Pearson* 450.

Siehe auch 13.

Versicherungsmathematik.

37. *B. Oster.* Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien. A.G. (3) 4. 44.

38. *M. E. Hamza.* Note sur la théorie mathématique de l'assurance contre le risque d'invalidité. C.I.A. 3. 154.

39. *T. Falkowicz.* Die Invalidität mit Ausschluß des Unfallrisikos zum Gebrauch für Arbeiterpensionskassen. M.V.T. 1902. Heft 7.

40. *G. Bohlmann.* Ein Satz von Wittstein über das durchschnittliche Risiko. M.V.T. 1902. Heft 7.

41. *K. Dickmann.* Die doppelte Gruppierung der Versicherungen der Prämienreserve. Z.G.V. 3. 56.

42. *E. Hoppe.* Gemischte Kapitalversicherung mit unbedingtem Anspruch auf Prämienrückgewähr. Ö.V.Z. 29. No. 25 ff.

43. *H. Onnen* et *J. H. Peek.* Méthode de détermination et de répartition des bénéfices réalisés dans l'assurance sur la vie. C.I.A. 3. 278.

44. *Sprague.* Berechnung des Abzugs vom Deckungskapital beim Rückkauf. Z.G.V. 2. Ergänzungsheft.

Spiele.

45. *H. Delannoy, H. Brocard.* Question de dominos. I.M. 9. 62.

46. *F. Fitting.* Weiterer Beitrag zur verallgemeinerten Rösselsprungaufgabe. A.Gr. (3) 3. 136.

47. *Duporcq.* Problème du billard elliptique. I.M. 8. 29.

48. *C. Flye Ste Marie.* Le jeu de la Tchouka. I.M. 9. 207.

Siehe auch 12.

Numerisches Rechnen.

49. **F. Ferrol.* Ein Beitrag zum praktischen Rechnen. D.W.B. 1. 206.

50. *L. D. Ames.* Evolution of slowly convergent numbers. A.S.M. 3. 185.

51. *R. Grilli.* Metodo di Horner per eseguire la divisione di due polinomi. P.P.F. 8. 86.

52. *J. W. Butters.* On decimal coinage and approximation. P.E.M.S. 20. 50.

Analytische Näherungsmethoden.

Siehe 707.

Numerische Gleichungen.

53. *F. Giudice.* Esistenza, calcolo e differenze di radici d' equazioni numeriche. R.C.M.P. 16. 180.

54. *A. Pellet.* Calcul des racines d'une équation. I.M. 9. 156.

55. *F. J. van den Berg.* Over Newtons benaderingsleerwijze voor de oplossing van vergelijkingen. C.A.A. 9. 53.

56. *C. A. Mebius.* Auflösung der Gleichungen 3., 4. und 5. Grades durch besondere Funktionen. B.V.A.S. 58. 105.

Interpolation.

57. *C. Alasia.* Un capitol al teoriei interpolatiunii (Ein Kapitel aus der Theorie der Interpolation). G.M.B. 8. 55.

58. **T. C. Hudson.* A new method of interpolation. M.N.A.S. 62. 17.

59. **R. T. A. Innes.* On interpolation. P.A. 9. 389.

60. *N. V. Bugaev.* O rjade podobnom rjadu Lagranža (Über eine Reihe ähnlich der Reihe von Lagrange). S.M.M. 22. 574.

61. **H. S. Davis.* Note on the interpolation of logarithms. A.J.B. 21. 143.

62. **J. Hartmann.* Über eine einfache Interpolationsformel für das prismatische Spektrum. P.A.O.P. 12. Anhang 1.

Mittelwerte.

63. **H. C. Plummer.* Note on the principle of the arithmetic mean. M.N.A.S. 62. 545.

Siehe auch 5; 209.

Harmonische Analyse.

64. *L. Grabowski.* Theorie des harmonischen Analysators. S.A.W. 110. 717.

Siehe auch 18; 19; 794.

C. Geometrie.

Nomographie.

65. *M. d'Ocagne.* Sopra alcuni principi elementari di nomografia. P.M.R. (2) 4. 247.

66. **Ricci.* La nomografia. R.A.G. 1900 Dez. 1901 Jan.

67. *M. d'Ocagne.* Sur quelques travaux relatifs à la nomographie. B.D. (2) 26. 67.

68. *—. Sur la représentation nomographique des formules à 3 variables. R.A. 1901 Sept.

69. **G. Boccardi.* Di alcuni diagrammi astronomici. M.S.S.J. 29. 175.

70. **Molfino.* Nomogrammi dell' azimut. A.J.G. 2.

Siehe auch 375.

Graphischer Kalkul.

71. **G. Arnoux.* Arithmétique graphique. A.F. 29. 31.

72. *K. T. Vahlen.* Über kubische Konstruktionen. A.Gr. (3) 3. 112.

73. *J. Sobotka.* Úvahy o grafickém integrováni differencialnich rovnic hlavně linearných prvého řádu. (Betrachtungen über die graphische Integration von Differentialgleichungen, insbesondere der linearen 1. Ordnung). C. 31. 265.

74. *N. E. Delaunay.* Grafičeskoe postroenie elliptičeskich i nekotorych ultraelliptičeskich funkcij. (Graphische Konstruktion der elliptischen und einiger ultraelliptischen Funktionen.) S.M.M. 23. 24.

75. **S. Stokes.* Keplers Problem. E.M.W. 72. 530. — S.G.B. 576.

76. **S. B. G.* Graphical method of finding the excentric anomaly. E.M.W. 72. 491.

Siehe auch 80; 117; 420; 562; 668; 701; 706.

Winkelteilung.

77. *E. Wölffing.* Bibliographie der 3- und n-Teilung des Winkels III. M.B. 4. 75.

78. *H. Schöler.* Angenäherte n-Teilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal. A.Gr. (3) 4. 128.

79. *E. Lampe.* Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln. A.Gr. (3) 4. 130.

80. *E. B. Escott, N. Quint, Goulard.* Constructions graphiques approchées des polygones réguliers de 7, de 9 et de 11 côtés. I.M. 9. 238.

Siehe auch 184.

Kurven.

81. *C. Juel.* Inledning i laeren om de grafiske Kurver. M.S.Co. (6) 10. 1.

Siehe auch 654.

Verbindungskurven.

82. **A. Neuber.* New device for drawiny railway curves. E.N. 45. 249.
83. **C. Daviso.* Le svolte stradali a due cerchi circolari. R.T.C. 14. 173.
84. **E. E. Woodman.* A problem in railway location: reserve curve connecting two given points. E.N. 45. 266. — *C. B. Breed* 397. — *R. A. Thompson* 398.

Geometrische Näherungsmethoden.

85. *B. Carrara.* I 3 problemi classici degli antichi, in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 3. 296; 481; 696.
86. *J. E. Böttcher.* Anschauliche Kreisberechnung. U.M.N. 8. 113.
87. *T. Muir.* Formula for the perimeter of an ellipse. N. 66. 174.

Inhalte.

88. **F. T. Lewis* etc. Rapid earth work calculating; prismoidal correction formulae. E.N. 45. 30; 31; 170; 190. 286.

Mechanische Quadratur.

89. **E. Strömgren.* Über mechanische Integration und deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiete des Dreikörperproblems. M.L.A.O. 13.

Rechenapparate.

90. **H. Sossna.* Ergebnisse einer Zuverlässigkeitsuntersuchung mit der Rechenmaschine Brunsviga. M.A.M.F (2) 4. 43.
91. *T. H. Blakesley.* On a method of mechanically obtaining ϑ from the hyperbolic trigonometric functions of ϑ. P.M. 4. 238.
92. *N. Delaunay.* Sur les calculateurs cinématiques des fonctions elliptiques. B.D. (2) 26. 177.

Rechenschieber.

93. **H. Thiele.* Über die Verwendung des Rechenschiebers im Laboratorium. Z.Ö.C.P. 7. 467.

Siehe auch 1.

Geometrischer Kalkul.

94. *F. L. Hitchcock.* On vector differentials. P.M. 3. 576.

Quaternionen.

95. *F. Daniels.* Sur le calcul des quaternions. E.M. 4. 111.
96. **A. L. Dixon.* On the geometrical interpretation of a quaternion. Q.J. 33. 271.
97. **C. J. Joly.* The interpretation of a quaternion as a point symbol. T.R.I.A. 32. 1.
98. **A. S. Hathaway.* Quaternion space. T.S.M.Am. 3. 46.
99. **C. J. Joly.* On quaternion arrays. T.R.I.A. 32. 17.
100. *Combebiac.* Calcul des triquaternions. J.E.P. (2) 7. 101.

Zeichenwerkzeuge.

101. *A. Adler.* Zur Theorie der Zeicheninstrumente. S.M.B. 1. 26.
102. *J. Kürschak.* Das Streckenabtragen. M.A. 55. 597.
103. *C. Pagliano.* Sull' uso del compasso di apertura fissa nella risoluzione dei problemi della geometria elementare e sulla sostituzione di un disco al predetto compasso. B.D.M. 1. 201.
104. *J. N. Miller.* On an instrument for trisecting any angle. P.E.M.S. 20. 7.
105. *W. R. Ransom.* A mechanical construction of confocal conics. A. of M. 3. 164.

Siehe auch 92.

Darstellende Geometrie.

106. *A. Adler.* Zur sphärischen Abbildung der Flächen und ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie. D.V.M. 11. 271.
107. *A. Hume.* Meridian and transverse sections of helicoids of uniform pitch. M.M.F. 9. 123.

Projektion.

108. *G. Hauck.* Über uneigentliche Projektionen. S.M.B. 1. 34.
109. *G. Hauck.* Über die Beziehungen zwischen 3 Parallelprojektionen eines räumlichen Systems. D.V.M. 11. 265. D.V.N. 73. 24.
110. *S. L. Penfield.* On the use of the stereographic projection for geographical maps and sailingcharts. A.J.S. (4) 13. 245; 347.

111. *H. Schmidt.* Die stereoskopische Projektion. D.P.Z. 25. 844.

Siehe auch 730.

Perspektive.

112. *A. v. Öttingen.* Eine Forderung der malerischen Perspektive vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet. B.G.L. 53. 443.

Photogrammetrie.

113. **B. Hasselberg.* Sur une équation personnelle dans la mesure des clichées spectroscopiques. M.S.S.I. 31.

114. *P. Henry.* Influence de la grandeur photographique des étoiles sur l'échelle de réduction d'un cliché. C.R. 134. 1483.

Siehe auch 20.

Kristallographie.

115. **H. Dufet.* Notices crystallographiques. B.S.M.F. 25. 38.

116. *J. G. Goodchild.* Simpler methods in crystallography. P.P.S.E. 1900—1901. 403.

117. *S. L. Penfield.* Solution of problems in crystallography by means of graphical methods. A.J.S. 14. 249.

118. **A. Schmidt.* Über die Klassifikation der Krystalle (ung.). M.T.E. 18.

119. **V. Goldschmidt.* Über Winkelprojektionen. Z.K.M. 36. 388.

120. **J. Beckenkamp.* Die vicinalen Flächen und das Rationalitätsgesetz. Z.K.M. 36. 111.

Modelle.

121. *V. Snyder.* Models of the Weierstrass Sigma function and the elliptical integral of the second kind. M.M.F. 8. 121.

122. *F. Schilling.* Neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie und ihre Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen. D.V.M. 11. 268; D.V.N. 73. 23.

D. Mechanik.

Prinzipien der Mechanik.

123. *Combebiac.* Les idées de Hertz sur la mécanique. E.M. 4. 247.

124. **H. A. Lorentz.* Eenige beschouwingen over de grondstellingen der mechanica. C.A.A. 10. 876.

125. *R. Heger.* Energetik im Unterricht. U.M.N. 8. 58.

126. **P. Duhem.* Sur quelques extensions récentes de la statique et de la dynamique. R.Q.S. 1901 Juillet.

127. *T. Schwartze.* Dynamische Betrachtungen über mechanische Fundamentalbegriffe. U.M.N. 8. 87.

128. **J. Geyser.* Zum Begriff der Bewegung. N.O. 48. 52.

129. **C. Fenzl.* Messender Versuch über den Zusammenhang von Bewegungsgröße u. Druck. Z.P. 15. 141.

130. *C. H. Hinton.* The recognition of the fourth dimension. B.S.W. 14. 179.

131. **O. Reynolds.* On the sub-mechanics of the Universe. P.R.S.L. 69. 425.

132. *C. A. Laisant.* Analogies entre les courbes funiculaires et les trajectoires d'un point mobile. N.A. (4) 2. 243.

Siehe auch 600.

Kinematik.

133. *R. v. Lilienthal.* Die Geometrie der Bewegung in ihrer Anwendung auf die Differentialgeometrie. D.V.N. 73. 6.

134. *K. T. Vahlen.* Über Bewegungen und komplexe Zahlen. M.A. 55. 585.

135. **J. Cardinaal.* Over de beweging van veranderlijke stelsels. C.A.A. 10. 560; 687.

136. *G. O. James.* Note on the projection of the absolute acceleration in relative motion. S.M.Am. 9. 143.

137. *F. Kraft,* Équivalence du mouvement d'une ligne droite invariable σ au déplacement d'une position donnée σ_1 à une autre position donnée σ_2. E.M. 4. 347.

138. *F. Kraft.* Équivalence des rotations autour d'axes parallèles et des translations d'un système invariable. E.M. 4. 175.

139. *G. Lévy.* Sur les mouvements pour lesquels il existe plusieurs centres d'aires. N.A. (4) 2. 97.

140. *G. Fubini.* Sugli spazi a quattro dimensioni che amettono un gruppo continuo di movimenti. R.A.L.R. 11 B. 53.

141. **V. Rouquet.* Note sur la surface réglée engendrée par une droite faisant partie d'un système invariable mobile. F.T. (10) 1. 9.

142. *R. F. Muirhead.* Note on the theory of rolling of one rigid surface on another. P.E.M.S. 20. 8.

143. *G. Koenigs.* Sur l'assemblage de deux corps. C.R. 135. 343.

Siehe auch 122.

Schraubenrechnung.

144. *A. Grünwald.* Sir Robert S. Ball's lineare Schraubengebiete. Z.S. 48. 49.

145. **R. S. Ball.* On further developments of the theory of screws. T.R.I.A. 31. 473.

Mechanismen.

146. *J. Réveille.* Note sur un système articulé. N.A. (4) 2. 127.

147. **G. Picciati.* Le funzione di Weierstrass nella cinematica del quadrilatero articulato. A.I.V. (8) 3. 301.

148. *C. Burali Forti.* Ingranaggi piani. A.A.T. 37. 391.

149. *E. Delassus.* Sur les engrenages à contact ponctuel. S.M. 30. 43.

Siehe auch 92; 122.

Statik.

150. *C. Lagrange.* Sur la prétendue indétermination des réactions dans les équations de l'équilibre des corps indéformables B.A.B. 1901. 428. 535.

151. **D. Seiliger.* Über einen Fundamentalsatz der Statik eines ähnlich veränderlichen Systems (russ.). B.U.Ka. 1901. 75.

152. **G. Lehr.* Composition des forces parallèles. B.M.E. 7. 33.

153. *A. Dittrich.* Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati. (Wie muß man die Verbindungen und Kräfte wählen, damit ein gegebenes System derselben sich verwirklichen läßt). C. 31. 283; 406.

154. *L. Gümbel.* Der transversal belastete Stab mit unverrückbaren oder nach bestimmtem Gesetze und Richtung der Achse nachgiebigen Auflagern. D.V.N. 73. 86.

Siehe auch 271—273.

Graphische Statik.

155. *K. Skutsch.* Graphische Zerlegung einer Kraft in 6 Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien. S.M.B. 1. 59.

156. *M. Paretti.* Contributo alla trattazione grafica dell' arco continuo su apoggi elastici. M.A.T. 51. 307.

Schwerpunkte.

157. *M. d'Ocagne.* Sur les barycentres, cycliques dans les courbes algébriques. S.M. 30. 83.

158. *E. Wastcels.* Sur le centre de gravité des figures sphériques. M. (3) 2. 217.

Momente.

159. **Jorini.* Singolarità nei valori dei momenti resistenti. Pol.M. 1901. Aug. Sept.

160. *S. Jolles.* Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. A.Gr. (3) 4. 100.

161. **G. K. Suslow.* Über die Reaktionen (russ.). B.U.K. 1901. No. 11b.

Kettenlinien.

162. **Aliquò-Mazzei.* Sull' equilibrio delle linee telegrafiche aree considerate come curve funicolari. R.A.G. 1901. Oct. Nov.

Siehe auch 132.

Dynamik des Punktes.

163. *R. Mehmke.* Anschauliche Beschreibung einiger Bewegungen. M.B. (2) 4. 65.

164. *E. Daniele.* Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano. R.A.L.R. 11 A 362; 427.

165. *E. Daniele.* Intorno ad alcuni particolari movimenti di un punto sopra une superficie. R.A.L.R. 11 B 4.

166. *C. Maltézos.* Sur la chute des corps dans le vide et sur certaines fonctions transscendantes. N.A. (4) 2. 197.

Siehe auch 132.

Zentralbewegung.

167. *V. Jamet.* Sur la théorie des forces centrales. N.A. (4) 2. 348.

168. *C. H. C. Grinwis.* De kinetische energie der centrale beweging. C.A.A. 9. 211.

169. *P. J. Suchar.* Sur une loi de force centrale déterminée par la considération de l'hodographe. N.A. (4) 2. 123.

Pendel.

170. *D. Efremov.* Novyj vyvod formuly majatnika (Neue Herleitung der Pendelformel). M.P.O. 28. 106.

171. *A. Denizot.* O pewnem zagadnieniu Eulera o wahadle (Über eine gewisse Aufgabe Eulers über das Pendel). T.W. 13. 1.

172. *Greenhill.* Le pendule simple sans approximations. N.A. (4) 2. 241.

173. *M. Sparre.* Sur le mouvement du pendule conique dans le cas des petites oscillations. A.S.B. 26. 133.

174. *G. Neumayr.* Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels auf absolutem Wege. A.A.M. 21. 479.

Siehe auch 187.

Dynamik des Körpers.

175. *L. Lecornu.* Sur les petits mouvements d'un corps pesant. S.M. 30. 71.

176. *G. Combebiac.* Sur la force vive utilisable. S.M. 29. 314.

177. **P. V. Voronec.* Bewegungsgleichungen eines schweren Körpers, der auf einer horizontalen Ebene ohne zu gleiten rollt (russ.). B.U.K. 1901. No. 11b.

178. **T. Kármán.* Die Bewegung eines schweren Stabes, der sich mit einem runden Ende an eine horizontale Ebene stützt (ung.). M.P.L. 10. 34; 69; 131.

179. *B. de Francesco.* Sul moto di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. M.A. 55. 573.

Siehe auch 295.

Dynamik des Systems.

180. **D. Seiliger.* Studien der Dynamik eines Systems (russ.). B.U.Ka. 1901. 51; 83.

181. **A. Malipiero.* Sulla trasformazione delle equazioni. A.I.V. (8) 3. 469.

182. *P. V. Voronec.* Ob uravnenijach dviženija dlja negolonomnych sistem (Über die Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme). S.M.M. 22. 659.

183. *G. K. Suslov.* Ob odnom izmenenii načala Dalambera (Über eine Modifikation des d'Alembertschen Prinzips). S.M.M. 22. 687.

184. *P. Burgatti.* Sopra un teorema di Levi-Cività riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano. R.A.L.R. 11 A 309.

185. *P. Duhem.* Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. J.M. (5) 8. 5.

186. **G. Picciati.* Sui moti stazionari di sistemi olonomi soggetti a forze conservative in casi particolari. A.A.V. 4, 405.

187. **F. W. Riffert.* Die der Kraftausnutzung günstigste Neigung der Antriebshebeflächen von Pendelhemmungen. A.J.U. 26. 135.

188. *W. Ebert.* Gesichtspunkte zur Verwendung der Jacobischen Methode zur Behandlung dynamischer Differentialgleichungen. D.V.N. 73. 20.

189. **Ovazza.* Contributo alla teoria dei freni ad attrito. Pol.M. 1900. Dez.

190. *M. Ringelmann.* Sur une méthode de comparaison des moteurs de différentes puissances. C.R. 134. 1293.

191. *M. Radaković.* Über die Bewegung eines Motors unter Berücksichtigung der Elastizität seines Fundamentes. Z.S. 48. 28.

192. *A. Petot.* Sur les conditions de la stabilité des automobiles dans les courbes. C.R. 134. 765.

193. *F. Jung.* Zur geometrischen Behandlung des Massenausgleichs bei vierkurbeligen Schiffsmaschinen. Z.S. 48. 108.

Siehe auch 204; 553.

Drehung.

194. **C. Barus.* The general equations of rotation of a rigid body S. (2) 13. 914.

195. *A. Mayer.* Symmetrische Lösung der Aufgabe, die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen. B.G.L. 54. 53.

196. *G. Kolossoff.* Über eine Eigenschaft der Differentialgleichungen der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Frau S. Kowalewski. M.A. 56. 265.

197. **K. Laves.* On the rotatory motion of a body of a variable form. A.J.B. 22. 61.

198. *A. Demoulin.* Formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues. M. (3) 2. 185.

199. *E. Jahnke.* Über Drehungen im n-dimensionalen Raume. D.V.N. 73. 5.

Kreisel.

200. **A. G. Greenhill.* The mathematical theory of the top. S. (2) 15. 712.

201. *R. Marcolongo.* Teoria del giroscopio simmetrico pesante. A.D.M. (3) 7. 99.

202. *H. E. J. G. du Bois.* Gepolariseerde asymmetrische tollen. C.A.A. 10. 415; 504.

Siehe auch 250; 623.

Reibung.

203. *A. Mayer.* Zur Theorie der gleitenden Reibung. B.G.L. 53. 235.

204. *J. J. Taudin Chabot.* Über die Antifriktionslagerung und über ein Dynamometer für kleine Kräfte. P.Z. 3. 513.

Siehe auch 189; 205; 219; 287.

Stoß.

205. *A. Mayer.* Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung. B.G.L. 54. 208. 327.

206. **K. Szily* jun. Der Stoß rauher Körper (ung.) M.T.E. 19. 286.

Potentialtheorie.

207. *P. Paci.* Generalizzazione di un teorema di Gauss. R.C.M.P. 16. 192.

208. *H. Petrini.* Continuité et discontinuité des dérivés du potentiel. B.V.A.S. 58. 633.

209. *E. R. Neumann.* Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst C. Neumanns Methode des arithmetischen Mittels. M.A. 56. 49.

210. *O. M. Ljapunov.* Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet. S.M.Kh. (2) 7. 229.

211. *R. Marcolongo.* Sulla funzione di Green di grade n per la sfera. R.C.M.P. 16. 230.

Siehe auch 283; 536; 554.

Attraktion.

212. *Salet.* L'attraction dans l'Universe stellaire. B.A. 19. 225.

Siehe auch 534; 618.

Gravitation.

213. **D. Goldhammer.* Eine Wiedererweckung der Hypothese von Le Sage zur Erklärung der allgemeinen Gravitation. B.U.Ka. 1901. 1.

214. **V. Cremieu.* A new point of view about gravitation. R.B.A. 71. 561.

215. *P. Lebedew.* Die physikalische Ursache der Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetze. P.Z. 4. 15.

Siehe auch 271; 752; 753.

Hydrostatik.

216. *A. Féraud.* Sur la stabilité de de l'équilibre relatif d'une masse fluide. B.A. 19. 143.

217. **H. Haedicke.* Der Angriffspunkt des Auftriebs. J.S.G.B. 3. 283.

Hydrodynamik.

218. *L. Natanson.* Sur la propagation d'un petit mouvement dans un fluide visqueux. B.I.C. 1902. 19.

219. *L. Natanson.* Über die Fortpflanzung einer kleinen Bewegung in einer Flüssigkeit mit innerer Reibung. Z.P.C. 40. 581.

220. **E. Fontaneu.* Du mouvement stationnaire des liquides. A.F. 29. 176.

221. *E. Laura.* Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono n vortici elementari. A.A.T. 37. 469.

222. *G. H. Darwin.* The pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. P.R.S.L. 69. 147; T.R.S.L. 198 A. 301.

223. *H. Poincaré.* Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation. P.R.L.S. 69. 148; T.R.S.L. 198 A. 333.

224. *P. Duhem.* Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. J.M. (5) 7. 331.

225. *P. Duhem.* La viscosité au voisinage de l'état critique. C.R. 134. 1272.

226. *P. Duhem.* Sur les fluides compressibles visqueux. C.R. 134. 1088.

227. *de Bussy.* Résistance due aux vagues satellites. C.B. 134. 813; 882.

228. *F. Klein.* Mechanische Wirkungen schwingender Körper. S.P.V.K. 1899 bis 1900. 44.

229. **C. Zakrzewski.* Sur les oscillations d'un disque plongé dans un liquide visqueuse. B.I.C. 1902. 235.

230. *W. Stekloff.* Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. de Brun. C.R. 135. 526.

231. *A. Fliegner.* Der Druck in der Mündungsebene beim Ausströmen elastischer Flüssigkeiten. V.N.Z. 47. 21.

232. **H. T. Barnes* and *E. G. Coker.* On a determination by a thermal method of the variation of the critical velocity of water with temperature. R.B.A. 71. 579.

233. **Bazin.* Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyeaux. M.A.P. 1902.

234. **O. Büsser.* Die Widerstandsformel für Binnenschiffe. Z.B.B.E. 365; 391.

235. *D. de Francesco.* Alcune formule della meccanica dei fluidi in uno spazio a 3 dimensioni di curvatura costante. R.A.N. (3) 8. 131.

Siehe auch 364; 367; 734.

Wirbel.

236. *Jouget.* Le théorème des tourbillons en thermodynamique. J.M. (5) 7. 235

237. *K. Zoravski.* O wlasnościach pewnej calki wielokrotnej, będącej nogólnieniem dwóch twierdzeń z teoryi wirów (Über die Eigenschaften eines gewissen mehrfachen Integrals, welche zwei Lehrsätze in der Theorie der Wirbel verallgemeinern). T.W. 13. 107.

Siehe auch 221.

Aerodynamik.

238. **C. E. Guillaume.* Note on the Unity of pressure. R.B.A. 71. 71.

239. — Die Bewegung der Luft in einem zu lüftenden Raume. Z.L.H. 7.

240. **F. Ritter.* Hervorragungen und Winddruck. I.A.M. 6. 88.

241. **E. C. Séverin.* Application du principe d'Archimède aux gaz. A.S.U.J. 2. 45.

242. *V. Blaess.* Über Ausströmungsversuche mit gesättigtem Wasserdampf. P.Z. 4. 82.

Äußere Ballistik.

243. *F. Siacci.* Alcune nuove forme di resistenza che riducano il problema balistico alle quadrature. R.A.G. 1901. Mai—Aug., Okt.—Nov.

244. **Siacci.* Sulla velocità minima. R.A.G. 1901. März; April; Okt.

245. — La velocità minima ed alcuni articoli di signor colonello N. Sabudski. R.A.G. 1901. Oktober.

246. *J. Kozak.* Berechnung der Objekt-Schießtafeln aus den allgemeinen Schießtafeln. M.A.G. 1902. 453.

247. *F. Kozak.* Berechnung der allgemeinen Schießtafeln und deren Benutzung zur Lösung von Aufgaben aus der Schießlehre. M.A.G. 1902. 651; 893.

248. *Krause.* Die Witterungsverhältnisse und ihr Einfluß auf die Flugbahn des 8 mm Geschosses. K.Z. 5. 433.

249. *B. Schöffler.* Das Gesetz der zufälligen Abweichungen. M.A.G. 1902. 97; 366.

250. *F. E. Harris.* Experiments in illustration of the top-motion of rotating oblong projectiles. J.U.S.A. 1901 Mai bis Juni; Sept.—Dez.

251. —. Upon the form of the head of oblong projectiles which encounters the minimum resistance to motion from the air. J.U.S.A. 1901. Sept.—Dez.

252. *J. M. Williams.* A discussion of the errors of cylindre-ogival projectiles. J.U.S.A. 1901 Sept.—Dez.; 1902 Jan.—April.

Siehe auch 576. 578.

Innere Ballistik.

253. *E. Vallier.* Sur le loi de la pression dans les branches à feu. C.R. 135. 314.

254. *C. Cranz* und *K. R. Koch.* Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes. II. A.A.M. 21. 557.

255. *—. Berechnung von Anfangsgeschwindigkeiten auf Grund der an der Mündung gemessenen Geschoßgeschwindigkeit. A.T.K. 1901. Heft 2—3.

256. *R. Kühn.* Rohrrücklaufgeschütze, deren Aufbau und Beanspruchung. M.A.G. 1902. 551.

257. *Rieckeheer.* Anwendung der elektrischen Momentphotographie auf die Untersuchung von Schußwaffen. K.Z. 5. 417.

258. **Spaccamela.* Formola più appropriate per stabilire la carica di una mina nella demolizione di rocce e murature. R.A.G. 1901 Sept.

E. Mathematische Physik.

Prinzipien der mathematischen Physik.

259. **S. Zaremba.* Beitrag zur Theorie einer Gleichung der mathematischen Physik. B.I.C. 1901. 477.

260. **A. Muller.* L'hypothèse de la continnité. R.S. (4) 15. 335.

261. *J. Farkas.* Allgemeine Prinzipien für die Mechanik des Äthers (ung.). M.T.E. 19. 99.

262. **B. Hopkinson.* On the necesssity for postulating an Ether. R.B.A. 71. 534.

263. *M. Planck.* Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie. A.P.L. 9. 629.

264. *E. R. v. Oppolzer.* Erdbewegung und Äther. A.P.L. 8. 898. St.W. 111. 244.

265. *H. Reissner.* Mechanische Analogie zur Elastizität. S.M.B. 1. 40.

266. **N. N. Šiller.* Über die von Ermakov vorgeschlagene Modifikation der Newtonschen Gesetze (russ.). B.U.K. 1902. No. 2c. 83.

267. **C. T. Whitmel.* Dopplers principle. J.B.A.A. 11. 281.

268. **W. Michelson.* On Dopplers principle. A.J.C. 13. 192.

269. **A. Müller.* Die philosoph. Grundlagen der modernen Lichtlehre. N.O. 47. 532; 597; 658.

270. **K. Ångström.* The mechanical equivalent of the unit of light. A.J.C. 15. 223.

271. **V. Wellmann.* On the numerical relation between light and gravitation. A.J.C. 15. 282.

272. **H. A. Lorentz.* De draaing van het polarisatievlak in lichamen die zich bewegen. C.A.A. 10. 793.

273. **Lord Kelvin.* Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light. P.R.I. 16. 363.

274. *C. Neumann.* Über die Maxwell-Hertzsche Theorie. A.G.L. 27. 213.

275. *K. Mache.* Über die Verdampfungsweise und die Größe der Flüssigkeits-Molekel. S.A.W. 111. 382.

Siehe auch **130**; **346**; **532**; **600**.

Molekularphysik.

276. **H. Stanley.* An infra-gaseous state of matter. C.N. 85. 217.

277. *R. Marcolongo.* La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti. R.A.L.R. 11 A 318.

278. **Leduc* et *Sacerdote.* Sur la cohésion des liquides. J.P. (4) 1. 364.

279. *O. Tumlitz.* Eine Ergänzung der van der Waalsschen Theorie des Kohäsionsdruckes. S.A.W. 111. 524.

280. **J. E. Mills.* Molekularrefraction. J.P.C. 6. 209.

Siehe auch **265**; **320**; **346**.

Elastizität.

281. *G. Combebiac.* Sur les équations générales de l'élasticité. S.M. 30. 108.

282. **C. Somigliana.* Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell' elasticità. N.C.P. (5) 3. 288.

283. *C. Somigliana.* Sul potenziale elastico. A.D.M. (3) 7. 129.

284. **J. H. Michell.* The inversion of plane stress. P.L.M.S. 34. 134.

285. *P. Appell.* Sur les expressions des tensions en fraction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope. N.A. (4) 2. 193.

286. *M. Gebbia.* Le deformazione tipiche dei corpi solidi elastici. A.D.M. (3) 7. 141.

287. *H. Hess.* Elasticität und innere Reibung des Eisens. A.P.L. 8. 405.

288. **Dunlop.* The non-elastic deformation of copper wire under various stresses. P.P.S.G. 32.

289. **C. Chree.* Applications of elastic solids to metrology. P.P.S.L. 18. 1.

290. **de Martins.* La linea elastica e la sua applicazione al trave continua su più sostegni. R.A.G. 1901 April; Mai.

291. *F. Hasenöhrl.* Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders. S.A.W. 110. 1026.

292. *N. G. Filon.* On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. T.R.S.L. 198. A 147.

293. *T. Boggio.* Sull 'equilibrio delle piastre elastiche piane. R.I.L. (2) 34. 793.

294. *H. Reissner.* Anwendung der Statik und Dynamik monocyclischer Systeme auf die Elasticitätstheorie. A.P.L. 9. 44.

295. *L. Lecornu.* Sur les volants élastiques. J.E.P. (2) 7. 9.

296. *A. Wandersleb.* Über die anomale Änderung des longitudinalen Elasticitätsmoduls enger Gläser mit der Temperatur und über den Einfluß gewisser Schwingungen auf den Elasticitätsmodul nach vorausgegangener Erwärmung. A.P.L. 8. 367.

297. *W. Sutherland.* Der Elasticitätsmodul von Metallen bei niedrigen Temperaturen. A.P.L. 8. 474.

298. **E. G. Coker.* On the effect of low temperature on the recovery of overstrained iron and steel. T.R. 15. 107.

299. *F. Villareal.* Deformación de las vigas que trabajan á la flexión. R.C.L. 5. 31.

300. *J. Muir.* On the tempering of iron hardened by overstrain. T.R.S.L. 198 A 1.

301. **Almagià.* Applicazione della teoria della elasticità colla costruzione degli alberi a manovelle. Pol M. 1901. Juni.

302. *E. Ovazza.* Contributo alla teoria delle molle pneumatiche. A.A.T. 37. 421.

Siehe auch 156; 191; 318; 404; 624; 647.

Festigkeitslehre.

303. **E. Ascione.* Nuova contribuzione sulla resistenza alla fiezione. A.A.P.M. 16.

304. *W. Cassie.* On the measurement of Youngs modulus. P.M. 4. 402.

305. *M. Grübler.* Zur Festigkeit spröder Körper. P.Z. 4. 78.

306. *O. Meyer.* Welchen Einfluß übt die Form u. Dimension der Probestäbe auf die Ergebnisse der Zugversuche. M.T.G.W. (2) 12. 91.

307. **A. Martens.* Zugversuche mit eingekerbten Probekörpern. M.F.I. 1901. 35.

308. *H. Heimann.* Die Festigkeit ebener Platten bei normaler konstanter Belastung. Z.S. 48. 126.

309. *Considère.* Étude théorique et expérimental de la résistance à la compression du beton fretté. C.R. 135. 365; 415.

310. *A. Gros.* Le problème des surfaces chargées debout. Solution dans le cas du cylindre de révolution. C.R. 134. 1041.

311. **C. Bach.* Unfälle an Dampfgefäßen. Z.B.D. 5. 1.

312. **W. Feldmann.* Die Räderberechnung der Leitspindeldrehbänke. T.P.B. 2. 125.

313. **J. Frith* and *E. H. Lamb.* The breaking of shafts in direct-coupled units due to oscillations set up at critical speeds. J.I.E.E. 31. 646.

Siehe auch 256.

Kristallstruktur.

314. *E. v. Fedorew.* Theorie der Krystallstruktur II. Z.K.M. 36. 209.

315. **H. Zirngiebl.* Beitrag zur Kenntnis der Beziehungen zwischen Krystall und Molekül. Z.A.M. 36. 117.

316. *Lord Kelvin.* Molecular dynamics of a crystal. P.M. 4. 139.

317. *F. Wallerant.* Sur la forme primitive des corps cristallés. C.R. 134. 921.

318. *J. Grünwald.* Über die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in 1-achsig krystallinischen Medien. S.A.W. 111. 411.

319. *W. Voigt.* On the behaviour of pleochroitic crystals along directions in the neighbourhood of an optic axis. P.M. 4. 90.

320. **C. Viola.* Beziehung zwischen Kohäsion, Kapillarität und Wachstum der Krystalle. Z.K.M. 36. 558.

321. *W. Voigt.* Beiträge zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle. A.P.L. 9. 367.

322. **G. Wulff.* Untersuchungen im Gebiet der optischen Eigenschaften isomorpher Krystalle Z.K.M. 36. 1.

323. **A. Cornu.* Détermination des 3 paramètres optiques principaux, d'un cristal, en grandeur et en direction, par le réfractomètre. B.S.M.F. 25. 7.

324. **F. Tonkovitc.* Sulla variazione angulare dei cristalli per effetto della temperatura. A.A.P.M. 16.

325. **P. R. Heyl.* Crystallisation under electrostatic stress. P.R. 14. 83.

Siehe auch 407; 548.

Schwingungen.

326. *H. S. Carslaw.* Note on the use of Fouriers series in the probleme of the transverse vibrations of strings. P.E.M.T. 20. 23.

327. **H. C. Richards.* On the harmonic curves known as Lissajous figures. J.F.I. 153. 269.

328. —. Über asymmetrische Schwingungen in einer Lage stabilen Gleichgewichts. A.P.L. 8. 348.

329. *G. Floquet.* Sur le mouvement des membrans. C.S.S. 1901.

330. **E. Lüdin.* Über elektrische Schwingungen. M.P.G.Z. 1901. 23.

331. *K. R. Johnson.* Elektrisk svängningar of mycket hög frekvens. A.V.A.S. 27. No. 3.

332. *K. Wildermuth.* Über die Absorption elektrischer Schwingungen in Flüssigkeiten. A.P.L. 8. 212.

Siehe auch 228; 254; 296; 313; 537; 642.

Wellenlehre.

333. **F. Richarz.* Reflexion von Longitudinalstöfsen an einem festen und an einem freien Ende. S.G.M. 1902. 172.

334. *J. A. Pollock* and *O. U. Vonwiller.* Some experiments on electric waves in short wire systems. P.M. 3. 586.

335. *A. Becker.* Interferenzröhren für elektrische Wellen. A.P.L. 8. 22.

336. *F. Braun.* Über die Erregung stehender elektrischer Drahtwellen durch Entladung von Condensatoren. A.P.L. 8. 199.

Siehe auch 364; 549; 551; 566; 755.

Strahlen.

337. **L. Benoist.* Lois de transparence de la matière pour les rayons X. S.P. (9) 3. 92.

338. *J. J. E. Durack.* Lenard Rays. P.M. 4. 29.

339. *N. Hehl.* Über die Gebilde an der Kathode. S.P.M.E. 33. 170.

340. *N. Hehl.* Über die Dimensionen der Gebilde an der Kathode. P.Z. 3. 547.

341. *J. Stark.* Über Kathodenstrahlenreflexion bei schiefer Incidenz. P.Z. 3. 368.

342. *W. Seitz.* Vergleichung einiger Methoden zur Bestimmung der Gröfse $\frac{E}{\mu}$ bei Kathodenstrahlen. A.P.L. 8. 233.

343. *W. Kaufmann.* Über die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen. D.V.N. 73. 45.

344. *W. Wien.* Untersuchung über die elektrische Entladung in Gasen. A.P.L. 8. 244.

345. *E. Rutherford* and *A. G. Grier.* Deviable rays of radiactive rays. P.M. 4. 315.

Siehe auch 602; 648.

Capillarität.

346. *P. Belojarcev.* Opredelenie naimenšej tolščiny židkoj plastniki, kak sposob opredelenija diametra molekul. (Berechnung der kleinsten Dicke einer Flüssigkeitsschicht, als Methode zur Berechnung des Durchmessers der Moleküle). M.P.O. 27. 169; 217.

347. *G. Bakker.* Theorie der Kapillarschicht zwischen den homogenen Phasen der Flüssigkeit und des Dampfes. Z.P.C. 42. 68.

348. **D. Pékar.* Die Oberflächenspannung der Lösungen (ung.). M.T.E. 19.

349. *L. Grunmach.* Neue experimentelle Bestimmungen der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten durch Messung der Wellenlänge der auf ihnen erzeugten Kapillarwellen. P.Z. 4. 26.

350. *L. Grunmach.* Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von flüssiger Luft. D.V.N. 73. 51.

351. *W. H. Whatmough.* Eine neue Methode zur Bestimmung von Oberflächenspannungen von Flüssigkeiten. Z.P.C. 39. 129.

352. *J. Amann.* Le dépression de la constante capillaire des urines pathologiques. B.S.V. (4) 38. 131.

353. *S. Lemström.* Om vätskors förhållande i kapillar-rör under inflytande af en elektrisk luftström. A.V.A.S. 27. No. 2.

Siehe auch 320; 364.

Elektrokapillarität.

354. **J. J. van Laar.* Over de asyymmetrie der electro-capillair-curve. C.A.A. 10. 753.

355. *J. J. van Laar.* Über die Asymmetrie der Elektrokapillarkurve. Z.P.C. 41. 385.

356. **Q. Sella.* Deformazione della superficie piana di un liquido in presenza di un corpo elettrizato. L.E. 10. No. 1.

Siehe auch 353.

Absorption.

357. *E. Hagen* und *H. Rubens.* Absorption ultravioletter, sichtbarer und ultraroter Strahlen in dünnen Metallscheiben. A.P.L. 8. 432.

358. *R. Ångström.* Einige Bemerkungen zur Absorption der Erdstrahlung durch die athmosphärische Kohlensäure. B.V.A.S. 58. 381.

359. *K. Ångström.* Über die Abhängigkeit der Absorption der Gase besonders der Kohlensäure von der Dichte. B.V.A.S. 58. 371.

Siehe auch 412; 413; 874.

Diffusion.

360. *K. Stanzel.* Über Diffusion in sich selbst. S.A.W. 110. 1038.

361. *L. Natanson.* Sur les lois de la diffusion. B.I.C. 1901. 835.

362. *A. Winkelmann.* Über die Diffusion von Wasserstoff durch Platin. A.P.L. 8. 388.

363. **T. Godlevski.* Sur la pression osmotique de quelques dissolutions calculée d'après les forces électromotrices des piles de concentration. B.I.C. 1902. 146.

Viscosität.

364. **F. R. Watson.* Viscosity of liquids determined by measurement of capillary waves. P.R. 15. 20.

Siehe auch 218; 225; 226; 229; 367.

Akustik.

365. *A. Guillemin.* Sur les accords ouverts. C.R. 135. 98.

366. *A. Guillemin.* Classement des accords binaires. C.R. 135. 396.

367. *S. R. Cook.* On flutings in a sourd wave and the forces due to a flux of a viscous fluid around spheres. P.M. (6) 3. 471.

368. *J. Tuma.* Eine Methode zur Vergleichung von Schallstärken. S.A.W. 111. 402.

369. *A. Guillemin.* Echelle universelle des mouvements périodiques graduée en savarts et millisavarts. C.R. 134. 980; *J.P. (4) 1. 504.

370. *M. Wien.* Über die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe. P.Z. 4. 69.

371. *M. Wien.* Über die Verwendung der Resonanz bei der drahtlosen Telegraphie. A.P.L. 8. 686.

Siehe auch 579.

Geometrische Optik.

372. *R. Straubel.* Über einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen. P.Z. 4. 114.

373. *P. Plettenberg.* Geometrisch-optische Täuschungen. J.A.V.M. 1900 bis 1902. 147.

374. *W. H. Roever.* Brilliant points and loci of brilliant points. A of M. 3. 113.

375. *R. Mehmke.* Ein frühes Beispiel einer Anamorphose. Z.S. 48. 135.[1])

376. **H. C. Plummer.* On the images formed by a parabolic mirror. M.N.A.S. 62. 352.

377. *H. Opitz.* Über die Frage nach den Brennlinien eines sehr dünnen astigmatischen Strahlenbündels und ihre Bedeutung für das Bildpunktproblem. S.M.B. 1. 53.

378. *C. Viola.* Le deviazioni minime della luce mediante prismi birefrangenti. R.A.L.R. 11 B. 24.

379. *R. Straubel.* Über die Abbildung einer Ebene durch ein Prisma. A.P.L. 8. 63.

380. *W. Volkmann.* Über ein Geradesichtprisma und ein neues Flüssigkeitsprisma. A.P.L. 8. 455.

381. *J. D. Everett.* On focal lines and anchor ring wave-fronts. P.M. 3. 483; P.P.S.L. 18. 43.

382. *G. Espanet.* Catacaustique d'un cylindre circulaire droit pour des rayons parallèles, obliques à l'horizon et situés dans un même plan. I.M. 9. 192.

383. **W. Roché.* Über die Brechung des Lichts, das durch eine Reihe von Mitteln geht, die durch zentrierte Kugelflächen begrenzt sind (russ.). B.U.K. 1902. No. 2c 101.

384. *L. Matthiessen.* Über die unendlichen Mannigfaltigkeiten der Örter der dioptrischen Kardinalpunkte von Linsen und Linsensystemen bei schiefer Incidenz. Z.S. 48. 39.

385. *F. J. van den Berg.* Over de berekening von gecentreerte lenzenstelsels. C.A.A. 9. 125.

386. **O. Orlandini.* Osservazioni sopra l'effetto prismatico delle lenti discentrate. A.A.F.S. (4) 13.

387. **A. Kerber.* Formeln zur Berechnung von Aplanaten. D.M. 10. 97.

388. **L. Matthiessen.* Über aplanatische Brechung und Spiegelung in Oberflächen 2. Ordnung und die Hornhautrefraction. A.F.G.P. 91. 295.

389. *L. Matthiessen.* Über die Bedingungsgleichungen der aplanatischen Brechung von Strahlenbündeln in beliebigen krummen Oberflächen. A.P.L. 9. 691.

390. *E. Edser.* The diffraction of light from a dense to a rarer medium, when the angle of incidence exceeds its critical value. P.M. 4. 346.

391. *C. Forch.* Das Brechungsvermögen von Lösungen in Schwefelkohlenstoff. A.P.L. 8. 675.

392. *J. J. Thandin Chabot.* Reflexion und Refraktion mittels einer natürlich gekrümmten Fläche. P.Z. 3. 331.

393. *J. Boussinesq.* Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'une translation rapide: équations du mouvement et conséquences générales. C.R. 135. 220; 269; 309.

394. *J. D. Everett.* Contributions to the theory of the resolving power of objectives. P.M. 4. 166.

---

1) Diese Arbeit gehört nicht hierher, sondern sollte unter: Nomographie stehen.

395. *J. Precht.* Brennweitenbestimmung bei photographischen Systemen. P.Z. 3. 515.

396. —. A stereoscopic method of photographic surveying. N. 66. 139.

Siehe auch 745; 877; 887; 889; 890.

Physikalische Optik.

397. **A. Müller.* Die philosophischen Grundlagen der modernen Lichtlehre. N.O. 47. 532; 597; 658.

398. *A. Korn* u. *K. Stoeckl.* Studien zur Theorie der Lichterscheinungen. A.P.L. 8. 312.

399. *J. Boussinesq.* Extension du principe de Fermat, sur l'économie du temps, au mouvement relatif de la lumière dans un corps transparent hétérogène animé d'une translation rapide. C.R. 135. 465.

400. **D. B. Brace.* The group velocity and wave-velocity of light. S. (2) 16. 81.

401. **T. J. I'A. Broomwich.* Note on the wave surface of a dynamical medium. P.L.M.S. 34. 307.

402. *J. Boussinesq.* Démonstration générale de la construction des rayons lumineux par les surfaces d'onde courbes. C.R. 136. 559.

403. *L. Natanson.* Über die temporäre Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten. Z.P.C. 39. 355.

404. *L. N. G. Filon.* On the variation with the wave-length of the double refraction in strained glass. P.C.P.S. 11. 478.

405. *C. Viola.* Le deviazioni minime della luce mediante prismi birefrangenti. R.A.L.R. 11B. 24.

406. **C. Raveau.* Sur l'observation de la réfraction conique intérieure et extérieure. J.P. (4) 1. 387.

407. **C. Viola.* Die Bestimmung der optischen Konstanten eines Krystalls aus einem einzigen beliebigen Schnitte. Z.K.M. 66. 245.

408. *F. Kurlbaum.* Über Reflexionsvermögen von Flammen. P.Z. 3. 333.

409. *C. Neumann.* Über Metallreflexion und totale Reflexion. B.G.L. 54. 92.

410. *E. van Aubel.* Sur les indices de réfraction des mélanges liquides. C.R. 134. 985.

411. *J. L. Sirks.* De l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires placé devant l'objectif d'une lunette sur la clarté de l'image principale d'une étoile. C.A.A. 9. 307.

412. **G. E. Halle.* Selective absorption as a function of wave-length. A.J.C. 15. 227.

413. *R. W. Wood.* The absorption, dispersion and surface colour of selenium. P.M. 3. 607.

414. *J. Walker.* On Mac Cullagh and Stokes's elliptic analyser and other applications of a geometrical representation of the state of polarisation of a stream of light. P.M. 3. 541.

415. *J. Larmor.* On the influence of convection on optic rotatory polarisation. P.M. 4. 367.

416. *P. Rossi.* Della dispersione anomala. R.F.M. 3. 273; 383.

417. *W. H. Julius.* Erwiderung auf Bedenken, welche gegen die Anwendung der anormalen Dispersion zur Erklärung der Chromosphäre geäußert worden sind. A.N.K. 160. 139.

418. *C. Winther.* Die Rotationsdispersion der spontan aktiven Körper. Z.P.C. 41. 161.

419. *J. Boussinesq.* Sur la dispersion anormale en corrélation avec le pouvoir absorbant des corps pour les radiations d'une période déterminée. C.R. 134. 1389.

420. **E. R. Drew.* Interference in thin films — a graphical treatment. P.R. 15. 226.

421. *C. Hillebrand.* Die Anwendung der Beugungserscheinungen auf astronomische Messungen. S.A.W. 110. 989.

422. *H. Deslandres.* Sur les spectres de bandes de l'azote. C.R. 134. 747.

423. **L. E. O. de Visser.* Essai d'une théorie sur la phosphorescence de longue durée. R.T.C.P.B. (2) 20. 435.

424. *J. Macé de Lépinay* et *H. Buisson.* Sur une nouvelle méthode de mesure optique des épaisseurs. C.R. 135. 283.

425. **W. M. Hicks.* The Michelson Morley effect. R.B.A. 71. 562.

426. *J. Macé de Lépinay.* Sur une nouvelle méthode pour la mesure optique des épaisseurs. C.R. 134. 898.

Siehe auch 62; 113; 269—273; 319; 322; 323; 738; 875; 876; 878—881.

Photometrie.

427. **J. Violle.* Photométrie. C.I.E. 1. 23.

Elektrooptik.

428. *P. Lenard.* Über die lichtelektrische Wirkung. A.P.L. 8. 149.

429. *E. v. Schweidler.* Untersuchungen über den photoelektrischen Strom in Kaliumzellen. P.Z. 4. 136.

430. **R. A. Fessenden.* Velocity of light in an electrostatic field. S. (2) 16. 474.

431. *P. V. Bevan.* Reflexion and transmission of light by a charged metal surface. P.C.P.S. 11. 438.

432. *J. S. Townsend.* The conductivity produced in gases by the aid of ultraviolet light. P.M. 3. 557.

Siehe auch 580.

Magnetooptik.

433. *W. Voigt.* Über einige neuere Beobachtungen von magneto-optischen Wirkungen. A.P.L. 8. 872.

434. *A. Faerber.* Über das Zeemanphänomen. A.P.L. 9. 886.

435. **G. W. Walker.* On asymmetry of the Zeeman effect. P.P.S.L. 18. 78.

436. *E. Riecke.* Zeemaneffekt und Elektronenladung. P.Z. 3. 406.

437. **P. Moretto.* Studio sul fenomeno Hall nei liquidi. N.C.P. (5) 3. 80.

438. *W. Voigt.* Sul fenomeno Majorana. R.A.L.R. 11. A. 505.

439. *Q. Majorana.* Sulle rotazioni bimagnetiche del piano di polarizzazione della luce. R.A.L.R. 11 B. 90.

440. *A. Schmauß.* Magnetische Drehung der Polarisationsebene innerhalb eines Absorptionsstreifens. A.P.L. 8. 842.

441. **L. H. Siertsema.* Die Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationsebene in Wasser im sichtbaren Spektrum. C.P.L. 73.

442. **L. Siertsema.* The dispersion of magnetic rotation of the plane of polarisation in negatively rotating saltsolutions. C.P.L. 76.

443. **O. M. Corbino.* Nuove ricerche sulla polarizzazione rotatorie magnetica nell' interno di una riga d'assorbimento. N.C.P. (5) 3. 121.

Wärmelehre.

444. *A. S. Mackenzie.* On some equations pertaining to the propagation of heat in an infinite medium. P.P.S. 41. 181.

445. *E. Cesàro.* Sur un problème de propagation de la chaleur. B.A.B. 1902. 387.

446. *H. S. Carlslaw.* A problem in conduction of heat. P.M. 4. 162.

447. **H. S. Carlslaw.* The application of Fouriers series to mathematical physics. R.B.A. 71. 557.

448. **L. Natanson.* Sur la conductibilité calorifique d'un gaz en mouvement. B.I.C. 1902. 137.

449. **F. Richarz.* Über Brechung der Wärmestromlinien und ihre Demonstration. N.R. 17. 478.

450. **H. Schoentjes.* Détermination du coefficient de transmission de la chaleur à travers les verres à vitre et à travers les doubles parois en verre. A.A.I.G. 24.

451. *J. Dewar.* Thermal expansions at low temperatures. N. 66. 88.

452. *A. E. Tutton.* The thermal expansion of porcelain. P.M. 3. 631.

453. *Féry.* La mesure des températures élevées et la loi de Stefan. C.R. 134. 977.

454. **C. Schuyten.* Nouvelle vérification de la loi de Lambert sur la vitesse de la conductibilité calorifique de l'eau. B.A.B.C. 15. 373.

455. *M. Thiesen.* Über die spezifische Wärme des Wasserdampfs. A.P.L. 9. 80.

456. *P. W. Robertson.* The latent heats of fusion of the elements and compounds. T.N.Z.I. 39. 501.

457. **C. Chistoni.* Sulla legge del reffreddamento di Newton e sulla determinazione della temperatura del sole attributa al Newton. N.C.P. (5) 3. 139.

458. *S. Arrhenius.* Über die Wärmeabsorption durch Kohlensäure. B.V.A.S. 58. 25.

459. *J. W. Peck.* The steady temperatures of a thin rod. P.M. 4. 226.

460. **F. H. Haase.* Über den Wärmedurchgang durch Heizflächen. Z.L.H. 7.

Siehe auch 232; 273; 296—298; 300; 324; 731; 732; 756; 788; 882.

Thermodynamik.

461. *G. Jäger.* Die Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln. S.A.W. 110. 1141.

462. *P. Koturnicki.* Genaue Ausdrücke der Energie und Entropie für ein Gemisch aus 2 Zuständen (russ.). J.R.P.C.G. 34. 29.

463. **E. Mathias.* Sur le partage du plan en quadrilatères curvilignes équivalents. F.T. (10). 1. 292.

464. *de Forcrand.* Sur la relation $\frac{L+S}{T} = \frac{Q}{T'} = K$. C.R. 134. 768.

465. **R. Mewes.* Über die Bedeutung des 1. u. 2. Hauptsatzes der Wärmetheorie für die Leistungsfähigkeit von Feuerungs- und Wärmekraftanlagen. Z.B.W. 7. 391; 403.

466. *A. Einstein.* Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichts und des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik. A.P.L. 9. 417.

467. *W. Voigt.* Bemerkung zu der von H. Denizot gegebenen Ableitung des 2. Hauptsatzes. P.L. 8. 472. — *H. Denizot* 927.

468. *N. Quint.* Isothermen für Mischungen von Chlorwasserstoff und Äthan. Z.P.C. 39. 14.

469. **P. A. Kohnstamm.* Over de gedaante der empirische isotherm van een binair mengsel. C.A.A. 10. 432.

470. *A. Batschinski.* Über eine Erweiterung des Begriffs der kritischen Gröfsen. Z.P.C. 40. 629.

471. *C. J. Parks.* On the head evolved or absorbed when a liquid is brought in contact with a finely divided solid. P.M. 4. 240.

472. *M. Wilderman.* On the velocity of reaction before complete equilibrium and the point of transition are reached. P.M. 4. 270; 468.

473. *Jouguet.* Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre. C.R. 134. 1418.

474. **A. Wischeslawzew.* Über die kalorimetrische Bestimmung der Schmelzkurve. J.R.P.C.G. 34. 41.

475. *G. Jaumann.* Über die Wärmeproduktion in zähen Flüssigkeiten. A.P.L. 8. 752. S.A.W. 111. 215.

476. *C. Puschl.* Über den Wärmezustand der Gase. S.A.W. 111. 187.

477. *Lord Rayleigh.* On the law of the pressure of gases between 75 and 150 millimeters of mercury. T.R.S.L. 198 A. 417.

478. *Lord Rayleigh.* Über das Gasdruckgesetz zwischen 75 und 150 mm Quecksilber. Z.P.C. 41. 71.

479. *J. O. Kuenen* and *W. G. Robson.* Observations on mixtures with maximum or minimum vapour pressure. P.M. 4. 116.

480. *F. A. H. Schreinemakers.* Dampfdrucke im System: Wasser, Aceton und Phenol II—III. Z.P.C. 40. 440; 41. 331.

481. *J. D. Everett.* On the comparison of vapour-temperatures at equal pressures. P.M. 4. 335.

482. **W. Kurbatow.* Über den Zusammenhang zwischen Siedewärme und Dampfdichte (russ.). J. R. P. C. G. 34. 250.

483. *M. Planck.* Zur Thermodynamik und Dissociationstheorie binärer Elektrolyte. Z.P.C. 41. 212.

484. **L. Canalda.* La termodinamica en la astronomia. M.A.C.B. (3) 4. No. 15.

485. *S. Meyer.* Über die durch den Verlauf der Zweiphasenkurve bedingte maximale Arbeit. S.A.W. 111. 305.

486. *J. Zawidzki.* Studya doświadczalne nad prężnością i składem pary podwójnych mięszaniu cieczy (Experimentalstudien über die Spannung und Zusammensetzung der Dämpfe binärer Mischungen von Flüssigkeiten). T.W. 13. 11.

487. *R. Wegscheider.* Über simultane Gleichgewichte und die Beziehungen zwischen Thermodynamik und Reaktionskinetik homogener Systeme. Z.P.C. 39. 257.

488. *J. H. van 't Hoff, F. B. Kenrick* und *H. M. Dawson.* Über die Bildung von Tachydrit. Z.P.C. 39. 27.

489. *van 't Hoff* u. *A. o' Farelly.* Untersuchungen über die Bildung der oceanischen Salzablagerungen. S.A.B. 1902. 370; 805; 1008.

490. **E. F. Roeber.* A thermodynamical note on the theory of the Edison accumulator. T.A.E.S. 1. 195.

491. *L. Lecornu.* Sur les moteurs à injection. C.R. 134. 1566.

Siehe auch 231; 236; 275; 587; 770; 785—787; 856—864.

Lösungen.

492. *J. B. Goebel.* Zahlenbeispiel zur neueren Theorie der Lösungen. Z.P.C. 42. 59.

493. *H. Jahn.* Entwurf einer erweiterten Theorie der verdünnten Lösungen. Z.P.C. 41. 257.

494. *J. Traube.* Théorie des phénomènes critiques et contribution à l'étude des solutions. B.A.B. 1902. 319.

495. **W. D. Bancroft.* Limitations of the mass law. J.P.C. 6. 190.

496. *V. Rothmund* u. *N. T. M. Wilsmore.* Die Gegenseitigkeit der Löslichkeitsbeeinflussung. Z.P.C. 40. 611.

497. *N. Schiller.* Das Gesetz der Partialdichtigkeitsänderung eines Lösungsmittels mit der Konzentration der Lösung. A.P.L. 8. 588.

498. *A. Smits.* Über den Verlauf des Faktors *i* bei mäfsig verdünnten wässerigen Lösungen als Funktion der Konzentration. Z.P.C. 39. 385.

499. *T. Ericson-Aurén* u. *W. Palmaer.* Über die Auflösung von Metallen. I. Z.P.C. 39. 1.

500. *O. Pekár.* Über die molekulare Oberflächenenergie der Lösungen. Z.P.C. 39. 433.

501. *H. O. Holsboer.* Die theoretische Lösungswärme von Cd $SO_4 \cdot \frac{8}{3} H_2 O$. Z.P.C. 39. 691.

502. *J. Traube.* Theorie der kritischen Erscheinungen und der Verdampfung. A.P.L. 8. 267.

503. **J. I. Michailenko.* Untersuchungen über die Dampspannungen der Lösungen (russ.). B.U.K. 1901. No. 4b.

504. *H. Wolf.* Beitrag zur Kenntnis der Leitfähigkeiten gemischter Lösungen von Elektrolyten. Z.P.C. 40. 222.

505. *P. Eversheim.* Bestimmung der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten von Lösungsmitteln und deren Lösungen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur bis über den kritischen Punkt. A.P.L. 8. 539.

506. *C. Barus.* On spontaneous nucleation and on nuclei produced by shaking solutions. P.M. 4. 262.

Siehe auch 348; 828; 835.

Zustandsgleichung.

507. * *W. H. Keesom.* Bijdragen tot de kennis von het ψ-vlak van Van der Waals. C.A.A. 10. 331; 782.

508. * *W. H. Keesom.* Contribution to the knowledge of van der Waal's ψ-surface. C.P.L. 75; 79.

509. **H. Kamerlingh Onnes.* Über die Reihenentwicklung der Zustandsgleichung der Gase u. Flüssigkeiten. C.P.L. 74.

510. **P. Saurel.* On the fundamental equation of the multiple point. J.P.C. 6. 261.

511. *A. Batschinski.* Über das Gesetz der geraden Mittellinie. Z.P.C. 41. 741.

512. *G. Tammann.* Das Zustandsdiagramm des Phenols. A.P.L. 9. 249.

513. **J. D. van der Waals.* Ternaire stelsels. C.A.A. 10. 544; 665; 862.

514. *F. A. H. Schreinemakers.* Tensions de vapeur de mélanges ternaires. A.N. 7. 99.

515. *F. Caubet.* Liquéfaction des mélanges gazeux. M.S.B. (6) 1. 1.

516. *K. Meyer.* Om overenstemmende tilstande hos stofferne. M.S.Co. (6) 9. 155.

517. *J. J. van Laar.* Über einen Aufsatz des Herrn Schükarew. (Z.P.C. 38. 542.) Z.P.C. 39. 342.

Siehe auch 279.

Kinetische Gastheorie.

518. *F. M. Exner.* Über den Gleichgewichtszustand eines schweren Gases. M.Z. 19. 278.

519. *G. Jäger.* Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln. S.A.W. 111. 255.

520. *J. H. Jeans.* On the conditions necessary for equipartition of energy. P.M. 4. 585.

521. **P. Fireman.* The expansion of a gas into a vacuum and the kinetic theory of gases. J.P.C. 6. 463.

522. **R. W. Wood.* The cooling of gases by expansion and the kinetic theory. S. (2) 16. 592.

523. *E. Müller.* Die Abhängigkeit des Wärmeleitungskoeffizienten der Luft von der Temperatnr. S.P.M.E. 33. 85.

Siehe auch 476—478; 737.

Strahlung.

524. *M. Planck.* Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie. A.P.L. 9. 619.

525. *O. Lummer.* Die Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre Verwendung. A.Gr. (3) 3. 261.

526. *E. Kohl.* Über die Herleitbarkeit einiger Strahlungsgesetze aus einem W. Wien'schen Satze. A.P.L. 8. 575.

527. **E. F. Nichols* and *G. F. Hull.* A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. P.R.L. 13. 307.

528. *J. T. Bottomley.* Radiation of heat and light from a heated solid body. R.B.A. 71. 562.

529. *E. Pringsheim.* Über Temperaturbestimmung mit Hilfe der Strahlungsgesetze. D.V.N. 73. 31.

530. **J. W. Peck.* The Fourier problem of the steady temperatures in a thin rod. R.B.A. 71. 555.

531. *C. E. Guillaume.* Les lois du rayonnement et la température du soleil. B.S.A.F. 15. 37.

532. **H. A. Lorentz.* De intensiteit der straling in verband met de beweging der aarde. C.A.A. 10. 804.

533. **R. Mewes.* Die Licht- und Wärmestrahlungsgesetze und deren Bedeutung für das Beleuchtungs- und Heizungswesen. Z.B.W. 7. 410; 421; 433.

Siehe auch 453; 725.

Elektrostatik.

534. **S. J. Barnett.* On the Cavendish texperimen and the law of inverse squares in electrostatics. P.R. 15. 175.

535. **G. Vicentini.* Rotazioni elettrostatiche. N.C.P. (5) 3. 296.

536. *C. A. Skinner.* On conditions controlling the drop of potential at the electrodes in vacuum-tube discharge. P.M. 4. 490.

537. **G. Morera.* Interno alle oscillazioni elettriche. N.C.P. 3. 382.

538. *A. Battelli* e *L. Magri.* Sulle scariche oscillatorie. M.A.T. 51. 335.

539. *A. Battelli* u. *L. Magri.* Über oscillatorische Entladungen I. P.Z. 3. 539.

540. *P. Drude.* Oscillatorische Kondensatorentladung. A.P.L. 9. 611.

541. *L. Mandelstam.* Bestimmung der Schwingungsdauer der oscillatorischen Kondensatorentladung. A.P.L. 8. 123.

542. * *V. Crémieu.* Méthode de réglage automatique du potentiel d'un condensateur. J.P. (4) 1. 583.

543. *A. Garbasso.* Über die Entladungen eines Kondensators durch 2 parallelgeschaltete Drähte. P.Z. 3. 384.

544. *A. Garbasso.* Über die Entladungen eines Kondensators durch *n* parallelgeschaltete Drähte. A.P.L. 8. 890.

Siehe auch 3; 325; 344; 430; 893.

Dielektrizität.

545. **I. I. Kosonogow.* Über die Theorie der Dielektrika (russ.). B.M.K. 1901. No. 7, 10b.

546. **S. Lussana* e *P. Cornazzi.* Influenza di un dielettrico solido interposto fra le palline di uno spinterometro sulla lunghezza della scintilla. N.C.P. (5) 3. 132.

547. **H. Schlundt.* On the dielectric constants of pure solvents. B.U.W. 2. 355.

548. *W. Schmidt.* Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Krystallen mit elektrischen Wellen. A.P.L. 9. 919.

549. *P. Drude.* Zur Messung der Dielektrizitätskonstante elektrischer Drahtwellen. A.P.L. 8. 336.

Siehe auch 505.

Elektrodynamik.

550. * *A. Garbasso.* Sopra una quistione di elettrodinamica. N.C.P. (5) 3. 372.

551. *—. Das Ohmsche Gesetz vom Gesichtspunkt der Theorie der Wellenbewegung des Äthers aus. R.I.J. 1901. Heft 4.

552. *E. Grimsehl.* Über den Voltaschen Fundamentalversuch. P.Z. 4. 43.

553. * *W. S. Day.* An experiment relating to the application of Lagrange's equations of motion to electric currents. P.R. 15. 154.

554. *P. Boley.* Sur les différences de potentiel au contact. C.R 135. 454.

555. **Marcolongo.* Sul potentiale elettrodinamico di Helmholtz. A.A.P. M. 15.

556. *A. H. Bucherer.* Über das Kraftfeld einer sich gleichförmig bewegenden Ladung. A.P.L. 8. 326.

557. **Hurmuzescu.* Force électromotrice due à la déformation mécanique des électrodes. A.S.U.J. 2. 63.

558. *E. van der Ven.* Sur le transport des liquides par le courant électrique. A.M.T. (2) 8. 93.

559. *A. Lampa.* Über Stromunterbrechung. S.A.W. 110. 891.

560. *E. Klupathy.* Zur Theorie des Wehnelt-Unterbrechers. A.P.L. 9. 147.

561. *D. A. Goldhammer.* Über die Transformation eines pulsierenden Stroms in einen Wechselstrom. P.Z. 4. 108.

562. *J. Teichmüller.* Über die Grenzen der graphischen Behandlung der Wechselstromprobleme. P.Z. 3. 442.

563. *G. Grassi.* Sulla variazione della tensione secondaria nei trasformatori a corrente alternata. R.A.N. (3) 8. 53.

564. *Brillouin.* Influence réciproque de 2 oscillateurs voisins. A.C.F. 27. 17.

565. *P. Drude.* Zur Konstruktion von Teslatransformatoren. A.P.L. 9. 293; 590.

566. *W. B. Morton.* On the forme of the lines of electric force and of energy flux in the neighbourhood of wires leading electric waves. P.M. 4. 302.

567. *C. Christiansen.* Unipolare elektrische Ströme in Elektrolyten. A.P.L. 8. 787.

568. * *C. Christiansen.* Unipolare elektriske stromme i en electrolyt. B.A.Co. 1901. 205.

569. *R. Haus.* Über Induktionen in rotierenden Leitern. Z.S. 48. 1.

570. * *W. Lebedinski.* Moderne Ansichten über die Ruhmkorffsche Spirale (russ.). E.P. 1901. 265.

571. *V. Karpen.* Principe relatif à la distribution des lignes d'induction magnétique. B.S.B. 11. 48.

572. *E. Hoppe* Unipolare Induktion. A.P.L. 8. 663.

573. *T. Levi-Cività.* La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione. R.A.L.R. 11 B. 75.

574. **A. Franchetti.* Capacità di polarizzazione e dissipazione di energia di alcuni voltametri sottoposti a correnti alternate. N.C.P. (5) 2. 312; R. 5. 1.

575. *M. Wien.* Über die Polarisationskapazität des Palladiums. A.P.L. 8. 372.

576. *H. Dießelhorst.* Über ballistische Galvanometer mit beweglicher Spule. A.P.L. 9. 458.

577. *A. Wehnelt.* Über die freie Elektrizität im dunklen Kathodenraume. P.Z. 3. 501.

578. *H. Dießelhorst.* Ballistische Methode der Messung von Elektrizitätsmengen. A.P.L. 9. 712.

579. *P. Janet.* Quelques remarques sur la théorie de l'arc chantant de Duddell. C.R. 134. 821.

580. *W. Kaufmann.* Über die Analogie zwischen dem elektrischen Verhalten Nernstscher Glühkörper und demjenigen leitender Gase. N.G.G. 1901. 62.

581. *G. Preuner.* Über die Dissoziationskonstante des Wassers und die elektrometrische Kraft der Knallgaskette. Z.P.C. 42. 50.

582. **K. Schaum.* Über die Formeln für Oxydationselektroden u. Oxydationsketten. S.G.M. 1902.

583. *E. Bose.* Über eine neue Art von Gravitationselementen. J.S.G. 78. 4.

584. *O. Sackur.* Nachtrag zu einer früheren Abhandlung. (Z.P.C. 38. 129.) Z.P.C. 39. 364.

585. **H. Poincaré.* A propos des expériences de M. Crémieu. R.G.O. 12. 994.

Siehe auch 330—332; 334—336; 363; 490; 548; 789—790; 852; 883.

Thermoelektrizität.

586. **E. Pinczower.* Über thermoelektrische Hysteresis und Thermoelektrizität von Kupfer- und Zinklegierungen. M.P.G.Z. 1901. 24.

587. *A. Einstein.* Über die thermodynamische Theorie der Potentialdifferenz zwischen Metallen und vollständig dissoziierten Lösungen ihrer Salze und über eine elektrische Methode zur Erforschung der Molekularkräfte. A.P.L. 8. 798.

588. *F. A. Schulze.* Über das Verhalten einiger Legierungen zum Gesetz von Wiedemann und Franz. A.P.L. 9. 555.

589. *J. J. Thomson.* On some of the consequences of the emission of negatively electrified corpuscles by hot bodies. P.M. 4. 253.

590. *W. Williams.* On the temperature variation of the electrical resistance of pure metals. P.M. 3. 515.

591. *C. Féry.* Sur la température de l'arc électrique. C.R. 134. 1201.

592. *J. Stark.* Einfluſs der Temperatur auf die Ionisierung durch Ionenstoſs. A.P.L. 8. 829.

593. *Berthelot.* Recherches sur les forces électromotrices. C.R. 134. 893.

594. *L. Lecornu.* Sur les moteurs à combustion. C.R. 134. 1347.

Siehe auch 483. 884.

Elektronentheorie.

595. *R. Abegg* u. *W. Gaus.* Beiträge zur Theorie der direkten Bestimmungsmethode von Ionenbeweglichkeiten. Z.P.C. 40. 737.

596. *B. D. Steele.* The measurement of ionic velocities in aqueous solution and the existence of complex ions. T.R.S.L. 198 A. 105.

597. *B. D. Steele.* Die Messung von Ionengeschwindigkeiten in wässerigen Lösungen und die Existenz komplexer Ionen. Z.P.C. 40. 689.

598. **C. D. Child.* The velocity of ions from hot platinum wires. P.R. 14. 221.

599. **C. D. Child.* The velocity of ions drawn from the electric arc II. P.R. 14. 65.

600. *M. Abraham.* Prinzipien der Dynamik des Electrons. P.Z. 4. 57.

601. *P. de Heen.* L'iodynamisme. B.A.B. 1902. 20. 107.

602. *W. Kaufmann.* Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. N.G.G. 1901. 143.

603. **W. Crookes.* Radioactivity and the electron theory. E.R. 40. 496.

604. *B. Sabat.* Über das Leitvermögen der Gemische von Elektrolyten. Z.P.C. 41. 224.

605. *W. Kaufmann.* Die elektromagnetische Masse des Elektrons. P.Z. 4. 54.

606. *W. Voigt.* Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus. N.G.G. 1901. 169.

Siehe auch 436; 524; 592; 627; 637; 648; 650.

Magnetismus.

607. **Ascoli.* Sulla stabilità del magnetismo temporaneo e permanente. N.C.P. (5) 3. 5.

608. *A. Dina.* Confronto sperimentale fra l'isteresi alternativa, statica e rotante. R.I.L. (2) 34. 988.

609. *G. F. C. Searle* und *T. G. Bedford.* The measurement of magnetic hysteresis. T.R.S.L. 198 A. 33.

610. *S. Sano.* Über Magnetostriction von Kristallen ohne Hysteresis. P.Z. 3. 401.

611. **S. Sano.* Note on Kirchhoffs theory of magnetostriction. J.T. 8. 229.

612. **A. P. Wills.* On magnetostriction. P.R. 15. 1.

613. *H. Nagaoka.* On the magnetostriction of steel, nickel, cobalt and nickelsteels. P.M. 4. 45.

614. *W. Voigt.* Dispersione rotatoria magnetica nell' interno delle righe di assorbimento. R.A.L.R. 11 A. 459.

615. **R. Schild.* Untersuchungen über die räumliche Verteilung der magnetischen Kraft in ringförmigen Lufträumen. M.P.G.Z. 1901. 27.

616. **J. Pawling.* Notes on magnetic curves. J.F.I. 152. 269.

617. **C. Maurain.* Magnetisme; couches de passage et actions à petite distance. R.G.O. 12. 1059.

618. **G. E. Poucher.* Attractive force and magnetic induction. P.R. 15. 233.

619. *J. Zenneck.* Über induktiven magnetischen Widerstand. A.P.L. 9. 497.

620. *C. Benedicks.* Untersuchungen über den Polabstand magnetisierter Cylinder. A.V.A.S. 27. No. 5.

621. *C. Benedicks.* Sur les facteurs démagnétisants des cylindres. A.V.A.S. 27. N. 4.

622. **C. Tangl.* Über die mechanischen Wirkungen der Magnetisierung (ung.). M.T.E. 18.

623. **H. E. J. G. du Bois.* Magnetokinetische Kreisel zur Nachahmung von para- und diamagnetischen Erscheinungen. M.P.M. 1901. 59.

624. **C. Tangl.* Die Wirkung der Magnetisierung auf den Elastizitätskoeffizienten (ung.). M.T.E. 18.

625. *S. Sano.* Notiz über Magnetisierung kubischer Krystalle. P.Z. 4. 8.

626. *W. Voigt.* Über Pyro- und Piezomagnetismus der Krystalle. A.P.L. 9. 94.

627. *W. Voigt.* Elektronenhypothese und Theorie des Magnetismus. A.P.L. 9. 125.

628. **A. Righi.* Ancora sulla questione del campo magnetico generato della convezione elettrica. N.C.P. (5) 3. 71.

629. *P. Schulze.* Über das Unifilarmagnetometer. A.P.L. 8. 714.

630. *H. Meldau.* Die Kompensation des Schiffskompasses. P.Z. 3. 554.

631. *H. Meldau.* Die Ablenkung des Kompasses an Bord der Eisenschiffe. P.Z. 3. 391.

Siehe auch 606; 885; 886; 892.

Thermomagnetismus.

632. **W. Ignatowski.* Über die Erwärmung magnetischer Stäbe durch Foucaultsche Ströme. J.R.P.C.G. 34. 49.

633. *J. Lizzar.* Über die Beziehung zwischen dem Temperatur- und Induktionskoeffizienten eines Magnetstabes und seinem magnetischen Momente. M.Z. 19. 220.

Elektromagnetismus.

634. **Roesen.* Die neuere Maxwell-Hertzsche Anschauung über Magnetismus und Elektrizität. J.V.C. 1900 bis 1901. 44.

635. *E. Cohn.* Über die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper. N.G.G. 1901. 74.

636. **G. Giorgi.* Sul sistema di unità di misure elettromagnetiche. N.C.P. (5) 4. 11.

637. **B. Davis.* Some preliminary experiments on the motion of ions in a varying magnetic field. S. 15. 853.

638. *J. Patterson.* On the charge of electrical resistance of metals when placed in a magnetic field. P.M. 3. 643.

639. *J. B. Whitehead.* The magnetic effect of electric displacement. A.J.S. 14. 109.

640. *W. M. Varleigh.* On the magnetism induced in iron by rapidly oscillating current field. P.M. 3. 500.

641. **W. W. Nikolaev.* Réaction électromagnétique. J.R.P.C.G. 34. 25.

642. *R. H. Weber.* Elektromagnetische Schwingungen in Metallröhren. A.P.L. 8. 721.

643. *P. de Heen.* Interprétation théorique des différents procédés d'électrisation et sur un nouveau mode d'induction électro-magnetique. B.A.B. 1902. 367.

644. **A. Masini.* Di una disposizione opportune per aumentare l' effetto delle onde elettromagnetiche sovra un circuito. N.C.P. (5) 3. 455.

645. *W. E. Williams.* On the magnetic change of length and electrical resistance on nickel. P.N. 4. 425.

646. **T. Levi-Cività.* Influenza di un schermo conduttore sul campo elettromagnetico di un corrente alternativa parallela allo schermo. N.C.P. (5) 3. 442.

647. **Severini.* L'elastità de l'etere nei fenomeni elettromagnetici. Pol M. 1901 Juni; Aug.; Sept.

648. *W. Kaufmann.* La déviation magnetique et électrique des rayons Becquerel et la masse électromagnetique des électrons. C.R. 135. 574.

649. *M. Planck.* Zur elektromagnet. Theorie der Dispersion in isotropen Nichtleitern. S.A.B. 1902. 470.

650. *E. van Everdingen* jun. Quelques remarques sur l'application de la théorie des électrons à l'augmentation de la résistance électrique dans un champ magnétique et au phénomène de Hall. C.P.L. 72.

651. *Z. E. Crook.* Demagnetizing effects of electromagnetically compensated alternating currents. A.J.S. 14. 133.

652. *N. Vasilesco-Karpen.* Sur la réaction magnétique de l'induit des dynamos. C.R. 134. 827.

653. *W. Peddie.* A construction for the force, at any point, due to electric point charges or ideal magnets, with an extension to continuous distributions. P.E.M.S. 20. 73.

Siehe auch 318; 571; 602; 605; 628.

F. Geodäsie.

Metrologie.

Siehe 289; 872; 873.

Niedere Geodäsie.

654. **W. Heyder.* Das Abstecken von Kreisbogenkurven ohne Längenmessung. F.C. 24. 266.

655. **E. Fabbri.* Sull' area di un poligonale convessa con l'applicazione alla permuta dei terreni. R.T.C. 14. 113; 129.

656. **G. Abbate-Daga.* Collegamento di un poligonale con un punto trigonometrico inaccessibile. R.T.C. 14. 1.

657. **G. Bonaccorsi.* Area di un poligono rilevato per camminamento e per intersezione. R.T.C. 14. 108; 121.

658. **F. Schrader.* Le tachéographe. V.I.G.C. 7. 110.

Siehe auch 887.

Höhere Geodäsie.

659. **F. R. Helmert.* Neuere Fortschritte in der Erkenntnis der math. Erdgestalt. V.I.G.C. 7. 5.

660. **Messerschmidt.* Die Gestalt der Erde in der modernen Geodäsie. J.P.G.Z. 10. 33.

661. **C. W. Wirtz.* Die Kimmtiefe auf der ellipsoidischen Erdfigur. M.R.B. 12. 837.

662. **G. B. Maffiotti.* I sistemi di proiezione nei rilevamenti catastali moderni. R.T.C. 14. 9; 29; 54; 65.

663. **O. Zanotti-Bianco.* Dimostrazione elementare del teorema di Clairant. R.T.C. 14. 17; 38; 58.

664. **W. C. Bunnel.* Controlling a topographical survey. E.N. 45. 115.

Markscheidekunst.

Siehe 21.

Topographie.

665. *S. Günther.* Über gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. S.A.M. 1902. 17.

Siehe auch 664; 888.

Kartenprojektion.

666. **K. Peucker.* Drei Thesen zum Ausbau der theoretischen Kartographie. G.Z. 8. 65; 145; 204.

667. **K. Peucker.* Zur kartographischen Darstellung der dritten Dimension. G.Z. 1901. 22.

668. *L. Klerič.* Konstruktion der Parallelkreisbilder im Netze der Mercatorprojektion. A.H. 30. 343.

669. *C. E. Stromeyer.* Surface equivalent projections. V.I.G.C. 7. 99.

Siehe auch 110.

G. Astronomie.

Theoretische Astronomie.

670. *M. Bronska.* Wyrażenia spółczynników w rozwinięciach na szeregi anomalii mimośrodowej, anomalii prawdziwej i promienia wodzącego drogi ciala niebieskiego (Ausdrücke der Koeffizienten in den Entwickelungen der wahren und der exzentrischen Anomalie und des Radius-Vektor der Bahn eines Himmelskörpers.) W.M. 6. 266.

671. **P. Harzer.* Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach 3 Beobachtungen P.S.K. 11. 128.

672. **A. Ivanov.* O schodimosti rjadov etc. (Über die Konvergenz der Reihen, welche zur Berechnung der Koordinaten der elliptischen Bewegung dienen.) B.R.A.G. 8. 95.

673. **A. Ivanov.* Geometričeskoe značenie ekliptikalnych i ekvatorialnych postojannych etc. (Über die geometrische Bedeutung der ekliptikalen und äquatorialen Konstanten, welche zur Berechnung der Ephemeride irgend eines Himmelskörpers dienen.) B.R.A.S. 8. 98.

674. *M. C. Taylor.* The computation of an ephemeris of a planet or a comet. P.A. 9. 311.

675. **C. V. L. Charlier.* On periodic orbits. M.L.A.O. 18.

676. **H. C. Plummer.* On periodic orbits in the neighbourhood of centres of libration. M.N.A.S. 62. 6.

677. *E. O. Lovett.* Note on Gylden's equations of the problem of 2 bodies with masses varying with the time. A.N.K. 158. 337.

678. **R. v. Kövesligethy.* Über die Achsendrehung der Fixsterne. B.M.N. 17. 166.

679. *Ö. Bergstrand.* Sur la parallaxe d'une étoile dans le voisinage de 61 Cygne. B.V.A.S. 58. 429.

680. **G. W. Hill.* On the use of the sphero-cone in astronomy. A.J.B. 22. 53.

Siehe auch 69; 75; 76; 114; 421.

Sonnenbewegung.

681. **J. G. Potter.* A new determination of the solar motion. A.J.B. 21. 134.

682. **W. W. Campbell.* A preliminary determination of the motion of the solar system. A.J.C. 13. 80; P.A.S.F. 13. 51.

683. **L. Boss.* Tentative researches upon precession and solar motion. A.J.B. 21. 161.

684. **W. Sandemann.* The path of the sun. K.L. 24. 62.

Erdbewegung.

685. **C. Flamarion.* Les 12 mouvements de la Terre. B.S.A.F. 15. 262.

686. *D. Hector.* The equatorial component of the earths motion in space. T.N.Z.I. 34. 513.

687. *F. Folie.* Sur les variations journalières de la latitude et du méridien dans le système de l'axe instantané. B.A.B. 1902. 201.

688. **T. Albrecht.* Die Veränderlichkeit der geographischen Breiten. V.I.G.C. 7. 18.

689. **S. C. Chandler.* Definitive formules for computing variations of latitude. A.J.B. 21. 119.

690. *A. V. Baecklund.* Ett bidrag till teorien för polens rörelse. A.V.A.S. 27. No. 1.

691. *J. Péroche.* Le balancement polaire. A.S.G.N. 29. 215.

692. **R. S. Woodward.* The effects of secular cooling and meteoric dust on the length of the terrestrial day. A.J.B. 21. 169; S. 14. 402.

Siehe auch 264; 532; 752; 759; 760; 770; 773; 795.

Mondbewegung.

693. *H. Andoyer.* Sur l'accélération séculaire de la longitude moyenne de la lune. C.R. 135. 432.

Siehe auch 771.

Planetenbewegung.

694. **F. R. Moulton.* A general method of determining the elements of orbits of all excentricities from 3 observations. A.J.B. 22. 43; S. 14. 399.

695. **J. Riniker.* Ein empirisches Gesetz über die Achsendrehung der Planeten. A.R.L. 3. 324.

696. **W. K. Pickering.* Explanation of the inclination of the planetary axes. A.J.B. 22. 56.

697. **A. Souleyre.* Les inégalités de Mercure et la périodicité des taches solaires. B.S.A.F. 15. 402.

698. *Deichmüller.* Erste Bestimmung der Rotationszeit des Planeten Eros. S.N.G.B. 1901. A. 37.

699. *H. Poincaré.* Les solutions périodiques des planètes du type d'Hécube. B.A. 19. 177.

700. *H. Poincaré.* Sur les planètes du type d'Hécube. B.A. 19. 289.

Siehe auch 715.

Kometenbewegung.

701. **J. Mizuhara.* Determination of the elements of parabolic orbit of a comet by graphical process. J.T. 8. 215.

Meteoritenbewegung.

702. *O. Callandreau.* Sur quelques particularités de la théorie des étoiles filantes. C.R. 135. 557.

703. **B. Cookson.* On the accuracy of eye-observations of meteors and the determination of their radiant point. M.N.A.S. 61. 132; 618. — *H. C. Plummer* 368.

704. *G. Grundmann.* Über die Bahn des am 15. Juli 1900 vornehmlich in Schlesien beobachteten hellen Meteors. J.S.G. 78. 37.

Doppelsternbewegung.

705. **H. N. Russell.* An improved method of calculating the orbit of a spectroscopic binary. A.J.C. 15. 252.

706. *V. Alberti.* Su la determinazione grafica dell' orbita reale nella teoria delle stelle doppie. R.A.N. (3) 8. 108.

Finsternisse.

707. **G. Grablovitz.* Calcolo approssimativo della congiunzione apparente per la occultazioni lunari. M.S.S.I. 29. 194.

708. **H. C. Plummer.* On a method of reducing occultations of stars by the moon. M.N.A.S. 61. 145.

709. **M. Pevcov.* Predvyčislenie pokrytii etc. (Abgekürzte Methode einer Vorausberechnung der Fixsternbedeckungen vom Monde und der Sonnenfinsternisse für gegebene Örter). B.R.A.G. 8. 106.

Störungen.

710. **T. Levi-Cività.* Sulla forma dello sviluppo della funzione perturbatrice. A.I.V. 3. 654.

711. *Simonin.* Sur les équations canoniques et la fonction perturbatrice. B.A. 19. 129.

712. **J. Morrison.* General perturbations and the perturbative function. P.A. 9. 130; 249; 436.

713. *O. Callandreau.* Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. J.E.P. (2) 7. 29.

714. **P. V. Neugebauer.* Ein Beitrag zur Theorie der speziellen Störungen. M.U.S.B. 1. 71.

715. *C. B. S. Cavallin.* Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets. B.V.A.S. 58. 685.

716. **C. V. L. Charlier.* Zur Theorie der säkularen Störungen. M.L.A.O. 15.

717. **G. Norén* und *S. Raab.* Hilfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten. M.L.A.O. 2.

718. **A. Idman.* Bemerkungen zu einem Satz von Leverrier die sekularen Störungen der kleinen Planeten betreffend. M.L.A.O. 14.

719. **O. Callandreau.* Propriétés d'une certaine anomalie pouvant remplacer les anomalies déjà connues dans le calcul des perturbations des petites planètes. C.R. 134. 1478; 135. 8.

Vielkörperproblem.

720. **A Hall.* The problem of 3 bodies. A.J.B. 21. 113.

Siehe auch 89; 188.

Kosmologie.

721. **A. Gareis.* Beiträge zur Cosmogenie. M.A.G.S. 29. 877.

722. *P. Barbarin.* Sur le paramètre de l'Univers. P.S.B. 1900—1901. 71.

723. **Lord Kelvin.* On the clustering of gravitational matter in any part of the Universe. R.B.A. 71. 563.

724. **B. S. Woodward.* The energy of condensation of stellar bodies. S. 15. 262.

725. **R. v. Kövesligethy.* Az égi testek fejlödése és a Föld kora. (Entwicklung der Himmelskörper und Alter der Erde). M.T.E. 19. 178.

726. **P. Rudzki.* O wieku ziemi (Über das Alter der Erde). C.A.C. 41. 96.

727. **du Ligondès.* Sur les planètes télescopiques. B.S.A.F. 15. 358.

728. *L. Picart.* Sur une hypothèse concernant l'origine des satellites. C.R. 134. 1409.

729. **T. C. Chamberlin.* On a possible function of disruptive approach in the formation of meteorites, cometes and nebulae. A. J. C. 14. 17.

Siehe auch 131; 212.

Astrophysik.

730. **S. A. Saunder.* The stereographic projection of the celestial sphere. J. B. A. A. 11. 209.

731. *M. P. Rudzki.* O prawie rozkladu temperatury wewnątrz ciala gazowego niebieskiego. (Über das Gesetz der Verteilung der Temperatur im Innern eines gasförmigen Himmelskörpers.) T. W. 13. 341.

732. *P. Rudzki.* Note sur la loi de la température dans un corps céleste gazeux. B. A. 19. 134.

733. *C. Barus.* The flower-like distortion of the coronas due to graded cloudy condensation. A. J. S. (4) 13. 309.

734. *F. Biske.* Próba zastosowania badań hydrodynamicznych do protuberancyj slonecznych. (Versuch einer Anwendung der hydrodynamischen Theorie auf die Sonnenprotuberanzen). W. M. 6. 147.

735. *A. Wolfer.* Die Wolfschen Tafeln der Sonnenfleckenhäufigkeit. M. Z. 19. 193.

736. **A. S. Young.* On the density of the solar nebulae. A. J. C. 13. 338.

737. *G. H. Bryan.* The kinetic theory of planetory athmospheres. N. 66. 54.

738. **S. Kalischer.* Über den Lichtdruck und dessen Einfluß auf die Gestalt der Kometenschweife. W. B. 2. 165; 192.

739. *J. Halm.* Über den Gleichgewichtszustand der Sternathmosphären. A. N. K. 160. 85.

Siehe auch 417; 457; 484; 531; 692; 729; 752.

Sphärische Astronomie.

740. **E. Holmes.* A chapter for astronomical beginners. J. B. A. A. 11. 153.

741. **J. Fulst.* Zur Bestimmung des Azimuts. H. H. 38. 304.

742. **Radler de Aquino.* Nova maneira de calcular rapidamente o „angulo horario" d'um astro. R. M. B. 38. 653.

743. *A. Wedemeyer.* Bemerkungen über die Berechnung der Höhe eines Gestirns. A. H. 30. 399.

744. *H. Kimura.* Formula and tables for determining the time with a portable transit instrument. J. T. 8. 209; 9. 7.

Aberration.

745. *A. Gullstrand.* Allgemeine Theorie. der monochromatischen Aberrationen. N. A. U. (3) 20.

746. **J. Plassmann.* Abberation und Parallaxe. M. V. A. P. 11. 119.

747. *F. Folie.* Sur la détermination de la constante de l'aberration au moyen des observations de Struve. B. A. B. 1901. 455.

Chronologie.

748. *A. Lafon.* Calcul des fêtes de Paques pendant 7 siècles. M. A. Ly. (3) 6. 47.

Gnomonik.

749. **N. Lattey.* How to make a sundial II. E. M. W. 73. 215.

750. **C. Weidenfeld.* Sonnenuhren und ihre Mängel. M. V. A. P. 12. 13; 24.

H. Geophysik.

Geophysik.

751. **A. Nippoldt* jr. A theorem on Fourier series and its application in geophysics. T. M. W. 7. 51.

752. **G. K. Burgess.* The value of the gravitation constant. P. R. 14. 257.

753. *F. R. Helmert.* Über die Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigung auf ein gemeinsames Niveau. S. A. B. 1902. 843.

754. *M. Contarini.* Sul problema generale della sismografia. R. A. L. R. 11 A. 380; 433; 472; 519. 11 B. 132.

755. *H. Rousseau, H. Brocard.* Influence du vent sur la production des vagues. J. M. 9. 196. — *E. Malo* 199.

756. *J. Schubert.* Der Wärmeaustausch im festen Erdboden, in Gewässern und in der Atmosphäre. D. V. N. 73. 213.

757. *H. H. Clayton.* The effect of secular cooling and meteoric dust on the length of the day. S. M. L. 60. 190.

758. *E. Nordmann.* La cause de la période annuelle des aurores boréales. C. R. 134. 751.

759. **C. V. L. Charlier.* Contributions to the astronomical theory of an ice age. M.L.A.O. (2) 3.

760. *C. V. L. Charlier.* Über die astronomische Erklärung einer Eiszeit. D.V.N. 73. 10.

Siehe auch 174; 692; 725; 726; 892; 893.

Mathematische Meteorologie.

761. **L. de Marchi.* Note di meteorologia matematica. R.I.L. (2) 35. 254.

762. **M. Dechevrens.* Calcul des séries de Fourier ou de Bessel appliquées à la métérorologie. M.A.L.R. 17.

763. **W. H. Dines.* The element of chance applied to various meteorological problems. Q.J.M.S. 28. 53.

764. **J. Milne.* Meteorologic phenomena in relation to changes in the vertical. Q.J.M.S. 28. 9.

765. *N. Ekholm.* Über die Höhe der homogenen Atmosphäre und die Masse der Atmosphäre. M.Z. 19. 251.

766. *V. Bjerknes.* Cirkulation relativ zu der Erde. B.V.A.S. 58. 739; M.Z. 19. 97.

767. **R. A. Edwin.* On the mechanical principle of atmospheric circulation. Q.J.M.S. 28. 33.

768. **H. H. Clayton.* The daily barometric wave. S. 15. 232.

769. *O. L. Fassig.* The westward movement of the daily barometric wave. M.W.R. 29. 495.

770. *L. G. Tippenhauer.* Dynamische Effekte der doppelten Erdbewegung auf die Atmosphäre. A.A.S. 23. No. 4.

771. **A. Poincaré.* Combinaison des effets barométriques de la révolution synodique et de la rotation terrestre sur l'ensemble du globe. A.S.M.F. 50. 96.

772. *H. Clayton.* Le cyclone d'éclipse, le cyclone et l'anticyclone diurne des régions tempérées. A.S.M.F. 50. 60.

773. **V. W. Ekmann.* Om jordrotationens inverkan pa vindströmmar i hafvet. N.M.N. 40.

774. **F. H. Bigelow.* Studies on the statics and kinematics of the athmosphere in the United States. M.W.R. 30. 13; 80; 163; 250; 303.

775. **R. Börnstein.* Die atmosphärische Strahlenbrechung des Lichtes und des Schalles. N.S. 1. 63.

776. **L. Terkan.* A refractis eś az extinctis elmélete. (Theorie der Refraktion und Extinktion.) P.A.O.B. 2.

777. **V. E. Boccara.* Sulle variazioni diurne della rifrazione atmosferica. M.S.S.J. 30. 162.

778. **G. Saija.* Sulle variazioni della rifrazione atmosferica. M.S.S.J. 28. — *V. E. Boccara* 30.

779. **A. Riccò.* Deformazione del disco solare all' orizzonte per causa della rifrazione atmosferica. M.S.S.J. 30. 96.

780. **J. Baillaud.* Sur les variations de la réfraction astronomique. J.P. (4) 1. 319.

781. **A. Arendt.* Über die scheinbare Abflachung des Himmelsgewölbes und die Vergrößerung der Gestirne am Horizont. W.A.B. 2. 125.

782. *A. Zanon.* Sul fenomeno della luna orizzontale. R.F.M. 3. 761.

783. *E. Oddone.* Sul coefficiente medio di trasparenza dell' aria per grandi visuali terrestri. R.I.L. (2) 34. 511.

784. *G. J. Bailey.* The duration of the twilight within the tropics. S. 15. 286.

785. **Robertson.* On the equilibrium of a column of air and the athmospheric temperature. P.P.S.G. 31.

786. **A. Weilenmann.* Die Wärme in der Luftsäule und ihre Beziehung zu den Gewittern. M.P.G.Z. 1902. No. 2.

787. *J. W. Sandström.* Über die Beziehungen zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. B.V.A.S. 58. 759. M.Z. 19. 161. — *V. Bjerknes* B.V.A.S. 58. 775.

788. **H. M. Watts.* The mechanism and causation of hot waves. J.P. (4) 1. 285.

789. *V. Conrad.* Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität VIII-IX. S.A.W. 111. 333.

790. *—. Die Ebertschen Untersuchungen über atmosphärische Elektrizität. M.R.T.G. 1902. Heft 3.

791. *E. v. Oppolzer.* Zur Theorie der Scintillation der Fixsterne. S.A.W. 110. 1239.

792. *H. Gravelius.* Methodische Bemerkungen zur Diskussion von Periodizitäten in der Klimatologie. S.J.D. 1902. 24.

Siehe auch 248; 527; 730; 756; 891.

Ebbe und Flut.

793. **E. Plumstead.* The new theory of tide. N.M.L. 70. 183.

794. **Spindler.* Prilivy i otlivy etc. (Bearbeitung der Flutbeobachtungen

mit Hilfe der harmonischen Analyse). A.H.P. 22 und 23.

795. *F. Folie.* Variation de latitude due aux marées. B.A.B. 1901. 520.

Nautik.

796. *E. Knipping.* Zur Lösung nautisch-astronomischer Aufgaben, wenn keine große Genauigkeit verlangt wird. A.H. 30. 257.

797. **H. Michiels.* Détermination de l'heure au moyen d'un gnomon à suspension. B.S.B.A. 6. 318.

798. *—. Determinacion del estado absoluto de un cronometro per medio de pares de estrellas de igual altura. R.G.M.M. 49. 477.

799. **D. Mars.* Eenige beschouwingen over plaats en tijdsbepaling. D.Z.R. 23. 238; 314; 399; 513.

800. **Marcuse.* Die neuere Entwicklung der geographischen Ortsbestimmungen zu Lande und auf See. M.R.B. 12. 1307.

801. **H. Heyenga.* Neue direkte Methode der Ortsbestimmung. H.H. 38. 378.

802. **C. Decante.* Détermination de position du navire quand l'horizon n'est pas visible. R.M.M.P. 147. 491.

803. **A. Stupar.* Einige Bemerkungen über die astronomische Ortsbestimmung. M.A.S.S. 29. 483.

804. **H. Heyenga.* Neue Methode der Ortsbestimmung. H.H. 38. 378.

805. **E. Gelcich.* Di un metodo per la determinazione del „punto nave" independente da eventuali errori istrumentali e di depressione. R.M.R. 34d. 241.

806. *Radler de Aquino.* A soluçao geral do problema do ponto servado no mar ou o methodo de Marcq St. Hilaire. R.M.B. 38. 1048.

807. **Radler de Aquino.* Methodo de Marcq Saint Hilaire. R.M.B. 37. 280.

808. *P. Hagemann.* Die Marcq St. Hilairesche Methode kombiniert mit der aus der Meridianhöhe entnommenen Breite. A.H. 30. 547.

809. **G.* Über die Bestimmung des Schiffsorts mit Hilfe von drei Standlinien. M.R.B. 12. 739.

810. **G. Bolwin.* Standlinien als Längen- und Breitenrechnung. H.H. 38 555; 568.

811. **H. C. Comstock.* Establishing a meridian line. P.A. 9. 246.

812. **P. van der Zee.* Meridiaanshoogte en grootste hoogte. D.Z.R. 23. 87.

813. **P. W. Sachse.* Sters observatie en hoogte lijnen. D.Z.R. 23. 106.

814. **A. E. Arkenbout-Schokker.* Het gebruyk van hoogte lijnen. D.Z.R. 23. 234.

815. **L. Roosenberg.* Over den invloed van gelijke fouten in de hoogten op het bestek door hoogtelijnen. R.Z.R. 23. 146.

816. **O. Fulst.* Zur Bestimmung des Azimuts. H.H. 38. 304.

817. **E. Molfino.* Sulla misura delle distanze in mare. R.M.R. 34a. 120.

818. *A. Wedemeyer.* Reduktion der Monddistanzen. A.H. 30. 533.

819. *C. Börgen.* Über die Anwendung der Thomsonschen Sumnertafeln zur Ermittlung der Gestirnshöhe bei Anwendung der Methode von Marcq St. Hilaire. A.H. 30. 336. — *Gotzhein* 397.

820. **P. W. Sachse.* Het resultant van de gewijzigde Sumner en Villarceau methode door berekening en door constructie. D.Z.R. 23. 171.

821. **H. B. Goodwin.* The mercators chart as a exmeridian-table. N.M.L. 70. 431; 600. — *E. D. Law* 498. — *H. E. Purey Cust* 801.

822. **E. Gelcich.* Die Koppeltafel. H.H. 38. 76.

823. *H. B. Goodwin.* Napiers analogies and the double chronometer. N.M.L. 70. 89.

Siehe auch 70; 234; 894.

I. Naturwissenschaft.

Mathematische Chemie.

824. **W. H. Alexeieff.* Grundlage der symbolischen Theorie der Invarianten. (russ.) A.U·J. 1901. No. 2.

825. *H. Euler.* Zur Theorie der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit. Z.P.C. 40. 498. — *R. Wegscheider* 41. 62.

826. **P. Saurel.* On the triple point. J.P.C. 6. 399.

827. *P. Hellström.* Om grundämnenas uppkomst. B.V.A.S. 58. 351.

828. *G. Bodländer* u. *R. Fittig.* Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung II. Z.P.C. 39. 597.

829. *J. H. Vincent.* On a general numerical connexion between the atomic weights. P.M. 4. 103.

830. *Lord Kelvin.* On the weights of atoms. P.M. 4. 177; 281.

831. *E. Warburg.* Über die Bildung des Ozons bei der Spitzenentladung in Sauerstoff. A.P.L. 9. 781.

832. *L. Bruner.* Chemische Dynamik der Bromsubstitution. Z.P.C. 41. 513.

833. *W. Müller.* Über die Zersetzungsgeschwindigkeit der Brombernsteinsäure in wäfsriger Lösung. Z.P.C. 41. 483.

834. *W. Federlin.* Die Reaktion zwischen Kaliumpersulfat, Jodwasserstoff und phosphoriger Säure. Z.P.C. 41. 565.

835. *P. Walden* i *M. Centnerschwer.* Ciekly dwutlenek siarki jako rozpuszczalnik. (Über die Lösungen in flüssigem Schwefelsäureanhydrid.) W.M. 6. 213.

836. *A. Mittasch.* Über die chemische Dynamik des Nickelkohlenoxyds. Z.P.C. 40. 1.

837. *K. Arndt.* Zersetzungsgeschwindigkeit des Ammoniumnitrits. Z.P.C. 39. 64.

838. *B. D. Zacharias.* Über den Zustand und die Eigenschaften der Kolloide. Z.P.C. 39. 468.

839. *V. Henri.* Über das Gesetz der Wirkung des Invertins. Z.P.C. 39. 194.

840. *R. Wegscheider.* Über die Verseifung von Karbon- und Sulfonsäureestern. Z.P.C. 41. 52.

841. **C. E. Fawsitt.* Zersetzung des Harnstoffs. Z.P.C. 41. 601.

842. **P. Saurel.* On a theorem of Tammann. J.P.C. 6. 410.

843. *C. H. Ketner.* Gleichgewichte im System: Natriumcarbonat, Äthylalkohol und Wasser. Z.P.C. 39. 641.

Siehe auch 486; 487; 581.

Phasenlehre.

844. **J. E. Trevor.* A derivation of the phase rule. J.P.C. 6. 85.

845. *W. D. Bancroft.* Analytical chemistry and the phase rule classification J.P.C. 6. 106.

846. *A. Meerburg.* Beitrag zur Kenntnis der Gleichgewichte im System dreier Komponenten, wobei zwei flüssige Schichten auftreten können? Z.P.C. 40. 641.

847. *F. Caubet.* Die Verflüssigung von Gasgemischen. Z.P.C. 40. 257. — *J. P. Kuenen* 41. 43.

Siehe auch 347; 485.

Elektrolyse.

848. *W. Nernst* u. *E. K. Riesenfeld.* Über elektrolytische Erscheinungen an der Grenzfläche zweier Lösungsmittel. N.G.G. 1901. 54; A.P.L. 8. 600.

Photochemie.

849. *E. Goldberg.* Beitrag zur Kinetik photochemischer Reaktionen. Z.P.C. 41. 1.

Thermochemie.

850. *de Forcrand.* Sur la composition des hydrates de gaz. C.R. 134. 835.

Elektrochemie.

851. **L. Kahlenberg.* Current electrochemical theories. T.A.E.S. 1. 119.

852. **Lori.* Le ipotesi moderne sopra il meccanismo dei fenomeni elettrochimici. L.E. 10. No. 5.

853. *F. Haber.* Eine Bemerkung über die Amalgampotentiale und über die Einatomigkeit in Quecksilber gelöster Metalle. Z.P.C. 41. 399.

Mathematische Physiologie.

854. *A. Broca* et *D. Sulzer.* La sensation lumineuse en fonction du temps. C.R. 134. 831.

K. Technik.

Technische Mechanik.

855. **H. Frahm.* Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen. M.F.I. 6. 33.

Siehe auch 154; 290.

Maschinenlehre.

856. **R. Lezé.* Une machine thermique idéale. R.G.O. 13. 93.

857. **J. Nadal.* Théorie de la machine à vapeur. A.F. 29. 73.

858. **L. Anspach.* Moderne Streitfragen in der Dampfmaschinentheorie. R.G.O. 12. 313.

859. ***G. Lindner**. Dampfhammerdiagramme. M.F.I. 4. 21.

860. *R. Schreber*. Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. P.Z. 4. 117.

861. **Belluzzo*. Il calcolo pratico delle turbine a vapore. Pol M. 1901. Mai.

862. **E. Meyer*. Untersuchungen am Gasmotor. M.F.I. 1901. 1.

863. **E. Körting*. Untersuchungen über die Wärme der Gasmotorencylinder. M.F.I. 4. 46.

864. **A. Staus*. Beitrag zur Wärmebilanz des Gasmotors. M.F.I. 4. 32.

Siehe auch 190; 191; 193; 465; 491; 594; 652; 855.

Eisenbahnwesen.

Siehe 192.

Uhrmacherkunst.

Siehe 896.

Hydrologie.

865. *E. Maillet*. Sur la prévision des débits minima des sources de la Vanne. C.R. 134. 1103.

Siehe 665.

Luftschiffahrt.

866. *Torres*. Sur un avant-projet de ballon dirigeable à quille intérieure. C.R. 135. 141.

Mathematische Musik.

867. *P. v. Jankó*. Über mehr als 12stufige gleichschwebende Temperaturen. B.A.M. 36.

868. *F. Storch*. Über die Wahrnehmung musikalischer Tonverhältnisse. Z.P.O. 27. 361.

Beleuchtungslehre.

869. *E. Weinnoldt*. Über die Konstruktion von Isophengen. A.Gr. (3) 4. 22.

Photographie.

870. **M. J. Wilbert*. On the reversal of the photographic image and its subsequent developement in actinic light. J.F.I. 153. 231.

Elektrotechnik.

871. *G. Benischke*. Die Schutzvorrichtungen der Starkstoßtechnik gegen atmosphärische Entladungen. D.V.N. 73. 84.

Telegraphenwesen.

Siehe 371; 895.

Instrumentenkunde.

872. *J. Pernet*. Über einen Drehcomparator zur Vergleichung und Ausdehnungsbestimmungen von Maßstäben. M.P.G.Z. 1901. 7.

873. **G. Lippmann*. Méthode pour vérifier si une glissière ou une règle sont rectilignes. J.P. (4) 1. 626.

874. *R. Straubel*. Über den Zusammenhang zwischen Absorption und Auflösungsvermögen. P.Z. 4. 74.

875. **F. L. O. Wadsworth*. Description of a new type of focal plane spectroscope. M.S.P.A.O. 7.

876. **F. L. O. Wadsworth*. The theory of the ocular spectroscope. M.S.P.A.O. 6.

877. **J. W. Gordon*. Diffraction theory of the microscope. J.R.M.S. 1901. 353.

878. *H. Siedentopf*. Über Mikrospectralobjektiv nach Engelmann mit ausklappbaren geradsichtigen Gittern nach Thorp und ausklappbarem Polarisator. S.A.B. 1902. 711.

879. *H. Siedentopf*. Über ein Mikrospektralphotometer nach Engelmann mit Gitterspektrum. S.A.B. 1902. 706.

880. *G. Sagnac*. Principe d'un nouveau réfractomètre interférentiel. C.R. 134. 820.

881. **A. Cornu*. Démonstration et usage des formules relatives au réfractomètre. B.S.M.F. 25. 54.

882. **P. Chappuis*. Notes on gasthermometre. P.P.S.L. 18. 89.

883. *E. Marx*. Über ein Hochfrequenzmeßgerät zur Bestimmung von Periode, Kapazität und Selbstinduktion eines Entladungskreises. B.G.L. 53. 437.

884. *W. B. v. Czudnochowski*. Ein Beitrag zur Frage der elektrischen Tiefenthermometer. A.H. 30. 264.

885. *H. du Bois*. Über störungsfreie Differentialmagnetometer. A.P.L. 9. 938.

886. *Messerschmitt*. Deviationsbestimmung der Kompasse durch Schwingungszeiten. A.H. 30. 304.

887. **K. Haussmann*. Zur Theorie des Theodolits. M.A.M.F. (2) 1.

888. **O. Jacoangeli.* Teoria dei strumenti topografici. R. T. C. 14. 136; 145.

889. *C. Bender.* Vortrag über Zeisssche Relieffernrohre und tereoskopische Entfernungsmesser. M. P. D. 17. 20.

890. *C. Klein.* Totalreflektometer mit Fernrohrmikroskop. S.A.B. 1902. 653.

891. *W. Trabert.* Die Korrektion der Registrierapparate wegen Trägheit. M.Z. 19. 136.

892. **A. Cornu.* Über den Einfluß des Erdmagnetismus auf den Gang von magnetischen Chronometern. R.I.H. 1. No. 19—20.

893. *G. de Cadet.* Dispositif d'électroscope athmosphérique. C.R. 134. 745.

894. *F. Nušl* et *J. Frič.* Note sur 2 appareils sans niveau pour la détermination de l'heure et de la latitude. B.A. 19. 261.

895. *E. Branly.* Recepteur de télégraphie sans fil. C.R. 34. 1197.

896. **E. Soulié.* Détermination de la méridienne en vue du réglage des montres. Co. (2) 44. 808.

897. *A. Schwassmann.* Der Stereokomparator. A.H. 30. 347.

Siehe auch 23; 24; 204; 335; 387; 394; 395; 411; 490; 564; 565; 576; 629—631; 658; 680.

Über die günstigsten Punktlagen beim „Einschneiden".

Von Otto Eggert in Berlin.

(Mit einer Doppeltafel in Lithographie.)

Seit fast drei Jahrhunderten werden die einfachen trigonometrischen Punktbestimmungen durch „Vorwärtsabschneiden", „Seitwärtsabschneiden" und „Rückwärtseinschneiden" von allen Geodäten praktisch ausgeübt. Fast ebenso alt ist wohl das Bestreben, sich über die Einflüsse der Messungsfehler in der Anwendung dieser Methoden bei verschiedener Lage der in Betracht kommenden Messungspunkte Rechenschaft zu geben, und einzelne Beziehungen sind wohl bald nach der Erfindung der Messungsmethoden erkannt worden. Die Untersuchungen ergaben jedoch selten übereinstimmende, häufig sogar sich widersprechende Resultate, je nach den Voraussetzungen, von denen man ausging, oder auch nach dem Genauigkeitsmaß, das zur Anwendung gelangte. Erst die Entwicklung der Fehlertheorie, und namentlich die Einführung der Fehlerellipse gaben geeignete Mittel, einwandfreie Untersuchungen über die beste Ausnutzung der drei Methoden anzustellen. Die Arbeiten von Helmert und Jordan[1]) sind auf diesem Gebiet grundlegend gewesen.

In der erstgenannten Abhandlung wird in dem hier in Betracht kommenden Teil vorzugsweise die Vergleichung der Genauigkeit der einzelnen Methoden bei Aufwendung gleicher Mühe auf Grund der Fehlertheorie durchgeführt, während Jordan die Genauigkeit verschiedener Fälle der einzelnen Methoden mit einander vergleicht.

Wenn es auch nie möglich sein wird, allgemeine Gesetze aufzustellen, die im stande sind, die Fragen der Praxis erschöpfend zu beantworten, so gibt es doch sehr viele praktische Fälle, in denen die gefundenen Gesetze mit Vorteil angewendet werden können.

1) Helmert, Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XIII 1868. S. 73 u. ff. Jordan, Über die Genauigkeit einfacher geodätischer Operationen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XVI. 1871. S. 397 u. ff. Vgl. auch Handbuch der Vermessungskunde. 3. Aufl. Bd. I. 1888. S. 296 u. ff.

In der vorliegenden Abhandlung ist die Frage nach der günstigsten Punktlage bei den einzelnenen Methoden hauptsächlich Gegenstand der Erörterung.

Da die Untersuchungen von der Fehlerellipse ausgehen, so sollen zunächst auf einfachem Wege die Formeln der Fehlerellipse entwickelt werden.

I. Die Fehlerellipse.

Zur Bestimmung der rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Punktes P seien die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + a_1 x + b_1 y \\ \lambda_2 &= -l_2 + a_2 x + b_2 y \\ &\vdots \\ \lambda_n &= -l_n + a_n x + b_n y \end{aligned}$$

mit gleichen Gewichten gegeben, worin die λ die Verbesserungen der Beobachtungen l, und die a und b gegebene Koeffizienten sind. Hieraus geht bekanntlich das folgende System der Normalgleichungen hervor:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y - [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y - [bl] &= 0, \end{aligned}$$

aus dem die Werte der Unbekannten und deren Gewichte berechnet werden können.

Drehen wir nun das Koordinatensystem rechtsläufig um den Winkel φ, und bezeichnen die Koordinaten des Punktes P im neuen System mit x' und y', so ist

$$\begin{aligned} x' &= \quad x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{aligned}$$

oder in einfacher Form

$$\begin{aligned} x' &= \quad ux + vy \\ y' &= -vx + uy. \end{aligned}$$

Da also x' und y' lineare Funktionen von x und y sind, so erhalten wir für die Gewichte von x' und y' nach der Ausgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_{x'}} &= \frac{u^2}{[aa]} + \frac{(v\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]} \\ \frac{1}{g_{y'}} &= \frac{v^2}{[aa]} + \frac{(u\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}, \end{aligned}$$

worin bekanntlich

$$(v \cdot 1) = v - \frac{[ab]}{[aa]} u$$

$$(u \cdot 1) = u + \frac{[ab]}{[aa]} v$$

ist.

$$\frac{1}{g_{x'}} = \frac{\cos^2 \varphi}{[aa]} + \frac{([aa] \sin \varphi - [ab] \cos \varphi)^2}{([aa][bb] - [ab][ab])[aa]}$$

$$\frac{1}{g_{y'}} = \frac{\sin^2 \varphi}{[aa]} + \frac{([aa] \cos \varphi + [ab] \sin \varphi)^2}{([aa][bb] - [ab][ab])[aa]}$$

oder umgeformt

$$\frac{1}{g_{x'}} = \frac{([bb] - [aa]) \cos^2 \varphi - [ab] \sin 2\varphi + [aa]}{[aa][bb] - [ab]^2}.$$

Ist γ derjenige Wert von φ, für den $\frac{1}{g_{x'}}$ ein Maximum wird, so haben wir zur Bestimmung von γ

$$-([bb] - [aa]) \sin 2\gamma - 2[ab] \cos 2\gamma = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{2[ab]}{[bb] - [aa]}.$$

Wir führen nun für φ eine neue Veränderliche φ' ein, die von der Richtung des Maximums von $\frac{1}{g_{x'}}$ aus gezählt wird, so daß

$$\varphi = \gamma + \varphi'$$

ist. Dann geht $\frac{1}{g_{x'}}$ über in

$$\frac{1}{g_{x'}} = \frac{([bb] - [aa])(\cos \gamma \cos \varphi' - \sin \gamma \sin \varphi')^2}{[aa][bb] - [ab]^2}$$

$$- \frac{[ab](\sin 2\gamma \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma \sin 2\varphi') + [aa]}{[aa][bb] - [ab]^2}$$

$$= \frac{1}{[aa][bb] - [ab]^2} \{([bb] - [aa])(\cos^2 \varphi' - \sin^2 \gamma \cos 2\varphi' - \tfrac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2\varphi')$$

$$- [ab](\sin 2\gamma \cos 2\varphi' + \cos 2\gamma \sin 2\varphi') + [aa]\}.$$

Zur Umformung dieses Ausdrucks mit Hilfe des vorstehenden Wertes von $\operatorname{tg} 2\gamma$ haben wir die bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin 2\gamma = \frac{\operatorname{tg} 2\gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma}} = \frac{-2[ab]}{\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}$$

$$\cos 2\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma}} = \frac{[bb] - [aa]}{\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} = \frac{\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2} - ([bb] - [aa])}{2\sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}.$$

Hiermit läßt sich $\frac{1}{g_{x'}}$ leicht umformen in

$$\frac{1}{g_{x'}} = \frac{[bb] + [aa] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}\,(\cos^2\varphi' - \sin^2\varphi')}{2([aa][bb] - [ab]^2)}$$

$$= \frac{\left([bb] + [aa] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}\right)\cos^2\varphi'}{2([aa][bb] - [ab]^2)}$$

$$+ \frac{\left([bb] + [aa] - \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}\right)\sin^2\varphi'}{2([aa][bb] - [ab]^2)}.$$

Setzen wir

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{[bb] + [aa] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}{2([aa][bb] - [ab]^2)} &= A^2, \\ \frac{[bb] + [aa] - \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4[ab]^2}}{2([aa][bb] - [ab]^2)} &= B^2, \end{aligned}$$

so ist die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{1}{g_{x'}} = A^2\cos^2\varphi' + B^2\sin^2\varphi',$$

bekanntlich die Polargleichung der Fußpunktskurve einer Ellipse mit den Halbachsen A und B.

Für $\frac{1}{g_{y'}}$ läßt sich das Ergebnis sofort hinschreiben, da in (2) nur φ' durch $90^0 + \varphi'$ zu ersetzen ist.

$$(2^*)\qquad \frac{1}{g_{y'}} = A^2\sin^2\varphi' + B^2\cos^2\varphi'.$$

Denken wir uns die dem Punkte P nach allen Richtungen hin zukommenden mittleren Fehler als Strecken aufgetragen und durch ihre Endpunkte Normalen gelegt, so schließen alle diese Normalen eine Ellipse ein, die die „mittlere Fehlerellipse" genannt wird, und deren Halbachsen $A\mu$ und $B\mu$ sind, wenn μ den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bezeichnet. Das Azimut γ der großen Achse ergibt sich aus

$$(3)\qquad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{-2[ab]}{[bb] - [aa]}.$$

Die Größen A und B sind abhängig von den drei Koeffizienten $[aa]$, $[bb]$ und $[ab]$ der Normalgleichungen. Setzen wir

$$\frac{[bb]}{[aa]} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{[ab]}{[aa]} = \beta,$$

so ist

$$A^2[aa] = \frac{\alpha + 1 + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}{2(\alpha - \beta^2)},$$

$$B^2[aa] = \frac{\alpha + 1 - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta^2}}{2(\alpha - \beta^2)},$$

wodurch einerseits die Berechnung der Fehlerellipse erleichtert ist, andrerseits aber auch die Möglichkeit gegeben wird, die Größen $A\sqrt{[aa]}$ und $B\sqrt{[aa]}$ in Tafeln mit den beiden Argumenten α und β zur Darstellung zu bringen. In Fig. 1 (siehe Tafel) ist eine solche Tafel angedeutet unter der Voraussetzung, daß man die Unbekannten x und y aus der Ausgleichung in dm erhält. Ist $[bb] > [aa]$, so ist

$$\frac{[aa]}{[bb]} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{[ab]}{[bb]} = \beta$$

zu setzen, und die Tafel gibt dann die Werte von $A\sqrt{[bb]}$ und $B\sqrt{[bb]}$.

Bei Benutzung einer solchen Tafel macht die Berechnung der Fehlerellipse weniger Mühe als die der mittleren Fehler in den Koordinaten x und y, die eine Beurteilung der Genauigkeit der Punktbestimmung nur nach zwei Richtungen hin gestatten.

Die Ausdrücke $\frac{\mu}{\sqrt{g_{x'}}}$ und $\frac{\mu}{\sqrt{g_{y'}}}$ geben die gleichzeitigen mittleren Verschiebungen des Punktes P in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen an. Es läßt sich nun die aus diesen beiden mittleren Verschiebungen resultierende mittlere Gesamtverschiebung berechnen. Wir gehen hierzu auf die von C. F. Gauß gegebene Definition des mittleren Fehlers zurück. Bezeichnen wir die in zwei aufeinander senkrechten Richtungen auftretenden wahren Fehler mit ε_1 und ε_2, so ist der wahre Fehler des Punktes

$$\varDelta = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2},$$

und wenn wir nun für ε_1 und ε_2 einen stetigen Verlauf zwischen bestimmten Grenzen $-\varepsilon_{\mathrm{I}}$, $+\varepsilon_{\mathrm{I}}$ und $-\varepsilon_{\mathrm{II}}$, $+\varepsilon_{\mathrm{II}}$, außerhalb deren sie nicht mehr vorkommen sollen, annehmen, so ist für den mittleren Fehler des Punktes nach C. F. Gauß

$$M^2 = \sum_{-\varepsilon_{\mathrm{I}}}^{+\varepsilon_{\mathrm{I}}} \sum_{-\varepsilon_{\mathrm{II}}}^{+\varepsilon_{\mathrm{II}}} \{ \varphi(\varDelta)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \},$$

worin $\varphi(\varDelta)$ bekanntlich die Wahrscheinlichkeit von $\varDelta$ ist. Es ist aber $\varphi(\varDelta) = \varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)$, also

$$M^2 = \sum_{-\varepsilon_{\mathrm{I}}}^{+\varepsilon_{\mathrm{I}}} \sum_{-\varepsilon_{\mathrm{II}}}^{+\varepsilon_{\mathrm{II}}} \{ \varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \}.$$

Wenn wir nun von der Annahme des stetigen Verlaufs von ε_1 und ε_2 absehen und ε_1 und ε_2 gleichsam sprungweise um $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_2$ wachsen lassen, so können wir für M^2 auch setzen

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)\,(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2,$$

wobei aber berücksichtigt werden muß, daß jetzt $\varphi(\varepsilon_1)\cdot d\varepsilon_1$ und $\varphi(\varepsilon_2)\cdot d\varepsilon_2$ die Wahrscheinlichkeiten dafür bezeichnen, daß ε_1 und ε_2 in den Intervallen ε_1 bis $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ und ε_2 bis $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$ liegen.[1]) Gleichzeitig sind die Grenzen der Integrale von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt, was nach der Definition von ε_{I} und $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ zulässig ist. Demnach ist

$$M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1^2 \varphi(\varepsilon_1)\,d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_2)\,d\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2 \varphi(\varepsilon_2)\,d\varepsilon_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon_1)\,d\varepsilon_1.$$

Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx = \mu_x^2$$

ist, so bleibt

$$M^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{\mu^2}{g_{x'}} + \frac{\mu^2}{g_{y'}}.$$

Aus (2) und (2*) erhalten wir

$$(4) \qquad M^2 = \mu^2(A^2 + B^2),$$

woraus ersichtlich ist, daß M von der Richtung der Koordinatenachsen unabhängig und deshalb sehr gut zur Beurteilung der Genauigkeit der Punktbestimmung geeignet ist.

Was nun die Frage nach der günstigsten Punktbestimmung anbetrifft, so kann man zunächst diejenige Bestimmung als die günstigste bezeichnen, in der die Halbachsen der Fehlerellipse möglichst klein sind, was durch das Minimum von M ausgedrückt wird. Zweitens kann man aber auch die Bedingung der nach allen Richtungen hin gleichmäßig guten Bestimmung stellen, die durch eine kreisförmige Fehlerellipse mit möglichst kleinem Radius erfüllt wird. Im folgenden sollen beide Gesichtspunkte erörtert werden, der erstere, weil er einwandsfreier ist, der letztere, weil er zu einfachen geometrischen Beziehungen führt.

---

1) Vgl. Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1872. S. 15.

II. Vorwärtsabschneiden.

Ein Punkt P sei durch Messung zweier Winkel von gleichem Gewicht von zwei gegebenen Festpunkten aus bestimmt. Obgleich keine überschüssigen Messungen vorliegen, können wir doch die Fehlergleichungen zur Gewichtsbestimmung aufstellen. Sie lauten

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1 x + b_1 y$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_2 x + b_2 y,$$

worin x und y die Koordinaten von P, die a und b die bekannten Richtungskoeffizienten bezeichnen. Nach (1) haben wir dann

$$A^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2)^2 + 4(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}}{2(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}.$$

Sind die Azimute der Visierstrahlen von P nach den Festpunkten φ_1 und φ_2, ihre Längen s_1 und s_2, so ist bekanntlich

$$a_1 = \frac{\sin\varphi_1}{s_1}\varrho'', \quad b_1 = -\frac{\cos\varphi_1}{s_1}\varrho'',$$
$$a_2 = \frac{\sin\varphi_2}{s_2}\varrho'', \quad b_2 = -\frac{\cos\varphi_2}{s_2}\varrho''.$$

Hiermit geht der Zähler von A^2 über in

$$\frac{\varrho''^2}{s_1^2} + \frac{\varrho''^2}{s_2^2} + \sqrt{\left(\frac{\varrho''^2}{s_1^2} + \frac{\varrho''^2}{s_2^2}\right) - 4\frac{\varrho''^4}{s_1^2 s_2^2}\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

und der Nenner in

$$\frac{2\varrho''^4}{s_1^2 s_2^2}\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

und hieraus

$$(5) \qquad A^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4 s_1^2 s_2^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2\varrho''^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Entsprechend findet sich

$$(5) \qquad B^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 - \sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4 s_1^2 s_2^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}}{2\varrho''^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Wir gehen nun nach der umstehenden Figur 2 zu rechtwinkligen Koordinaten über.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \gamma, \quad \sin^2\gamma = \frac{a^2 y^2}{s_1^2 s_2^2},$$

$$s_1^2 = y^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4}, \quad s_2^2 = y^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4}, \quad y^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} = z^2,$$

$$s_1^2 + s_2^2 = 2z^2, \quad s_1^2 \cdot s_2^2 = z^4 - a^2 x^2,$$

$$A^2 = \frac{\left(z^2 + \sqrt{z^4 - a^2 y^2}\right)(z^4 - a^2 x^2)}{a^2 y^2 \varrho''^2}.$$

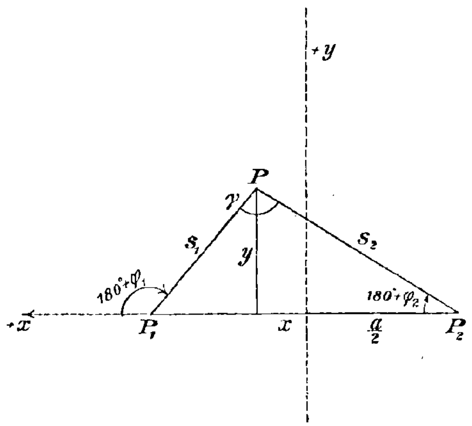
Um Zahlenwerte zu erlangen, setzen wir $a = 1 km$ und $\varrho'' = 206\,265$ und erhalten

$$A = \sqrt{\left(z^2 + \sqrt{z^4 - y^2}\right)\frac{z^4 - x^2}{y^2}} \cdot 4{,}85,$$

woraus sich A in mm ergibt.

Setzen wir hierin einen bestimmten Wert von A ein, so stellt die Gleichung die Kurve dar, die alle Punkte mit derselben großen Halbachse der Fehlerellipse verbindet. Entsprechend stellt die Gleichung

Fig. 2.



$$B = \sqrt{\left(z^2 - \sqrt{z^4 - y^2}\right)\left(\frac{z^4 - x^2}{y^2}\right)} \cdot 4{,}85$$

dieselbe Kurve für die kleine Halbachse B dar.

In Fig. 3 (siehe Tafel) sind nach diesen beiden Gleichungen die Kurven für verschiedene Werte von A und B entworfen.

Sehen wir nun denjenigen Punkt als am besten bestimmt an, dessen Fehlerellipse in einen Kreis übergeht, für den also $A = B$ ist, so finden wir nur einen einzigen Punkt, der dieser Bedingung entspricht, nämlich den, bei dem die gleichlangen Visierstrahlen sich unter einem Winkel von 90^0 schneiden.

Jordan bezeichnet für das Vorwärtsabschneiden den Winkel von $109^0\,28'$ als günstigsten Schnittwinkel gleichlanger Visierstrahlen, indem er von der Bedingung der kreisförmigen Fehlerellipse absieht und den Wert von M möglichst klein macht. Aber selbst unter dieser Voraussetzung ist der Jordansche Schnittwinkel von $109^0\,28'$ nicht unter allen Umständen als der günstigste zu bezeichnen. Nach (5) haben wir nämlich

$$A^2 + B^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{\varrho'' \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

und da für den günstigsten Schnitt nur gleiche Längen s_1 und s_2 in Betracht kommen können, so ist nach (4)

$$M = \mu \frac{s\sqrt{2}}{\varrho'' \sin\gamma}. \tag{6}$$

Hieraus sieht man, daß bei konstantem s der Wert von M ein Minimum erreicht, wenn $\gamma = 90^0$ wird.

Da $s = \frac{a}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$, so geht (6) über in

$$M = \mu \frac{a}{\varrho'' 2\sqrt{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}. \tag{7}$$

Bei konstantem a wird M hiernach sein Minimum erreichen, wenn

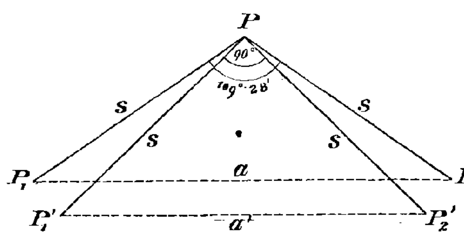
$$2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}$$

wird, woraus folgt

$$\gamma = 109^0\, 28'.$$

Wenn also zwei Festpunkte P_1 und P_2 (Fig. 4) gegeben sind, und der Neupunkt beliebig ausgewählt werden kann, so wird der Punkt P am besten bestimmt sein.

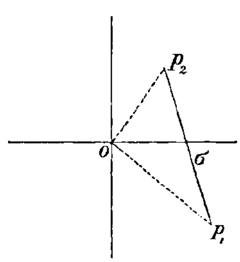
Fig. 4.



Wenn aber andrerseits der Neupunkt P gegeben ist und beliebig viele Festpunkte in gleicher Entfernung s vorhanden sind, so wird P am besten von P_1' und P_2' aus bestimmt. Dieser letztere Fall muß z. B. beachtet werden, wenn in einer Netzskizze zur Bestimmung eines Punktes P eine Anzahl von Visierstrahlen vorliegt, von denen zwei ausgewählt werden sollen, die den Punkt P als Vorwärtsabschnitt am günstigsten bestimmen.

In der Kurventafel Fig. 3 kann man leicht diejenigen Punkte finden, in denen $A^2 + B^2$ einen bestimmten konstanten Wert hat. Verbindet man solche Punkte, so erhält man die von Jordan a. a. O. S. 301 gegebenen Kurven gleich genau bestimmter Punkte.

Fig. 5.



In Rücksicht auf die späteren Entwicklungen wollen wir noch einen einfacheren Ausdruck für den mittleren Fehler M beim Vorwärtsabschneiden aufstellen. Nach (1) und (4) ist

$$M^2 = \mu^2 \frac{[aa] + [bb]}{[aa]\,[bb] - [ab]^2}.$$

Fassen wir nun die Koeffizienten a und b der beiden Punkte P_1 und P_2 als rechtwinklige Koordinaten zweier Punkte p_1 und p_2 auf, so erhalten wir die nebenstehende Figur 5, die wir als „Abbildung" des Urbildes Fig. 2 bezeichnen wollen.

Ist Δ der Flächeninhalt des Dreiecks op_1p_2, so findet sich leicht

$$M^2 = \mu_1^2 \frac{\overline{op}_1^2 + \overline{op}_2^2}{4\Delta^2} \tag{8}$$

und für den Fall gleich langer Visierstrahlen, die sich unter einem Winkel von 90^0 schneiden

$$M = \mu_1 \frac{2}{\sigma},$$

worin μ_1 der mittlere Fehler einer Winkelmessung vom Gewicht 1 ist. Ist μ der mittlere Fehler einer Richtungsmessung, so ist

$$M = \mu \frac{2\sqrt{2}}{\sigma}. \tag{9}$$

III. Rückwärtseinschneiden.

a) Rückwärtseinschneiden mit drei Richtungen.

Auf dem Punkte P seien zur Bestimmung seiner Koordinaten nach drei gegebenen Festpunkten P_1, P_2, P_3 Richtungsmessungen von gleichem Gewicht ausgeführt.

Die drei Fehlergleichungen dieser Richtungen sind dann

$$\lambda_1 = -l_1 + a_1x + b_1y - z,$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_2x + b_2y - z,$$
$$\lambda_3 = -l_3 + a_3x + b_3y - z,$$

wobei z die Orientierungsunbekannte bezeichnet. Hieraus ergibt sich bekanntlich nach Eliminierung des z

$$\lambda_1 = -l_1' + \left(a_1 - \frac{[a]}{3}\right)x + \left(b_1 - \frac{[b]}{3}\right)y$$
$$\lambda_2 = -l_2' + \left(a_2 - \frac{[a]}{3}\right)x + \left(b_2 - \frac{[b]}{3}\right)y$$
$$\lambda_3 = -l_3' + \left(a_3 - \frac{[a]}{3}\right)x + \left(b_3 - \frac{[b]}{3}\right)y.$$

Um die weitere Entwicklung etwas zu vereinfachen, legen wir die positive Richtung der Abscissenachse in die Richtung (P, P_1) und nehmen $\frac{\overline{PP_1}}{\varrho''} = \frac{s_1}{\varrho''}$ als Längeneinheit an. Es wird dann $a_1 = 0$, $b_1 = -1$ und

$$\lambda_1 = -l_1' + \tfrac{1}{3}(-a_2 - a_3)x + \tfrac{1}{3}(-2 - b_2 - b_3)y$$
$$\lambda_2 = -l_2' + \tfrac{1}{3}(2a_2 - a_3)x + \tfrac{1}{3}(1 + 2b_2 - b_3)y$$
$$\lambda_3 = -l_3' + \tfrac{1}{3}(2a_3 - a_2)x + \tfrac{1}{3}(1 - b_2 + 2b_3)y.$$

Um die günstigste gegenseitige Lage der vier Punkte zu erörtern, betrachten wir zunächst den Fall, in dem die Fehlerellipse in einen Kreis übergeht. Bezeichnen wir die Koeffizienten von x und y im letzten Gleichungssystem mit a' und b', so ergeben sich aus (1) für $A^2 = B^2$ die Bedingungen

$$[a'a'] - [b'b'] = 0\,, \quad [a'b'] = 0\,.$$

Bilden wir aus den vorstehenden Fehlergleichungen die Koeffizienten $[a'a']$, $[b'b']$ und $[a'b']$, so nehmen die Gleichungen (10) die folgende Form an

$$\text{(11)} \quad \begin{aligned} [a'a'] - [b'b'] &= a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 - b_2^2 - b_3^2 + b_2 b_3 - b_2 - b_3 - 1 = 0. \\ [a'b'] &= a_2 + a_3 - a_3 b_2 - a_2 b_3 + 2 a_2 b_2 + 2 a_3 b_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Lage der Punkte P, P_1 und P_2 als gegeben ansehen und die Lage des Punktes P_3 den Gleichungen (11) entsprechend aufsuchen.

Hierzu setzen wir der Einfachheit wegen

$$a_3 = \alpha_3 + \frac{a_2}{2}$$

$$b_3 = \beta_3 + \frac{b_2 - 1}{2}\,.$$

Es ist dann

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} \alpha_3^2 - \beta_3^2 &= -\tfrac{3}{4}(a_2^2 - b_2^2 - 2b_2 - 1) = k_1\,, \\ \alpha_3 \cdot \beta_3 &= -\tfrac{3}{4}(1 + b_2)\,a_2 \qquad\qquad = k_2\,, \end{aligned}$$

und diese beiden Gleichungen geben

$$\alpha_3^2 = \frac{k_1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{k_1^2 + 4k_2^2} = \tfrac{3}{4}(1 + b_2)^2,$$

$$\beta_3^2 = -\frac{k_1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{k_1^2 + 4k_2^2} = \tfrac{3}{4}a_2^2\,,$$

$$\alpha_3 = \pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,(1 + b_2)\,,$$

$$\beta_3 = \mp\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,a_2\,.$$

Die zweite Gleichung (12) bedingt verschiedene Vorzeichen koordinierter Werte von α_3 und β_3. Es findet sich endlich

$$\text{(13)} \quad \begin{aligned} a_3 &= \frac{a_2}{2} \pm (1 + b_2)\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,, \\ b_3 &= \frac{b_2 - 1}{2} \mp a_2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,. \end{aligned}$$

Hiervon können wir sofort eine Anwendung machen, indem wir

$$s_2 = s_1 = 1\,,$$

$$\varphi_2 = 120^0$$

setzen und aus den Gleichungen (13) s_3 und φ_3 ermitteln. Es ist also

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \sqrt{\tfrac{3}{4}},$$
$$b_1 = -1, \quad b_2 = \tfrac{1}{2},$$

und hieraus findet sich

I. $$a_3 = 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}, \qquad b_3 = -1,$$

II. $$a_3 = -\sqrt{\tfrac{3}{4}}, \qquad b_3 = +\tfrac{1}{2}$$

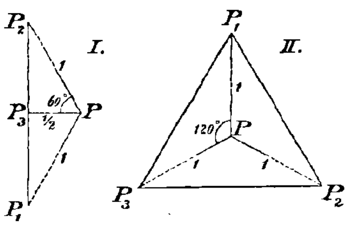
und die Werte von s_3 und φ_3 sind

I. $$s_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \varphi_3 = 60^0,$$

II. $$s_3 = 1, \quad \varphi_3 = 240^0.$$

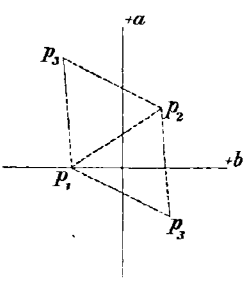
In der nebenstehenden Fig. 6 sind die den Ergebnissen I und II entsprechenden Punktlagen gezeichnet. Die zweite Figur war zu erwarten, es zeigt sich jedoch, daß der durch die erste Figur dargestellte Fall des Rückwärtseinschneidens dem andern vollständig gleichwertig ist.

Fig. 6.



Wir kehren nun noch einmal zu den beiden Gleichungen (13) zurück. Betrachten wir die Größen a_2, b_2, a_3 und b_3 als rechtwinklige Koordinaten der Punkte p_2 und p_3 und nehmen hierzu noch für den Punkt p_1 die Koordinaten $a_1 = 0$ und $b_1 = -1$, so lehren die beiden Gleichungen (13), daß die Punkte p_1 und p_2 mit den beiden Punkten p_3 zwei gleichseitige Dreiecke bilden, die die Seite $p_1 p_2$ gemeinsam haben.

Fig. 7.



Die Lage des Nullpunktes der a und b hat auf die Genauigkeit der Punktbestimmung keinen Einfluß, da bei der Eliminierung der Orientierungsunbekannten z aus den Fehlergleichungen die a und b auf den Schwerpunkt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ bezogen werden. Einem gleichseitigen Dreieck $p_1 p_2 p_3$ entsprechen also unendlich viele gleich günstige Punktlagen $P_1 P_2 P_3$. Ein Fall bietet hier besonderes Interesse. Denken wir uns die beiden Punkte P_1 und P_2 gleich weit vom Neupunkt P entfernt, so daß die Richtungen PP_1 und PP_2 einen Winkel von 60^0 einschließen, und den Punkt P_3 in beliebiger Richtung unendlich fern liegend, so fällt p_3 in den Nullpunkt der a und b, und das Dreieck $p_1 p_2 p_3$ ist auch gleichseitig. Die Lage der Punkte P ist also auch eine günstige.

Fig. 8.

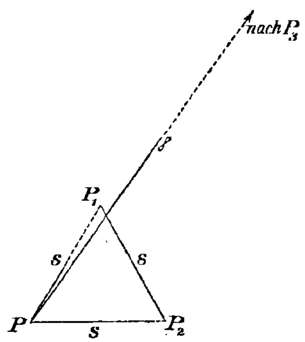
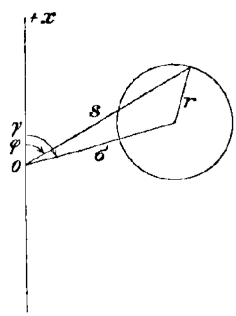


Fig. 9.



Dieso Ergebnisse führen uns dazu, das Koordinatensystem der a und b näher zu betrachten und seine Beziehungen zu dem ursprünglichen System der x und y zu untersuchen.

Ein Kreis vom Radius r, dessen Mittelpunkt im System der x und y die Polarkoordinaten σ und γ hat, wird durch die Polargleichung

$$r^2 = s^2 + \sigma^2 - 2 s \sigma \cos(\gamma - \varphi)$$

dargestellt, in der s und φ die laufenden Koordinaten sind. Geht der Kreis durch den Nullpunkt 0, so ist

$$s = 2r \cos(\gamma - \varphi)$$

oder

$$s = 2r \sin\gamma \sin\varphi + 2r \cos\gamma \cos\varphi$$

$$\frac{\varrho''}{2r} = \sin\gamma \frac{\sin\varphi}{s} \varrho'' + \cos\gamma \frac{\cos\varphi}{s} \varrho''.$$

Bekanntlich ist

$$a = \frac{\sin\varphi}{s} \varrho'' \quad b = -\frac{\cos\varphi}{s} \varrho''$$

also

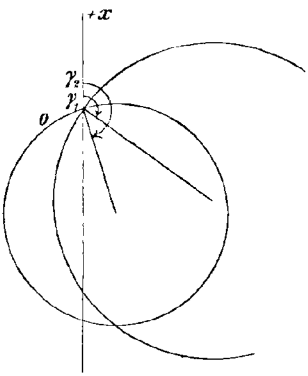
$$\frac{\varrho''}{2r} = a \sin\gamma - b \cos\gamma. \tag{14}$$

Betrachten wir a und b als rechtwinklige Koordinaten, so werden nach Gleichung (14) alle Kreise, die im System x, y durch den Nullpunkt gehen, im System der a und b durch gerade Linien mit den Richtungswinkeln γ dargestellt.[1])

1) Eine Transformation der Entfernungen des Neupunktes von den Festpunkten nach reziproken Radien hat Runge angewendet, um die Berechnung des Rückwärtseinschneidens auf die des Vorwärtsabschneidens zurückzuführen. (Zeit-

Zwei Kreise, die durch den Nullpunkt 0 gehen, und deren Mittelpunkte die Richtungswinkel γ_1 und γ_2 haben, schneiden sich unter dem Winkel $\gamma_2 - \gamma_1$. Im System der a und b werden diese Kreise nach dem Obigen durch zwei Geraden dargestellt, die sich ebenfalls unter dem Winkel $\gamma_2 - \gamma_1$ schneiden.

Fig. 10.



Verlegen wir den Nullpunkt 0 der x und y nach P unter gleichzeitiger Parallelverschiebung des Koordinatensystems, und setzen in (14) $\gamma = 90^0$, so erhalten wir

$$a = \frac{\varrho''}{2r},$$

d. h. alle Punkte eines Kreises, der die x-Achse im Nullpunkte berührt, haben dasselbe a. Entsprechend finden wir aus (14) für $\gamma = 0$, daß alle Punkte mit gleichem b auf einem Kreise liegen, der die y-Achse im Nullpunkte berührt.

Dies gibt ein einfaches Mittel zur Bestimmung der a und b bei gegebener Skizze des trigonometrischen Netzes. In der Tafel Fig. 11 sind die Kreise für beliebige a konstruiert. Man denke sich diese Tafel auf durchsichtigem Papier gezeichnet und so auf die Netzskizze gelegt, daß die gemeinsame Berührende aller Kreise in die positive Richtung der Abscissenachse und der gemeinsame Berührungspunkt auf den zu bestimmenden Punkt fällt. Stimmen die Maßstabverhältnisse überein, so kann man alsdann für sämtliche gegebenen Punkte die Koeffizienten a unmittelbar ablesen. Dreht man hierauf die Tafel in rechtsläufigem Sinne um 90^0, so kann man unmittelbar die b ablesen. (Vgl. Fig. 11 auf der Tafel.)

Es empfiehlt sich, die Hilfstafel für den Maßstab 1 : 10 000 zu konstruieren. Ist die Netzskizze in kleinerem Maßstabe gegeben, so kann dieselbe Tafel benutzt werden, nur sind dann die a und b entsprechend zu verkleinern, für den Maßstab 1 : 40 000 z. B. durch 4 zu dividieren.[1])

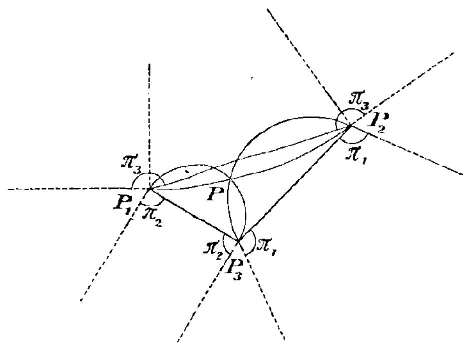
---

schr. f. Verm. Bd. XXVIII 1899 S. 313 und Bd. XXIX 1900 S. 581.) Es wird um den Punkt P ein Kreis vom Radius m beschrieben und jede Entfernung s' aus s nach der Gleichung $s : m = m : s'$ berechnet. Für $m = \sqrt{\varrho''}$ ist die Transformation mit der obigen Abbildung durch die a und b identisch.

1) Eine für den praktischen Gebrauch bestimmte Tafel ist inzwischen erschienen unter dem Titel: Hilfstafel zur Berechnung der Richtungskoeffizienten für Koordinatenausgleichungen. Berlin, Paul Parey, 1903.

In Fig. 7 sind die Geraden p_1p_2, p_2p_3 und p_3p_1 Abbildungen der drei durch P und bezw. durch P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1 gehenden Kreise. Diese sind bekanntlich die Bestimmungskreise des Punktes P und es ist somit erwiesen, daß diese Kreise sich unter Winkeln von 60⁰ schneiden müssen, um eine günstige Bestimmung des Punktes zu liefern. Es folgt hieraus eine einfache geometrische Konstruktion der günstigsten Lage des Punktes P in Bezug auf 3 Festpunkte P_1, P_2 und P_3. Bezeichnen wir in Fig. 12 mit π_1, π_2 und π_3 die Winkel, die die Tangenten der Kreise in den 3 Punkten mit den entsprechenden Dreiecksseiten bilden, so ergibt sich leicht

Fig. 12.



$$\pi_1 = \sphericalangle P_1 + 60^0$$

$$\pi_2 = \sphericalangle P_2 + 60^0$$

$$\pi_3 = \sphericalangle P_3 + 60^0,$$

sodaß die Kreise und hiermit auch der Punkt P sich leicht geometrisch konstruieren lassen.

Eine andere Konstruktion desjenigen Punktes, in dem die Genauigkeit der Bestimmung nach allen Richtungen gleich groß ist, gibt Helmert a. a. O. S. 111.

Der mittlere Fehler der Punktbestimmung wird im Falle der kreisförmigen Fehlerellipse, da $[a'a'] = [b'b']$ und $[a'b'] = 0$ ist,

$$M = \mu \sqrt{\frac{2}{[a'a']}}.$$

Aus (11) und (13) folgt

$$[a'a'] = \tfrac{2}{3}(a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3) = \tfrac{1}{2}(a_2^2 + (1 + b_2)^2)$$

$$M = \mu \sqrt{\frac{4}{a_2^2 + (1 + b_2)^2}}.$$

Es ist aber $\sqrt{a_2^2 + (1 + b_2)^2}$ gleich der Seite des gleichseitigen Dreiecks $p_1p_2p_3$. Bezeichnen wir diese mit σ, so ist

$$M = \mu \frac{2}{\sigma}.$$

Der mittlere Fehler ist also dem Umfange des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ umgekehrt proportional.

Es soll nun noch diejenige Punktlage untersucht werden, die nach der ersten Definition von Seite 150 als die günstigste angesehen werden muß.

Nach (1) und (4) ist

$$M^2 = \mu^2 (A^2 + B^2) = \mu^2 \frac{[b'b'] + [a'a']}{[a'a'][b'b'] - [a'b']^2}. \tag{15}$$

Der Nullpunkt der a' und b' ist der Schwerpunkt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$. Der Zähler in M^2 stellt die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den drei Ecken dar; oder, wenn wir mit $[t^2]$ die Quadratsumme der Schwerlinien bezeichnen, so ist der Zähler gleich $\frac{4}{9}[t^2]$. Der Nenner läßt sich leicht umformen:

$$[a'a'][b'b'] - [a'b']^2 = (a_1' b_2' - a_2' b_1')^2 + (a_2' b_3' - a_3' b_2')^2 + (a_3' b_1' - a_1' b_3')^2.$$

Hierin ist jedes Glied gleich dem Quadrat des doppelten Flächeninhalts eines durch zwei Ecken und den Schwerpunkt gebildeten Dreiecks. Da diese Dreiecke einander gleich sind, so ist der Nenner gleich $\frac{8}{2 \cdot 3} \Delta^2$, wenn Δ den Flächeninhalt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ bezeichnet. Also ist

$$M^2 = \mu^2 \frac{2[t^2]}{6\Delta^2}.$$

Ist $[\sigma^2]$ die Quadratsumme der drei Dreiecksseiten, so ist bekanntlich

$$[t^2] = \tfrac{3}{4}[\sigma^2],$$

also

$$M^2 = \mu^2 \frac{[\sigma^2]}{4\Delta^2}. \tag{16}$$

C. Runge benutzt in der schon erwähnten Abhandlung (Zeitschr. f. Verm. 1900, S. 585) die von ihm eingeführte Abbildung nach reziproken Radien ebenfalls zur Beurteilung der Genauigkeit der Punktlage und kommt zu dem Ergebnis, daß diejenige Form des Rückwärtseinschnitts die günstigste ist, in der das abbildende Dreieck $p_1 p_2 p_3$ den größten Flächeninhalt hat. Dies stimmt, wie (16) zeigt, nicht mit den Grundsätzen der Fehlertheorie überein. Die Gleichung (16) lehrt, daß M auch noch von der Gestalt des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ abhängig ist, und es ist leicht einzusehen, daß bei gleichem Flächeninhalt verschieden geformter Dreiecke der Wert von M von einem Minimum bis zum Wert ∞ übergehen kann, wobei das Minimum dann eintritt, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Die Gleichung (16) läßt sich noch leicht überführen in

$$M^2 = \mu^2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2}\right), \tag{17}$$

worin h_1, h_2, h_3 die drei Höhen des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ sind.

Wenn also auf einem Neupunkte P beliebig viele Richtungen nach Festpunkten gemessen sind, von denen drei zur Bestimmung des Punktes möglichst günstig ausgewählt werden sollen, so ermittelt man für sämtliche Festpunkte mit Hilfe der S. 158 erläuterten Tafel die Koeffizienten a und b, trägt dieselben als rechtwinklige Koordinaten in beliebigem Maßstabe auf und sucht dann drei Punkte zu einem Dreieck zu verbinden, in dem die Quadratsumme der reziproken Höhen ein Minimum ist.

In Fig. 13 (siehe Tafel) ist ein der Praxis entnommener Fall dargestellt, in dem von dem Neupunkte 3 aus nach 5 Festpunkten Richtungen gemessen sind. Zur Bestimmung der drei günstigsten Richtungen sind in der Nebenzeichnung die 5 Festpunkte mit Hilfe der a und b abgebildet. Unter den 10 möglichen Dreiecken kommen die beiden Dreiecke rmw und rml am meisten in Frage. Prüft man die beiden Dreiecke näher nach Gl. (16) oder (17), so zeigt sich, daß $\triangle rmw$ ein etwas kleineres M liefert, als $\triangle rml$. Außerdem ist $\triangle rmw$ nahezu gleichseitig, so daß die drei Punkte R, M und W zur Bestimmung des Punktes 3 verwendet wurden.

Ein durch die Punkte R, 3, L und B gehender „gefährlicher Kreis" ist in der Nebenzeichnung in der geraden Linie rbl augenfällig zu erkennen.

b) Rückwärtseinschneiden mit zwei Winkeln.

Zur Bestimmung des Punktes P seien zwischen drei Festpunkten P_1, P_2, und P_3 zwei Winkel mit der gemeinsamen Richtung PP_1 gemessen. Bezeichnen wir wieder mit a und b die Richtungskoeffizienten, so lauten bekanntlich die Fehlergleichungen

$$\lambda_1 = -l_1 + (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y$$
$$\lambda_2 = -l_2 + (a_3 - a_1)x + (b_3 - b_1)y.$$

Setzen wir auch hier wieder $a_1 = 0$, $b_1 = -1$, so ist

$$\lambda_1 = -l_1 + a_2 x + (1 + b_2)y$$
$$\lambda_2 = -l_2 + a_3 x + (1 + b_3)y.$$

Die Lage von P in Bezug auf P_1 und P_2 sei gegeben, und wir wollen nun wieder a_3 und b_3 so bestimmen, daß die Fehlerellipse in einen Kreis übergeht. Die Bedingungen hierfür sind

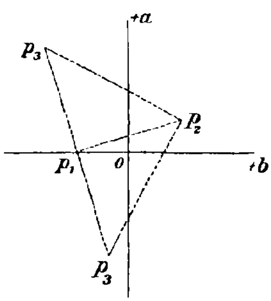
$$[a'a'] - [b'b'] = a_2^2 - (1 + b_2)^2 + a_3^2 - (1 + b_3)^2 = 0,$$
$$[a'b'] = a_2(1 + b_2) + a_3(1 + b_3) \qquad = 0.$$

Setzen wir $b_3 = \beta_3 - 1$, so ist

$$\alpha_3^2 - \beta_3^2 = -a_2^2 + (1 + b_2)^2 = k_1,$$
$$\alpha_3 \beta_3 = -a_2(1 + b_2) \qquad = k_2,$$
$$\alpha_3 = \pm(1 + b_2), \quad a_3 = \pm(1 + b_2),$$
$$\beta_3 = \mp a_2, \qquad b_3 = \mp a_2 - 1.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Punkte p_1 und p_2 mit den beiden Punkten p_3 zwei rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke mit der gemeinsamen Kathete $p_1 p_2$ bilden. Da die Katheten dieser rechtwinkligen Dreiecke wieder die Abbildungen der beiden Bestimmungskreise sind, so ist erwiesen, daß bei günstiger Punktlage die Kreise sich unter einem rechten Winkel schneiden müssen, was auch zu erwarten war.

Fig. 14.



Bei gegebener Lage der drei Punkte P_1, P_2, und P_3 ist es leicht, solche Punkte P zu finden, für die die Bestimmungskreise sich unter einem rechten Winkel schneiden. Unter den unendlich vielen Punkten P, die dieser Bedingung genügen, ist der günstigste, dem die kleinste kreisförmige Fehlerellipse zukommt, zu ermitteln.

Zur Beurteilung der Genauigkeit haben wir wie früher

$$M = \pm \sqrt{\frac{2}{[a'a']}}\,\mu.$$

$\sqrt{[a'a']} = \sqrt{a_2^2 + (1 + b_2)^2}$ ist aber gleich der Kathetenlänge des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$. Der mittlere Fehler M ist also der Kathetenlänge umgekehrt proportional.

Sehen wir von der Bedingung der kreisförmigen Fehlerellipse ab, so erübrigt sich noch, für den Fall der Messung zweier Winkel eine geometrische Bedeutung von M zu finden. In den Ausdrücken $[a'a']$, $[b'b']$ und $[a'b']$ beziehen sich die Koeffizienten a' und b' auf p_1 als Nullpunkt. In

$$M^2 = \mu^2 \frac{[b'b'] + [a'a']}{[a'a'][b'b'] - [a'b']^2}$$

ist deshalb der Zähler gleich $\sigma_2^2 + \sigma_3^2$, wo $\sigma_2 = \overline{p_1 p_3}$ und $\sigma_3 = \overline{p_1 p_2}$ ist, und der Nenner entsprechend der Beweisführung S. 160 gleich $4\Delta^2$, also

(18) $$M^2 = \mu_1^2 \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{4\Delta^2}.$$

Unter μ_1 ist der mittlere Fehler der Winkelmessung zu verstehen, während sich μ in (16) auf Richtungsmessungen bezog. Um (18) mit (16) vergleichen zu können, führen wir $\mu_1 = \mu\sqrt{2}$ ein, sodaß (18) übergeht in

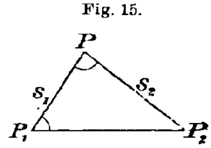
$$M^2 = \mu^2 \frac{2(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}{4\triangle^2}. \tag{19}$$

Vergleichen wir (19) mit (16), so ist ersichtlich, daß es von der Figur des Dreiecks $p_1p_2p_3$ abhängt, ob die Messung zweier Winkel ein größeres M ergibt, als die Messung der drei Richtungen. Ein Grenzfall tritt ein, wenn das Dreieck $p_1p_2p_3$ gleichschenklig rechtwinklig und σ_1 die Hypotenuse ist. Die Gleichung (19) läßt ferner erkennen, daß es nicht gleichgültig ist, welche beiden Winkel gemessen werden; diese sind vielmehr so zu wählen, daß die ihnen entsprechenden Seiten im Dreieck $p_1p_2p_3$ möglichst klein sind. Dies wird auch durch die Forderung bedingt, daß der Schnittwinkel der beiden Bestimmungskreise möglichst dem rechten Winkel gleichkommen soll.

IV. Seitwärtsabschneiden.

In dem Dreieck P_1PP_2 seien die beiden Winkel in P_1 und P gemessen, wobei wieder P der Neupunkt, P_1 und P_2 gegebene Festpunkte sein sollen. Sind wie bisher die a und b die Richtungskoeffizienten, so sind die Fehlergleichungen der beiden gemessenen Winkel bekanntlich

Fig. 15.



$$\begin{aligned} \lambda_p &= -l_1 + (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y, \\ \lambda_1 &= -l_2 - \qquad a_1\,x - \qquad b_1\,y. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun wieder in Figur 16a die Abbildung p_1 und p_2 der beiden Punkte P_1 und P_2, so müssen wir berücksichtigen, daß der Punkt o alle unendlich fernen Punkte P abbildet, daß also die Verbindungslinie p_1o die Abbildung der Geraden P_1P ist.

Verschieben wir nun in Figur 16b p_1p_2 parallel nach op_2', so entspricht p_2' ein Punkt P_2'. Nun denken wir uns in dem Punkte P einen Rückwärtseinschnitt nach den drei Punkten $P_1P_2P_2'$ mit zwei Winkeln, die die Richtung PP_2 gemeinsam haben, ausgeführt, dessen Fehlergleichungen nach S. 161 lauten

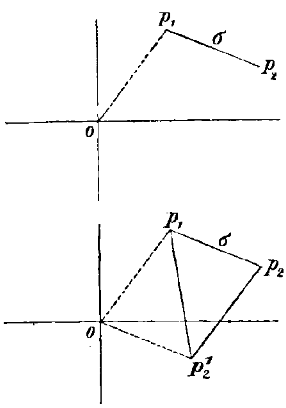
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -l_1 + (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y, \\ \lambda_2 &= -l_2 + (a_2' - a_2)x + (b_2' - b_2)y. \end{aligned}$$

Nach Figur 16b ist aber

$$a_2' - a_2 = -a_1 \quad \text{und} \quad b_2' - b_2 = -b_1.$$

Dieser Rückwärtseinschnitt liefert also dieselben Fehlergleichungen, wie der Seitwärtsabschnitt S. 163, also auch dieselbe Genauigkeit. Nach S. 162 muß für die günstigste Form des Rückwärtseinschneidens mit zwei Winkeln das Dreieck $p_1 p_2 p_2'$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges sein mit dem rechten Winkel in p_2. Also ist auch $op_1 = op_2'$ und $\overline{op}_2^2 = 2\,\overline{op}_1^2$. Da aber $\frac{op_1}{op_2} = \frac{s_2}{s_1}$, also $s_1^2 = 2 s_2^2$, und ferner $\sphericalangle P_2 P P_1 = \sphericalangle p_1 o p_2 = 45^0$ sein muß, so folgt, daß die günstigste Form des Seitwärtsabschneidens dann eintritt, wenn die Punkte $P P_1 P_2$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in P_2 bilden.

Fig. 16a u. 16b.



Dies läßt sich auch auf anderem Wege nachweisen. Wird nämlich in den Punkten P_1 und P_2' ein Vorwärtsabschnitt ausgeführt, so lauten die Fehlergleichungen desselben

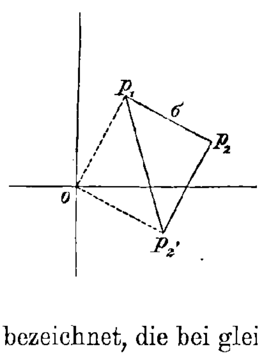
$$\lambda_1 = -l_1 - a_1 x - b_1 y,$$
$$\lambda_2 = -l_2 - a_2' x - b_2' y.$$

Die Vorzeichen der Richtungskoeffizienten sind hierin so aufzufassen, daß bei rechtsläufiger Winkelmessung $P_1 P_2'$ bezw. $P_2' P_1$ die linken Schenkel der Winkel sind. Da wieder

$$-a_2' = a_1 - a_2 \quad \text{und} \quad -b_2' = b_1 - b_2,$$

so sind diese Fehlergleichungen wieder identisch mit denen des Seitwärtsabschnitts. Für die günstigste Form des Vorwärtsabschnitts muß nach S. 152 das Dreieck $o p_1 p_2'$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges mit dem rechten Winkel in o sein. Übertragen wir dies wieder auf die Lage der Punkte $P P_1 P_2$, so ergibt sich auch das vorstehend gefundene Resultat.

Fig. 17.



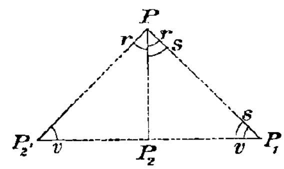
In Figur 17 ist entsprechend 16b der günstigste Seitwärtsabschnitt und der Hilfspunkt p_2' abgebildet. Von Interesse ist es nun, zu sehen, welche Lage die Punkte $P_1 P_2 P_2'$ hiernach haben. Figur 18 gibt hierüber Aufschluß, und es sind zugleich mit r, v und s diejenigen Winkel bezeichnet, die bei gleich genauer Bestimmung des Punktes P durch Rückwärtseinschneiden, Vorwärts- oder Seitwärtsabschneiden zu messen sind.

Für die Genauigkeit des günstigsten Seitwärtsabschnitts haben wir nach S. 154 oder 163

$$M = \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{\sigma} = \mu \frac{2}{\sigma}. \tag{20}$$

Zur Beurteilung der allgemeinen Form des Seitwärtsabschnitts benutzen wir (18), indem wir wieder auf den schon oben herangezogenen Rückwärtseinschnitt nach $P_1 P_2 P_2'$ zurückgehen. Da $p_2' p_2 = o p_1$ und der Flächeninhalt Δ des Dreiecks $p_1 p_2 p_2'$ dem des Dreiecks $o p_1 p_2$ gleich ist, so ist nach (18)

Fig. 18.



$$M^2 = \mu_1^2 \frac{\sigma^2 + \overline{op}_1^2}{4\Delta^2} = \mu^2 \frac{\sigma^2 + \overline{op}_1^2}{2\Delta^2}. \tag{21}$$

Dasselbe Resultat läßt sich aus (8) ableiten.

Als Abschluß der Untersuchungen über die drei Methoden der einfachen trigonometrischen Punktbestimmung stellen wir noch einmal die den drei Methoden zukommenden mittleren Fehler zusammen:

I. Vorwärtsabschneiden mit 2 Winkeln:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\overline{op}_1^2 + op_2^2}{2\Delta^2}.$$

II. Seitwärtsabschneiden mit 2 Winkeln:

$$M^2 = \mu^2 \frac{op_1^2 + \sigma^2}{2\Delta^2}.$$

IIIa. Rückwärtseinschneiden mit 2 Winkeln:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\Delta^2}.$$

IIIb. Rückwärtseinschneiden mit 3 Richtungen:

$$M^2 = \mu^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{4\Delta^2},$$

wobei in allen vier Formeln μ den mittleren Fehler einer Richtungsmessung bezeichnet.

V. Mehrfache Punktbestimmung.

In Abschnitt III wurde derjenige Rückwärtseinschnitt mit 3 Richtungen gesucht, dessen Fehlerellipse in einen Kreis überging, und es wurde gefunden, daß in der Abbildung durch die a und b die Punkte ein gleichseitiges Dreieck bildeten. Es liegt nun die Frage nahe, ob beim Rückwärtseinschneiden mit beliebig vielen Richtungen sich auch eine solche einfache geometrische Figur finden läßt.

Es seien n Festpunkte P durch n Punkte p abgebildet. Der Nullpunkt der a und b sei nach dem Schwerpunkt der p verlegt, so daß $[a] = [b] = 0$ ist. Es soll nun ein Punkt p_{n+1} gesucht werden, der die Fehlerellipse zu einem Kreise macht. Durch das Hinzutreten des Ergänzungspunktes werde der Schwerpunkt um α und β in den Koordinatenrichtungen verschoben, und es mögen die Koordinaten a_{n+1} und b_{n+1} des Punktes p_{n+1} von dem neuen Schwerpunkt aus gezählt werden. Die Bedingungen der kreisförmigen Fehlerellipse sind dann

$$(a_1 + \alpha)^2 + (a_2 + \alpha)^2 + \cdots + (a_n + \alpha)^2 + a_{n+1}^2$$
$$= (b_1 + \beta)^2 + (b_2 + \beta)^2 + \cdots + (b_n + \beta)^2 + b_{n+1}^2,$$
$$(a_1 + \alpha)(b_1 + \beta) + (a_2 + \alpha)(b_2 + \beta) + \cdots + (a_n + \alpha)(b_n + \beta) + a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 0$$

oder

$$[aa] - [bb] + n\alpha^2 - n\beta^2 + a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = 0,$$
$$[ab] + n\alpha\beta + a_{n+1} b_{n+1} = 0$$

und da

$$a_{n+1} = n\alpha,$$
$$b_{n+1} = n\beta,$$

so ist

$$[aa] - [bb] + n(1 + n)(\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$
$$[ab] + n(1 + n)\,\alpha\beta \qquad = 0,$$

oder

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{[bb] - [aa]}{n(1 + n)},$$
$$\alpha\beta = \frac{-[ab]}{n(1 + n)}.$$

Es ist hieraus schon ersichtlich, daß es im allgemeinen möglich sein wird, einen Ergänzungspunkt zu konstruieren, der das Netzbild zu einem günstigen im Sinne der zweiten S. 150 gegebenen Definition gestaltet, daß also die Punkte p keine regelmäßige Figur zu bilden brauchen, wie es bei nur drei Richtungen der Fall war. Andererseits tritt jedoch auch hier stets die kreisförmige Fehlerellipse auf, wenn die Punkte p konzentrisch zum Schwerpunkt liegende reguläre Vielecke bilden.

Es lassen sich nun auf anderem Wege geometrische Bedingungen für die kreisförmige Fehlerellipse aufstellen, und um die Untersuchung zu vervollständigen, wollen wir hierbei nicht nur die auf dem Neupunkt gemessenen, sondern auch die auf den Festpunkten gemessenen Richtungen berücksichtigen.

Wir bezeichnen mit a_i und b_i die Richtungskoeffizienten für die Fehlergleichungen der inneren Richtungen nach Eliminierung der Orientierungsunbekannten, so daß der Nullpunkt der a_i und b_i gleichzeitig der Schwerpunkt s der durch sie dargestellten Punkte p_i ist. Vor der Eliminierung der Orientierungsunbekannten bezogen sich die a_i und b_i auf das ursprüngliche System, in dem der Schwerpunkt s die Koordinaten x und y habe. Sind auf den vorliegenden Festpunkten auch Richtungen nach dem Neupunkt gemessen, so sind die Richtungskoeffizienten für diese Richtungen bezw. $a_i + x$ und $b_i + y$. Nehmen wir für die Fehlergleichungen der äußeren Richtungen das überall gleiche Gewicht g, für die inneren Richtungen das Gewicht 1 an, so sind die Bedingungen der kreisförmigen Fehlerellipse

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + g(a_1 + x)^2 + g(a_2 + x)^2 + g(a_3 + x)^2 + \cdots$$
$$- b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - \cdots - g(b_1 + y)^2 - g(b_2 + y)^2 - g(b_3 + y)^2 - \cdots = 0,$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$
$$+ g(a_1 + x)(b_1 + y) + g(a_2 + x)(b_2 + y) + g(a_3 + x)(b_3 + y) + \cdots = 0,$$

und da

$$[a] = [b] = 0$$

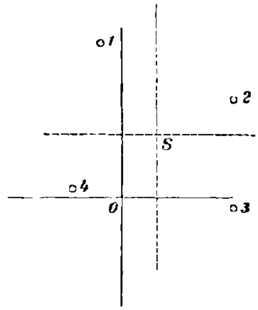
ist, so findet sich

$$(1 + g)([aa] - [bb]) + ng(x^2 - y^2) = 0,$$
$$(1 + g)\,[ab] \qquad\qquad + ngxy \qquad = 0,$$

worin n die Anzahl der Festpunkte bezeichnet.

Die a_i und b_i stellen, wie schon S. 156 bemerkt ist, je nach Wahl ihres Nullpunktes unendlich viele Punktsysteme P_i dar, die alle gleichwertige Rückwärtseinschnitte liefern. Die beiden vorstehenden Gleichungen zeigen nun, daß man unter den vielen Punktsystemen zwei (bezw. vier) finden kann, die unter Zuhilfenahme der äußeren Richtungen eine kreisförmige Fehlerellipse liefern.

Fig. 19.



In Fig. 19 sind die Werte

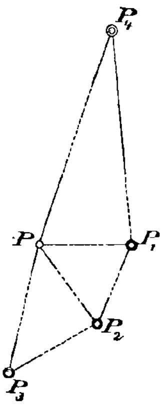
$$a_1 = +5, \quad b_1 = -3,$$
$$a_2 = +2, \quad b_2 = +4,$$
$$a_3 = -4, \quad b_3 = +4,$$
$$a_4 = -3, \quad b_4 = -5$$

angenommen und hiermit als Koordinaten des Schwerpunktes

$$x = \sqrt{12}, \quad y = \sqrt{3}$$

berechnet worden unter Annahme des Gewichts 0,5 für die äußeren Richtungen. In Fig. 20 sind mit Hilfe der positiven Werte von x und y die entsprechenden Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und der Neupunkt P dargestellt.

Fig. 20.



Bezeichnen wir mit a_i' und b_i' die Koeffizienten der Fehlergleichungen für die inneren und äußeren Richtungen, so ist für die kreisförmige Fehlerellipse

$$(22)\qquad \begin{aligned}[b'b'] - [a'a'] &= 0,\\ [a'b'] &= 0.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir ferner die Abstände der Punkte p' vom Nullpunkt mit σ und ihre Richtungswinkel mit α, so ist für jeden Punkt

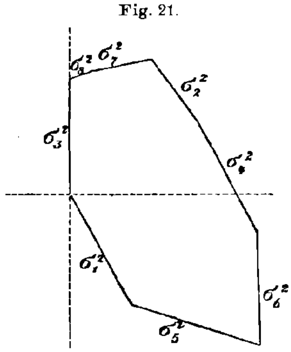
$$a' = \sigma \sin\alpha, \qquad b'^2 - a'^2 = \sigma^2 \cos 2\alpha,$$
$$b' = \sigma \cos\alpha, \qquad a'b' = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \sin 2\alpha,$$

also nach (22)

$$(23)\qquad \begin{aligned}[\sigma^2 \cos 2\alpha] &= 0,\\ [\sigma^2 \sin 2\alpha] &= 0.\end{aligned}$$

Dies führt dazu, die obige Figur noch einmal umzuwandeln, indem wir von einem beliebigen Punkte ausgehend unter dem Richtungswinkel $2\alpha_1$ eine Strecke $s_1 = \sigma_1^2$ abtragen, im Endpunkt derselben unter dem Richtungswinkel $2\sigma_2$ die Strecke $s_2 = \sigma_2^2$ anschließen u. s. w., so daß wir aus sämtlichen Strecken einen Polygonzug erhalten. Die Größen $\sigma^2 \cos 2\alpha$ und $\sigma^2 \sin 2\alpha$ sind Projektionen der Polygonseiten auf die Koordinatenachsen, und es folgt somit aus (23), daß die vorstehende Konstruktion ein geschlossenes Polygon ergeben muß. Gleichgültig ist es, in welcher Reihenfolge die Strecken aneinander gefügt werden. Für das Beispiel Fig. 19 u. 20 ist die Fig. 21 konstruiert worden.

Fig. 21.



Der mittlere Fehler der Punktbestimmung ist wie früher

$$M = \pm \mu \sqrt{\frac{2}{[a'a']}}$$

oder da $[a'a'] + [b'b'] = 2[a'a'] = [\sigma^2]$ ist,

$$M = \pm \mu \sqrt{\frac{4}{[\sigma^2]}}.$$

Der mittlere Fehler ist also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Umfang des Polygons.

Geometrisches über einige Abbildungen der Kugel in der Kartenentwurfslehre.

Von A. WEILER in Zürich.

In dem Nachfolgenden soll in erster Linie dargetan werden, wie man bei den *wahren Kegel-*, *Cylinder-* und *azimutalen Projektionen* die Oberfläche der Kugel zunächst auf die der betreffenden Kartenprojektion zu Grunde gelegte Hilfsfläche abzubilden hat. Es wird damit die Rolle, welche diese Hilfsfläche bei der Abbildung spielt, genauer beleuchtet, als es bisher der Fall war.

Das hier streng durchgeführte Verfahren bietet ferner einen deutlichen Einblick in die verschiedenen Abarten für jede einzelne Gattung dieser wichtigen Kartenprojektionen, nämlich für die *mittelabstandstreue*, die *winkel-* und die *flächentreue*. Wo sich in einfacher Art und Weise die Möglichkeit darbietet, wird endlich die Abbildung der in erster Linie in Betracht kommenden Kugelkreise auf die Hilfsfläche geometrisch veranschaulicht. Nach dieser Richtung hin zeichnen sich überall die flächentreuen Projektionen durch ihre einfachen geometrischen Eigenschaften aus.

Die soeben erwähnten wichtigsten Kugelkreise sind im allgemeinen Fall, nämlich bei der schiefachsigen, sowie auch bei der spezielleren transversalen Lage, die Haupt- und die Horizontalkreise. Da ihre Abbildung mit derjenigen der Meridiane und Parallelkreise bei der normalen Lage übereinstimmt, so kann ich mich unbeschadet der Allgemeinheit auf diesen letzteren Fall beschränken. Es wird sich dadurch die Ausdrucksweise etwas einfacher gestalten.

Bezüglich der neueren Bezeichnungsweise und der Literatur verweise ich auf Zöppritz-Bludau, Leitfaden der Kartenentwurfslehre, I. Teil, Leipzig 1899 und auf die einschlägigen Werke von Hammer.

I.

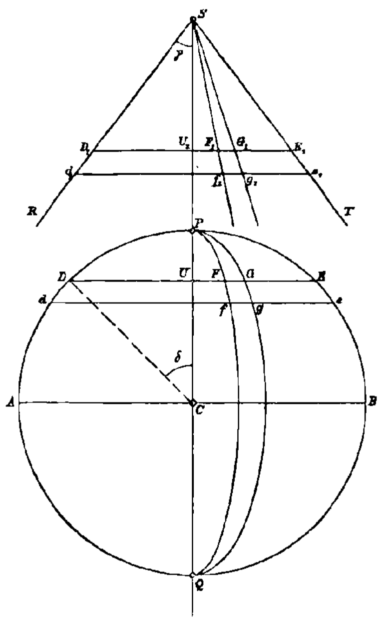
Kegel- und Kegelstumpfprojektionen.

1. Wird die *Erdkugel* in einem gewünschten Verhältnis ähnlich verkleinert, so entsteht der *Globus*, der direkt, in natürlicher Größe, abzubilden ist. Der Radius des Globus sei in der Folge ausnahmslos als *Längeneinheit* gewählt. (Erdoberfläche und Globus können auch, der Wirklichkeit näher kommend, zwei ähnliche Sphäroide sein).

Auf dem Globus G sind die *Pole* P, Q in erster Linie ausgezeichnet. Ihre Verbindungsgerade nennt man die *Erdachse* oder kurz die *Achse.*

Der die Projektion vermittelnde *gerade Kreiskegel* $\boldsymbol{K}$ ist seiner Gestalt und Lage nach zunächst völlig unabhängig; es soll indessen seine Achse mit der Erdachse zusammengelegt werden, dabei sein Scheitel bei S liegen (Fig. 1). Die Gestalt des Kegels ist durch den Winkel γ bestimmt, den die sämtlichen Kegelerzeugenden mit der Achse bilden. — In Figur 1 enthält die Zeichenfläche die gemeinsame Achse SPQ des Globus und des Kegels, von letzterem die gegenüber liegenden Erzeugenden RS, ST und vom Globus die gegenüberliegenden Meridiane PAQ, PBQ; C soll das Zentrum des Globus sein.

Fig. 1.



Bei den wahren Kegelprojektionen wird jeder *Meridian* als diejenige Kegelerzeugende abgebildet, die mit ihm in derselben Halbebene durch die Achse liegt. Jeder *Parallelkreis* DE des Globus dagegen bildet sich ab als ein Kreis D_1E_1 des Kegels. Der Originalkreis DE ist bestimmt durch den konstanten *Polabstand* $\delta = PCD$ seiner sämtlichen Punkte und der Bildkreis D_1E_1 durch die konstante Länge der Abschnitte auf den Kegelerzeugenden, die durch ihn gebildet werden, vom Scheitel S aus gemessen, $SD_1 = SE_1 = \cdots = m$. (In Figur 1 sind DE, D_1E_1 die Orthogonalprojektionen der eben genannten entsprechenden Kreise des Globus und des Kegels, auf die Zeichnungsfläche. Dasselbe gilt für die entsprechenden Meridiane PD, PF, . . . und Kegelerzeugenden SD_1, SF_1, . . .)

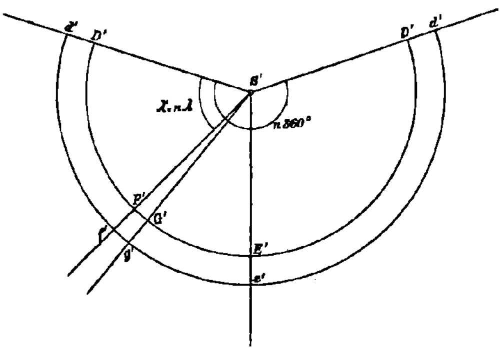
Die Zuordnung der Parallelkreise und ihrer Bilder soll nun eine *eindeutige* sein. Zu jedem Wert δ von 0^0 bis 180^0 muß ein bestimmter Wert von m gehören und umgekehrt. Zwischen δ und m besteht eine eindeutige Beziehung, welche man das *Halbmessergesetz* nennt und in üblicher Weise in der Form schreibt

$$m = f(\delta) \tag{1}$$

Sind der Kegel, nämlich sein Winkel γ und das Halbmessergesetz bekannt, so ist die Abbildung des Globus auf den Kegel eine durchaus eindeutige. Dem einzigen Schnittpunkt F eines Parallels DE mit einem Meridian PFQ des Globus entspricht auf dem Kegel der ebenfalls einzige Schnittpunkt F_1 des entsprechenden Kegelparallels $D_1 E_1$ mit der Erzeugenden SF_1. — Eine Parallelverschiebung des Kegels längs der Achse ist ohne Einfluß auf die Abbildung. Man könnte beispielsweise den Kegel jederzeit soweit fortbewegen, daß er den Globus längs des Parallels vom Polabstand $90 - \gamma$ berührt, allein es würde offenbar im allgemeinen dieser Parallel $\delta = 90 - \gamma$ durchaus nicht mit seinem entsprechenden Kreise des Kegels zusammenfallen, diese Parallelverschiebung also zwecklos sein.

2. (Fig. 1, 2.) Wird die Kegeloberfläche in die Ebene abgewickelt, so entsteht die *Karte.*[1]) Der Scheitel S werde nach S' gebracht. Die Abwickelung bildet einen Kreissektor vom Zentrum S'. Jede Erzeugende des Kegels erscheint in der Karte als ein Strahl aus S', das Bild eines Kugelmeridians, ein *Kartenmeridian.* Irgend ein Kegelkreis $D_1 E_1$ wird als begrenzter Bogen $D'E'D'$ abgewickelt; das Bild des Globusparallels DE ist der *Kartenparallel* $D'E'D'$. Sein Radius ist $m = f(\delta)$, welcher fortan *der Bildradius* des Parallels δ genannt werden soll.

Fig. 2.



Der entsprechende *Kegelradius*, nämlich der Radius $D_1 U_1$ des Kegelkreises $D_1 E_1$, ist nach Fig. 1 gleich $m \sin \gamma$. Der Umfang $2\pi m \sin \gamma$ dieses Kegelkreises stimmt mit der Länge des Bogens $D'E'D'$, dessen Radius m ist, überein. Zur Berechnung des Zentriwinkels $D'E'D' = \varphi$ des Sektors, in Graden ausgedrückt, besteht somit die Proportion

$$2\pi m \sin \gamma : 2\pi m = \varphi : 360,$$

woraus sich für φ der Ausdruck ergibt

$$\varphi = \sin \gamma \cdot 360 = n \cdot 360,$$

wobei man $n = \sin \gamma$ als *die Konstante der Kegelprojektion* bezeichnet.

1) Das Globusbild auf dem Kegel und die Karte sind unter sich längen-, flächen- und winkeltreu, was auch bezeichnet werden kann als *überall in den kleinsten Teilen kongruent.*

Im Anschluß an das Vorige soll angegeben werden, *unter welcher Bedingung ein Globusparallel in der Karte längentreu abgebildet wird.* Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß sein wirklicher Radius $DU = \sin\delta$ mit dem entsprechenden Kegelradius $D_1 U_1 = m \cdot \sin\gamma$ übereinstimmt, oder daß

(2) $$m \sin\gamma = \sin\delta \text{ oder } m \cdot n = \sin\delta.$$

Die Übertragung der *Parallelkreise* vom *Globus in die Karte* ist nun die denkbar einfachste. Sei δ der Polabstand des Parallels, so ist $m = f(\delta)$ der Bildradius, mit dem man um S' den Kartenparallel zu beschreiben hat, nämlich innerhalb des konstanten Winkels $D'S'D' = n \cdot 360^0$.

Es erübrigt, dieselbe Übertragung für die *Meridiane* anzugeben. Sei etwa PDQ der Nullmeridian, $S'D'$ sein Kartenbild; PFQ sei der Meridian von der geographischen Länge λ und $S'F'$ sein Bild. Alsdann steht der Winkel $D'S'F' = \lambda'$ in einfacher Beziehung zu λ. Die Bogen D_1F_1 auf dem Kegel K und $D'F'$ der Karte haben dieselbe Länge, der erstere $m \cdot \sin\gamma \cdot \lambda$, der letztere $m \cdot \lambda'$, wenn man nämlich λ und λ' in Bogenmaß ausgedrückt denkt. Aus der Gleichsetzung folgt aber $\lambda' = \sin\gamma \cdot \lambda = n \cdot \lambda$. Die Verwendung der Konstanten n für die Zeichnung der Kartenmeridiane ergibt sich hieraus von selbst.

3. (Fig. 1, 2) Alle Parallelkreise und Meridiane der Karte bilden eine Schar konzentrischer Kreisbogen und die allen diesen Bogen gemeinsamen Radien, also zwei sich überall rechtwinklig schneidende Systeme von Linien. Auch die entsprechenden Originalkreise auf dem Globus schneiden sich überall rechtwinklig. Somit sind für jeden Punkt F des Globus, sowie für jeden Bildpunkt F' der Karte die *Hauptrichtungen* bekannt, die Richtungen der stärksten Längenverzerrungen.[1]) Auf dem Globus wie in der Karte sind sie überall die Richtungen der Meridiane und Parallelkreise. (Die winkeltreue Karte macht hiervon eine Ausnahme, die Hauptrichtungen bei F und F' werden unbestimmt. Denn alle auf dem Globus von einem Punkte F ausgehenden unendlich kleinen Bogen werden in demselben Verhältnis verändert in der Karte wiedergegeben, die Indicatrix ist an jedem Punkte der Karte ein Kreis.)

Die *Halbachsen der Indicatrix* für den beliebigen Punkt F' der Karte findet man in folgender Weise. Auf dem Globus seien PF, PG zwei unendlich nahe Meridiane und DFE, dfe zwei unendlich benachbarte Parallelkreise, welche zusammen ein unendlich kleines Netzviereck $FGfg$ des Globus begrenzen, das sich als Netzviereck

1) Zöppritz-Bludau, S. 18.

$F_1 G_1 f_1 g_1$ auf dem Kegel und als $F'G'f'g'$ in der Karte abbildet. Bei dem Bildpunkte F' sind nun die Indicatrixhalbachsen gleich

$$h = \frac{F'f'}{Ff}, \text{ radial; } k = \frac{F'G'}{FG}, \text{ tangential.} \tag{3}$$

Die beigefügte Bezeichnung *radial* und *tangential* bezieht sich selbstverständlich auf das Parallelkreisbild. — Die größere dieser beiden Halbachsen wird man späterhin üblicher Weise mit a, die kleinere mit b bezeichnen, sobald diese Unterscheidung wünschenswert oder überhaupt möglich ist.[1])

Die radial gerichtete Halbachse h der Indicatrix kann man ganz allgemein durch einen Differentialquotienten darstellen. Auf dem Meridian PF hat F den Polabstand δ; erteilt man δ den unendlich kleinen Zuwachs $d\delta$, so geht F in f über. Da der Radius des Globus als Längeneinheit gewählt wurde, so ist $d\delta$ das Maß des Bogens Ff.

Der Zunahme $d\delta$ von δ entspricht infolge der Gleichung $m = f(\delta)$ die Zunahme dm von m; es ist $F'f' = dm$ zu setzen. Damit wird nach (3)

$$h = \frac{dm}{d\delta} = f'(\delta). \tag{4}$$

Stets ist der Bogen $F'G'$ gleich $F_1 G_1$, dessen Abwicklung er ist. Damit wird $k = F_1 G_1 : FG$. Die entsprechenden Bogen $F_1 G_1$ und FG der vollen Kreise $D_1 E_1$ und DE haben denselben unendlich kleinen Zentriwinkel (räumlich gleich FUG), sie verhalten sich also einfach wie die Radien dieser Kreise, wie $m \cdot \sin\gamma : \sin\delta$, d. h. es ist

$$k = \frac{m \sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{m \cdot n}{\sin\delta}. \tag{5}$$

Zum Schlusse dieser Einleitung sei noch erwähnt, daß die Parallelkreise der Karte *Linien gleicher Verzerrungen* sind. Denn es hängen h und k nur von δ ab, nicht aber von der geographischen Länge λ.

A. Mittelabstandstreue Projektionen.

4. Es handelt sich hier um Kegelprojektionen, bei denen die *Meridiane längentreu* auf die Kegelerzeugenden abgebildet werden. Somit haben nach (4) diese Projektionen der Differentialgleichung zu genügen

$$dm = d\delta. \tag{6}$$

1) In den vorhandenen Tabellen (für die „echten" Projektionen) sind bisher die Größen a und b aufgeführt worden, wobei es vorkommt, daß für dieselbe Projektion a bald radial ($a = h$), bald tangential ($a = k$) liegt. Dieser Übelstand bezüglich der Übersichtlichkeit wird beseitigt, wenn man immer die Werte h und k tabuliert. In diesem Falle sind nämlich in den Tabellen nicht nur die *Längen* der Halbachsen, sondern auch ihre *Richtungen* ohne weiteres ersichtlich.

Da m eine gerade Strecke ist, δ aber ein Bogen vom Radius 1, so wird die Integralgleichung geschrieben

$$(7) \qquad m = \operatorname{arc} \delta + c,$$

sie enthält eine willkürliche Konstante c.

Sollen die *Parallelkreise* gefunden werden, welche sich *längentreu* abbilden, so setze man nach (2) $m \cdot \sin \gamma = \sin \delta$. Die Gleichung, durch welche die Polabstände der längentreuen Parallelkreise bestimmt sind, lautet somit

$$(8) \qquad (\operatorname{arc} \delta + c) \cdot n = \sin \delta.$$

Für relativ große Werte von c wird die Gleichung keine Wurzeln, nämlich zwischen $\delta = 0^0$ und $\delta = 180^0$, besitzen; es werden alsdann keine längentreuen Parallelkreise vorkommen. Die folgenden Nummern zeigen, daß die Gleichung zwei verschiedene oder gleiche Wurzeln haben kann.

Über die in (7) vorkommende Konstante c wird man am einfachsten so verfügen, daß man einem bestimmten Wert $\delta = \delta'$ einen ebenfalls bestimmten Wert $m = m'$ entsprechen läßt. Es ist alsdann c durch die Gleichung bestimmt $m' = \operatorname{arc} \delta' + c$, und es geht damit (7) über in

$$(9) \qquad m = m' + \operatorname{arc} (\delta - \delta')$$

Geometrisch aufgefaßt hat man den Bildradius m' eines bestimmten Parallels δ' willkürlich gewählt, d. h. man hat das Bild $D_1 E_1$ eines Globusparallels DE auf dem Kegel willkürlich festgesetzt. Trägt man alsdann die von DE aus je bis zu den übrigen Parallelkreisen gemessenen Meridianbogen auf den Kegelerzeugenden von $D_1 E_1$ aus im entsprechenden Sinne, polwärts und gegen den Kegelscheitel hin oder je entgegengesetzt ab, so ergeben sich alle übrigen Parallelkreisbilder eindeutig, entsprechend (9).

Soll dieser Parallel δ' zudem *längentreu* abgebildet werden, so ist für m' nach (2) zu setzen $\frac{\sin \delta'}{n}$. Der Radius des Parallels DE oder δ' stimmt mit dem seines Kegelbildes $D_1 E_1$ überein. Man wird in diesem Falle den Kegel durch den Parallel DE gehen lassen, d. h. ihn soweit verschieben, daß er den Globus längs DE durchschneidet. Es deckt sich dann der Parallel DE mit seinem Bilde $D_1 E_1$ auf dem Kegel; *Globus und Kegel haben den Schnittkreis $DE = D_1 E_1$ entsprechend gemein.* Die so spezialisierte Abbildung wird man zweckmäßig bezeichnen als *Projektion des Globus auf den Schnittkegel eines Parallels.* Für jeden Punkt des Schnittparallels DE ist $h = 1$, $k = 1$ infolge der längentreuen Wiedergabe der Meridiane und eben dieses Parallels.

Daraus folgt, daß bei der Abbildung der unendlich nahen Umgebung des Parallels keinerlei Verzerrungen stattfinden, *diese Umgebung wird auf dem Schnittkegel und in der Karte längen-, flächen- und winkeltreu, also in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet.*

Bei dieser bemerkenswerten Projektion bleibt n, also die Gestalt des Schnittkegels, willkürlich, *die Abbildung des Globus geschieht auf einen beliebigen Schnittkegel durch den längentreuen Parallel.* Setzt man in (9) $\frac{\sin \delta'}{n}$ an Stelle von m', so ergibt sich als Halbmessergesetz

$$m = \frac{\sin \delta'}{n} + \operatorname{arc}(\delta - \delta'). \tag{9a}$$

Unter Hinweis auf das Nachfolgende kann diese Projektion eine Kegel- oder Kegelstumpfprojektion I. oder II. Art sein, andererseits hat sie die in Nr. 5—7 behandelten besonderen Projektionen zu Sonderfällen. — Diese Projektionsart, die auch bei den winkel- und flächentreuen Projektionen vorkommt, bietet den Vorteil, einer an sie gestellten weiteren Bedingung, etwa bezüglich der Verzerrungen, genügen zu können.

Setzt man in (7) $\delta = 0$, so wird $m = c$. Die Konstante c ist gleich dem Bildradius des Poles P, den man mit $m_p = c$ bezeichnet. Für $\delta = 180^0$ ergibt sich der Radius des Bildkreises des Poles Q, $m_q = c + \operatorname{arc} 180^0 = c + \pi$.

Ist $m_p = c = 0$, so ist der Bildradius des Poles P gleich Null, der Pol wird längentreu als Kegelscheitel S abgebildet. Die Projektion ist eine *Kegelprojektion im engeren Sinne.* Das Kartenbild des ganzen Globus ist ein Kreissektor vom Zentriwinkel $n \cdot 360^0$ und dem Radius $m_q = \operatorname{arc} 180^0 = \pi$.

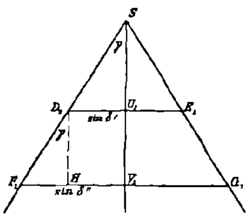
Haben m_p und m_q dasselbe Vorzeichen, wobei das negative auszuschließen ist, so beansprucht das Bild des Globus auf dem Kegel einen Kegelstumpf. Das Kartenbild des gesamten Globus ist ein Ringsektor; die Projektion soll als eine *Kegelstumpfprojektion I. Art* bezeichnet werden.

Ist endlich m_q positiv, m_p dagegen negativ (für $0 > c > -\pi$) so fallen die Polbilder auf entgegengesetzte Seiten des Kegelscheitels. Das Bild des Globus auf dem Kegel setzt sich über den Kegelscheitel hinaus auf den Ergänzungskegel fort. Der bestimmte Parallel δ_0, mit $\operatorname{arc} \delta_0 = -c$, bildet sich als Kegelscheitel S ab. Läßt man den Ergänzungskegel außer Betracht, so wird bei dieser *Kegelstumpfprojektion II. Art* die Kugelkappe vom Gegenpol Q bis zu dem ausgezeichneten Parallel δ_0 (in der Karte als Kreissektor) abgebildet.

Die Abbildung wird *unstetig*, so oft sich ein Parallelkreis als ein Punkt, oder umgekehrt ein Punkt (Pol) als Linie abbildet. Im ersteren Falle wird k zu Null, im letzteren Fall unendlich, während $h = \frac{dm}{d\delta}$ überall den Wert 1 beibehält.

5. Bei der wichtigen Projektion von De l'Isle sollen zwei im Voraus bezeichnete Parallelkreise δ', δ'' längentreu abgebildet werden. Es ist in diesem Fall der Kegel leicht zu bestimmen, Fig 3. Den Parallelkreisen DE, FG des Globus, von den Polabständen δ', δ'', entsprechen die Kegelkreise $D_1 E_1$, $F_1 G_1$, deren Radien $D_1 U_1$, $F_1 V_1$ mit denen der längentreuen Parallelkreise ($DU = \sin \delta'$, $FV = \sin \delta''$) übereinstimmen müssen. Die Seitenlänge $D_1 F_1$ der Kegelerzeugenden zwischen $D_1 E_1$ und $F_1 G_1$ ist gleich $\operatorname{arc}(\delta'' - \delta')$. Die Bildradien SD_1, SF_1 der längentreuen Parallelkreise bezeichne man mit m', m''. Es bestehen alsdann die Gleichungen

Fig. 3.



$$m' \sin \gamma = \sin \delta', \; m'' \sin \gamma = \sin \delta'', \; m'' - m' = \operatorname{arc}(\delta'' - \delta'),$$

aus denen sich m', m'' und $\sin \gamma$ berechnen lassen. Die Resultate können in Fig. 3 unmittelbar abgelesen werden, nämlich

$$(10) \quad n = \sin \gamma = \frac{\sin \delta'' - \sin \delta'}{\operatorname{arc}(\delta'' - \delta')} \left(= \frac{2 \cos \frac{\delta'' + \delta'}{2} \sin \frac{\delta'' - \delta'}{2}}{\operatorname{arc}(\delta'' - \delta')} \right), \quad m' = \frac{\sin \delta'}{\sin \gamma},$$

$$m'' = \frac{\sin \delta''}{\sin \gamma}.$$

Da m' und δ' sowie m'' und δ'' entsprechende Werte sind, so lautet nach (9) das Halbmessergesetz

$$(11) \quad m = m' + \operatorname{arc}(\delta - \delta') \quad \text{oder auch} \quad m = m'' + \operatorname{arc}(\delta - \delta'').^{1)}$$

Für den Radius des Bildkreises des Poles $P(\delta = 0)$ erhält man

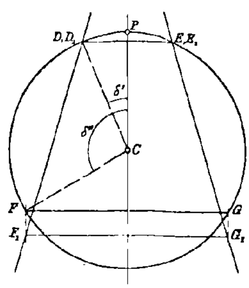
$$m_p = m' - \operatorname{arc} \delta' = \frac{\sin \delta'}{\sin \gamma} - \operatorname{arc} \delta' = \frac{\sin \delta' \operatorname{arc}(\delta'' - \delta')}{\sin \delta'' - \sin \delta'} - \operatorname{arc} \delta',$$

$$m_p = \frac{\sin \delta' \operatorname{arc} \delta'' - \sin \delta'' \operatorname{arc} \delta'}{\sin \delta'' - \sin \delta'}.$$

1) Die Gleichung (9a) drückt das Halbmessergesetz aus, wenn der eine Parallel δ' längentreu ist. Soll nun auch δ'' längentreu sein, so muß (9a) für $\delta = \delta''$, $m = m'' = \frac{\sin \delta''}{n}$ erfüllt sein. Daraus ergibt sich für n der in (10) angegebene Wert.

Um nachzuweisen, daß diese Projektion eine *Kegelstumpfprojektion I. Art* ist, setzen wir voraus (vgl. etwa Fig. 4), es sei $\sin\delta'' > \sin\delta'$ (für $\sin\delta'' = \sin\delta'$ würde eine Cylinderprojektion entstehen). Unter den beiden Polen wählt man denjenigen als P mit $\delta = 0$, welcher dem Parallel δ' näher liegt als dem Parallel δ'', so daß also $\operatorname{arc}\delta'' > \operatorname{arc}\delta'$. Dann ist

Fig. 4.



$$\frac{\operatorname{arc}\delta''}{\sin\delta''} > \frac{\operatorname{arc}\delta'}{\sin\delta'}, \qquad \sin\delta' \operatorname{arc}\delta'' > \sin\delta'' \operatorname{arc}\delta',$$

in dem Ausdruck für m_p sind Zähler und Nenner positiv und es ist auch m_p positiv.

Den Hilfskegel kann man durch den einen oder den anderen der längentreuen Parallelkreise des Globus hindurch gehen lassen, z. B. durch DE vom Polabstand δ', Fig. 4. DE fällt dann mit seinem Bilde D_1E_1 zusammen; es wird die Kugel auf den *Schnittkegel* DEF_1G_1 abgebildet. Nach voriger Nummer wird die unendlich nahe Umgebung eines jeden der beiden längentreuen Parallelkreise ohne Verzerrungen, also in den kleinsten Teilen gleich, abgebildet.

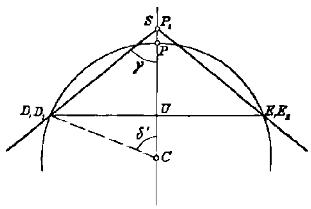
6. Die eben behandelte Projektion von De l'Isle läßt zwei *Sonderfälle* zu in Bezug auf die Lage der längentreuen Parallelkreise.

Setzt man $\delta'' = 0$, so ergeben die Formeln (10) und (11)

$$n = \sin\gamma = \frac{\sin\delta'}{\operatorname{arc}\delta'}, \quad m' = \frac{\sin\delta'}{\sin\gamma}, \quad m'' = 0, \quad m = \operatorname{arc}\delta, \quad (m_p = 0).$$

Es handelt sich hier um eine *Kegelprojektion* im engeren Sinne. Der eine längentreue Parallel DE behält seinen Polabstand δ' bei, der andere wird zu einem Punkt, dem Pol P, dessen Bild wieder ein Punkt ist, nämlich der Kegelscheitel S (Punkt S' der Karte, Fig. 2). Den Kegel lege man als Schnittkegel des Globus durch den Parallel DE, Fig. 5, so fällt in diesem Falle dieser Kreis mit seinem Kegelbilde zusammen, er entspricht sich selbst. Die Basis des Kegels ist nun der Kreis $DE = D_1E_1$ vom Radius $\sin\delta'$, die Kegelseite SD hat die Länge $\operatorname{arc}\delta'$. Der Kegel ist hierdurch eindeutig bestimmt

Fig. 5.

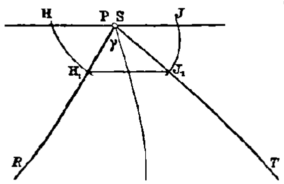


Die unendlich nahe Umgebung von DE wird in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. Dieses ist jedoch nicht mehr der Fall für den anderen längentreuen Parallel, den Pol $\delta = 0$. Es ist nämlich allgemein neben $h = \frac{dm}{d\delta} = 1$, $k = \frac{n \cdot m}{\sin\delta} = \frac{\sin\delta'}{\operatorname{arc}\delta'} \cdot \frac{\operatorname{arc}\delta}{\sin\delta}$ und für $\delta = 0$

wird $k = \frac{\sin \delta'}{\operatorname{arc} \delta'} = n$. In der Umgebung von S ist also $k < 1$, die unendlich kleinen Parallelkreise um den Pol P werden auf den Kegel bei S verkürzt abgebildet. Die unendlich kleinen gleichschenkligen *Netzdreiecke,* welche auf dem Globus am Pole liegen, behalten bei der Abbildung die Längen ihrer Schenkel bei, dagegen werden ihre Basen (und Winkel am Scheitel) im Verhältnis $1 : n$ verkleinert.

Die *Abbildung der Umgebung des Poles* P kann man sich in folgender Weise veranschaulichen. Man lege den Kegel RST als Schnittkegel des Globus durch den Pol, d. h. man verschiebe ihn längs der Achse, bis sein Scheitel S mit P zusammenfällt, Fig. 6. Es sei nun p vom Durchmesser HI und dem Radius $PH = PI = \varrho$ ein Parallel in der Umgebung des Poles; seine Ebene steht auf der Achse senkrecht. Auf dem Kegel trage man $SH_1 = SI_1 = \varrho$ ab, so ist der Kegelkreis p_1 vom Durchmesser $H_1 I_1$ das Bild des Parallels p. Der wirkliche Radius von p_1 ist offenbar gleich $\varrho \sin \gamma = \varrho \cdot n$. Teilt man nun die Umfänge von p und p_1 in dieselbe Anzahl gleicher Teile (z. B. 360) und verbindet man alle Teilpunkte mit $S = P$, so entstehen die von P ausgehenden Meridianbogen und ihre Bilder auf dem Kegel.

Fig. 6.

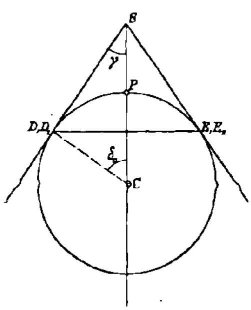


7. Um den *zweiten Sonderfall* der Projektion von De l'Isle (Nr. 5) zu erhalten, lasse man die beiden längentreuen Parallelkreise zusammenfallen, also δ'' in δ' übergehen und schreibe darauf δ_0 für δ'. — Die Konstante n ist nach (10) zu berechnen. Da

$$\lim \left(\frac{\sin \delta'' - \sin \delta'}{\delta'' - \delta'}\right)_{\delta'' = \delta'} = \cos \delta'$$

so wird $n = \sin \gamma = \cos \delta_0$, $\gamma = 90 - \delta_0$, die Abbildung geschieht auf den *Berührungskegel* dieses sogenannten *Mittelparallels* DE vom Polabstande δ_0, Fig. 7 (in Fig. 4 ist FG nach DE gerückt). Kegel und Globus haben nunmehr einen unendlich schmalen Flächenstreifen längs des Parallels DE miteinander gemein. Diese Zone entspricht sich selbst und wird auf dem Kegel kongruent, in der Karte in den kleinsten Teilen kongruent, abgebildet. Der Bildradius des Mittelparallels ist nach Fig. 7 gleich $DS = m_0 = \operatorname{tg} \delta_0$. Da $\operatorname{tg} \delta_0 > \operatorname{arc} \delta_0$, so ist das Bild des Poles P ein Kegelkreis zwischen $D_1 E_1$ und S, die Pro-

Fig. 7.



jektion also eine *Kegelstumpfprojektion I. Art.* Das Halbmessergesetz lautet

$$m = \operatorname{tg}\delta_0 + \operatorname{arc}(\delta - \delta_0).$$[1]

8. Der eben behandelten Projektionsart mit längentreuen Meridianen steht die *wahre Kegelprojektion* gegenüber, *welche alle Parallelkreise längentreu abbildet.* Sie ist die direkte Verallgemeinerung der orthographischen Azimutalprojektion. Fig. 1 veranschaulicht diese Projektion, wenn daselbst alle Linien DD_1, dd_1, ... mit der Achse parallel laufen. Das Halbmessergesetz lautet

$$m = \frac{\sin\delta}{n}, \text{ mit } h = \frac{\cos\delta}{n}, \quad k = 1. \tag{12}$$

Diese Projektion läßt sich stets auffassen als diejenige auf den *Berührungskegel* des Parallels $\delta_0 = 90 - \gamma$ $(n = \cos\delta_0)$, dessen Umgebung auf dem Kegel kongruent abgebildet wird.

B. Winkeltreue Projektionen.

9. Bei einer *winkeltreuen* Abbildung müssen für jeden einzelnen Punkt der Karte die Indicatrixhalbachsen h, k einander gleich sein. Durch Gleichsetzen ihrer Ausdrücke in (4) und (5) ergibt sich die diesen Projektionen zu Grunde liegende Differentialgleichung

$$\frac{dm}{d\delta} = \frac{n \cdot m}{\sin\delta}. \tag{13}$$

Ihre Integralgleichung lautet, unter $C = \lg c$ die Integrationskonstante verstanden,

$$m = c \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n. \tag{14}$$

Diese Formel, das allgemeine Halbmessergesetz der winkeltreuen Projektionen, ergibt für $\delta = 0^0$ und $\delta = 180^0$ stets $m = 0$, bezüglich $m = \infty$. Es folgt, daß jede winkeltreue Projektion eine *Kegelprojektion* im engeren Sinne ist und daß die Abbildung des ganzen Globus einen ganzen Kegel, von dessen Scheitel bis ins Unendliche, erfordert.

---

1) Es läßt sich nun leicht die Bedingung angeben, unter welcher die in Nr. 4 aufgestellte Gleichung (8), welche allgemein die längentreuen Parallelkreise bestimmt, eine *Doppelwurzel* hat. Wenn nämlich die Abbildung auf den Berührungskegel eines sich längentreu abbildenden Parallels δ' geschieht, so vereinigen sich die beiden längentreuen Parallelkreise. Man setze also in $(\operatorname{arc}\delta + c)\cdot n = \sin\delta$ ein $\delta = \delta'$, $n = \cos\delta'$, $\operatorname{arc}\delta' = \operatorname{arc}\cos n$ und $\sin\delta = \sin\delta' = \sqrt{1-n^2}$, so folgt

$$(\operatorname{arc}\cos n + c)\, n = \sqrt{1-n^2}.$$

Ist diese Gleichung zwischen n und c erfüllt, so hat die Gleichung (8) eine Doppelwurzel.

Nebenbei bemerkt nimmt die Gleichung (2), $m \cdot n = \sin\delta$, aus welcher die Polabstände δ der längentreuen Parallelkreise zu berechnen sind, die Gestalt an

$$c \cdot n \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n = \sin\delta.$$ [1]

Um die Verzerrungen zu beurteilen, berechnet man

$$h = k = \frac{dm}{d\delta} = \frac{n \cdot m}{\sin\delta} = n \cdot c \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n}{\sin\delta} = \frac{n \cdot c}{2} \frac{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}}{\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{n+1}}.$$

Es folgt, daß die Abbildung der Umgebung der Pole unstetig ist. Der Bildradius des Poles Q ist unendlich groß. Für den Pol P, dessen Bild der Kegelscheitel ist, also für $\delta = 0$ wird $h = k = 0$, die Verzerrungen werden ebenfalls unendlich stark. Es ist überhaupt unmöglich, die Umgebung des Poles P auf den Kegel als Umgebung seines Scheitels S, in den kleinsten Teilen *ähnlich* abzubilden, wie hier verlangt wird. Es sei nämlich, Fig. 6 (woselbst nun nicht mehr $PH = SH_1$ sein soll), HI ein dem Pole P unendlich benachbarter Parallel p und $H_1 I_1$ oder p_1 sein Bild auf dem Kegel RST (letzterer als Schnittkegel durch den Pol gelegt). Die von P ausgehenden Meridianbogen zerlegen die Fläche von p in gleichschenklige Netzdreiecke, die bei gleichmäßiger Verteilung der Meridiane kongruent sind. Es seien die Winkel dieser Netzdreiecke bei P gleich α. Nun teile man p_1 in ebensoviele gleiche Teile wie den Parallel p und verbinde die Teilpunkte mit S. Die so entstehenden ebenfalls kongruenten gleichschenkligen Dreiecke sind die Bilder der ebengenannten von P ausgehenden. Nun sind die Winkel der Bilddreiecke bei S gleich $\alpha' = n \cdot \alpha$. Es können also in der Tat die Originaldreiecke und ihre Bilder unmöglich ähnlich sein, nämlich als gleichschenklige Dreiecke mit verschiedenen Winkeln an den Scheiteln. — Diese Dreiecke, deren ähnliche Abbildung unmöglich ist, werden nun dadurch unterdrückt, daß das Verhältnis $SH_1 : PH$ zu Null wird ($h = 0$ für $\delta = 0$).

1) Man kann auch hier die Bedingung dafür, daß diese Gleichung für δ zwei gleiche Werte liefere, in geschlossener Form angeben. Der Fall tritt ein, wenn wieder ein Parallel δ' sich auf seinen *Berührungskegel* selbstentsprechend (längentreu) abbildet. Dasselbe gilt dann ohne weiteres für den unendlich benachbarten Parallel. Obige Gleichung muß also erfüllt sein für $\delta = \delta'$, $\cos\delta' = n$. Es ist dann $\sin\delta' = \sqrt{1-n^2}$, $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\delta'}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\delta'}{1+\cos\delta'}} = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}}$ und durch Einsetzen folgt die Bedingungsgleichung zwischen c und n

$$c \cdot n \cdot \sqrt{\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n} = \sqrt{1-n^2}, \quad \text{oder} \quad c^2 \cdot n^2 \frac{(1-n)^{n-1}}{(1+n)^{n+1}} = 1.$$

Wird der für die Abbildung benutzte Kegel unverändert beibehalten, so bleibt n konstant. Eine Änderung des Parameters c in (14) hat in diesem Fall eine proportionale Änderung der Bildradien sämtlicher Parallelkreise zur Folge, während die Meridianbilder unverändert bleiben. Das gesamte Bild erfährt eine Ähnlichkeitsreduktion; *alle winkeltreuen Abbildungen, welche mit Hilfe desselben Kegels ausgeführt werden, sind ähnlich.*

Die Konstante c hat hier bekanntlich eine einfache geometrische Bedeutung. Für $\delta = 90^0$ liefert nämlich die Gleichung (14) $m = c$. Diesen Bildradius des Äquators bezeichnet man mit m_a; in diesem Falle lautet das Halbmessergesetz der winkeltreuen Projektionen immer noch ganz allgemein

$$(15)\qquad m = m_a \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n, \text{ mit } h = k = m_a \cdot n \cdot \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n}{\sin\delta}\,.$$

Um eine einzelne dieser unendlich vielen möglichen Projektionen auf denselben Kegel von beliebigem Winkel γ zu erhalten, wird man für $c = m_a$ je einen bestimmten Wert wählen. Allgemeiner kann man (Fig. 1, 2) einem beliebigen Parallel DE des Globus einen bestimmten Kegelparallel $D_1 E_1$ entsprechen lassen. Die übrigen Parallelkreise wie de, $d_1 e_1$, entsprechen sich dann eindeutig derart, daß alle unendlich kleinen Netzvierecke wie $FGfg$, $F_1 G_1 f_1 g_1$ ähnlich sind.[1])

10. Über die beiden Konstanten $n = \sin\gamma$ und $c = m_a$ läßt sich so verfügen, daß die Abbildung auf den *Berührungskegel* eines Mittelparallels DE (Fig. 7) geschieht, wobei selbstverständlich der Berührungsparallel sich längentreu abbilden soll. Globus und Kegel haben dann wieder den unendlich schmalen Flächenstreifen längs DE entsprechend gemein, diese unendlich schmale Zone wird auf dem Kegel kongruent abgebildet.

Es ist in diesem Fall weiter $\gamma = 90 - \delta_0$, also $n = \cos\delta_0$; der Bildradius des Parallels δ_0 ist $m_0 = \operatorname{tg}\delta_0$. Nach (15) ist $m_0 = m_a \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}\right)^n$, somit $m_a \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}\right)^n = \operatorname{tg}\delta_0$, $m_a = \frac{\operatorname{tg}\delta_0}{\left(\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}\right)^n} = \frac{\operatorname{tg}\delta_0}{\left(\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}\right)^{\cos\delta_0}}$. Das Halbmessergesetz nimmt die Gestalt an

$$(16)\qquad m = m_a \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^{\cos\delta_0}, \text{ mit } h = k = \frac{\sin\delta_0}{\sin\delta}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}}\right)^{\cos\delta_0}$$

1) Die Differentialgleichung (13) drückt nichts anderes aus.

11. Soll nur *ein* Parallelkreis DE vom Polabstand δ' längentreu abgebildet werden, so bleibt der Kegel willkürlich. Man wird ihn zweckmäßigerweise als (beliebigen) *Schnittkegel* des Globus durch jenen Parallel δ' legen; der Scheitel S ist dann ein beliebiger Punkt der Achse CP, Fig. 5. — Bezeichnet man den Bildradius von DE mit $m' = SD_1$, so hat man nach (14) $m' = c\left(\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}\right)^n$. Anderseits ist $DU = m'n = \sin\delta'$. Aus diesen zwei Gleichungen folgt durch Gleichsetzen von m'

$$c = \frac{\sin\delta'}{n\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}\right)^n}.$$

Damit lautet das Halbmessergesetz für diese Art der winkeltreuen Projektion:

$$m = \frac{\sin\delta'}{n}\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}}\right)^n,\ \text{mit}\ h = k = \frac{\sin\delta'}{\sin\delta}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}}\right)^n. \tag{17}$$

Selbstverständlich wird die unendlich nahe Umgebung des längentreuen Parallels δ' auf dem Kegel und in der Karte in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet; für $\delta = \delta'$ wird $h = k = 1$ (vgl. Nr. 4, S. 174—75).

12. Bei der Lambert-Gaußschen winkeltreuen Projektion sollen zwei im voraus gegebene Parallelkreise DE, FG von den Polabständen δ', δ'' längentreu abgebildet werden. Die Bildkreisradien der Parallelkreise δ' und δ'' sind nach dem auch für diese Projektion bestehenden Halbmessergesetz (15)

$$m' = m_a\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}\right)^n,\quad m'' = m_a\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\delta''}{2}\right)^n;$$

die beiden Kreise δ', δ'' werden längentreu abgebildet, wenn

$$m'\cdot n = \sin\delta',\quad m''\cdot n = \sin\delta''.$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach n und m_a folgt

$$n = \frac{\lg\sin\delta'' - \lg\sin\delta'}{\lg\operatorname{tg}\frac{\delta''}{2} - \lg\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}},\quad m_a = \frac{\sin\delta'}{n\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}\right)^n} = \frac{\sin\delta''}{n\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{\delta''}{2}\right)^n}. \tag{18}$$

Der Hilfskegel kann auch hier als Schnittkegel durch DE oder FG gelegt werden. Im übrigen hat er, nach der Formel für n zu schließen, offenbar keine in einfacher Weise angebbare Lage zu den beiden längentreuen Parallelkreisen.

Läßt man bei dieser Lambert-Gaußschen Projektion δ'' zu δ' werden, so geht sie über in die in Nr. 10 behandelte Projektion auf den Berührungskegel des Parallels δ' (resp. δ_0). Dieser Übergang ist dem in Nr. 7 besprochenen durchaus analog.

Wird dagegen δ'' gleich Null, so entsteht die in Nr. 11 behandelte Projektion auf den beliebigen Schnittkegel durch den Mittelparallel δ'. Von den eingangs voriger Nummer aufgestellten Gleichungen bleiben für $\delta'' = 0$ zur Bestimmung von m_a, m' und n nur übrig:

$$m' = m_a \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}\right)^n, \qquad m' \cdot n = \sin\delta',$$

aus denen sich n, m_a und m' nicht bestimmen lassen. Hat man jedoch n willkürlich gewählt, so werden

$$m_a = \frac{\sin\delta'}{n\left(\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}\right)^n}, \qquad m' = \frac{\sin\delta'}{n};$$

jede dieser unendlich vielen Projektionen erfüllt die an sie gestellten Forderungen.

C. Flächentreue Projektionen.

13. Eine Projektion ist *flächentreu*, wenn sich alle beliebig großen oder kleinen Flächenstücke des Globus in wahrer Größe abbilden. Diese Forderung ist erfüllt, wenn der üblicherweise mit S bezeichnete Ausdruck $h \,.\, k$ für jeden Punkt der Karte den Wert 1 hat. Man erhält somit nach (4) und (5) als charakteristische Differentialgleichung aller flächentreuen (echt konischen) Projektionen:

$$\frac{dm}{d\delta} \cdot \frac{n \,.\, m}{\sin\delta} = 1. \tag{19}$$

Durch Integration ergibt sich das allgemeine Halbmessergesetz $n \cdot \frac{m^2}{2} = -\cos\delta + c$, oder:

$$m = \sqrt{\frac{2\,(c - \cos\delta)}{n}}, \text{ mit } k = \frac{\sqrt{2n\,(c - \cos\delta)}}{\sin\delta} = \frac{1}{h}. \tag{20}$$

Für $\delta = 90^0$ ergibt sich der Bildradius des Poles P, $m_p = \sqrt{\frac{2\,(c-1)}{n}}$. Nach dieser Formel ist m_p reell und von Null verschieden, die Projektion eine *Kegelstumpfprojektion I. Art*, wenn $1 < c < \infty$. Für $c = 1$ ist sie eine *Kegelprojektion;* für $-1 < c < +1$ eine *Kegelstumpfprojektion II. Art*, wobei m_p imaginär ist.[1]) Es ist in diesem Fall der Kegel-

1) Sollen für m überhaupt reelle Werte möglich sein, so muß wegen $-1 < \cos\delta < +1$ die Konstante c einen Wert haben zwischen -1 und $+\infty$.

scheitel S das Bild eines Parallels δ_0 mit $\cos\delta_0 = c$. Die Abbildung der Umgebung dieses Kreises wird unstetig, für $\delta = \delta_0$ wird

$$h = \infty, \quad k = 0.$$

Auf dem Kegel wird nur die Kugelkappe abgebildet vom Gegenpol Q bis zu dem genannten Parallel δ_0; die Abbildung setzt sich nicht über den Pol hinaus auf den Ergänzungskegel fort, denn für $\cos\delta > c$ wird der Bildradius m imaginär.

Die *längentreu abgebildeten Parallelkreise* werden hier durch eine *algebraische* Gleichung zweiten Grades bestimmt. Setzt man nämlich $m \,.\, n = \sin\delta$, so folgt aus (20):

$$\cos^2\delta - 2n\cos\delta + (2nc - 1) = 0. \tag{21}$$

Die Diskussion dieser Gleichung lehrt namentlich folgendes. Eine *Kegelprojektion* ($c = 1$) bildet stets zwei Parallelkreise längentreu ab, von denen der eine mit dem Pol P zusammenfällt. — Bei der *Kegelstumpfprojektion I. Art* ($c > 1$) sind die längentreuen Parallelkreise reell und verschieden, wenn $1 < c < \frac{n^2+1}{2n}\cdot$ Für den maximalen zulässigen Wert $c = \frac{n^2+1}{2n}$ besitzt die Gleichung eine *Doppelwurzel* $\cos\delta = n$, wobei die Abbildung auf den Berührungskegel dieses ausgezeichneten Parallels geschieht. Ist $c > \frac{n^2+1}{2n}$, so sind die beiden Wurzeln $\cos\delta$ imaginär. — Die *Kegelstumpfprojektion II. Art* ($c < 1$) weist nur einen längentreuen Parallel auf, da die eine Wurzel $\cos\delta$ größer als 1 wird.

In dem allgemeinen Ausdruck für m, Gleichung (20), kommen zwei Konstante n und c vor. Die Projektion kann zwei an sie gestellte Bedingungen erfüllen. Die Festsetzung von n bedeutet die Auswahl des Hilfskegels. Über c wird verfügt, wenn man einem beliebigen Parallel δ' einen bestimmten Bildradius m' zuweist, es ist dann nach (20) $m'^2 = \frac{2(c - \cos\delta')}{n}\cdot$ Eliminiert man c aus diesen Gleichungen für m und m', so entsteht als neuer Ausdruck des Halbmessergesetzes:

$$m = \sqrt{\frac{2(\cos\delta' - \cos\delta)}{n} + m'^2}, \quad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2n(\cos\delta' - \cos\delta) + m'^2 \,.\, n^2}}{\sin\delta} = \frac{1}{h}\cdot \tag{22}$$

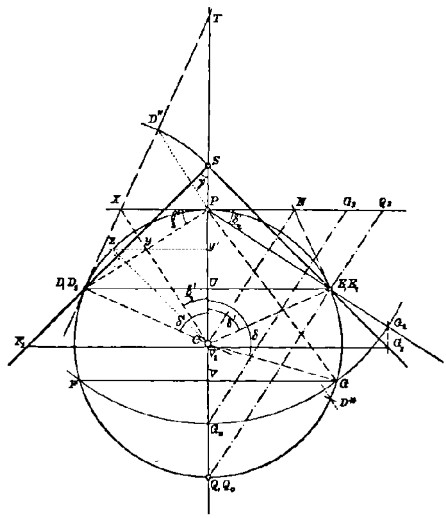
Soll sich zudem dieser Parallel *längentreu* und infolgedessen seine unendlich nahe Umgebung in den kleinsten Teilen kongruent abbilden, so wird nach (2) $m' \,.\, n = \sin\delta'$ und damit:

$$m = \frac{\sqrt{2n(\cos\delta' - \cos\delta) + \sin^2\delta'}}{n}, \quad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2n(\cos\delta' - \cos\delta) + \sin^2\delta'}}{\sin\delta} = \frac{1}{h}\cdot \tag{23}$$

Über die Konstante n kann noch verfügt werden; die Abbildung geschieht auf einen *beliebigen Schnittkegel* durch den längentreuen Parallel, der sich selbst entspricht, vgl. Nr. 4, S. 174—75.

Ich wende mich zu einer eingehenden Behandlung der gewohnten bestimmten Typen der flächentreuen Projektionen, wobei jede derselben unabhängig entwickelt werden soll. Sie lassen sich als Sonderfälle der durch (23) definierten Projektion auffassen, worauf im einzelnen aufmerksam gemacht werden wird.

Fig. 8.



14. Bei der *Kegelprojektion von Lambert* soll der Parallel δ' längentreu abgebildet werden, der Pol gilt als zweiter längentreuer Parallel. Den Kegel $\boldsymbol{K}$ wird man am einfachsten als *Schnittkegel* durch diesen längentreuen Parallel DE oder δ' legen, so fällt DE mit seinem Kegelbilde $D_1\,E_1$ zusammen (Fig. 8). U in CP ist der Mittelpunkt jenes Parallels und $\sin\delta'$ sein Radius. Die Kugelkappe DPE hat $UP = 1 - \cos\delta'$ zur Höhe, also die Oberfläche $2\pi(1-\cos\delta')$. Ebensogroß soll die Kegelkappe D_1SE_1 sein. Bezeichnet man folgerichtig die Kegelseite SD_1 mit m', so ergibt sich für die Kegelkappe der Ausdruck $\pi\sin\delta'\,.\,m'$. Durch Gleichsetzen folgt $2(1-\cos\delta') = \sin\delta'\,.\,m'$, also

$$m' = \frac{2(1-\cos\delta')}{\sin\delta'} = \frac{4\sin^2\frac{\delta'}{2}}{2\sin\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta'}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}.$$

Infolge der Längentreue des Parallels sowie nach Figur ist $m'\sin\gamma = \sin\delta'$, daher $n = \sin\gamma = \frac{\sin\delta'}{m'} = \cos^2\frac{\delta'}{2}$, so daß:

$$(24)\qquad m' = 2\,.\operatorname{tg}\frac{\delta'}{2},\quad n = \cos^2\frac{\delta'}{2}\,.$$ [1]

1) Offenbar handelt es sich hier um einen Sonderfall der zuletzt genannten Projektion und der für n gefundene Wert läßt sich aus (23) finden, wenn dort $\delta = 0$ der Bildradius $m = 0$ entsprechen soll.

Die erstere dieser Gleichungen liefert folgende Konstruktion des Kegels, nämlich seines Scheitels S. Man bringe (Fig. 8) die Meridiantangenten in D und P zum Schnitt in X, so ist $DX = \operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}$. Auf der ersteren Tangente trage $DX = XD''$ ab, so ist $DD'' = m'$ (offenbar ist D'' der Schnittpunkt der Tangente DT mit der Parallelen durch P zu CX, und es geht zudem diese Linie PD'' durch den D gegenüberliegenden Punkt D^* des Meridians PEQ). Beschreibt man nun um D den durch D'' gehenden Bogen, so wird die Achse im Kegelscheitel S geschnitten.

Die zweite Formel (24) liefert eine genauere Konstruktion des Kegels, welche zudem den großen Vorteil bietet, umkehrbar zu sein. Der Schnittpunkt Y der Halbierungslinie CX des Winkels δ' mit der Sehne DP ist die Mitte dieser Sehne. Offenbar ist $CY = \cos\frac{\delta'}{2}$ (weil $CP = 1$). Die Projektion von CY auf CP ist $CY' = \cos^2\frac{\delta'}{2}$. Dieser Wert stimmt mit $n = \sin\gamma$ überein. Nun ist CY' der Sinus des Winkels $Y'ZC$, wobei der Bogen PD von YY' in Z geschnitten wird; es ist also $\sphericalangle Y'ZC = \gamma$. Da ferner $ZY' \perp SY'$, *so steht der Endschenkel SD des Winkels γ* (bei S) *auf CZ senkrecht.* (Der Hilfskegel $\boldsymbol{K}$, hier durch DE gelegt, ist dem Berührungskegel des Parallels des Punktes Z parallel.)

Beachtet man, daß Y' die Mitte von PU ist, so erhält man folgende *Umkehrung dieser Konstruktion.* Es sei der Kegel $\boldsymbol{K}$, nämlich der Winkel γ, bekannt. Man trage γ irgendwo an CP als Anfangsschenkel an, fälle aus C auf den Endschenkel von γ die Senkrechte, welche den Meridian PQ in Z schneidet. Aus Z fälle man auf den Radius CP die Senkrechte ZY', mache $PY' = Y'U$, so ist U der Mittelpunkt des eigentlichen längentreuen Parallels DE dieser Kegelprojektion.

15. (Fig. 8). Zu der *Abbildung der Parallelkreise* auf den Kegel übergehend sei FG vom Polabstand δ ein beliebiger Parallel, man berechne und konstruiere sein Bild F_1G_1.[1])

Den Bildradius von FG, nämlich $SF_1 = SG_1$, bezeichnet man mit m; der Radius des Kegelkreises F_1G_1 ist dann $m \,.\, n$. Die Oberfläche des Kegels SF_1G_1 wird damit gleich $\pi m^2 n$, die entsprechende Kugelkappe FPG ist $2\pi(1-\cos\delta)$. Durch Gleichsetzen dieser entsprechenden Flächen folgt $m = \sqrt{\frac{2(1-\cos\delta)}{n}} = \frac{2\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{n}}$, was mit Formel (20),

1) Die Abbildung der Umgebung des Poles $\delta = 0$ ist am Schlusse der folgenden Nummer auseinandergesetzt.

für $c = 1$, übereinstimmt. Da ferner nach voriger Nummer, $n = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$, so lautet das Halbmessergesetz:

$$(25) \qquad m = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}}, \text{ mit } h = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta'}{2}} = \frac{1}{k}.$$

Für den Bildkreis $F_1 G_1$ bestehen einfache geometrische Konstruktionen. Aus $m = 2 \sin \frac{\delta}{2} : \cos \frac{\delta'}{2}$, $n = \sin \gamma = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$, folgt $m \,.\, \sin \gamma = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta'}{2}$. Die linke Seite ist der Abstand des Punktes G_1 von der Achse CS. Rechts ist $2 \sin \frac{\delta}{2}$ gleich der Sehne PG. Um $PG \,.\, \cos \frac{\delta'}{2}$ zu erhalten, dreht man PG um P, bis G nach G_2 in PE zu liegen kommt. Es haben alsdann die Punkte G_2 und G_1 von der Achse CS denselben Abstand; es wird die Kegelseite SE von der Parallelen durch G_2 zu der Achse im gesuchten Punkte G_1 geschnitten, womit der Kegelparallel $F_1 G_1$ konstruiert ist.

Eine zweite Konstruktion liefert den Bildradius $m = SG_1$. Es ist $m = 2 \sin \frac{\delta}{2} : \cos \frac{\delta'}{2}$; $\cos \frac{\delta'}{2} = CY$, $1 : \cos \frac{\delta'}{2} = CX = CN$, wo N der Schnittpunkt der Meridiantangenten in P und E ist. Es ist somit $m = PG \,.\, CN$. Um $PG = 2 \sin \frac{\delta}{2}$ mit CN zu multiplizieren, bemerke man, daß $PC = 1$; man drehe PG um P nach PG_0 in die Achse und ziehe durch G_0 die Parallele zu CN bis zum Schnitt mit der Poltangente PN in G_3. Es ist $G_0 G_3$ das verlangte Produkt und $m = SG_1 = G_0 G_3$ der Bildradius des Parallels FG. — Der äußerste und größte aller dieser Bildradien ist derjenige des Gegenpols Q, gleich $Q_0 Q_3$, der, wie leicht zu zeigen ist, durch $E = E_1$ geht $\left(\sphericalangle\, PQE = \frac{\delta'}{2}\right)$.

Anhang. Für diese winkeltreue Kegelprojektion ist $c = 1$, es wird damit die allgemeine Gleichung (21) für die längentreuen Parallelkreise zu $\cos^2 \delta - 2n \cos \delta + (2n - 1) = 0$, d. i.

$$\{\cos \delta - 1\} \cdot \{\cos \delta - (2n - 1)\} = 0.$$

Die erste Wurzel ist $\cos \delta = 1$ und dementsprechend der Pol $\delta = 0$ der eine längentreue Parallel. Für den zweiten ist $\cos \delta = 2n - 1$; für die hier eingeführte Bezeichnung $\cos \delta' = 2n - 1$. Daraus folgt, daß $n = \cos^2 \frac{\delta'}{2}$, wie in (24) angegeben.

Der eigentliche längentreue Parallel δ' oder DE ist nun für einen gegebenen Kegel RST (Fig. 9) sehr leicht zu finden. Man trage auf der Senkrechten aus Q auf RS die Längeneinheit $QA = QC$ ab, fälle aus A auf QC die Senkrechte AB, so ist $QB = n$ ($= \sin\gamma$). Trägt man in der Achse $QB = BU$ ab, so ist $QU = 2n$, $CU = 2n - 1 = \cos\delta'$; es ist U der Mittelpunkt des längentreuen Parallels DE und D_1E_1 sein Bild auf dem Kegel. — Diese Konstruktion ist ohne weiteres *umkehrbar;* zu gegebenem DE oder δ' läßt sich der Kegel eindeutig finden.

Fig. 9.

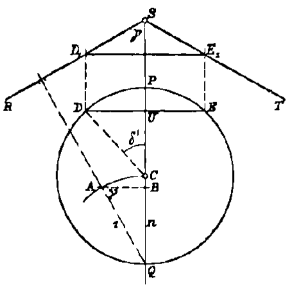
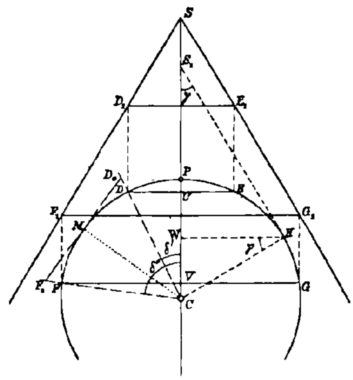


Fig. 10.



16. Die *flächentreue Kegelstumpfprojektion von Albers* bildet zwei im voraus gegebene Parallelkreise DE, FG von den Polabständen δ', δ'' längentreu ab (Fig. 10). Es ist somit vor allem ein Kegel $\boldsymbol{K}$ zu ermitteln, auf welchem sich zwei Kreise D_1E_1, F_1G_1 von den Radien $\sin\delta'$, $\sin\delta''$ befinden, derart, daß die Oberfläche des Kegelstumpfes $D_1E_1F_1G_1$ gleich ist der Oberfläche der entsprechenden Kugelzone $DEFG = 2\pi(\cos\delta' - \cos\delta'')$. Bezeichnet man die Seitenabschnitte SD_1, SF_1 des Kegels mit m', m'', so hat der Kegelstumpf die Oberfläche:

$$2\pi\frac{\sin\delta' + \sin\delta''}{2}(m'' - m').$$

Durch Gleichsetzen dieser Flächen folgt:

$$(m'' - m')(\sin\delta'' + \sin\delta') = 2(\cos\delta' - \cos\delta''), \tag{26}$$

$$(m'' - m')\, 2\sin\frac{\delta'' + \delta'}{2}\cos\frac{\delta'' - \delta'}{2} = 4\sin\frac{\delta'' + \delta'}{2}\sin\frac{\delta'' - \delta'}{2},$$

$$m'' - m' = 2\,\mathrm{tg}\frac{\delta'' - \delta'}{2}. \tag{27}$$

Es ist damit die Länge D_1F_1 der Seite des Kegelstumpfes berechnet. Die Formel (27) liefert folgende einfache *Konstruktion.*[1]) An

1) Zöppritz-Bludau S. 108.

den Bogen DF lege man in dessen Mitte M die Tangente und bringe sie in D_0, F_0 zum Schnitt mit CD, CF. D_0F_0 stimmt mit der Seite D_1F_1 des Kegelstumpfes überein. Offenbar sind Kegelstumf und Kegel durch die Länge von D_1F_1 und die Radien $\sin\delta'$, $\sin\delta''$ der Kreise D_1E_1, F_1G_1 eindeutig bestimmt.

Da die Parallelkreise δ', δ'' des Globus längentreu abgebildet werden, so sind nach (2) $m'.n = \sin\delta'$, $m' = \frac{\sin\delta'}{n}$ und $m'' = \frac{\sin\delta''}{n}$. Durch Einsetzen in (26) folgt:

$$\frac{\sin\delta'' - \sin\delta'}{n}(\sin\delta'' + \sin\delta') = 2(\cos\delta' - \cos\delta''),$$

$$n = \frac{\sin^2\delta'' - \sin^2\delta'}{2(\cos\delta' - \cos\delta'')}\,^{1)} = \frac{1 - \cos^2\delta'' - 1 + \cos^2\delta'}{2(\cos\delta' - \cos\delta'')} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\delta' - \cos^2\delta''}{\cos\delta' - \cos\delta''},$$

oder

$$n = \tfrac{1}{2}(\cos\delta' + \cos\delta''). \tag{28}$$

Durch Zuhilfenahme von Fig. 3 kann die Berechnung von n etwas vereinfacht werden. Es sind $D_1U_1 = \sin\delta'$, $F_1V_1 = \sin\delta''$; man nehme $D_1F_1 = m'' - m' = 2\sin\frac{\delta''-\delta'}{2} : \cos\frac{\delta''-\delta'}{2}$ nach (27). Es wird dann:

$$n = \sin\gamma = \frac{F_1H}{F_1D_1} = \frac{\sin\delta'' - \sin\delta'}{m'' - m'} = \cos\frac{\delta''+\delta'}{2}\cos\frac{\delta''-\delta'}{2} = \tfrac{1}{2}(\cos\delta' + \cos\delta'').$$

Nach (28) läßt sich der Kegel K in folgender Weise konstruieren (Fig. 10). Es seien U, V die Centra der längentreuen Parallelkreise DE, FG des Globus und W die Mitte zwischen U und V, so ist $CW = \frac{1}{2}(\cos\delta' + \cos\delta'') = n = \sin\gamma$. In W errichte man auf der Achse die Senkrechte, welche den Bogen EG in H schneidet. Aus $CW = \sin\gamma$ folgt, daß γ mit dem Winkel WHC übereinstimmt. Die Meridiantangente in H bildet mit der Achse bei S_1 den Winkel γ; der gesuchte Kegel ist dem Berührungskegel des Parallelkreises des Punktes H gleich. Diesen berührenden Kegel verschiebe man in der Richtung der Achse, bis sein Scheitel nach dem beliebigen Punkte S fällt und benutze ihn in dieser Lage zur Abbildung. Schneidet man seine in der Zeichnungsfläche liegenden (Umriß-)Erzeugenden mit den Parallelen durch D, E, F, G zur Achse in D_1, E_1, F_1, G_1, so sind endlich D_1E_1, F_1G_1 die Bilder der längentreu abzubildenden Parallelkreise. — Den Kegel kann man jederzeit als *Schnittkegel* so legen, daß er mit dem Globus den einen der längentreuen Parallelkreise DE, FG entsprechend gemein hat (Nr. 4, S. 174).

1) Dieser Wert für n ergibt sich aus (23), wenn dort $\delta = \delta''$ und $m(= m'') = \frac{\sin\delta''}{n}$ sich entsprechen sollen.

Um das *Halbmessergesetz* zu finden, führe man den beliebigen Parallelkreis IK vom Polabstande δ ein. Auf dem Kegel sei I_1K_1 mit den Seitenabschnitten $SI_1 = SK_1 = m$ sein Bild. Nun berechnet man die Zonen des Globus und des Kegels entweder von DE nach IK und von D_1E_1 nach I_1K_1 oder von FG nach IK und von F_1G_1 nach I_1K_1 und setzt sie einander gleich. Man findet in Übereinstimmung mit (23)

$$m = \frac{1}{n}\sqrt{2n(\cos\delta' - \cos\delta) + \sin^2\delta'} = \frac{1}{n}\sqrt{2n(\cos\delta'' - \cos\delta) + \sin^2\delta''},$$

oder auch durch Einsetzen des Wertes von n aus (28) den symmetrischen Ausdruck

$$(29)\qquad m = \frac{2\sqrt{1 + \cos\delta'\cos\delta'' - (\cos\delta' + \cos\delta'')\cos\delta}}{\cos\delta' + \cos\delta''}.$$

Die Bildradien der ausgezeichneten Parallelkreise, nämlich der Pole und des Äquators, sind in gewohnter Bezeichnung

$$m_p = \frac{4\sin\frac{\delta'}{2}\sin\frac{\delta''}{2}}{\cos\delta' + \cos\delta''},\quad m_a = \frac{2\sqrt{1 + \cos\delta'\cos\delta''}}{\cos\delta' + \cos\delta''},\quad m_q = \frac{4\cos\frac{\delta'}{2}\cos\frac{\delta''}{2}}{\cos\delta' + \cos\delta''}$$

mit $2m_a^2 = m_p^2 + m_q^2$; die Konstante (Nr. 13) ist $c = \dfrac{1 + \cos\delta'\cos\delta''}{\cos\delta' + \cos\delta''}$.

Läßt man bei vorstehender Projektion von Albers den einen längentreuen Parallel zum Pol P werden, während der andere unverändert bleiben soll, so entsteht als *Sonderfall* die in Nr. 14, 15 behandelte flächentreue Kegelprojektion von Lambert. Für $\delta'' = 0$ findet man in der Tat aus (28), (29)

$$n = \frac{1 + \cos\delta'}{2} = \cos^2\frac{\delta'}{2},\quad m = 2\frac{\sqrt{(1 + \cos\delta')(1 - \cos\delta)}}{1 + \cos\delta'} = 2\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta'}{2}},$$

wie in (24) und (25). — Solange δ'' einen endlichen Wert hat, wird die unendlich nahe Umgebung dieses Parallels auf den Kegel (und die Karte) in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. Wird dagegen $\delta'' = 0$, so kann das nach Nr. 9 nicht mehr stattfinden. Um nun von der Abbildung der Umgebung des Poles P auf die Umgebung des Kegelscheitels eine deutliche Vorstellung zu erhalten, beachte man, daß für $\delta'' = 0$ die Indicatrixhalbachsen allgemein die Werte haben $k = \dfrac{\cos\frac{\delta'}{2}}{\cos\frac{\delta}{2}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\cos\frac{\delta}{2}} = \dfrac{1}{h}$, für $\delta = 0$ somit $k = \sqrt{n}$, $h = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Die Basen der vom Pol ausgehenden unendlich kleinen Netzdreiecke werden im Verhältnis $1 : k = 1 : \sqrt{n}$ verkürzt, während die Schenkel im Verhältnis $1 : h = \sqrt{n} : 1$ vergrößert abgebildet werden, so daß also die Flächengleichheit bestehen bleibt.

Anderseits kann man derart spezialisieren, daß die beiden längentreuen Parallelkreise zusammenfallen. Man lasse dementsprechend $\delta'' = \delta' = \delta_0$ werden, so folgt aus (28) und (29)

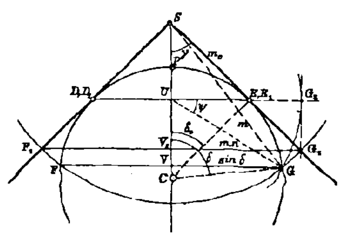
$$n = \cos \delta_0, \quad m = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta}}{\cos \delta_0},$$

es sind dies die Grundformeln für die in den folgenden Nummern zu behandelnde Projektion.

17. Der Globus werde nun flächentreu auf den *Berührungskegel* eines bestimmten Mittelparallels DE vom Polabstande δ_0 abgebildet, wobei dieser ausgezeichnete Parallel sich längentreu abbilden soll. Für jeden Punkt des Parallels δ_0 wird nach Nr. 13 $h = k = 1$, die unendlich nahe Umgebung des Parallels wird in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. Globus und Kegel haben den Flächenstreifen längs DE entsprechend gemein. Die beiden längentreuen Parallelkreise sind in DE vereinigt; bei der Abbildung des Globus auf den Kegel ist DE doppelt selbstentsprechend.

In Fig. 11 ist die Zeichnungsfläche ein ebener Schnitt des Globus und des Kegels durch die gemeinsame Achse SC. Der Winkel γ des Kegels ist gleich $90 - \delta_0$, also die Konstante $n = \sin \gamma = \cos \delta_0$. Der Bildradius des Berührungsparallels ist $SE = m_0 = \operatorname{tg} \delta_0$.

Fig. 11.



Das Bild des beliebigen Globusparallels FG vom Polabstand δ sei der Kegelparallel $F_1 G_1$ mit $SF_1 = SG_1 = m$. Es haben in diesem Fall die Zonen $DEFG$ und $D_1 E_1 F_1 G_1$ des Globus und des Kegels gleiche Oberfläche. Die Radien der beiden Basen des Kegelstumpfes sind $m \cdot n$ und $m_0 \cdot n$, die Seitenlänge ist $m - m_0$, somit die Oberfläche gleich $\pi(m \cdot n + m_0 \cdot n)(m - m_0)$; die Oberfläche der Kugelzone ist $2\pi(\cos \delta_0 - \cos \delta)$. Durch Gleichsetzen folgt

$$(m^2 - m_0^2) \cdot n = 2(\cos \delta_0 - \cos \delta),$$

wo $m_0 = \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\sin \delta_0}{n}$, also

$$m^2 = \frac{2(\cos \delta_0 - \cos \delta)}{n} + \frac{\sin^2 \delta_0}{n^2} = \frac{2n(\cos \delta_0 - \cos \delta) + \sin^2 \delta_0}{n^2},$$

wie in (23). Setzt man wieder $n = \cos\delta_0$, so ergibt sich folgende bequeme Schreibweise der fundamentalen Formeln

$$(30) \qquad m = \frac{\sqrt{1 + \cos^2\delta_0 - 2\cos\delta_0\cos\delta}}{\cos\delta_0}, \quad n = \cos\delta_0\,{}^{1)},$$

worauf am Schlusse voriger Nummer bereits hingewiesen wurde.

Für den FG oder δ entsprechenden Kegelparallel $F_1 G_1$ bestehen zwei einfache Konstruktionen:

a) Es seien U, V die Mittelpunkte von DE und FG. Verbindet man U mit G, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck UVG (Fig. 11)

$$UG^2 = UV^2 + VG^2 = (\cos\delta_0 - \cos\delta)^2 + \sin^2\delta = 1 + \cos^2\delta_0 - 2\cos\delta_0\cos\delta,$$

$$UG = \sqrt{1 + \cos^2\delta_0 - 2\cos\delta_0\cos\delta}.$$

Nach (30) ist $m\cos\delta_0 = m\sin\gamma = UG$, es ist also UG dem Radius $V_1 G_1$ des Kegelkreises $F_1 G_1$ gleich. Dreht man UG um U und um den Winkel ψ nach UG_2 (in UE) und zieht man durch den Endpunkt G_2 die Parallele zu der Achse, so wird SE von ihr in G_1 geschnitten. Damit ist der Bildkreis $F_1 G_1$ konstruiert.

b) Eine noch einfachere Übertragung der Parallelkreise auf den Kegel beruht darauf, daß $m = SG_1$ direkt mit SG übereinstimmt. Es ist nämlich, Fig. 11, $CS = \frac{1}{\cos\delta_0}$, $CV = \cos\delta$, also $VS = \frac{1}{\cos\delta_0} - \cos\delta = \frac{1 - \cos\delta_0\cos\delta}{\cos\delta_0}$. Ferner ist $VG = \sin\delta$, also

$$SG = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos\delta_0\cos\delta}{\cos\delta_0}\right)^2 + \sin^2\delta} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2\delta_0 - 2\cos\delta_0\cos\delta}}{\cos\delta_0} = m.$$

Um G_1 zu erhalten, hat man somit einfach um S mit dem Radius SG einen Bogen zu ziehen, er schneidet die Kegelseiten SD, SE in F_1 und G_1.[2]) — In Fig. 12 sind dementsprechend $SP = SP_1$ und

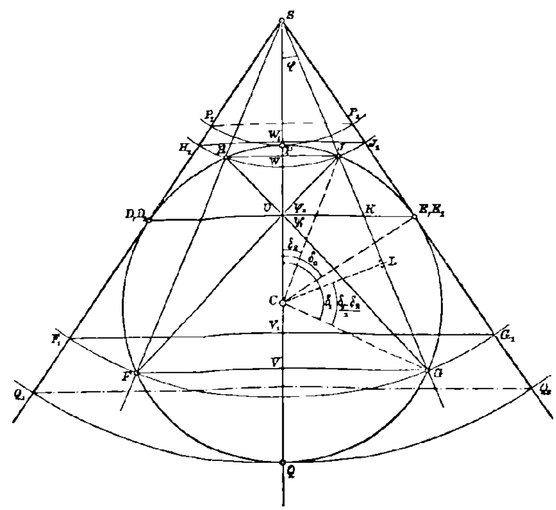
---

1) Dieser Ausdruck für m geht aus (23) hervor, wenn man dort δ' durch δ_0 ersetzt und $n = \cos\delta_0$ wählt.

2) Die Abbildung der Parallelkreise des Globus auf den Berührungskegel vollzieht sich somit durch eine *Schar konzentrischer Kugeln*, welche den Kegelscheitel S zum Zentrum haben. Diese Kugeln schneiden Globus und Kegel je in entsprechenden Kreisen. Da die Projektion *flächentreu* ist, besteht somit folgender Flächensatz: *Schneidet man einen geraden Kreiskegel, sowie beliebige Kugeln, welche diesen Kegel längs seiner Kreise berühren, mit einer weiteren Schar konzentrischer Kugeln, deren Zentrum der Kegelscheitel ist, so sind alle zwischen je zwei Kugeln der letzteren Schar liegenden Zonen des Kegels und der ersteren Kugeln einander gleich.* Dieser Satz, dessen direkter Beweis hier sehr nahe liegt, kann auf zwei Arten spezialisiert werden. Rückt der Kegelscheitel S unendlich fern, so verwandelt

$SQ = SQ_1$ die Radien m_p, m_q der Polbilder in der Karte. Die Kegelstumpfprojektion beansprucht für die Abbildung des ganzen Globus den Kegelstumpf $P_1 P_1 Q_1 Q_1$; seine Seitenlänge stimmt mit $PQ = 2$ überein.

Fig. 12.



18. Die *Parallelkreise* des Globus sind einander *paarweise zugeordnet* als solche, die auf demselben Kegel aus S, von der Achse SC liegen, Fig. 12. Der Winkel φ jedes solchen Kegels ist kleiner als γ. Es sind FG, HI von den Mittelpunkten V, W ein solches Paar zugeordneter Kreise. Wie gezeigt werden soll, sind sie stets *Linien gleicher Verzerrungen.*

Nach Nr. 3 ist für den Parallel FG und sein Bild $F_1 G_1$ auf dem Kegel die Indicatrixhalbachse in tangentialer Richtung $k = \frac{G_1 V_1}{GV}$, für den Bildparallel $H_1 I_1$ ebenso $k = \frac{I_1 W_1}{IW}$. Offenbar sind die gedachten Verbindungslinien GG_1, II_1 parallel, ferner sind $SG = SG_1$ und $SI = SI_1$, somit

$$G_1 V_1 : I_1 W_1 = G_1 S : I_1 S = GS : IS = GV : IW.$$

Somit ist $G_1 V_1 : I_1 W_1 = GV : IW$ oder $G_1 V_1 : GV = I_1 W_1 : IW$; es stimmen für die Bilder dieses Paares von Parallelkreisen die Halbachsen k der Indicatricen überein, ebenso infolge $h = \frac{1}{k}$ die Halbachsen

---

sich der Kegel in einen gemeinsamen Berührungs*cylinder* der ersteren Schar von Kugeln, die nun sämtlich mit dem Cylinder denselben Radius haben. Es entsteht der Satz von der Gleichheit der Oberfläche irgend einer Kugelzone und einer Zone des Berührungscylinders von gleicher Höhe (Anwendung in Nr. 22). — Läßt man anderseits den Kegel zu einer *Ebene* werden, so besteht die erstere Kugelschar aus den Kugeln, welche diese Ebene in einem ihrer Punkte S berühren, einschließlich dieser Ebene. Die Kugeln der zweiten Schar haben das gemeinsame Zentrum S. Der allgemeine Satz besteht auch jetzt noch: *Alle Zonen der ersteren Kugeln, die zwischen je zwei Kugeln der zweiten Schar liegen, sind flächengleich.* Vgl. hierzu Nr. 28.

h in radialer Richtung, und es sind die Bildkreise von FG, HI in der Tat Linien gleicher Verzerrungen der Karte.

In voriger Nummer ist nachgewiesen worden, daß $V_1 G_1 = UG$ (vgl. Fig. 11). Nun ist UG als Hypotenuse größer als die Kathete VG, also stets $V_1 G_1 > VG$. Jeder Parallelkreis des Globus wird vergrößert abgebildet. Daraus folgt, daß bei jedem Punkt der Karte die tangentiale Halbachse der Indicatrix die große Halbachse $(= a)$, die in radialer Richtung h dagegen die kleine ist $(= b)$. Für das Bild des Parallels FG ist $k\,(= a) = \frac{V_1 G_1}{VG} = \frac{UG}{VG} = \sec \psi_1$, wobei

$$\sphericalangle\, UGV = \sphericalangle\, GUE = \psi_1 .$$

Bezeichnet man den Polabstand von FG mit δ_1, so ist

$$UG = \sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_1}, \quad VG = \sin \delta_1,$$

also

$$k\,(= a) = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_1}}{\sin \delta_1} = \sec \psi_1; \quad h = \cos \psi_1 .$$

Hat der entsprechende Globusparallel HI (Fig. 12) den Polabstand δ_2, so ist für jeden seiner Bildpunkte

$$k = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_2}}{\sin \delta_2} = \sec \psi_2; \quad h = \cos \psi_2,$$

wobei $\sphericalangle\, EUI = \psi_2$.

In Fig. 12 ist dem Kreise über dem Durchmesser PQ das zu diesem Durchmesser symmetrische Viereck $FGHI$ eingeschrieben. Der Schnittpunkt der Gegenseiten FH, GI ist S, die erste Nebenecke des Vierecks. Die andern beiden Nebenecken liegen auf der Polaren DE von S in Bezug auf den Kreis und zwar die eine unendlich fern. Durch die letzte Nebenecke gehen jene Polare DE, ferner die Polare SC der unendlich fernen Nebenecke, sowie endlich die übrigen Gegenseiten FI und GH des Vierecks. Diese dritte Nebenecke ist als Schnitt von DE und SC nichts anderes als der Punkt U.

Man schließt daraus, daß die Verlängerungen von UI, UG durch F und H gehen (und daß U der Scheitel des zweiten Kegels ist, den man durch die Parallelkreise FG, HI legen kann). Auch folgt, daß die Strahlen UG, UI zu den rechtwinkligen Linien US, UE harmonisch liegen, zu ihnen also gleich geneigt sind, und daß $\psi_1 = \psi_2$. (Auch sind ψ_1 bei G und ψ_2 bei I einander gleich als Peripheriewinkel über demselben Bogen FH.) — Nach einem planimetrischen Satz ist ferner $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}$. Für die Indicatrixhalbachsen der Bilder des Paares FG, HI von Parallelkreisen hat man nun auch den Ausdruck

$$k = a = \sec \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}, \quad h = b = \cos \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}.$$

Fällt man aus C die Senkrechte CL auf SIG, so ist $\sphericalangle SCL = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$. Es folgt daraus, daß $\sphericalangle CSL = \varphi = 90 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$.

Um noch die Beziehung zwischen δ_0 und den zugeordneten Werten δ_1, δ_2 herzuleiten, beachte man, daß $SG \cdot SJ = SE^2$. Es ist $SG = \frac{VG}{\sin \varphi} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \varphi}$, $SI = \frac{WI}{\sin \varphi} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \varphi}$, $SE = \operatorname{tg} \delta_0$. Endlich ist $\sin \varphi = \cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$, und es folgt aus alledem $\frac{\sin \delta_1 \sin \delta_2}{\cos^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}} = \operatorname{tg}^2 \delta_0$, also

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\sqrt{\sin \delta_1 \sin \delta_2}}{\cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}. \tag{31}$$

Der Vollständigkeit wegen soll noch der δ_1 entsprechende Wert δ_2 aus δ_1 und δ_0 berechnet werden. Um dies zu erreichen, setzt man die auf S. 194 angegebenen Ausdrücke für k, für die Parallelkreise δ_1 und δ_2, einander gleich:

$$\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_1}}{\sin \delta_1} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \delta_0 - 2 \cos \delta_0 \cos \delta_2}}{\sin \delta_2}.$$

Indem man quadriert, überall die Cosinus einführt und die Nenner entfernt, kann man mit $\cos \delta_1 - \cos \delta_2$ dividieren, entsprechend der speziellen Lösung $\delta_1 = \delta_2$ $(= \delta_0)$. Es verbleibt eine in $\cos \delta_2$ lineare Gleichung, und diese liefert

$$\cos \delta_2 = \frac{(1 + \cos^2 \delta_0) \cos \delta_1 - 2 \cos \delta_0}{2 \cos \delta_0 \cos \delta_1 - (1 + \cos^2 \delta_0)}. \tag{32}$$

II.

Cylinderprojektionen.

19. Bei den *wahren Cylinderprojektionen* werden (in normaler Lage) die *Meridiane* des Globus abgebildet als die Erzeugenden (Seiten) eines *Kreiscylinders* und zwar derart, daß der Winkel irgend zweier Meridiane mit dem Winkel der Ebenen übereinstimmt, die man durch die Cylinderachse und die entsprechenden Erzeugenden legen kann. Die *Parallelkreise* dagegen bilden sich ab als die Kreise des Cylinders. In Fig. 13 sind Globus und Cylinder mit ihren Achsen zusammengelegt und auf die durch die Achse PQ gelegte Zeichnungsfläche orthogonal projiziert. Dem Äquator AB läßt man stets den in seiner eigenen Ebene liegenden Kreis A_1B_1 des Cylinders entsprechen, was ohne Einfluß auf die Gestalt des Bildes ist. Im übrigen sind D_1E_1, $H_1I_1, \ldots$ die Bilder der Parallelkreise DE, $HI, \ldots$ und die Cylindererzeugenden A_1H_1, $K_1L_1, \ldots, B_1I_1$ die Bilder der Meridiane QAH, $QKL, \ldots, QBI$; der erstgenannte sei der *Nullmeridian.* (Die Meridiane werden nun durch das Ebenenbüschel von der Achse PQ auf den Cylinder projiziert.)

Fig. 13.

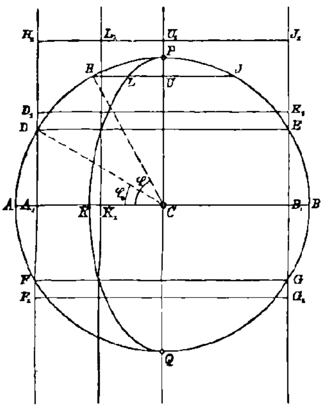
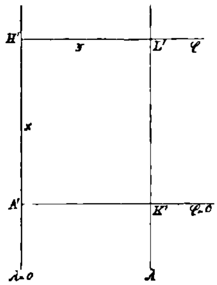


Fig. 14.



Durch Abwickelung des Cylinders in die Zeichnungsfläche entsteht die *Karte,* Fig. 14, welche im allgemeinen als Bild des gesamten Globus die Gestalt eines *Rechteckes* haben wird.[1]) Die Meridiane von den Längen $\lambda = 0,\ \lambda,\ \ldots$ und die Parallelkreise von den Breiten $\varphi = 0,\ \varphi,\ \ldots$ der Karte bilden zwei Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Geraden. Alle Parallelkreise der Karte haben dieselbe Länge.

Es folgt namentlich, daß die *Hauptrichtungen* des Globus und der Karte mit den Parallelkreisen und Meridianen übereinstimmen. Wir bezeichnen für den beliebigen Punkt L' der Karte die *Indicatrixhalbachse* in der Richtung $K'L'$ des Meridians mit h, die darauf senkrechte von der Richtung $H'L'$ des Parallels mit k.

Bei dieser Abbildung des Globus mit Hilfe eines Cylinders sind zwei Dinge *willkürlich,* zunächst das Verhältnis des Cylinderradius zum Radius des Globus. Dieses Verhältnis soll *die Konstante* der Cylinderprojektion heißen und mit ν bezeichnet werden. Nimmt man auch hier, wie bei den Kegelprojektionen, den Radius des Globus als Längeneinheit, *so stimmt die Konstante mit dem Radius des Cylinders direkt überein.* Aus Zweckmäßigkeitsgründen wird man Projektionen, bei welchen der Radius des Cylinders größer ist als derjenige des Globus, ausschließen, sich also auf die Fälle mit $\nu \overline{\gtrless} 1$ beschränken. — Für

1) Das Bild auf dem Cylinder und die Karte sind gegenseitig längen-, flächen- und winkeltreu oder also überall in den kleinsten Teilen kongruent.

$\nu = 1$ geschieht die Abbildung auf den *Berührungscylinder* des Äquators, unter den Parallelkreisen wird nur der Äquator längentreu und sich selbst entsprechend abgebildet. — Ist dagegen $0 < \nu < 1$ so hat man es, wenn man die Achsen beider Flächen zusammenlegt, mit der Abbildung des Globus auf einen *Schnittcylinder* zu tun. Der Cylinder schneidet den Globus in zwei zum Äquator symmetrischen Parallelkreisen, welche jedoch im allgemeinen sich nicht selbst entsprechen, dagegen *längentreu* abgebildet werden. Sie können durch bloße Verschiebung des Cylinders längs der Achse einzeln mit ihren Bildern zur Deckung gebracht, also selbstentsprechend gemacht werden. Ihre Breiten sind durch die Gleichung bestimmt

$$\cos\varphi = \nu. \tag{33}$$

Willkürlich ist ferner das Gesetz des Entsprechens der Parallelkreise und ihrer Bildkreise auf dem Cylinder. Die Lage eines Parallels drückt man aus durch Angabe seiner geog. Breite φ, die des Bildkreises des Cylinders (oder der Karte) durch den Abstand $A_1H_1 = A'H' = x$ (Fig. 13, 14) vom Bilde des Äquators. Die eindeutige Beziehung zwischen φ und x wird ausgedrückt durch eine Gleichung

$$x = F(\varphi), \tag{34}$$

das *Breitengesetz*. Einer bereits getroffenen Festsetzung zufolge wird $F(o) = 0$ sein.

In Figur 14 hat der beliebige Punkt L' der Karte die rechtwinkligen Koordinaten $x = A'H'$, $y = A'K' = H'L'$. Die Koordinatenachsen sind das Bild des Anfangsmeridians $\lambda = 0$ und des Äquators $\varphi = 0$. — Die Ordinate hängt nur von der Länge λ des Originalpunktes L ab, sie ist gleich dem Bogen A_1K_1 auf dem Cylinder; der Radius des Bogens ist ν, der Zentriwinkel λ. Somit ist

$$y = \nu \cdot \operatorname{arc}\lambda. \tag{35}$$

In Übereinstimmung mit den konischen Projektionen ist allgemein die Indicatrixhalbachse k das Verhältnis des Bildradius H_1U_1 zum Originalradius HU für einen beliebigen Parallel, somit gleich $\frac{\nu}{\cos\varphi}$, und für h ergibt sich der (5) analoge Ausdruck $\frac{dx}{d\varphi}$,

$$h = \frac{dx}{d\varphi}, \quad k = \frac{\nu}{\cos\varphi}, \tag{36}$$

bei den wahren (normalen) Cylinderprojektionen sind die Verzerrungen nur von der Breite φ, nicht aber von der Länge λ abhängig.

A. Mittelabstandstreue Projektionen.

20. Die Meridiane werden längentreu abgebildet. Es ist somit im ganzen Gebiete der Karte $h = 1$, also $dx = d\varphi$, $x = \operatorname{arc}\varphi + c$. Indem man dem Parallel $\varphi = 0$ die Bildlinie $x = 0$ zuordnet, hat man derart verfügt, daß $c = 0$ wird. Somit ist hier allgemein

$$(37) \qquad x = \operatorname{arc}\varphi, \quad y = \nu \cdot \operatorname{arc}\lambda; \quad h = 1, \quad k = \frac{\nu}{\cos\varphi}$$

das Gesetz der Abbildung.

Das Globusbild wird hier allgemein als die *rechteckige Plattkarte* bezeichnet. Es bilden sich nämlich alle Gradnetzvierecke des Globus als gleiche *Rechtecke* ab von der Breite $\nu \cdot \operatorname{arc} 1^0$ (od. $\nu \cdot \operatorname{arc} 5^0$, etc.) und der Höhe $\operatorname{arc} 1^0$ (od. $\operatorname{arc} 5^0$, etc.) — Für $\nu = 1$ geht das Verhältnis $\nu : 1$ der Breite zur Höhe in 1 über, die Netzvierecke der Karte sind alsdann *Quadrate*, weshalb man in diesem Falle das Bild die *quadratische Plattkarte* nennt.

Alle vollständigen Plattkarten desselben Globus vom Radius 1 haben dieselbe Höhe π, die Breite schwankt zwischen 0 und 2π.[1])

B. Winkeltreue Projektionen.

21. Setzt man die in (36) für h und k erhaltenen Werte einander gleich, so folgt analog Nr. 9,

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\nu}{\cos\varphi}, \quad dx = \nu \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

und hieraus $x = \nu \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \nu \cdot \log\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$. An Stelle des in dieser Formel enthaltenen natürlichen Logarithmus (log) wird man zweckmäßigerweise den briggischen (lg) einführen. Das Gesetz dieser *Merkatorprojektion* lautet dann allgemein

$$(38) \quad x = \nu \cdot 2{,}302585 \lg\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right), \; y = \nu \cdot \operatorname{arc}\lambda; \; h = k = \frac{\nu}{\cos\varphi}.$$

Für $\varphi = \pm 90^0$ wird x unendlich groß, woraus folgt, daß das Bild des Globus die gesamte Oberfläche des Cylinders einnimmt.

1) Die Bilder der Meridiane und Parallelkreise werden aus allen Cylindern durch ein Ebenenbüschel von der Achse PQ und durch eine Schar von Ebenen, die der Äquatorebene parallel sind, herausgeschnitten. Die Abwickelungen der Zylinder, d. i. die Karten, sind *orthogonal-affin*, weil entsprechende Punkte gleiche Abscissen x und proportionale Ordinaten y haben.

Die Formeln (38) zeigen, daß x und y (sowie h und k) ν direkt proportional sind. Daraus folgt, daß alle diese (normalen) winkeltreuen Cylinderprojektionen einander *ähnlich* sind.[1]) Eine Änderung der Konstanten ν bedeutet also lediglich eine gleiche Änderung des Kartenmaßstabes. Die Projektion auf einen anderen als den Berührungscylinder des Äquators bietet keinerlei Vorteil; man wird sich auf den einzigen Fall $\nu = 1$ beschränken.

C. Flächentreue Projektionen.

22. Setzt man in (36) $S = hk = 1$ so folgt $\frac{\nu\, dx}{\cos\varphi\, d\varphi} = 1$,

$$\nu \cdot x = \int_0^\varphi \cos\varphi\, d\varphi, \quad x = \frac{\sin\varphi}{\nu}.$$

Die allgemeinen Formeln für alle flächentreuen Cylinderprojektionen sind demnach

$$x = \frac{\sin\varphi}{\nu},\ y = \nu \cdot \operatorname{arc}\lambda;\ k = \frac{\nu}{\cos\varphi} = \frac{1}{h}. \tag{39}$$

Bei der Lambertschen Projektion geschieht die Abbildung des Globus auf den *Berührungscylinder* (des Äquators), es ist in (39) $\nu = 1$ zu setzen. Damit wird namentlich $x = \sin\varphi$, die Übertragung der Parallelkreise auf jenen Cylinder ist besonders einfach, es liegen die entsprechenden Parallelkreise des Globus und des Cylinders je in derselben Ebene. (Diese Abbildung geht aus der in Nr. 17 behandelten hervor, wenn man dort den Berührungsparallel in den Äquator rückt, wobei sich der Scheitel S unendlich weit entfernt.) — Die Abbildung des ganzen Globus erfordert ein Rechteck von der Breite 2π und der Höhe 2.

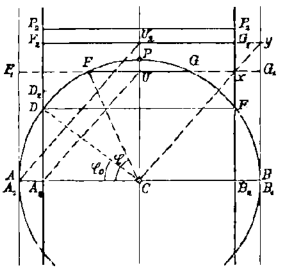
Für die flächentreue Abbildung auf den *Schnittcylinder*, mit zwei längentreuen Parallelkreisen, bestehen die allgemeinen Formeln (39). In denselben sind y und ν direkt, x und ν umgekehrt proportional. Der Vergleich aller flächentreuen Cylinderprojektionen desselben Globus zeigt also, daß, wenn der Cylinder an Umfang abnimmt, die entsprechenden Höhen im reziproken Verhältnis zunehmen müssen, und umgekehrt. — Die in der allgemeinen Projektionsart entworfene Planisphäre ist durch ein Rechteck von der Breite $\nu \cdot 2\pi$ und der Höhe $\frac{2}{\nu}$ begrenzt.

Figur 15 erläutert die Abbildung der Parallelkreise auf den Berührungscylinder über dem Äquator AB und auf den Schnittcylinder

1) Diese normalen Projektionen des Globus auf alle Cylinder sind *perspektivähnlich* mit dem Globusmittelpunkt C als Zentrum.

durch die Parallelkreise von den Breiten $\pm\varphi_0$, von denen der eine DE angegeben ist. Die Äquatorbilder sind bezüglich $A_1B_1 = AB$ und A_2B_2. Der beliebige Parallel FG von der Breite φ hat auf dem Berührungscylinder das Bild F_1G_1 vom Zentrum U mit $CU = A_1F_1 = x_1 = \sin\varphi$. Das Bild desselben Parallels FG auf dem Schnittcylinder sei F_2G_2 vom Zentrum U_2. Dann ist $x = CU_2 = A_2F_2 = \frac{\sin\varphi}{v} = \frac{x_1}{v}$. Es besteht die Proportion $x : 1 = x_1 : v$, d. h. $CU_2 : CA = CU : CA_2$. Daraus folgt, daß, um U_2 zu erhalten, man AU_2 parallel zu A_2U zu ziehen hat.

Fig. 15.

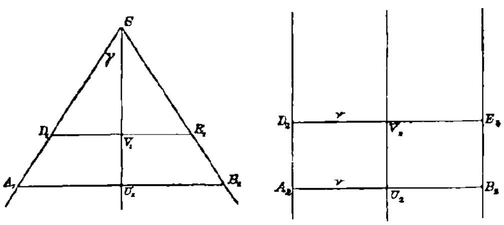


Auf dem Berührungscylinder bildet sich die Globuszone $ABFG$ ab als die Zone $A_1B_1F_1G_1$. Nun verwandle man das Rechteck $A_1B_1F_1G_1$ in das gleich große $A_2B_2F_2G_2$, indem man C mit X verbindet, B_1G_1 in Y schneidet F_2G_2 und durch Y zieht. Die Hilfslinie CX ist den oben gezogenen A_2U, AU_2 parallel. (In Fig. 15 sind auch der dem Punkte D entsprechende D_2 sowie das Polbild P_2P_2 eingetragen.)

D. Übergang von den konischen zu den cylindrischen Projektionen.

23. Soll der zu der Abbildung des Globus benützte Kegel S, γ in einen Cylinder übergehen, so muß sich der Scheitel S unendlich weit entfernen, während γ unendlich klein wird. Der Bildradius $m_a = SA_1$ (Fig. 16) des Äquators AB wird unendlich groß, aber das Produkt $m_a \cdot n = m_a \sin\gamma$ geht in einen bestimmten endlichen Wert v über, welcher mit dem Radius des Cylinders übereinstimmt; es ist

Fig. 16.



$$(40)\quad \begin{cases} \lim m_a = \infty, \\ \lim n = 0, \\ \lim (m_a \cdot n) = v. \end{cases}$$

Der Grenzwert von $k = \frac{m \cdot n}{\sin\delta}$ wird zu $\frac{v}{\sin\delta}$. Da man bei den Cylinderprojektionen die Lage des Originalparallels durch die Breite φ ausdrückt, ist $\sin\delta$ durch $\cos\varphi$ zu ersetzen. Damit wird $k = \frac{v}{\cos\varphi}$ wie in (36).

Weiter geht A_1D_1 (Fig. 16) über in $x = A_2D_2$. Es ist somit das Breitengesetz $x = F(\varphi)$ bei der Cylinderprojektion aus dem Halbmessergesetz $m = f(\delta)$ der entsprechenden konischen Projektion nach den Formeln herzuleiten:

$$x = \lim (m_a - m), \qquad \delta = 90 - \varphi. \tag{41}$$

Schließlich geht auch die Größe h der konischen Projektion direkt in $h = \frac{dx}{d\varphi}$ der cylindrischen über.

Es geht jede der drei Hauptarten der konischen Projektionen in die gleichartige cylindrische über, aus der winkeltreuen konischen entsteht die winkeltreue cylindrische u. s. f.

Beispiel. Für die *flächentreue* konische Projektion sind nach Nr. 13

$$m = \sqrt{\frac{2(c - \cos\delta)}{n}}, \qquad m_a = \sqrt{\frac{2c}{n}}, \qquad h = \frac{\sin\delta}{\sqrt{2n(c - \cos\delta)}}.$$

Aus $m_a = \sqrt{\frac{2c}{n}}$ folgt $m_a^2 \cdot n = 2c$, $m_a(m_a \cdot n) = 2c$ und $(m_a \cdot n)^2 = 2nc$. Es ergibt sich hieraus, daß die Konstante c unendlich groß wird und daß $2nc$ in v^2 übergeht.

Um zunächst den Grenzwert von $(m_a - m)$ zu finden, schreibt man

$$m_a - m = \frac{\sqrt{2c} - \sqrt{2(c - \cos\delta)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2nc} - \sqrt{2nc - 2n\cos\delta}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{m_a^2 n^2} - \sqrt{m_a^2 n^2 - 2n\cos\delta}}{n},$$

also

$$\lim (m_a - m) = \lim \left(\frac{v - \sqrt{v^2 - 2n\cos\delta}}{n}\right)_{n=0} = \left(-\frac{-2\cos\delta}{2\sqrt{v^2 - 2n\cos\delta}}\right)_{n=0},$$

daher

$$x = \frac{\cos\delta}{v} = \frac{\sin\varphi}{v}.$$

Ferner wird

$$h = \lim \left(\frac{\sin\delta}{\sqrt{2nc - 2n\cos\delta}}\right)_{n=0} = \lim \left(\frac{\sin\delta}{\sqrt{v^2 - 2n\cos\delta}}\right)_{n=0} = \frac{\sin\delta}{v} = \frac{\cos\varphi}{v},$$

in Übereinstimmung mit (39).

III.

Azimutale Projektionen.

24. Um diese Projektionen als Sonderfälle der konischen zu erhalten, lasse man in Nr. 1 mit Fig. 1, 2 den Winkel γ des Kegels RST zu 90^0, also $n = \sin\gamma$ zu 1 werden. Es geht damit der Kegel $\boldsymbol{K}$ über in die *Projektionsebene* $\boldsymbol{P}$. Diese Ebene der Karte steht (für die normale Lage) auf der Achse PC des Globus senkrecht, im übrigen ist ihre Lage eine beliebige. Ihr Schnittpunkt mit der Achse ist der *Kartenmittelpunkt*, welcher in der Folge mit M (anstatt mit S) bezeichnet werden soll.

Da die Konstante n der konischen Projektion zu 1 geworden ist, bilden sich die *Meridiane* des Globus ab als das Strahlenbüschel der Ebene $\boldsymbol{P}$ vom Scheitel M, welches mit dem Büschel der entsprechenden Meridiantangenten am Pol P oder Q kongruent und parallel ist. Die Winkel der Meridiane erscheinen in der Karte unverändert; jede Halbebene durch die Achse MPQ schneidet den Globus und die Ebene der Karte in einem Meridian und seinem Bilde.

Die Bilder der *Parallelkreise* sind konzentrische Vollkreise vom gemeinsamen Zentrum M. Der Radius m des Bildkreises ist je eine bestimmte Funktion des Polabstandes δ des Originals, und es lauten analog Nr. 1—3 die wichtigsten allgemeinen Formeln

(42) $$m = f(\delta), \quad h = \frac{dm}{d\delta}, \quad k = \frac{m}{\sin\delta}.$$

Es mag an dieser Stelle noch die allgemeine Bemerkung Platz finden, daß bei keiner der drei Hauptprojektionsarten (mittelabstandstreu etc.) zwei verschiedene eigentliche Parallelkreise längentreu abgebildet werden können, wie es bei den konischen und cylindrischen Projektionen der Fall ist.

A. Mittelabstandstreue Projektionen.

25. Es sollen sämtliche Meridianbogen in der Karte längentreu wiedergegeben werden, somit ist bei jedem Punkt der Karte $k = 1$, $dm = d\delta$, daher

(43) $$m = \operatorname{arc}\delta + c.$$

Soll m' der Bildradius eines bestimmten Parallels δ' sein, so ist $m' = \operatorname{arc}\delta' + c$, womit über den Parameter c verfügt ist. Es ergibt sich für diesen Fall das Halbmessergesetz

(44) $$m = m' + \operatorname{arc}(\delta - \delta').$$

Für $\delta = 0^0$, 180^0 folgt aus diesen Formeln

$$m_p = c = m' - \operatorname{arc}\delta', \quad m_q = c + \pi \quad (m_q - m_p = \pi).$$

Es sind dreierlei Abarten dieser Projektion zu unterscheiden:

a) Für $0 < c < \infty$, d. i. $m' > \operatorname{arc}\delta'$ sind m_p und m_q positiv, das Bild des Globus ist ein Kreisring. Diese Art dürfte zweckmäßigerweise als *Kreisringprojektion I. Art* bezeichnet werden.

b) Ist $c = 0$, $m' = \operatorname{arc}\delta'$, so werden $m_p = 0$, $m_q = \pi$. Das Bild des Poles P ist der Kartenmittelpunkt M, das Bild des gesamten Globus ein Kreis vom Radius π, die Projektion also eine *Kreisprojektion.*

c) Wenn $-\pi < c < 0$, ($m' < \operatorname{arc}\delta'$), so ist m_p negativ, m_q positiv. Der bestimmte Parallelkreis δ_0, mit $\operatorname{arc}\delta_0 = -c$, bildet sich ab als der Punkt M. Indem man von den Bildkreisen mit negativen Radien absieht, wird hierbei nur ein Teil des Globus abgebildet, nämlich die Kappe vom Gegenpol Q bis zu jenem ausgezeichneten Parallel δ_0. Das Bild dieser Kappe ist ein Vollkreis vom Radius $m_q (= c + \pi)$ und die Projektion eine *Kreisringprojektion II. Art.*

Der Fall $c < -\pi$, in welchem ausschließlich negative Bildradien vorkommen, stimmt im wesentlichen mit a) überein.

Ein *Parallelkreis* δ' bildet sich *längentreu* ab, wenn $m' = \sin\delta'$, also $\operatorname{arc}\delta' + c = \sin\delta'$. Nach Nr. 7 hat diese Gleichung für $c = 0$ die Doppelwurzel $\delta = 0$. Außerdem wird jede Kreisringprojektion II. Art einen längentreuen Parallelkreis aufweisen, dessen Umgebung in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet wird (was dieser Projektionsart praktischen Wert verleiht).

Sind δ', δ_0 die Polabstände des längentreuen und desjenigen Parallels, dessen Bild der Kartenmittelpunkt ist, so bestehen die Formeln

$$\operatorname{arc}\delta_0 = \operatorname{arc}\delta' - \sin\delta', \qquad m = \sin\delta' + \operatorname{arc}(\delta - \delta') = \operatorname{arc}(\delta - \delta_0),$$

nach der ersten läßt sich δ_0 aus δ' direkt berechnen.

B. Winkeltreue Projektionen.

26. Um den allgemeinen Ausdruck des Halbmessergesetzes zu finden, setze man $h = k$, $\frac{dm}{d\delta} = \frac{m}{\sin\delta}$; es folgt

$$m = c \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}; \quad \text{mit } h = k = \frac{c}{2\cos^2\frac{\delta}{2}} \left(= \frac{m}{\sin\delta}\right) \tag{45}$$

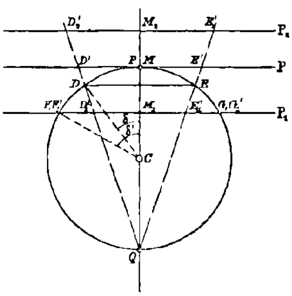
in Übereinstimmung mit (14) für $n = 1$.

Setzt man für δ der Reihe nach 0^0, 90^0, 180^0, so werden in gewohnter Bezeichnung $m_p = 0$, $m_a = c$, $m_q = \infty$. Der Kartenmittelpunkt ist das Polbild, $M = P'$; der Parameter c ist der Bildradius des Äquators und der Gegenpol Q bildet sich ab als Kreis von unendlich großem Radius. Das Bild des Globus erfüllt die gesamte Projektionsebene $\boldsymbol{P}$; die Projektion ist stets eine *Kreisprojektion.*

Der Ausdruck des Halbmessergesetzes zeigt, daß für verschiedene Werte des Parameters c *ähnliche* Bilder entstehen, wobei lediglich der Maßstab der Karte sich ändert.

Alle diese winkeltreuen Projektionen lassen sich in einfacher Weise geometrisch veranschaulichen. In Fig. 17 lege man die Projektionsebene $\boldsymbol{P}_1$ so daß $QM_1 = c$. Wird nun $\boldsymbol{P}_1$ von QD in D_1' geschnitten, so ist $M_1D_1' = QM_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = c \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, also $M_1D_1' = m$. Der Kreis in $\boldsymbol{P}_1$ vom Durchmesser $D_1'E_1'$ ist das Bild des Parallels DE vom Polabstand δ. *Das in der Ebene $\boldsymbol{P}_1$ entstehende Kartenbild ist die perspektive Projektion des Globus aus dem Zentrum Q auf die Projektionsebene $\boldsymbol{P}_1$.* Die Umgebung des Poles P wird im Verhältnis $2 : c\ (= QP : QM_1)$ ähnlich reduziert dargestellt; in der Tat wird für $\delta = 0$ in (45) $h = k = \frac{c}{2}$. Wählt man nun $c = 2$, so ist die Kartenebene die Tangentialebene $\boldsymbol{P}$ des Globus im Pole P, es wird alsdann die Umgebung dieses Poles kongruent abgebildet. Diese *gewöhnliche winkeltreue Projektion* wird man im allgemeinen den übrigen möglichen Fällen vorziehen.

Fig. 17.



Die Frage nach den *längentreuen Parallelkreisen* erledigt sich nun in einfacher Weise. Für $0 < c < 2$ liegt, Fig. 17, M_1 zwischen Q und P. Die Ebene $\boldsymbol{P}_1$ schneidet den Globus in einem bestimmten Parallel FG oder δ' mit $\cos\delta' = c - 1$ (da $QM_1 = c$, $QC = 1$) und es wird dieser Schnittkreis längentreu abgebildet, er deckt sich mit seinem Bilde. Für alle seine Punkte ist demnach $k = 1$, also auch $h = 1$; seine Umgebung wird in den kleinsten Teilen kongruent abgebildet. — Andere längentreue eigentliche Parallelkreise können nicht vorkommen.[1]) Eine derartige Projektion, welche die Umgebung eines bestimmten „Mittelparallels“ kongruent abbildet, ist für die Darstellung einer Zone (resp. eines Teiles einer solchen) von Bedeutung. Es ist in diesem Fall δ' als bekannt vorauszusetzen und da $m' = c \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta'}{2}$, $m' = \sin\delta'$, so ergibt sich für c der Wert $c = 2\cos^2\frac{\delta'}{2}$. Die Hauptformeln der Abbildung gehen über in

$$(46) \qquad m = 2\cos^2\frac{\delta'}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \quad h = k = \frac{\cos^2\frac{\delta'}{2}}{\cos^2\frac{\delta}{2}}.$$

1) Selbstverständlich ist der Pol P als längentreuer Parallel aufzufassen, da sein Bild wieder ein Punkt ist.

C. Flächentreue Projektionen.

27. Aus $S = h \cdot k = 1$, $\frac{dm}{d\delta} \cdot \frac{m}{\sin\delta} = 1$ folgt allgemein

$$m = \sqrt{2(c - \cos\delta)} \text{ mit } k = \frac{\sqrt{2(c - \cos\delta)}}{\sin\delta} = \frac{1}{h}. \tag{47}$$

Die Bildradien der Pole und des Äquators sind:

$$m_p = \sqrt{2(c-1)},\ m_a = \sqrt{2c},\ m_q = \sqrt{2(c+1)},$$

mit $2m_a^2 = m_p^2 + m_q^2$. Es bestehen drei Abarten dieser Projektion, nämlich

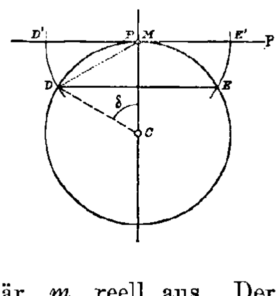
a) Für $c > +1$ sind m_p, m_q, m_a reell, die Kugel bildet sich ab als ein Kreisring; es handelt sich um eine *Kreisringprojektion 1. Art*, die praktisch bedeutungslos ist (s. S. 206).

b) Für $c = 1$ werden $m_p = 0$, $m_a = \sqrt{2}$, $m_q = 2$. Der Mittelpunkt der Karte ist das Polbild. Diese *Kreisprojektion* ist *die gewöhnliche flächentreue Azimutalprojektion*, als welche sie bisher bezeichnet wurde, mit

$$m = 2\sin\frac{\delta}{2},\quad h = \cos\frac{\delta}{2} = \frac{1}{k}.\text{[1]} \tag{48}$$

Für $\delta = 0$ wird $h = k = 1$, die Umgebung des Poles P wird kongruent abgebildet. Am zweckmäßigsten legt man die Projektionsebene $\boldsymbol{P}$ als Tangentialebene im Pol P, Fig. 18, es haben alsdann Globus und Karte die unendlich nahe Umgebung dieses Poles entsprechend gemein.

Fig. 18.



Aus $m = 2\sin\frac{\delta}{2}$ folgt die bekannte Eigenschaft, daß für den beliebigen Parallel DE oder δ der Bildradius MD' gleich ist der Sehne PD. Der Bildkreis $D'E'$ des Parallels DE wird aus der Kartenebene $\boldsymbol{P}$ durch eine Kugel herausgeschnitten, die durch den Parallel DE geht und den Pol P zum Zentrum hat; vgl. Nr. 28.

c) Ist $-1 < c < +1$, so fällt m_p imaginär, m_q reell aus. Der Parallel δ_0 mit $\cos\delta_0 = c$ ist ausgezeichnet. Sein Bildradius m_0 ist Null, somit ist für diesen Parallel $k = 0$, $h = \infty$. Für $\delta < \delta_0$ ist m imaginär, für $\delta > \delta_0$ dagegen reell. Bei dieser *Kreisringprojektion II. Art* wird die Kugelkappe abgebildet vom Gegenpol Q bis zu

1) Damit erweist sich diese Projektion als *Sonderfall* der flächentreuen Kegelprojektion von Lambert, vgl. Nr. 15, Gleichung (25), woselbst $\delta' = 0$ zu setzen ist, sowie der Projektion auf den *Berührungskegel*, Nr. 17, wobei in (30) $\delta_0 = 0$ wird.

diesem ausgezeichneten Parallel δ_0; es entsteht ein Randkreis der Karte vom Radius $\sqrt{2(c+1)}$.

Ist endlich $c < -1$, so entsteht überhaupt kein Bild mehr, indem alsdann alle Bildradien imaginär werden.

Die Bestimmung der *längentreuen Parallelkreise* lehrt, daß den Projektionen b) und c) praktische Bedeutung zukommt. Setzt man in (47) $m = \sin\delta$, so folgt nach leichter Umformung für die Polabstände δ der längentreuen abgebildeten Parallelkreise die Formel

$$\cos^2\delta - 2\cos\delta + (2c-1) = 0. \tag{49}$$

Die Auflösung ergibt $\cos\delta = 1 \pm \sqrt{2(1-c)}$. Offenbar sind beide Wurzeln $\cos\delta_1$, $\cos\delta_2$ komplex, sobald $c > +1$, *die Kreisringprojektion I. Art entbehrt der längentreuen Parallelkreise* und ist aus eben diesem Grunde praktisch bedeutungslos. — Die Gleichung besitzt für $c = +1$ die Doppelwurzel $\cos\delta = 1$; *bei der Kreisprojektion allen die beiden längentreuen Parallelkreise mit dem Pol P zusammen.* — Für $-1 < c < +1$, also $2 > 1 - c > 0$, sind die beiden Wurzeln $\cos\delta$ zwar reell, aber ihre Summe hat den Wert 2 ($\cos\delta_1 + \cos\delta_2 = 2$). Liegt die Wurzel $\cos\delta_1$ zwischen -1 und $+1$, so liegt die andere $\cos\delta_2$ zwischen $+1$ und $+3$, es ist der eine längentreue Parallel δ_1 reell, δ_2 dagegen imaginär. *Jede Kreisringprojektion II. Art bildet einen Parallel längentreu* (und dessen Umgebung in den kleinsten Teilen kongruent) *ab.*

Für $c = 1$ ist der längentreue Parallel, wie bereits bemerkt worden, der Pol P, für $c = \frac{1}{2}$ aber der Äquator.

Ist δ' für den längentreuen Parallel bekannt, so kann man das Halbmessergesetz in folgender Weise finden. Bezeichnet man den Bildradius des Parallels δ' erst mit m', so bestehen die Formeln

$$m = \sqrt{2(c - \cos\delta)}, \quad m' = \sqrt{2(c - \cos\delta')},$$

also $m = \sqrt{m'^2 + 2\cos\delta' - 2\cos\delta}$. Nun setze man noch $m' = \sin\delta'$, es folgt

$$m = \sqrt{\sin^2\delta' + 2\cos\delta' - 2\cos\delta}, \text{ mit } k = \frac{m}{\sin\delta} = \frac{1}{h}. \tag{50}$$

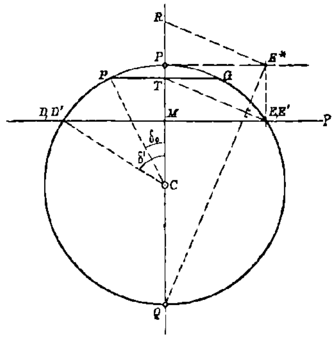
Für den weiteren ausgezeichneten Parallel δ_0 soll $m = 0$ werden. Nach voranstehender Formel ergibt sich:

$$\cos\delta_0 = \cos\delta' + \frac{\sin^2\delta'}{2}. \tag{51}$$

In Fig. 19 ist die Projektionsebene $\boldsymbol{P}$ als Schnittebene des Globus durch den längentreuen Parallel $DE(\delta')$ gelegt. Man ziehe PE^* gleich und parallel mit ME, verbinde E^* mit dem Gegenpol Q. Die

Senkrechte in E^* auf QE^* schneidet die Achse in R. Dann ist $ME = PE^* = \sin\delta'$, $PR = \frac{\sin^2\delta'}{2}$. Diese Länge ist zu $CM = \cos\delta'$ zu addieren. Zu diesem Zweck zieht man ET parallel zu E^*R, mit anderen Worten die Senkrechte aus E zu QE^*, so wird die Achse in T geschnitten. Es ist dann $CT = \cos\delta' + \frac{\sin^2\delta'}{2} = \cos\delta_0$; T ist der Mittelpunkt des gesuchten Parallels FG oder δ_0, der sich als Punkt M abbildet. Die vollständige Karte enthält das Bild der Kugelkappe von Q bis FG in Gestalt eines Kreises vom Zentrum M; die Kugelkappe PFG dagegen wird nicht abgebildet. — Die eben behandelte Konstruktion des Parallels δ_0 aus δ' ist nicht umkehrbar.

Fig. 19.



In etwas anderer Schreibweise lautet die Gleichung (51)

$$\cos^2\delta' - 2\cos\delta' + (2\cos\delta_0 - 1) = 0\,[1],$$

sie ist der Ausdruck dafür, daß die Kugelzone $DEFG$ zwischen δ' und δ_0 der Fläche des Kreises DE, vom Radius $\sin\delta'$ gleich ist. Nur die eine Wurzel dieser Gleichung, $\cos\delta' = 1 - 2\sin\frac{\delta_0}{2}$, liefert einen reellen Schnittkreis DE. Sein Mittelpunkt M hat vom Pol P die Entfernung $1 - MC = 1 - \cos\delta' = 2\sin\frac{\delta_0}{2} = PF$; in Figur 19 ist $PM = PF$. Der Kreis vom Zentrum P, durch F und G gehend, schneidet die Achse PQ in M (und die Kugel vom Zentrum P, durch den Parallel FG oder δ_0 gehend, schneidet die Achse in M, dem Zentrum des längentreuen Parallels DE oder δ'). Die Gleichheit von PF und PM läßt jeden der Kreise δ_0, δ' in einfachster Weise finden, wenn der andere gegeben ist.

Die zweite Wurzel unserer Gleichung $\cos\delta' = 1 + 2\sin\frac{\delta_0}{2}$, ergibt $1 - \cos\delta' = -2\sin\frac{\delta_0}{2}$; an Stelle des Punktes M tritt der zweite Schnittpunkt des Kreises FMG mit der Achse und an Stelle der Ebene $\boldsymbol{P}$ ihre symmetrische in Bezug auf den Pol P, welche den Globus in einem imaginären längentreuen Parallel schneidet. — In

---

1) Nach (47) wird $m = 0$ für $\cos\delta_0 = c$; die Konstante c ist der Cosinus des Polabstandes desjenigen Parallels, dessen Bild ein Punkt ist. Es stimmt somit obige Gleichung mit (49) überein.

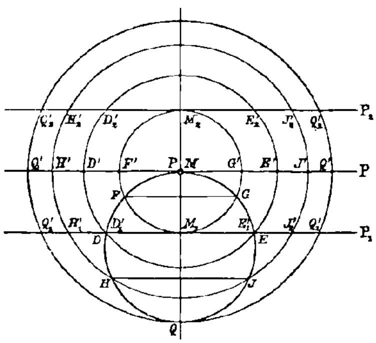
folgender Nummer wird gezeigt, daß die beiden in Bezug auf den Pol symmetrischen Bildebenen ($\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ in Fig. 20) *kongruente* Bilder des Globus enthalten.

Die Gleichung (50) ist der Ausdruck des Halbmessergesetzes, worin der Polabstand δ' des längentreuen Parallels vorkommt. Da nun für $\delta = \delta_0$ der Bildradius m zu Null wird, so steht zu erwarten, daß, wenn man in dem Ausdruck für m an Stelle von δ' den Winkel δ_0 eingeführt, das Halbmessergesetz eine besonders einfache Gestalt annehmen wird. Setzt man z. B. in (47) $c = \cos \delta_0$, so wird $m = \sqrt{2(\cos \delta_0 - \cos \delta)}$. Ersetzt man hierin noch δ durch $\delta_0 + \varepsilon$, so wird

$$(52) \qquad m = 2\sqrt{\sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(\delta_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)},\ \delta = \delta_0 + \varepsilon.$$

28. Bei der *Kreisringprojektion II. Art* besteht eine einfache geometrische Abbildung des Globus G auf die Kartenebene $\boldsymbol{P}$ mit Zuhilfenahme einer Schar konzentrischer Kugeln für die Parallelkreise (und eines Ebenenbüschels für die Meridiane). — Es mögen zunächst zwei einfache Flächensätze bei Kugeln vorangestellt werden.

Fig. 20.



Seien R_1, R_2 (dabei etwa $R_1 < R_2$) die Radien zweier konzentrischer Kugeln $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$. Eine Ebene im Abstande a vom gemeinsamen Zentrum P schneidet die Kugeln in zwei Kreisen von den Radien $r_1 = \sqrt{R_1^2 - a^2}$, $r_2 = \sqrt{R_2^2 - a^2}$. Der von den beiden Schnittkreisen eingeschlossene Kreisring hat den Flächeninhalt $\pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(R_2^2 - R_1^2)$, welcher, weil unabhängig von a, *konstant* ist. *Beliebige Ebenen schneiden zwei konzentrische Kugeln in Paaren von Kreisen, die je gleichgroße Kreisringe begrenzen.*

Für die Herleitung des zweiten Satzes setze man eine Kugel G voraus, darauf einen Pol P und zwei Parallelkreise AB, CD, von den Polabständen δ_1, δ_2 (z. B. $\delta_1 < \delta_2$). Nimmt man, was auf das Ergebnis ohne Einfluß ist, den Radius der Kugel G als Längeneinheit, so hat die Zone $ABCD$ die Oberfläche $2\pi(\cos \delta_1 - \cos \delta_2)$. Nun lege man zwei Kugeln $\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K}_2$ vom gemeinsamen Zentrum P, durch die beiden Parallelkreise AB und CD gehend. Ihre Radien sind $PA = R_1 = 2 \sin \frac{\delta_1}{2} = \sqrt{2(1 - \cos \delta_1)}$ und $PB = R_2 = \sqrt{2(1 - \cos \delta_2)}$. Eine beliebige Ebene schneidet die Kugeln $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ in zwei konzentrischen

Kreisen und es hat der von diesen letzteren eingeschlossene Kreisring den Inhalt $\pi (R_2^2 - R_1^2) = 2\pi (\cos \delta_1 - \cos \delta_2)$, welcher mit der Oberfläche der Zone $ABCD$ übereinstimmt: *Sind K_1, K_2 zwei konzentrische Kugeln und G eine beliebige, durch das Zentrum von K_1, K_2 gehende Kugel, so wird G von K_1, K_2 in zwei parallelen Kreisen AB, CD geschnitten. Stets ist die Oberfläche der Zone $ABCD$ der Kugel G gleich dem Kreisring, der durch irgend eine Ebene aus K_1, K_2 geschnitten wird.*

Um nun, gestützt auf diese Hilfssätze, den Globus G flächentreu auf eine Projektionsebene P_1 oder P_2 usw., welche in einem Punkte M_1 oder M_2 usw. auf der Achse PQ senkrecht steht, abzubilden, lege man einerseits durch die Achse PQ alle Ebenen, andererseits alle konzentrischen Kugeln K_1, K_2, ... vom Zentrum P durch die Parallelkreise von den Polabständen δ_1, δ_2, ... (Fig. 20). *Diese Ebenen und Kugeln schneiden jede solche Ebene P_i in den Bildern der sämtlichen Meridiane und Parallelkreise.*[1])

In jeder Ebene, deren Abstand vom Pol P des Globus kleiner ist als der Globusdurchmesser, entsteht hierdurch eine *azimutale flächentreue Projektion.* Diejenige der Kugeln K, welche die Projektionsebene P_1 (im Schnittpunkte M_1 mit der Achse) berührt, bildet einen Parallelkreis (δ_0) als Punkt ab. Die Bildebene kann auf beiden Seiten von P aus liegen. Schneidet sie G, so ist der Schnittkreis (δ') der längentreue Parallel, für welchen Original und Bild zusammenfallen. Zwei verschiedene Ebenen P_1, P_2, welche zum Pol P symmetrisch liegen, liefern *kongruente* Abbildungen, sie bilden namentlich denselben Parallel δ_0 als Punkt (M_1, M_2) und denselben (reellen) Parallel δ' längentreu ab. Alle solche Projektionen sind flächentreue *Kreisringprojektionen II. Art.* Indem man der Ebene P_1 allmählich alle möglichen Lagen zwischen den Tangentialebenen des Globus in den Polen P und Q zuweist, entstehen überhaupt *alle möglichen Projektionen der bezeichneten Art,* einschließlich der *Kreisprojektion,* bei welcher P die Tangentialebene des Globus im Pol P ist.

Die *Kreisringprojektionen I. Art,* die ja allerdings praktisch bedeutungslos sind, lassen sich anscheinend nicht als ebene Schnitte eines Ebenenbüschels und einer Schar konzentrischer Kugeln erzeugen. Da-

---

1) Der direkte Nachweis analog Nr. 17b geschieht durch Formel (50):

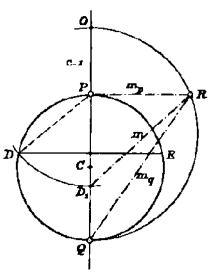
$$m = \sqrt{\sin^2 \delta' + 2 \cos \delta' - 2 \cos \delta} = \sqrt{1 - \cos^2 \delta' + 2 \cos \delta' - 2 \cos \delta}$$

$$= \sqrt{2 (1 - \cos \delta) - 1 + 2 \cos \delta' - \cos^2 \delta'} = \sqrt{\left(2 \sin \frac{\delta}{2}\right)^2 - (1 - \cos \delta')^2}.$$

gegen besteht für die Bildradien der Parallelkreise eine sehr einfache Konstruktion, welche an dieser Stelle noch mitgeteilt werden soll.

Für diese Projektionsart ist $m = \sqrt{2(c - \cos\delta)}$ das Halbmessergesetz, es ist indessen $c > 1$, die ausgezeichneten Parallelkreise δ_0 und δ' sind beide imaginär. Für $\delta = 0$ erhält man $m_p = \sqrt{2(c-1)}$, der Bildradius des Poles P ist reell, im Gegensatz zu den Kreisringprojektionen II. Art. Zwischen m, m_p und δ besteht die einfache Beziehung $m^2 - m_p^2 = 2(1 - \cos\delta) = 4\sin^2\frac{\delta}{2}$, $m^2 = m_p^2 + \left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)^2$.

Fig. 21.



Die geometrische Konstruktion von m_p und m ist in folgender Weise durchzuführen, Fig. 21. Auf der Globusachse PQ trage man vom Zentrum C aus in der Richtung CP die Länge $c = CO$ ab. Der so entstehende Punkt O liegt außerhalb des Kreises über dem Durchmesser PQ, und es ist $PO = c - 1$, $PQ = 2$. Somit ist m_p das geometrische Mittel aus PO und PQ. Man beschreibt über OQ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die in P auf der Achse errichtete Senkrechte in R schneide. Es ist dann $RP = m_p$. — Es sei nun DE der Parallel vom Polabstand δ; man drehe die Sehne PD um P in die Achse nach PD_1, so ist $PD = PD_1 = 2\sin\frac{\delta}{2}$, andererseits $RD_1 = \sqrt{m_p^2 + \left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} = m$, also jeweilen RD_1 der Bildradius des Parallels des Punktes D. Diese Bildradien ändern sich von $RP = m_p$ bis $RQ = m_q$.

Für $c = 1$ wird $RP = m_p = 0$, also stimmt m mit $PD_1 = PD \left(= 2\sin\frac{\delta}{2}\right)$ überein. Dieser Sonderfall liefert wiederum die bekannte Konstruktion der Bildradien bei der Kreisprojektion.

Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels.[1])

Von Anton Grünwald in Prag-Bubentsch.

(Mit 15 Figuren auf Tafel V u. VI.)

Im allgemeinsten Falle eines starren Körpers mit dem Freiheitsgrade 3 gibt es in jedem Augenblicke eine Kongruenz $K(G)$ von Achsen G solcher Schrauben L, längs welcher der Körper beweglich ist. Die Strahlen G von $K(G)$ erfüllen alle Regelscharen der einen Art — wir nennen sie etwa mit Waelsch der „linken" Art — eines jeden Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ des Systemes

$$(1)\quad F(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})x^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})y^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})z^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = 0$$

mit den Halbachsenquadraten:

$$(2)\quad \begin{aligned} a_{\mathrm{I}}^2 &= -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}), \quad a_{\mathrm{II}}^2 = -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}), \\ a_{\mathrm{III}}^2 &= -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}), \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} < \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} < \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ Konstante, xyz rechtwinkelige Punktkoordinaten bezüglich eines Koordinatensystems mit dem Hauptpunkte p als Anfang sind und der Parameter:

$$\mathfrak{p} = (2\pi)^{-1} \cdot \mathfrak{h},$$

das für alle Strahlen der linken Regelschar G jedes Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ konstante Verhältnis der Ganghöhe $\mathfrak{h}$ der mit den Bewegungsbedingungen des starren Körpers vereinbaren Schraubung L um die betreffende

---

1) Bezüglich der Schraubenlehre oder Theorie der linearen Komplexsysteme sind außer den Arbeiten Plückers und Kleins als hier benutzt zu erwähnen: R. Ball, A treatise on the theory of screws, Cambridge 1900; E. W. Hyde, The directional theory of screws, in den Annals of Mathematics vol. 4, pag. 137, Mass. U. S. A. 1888. Ferner in denselben Annalen: On a surface of the sixth order which is touched by the axes of all screws reciprocal to three given screws (II. ser., vol. 2, N. 4, Juli 1901), worin die Brennfläche der u. a. von Waelsch untersuchten Achsenkongruenz eines Schraubenbündels diskutiert wird. (Mit 3 Figuren.) H. Graßmann jun., Schraubenrechnung und Nullsystem, Halle 1899; N. Zantscheffsky, Teoria wintoff, Odessa 1889; E. Müller, Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre, Wiener Monatshefte II, 1901; K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen, Leipzig S. S. 1902; E. Waelsch, Über eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloide, Wiener Sitzungsberichte 95. Bd., S. 781. 1887; A. Demoulin, Application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites, Brüssel 1894; A. Grünwald, Sir Robert Balls lineare Schraubengebiete, in dieser Zeitschrift, 48. Bd., 1. Heft, 1902. — Gr.

Achse G zum Umfange 2π des Einheitskreises bedeutet.[1]) Zu jeder Ganghöhe $\mathfrak{h}$, mithin zu jedem Parameter (jeder „Steigung") $\mathfrak{p}$ gibt es eine Regelschar von Schraubenachsen G, welche zugleich mit ihrem Trägerhyperboloide $F(\mathfrak{p})$ reell ist, falls $\mathfrak{p}$ sich zwischen den Grenzen $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$, den beiden extremen Werten der drei Hauptparameter befindet. Das Bündel (Komplexnetz) R_{III} der mit den verschiedenen Parametern $\mathfrak{p}$ versehenen Schrauben L um alle Achsen G der Kongruenz $K(G)$ kennzeichnet vollständig alle möglichen starren Elementarbewegungen des Körpers.

Die Geraden Γ der anderen, der „rechten" Regelschar aller Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ erfüllen eine zugehörige „ergänzende" Kongruenz $K(\Gamma)$, welche im Gegensatz zur „linken" Kongruenz $K(G)$ eine „rechte" genannt werden kann und aus $K(G)$ durch Spiegelung an jeder der drei Hauptebenen hervorgeht. $K(\Gamma)$ ist erfüllt von den Achsen Γ jener Schraubungen (Dynamen) Λ, welche mit geeigneten Parametern belegt, den starren Körper nicht zu beeinflussen imstande sind, d. h.:

Auf jedem Strahle Γ der rechten Kongruenz, welcher als Erzeugende der anderen Art auf einem der Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ liegt, kann man eine beliebige Kraft λ annehmen; fügt man zu dieser ein Kräftepaar φ in Form eines Feldes in einer zu Γ senkrechten Ebene, dessen Moment (Inhalt des Feldes φ) $(-\mathfrak{p})$ mal so groß ist als die angenommene Kraft λ, so ist jede derart in kanonischer Form als Kräftesumme $\Lambda = \lambda + \varphi$ dargestellte Schraube (Dyname) bezüglich des starren Körpers unwirksam. Alle solche Schrauben Λ erfüllen das zu obigem Bündel R_{III} reziproke Schraubenbündel P_{III}; den Λ des P_{III} sind die Widerstandskräfte jenes Systems entnommen, welches die Bewegung des starren Körpers beschränkt. Die Rolle von $K(G)$ und $K(\Gamma)$ ist rein geometrisch genommen ebenso wie jene der Bündel R_{III} und P_{III} (der einander „ergänzenden" Komplexnetze) vollkommen vertauschbar.

Die durch obige Gleichung analytisch gekennzeichneten Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ können wegen der entwickelten mechanischen bezw. schraubentheoretischen Beziehung als zum gleichen Bündel von Schrauben gehörig oder „gleichbündig" bezeichnet werden. Zu den gleichbündigen Hyperboloiden gehört das reelle Ebenenpaar $F(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})$ (die analogen $F(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})$ und $F(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ sind imaginär) bestehend aus den beiden durch die y-Achse gelegten Ebenen μ, ν:

$$(3) \qquad (\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})\,x^2 - (\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})\,z^2 = 0,$$

---

1) Vgl. z. B. S. 97 usw. der letzterwähnten Abhandlung Gr. im 48. Bd. dieser Zeitschrift.

welche mit der xy-Ebene einen Winkel ω einschließen, dessen Tangente $\tau = \operatorname{tg}\omega$ sich durch $\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{II} = d_1$ und $\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I = d_3$ als:

$$(4) \qquad \tau = \operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}{\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{II}}} = \pm\sqrt{\frac{d_3}{d_1}}$$

ausdrückt.

Die für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II}$ aus der Gleichung (2) $a_{II}^2 = -(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)$ sich ergebenden Werte von

$$(5) \qquad [a_{II}]_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_I} = e_{II} = e = \sqrt{-(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)} = \sqrt{d_3 d_1}$$

gehören als Ordinaten zu den auf der y-Achse gelegenen reellen Trägerpunkten M und N jener reellen Büschelpaare, zu denen die Regelscharen von $F(\mathfrak{p}_{II})$ ausarten; zur Kongruenz $\frac{K(G)}{K(\Gamma)}$ gehört hierbei das reelle Büschel mit dem Zentrum M und der Ebene $\frac{\mu}{\nu}$ nebst dem Büschel vom Zentrum N in der Ebene $\frac{\nu}{\mu}$.

Diese Paare von „Basisbüscheln" der beiden einander ergänzenden Kongruenzen haben vertauschte Ebenen oder Zentra.

Rein geometrisch sind die gleichbündigen Hyperboloide zu einem beliebigen vorgegebenen dadurch vollkommen bestimmt, daß sie gemeinsam haben:

1. Die zwei Paare unendlich ferner Kreispunkte der Ebene μ, ν.
2. Die zwei Paare reeller Fokalachsen, welche zu den gemeinsamen *cyklischen Ebenen senkrecht* stehen.

Diese Fokalachsen gehen durch die Zentra M und N der Basisbüschel und haben demnach die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &y^2 = e^2 = -(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I) \\ &(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{II})x^2 - (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)z^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$ [1])

Eine und dieselbe Achsenkongruenz, ein und dasselbe System gleichbündiger Hyperboloide als Trägerflächen der zu gleichen Parametern gehörigen Achsen kommt nicht bloß einem Schraubenbündel zu, sondern allen jenen linear bleibenden Bündeln, welche aus einem von ihnen durch Vergrößerung oder Verkleinerung aller Parameter um konstante Stücke hervorgehen.[2]) Geometrisch sind also für die Achsenkongruenz und die gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$, sowie für deren Einhüllende, die Hydesche Brenn- oder Grenzfläche der einander er-

1) Vgl. Gr. S. 100 und die dort anschließende Konstruktion der gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$.

2) Vgl. z. B. ebenda S. 63.

gänzenden Kongruenzen $K(G)$ und $K(\Gamma)$ nur die Parameterdifferenzen wesentlich. Ist ein Hyperboloid $F(\mathfrak{p})$ beliebig gegeben und ihm irgend ein Parameter $\mathfrak{p}$ als zur linken Schar G gehörig zugewiesen worden, so bestimme man die Differenzen zwischen $\mathfrak{p}$ und den auf die Hyperboloidachsen entfallenden Hauptparametern gemäß den Gleichungen[1])

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \dfrac{a_{\mathrm{II}}a_{\mathrm{III}}\sqrt{-1}}{a_{\mathrm{I}}} \\ \mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = \dfrac{a_{\mathrm{III}}a_{\mathrm{I}}\sqrt{-1}}{a_{\mathrm{II}}} \\ \mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} = \dfrac{a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}}\sqrt{-1}}{a_{\mathrm{III}}} \end{cases}$$

durch die Halbachsen a_{I}, a_{II}, a_{III} des Hyperboloides, für welche entweder $a_{\mathrm{II}}^2 > a_{\mathrm{I}}^2 > 0 > a_{\mathrm{III}}^2$ oder $a_{\mathrm{II}}^2 > a_{\mathrm{III}}^2 > 0 > a_{\mathrm{I}}^2$ gilt.

Wesentlich sind die Differenzen der Hauptparameter:

$$(7)\qquad \begin{cases} d_1 = \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = \dfrac{a_{\mathrm{I}}\sqrt{-1}}{a_{\mathrm{II}}a_{\mathrm{III}}}\,(a_{\mathrm{II}}^2 - a_{\mathrm{III}}^2) & > 0 \\ d_2 = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} = \dfrac{a_{\mathrm{II}}\sqrt{-1}}{a_{\mathrm{III}}a_{\mathrm{I}}}\,(a_{\mathrm{III}}^2 - a_{\mathrm{I}}^2) & < 0 \\ d_3 = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \dfrac{a_{\mathrm{III}}\sqrt{-1}}{a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}}}\,(a_{\mathrm{I}}^2 - a_{\mathrm{II}}^2) & > 0, \end{cases}$$

welche mit Rücksicht auf die Beziehung:

$$(8)\qquad d_1 + d_2 + d_3 = 0$$

die zwei wesentlichen Konstanten des Systems gleichbündiger Hyperboloide, wie auch der Hydeschen Brennfläche als deren Hüllfläche vorstellen. Die Halbachsen a aller *gleichbündigen* Hyperboloide ändern sich derart, daß die eben durch dieselben dargestellten Ausdrücke d_1, d_2, d_3, von denen wir die beiden als positiv angenommenen d_1 und d_3 besonders auszeichnen können, *unverändert* bleiben. Durch diese Grundkonstanten des Systems kann man alle übrigen ersetzen, z. B. auch die oben (Gleichung (4), (5)) eingeführten Konstanten e und τ der Basisbüschel, welche mit den d durch die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} d_3 = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = e\tau \\ d_1 = \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = \dfrac{e}{\tau} \\ d_2 = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} = -e\left(\tau + \dfrac{1}{\tau}\right) \end{cases}$$

1) Vgl. Gr. S. 97.

beziehungsweise

$$(10)\qquad \begin{cases} e^2 = e_{\mathrm{II}}^2 \quad = d_3 d_1 = \dfrac{1}{a_{\mathrm{II}}^2}(a_{\mathrm{II}}^2 - a_{\mathrm{I}}^2)(a_{\mathrm{II}}^2 - a_{\mathrm{III}}^2)\,{}^{1)} \\ \tau^2 = \mathrm{tg}^2\,\omega = \dfrac{d_3}{d_1} \quad = -\dfrac{a_{\mathrm{III}}^2}{a_{\mathrm{I}}^2}\,\dfrac{a_{\mathrm{II}}^2 - a_{\mathrm{I}}^2}{a_{\mathrm{II}}^2 - a_{\mathrm{III}}^2} \end{cases}$$

verbunden sind und gewinnt so in den durch die Halbachsen a eines beliebigen gleichbündigen Hyperboloids darstellbaren Ausdrücken neue abgeleitete Konstanten des Systems von einfacher geometrischer Bedeutung.

Die koncyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}$.

Lassen wir gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ das Hyperboloid $F(\mathfrak{p})$ sich innerhalb des gleichbündigen Systems ändern, so ändert sich hiermit zugleich die Berührungskurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ mit der Hüllfläche aller $F(\mathfrak{p})$, der Hydeschen Brennfläche, sowie auch der Restschnitt $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ des Hyperboloides mit der Grenzfläche. Es wird sich[2]) herausstellen, daß

$$\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}'),$$

wobei

$$\mathfrak{p}' = \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}),$$

d. h. daß jeder derartige Restschnitt für einen bestimmten andern Wert $\mathfrak{p}'$ des Hyperboloidparameters selbst als Berührungskurve eines anderen gleichbündigen Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Brennfläche auftritt, so daß keine wesentliche Verschiedenheit in der Natur dieser Kurven besteht. Man erkennt übrigens sogleich z. B. aus der Betrachtung der Koeffizienten der Potenzen von $\mathfrak{p}$ in der obigen Gleichung (1)[3]) $F(\mathfrak{p}) = 0$ nicht bloß die Natur der eben erwähnten Kurven $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$, sondern überhaupt jeder Kurve $\mathfrak{C}$, in welcher sich zwei beliebige Hyperboloide des gleichbündigen Systems durchsetzen können:

Diese Kurven $\mathfrak{C}$ sind durchweg sphärische Kegelschnitte

$$(11)\qquad \mathfrak{C} \ldots \begin{Bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} \\ \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} y^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} z^2 = \text{const.} \end{Bmatrix},$$

welche durch die unendlich fernen Kreispunkte der reellen Ebenen μ, ν[4])

$$d_3 x^2 - d_1 z^2 = 0$$

(andere Form der Gleichung (3)) hindurchgehen und bezüglich der Koordinatenebenen symmetrisch sind.

---

1) Man könnte gleich hier die Ausdrücke e_{III}^2 und e_{I}^2 einführen, welche durch cyklische Vertauschung der Indices aus e_{II} hervorgehen; dies soll später (Gleichung (13) und (25)) wirklich geschehen.

2) Vgl. S. 224, Gleichung (18). 3) Vgl. z. B. Gr. S. 99. 4) Vgl. S. 212.

Um ein anschauliches Bild aller dieser ∞^2 koncyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ zu erhalten, genügt es, die Kurven $\mathfrak{C}$ einer Kugel um den Anfang p zu verzeichnen (Fig. 1), da jede $\mathfrak{C}$ auf den konzentrischen Kugeln zu einer der verzeichneten bezüglich des Zentrums p perspektiv ähnlich liegt. In allen unseren Figuren ist die Tangente τ des Winkels ω der gemeinsamen cyklischen Ebenen μ, ν der $F(\mathfrak{p})$ gegen die xy-Ebene als $\tau = \frac{1}{2}$ angenommen worden.

Die koncyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ erfreuen sich interessanter Eigenschaften, von welchen gewisse bei ebenen Kegelschnitten bekannte besondere Fälle sind. Die aus dem Anfange p die $\mathfrak{C}$ projizierenden Kegel $\mathfrak{k}$ führen zu den unendlich fernen Kegelschnitten eines Büschels, welches im absoluten Polarsysteme reziprok (dual) ist zu den unendlich fernen Schnitten aller Kegel jener Schar k, welche die durch p zu μ und ν gefällten Lote zu gemeinsamen Fokalachsen haben und deren Haupteigenschaften gewöhnlich geläufiger sind, weshalb wir uns auf dieselben beziehen wollen.

Während jeder Kegel der Konfokalschar k jede Kugel um p in Kurven C einer derartigen Schar durchsetzt, daß jeder auf einer beliebigen C wandernde Punkt mit den Polen der Ebenen μ, ν auf der Kugel sphärische Dreiecke konstanten Umfanges bildet, schließt jeder zu einer $\mathfrak{C}$ des in Fig. I verzeichneten koncyklischen Büschels tangential bleibende bewegliche größte Kugelkreis mit den beiden festen Kreisen in μ und ν ein veränderliches sphärisches Dreieck konstanter Winkelsumme, d. h. konstanten Flächeninhaltes ein.

Während sich in jedem Punkte w der Kugel zwei Kurven des anderen Systems C senkrecht schneiden, deren zu w gehörige Tangenten in den winkelhalbierenden Ebenen jenes Ebenenpaares liegen, welches pw mit den Fokalachsen verbindet, oder allgemeiner, in den gemeinsamen winkelhalbierenden Ebenen aller jener Ebenenpaare, welche durch pw tangential zu irgend einem der die C tragenden Kegel k gelegt sind, — wird andererseits jeder größte Kugelkreis von zwei Kurven $\mathfrak{C}$ berührt. Dies geschieht in Punkten, welche aus dem Anfange p unter einem rechten Winkel gesehen werden und auf den winkelhalbierenden Geraden jenes Strahlenpaares liegen, in welchen die Ebene des betreffenden größten Kreises vom Ebenenpaare μ, ν geschnitten wird, oder allgemeiner, auf den gemeinsamen Winkelhalbierenden aller Strahlenpaare, in welchen die betreffende Kreisebene von den die $\mathfrak{C}$ tragenden Kegeln $\mathfrak{k}$ durchsetzt wird.

Hiernach kann eine gemeinsame Eigenschaft aller „koncyklischen" Flächen

$$f[(x^2 + y^2 + z^2),\ (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} y^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} z^2)] = 0,$$

die von ∞^1 unserer ∞^2 koncyklischen $\mathfrak{C}$ erfüllt sind, ausgesprochen werden; dieselbe interessiert uns besonders deshalb, weil nicht nur alle Mittelpunktsflächen 2. Ordnung mit den Kreisschnittebenen μ, ν, z. B. alle zum Bündel gehörigen und zum Teil in den Fig. IV bis X dargestellten Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$, sondern auch die Hüllfläche der letzteren, die Hydesche Brennfläche der Kongruenz $K\binom{G}{\Gamma}$ (Fig. XI), ferner die Parameterfläche des Bündels (Fig. II) zu diesen „koncyklischen" Flächen gehören:

Der Schnitt jeder koncyklischen Fläche mit einer beliebig durch ihren Mittelpunkt p gelegten Ebene E ist stets *symmetrisch bezüglich* zweier zueinander senkrechter Achsen, welche mit den *Winkelhalbierenden der Spuren der cyklischen Ebenen* μ, ν in E identisch sind. Jede der koncyklischen Kurven $\mathfrak{C}$ hat in E eine bezüglich dieser Achsen symmetrisches Quadrupel von Spurpunkten.

Die Parameterfläche[1]) ($\mathfrak{P}$) mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} x^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} y^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} z^2)^2 = 0 \tag{12}$$

dient zur Veranschaulichung des auf jede Achse G im Bündel R_{III} entfallenden Schraubenparameters $\mathfrak{p} = (2\pi)^{-1}\mathfrak{h}$, d. h. der $(2\pi)^{-1}$fach verkleinerten Ganghöhe $\mathfrak{h}$. Sie ist der Ort der Endpunkte der vom Anfange p aus auf Parallelen zu den zugehörigen Schraubenachsen G abgetragenen Parameter (Steigungen) $\mathfrak{p}$. (Fig. II.)

Als koncyklische Fläche unseres Systems ist sie z. B. durch einen ihrer drei Hauptschnitte als Leitlinie bestimmt. Diese Hauptschnitte sind wie überhaupt alle beliebigen ebenen Schnitte durch den Mittelpunkt p „Parameterkurven" $\mathfrak{P}$ und als solche am bequemsten aus den beiden Hauptparametern der Schnittebene, d. h. den Radien der Parameterfläche ($\mathfrak{P}$), welche auf die Winkelhalbierenden der Spuren von μ und ν in der Schnittebene fallen, zu konstruieren, wie dies für die verschiedenen Formen von $\mathfrak{P}$ in den Figuren 2′ 3′ 4′ (auch 6) der oben erwähnten Abhandlung des Verfassers[2]) geschehen ist.

Jede solche $\mathfrak{P}$ ist die Parameterkurve eines im Bündel R_{III} enthaltenen linearen Schraubenbüschels R_{II}, dessen Achsenfläche, ein Plückersches Cylindroid, von den zur Schnittebene parallelen Strahlen der Kongruenz $K(G)$ erfüllt ist.

Die Parameterfläche ($\mathfrak{P}$) hat den absoluten Kugelkreis zur Kuspidalkurve, die isotropen Geraden (Minimallinien) durch den Anfang p in den Ebenen μ und ν zu Doppelpunktslinien und den Anfang selbst

1) Vgl. Gr. S. 105.

2) Gr. S. 69 und Figurentafel hierzu. (48. Bd. dieser Zeitschrift, 1. H.)

zum vierfachen singulären Punkte. In dem letzteren hat sie einen doppelt zu zählenden, zum Systeme der koncyklischen Kegel $\mathfrak{k}$ gehörigen Tangentialkegel $\mathfrak{k}_1$.

Zum Bündel R_{III} gehört eine Kongruenz $K(G)$ von Schraubenachsen und eine Parameterfläche ($\mathfrak{P}$); die gleiche Kongruenz von Achsen besitzen aber auch alle jene linear bleibenden Schraubenbündel, deren an der früheren Stelle bleibende Schraubenachsen zu einem durchwegs um ein gleiches Stück größeren oder kleineren Parameter gehören[1]; mit einer festen Achsenkongruenz $K(G)$ sind also außer der in Fig. II dargestellten Parameterfläche ($\mathfrak{P}$) auch noch alle Konchoiden derselben verträglich, d. h. alle jene Flächen, welche aus der obigen ($\mathfrak{P}$) durch algebraische Addition gleicher Stücke zu allen Radien hervorgehen. In der Gleichungsform von ($\mathfrak{P}$) erscheinen beim Übergange zu den Konchoiden an Stelle der früheren Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$ $\mathfrak{p}_{II}$ $\mathfrak{p}_{III}$ die durch die betreffende algebraische Addition veränderten Konstanten.

Es ist interessant, die Formen der Parameterflächen zu verfolgen, welche bei dieser zur Achsenkongruenz $K(G)$ gehörigen Konchoidenbildung gewonnen werden. Verschiebt man z. B. alle Punkte der in Fig. II dargestellten ($\mathfrak{P}$) auf ihren Verbindungsstrahlen mit dem Mittelpunkte p gegen p hin um gleiche Stücke, welche etwas größer sind als der kleinste bei ($\mathfrak{P}$) auftretende Parameter $\mathfrak{p}_I$, so treten bei p beiderseits an der x-Achse symmetrisch zur yz-Ebene konisch eingelagerte zapfenförmige Flächenteile auf; bei der Verschiebung um $\mathfrak{p}_I$ war nur eine spitze Einkerbung an der x-Achse bei p merklich gewesen, erst bei weiterer Verschiebung wuchs der doppelzapfige Flächenteil dort heraus, welcher zu Parametern anderen Vorzeichens gehört als der übrige Teil der Fläche und dessen Doppelkonuslager $\mathfrak{k}_1$ die früher imaginär gewesene Singularität bei p nun ganz anschaulich macht. Der übrige Flächenteil hatte während des Wachsens des Doppelzapfens abgenommen.

Verschiebt man weiter, im ganzen um $\mathfrak{p}_{II}$ gegen p hin, so erhält die Fläche die Gestalt von zwei in p kreuzförmig zusammenkommenden Zapfenpaaren an der x- und z-Achse, welche in zwei unendlich kleinen Kreisen der Ebenen μ, ν, in welche $\mathfrak{k}_1$ ausartet, zusammenhängen. Die isotropen Doppellinien der früheren Gestalten von Konchoiden sind in diesem Falle Kuspidallinien geworden.

Verschiebt man allmählich im selben Sinne weiter, so wächst der bisher doppelzapfige Flächenteil an der x-Achse weiter aus und wird teller- oder scheibenförmig (oval mit Einbuchtung bei der y-Achse) bei

1) Vgl. S. 213, Anm. 2.

der xy-Ebene, während an der z-Achse ein konisch bei p eingekeilter Doppelzapfen übrig bleibt, der selbst immer abnimmt, während der tellerförmige Flächenteil wächst.

Bei Verschiebung im selben Sinne, im ganzen von der Anfangsgestalt ($\mathfrak{P}$) gerechnet um $\mathfrak{p}_{III}$, verschwindet der letzterwähnte Doppelzapfen ganz, und es ist bloß die spitze Einkerbung an der z-Achse in der sonst tellerförmigen Fläche merkbar.

Bei weiterer Verschiebung verschwindet auch diese Einkerbung und die scheibenförmige Parameterfläche mit der schwächeren Einbuchtung an der y- und der stärkeren an der z-Achse wächst allmählich weiter bis zu kugelartigen, großen Gestalten, nicht unähnlich jenen, welche ($\mathfrak{P}$) angenommen hätte, wenn wir die anfängliche Verschiebung im entgegengesetzten Sinne sich hätten vollziehen lassen.

Die auf den durch p gehenden Strahlen abgetragenen bis zu ($\mathfrak{P}$) reichenden Parameter ändern ihr Vorzeichen beim Durchgange eines solchen Strahles durch eine zum singulären Kegel $\mathfrak{k}_1$ tangentiale Lage; was natürlich für reelle Parameter nur dann möglich wird, wenn $\mathfrak{k}_1$ reell ist.

Die gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ und ihre Hydesche Einhüllende.

Um die Halbachsen (Gl. 1, 2)

$$a_{I} = \sqrt{-(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})}, \qquad a_{II} = \sqrt{-(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{I})},$$
$$a_{III} = \sqrt{-(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{I})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{II})}$$

der mit $\mathfrak{p}$ sich ändernden zum Schraubenbündel gehörigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ sowie auf jedem solchen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ die Lage der Berührungskurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ mit der Hydeschen Brennfläche und des Restschnittes $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ zu übersehen, wählen wir in Fig III ein graphisches Verfahren, indem wir zu jedem beliebigen Parameter $\mathfrak{p}$ als Abscisse

die Halbachse a_{I} von $F(\mathfrak{p})$ als Ordinate bis zum Endpunkte auf K_{I},
a_{II} K_{II},
a_{III} K_{III},

ferner den Radius $r = r_{(\mathfrak{p})}$ der mit $F(\mathfrak{p})$ konzentrischen Kugel von $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$ als Ordinate bis zum Endpunkte auf $E(r)$ und endlich den Radius $R = R_{(\mathfrak{p})}$ der konzentrischen Kugel von $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}')$ als Ordinate bis zum Endpunkte auf $E(R)$ abtragen (vgl. S. 215, $E_{(r)}$ und $R_{(R)}$ werden durch die folgenden Gl. 14 und 19 bestimmt werden).

Aus der Figur III kann man später leicht diese Halbachsen und Kugelradien zur Konstruktion der Hyperboloidfiguren IV bis X des Bündels mit ihren Berührungskurven $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ und Restschnitten $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$

benützen, wobei durch genügend viele derart konstruierte Kurven $\mathfrak{C}$ der Brennfläche die Gestalt der letzteren (Fig. XI) von selbst hervortritt.[1])

K_{I}, K_{II}, K_{III} der Figur III sind drei Kreise, welche die Strecken zwischen den Punkten der Abscissenachse $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ bis $\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$, bzw. $\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ bis $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$, bzw. $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ bis $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ zu Durchmessern haben und sich daher paarweise in diesen Punkten der Abscissenachse berühren. Man entnimmt aus der Figur III u. a. auch ohne weiteres, daß die Halbachsen a_{I}, a_{II}, a_{III} der für $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} < \mathfrak{p} < \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ reellen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ für den Parameterwert

$$\mathfrak{p} = \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})$$

ihren größten Wert

$$\pm \tfrac{1}{2} d_1 = \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}), \ \pm \tfrac{1}{2} d_2 = \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}), \ \pm \tfrac{1}{2} d_3 = \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})$$

erreichen.

Jeder unterhalb dieses Maximums gelegene reelle Wert der betreffenden Halbachse wird für zwei zu reellen gleichbündigen Hyperboloiden $F(\mathfrak{p})$ gehörige Werte von $\mathfrak{p}$ erreicht, welche in Fig. III bezüglich des zum betreffenden Maximalwerte gehörigen Parameters symmetrisch liegen. [Zu allen beliebigen Werten einer Halbachse gehört überdies das zum Ebenenpaar durch diese Achse ausartende Hyperboloid, welchem der auf diese Achse entfallende Hauptparameter ($\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$, bzw. $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ oder $\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$) zukommt.]

Die zu den Maximalhalbachsen

(Fig. X) $\qquad \pm \tfrac{1}{2} d_1 = \overline{p\Xi}$

(Fig. IX) $\qquad \pm \tfrac{1}{2} d_2 = \overline{pH}$

(Fig. IV) $\qquad \pm \tfrac{1}{2} d_3 = \overline{pZ}$

gehörigen drei Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ haben zum Hauptschnitte in der YZ-, bzw. ZX-, bzw. XY-Ebene eine gleichseitige Hyperbel, da z. B. für den Punkt der Abscissenachse $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ in der Fig. III $a_{\mathrm{II}}^2 + a_{\mathrm{III}}^2 = 0$ wird, wie denn auch die von diesem Punkte gezogene Ordinate von K_{II} und die Tangente von K_{III} gleich lang sind.

Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}, \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ artet $F(\mathfrak{p})$ in ein Ebenenpaar durch die X-, bzw. Y-, bzw. Z-Achse aus, welches jedoch nur für den mittleren dieser Hauptparameter, für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ als Paar der cyklischen Ebenen μ, ν durch die Y-Achse reell ist (Fig. VI).

1) Damit für jedes $\mathfrak{p}$ die Übertragung der auf die isometrisch darzustellenden Koordinatenachsen entfallenden Strecken sogleich in unveränderter Größe geschehen könne, ist das Verhältnis des Maßstabes der Fig. III (und späterhin der Fig. XII) zu jenem der übrigen Figuren (IV bis XI) wie $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ gehalten.

Der auf die Achse des Ebenenpaares entfallende Halbachsenwert

$$(13)\quad \left.\begin{array}{l} [\pm a_{\mathrm{I}}\ ]_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}} = \pm e_{\mathrm{I}} = \pm\sqrt{-(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})} = \pm\sqrt{d_2 d_3}\ \text{imag.} \\ \pm e = [\pm a_{\mathrm{II}}\ ]_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}} = \pm e_{\mathrm{II}} = \pm\sqrt{-(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})} = \pm\sqrt{d_3 d_1}\ \textit{reell} \\ [\pm a_{\mathrm{III}}]_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}} = \pm e_{\mathrm{III}} = \pm\sqrt{-(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})} = \sqrt{d_1 d_2}\ \text{imag.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} d_1 > 0 \\ d_2 < 0 \\ d_3 > 0 \end{array}$$

(vgl. S. 214 u. Gl. 10 u. 5) des zum betreffenden Hauptparameter gehörigen $F(\mathfrak{p})$ gehört zu den Zentren jener beiden Strahlenbüschel, in welche die beiden Regelscharen des zum Ebenenpaar entarteten Hyperboloides übergehen. Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ sind dies die reellen Zentren M, N der Y-Achse mit der Ordinate $\pm e$ (vgl. S. 213).

Mit wachsendem $\mathfrak{p}$ beginnen die zum Bündel gehörigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ nach dem Übergang durch den Wert $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ als schmale hyperboloidische Röhren um die X-Achse herum, verbreitern sich dann (Fig. IV und V) so, daß für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ die Form des Ebenenpaares μ, ν passiert wird (Fig. VI), was den Übergang zu den Hyperboloiden (Fig. III bis X) um die Z-Achse bildet. Letztere verengen sich schließlich immer mehr um die Z-Achse, während sich $\mathfrak{p}$ dem Werte $\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ nähert.

Die mit $\mathfrak{p}$ veränderlichen Halbachsen a_{I}, a_{II}, a_{III} der gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$, welche wir aus der Fig. III für jeden Wert von $\mathfrak{p}$ entnehmen können, gestatteten uns einen Überblick über die auftretenden Gestalten dieser Trägerflächen von Strahlen der Achsenkongruenz $\mathrm{K}\binom{G}{I}$; nun sollen uns die sogleich zu untersuchenden Kurven $E(r)$ und $E(R)$ dieser Figur Dienste leisten zur Übersicht der Gestalten der Berührungskurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ und des Restschnittes $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ jedes Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Hydeschen Brennfläche, wodurch auch die letztere Fläche (Fig. XI) von selbst hervortritt. Wie oben (S. 219) erwähnt, stellt die für ein beliebiges $\mathfrak{p}$ bis zu $E(r)$, bzw. $E(R)$ geführte Ordinate unmittelbar der Radius $r = r_{(\mathfrak{p})}$, bzw. $R = R_{(\mathfrak{p})}$ der zum betreffenden Hyperboloide gehörigen konzentrischen Kugel vor, auf welcher $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$, bzw. $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ liegt.

$r_{(\mathfrak{p})}$ ist leicht durch $\mathfrak{p}$ auszudrücken, da für die Berührungskurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ des Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Brennfläche die Gleichung gilt

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}} F_{(\mathfrak{p})} = x^2 + y^2 + z^2 + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}) + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}) = 0,$$

d. h.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a_{\mathrm{I}}^2 + a_{\mathrm{II}}^2 + a_{\mathrm{III}}^2.$$

r ist der mit $\mathfrak{p}$ veränderliche Radius der „Orthogonalpunktskugel"[1]) Monges bei jedem Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ und die Kurve $E(r)$ der Fig. III ist die Ellipse ($\mathfrak{p}$ Abscisse, r Ordinate):

$$(14) \quad r^2 = -\overline{\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{I}\mathfrak{p}_{I}} + 2\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}} - 3\mathfrak{p}^2.$$

Dieselbe hat für den Durchschnittswert der drei Hauptparameter

$$\mathfrak{p} = \tfrac{1}{3}(\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$$

(hierzu Fig. VIII als $F_{(\mathfrak{p})}$) den *Maximalwert* ϱ von r, ausdrückbar gemäß

$$3\varrho^2 = 3[r^2]_{\mathfrak{p} = \frac{1}{3}(\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})} = \mathfrak{p}_{I}^2 + \mathfrak{p}_{II}^2 + \mathfrak{p}_{III}^2 - (\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{I}\mathfrak{p}_{II}),$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\overline{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III}}^2 + \overline{\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I}}^2 + \overline{\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{I}}^2\right),$$

oder durch die d, bzw. e und τ als

$$(15) \qquad = \tfrac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right),$$

wobei die Gl. 8 ($d_1 + d_2 + d_3 = 0$) gilt,

$$= d_1^2 + d_1 d_3 + d_3^2 = d_1^2 - d_2 d_3 = d_2^2 - d_3 d_1$$

$$= d_3^2 - d_1 d_2,$$

$$= d_1^2 - e_{I}^2 = d_2^2 - e_{II}^2 = d_3^2 - e_{III}^2,$$

$$= e^2\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} + 1\right),$$

$$(16) \qquad = -(e_{I}^2 + e_{II}^2 + e_{III}^2),$$

wobei die Beziehung $\left(\frac{1}{e_{I}^2} + \frac{1}{e_{II}^2} + \frac{1}{e_{III}^2} = 0\right)$ für die Größen $e^2 = e_{II}^2 = d_3 d_1$, $e_{III}^2 = d_1 d_2$, $e_{I}^2 = d_1 d_2$ (Gl. 13) aus der Gl. 8 folgt. Der unveränderliche Ausdruck $3\varrho^2$ kann auch mit Rücksicht auf die Gl. 10 durch die Halbachsen eines *beliebigen* unter den gleichbündigen Hyperboloiden als

$$(17) \qquad 3\varrho^2 = a_{I}^2 + a_{II}^2 + a_{III}^2 - \left(\frac{a_{II}^2 a_{III}^3}{a_{I}^2} + \frac{a_{III}^2 a_{I}^2}{a_{II}^2} + \frac{a_{I}^2 a_{II}^2}{a_{III}^2}\right)$$

dargestellt werden.

Die Ellipse $E(r)$ der Fig. III hat in den Punkten ($\mathfrak{p} = \frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}$, $r = \pm\varrho$) ihre Hauptscheitel; sie geht durch die Punkte

($\mathfrak{p}_{I}$, $\pm e_{I}$)	(imag.)	des	Kreises	K_{I}	,
($\mathfrak{p}_{II}$, $\pm e_{II} = \pm e$)	(reell)	„	„	K_{II}	,
($\mathfrak{p}_{III}$, $\pm e_{III}$)	(imag.)	„	„	K_{III}	,

1) Diese Kugel ist der Ort jener Punkte, aus denen sich an das Hyperboloid $F(\mathfrak{p})$ drei zueinander senkrechte Tangentialebenen legen lassen; sie schneidet $F(\mathfrak{p})$ in dem geometrischen Orte $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ jener Punkte, in welchen sich Erzeugende dieses Hyperboloides *senkrecht* schneiden.

ferner durch die S. 220 erwähnten zu den Durchschnittswerten zweier der drei Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$, $\mathfrak{p}_{III}$ als Abscissen und zu den größten Halbachsen $\pm\frac{1}{2}d_1$, $\pm\frac{1}{2}d_2$, $\pm\frac{1}{2}d_3$ als Ordinaten gehörigen Punkte der Kreise K_I, K_{II}, K_{III}.

Zwei gleichbündige Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$, deren Parameter sich vom Durchschnittswerte $\frac{1}{3}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$ der drei Hauptparameter um gleiche Stücke unterscheiden, haben — wie unmittelbar aus der Symmetrie der Ellipse $E(r)$ in Fig. III bezüglich ihrer Hauptachse hervorgeht — dieselbe Orthogonalpunktskugel, also konsphärische Berührungskurven mit der Hydeschen Brennfläche.

$r = r_{(\mathfrak{p})}$ bleibt, wie ein Blick auf die Fig. III lehrt, nur dann absolut genommen größer als die kleinste reelle Halbachse des zugehörigen Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$, wenn $\mathfrak{p}$ sich zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II}) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$$

befindet, und nur in diesen beiden Grenzfällen ist r der kleinsten reellen Halbachse a_{III}, bzw. a_I gleich; daher sind nur in diesem Intervalle die Berührungskurven $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ der Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ mit der Hydeschen Brennfläche reell. Bei wachsendem $\mathfrak{p}$ ist die Kurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ anfangs bei den schmalen hyperboloidischen Röhren um die X-Achse (von $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$ an) nicht reell, sondern wird es erst von $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II})$, Fig. IV, an, vorerst nur als winziges reelles Doppeloval an der Z-Achse und bleibt dann reell in den folgenden Figuren bis $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$, Fig. X, wo sie bis zu einem uneingeschränkt kleinen Doppelovale an der X-Achse sich zusammenzieht. Für die später bei wachsendem $\mathfrak{p}$ bis $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{III}$ sich immer enger um die Z-Achse herum anlegenden hyperboloidischen Röhren $F(\mathfrak{p})$ ist die Berührungskurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ mit der Brennfläche schon wieder imaginär.

Anders verhält sich der koncyklische sphärische Kegelschnitt

$$\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}'),$$

der Restschnitt des Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Hydeschen Brennfläche. Dieser ist bei allen reellen Hyperboloiden $(\mathfrak{p}_I < \mathfrak{p} < \mathfrak{p}_{III})$ stets reell, wie aus der Untersuchung (S. 226) des Radius $R = R(\mathfrak{p})$ der diese Kurve $\mathfrak{C}'$ tragenden „Grenzpunktskugel"[1]) Waelschs hervorgeht.

---

1) Diese Kugel schneidet die Erzeugenden des zu $\mathfrak{p}$ gehörigen gleichbündigen Hyperboloides, d. h. die zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Strahlen der Achsenkongruenz des Schraubenbündels in deren Kummerschen Grenzpunkten. (Kummers Abh. im 57. Bde des Crelleschen Journals. *„Grenzpunkte"* heißen die beiden Grenzlagen jener Punkte eines Kongruenzstrahles, welche den benachbarten Kongruenzstrahlen zunächst liegen.)

Wir führen die Untersuchung des Radius

$$R(\mathfrak{p}) = r(\mathfrak{p}')$$

der Kugel von $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}')$ und damit der die Gesamtheit der $R(\mathfrak{p})$ darstellenden Kurve $E(R)$ in der Figur III im engsten Zusammenhange mit dem Nachweise der einfachen Beziehung

$$\mathfrak{p}' = \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) \tag{18}$$

zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$:

Jeder der koncyklischen sphärischen Kegelschnitte $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ der Hydeschen Brennfläche bildet sich bei Einführung der Substitution[1])

$$x^2 = X, \quad y^2 = Y, \quad z^2 = Z$$

in eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Erzeugende

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})X + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})Y + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})Z + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = 0 \\ \qquad X + Y + Z - r^2_{(\mathfrak{p})} = 0 \end{array}\right\}$$

$$[r^2_{(\mathfrak{p})} = -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) - (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}) - (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})]$$

des Cylinders ab, dessen Kanten die durch

$$X : Y : Z = (\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}) : (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) : (\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})$$

bestimmte Richtung haben, und dessen Basis etwa in der XY Ebene durch

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})X + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})Y + (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = 0 \\ \qquad X + Y - r^2_{(\mathfrak{p})} = 0 \end{array}\right\}$$

dargestellt ist, indem die erste dieser beiden Gleichungen die Tangente der Basiskurve angibt, während die zweite deren Berührungspunkt liefert. Dies gibt die Parameterdarstellung der Basiskurve in Punktkoordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})X = \quad (\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})^2(2\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}}) \\ (\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})Y = -(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}})^2(2\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}}) \end{array}\right\}.$$

Die Basiskurve ist rational, von der 3. Ordnung und 3. Klasse. Dem Aufsuchen von $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}')$ entspricht in unserem Bilde die Bestimmung des sogenannten „Tangentialpunktes" unserer Basiskurve, d. h. jenes zum Parameter $\mathfrak{p}'$ gehörigen Punktes derselben, in welchem sie von der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Tangente (außer dem Berührungspunkte noch weiterhin) durchsetzt wird; die Cylinderkante des Tangentialpunktes ist das Bild von $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}')$, des auf der Kugel vom Radius $R(\mathfrak{p}) = r(\mathfrak{p}')$ gelegenen Restschnittes des $F(\mathfrak{p})$ mit der Brennfläche.

---

1) Vgl. Desmoulins oben erwähnte Abhandlung S. 82.

Unsere Basiskurve 3. Ordnung hat die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente mit dem Wendepunkte auf $X + Y = 0$ und eine Spitze für $\mathfrak{p} = \frac{1}{3}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$. Der letztere Umstand könnte auch aus der nun zu ermittelnden und in Gleichung (18) angeführten Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ gefolgert werden; seine Feststellung führt zu dem Schlusse, daß die auf der Kugel vom Radius ϱ gelegene Kurve

(Fig. VIII) $$\mathfrak{C}_{\left(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}\right)} = \mathfrak{C}_\varrho$$

die reelle Kuspidalkurve der Brennfläche ist, wobei das Hyperboloid

$$F_{\left(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}\right)} = F_\varrho$$

die Brennfläche entlang $\mathfrak{C}_\varrho$ unter Berührung durchsetzt.

Bezeichnen wir $\frac{\partial X}{\partial \mathfrak{p}}$ mit X', $\frac{\partial Y}{\partial \mathfrak{p}}$ mit Y', so stellt sich in den laufenden Punktkoordinaten Ξ, H die Gleichung der Basiskurventangente des Cylinders als

$$\begin{vmatrix} H & \Xi \\ X' & Y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}$$

dar.

Setzen wir in dieselbe für X, Y, X', Y' die aus dem vorigen Gleichungspaare folgenden Werte und sehen Ξ, H als Koordinaten des zu $\mathfrak{p}'$ gehörigen Tangentialpunktes an, so wird die sich ergebende Gleichung

$$\begin{vmatrix} (\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{II})^2(2\mathfrak{p}' - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{III}}), & -(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_I)^2(2\mathfrak{p}' - \overline{\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) \\ (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})\,(3\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}), & -(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)\,(3\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})^2(2\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{III}}), & -(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)^2(2\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) \\ (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})\,(3\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}), & -(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)\,(3\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I) + \overline{\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) \end{vmatrix}$$

oder nach Unterdrückung des zur Kuspidalkurve der Brennfläche gehörigen Faktors $(3\mathfrak{p} - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}})$:

$$(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_I)^2(2\mathfrak{p}' - \overline{\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II}) - (\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{II})(2\mathfrak{p}' - \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{III}})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)$$

= dem analogen Ausdrucke, den man aus dem linksstehenden bei Setzung von $\mathfrak{p}$ statt $\mathfrak{p}'$ erhält,

$$2\mathfrak{p}'^3 - \mathfrak{p}'^2(3\mathfrak{p} + \overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) + \mathfrak{p}'(2\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}})$$
$$- (\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}} - \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III})$$

= dem analogen Ausdrucke, den man aus dem linksstehenden bei Setzung von $\mathfrak{p}$ statt $\mathfrak{p}'$ erhält,

d. h.

$$2\mathfrak{p}'^3 - \mathfrak{p}'^2(3\mathfrak{p} + \overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) + \mathfrak{p}'(2\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}})$$
$$+ (\mathfrak{p}^3 - \mathfrak{p}^2\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) = 0,$$

außer durch die Doppelwurzel $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ noch durch den zum Tangentialpunkte, bezw. zu $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p}')$ gehörigen Wert

$$\mathfrak{p}' = \tfrac{1}{2}(-\mathfrak{p} + \overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) \tag{18}$$

erfüllt.

Die eben abgebildete einfache Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, welche auch in der Form

$$(\mathfrak{p}' - \tfrac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{p} - \tfrac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}}) \tag{18'}$$

geschrieben werden kann, besagt:

„Der Restschnitt $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ jedes Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Hydeschen Brennfläche ist identisch mit der Berührungskurve $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}')$ dieser Brennfläche und jenes Hyperboloides $F(\mathfrak{p}')$, dessen Parameter $\mathfrak{p}'$ vom Parameter $\frac{1}{3}(\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$ des zur Kuspidalkurve $\mathfrak{C}_{\varrho} = \mathfrak{C}_{(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}})}$ $= \mathfrak{C}'_{(\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})}$ gehörigen Hyperboloides F_{ϱ} nach der entgegengesetzten Seite um die Hälfte jenes Intervalles abweicht, welches zwischen dem Parameter $\mathfrak{p}$ von $F_{(\mathfrak{p})}$ und jenem $(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}})$ des F_{ϱ} besteht."

So ist z. B. $\mathfrak{C}$ in Figur IX mit $\mathfrak{C}'$ in Figur VI identisch, das Kreispaar $\mathfrak{K}'_{I}\mathfrak{K}'_{II}$ spielt eben bei dem in der ersten Figur dargestellten Hyperboloide die Rolle der Berührungskurve, bei letzterem jene des Restschnittes mit der Brennfläche.

In Figur III, in welcher die Elemente a_{I}, a_{II}, a_{III}, $r_{(\mathfrak{p})}$, $R_{(\mathfrak{p})} = r_{(\mathfrak{p}')}$ eines jeden der Hyperboloide $F_{(\mathfrak{p})}$ zu jedem beliebigen $\mathfrak{p}$ übersichtlich zusammengetragen sind, um dann zum Aufbau der Figuren IV bis IX, bezw. XI zu dienen, ist nach der eben entwickelten Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ der Ort $E(R)$ aller zu den beliebigen Abscissen $\mathfrak{p}$ abgetragenen Ordinaten $R_{(\mathfrak{p})} = r_{(\mathfrak{p}')}$ jene Ellipse, welche aus der oben kennen gelernten Ellipse $E_{(r)}$ durch Verdoppelung der Abstände aller Punkte von der zu $\frac{1}{3}(\mathfrak{p}_{I} + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$ gehörigen Maximalordinate ϱ (Hauptachse von $E_{(r)}$) hervorgeht, d. h. also durch perspektiv-affine Abbildung mit der Maximalordinate (von der Länge ϱ) als Affinitätsachse, der zur letzteren senkrechten Affinitätsrichtung und dem Modulus -2.

Der Radius

$$\varrho = e\sqrt{\frac{1}{3}\left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} + 1\right)}$$

(S. 221, Gleichung nach 15) der Kuspidalkurve der Hydeschen Brennfläche ist auch der Maximalwert von $R_{(\mathfrak{p})} = r_{(\mathfrak{p}')}$, und es gehört zu jenen Werten des Parameters $\mathfrak{p}$, welche vom zu ϱ gehörigen Parameter $(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}})$ nach entgegengesetzter Seite hin sich um gleichviel unterscheiden, auch derselbe Wert von $R_{(\mathfrak{p})}$, also dieselbe Grenzpunktkugel.

„Die beiden Hyperboloide $F_{(\mathfrak{p})}$, welche dieselbe Orthogonalpunktskugel haben, gehören auch zur selben Grenzpunktskugel, und umgekehrt. Ihre Parameter weichen vom Parameter $\frac{1}{3}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ des die Brennfläche entlang ihrer reellen Kuspidalkurve unter Berührung durchsetzenden Hyperboloides $F(\frac{1}{3}\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = F_\varrho$ nach entgegengesetzter Seite um gleichviel ab."

Die Ellipse $E(R)$ der Figur III *berührt doppelt*

den Kreis K_{I} und zwar in den beiden zur Abscisse $(-\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ gehörigen imaginären Punkten mit der Ordinate $\pm e_{\mathrm{I}}$,

den Kreis K_{II} und zwar in den beiden zur Abscisse $(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ gehörigen *reellen Punkten mit der Ordinate* $\pm e_{\mathrm{II}} = \pm e$,

den Kreis K_{III} und zwar in den beiden zur Abscisse $(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ gehörigen imaginären Punkten mit der Ordinate $\pm e_{\mathrm{III}}$,

wie man aus der Gleichung dieser Ellipse ($\mathfrak{p}$ Abscisse, R Ordinate) entnehmen kann. Diese Gleichung, welche aus

$$R^2 = R^2_{(\mathfrak{p})} = r^2_{(\mathfrak{p}')}$$
$$= -[(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) + (\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}) + (\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})]$$

folgt, lautet ($\mathfrak{p}$ Abscisse, R Ordinate):

$$\begin{aligned} 4R^2 &= -[(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) + \cdot + \cdot] \\ \text{(19)} \qquad &= [(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})^2 - (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p})^2 + \cdots + \cdots] \\ &= (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}^2 - 2\,\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}}) + 2\mathfrak{p}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) - 3\mathfrak{p}^2, \end{aligned}$$

und man braucht, um die oben behauptete doppelte Berührung z. B. mit K_{II} nachzuweisen, nur zu untersuchen, für welches $\mathfrak{p}$

$$4R^2 = 4a^2_{\mathrm{II}},$$

d. h.

$$= -4(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})$$

sein kann; die sich ergebende Gleichung

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}^2 - 2\,\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} + \cdots} + 2\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \cdots} - 3\mathfrak{p}^2$$
$$= -4\mathfrak{p}^2 + 4\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}} - 4\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$$

oder

$$\mathfrak{p}^2 - 2\mathfrak{p}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) + (\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}^2} - 2\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + 2\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} - 2\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = 0$$

hat nun in der Tat die Doppelwurzel $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$.

Hieraus folgt, daß R stets größer bleibt als die größte bei irgend einem Hyperboloide $F_{(\mathfrak{p})}$ vorkommende Halbachse, außer im Falle $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$, wo $R = a_{\mathrm{II}}$ wird und wo dementsprechend $F_{(\mathfrak{p})}$ *als Restschnitt* $\mathfrak{C}'$ mit der Brennfläche (welche entlang einer imaginären $\mathfrak{C}$ berührt wird) das in der Figur VI verzeichnete Kreispaar $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ besitzt; für dieses Hyperboloid wurde nach der Figur X kein besonderes Bild beigefügt, da die Vorstellung desselben keine Schwierigkeit mehr bietet.

Aus diesem Verhalten von R folgt, daß der Restschnitt $\mathfrak{C}'_{(\mathfrak{p})}$ jedes reellen Hyperboloides $F_{(\mathfrak{p})}$ mit der Brennfläche stets reell ist, auch dann, wenn (vgl. S. 223) die Berührungskurve $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$ bei den schmalen Röhrenformen um die X-, bezw. Z-Achse imaginär wird. In den zusammengehörigen Figuren IV bis X sind einige Gestalten gleichbündiger Hyperboloide $F_{(\mathfrak{p})}$, ihre *Berührungskurven* $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$ und *Restschnitte* $\mathfrak{C}'_{(\mathfrak{p})}$ mit der Hydeschen Brennfläche (Fig. XI) verzeichnet; an den Hauptschnitten dieser Hyperboloide einerseits und den von ihnen eingehüllten (und nachträglich in roter Farbe beigefügten) Hauptschnitten der Brennfläche andererseits kann man deutlich ersehen, daß auch diese Hauptschnitte sich nur in auf $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$ gelegenen Punkten berühren und nur in Punkten auf $\mathfrak{C}'_{(\mathfrak{p})}$ sonst noch durchsetzen.

Wächst $\mathfrak{p}$, so ändert sich das für $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} < \mathfrak{p} < \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ reelle Hyperboloid $F_{(\mathfrak{p})}$ im gleichbündigen System, wobei die Figur III mit ihren Kreisen $K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}K_{\mathrm{III}}$ uns die Halbachsen $a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}}a_{\mathrm{III}}$ und ihre Veränderung zeigt; wir übersehen mit Hilfe unserer Figuren den stetigen Übergang der $F_{(\mathfrak{p})}$, $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$, $\mathfrak{C}'_{(\mathfrak{p})}$ in alle erreichbaren reellen Lagen und haben in der nebenstehenden Tabelle (S. 229) einige bemerkenswerte Einzelheiten erwähnt, wodurch die Vorstellung des stetigen Überganges erleichtert werden soll.

Wir merken noch die aus den Gleichungen (14) und (19) der Ellipsen $E(r)$ und $E(R)$ mit Bezug auf den vor Gleichung (15) stehenden ϱ-Wert sich ergebende Beziehung

$$4R^2 = (\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}^2 - \overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}}) + r^2$$

oder

$$(20) \qquad 4R^2 = 3\varrho^2 + r^2$$

an zwischen den Radien R der Grenzpunktkugel und dem Radius r der Orthogonalpunktkugel bei jedem der gleichbündigen Hyperboloide

Parameter $\mathfrak{p}$	Verhalten von $F'_{(\mathfrak{p})}$	Verhalten von $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$	Verhalten von $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'_{(\mathfrak{p})}$
$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$	Imaginäres Ebenenpaar durch die X-Achse.	Imaginär.	∞ kleines Doppeloval bei Ξ, $\bar\Xi$ an der X-Achse.
↓ $\mathfrak{p}$ wächst	Schmale, sich verbreiternde Röhre um die X-Achse.	Imaginär.	Kleine, wachsende Doppelovale um die x-Achse.
$\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II})$	**Fig. IV.** Maximalwert $\overline{\mathfrak{p}Z} = \frac{1}{2} d_3$ der Halbachse a_{III}. Der Hauptschnitt von $F_{(\mathfrak{p})}$ in $x = 0$ eine gleichseitige Hyperbel.	∞ kleines Doppeloval bei Z, $\bar Z$ an der Z-Achse.	In Fig. IV und auf der Brennfläche (Fig. XI) ersichtlich; von den folgenden Kurvengestalten sind in XI nicht alle eingetragen.
↓ $\mathfrak{p}$ wächst	**Fig. V.** Soll die Vorstellung des Überganges zum Ebenenpaare μ, ν erleichtern.	Nähert sich der Kreispaargestalt $\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$ in Fig. VI und XI.	Nähert sich der Kreispaargestalt $\mathfrak{K}'_I \mathfrak{K}'_{II}$ in Fig. VI und XI.
$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II}$	**Fig. VI.** Ebenenpaar μ, ν durch die y-Achse unter dem Winkel $\pm\omega$ gegen die XY-Ebene, dessen $\operatorname{tg}\omega = \tau$ hier als $\frac{1}{2}$ angenommen ist	$\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$ in Fig. VI und XI. Diese $\mathfrak{C}$-Gestalt hat als einzige unter ihren Nachbarformen *reelle* Punkte mit der XY-Ebene gemein	$\mathfrak{K}'_I \mathfrak{K}'_{II}$ in Fig. VI und XI.
↓ $\mathfrak{p}$ wächst	**Fig. VII.** Statt der früheren Röhren um die X-Achse von jetzt ab hyperboloidische Doppeltrichter um die Z-Achse.	$\mathfrak{C}$ rückt von obiger Kreispaargestalt in Doppelovalform *um die Z-Achse* (immer noch bis Fig. IX) ab zur Gestalt $\mathfrak{C}_\varrho$.	Von obiger Kreispaargestalt an sind die Doppelovale $\mathfrak{C}'$ nicht mehr um die X-Achse, sondern um die Z-Achse geschlungen.
$\mathfrak{p} = \frac{1}{3}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$	**Fig. VIII.** Gleichseitiges Hyperboloid, einziges dieser Art im gleichbündigen System: F'_ϱ. Es durchsetzt die Brennfläche unter Berührung längs der Kuspidalkurve $\mathfrak{C}_\varrho = \mathfrak{C}'_\varrho$.	$\mathfrak{C}_\varrho$ Kuspidalkurve der Brennfläche (Fig. VIII und XI). Von da ab nehmen die $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{C}\\ \mathfrak{C}'\end{matrix}\right\}$ die früher von den $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{C}'\\ \mathfrak{C}\end{matrix}\right\}$ innegehabten Lagen in entgegengesetzter Reihenfolge an.	$\mathfrak{C}_\varrho$ Kuspidalkurve der Brennfläche (Fig. VIII und XI).
$\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{III})$	**Fig. IX.** Maximalwert $\overline{\mathfrak{p}H} = \frac{1}{2} d_2$ der Halbachse a_{II}. Der Hauptschnitt von $F_{(\mathfrak{p})}$ in $y = 0$ eine gleichseitige Hyperbel.	Kreispaargestalt $\mathfrak{K}'_I \mathfrak{K}'_{II}$ (Fig. VI u. XI). Von da ab bilden die $\mathfrak{C}$ Doppelovale nicht wie bisher um die z-, sondern um die X-Achse, um welche sie sich immer enger zusammenziehen.	Übergangsform von $\mathfrak{C}_\varrho$ zum Kreispaare $\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$.
$\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III})$	**Fig. X.** Maximalwert $\overline{\mathfrak{p}\Xi} = \frac{1}{2} d_1$ der Halbachse a_I. Der Hauptschnitt von $F_{(\varrho)}$ in $x = 0$ eine gleichseitige Hyperbel.	∞ kleines Doppeloval bei Ξ, $\bar\Xi$ an der X-Achse. Von da ab imaginär.	Übergangsform von $\mathfrak{C}_\varrho$ zum Kreispaare $\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$.
$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I - \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III}$	Hyperboloid (um die Z-Achse) durch das Kreispaar $\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$.	Imaginär.	Kreispaar $\mathfrak{K}_I \mathfrak{K}_{II}$.
↓ $\mathfrak{p}$ wächst	Immer enger um die Z-Ache sich anlegende Röhren.	Imaginär.	Immer enger um die Z-Achse sich schlingende Doppelovale.
$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{III}$	Imaginäres Ebenenpaar durch die Z-Achse.	Imaginär.	∞ kleines Doppeloval bei Z, $\bar Z$ an der z-Achse.

mit Bezug auf den unveränderlichen Radius ϱ (S. 221) der zur reellen Kuspidalkurve $\mathfrak{C}_\varrho$ der Hydeschen Brennfläche gehörigen Kugel.

Der mit $\mathfrak{p}$ veränderliche Radius R der Grenzpunktkugel eines jeden Hyperboloides F (Gleichung 1, 2)

$$\frac{x^2}{a_{\mathrm{I}}^2} + \frac{y^2}{a_{\mathrm{II}}^2} + \frac{z^2}{a_{\mathrm{III}}^2} - 1 = 0$$

wird zufolge der Gleichungen (20) und (17) durch die Halbmesser a gemäß

$$(21) \qquad 4R^2 = 2(a_{\mathrm{I}}^2 + a_{\mathrm{II}}^2 + a_{\mathrm{III}}^2) - \left(\frac{a_{\mathrm{II}}^2 a_{\mathrm{III}}^2}{a_{\mathrm{I}}^2} + \frac{a_{\mathrm{III}}^2 a_{\mathrm{I}}^2}{a_{\mathrm{II}}^2} + \frac{a_{\mathrm{I}}^2 a_{\mathrm{II}}^2}{a_{\mathrm{III}}^2}\right)$$

bestimmbar.

Die Halbachsenquadrate $(a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho$, $(a_{\mathrm{II}}^2)_\varrho$, $(a_{\mathrm{III}}^2)_\varrho$ des Hyperboloides $F_\varrho = F_{(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}})}$, welches die durch ein beliebiges Hyperboloid schon bestimmte Hydesche Fläche entlang ihrer reellen Kuspidalkurve $\mathfrak{C}_\varrho = \mathfrak{C}_\varrho'$ unter Berührung durchsetzt, sind

$$(a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho = | [(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})] = -\tfrac{1}{9}(\mathfrak{p}_{\mathrm{III}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} - 2\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - 2\mathfrak{p}_{\mathrm{III}}),$$
$$(\mathfrak{p} = \tfrac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}})$$

(vergl. Gleichung (7), (8))

$$(22) \qquad (a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho = \tfrac{1}{9}(\boldsymbol{d_1 - d_3})(\boldsymbol{d_1 - d_2}),$$

wegen Gleichung (8) auch

$$= \tfrac{1}{9}(2d_1^2 - d_1 d_3 - d_3^2) = \tfrac{1}{3}(d_1^2 - \varrho^2)$$

(vergl. Gleichung (15)) oder durch die e (Gleichung 13) ausgedrückt

$$= \tfrac{1}{9}(e_{\mathrm{I}}^2 - e_{\mathrm{II}}^2 - e_{\mathrm{III}}^2 + d_1^2)$$

oder mit Rücksicht auf die letzte Gleichung und (16)

$$(23) \qquad -\tfrac{1}{3}e_{\mathrm{I}}^2 - \tfrac{2}{9}(e_{\mathrm{I}}^2 + {}^2_{\mathrm{II}} + e_{\mathrm{III}}^2)\,^{1)},$$

$$= \tfrac{1}{3}e_{\mathrm{I}}^2 + \tfrac{2}{3}\varrho^2,$$

$$(24) \qquad = \tfrac{1}{9}\frac{1}{e_{\mathrm{I}}^2}(e_{\mathrm{I}}^2 - e_{\mathrm{III}}^2)(e_{\mathrm{I}}^2 - e_{\mathrm{II}}^2).$$

---

1) Die Gleichung (23) ist identisch mit der vorletzten Gleichung auf S. 801: $\alpha_1' = \frac{1}{3}K_1^2 - \frac{2}{3}\sum K^2$ der erwähnten Abhandlung Waelschs. Unsere Gleichung (20) ist identisch mit der dortigen Gleichung (12) S. 799. Vgl. S. 232, Anm. 1

$(a^2_{\mathrm{II}})_\varrho$ und $(a^2_{\mathrm{III}})_\varrho$ ergeben sich hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices. Halten wir mit diesen Gleichungen die folgenden aus (7) sich ergebenden zusammen (vgl. Gleichung 10)):

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} e^2_{\mathrm{I}} &= d_2 d_3 = \frac{1}{a^2_{\mathrm{I}}}(a^2_{\mathrm{I}} - a^2_{\mathrm{III}})(a^2_{\mathrm{I}} - a^2_{\mathrm{II}}) & < 0\\ e^2 = e^2_{\mathrm{II}} &= d_3 d_1 = \frac{1}{a^2_{\mathrm{II}}}(a^2_{\mathrm{II}} - a^2_{\mathrm{I}})(a^2_{\mathrm{II}} - a^2_{\mathrm{III}}) & > 0\\ e^2_{\mathrm{III}} &= d_1 d_2 = \frac{1}{a^2_{\mathrm{III}}}(a^2_{\mathrm{III}} - a^2_{\mathrm{II}})(a^2_{\mathrm{III}} - a^2_{\mathrm{I}}) & < 0 \end{aligned}\right\},$$

so ergibt sich der merkwürdige Umstand, daß die drei a_ϱ aus den e durch dieselben Gleichungen gewonnen werden, wie die e aus den a. Allerdings sind im Gegensatze zu den völlig freien Halbachsen a des (das System erst bestimmenden) Hyperboloides F die e schon der beschränkenden Bedingung (bei 16) $\frac{1}{e^2_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{e^2_{\mathrm{II}}} + \frac{1}{e^2_{\mathrm{III}}} = 0$ unterworfen. Mit Rücksicht auf den erwähnten übereinstimmenden Gleichungsbau von (24) und (25) kann man u. a. aus dieser beschränkenden Bedingung sofort auf die Geltung von

$$(26)\qquad \frac{1}{(a^2_{\mathrm{I}})_\varrho} + \frac{1}{(a^2_{\mathrm{II}})_\varrho} + \frac{1}{(a^2_{\mathrm{III}})_\varrho} = 0$$

schließen, ein Ergebnis, das übrigens auch sofort aus Gleichung (22) und (8) folgt.

Wie Gleichung (26) besagt, ist das Hyperboloid F_ϱ gleichseitig, d. h. absoluten Poldreiecken der unendlich fernen Ebene umschrieben. Es ist das einzige derartige Hyperboloid im gleichbündigen Systeme, da die unendlich fernen Kegelschnitte aller $F(\mathfrak{p})$ (Gleichung (4)) zum Büschel

$$(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})x^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}})y^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})z^2 = 0$$

gehören, was zu der Gleichseitigkeitsbedingung

$$(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}) + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}) + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = 0$$

führt und daher

$$\mathfrak{p} - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$$

zur *ausschließlichen* Folge hat.

Wir drücken noch die Halbachsen a_ϱ und F_ϱ in unveränderlicher Weise durch die Halbachsen a eines *beliebigen* gleichbündigen Hyperboloides F (etwa mit der Benutzung der Gleichungen (22) und (7) oder (23) und (25)) aus:

$$(27)\quad (a^2_{\mathrm{I}})_\varrho = \tfrac{2}{3}a^2_{\mathrm{I}} + \tfrac{1}{3}\frac{a_{\mathrm{II}}a_{\mathrm{III}}}{a_{\mathrm{I}}} - \tfrac{1}{9}\left[a^2_{\mathrm{I}} + a^2_{\mathrm{II}} + a^2_{\mathrm{III}} + 2\left(\frac{a^2_{\mathrm{II}}a^2_{\mathrm{III}}}{a^2_{\mathrm{I}}} + \frac{a^2_{\mathrm{III}}a^2_{\mathrm{I}}}{a^2_{\mathrm{II}}} + \frac{a^2_{\mathrm{I}}a^2_{\mathrm{II}}}{a^2_{\mathrm{III}}}\right)\right]$$

$(a^2_{II})_\varrho$ und $(a^2_{III})_\varrho$ folgen hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices.

Die Hydesche Brennfläche (6. Ordnung, 4. Klasse) hat als Einhüllende der gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ die aus Gleichung (1) oder $F(\mathfrak{p}) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial \mathfrak{p}} F(\mathfrak{p}) = 0$ (vgl. S. 220) folgende Gleichung[1]):

$$(28) \qquad 4A_2^3 - A_1^2 A_2^2 - 18 A_1 A_2 A_3 + 27 A_3^2 + 4 A_1^3 A_3 = 0,$$

wobei

$$A_1 = \mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} + \mathfrak{p}_{III},$$
$$A_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III} + \mathfrak{p}_{III}\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II},$$
$$A_3 = \mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 + \mathfrak{p}_{III} z^2 + \mathfrak{p}_I\mathfrak{p}_{II}\mathfrak{p}_{III}$$

gesetzt ist.

Da es an der Hydeschen Fläche nichts ändert[2]), wenn wir $\mathfrak{p}_{II} = 0$ nehmen und dementsprechend statt $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{III}$ zu schreiben haben $-d_3$ und d_1, so daß für A_1, A_2, A_3 zu setzen ist

$$(d_1 - d_3), \quad (x^2 + y^2 + z^2 - d_3 d_1 = u \text{ in Hydes Bezeichnung}),$$
$$(-d_3 x^2 + d_1 z^2 = -v \text{ in Hydes Bezeichnung}),$$

erhalten wir die Gleichungsform:

$$(29) \quad 4u^3 - (d_3 - d_1)^2 u^2 - 18(d_3 - d_1)uv + 27v^2 + 4(d_3 - d_1)^3 v = 0,$$

wobei

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - d_3 d_1$$

und

$$v = d_3 x^2 - d_1 z^2.$$

---

1) Vgl. etwa Gr. S. 101 im 48. Band dieser Zeitschrift, insbesondere aber die oben angeführten Abhandlungen Hydes und Waelschs. Ersterer schreibt an Stelle der von uns beibehaltenen Bezeichnungen

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_I,\ \mathfrak{p}_{II},\ \mathfrak{p}_{III};\quad A_1,\ A_2,\ A_3;\quad e_I,\ e_{II},\ e_{III};$$

bezl.

$$\mu,\ -a_1,\ -a_2,\ -a_3;\quad -\sum a,\ u,\ -v;\quad x_0,\ y_0,\ z_0;$$

die d bleiben; letzterer schreibt μ statt $\mathfrak{p}$, $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ für $a^2_I a^2_{II} a^2_{III}$; α_1' etc. für $(a^2_I)_\varrho$; K_1 für e_I etc.

Desmoulin (l. c. S. 86) benutzt die aus dem Cylinderbilde (S. 224, $x^3 = X$ etc.) ableitbare Darstellung der Brennfläche durch zwei Parameter, deren einer, unserem $\mathfrak{p}$ entsprechend, längs der Kurven $\mathfrak{C}$ (Gleichung (11)) der Brennfläche konstant ist, während der andere unverändert bleibt in den oberen Schnitten $z = \text{const.}$

2) Vgl. 3 (Anm. 2). $A_3 = -F(0) = 0$ ist die Gleichung jenes im gleichbündigen Systeme — was die Achsenkongruenz und die Hydesche Fläche anbelangt — beliebigen Hyperboloides $F(0)$, dessen willkürlicher Parameter als Null angenommen wird; $A_2 = 0$ (vgl. Gleichung (14)) ist die Gleichung der Orthogonalpunktkugel von $F(0)$.

Hierbei ist $u = 0$ die Gleichung der Orthogonalpunktkugel (über MN als Durchmesser, vgl. S. 212 und Gleichung (10)) des Ebenenpaares μ, ν mit der Gleichung $v = 0$.

Eine andere bemerkenswert einfache Form der Hydeschen Flächengleichung erhält man mit Bezug auf die Orthogonalpunkts- und Grenzpunktskugel $x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0$ des gleichseitigen Hyperboloides $F_\varrho = F_{(\frac{1}{3}\overline{\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}})}$ (vgl. Gleichung 22)

$$\begin{aligned}F_\varrho = {} & \tfrac{1}{3}(d_3 - d_2)x^2 + \tfrac{1}{3}(d_1 - d_3)y^2 + \tfrac{1}{3}(d_2 - d_1)z^2 \\ & + \tfrac{1}{27}(d_3 - d_2)(d_1 - d_3)(d_2 - d_1) = 0,\end{aligned} \tag{30}$$

indem man nicht wie oben $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$, sondern den zu F_ϱ gehörigen Parameter $\frac{1}{3}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = 0$ setzt, was die Substitutionen (vgl. Gleichung 7, 8)

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = -(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}) = d_2 - d_3 - 2\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{3}(d_2 - d_3), \quad \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{3}(d_3 - d_1), \quad \mathfrak{p}_{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{3}(d_1 - d_2)$$

also in der Gleichung 28 . . .

$$\begin{aligned}A_1 &= 0 \\ A_2 &= x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 \\ A_3 &= -F_\varrho\end{aligned}$$

(aus Gleichung 30) zur Folge hat. Deshalb erhält man die Gleichung der Hydeschen Fläche in der Form:

$$4(x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2)^3 + 27F_\varrho^2 = 0$$

oder

$$\left\{\begin{aligned}& 4(x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2)^3 \\ & \quad + 3[(d_3 - d_2)x^2 + (d_1 - d_3)y^2 + (d_2 - d_1)z^2 + \tfrac{1}{9}(d_3 - d_2)(d_1 - d_3)(d_2 - d_1)]^2 = 0 \\ & \text{wobei} \qquad 6\varrho^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \quad \text{und} \quad d_1 + d_2 + d_3 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Diese Gleichungsform ist wegen Gleichung (22) übereinstimmend mit der von Waelsch gegebenen Gestalt, in welche als Konstante nur die 3 Halbachsen des einzigen gleichseitigen unter den gleichbündigen Hyperboloiden des F_ϱ auftreten:

$$\left\{\begin{aligned}& 4\left(x^2 + y^2 + z^2 - \overline{(a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho + (a_{\mathrm{II}}^2)_\varrho + (a_{\mathrm{III}}^2)_\varrho}\right)^3 \\ & \qquad - 27(a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho(a_{\mathrm{II}}^2)_\varrho(a_{\mathrm{III}}^2)_\varrho\left(\frac{x^2}{(a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho} + \frac{y^2}{(a_{\mathrm{II}}^2)_\varrho} + \frac{z^2}{(a_{\mathrm{III}}^2)_\varrho} - 1\right)^2 = 0 \\ & \text{wobei} \qquad \frac{1}{(a_{\mathrm{I}}^2)_\varrho} + \frac{1}{(a_{\mathrm{II}}^2)_\varrho} + \frac{1}{(a_{\mathrm{III}}^2)_\varrho} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Auf der Brennfläche liegen von den koncyklischen sphärischen Kegelschnitten $\mathfrak{C}$ unseres Systems (Gleichung 11) alle jene, durch welche drei gleichbündige Hyperboloide $F_{(\mathfrak{p})}$ gehen, von denen zwei zusammenfallen: Bei jedem Punkte w „außerhalb" der Brennfläche (z. B. bei allen weiter als um ϱ vom Anfange p entfernten Punkten) und überhaupt bei den solche Punkte w enthaltenden $\mathfrak{C}$ ist von den drei hindurchgehenden gleichbündigen Hyperboloiden nur eines reell; dagegen führen durch jeden Punkt w „innerhalb" der Brennfläche (Fig. XI), d. i. innerhalb des von der Brennfläche begrenzten Raumteiles drei reelle gleichbündige Hyperboloide.

Alle drei fallen nur zusammen, wenn wir den reellen Punkt w auf der reellen Kuspidalkurve $\mathfrak{C}_\varrho$, der Orthogonalpunkts- und Grenzpunktskurve des gleichseitigen Hyperboloides F_ϱ annehmen.

Der absolute Kugelkreis ist ebenfalls eine (imaginäre) Kuspidalkurve der Brennfläche mit der unendlich fernen Ebene als Ort der Spitzentangenten. Die Fläche hat ferner in den Punkten M, N der Y-Achse mit den Koordinaten $\pm e = \pm e_{\mathrm{II}} = \pm \sqrt{d_3 d_1}$ reelle Knotenpunkte mit reellen Tangentialkegeln 2. Ordnung und genau entsprechende imaginäre Singularitäten in den imaginären Punkten $\pm e_{\mathrm{I}}$ der X-, und $\pm e_{\mathrm{III}}$ der Z-Achse.

Die durch die Y-Achse gehenden reellen μ, ν der Kreise $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ über M, N als Durchmesser (Fig. VI) sind singuläre Ebenen der Hydeschen Fläche und analoge imaginäre Ebenpaare gehen durch die X- und Z-Achse; die unendlich ferne Ebene durchsetzt die Fläche unter Berührung entlang der imaginären Kuspidalkurve, nämlich des absoluten Kugelkreises.

Die Gleichungen der beiden Tangentialkegel in den Knotenpunkten M und N ergeben sich durch vorübergehende Verlegung des Anfangspunktes in einen solchen Punkt und Berücksichtigung der Glieder niederster Dimension[1]) aus der Gleichung (29) als

$$(d_3 - d_1)(d_3 x^2 - d_1 z^2) - d_3 d_1 \left(y \mp \sqrt{d_3 d_1}\right)^2 = 0 \tag{33}$$

diese Kegel, welche die Doppelpunktstangenten

$$y = \pm z \sqrt{\frac{d_1 - d_3}{d_3}} \pm \sqrt{d_3 d_1} \tag{34}$$

des in Fig. XIIa konstruierten (und von da nach Fig. XI und in die früheren Figuren übertragenen) Hauptschnittes in der YZ-Ebene liefern, zeigen uns auch, auf welche Art sich die $\mathfrak{C}$ der

1) Vgl. Hyde p. 184 Gleichung (12).

Brennfläche in der Nähe ihrer Kreispaargestalt $\mathfrak{K}_{I}\,\mathfrak{K}_{II}$ (der Fig. XI und VI) ändern, was deshalb besonders interessant ist, weil diese Gestalt der $\mathfrak{C}$ unter ihren unendlich benachbarten Formen auf der Brennfläche die einzige ist, welche mit der $X\,Y$-Ebene reelle Punkte, nämlich gerade die Knotenpunkte M und N gemein hat. Die in der unmittelbaren Nachbarschaft eines solchen Knotenpunktes gelegenen Teile dieser $\mathfrak{C}$ der Brennfläche ändern sich nämlich wie die diesen Punkten unendlich benachbarten Teile der Schnitthyperbel des Tangentialkegels mit Ebenen, welche stets zur Y-Achse senkrecht belassen und hierbei durch den betreffenden Knoten verschoben werden.

Von den Spitzen aller ebenen Schnitte der Hydeschen Fläche liegen 4 auf $\mathfrak{C}_\varrho$ und haben dort die durch die Spur von F_ϱ bestimmte Spitzentangente; zwei imaginäre mit unendlich ferner Spitzentangente liegen in den Kreispunkten.

Eine allgemeine Eigenschaft der ebenen Schnitte durch den Mittelpunkt p wurde S. 216 erwähnt. Insbesondere die drei Hauptschnitte der Fläche (Fig. XIIa, b, c) haben auf jeder ihrer beiden Symmetrieachsen 2 Doppelpunkte, weshalb ihre Klasse nach der Plückerschen Formel gemäß Ordnungszahl 6, der Spitzenzahl 6 und der Doppelpunktszahl 4

$$6 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 4$$

wird, was mit der Klassenzahl des der Fläche entlang eines Hauptschnittes umschriebenen Cylinders und der Klassenzahl 4 der Fläche selbst[1]) übereinstimmt.

Da die unendlich ferne Gerade in jeder Ebene als Tangente in zwei Spitzen für zwei Tangenten durch einen beliebigen unendlich fernen Punkt dieser Ebene zählt, gibt es an jedem der drei Hauptschnitte im Endlichen nur *zwei* Tangenten von jeder beliebigen Richtung in seiner Ebene; die Konstruktion zweier solcher Tangenten samt ihren Berührungspunkten wird sich unmittelbar aus der in der Folge von uns angegebenen kinematischen Hauptschnittkonstruktion (Fig. XIII) ableiten lassen. Indessen können wir auf Grund des bisher Entwickelten, ohne vorgreifen zu müssen, uns nicht bloß die Hauptschnitte, sondern beliebige, z. B. ebene Schnitte der Hydeschen Brennfläche durch beliebig viele Punkte samt deren Tangenten konstruieren als Einhüllende der Spuren der entlang $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ gelegenen schmalen Flächenstreifen der gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$; so z. B. liefern in den Figuren XII a, b, c die auf der Orthogonalpunktskugel gelegenen Kreise vom Radius $r\,(\mathfrak{p})$ bez. jene vom Radius $R\,(\mathfrak{p})$ auf der Spur von $F(\mathfrak{p})$ die Spurpunkte

---

1) Vgl. z. B. Gr. S. 101 im 48. Bd. Anm. 1.

von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ bez. $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$, also Punkte des Hauptschnittes, und die Hauptschnittstangente der Hydeschen Fläche in jedem Spurpunkte von $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ ist die Tangente der Hyperboloidspur $F(\mathfrak{p})$, während die Tangenten in den Spurpunkten von $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ ebenso durch die Spur des Hyperboloides $F(\mathfrak{p}')$ erhalten werden könnten, welches (Gleichung 18) zu $\mathfrak{p}' = \frac{1}{2}(-\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ gehört. Lassen wir $\mathfrak{p}$ sich ändern, so erhalten wir beliebig viele Punkte des Schnittes der Hydeschen Fläche samt ihren Tangenten.

Die folgende *kinematische Konstruktion* der Hauptschnitte der Hydeschen Brennfläche beruht auf der von uns gefundenen Parameterdarstellung jedes der drei Hauptschnitte; der zweite Hauptschnitt in der Ebene $y = 0$ z. B. hat gemäß Gleichung (29), wenn wir die Hauptthalbmesser der Hydeschen Fläche mit l_1, l_2, l_3 bezeichnen, d. h.

$$\frac{1}{2}d_1 = l_1, \quad \frac{1}{2}d_2 = l_2, \quad \frac{1}{2}d_3 = l_3 \tag{35}$$

setzen, (wobei die Gleichung (8) die Beziehung

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0 \tag{36}$$

als Folge nach sich zieht) die Gleichung:

$$\begin{aligned} &(x^2 + z^2 - 4l^3l_1)^3 - (l_3 - l_1)^2(x^2 + z^2 - 4l_3l_1)^2 \\ &\quad - 18(l_3 - l_1)(x^2 + z^2 - 4l_3l_1)(l_3x^2 - l_1z^2) \\ &\quad + 27(l_3x^2 - l_1z^2)^2 + 16(l_3 - l_1)^3(l_3x^2 - l_1z^2) = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

für welche wir die Parameterdarstellung

$$\left\{\begin{aligned} x &= (l_1 + l_3)\cos\alpha - (l_3\cos^2\alpha - l_1\sin^2\alpha)\cos\alpha \\ z &= (l_1 + l_3)\sin\alpha + (l_3\cos^2\alpha - l_1\sin^2\alpha)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{37'}$$

anzugeben im stande sind. Davon, daß diese Darstellung zutrifft, kann man sich durch die Rechnung[1]) überzeugen.

---

1) Aus 37′ stellen sich folgende Funktionen u und v rational durch einen Parameter s dar:

$\underline{u = x^2 + z^2 - 4\,l_1\,l_3} = (l_3 - l_1)^2 - 2\,(l_3 + l_1)\,s\,\cos 2\,\alpha + s^2$, wobei

$s = l_3\cos^2\alpha - l_1\sin^2\alpha$ gesetzt ist.

(Bezügl. der geom. Bedeutung von s in der folgenden kinem. Konstr. vergl. Fig. XIII und S. 239: $s = \overline{CP}$)

$$\begin{aligned} 2s &= (l_3 - l_1) + (l_3 + l_1)\cos 2\alpha \\ u &= (l_3 - l_1)^2 + 2(l_3 - l_1)s - 3s^2. \end{aligned} \tag{a}$$

Der Parameterdarstellung 37′ und den analogen der anderen Hauptschnitte stellen wir als geometrische Deutung die folgende kinematische Konstruktion der Hydeschen Hauptschnitte an die Seite, wobei wir (zum nachherigen Beweise der Übereinstimmung mit 37′) den 2. Hauptschnitt nur deshalb bevorzugen, um einen bestimmten Fall (Fig. XIII) vor Augen zu haben.

Ebenso folgt

$$\frac{v}{2} = l_3 x^2 - l_1 z^2 = (l_3 + l_1)^2 s - 2(l_3 + l_1) s (l_3 \cos^2\alpha + l_1 \sin^2\alpha) + s^3; \quad \text{nun ist}$$

$$\left.\begin{cases} s + l_1 = \quad (l_3 + l_1)\cos^2\alpha \\ s - l_3 = -(l_3 + l_1)\sin^2\alpha \end{cases}\right\} \text{ mithin}$$

$$(l_3 \cos^2\alpha + l_1 \sin^2\alpha) = l_3 \frac{s + l_1}{l_3 + l_1} - l_1 \frac{s - l_3}{l_3 - l_1} = \frac{2 l_3 l_1 + (l_3 - l_1) s}{l_3 + l_1}; \text{ also}$$

$$\frac{v}{2} = (l_3 + l_1)^2 s + s^3 - 2s[2 l_3 l_1 + (l_3 - l_1) s] = s[s - (l_3 - l_1)]^2. \tag{b}$$

Zur Elimination von s aus (a) und (b) haben wir etwa nach (a)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{1}{3}\left(l_3 - l_1 \pm \sqrt{4(l_3 - l_1)^2 - 3u}\right) \\ s - (l_3 - l_1) &= \frac{1}{3}\left[-2(l_3 - l_1) \pm \sqrt{4(l_3 - l_1)^2 - 3u}\right] \end{aligned}\right\}$$

$$[s-(l_3-l_1)]^2 = \frac{4}{9}(l_3-l_1)^2 \mp \frac{4}{9}(l_3 - l_1)\sqrt{4(l_3 - l_1)^2 - 3u} + \frac{1}{9}[4(l_3 - l_1)^2 - 3u]$$

$$= \frac{1}{9}[8(l_3 - l_1)^2 - 3u] \mp \frac{4}{9}(l_3 - l_1)\sqrt{4(l_3 - l_1)^2 - 3u};$$

dies in (b) gibt

$$v = \frac{2}{27}(l_3 - l_1)[8(l_3 - l_1)^2 - 3u] - \frac{8}{27}(l_3 - l_1)[4(l_3 - l_1)^2 - 3u]$$

$$\pm \left\{\frac{2}{27}[8(l_3 - l_1)^2 - 3u] - \frac{8}{27}(l_3 - l_1)^2\right\}\sqrt{4(l_3 - l_1)^2 - 3u}$$

$$\left\{v - \frac{2}{27}(l_3 - l_1)[-8(l_3 - l_1)^2 + 9u]\right\}^2 = \frac{1}{27^2}[8(l_3 - l_1)^2 - 6u]^2[4(l_3 - l_1)^2 - 3u]$$

$$= \frac{4}{27^2}[4(l_3 - l_1)^2 - 3u]^3$$

$$\left\{v - \frac{2}{3}(l_3 - l_1)u + \frac{16}{27}(l_3 - l_1)^3\right\}^2$$

$$- \frac{4}{27^2}\{64(l_3 - l_1)^6 - 3\cdot 4^2\cdot 3(l_3 - l_1)^4 u + 3\cdot 4\cdot 3^2(l_3 - l_1)^2 u^2 - 27u^3\} = 0$$

$$\frac{4}{27}u^3 - \frac{4}{27}(l_3 - l_1)^2 u^2 + v^2 - \frac{36}{27}(l_3 - l_1)uv + \frac{32}{27}(l_3 - l_1)^3 v = 0$$

$$4u^3 - 4(l_3 - l_1)^2 u^2 + 27v^2 - 36(l_3 - l_1)uv + 32(l_3 - l_1)^3 v = 0,$$

d. h. wir erhalten wirklich, indem wir für u und v ihre obigen Werte $x^2 + z^2 - l_1 l_3$ und $2(l_3 x^2 - l_1 z^2)$ einsetzen, die Gleichung (37) des 2. Hauptschnittes.

„Auf einer Strecke konstanter Länge $(l_1 + l_3)$ denke man sich drei Punkte vermerkt, nämlich 1. den Anfangspunkt, 2. den von ihm um l_1 entfernten Punkt und 3. den Endpunkt; bezeichnet man diese drei Punkte der Reihe nach mit

I, O, III...(Gleitstück zur Konstruktion des II. Hauptschnittes in Fig. XIII),
O, I, II...(„ „ „ „ III. „ bei „ „),
II, III, O...(„ „ „ „ I. „ „ „ „),

und denkt sich von jeder solchen Strecke, dem „Gleitstück" des betreffenden Hauptschnittes, eine zu ihm senkrechte und in der Hauptschnittsebene verbleibende Gerade t starr mitgeführt, so umhüllt t den betreffenden Hydeschen Hauptschnitt, falls der Punkt

III des Gleitstückes gezwungen wird, auf der Spur der Ebene $z = 0$
I „ „ „ „ „ „ „ „ „ $x = 0$
II „ „ „ „ „ „ „ „ „ $y = 0$

zu gleiten."

Mit anderen Worten: „Zur Konstruktion des

II. Hauptschnittes gleite das zugehörige Gleitstück *IOIII* mit *III* auf der X-, und mit *I* auf der Z-Achse,

III. Hauptschnittes gleite das zugehörige Gleitstück *OIII* mit *I* auf der Y-, und mit *II* auf der X-Achse,

I. Hauptschnittes gleite das zugehörige Gleitstück *IIIIIO* mit *II* auf der Z-, und mit *III* auf der Y-Achse;

dann umhüllt die senkrecht zum Gleitstücke in O befestigte und in der betreffenden Hauptschnittsebene mitgeführte Gerade t den Hydeschen Hauptschnitt; oder, was dasselbe ist, es nimmt die durch O zum Gleitstücke senkrecht angebrachte Ebene der Reihe nach alle Lagen der Tangentialebene der Hydeschen Fläche in den Punkten dieses Hauptschnittes an:"

In der Tat, bezeichnen wir in der Fig. XIII den Winkel des Gleitstückes und der x-Achse mit α und denken uns zu einer beliebigen Lage des Gleitstückes *IIII* das Momentanzentrum C als Schnitt des Lotes durch *III* zur x-Achse und des Lotes durch *I* zur z-Achse konstruiert, so wird der Fußpunkt $P = P\ (x, z)$ des von C auf t gefällten Lotes die Stelle angeben, in welcher t die von ihr umhüllte Kurve berührt; die Gleichung der letzteren ergibt sich daraus, daß in der Figur XIII

$$\overline{pIII} = (l_1 + l_3)\cos\alpha, \quad \overline{IIIC} = (l_1 + l_3)\sin\alpha,$$

also

$$\overline{CP} = \overline{QP} - \overline{QC} = l_3 - \overline{IIIC}\sin\alpha = l_3 - (l_1 + l_3)\sin^2\alpha = (l_3\cos^2\alpha - l_1\sin^2\alpha)$$

und demgemäß

$$x = \overline{pIII} - \overline{CP}\cos\alpha, \quad z = \overline{IIIC} + \overline{CP}\sin\alpha,$$

daher wirklich

$$x = (l_1 + l_3)\cos\alpha - (l_3\cos^2\alpha - l_1\sin^2\alpha)\cos\alpha, \quad z = (l_1 + l_3)\sin\alpha + (l_3\cos^2\alpha - l_1\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

wird, in vollster Übereinstimmung mit der Form 37′ der Hauptschnittsgleichung 37.

Eine andere, allerdings *nur* für den II. Hauptabschnitt der Hydeschen Fläche *reelle* Konstruktion ist noch hervorzuheben:

Die Koordinaten der von uns mit 3 und 1 zu bezeichnenden Schnittpunkte der starr am Gleitstücke $IIII$ in O angebrachten Geraden t $(x\cos\alpha - z\sin\alpha = l_1\cos^2\alpha - l_3\sin^2\alpha)$ mit dem um das Rechteck $pIIICI$ der Figur XIII beschriebenen Kreise $\left(x\cos\alpha + z\sin\alpha = \frac{x^2+z^2}{l_1+l_3}\right)$ genügen der Gleichung der beiden festen unter dem Winkel $\pm\omega = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{l_3}{l_1}}$ gegen die X-Achse gelegten und den II. Hauptschnitt in den Entfernungen $\pm e_{II} = \pm e = \pm\sqrt{d_3 d_1} = \pm 2\sqrt{l_3 l_1}$ vom Anfange berührenden Spuren

$$x^2 l_3 - z^2 l_1 = 0$$

der cyklichen Ebenen μ und ν; daher *liegen* und *bleiben* die auf t *starr* gedachten Punkte 3 und 1 bei jeder starren Elementarbewegung des Gleitstückes $IIII$ um jedes Momentanzentrum C (da $C3$ stets zu μ, $C1$ zu ν senkrecht steht) *fortwährend* Punkte dieser beiden Spuren. Die hiernach konstante Länge der Strecke $\overline{31}$ ist, wie man aus ihrer Speziallage entweder in μ oder ν oder parallel zu einer der beiden Hauptachsen ersehen kann, gleich $e_{II} = 2\sqrt{l_3 l_1}$.

Dies führt zur interessanten Konstruktion des II. Hauptschnittes als *Enveloppe einer Geraden t*, deren *konstantes Stück von der Länge* $e_{II}\left(= 2\sqrt{l_3 l_1} = 2 \times \overline{O3} = 2 \times \overline{O1}\right)$ mit seinen Endpunkten (3 und 1) auf den Spuren der Ebenen μ und ν gleitet. Diese Spuren werden zu (vom Mittelpunkte p ausgehenden) reellen *Doppeltangenten* des *Hauptschnittes,* welcher hienach als *„schiefe Astrois“* bezeichnet werden könnte.[1])

1) Vgl. Gino Loria „Spezielle ebene Kurven“, S. 224 Fig. 57a in der 1902 bei Teubner, Leipzig, erschienen deutschen Ausgabe. Den Namen einer „schiefen Astrois“ auch auf den mit zwei reellen Doppelpunkten versehenen I. Hauptschnitt anzuwenden, dürfte *vielleicht,* ihn aber auch noch auf den ovalen und nicht mit reellen Spitzen versehenen III. Hauptschnitt mit seinen isolierten Punkten M und N anzuwenden, dürfte schwerlich *Anklang finden,* obgleich für diese Haupt-

Besondere Fälle.

Von besonderen Fällen sind nur zwei hervorzuheben, jener bei welchem $d_3 = d_1$, und der andere, bei dem $d_3 = 0$ wird.

1.

$$\boldsymbol{d_3 = d_1}$$

$$\left(\begin{array}{ll} l_3 = l_1, & e = \pm d_1 = \mp \tfrac{1}{2} d_2 = \mp l_2 \\ \overline{pZ} = p\Xi, & \overline{pM} = \overline{pN} = pH \end{array}\right).$$

Die cyklischen Ebenen μ, ν werden Winkelhalbierende der durch die y-Achse gelegten Koordinatenebenen und stellen selbst neue Symmetrieebenen vor und zwar sowohl für die bezüglich μ und ν koncyklischen Kurven $\mathfrak{C}$, als auch für die Parameterfläche $(\mathfrak{P})$, die Waelschischen einander ergänzenden Achsenkongruenzen $K\,(\frac{\varrho}{r})$ des Schraubenbündels und deren Hydesche Brennfläche; letztere wird zur

Sternballfläche Hydes:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 4l_1)^3 + 27 l_1^2 (x^2 + z^2) = 0. \quad \text{(Fig. XIV.)}$$

Die Knotenpunkte M und N sind in die Scheitelpunkte $H = H_\beta$ der y-Achse $(0, \mp l_2, 0)$ gerückt, ihre Tangentialkegel (Gleichung 33) fallen als doppelt zu zählende Ebenen mit der beim betreffenden Scheitel H_β ohnedies zu $y = 0$ parallelen Tangentialebene zusammen und diese Hydesche Fläche hat in diesen H_β dreifache singuläre Punkte eigener Art:

Während jede Gerade durch einen solchen Punkt *bei* demselben 3 Punkte mit der Fläche gemein hat, haben die in der zugehörigen Tangentialebene $(y = \mp l_2)$ liegenden Strahlen durch H_β 4 Punkte mit der Fläche gemeinsam, ja sogar zwei von diesen Strahlen der Tangentialebene, nämlich die in die neuen Symmetrieebenen μ, ν $(z \mp x = 0)$ fallenden Geraden

$$f_1,\ \varphi_1 \text{ durch den Punkt } M(y = -l_2, \quad z \pm x = 0)$$
$$f_2,\ \varphi_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad N(y = +l_2, \quad z \mp x = 0)$$

---

schnittsgestalten nicht bloß die früher von uns angegebene stets reelle Konstruktion, sondern auch jene der eben beschriebenen analoge gilt, nämlich als Enveloppe einer Gleitstrecke konstanter Länge (e_{I}, bezw. e_{III}), deren (nicht reelle) Endpunkte auf den Spuren der zu μ und ν analogen (bei der Hydeschen Fläche als singulär auftretenden und durch die X-, bezw. Z-Achse gelegten) imaginären Ebenenpaare gleiten. Die Bezeichnung als *„Parastroiden“* (Parallelkurven einer regulären Astrois, G. Loria S. 651) ist für alle drei Hauptschnittsgestalten zu empfehlen.

haben sechs zusammenfallende Punkte an dieser Stelle mit der Fläche gemein, also sonst überhaupt keinen weiteren mehr. Diese ausgezeichneten Geraden f_1, φ_1 durch M und f_2, φ_2 durch N sind nach unseren Entwicklungen die gemeinsamen Fokalachsen aller gleichbündigen Hyperboloide $F(\varphi)$, deren cyklische Ebenen μ, ν sind, und wir können den Hydeschen Sternball definieren als Hüllfläche jener Hyperboloide $F(\varphi)$, welche 1. die in zwei parallelen Ebenen liegenden 4 *Geraden*, welche die Spuren eines zu beiden Ebenen und untereinander senkrechten Ebenenpaares μ, ν bilden, zu gemeinsamen Fokalachsen haben und 2. durch die Kreispunkte von μ und ν hindurchgehen.

Die Knoten H_β sind in ihrer Tangentialebene ($y = \mp l_2$) isoliert und die einzigen reellen Punkte der Schnittkurve dieser Tangentialebene mit der Fläche. H_β ist hierbei vierfacher Punkt dieser Schnittkurve, wobei dessen vier Tangenten paarweise in den Spuren f und φ von μ und ν zusammenfallen; sowohl f als φ sind Grenzlagen von Tangenten zweier zusammengerückter Spitzen; die reelle *Kuspidalkurve* $\mathfrak{C}_\varrho$ des Hydeschen Sternballes besteht nämlich aus den beiden Kreisen $\mathfrak{K}$ der Ebenen μ, ν über MN als Durchmesser, wobei μ und ν den Ort der Spitzentangente bilden; denken wir uns also eine Ebene $y =$ const. der Lage der Tangentialebene ($y = \mp l_2$) in einem Punkte H_β (M oder N) genähert, so kann man sich deutlich vorstellen, wie in ihm zwei Spitzen, nämlich die Spurpunkte eines der beiden Kreise $\mathfrak{K}$ (mit der Spitzentangente in μ, welche später zu f wird), und ebenso zwei andere Spitzen, die Spurpunkte des anderen Kreises $\mathfrak{K}$ (mit der Spitzentangente in ν, welche später zu φ wird) zusammenrücken.

Der II. *Hauptschnitt des Sternballes*, infolge der Spezialisierung $l_3 = l_1$ darstellbar durch:

$$\begin{Bmatrix} x = l_1 \cos\alpha\,(3 - 2\cos^2\alpha) \\ z = l_1 \sin\alpha\,(3 - 2\sin^2\alpha) \end{Bmatrix}$$

(aus Gleichung (37′) läßt in dem gegen x, z um 45^0 gedrehten Koordinatensysteme mit den Achsen ξ und ζ in den Spurenlagen von μ, ν entsprechend:

$$\begin{Bmatrix} x = \dfrac{\xi + \zeta}{\sqrt{2}} \\ z = \dfrac{-\xi + \zeta}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

bei Einführung des Winkels $\alpha' = 45^0 + \alpha$

$$\begin{Bmatrix} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha' + \cos\alpha') \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha' - \cos\alpha') \end{Bmatrix}$$

auch die Parameterdarstellung

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = 2\,l_1 \cos^3\alpha' \\ \zeta = 2\,l_1 \sin^3\alpha' \end{array}\right\}$$

zu, ist also *die reguläre Astrois*

$$\xi^{\frac{2}{3}} + \zeta^{\frac{2}{3}} = (2\,l_1)^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Astrois kann bekanntlich auch als Einhüllende einer Strecke $\overline{31}$ konstanter Länge ($\pm\, 2\mathfrak{l}_1 = \mp\, l_2$) erzeugt werden, deren Endpunkte 3 und 1 bezüglich auf der ξ- und ζ-Achse gleiten, wie auch in der Fig. XVb angedeutet wurde; α' ist hierbei der veränderliche Winkel dieser Strecke mit der ξ-Achse.

Der I. und der diesem kongruente III. Hauptschnitt der Hydeschen Sternballfläche (Fig. XVa = XIVc, durch Spezialisierung ($l_3 = l_1$) der auf S. 238 gefundenen Konstruktion ermittelt) ist ein zweifach symmetrisches Oval, dessen auf die y-Achse fallende Hauptachse MN doppelt so groß ist als die andere; dieses Oval ist besonders wegen seines Verhaltens in seinen Hauptscheiteln H_β, den dreifachen Punkten M und N interessant. In diesen H_β hat jede beliebige durchgelegte Gerade der Hauptschnittsebene drei Punkte mit dem Ovale gemein außer der zur Y-Achse senkrechten Tangente, welcher vier solche Punkte in H_β zukommen.

Die bei diesen H_β auftretende Singularität[1]) stellt den Übergang her zwischen den Formen Fig. XIIa des I. Hauptschnittes und Fig. XIIc des III. Hauptschnittes der Hydeschen Brennfläche vom allgemeinen Typus Fig. XI; in den H_β der Fig. XIVac sind zwei Spitzen und ein Doppelpunkt auf jene eigentümliche Weise zusammengerückt, welche wir dort skizziert haben; denkt man sich dieses Hauptschnittoval des Hydeschen Sternballes durch einen wandernden Punkt erzeugt, so darf man die Vorstellung annehmen, daß derselbe bei jedem der Hauptscheitel H_β erst weiter wandere, nachdem er ein unendlich kleines Stück zurückgekehrt war.

Denkt man sich die obigen Hauptschnitte als Leitlinien von (bezüglich μ und ν) koncyklischen Kurven $\mathfrak{C}$, so geben diese auf der Fläche stetig in einander übergehenden Kurven ein plastisches Bild des Hydeschen Sternballes mit seinem reellen Kreispaare $\mathfrak{K}$ als Kuspidalkurve.

1) Vgl. in Salmon-Fiedlers Raumgeometrie II (1880) die bei β in Artikel 502 beschriebenen und auch in Artikel 513 erwähnten besonderen Singularitäten.

Alle Sternballflächen sind einander ähnlich. Dasselbe gilt auch von den Hydeschen Rotationsflächen, auf welche wir nunmehr stoßen werden, wenn wir den Sonderfall $d_3 = 0$ untersuchen, welcher sich vom Falle $d_1 = 0$ nur durch die vertauschte Bezeichnung der Z- und X-Achse unterscheidet.

2.

$$\boldsymbol{d_3 = 0}$$

$$(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}, \quad \boldsymbol{l_3 = 0}, \quad l_1 = -l_2, \quad e = 0, \quad Z = M = N = p).$$

In diesem Falle treten die cyklischen Ebenen μ, ν in $z = 0$ zusammen, die koncyklischen Kurven $\mathfrak{C}$ werden Kreispaare um die Z-Achse und alle gleichbündigen einschaligen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ Drehungsflächen um die Z-Achse, wobei jeder Drehungskegel um die Z-Achse einmal für ein bestimmtes $F(\mathfrak{p})$ als Leitkegel auftritt; die einander ergänzenden Kongruenzen $K\left(\frac{g}{\Gamma}\right)$ Waelschs kann man durch Drehung der Erzeugenden des Plückerschen Cylindroides[1]):

$$(x^2 + z^2)\, y \mp 2 l_1 x z = 0$$

(des Achsenortes eines im Bündel R_{III} enthaltenen Schraubenbüschels R_{II}) um die Z-Achse, eine seiner beiden sich im Hauptpunkte p senkrecht schneidenden Kanten gewinnen.

Hierbei ist zu bemerken, daß die unter einem *größeren* Winkel als 45^0 gegen die xy-Ebene geneigten Cylindroidkanten jene gleichbündigen Hyperboloide beschreiben, welche die sich ergebende Brennfläche, die *Hydesche Drehungsfläche*: (Fig. XV)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - l_1^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 18 l_1^2 (x^2 + y^2 + z^2) z^2 + 27 l_1^2 z^4 + 16 l_1^4 z^2 = 0$$

(aus Gleichung (29), $d_1 = 2 l_1$) in *imaginären* Kreispaaren berühren. Dies kann man unseren obigen Ausführungen aus der für $d_3 = 0$ spezialisierten Figur III entnehmen, da das Intervall für $\mathfrak{p}$, falls die Berührung entlang reeller (zur xy-Ebene symmetrischen Kreise) $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$ stattfinden soll, wegen $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$:

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} < \mathfrak{p} < \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$$

(vgl. S. 223) wird. Für Parameter $\mathfrak{p} > \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ bleibt in der besonderen gemäß $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{III}}$ sich ergebenden Figur III die zu dem (dort mit K_{II} zusammenfallenden) Kreise K_{I} gehörige Ordinate kleiner als

1) Vgl. Ball oder Zindler, auch Gr. im 48. Bd. dieser Zeitschrift, S. 72.

16*

die zur Ellipse $E(r)$ gehörige, d. h. es bleibt der Radius $r_{(\mathfrak{p})}$ der Orthogonalpunktskugel, welche $\mathfrak{C}_{(\mathfrak{p})}$ auf $F'(\mathfrak{p})$ ausschneidet, kleiner als die reelle Halbachse des zugehörigen gleichbündigen Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$.

Für $\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{p}_{\mathrm{III}})$ erhält man als Grenzlage jenes gleichbündige Hyperboloid mit einer gleichseitigen Hyperbel als Meridianschnitt, welches von den Zwickpunktskanten des obigen Cylindroides beschrieben wird und die Hydesche Brennfläche entlang ihres in $(z = 0)$ gelegenen Äquatorialkreises $(x^2 + y^2 = l_1^2)$ so innig berührt, daß beide Flächen dort vier benachbarte Kreise gemein haben.

Jede gegen die xy-Ebene unter einem kleineren Winkel als dem (zu den Zwickpunktskanten gehörigen) Winkel 45^0 geneigte Kante g des obigen Cylindroides berührt dagegen die Hydesche Brennfläche in zwei reellen Punkten, welche bei der Rotation von g um die Z-Achse auf einem Kreispaare $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ wandern und durchdringt diese Brenn- und Grenzfläche außerdem noch in zwei Punkten, welche bei der Drehung das Kreispaar $\mathfrak{C}'(\mathfrak{p})$ der Brennfläche beschreiben, welches den Restschnitt des durch Drehung von g erzeugten gleichbündigen Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Brennfläche bildet.

Während für die gleichbündigen Rotationshyperboloide $F(\mathfrak{p})$ um die z-Achse, deren Erzeugende mit der letzteren Winkel einschließen, welche kleiner sind als 45^0, das Berührungskreispaar $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ imaginär wird, bleibt der Restschnitt jedes reellen Hyperboloides $F(\mathfrak{p})$ mit der Brennfläche, das Kreispaar $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ immer reell.

Die reellen Knotenpunkte M und N der Hydeschen Fläche, die Zentra der hier zusammenfallenden reellen Basisbüschel, sind im Anfange p zusammengetreten, und die Hydesche Drehungsfläche hat in diesem ihren Mittelpunkte einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt, close-point) mit der doppelt zu zählenden xy-Ebene als Tangentialebene; außerdem sind die imaginären Knotenpunkte auf der z-Achse $(\pm 2 l_1 \sqrt{-1})$ bemerkenswert.

Die reelle *Kuspidalkurve* unserer Hydeschen Fläche, das Kreispaar $\mathfrak{C}_\varrho$, ist der Schnitt des gleichseitigen Rotationshyperboloides F_ϱ

$$F_\varrho \qquad x^2 + y^2 - 2z^2 = \tfrac{8}{9} l_1^2$$

mit seiner Orthogonalpunkts- und Grenzpunktskugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 = \tfrac{4}{3} l_1^2,$$

hat also die Gleichungen

$$\mathfrak{C}_\varrho \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \tfrac{8}{9}\varrho^2 = \tfrac{32}{27} l_1^2 \\ z &= \pm \tfrac{1}{3}\varrho = \pm \tfrac{2}{9} l_1 \sqrt{3} \end{aligned} \right\}.$$

Die Drehungskegel, welche dem gleichseitigen Hyperboloide F_ϱ und der Hydeschen Brennfläche entlang ihrer Kuspidalkurve, des Kreispaares $\mathfrak{C}_\varrho$ angelegt sind, haben die Schnittpunkte $(\mp \varrho)$ der Z-Achse mit der obigen Kugel des Spitzenkreispaares $\mathfrak{C}_\varrho$ zu Scheiteln.

Die Meridiankurve (Figur XV)

$$(x^2 + z^2)^3 - l_1^2 (x^2 + z^2)^2 - 18 l_1^2 (x^2 + z^2) z^2 + 27 l_1^2 z^4 + 16 l_1^4 z^2 = 0$$

läßt gemäß der Gleichung (37) die Parameterdarstellung:

$$\left\{\begin{aligned} x &= l_1 \cos\alpha\,(1 + \sin^2\alpha) \\ z &= l_1 \sin\alpha \cos^2\alpha \end{aligned}\right\}$$

und jene hiermit verbundene kinematische Konstruktion zu, die (als besonderer Fall in der S. 238 beschriebenen enthalten ist und welche) wir sogleich als Konstruktion der Hydeschen Drehungsfläche beschreiben:

„Man lasse eine Strecke OI konstanter Länge l_1 sich mit ihrem einen Endpunkte O beliebig in der xy-Ebene, dagegen mit dem anderen Endpunkte I nur beliebig auf der z-Achse bewegen, wobei sie stets eine in O angebrachte zu ihr senkrecht bleibende Ebene Z starr mitführe, dann umhüllt die Ebene t die Hydesche Rotationsfläche.“

In der Meridianschnittfigur XV ist gezeigt, wie mit Hilfe des Momentanzentrums C für eine Bewegung des Gleitstückes OI in der Meridianebene zu jeder Tangentialebene t der Berührungspunkt P zu finden ist.

Wird der Winkel α des Gleitstückes mit der xy-Ebene so gewählt, daß $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$ wird, so fällt P auf einen der beiden (die Kuspidalkurve bildenden) Kreise $\mathfrak{C}_\varrho$.

Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad.

Von J. HORN in Clausthal.

(Zweiter Aufsatz.)

In dem Aufsatze, welcher unter gleichem Titel im 47. Bd. dieser Zeitschrift, S. 400—428, erschienen ist, habe ich kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrade unter der Einwirkung von Kräften untersucht, welche von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, aber nicht als lineare Funktionen betrachtet werden. Insbesondere handelte es sich im ersten Abschnitt des erwähnten Aufsatzes[1]) um die periodischen Schwingungen, welche durch Kräfte veranlaßt werden, die lediglich von den Koordinaten abhängen.

Die Untersuchungen dieses ersten Abschnittes sollen in der gegenwärtigen Arbeit eingehender durchgeführt werden. Es handelt sich teils um die Herleitung weiterer Formeln, namentlich solcher, die zur unmittelbaren Anwendung geeignet sind, teils um die Berechnung weiterer Glieder in den früher aufgestellten Reihen, teils um eine andere Methode zur Behandlung des Gegenstandes.

Die Veranlassung zur Wiederaufnahme dieser Untersuchungen boten Arbeiten von F. Richarz, P. Schulze und F. A. Schulze[2]), welche einige hierher gehörige Formeln mathematisch abgeleitet, auf physikalische Vorgänge (Schwingungen des Unifilarmagnetometers und der magnetischen Wage) angewandt und experimentell geprüft haben.[3])

§ 1.

Die in I, §§ 1—4 *gegebenen Reihenentwickelungen sollen mit einer größeren Anzahl ausgerechneter Glieder angeschrieben werden,* ohne daß auf die Herleitung noch einmal eingegangen wird. Zur Herleitung der

1) Hinweise auf den früheren Aufsatz werden im folgenden durch I unter Hinzufügung des § gegeben.

2) F. Richarz und P. Schulze, asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts (Archives néerlandaises, Serie 2, Bd. 6, 1901; Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 8, 1902). — P. Schulze, Inauguraldissertation mit demselben Titel, Greifswald 1901. — P. Schulze, über das Unifilarmagnetometer (Ann. d. Phys. Bd. 8, 1902). — F. A. Schulze, die Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen (Ann. d. Phys. Bd. 9, 1902).

3) Vgl. § 6 des vorliegenden Aufsatzes.

Formeln kann auch die in § 4 und § 5 des gegenwärtigen Aufsatzes angegebene Methode benutzt werden.

Die Lage eines Systems mit von der Zeit t unabhängigen Verbindungen sei durch eine einzige Koordinate x bestimmt. Durch passende Wahl von x und der Einheit der Zeit t[1]) sei die lebendige Kraft auf die Form

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

die von den Kräften bei der Verrückung dx geleistete Arbeit auf die Form Qdx

$$Q = -x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

gebracht, und zwar sei Q eine ganze Funktion von x oder eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine Werte von $|x|$ konvergiert. Dann lautet die Differentialgleichung der Bewegung (vgl. I, § 1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots.$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ verschwindet in den beiden äußersten Lagen $x = c$ und $x = \bar{c}$, zwischen welchen sich das System hin und her bewegt; nimmt man c als gegeben an, so ist

$$\bar{c} = -c + \tfrac{2}{3}a_2 c^2 - \tfrac{4}{9}a_2^2 c^3 + \left(\tfrac{16}{27}a_2^3 + \tfrac{2}{3}a_2 a_3 + \tfrac{2}{5}a_4\right)c^4 + \cdots.$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ ist in der Gleichgewichtslage $x = 0$ gleich $\pm c'$ und zwar ist

$$c' = -c - \tfrac{1}{3}a_2 c^2 - \left(\tfrac{1}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)c^3 - \left(\tfrac{1}{54}a_2^3 + \tfrac{1}{12}a_2 a_3 + \tfrac{1}{5}a_4\right)c^4 + \cdots.$$

Die Dauer ω einer einfachen Schwingung (die halbe Periode der Bewegung) wird dargestellt durch

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)c^2 - \left(\tfrac{5}{18}a_2^3 + \tfrac{1}{4}a_2 a_3\right)c^3$$
$$+ \left(\tfrac{385}{576}a_2^4 + \tfrac{275}{192}a_2^2 a_3 + \tfrac{57}{256}a_3^2 + \tfrac{7}{8}a_2 a_4 + \tfrac{5}{16}a_5\right)c^4 + \cdots.$$

Der Übergang aus der Lage $x = c$ in die Lage $x = 0$ erfordert die Zeit[2])

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \tfrac{2}{3}a_2 c - \tfrac{2}{9}a_2^2 c^2 + \left(\tfrac{61}{81}a_2^3 + \tfrac{7}{6}a_2 a_3 + \tfrac{8}{15}a_4\right)c^3 + \cdots,$$

der Übergang aus der Lage $x = 0$ in die Lage $x = \bar{c}$ die Zeit

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \tfrac{2}{3}a_2 c + \tfrac{2}{9}a_2^2 c^2 - \left(\tfrac{61}{81}a_2^3 + \tfrac{7}{6}a_2 a_3 + \tfrac{8}{15}a_4\right)c^3 - \cdots.$$

---

1) Vgl. I, § 1. — In § 6 und § 7 wird von diesen Transformationen abgesehen.

2) Vgl. die Herleitung in § 4.

Die Reihen für $\bar{c}$, c' und ω, ω_1, ω_2 sind für hinreichend kleine Werte von $|c|$ konvergent.

Die Koordinate x und die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ zur Zeit t[1]) lassen sich in Potenzreihen von c entwickeln, welche Funktionen von

$$u = \frac{\pi}{\omega} t$$

mit der Periode 2π zu Koeffizienten haben; diese Reihen sind bei beliebigen u konvergent, wenn $|c|$ hinreichend klein ist. Sie lauten

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + c^4\psi_4(u) + \cdots;$$

$$\psi_1 = \cos u,$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{3}a_2 \cos u - \tfrac{1}{6}a_2 \cos 2u,$$

$$\psi_3 = -\tfrac{1}{3}a_2^2 + \left(\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_3\right)\cos u + \tfrac{1}{9}a_2^2 \cos 2u + \left(\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3\right)\cos 3u,$$

$$\psi_4 = \left(\tfrac{25}{48}a_2^3 + \tfrac{21}{32}a_2a_3 + \tfrac{3}{8}a_4\right) - \left(\tfrac{119}{432}a_2^3 + \tfrac{35}{96}a_2a_3 + \tfrac{1}{5}a_4\right)\cos u$$
$$- \left(\tfrac{2}{9}a_2^3 + \tfrac{1}{3}a_2a_3 + \tfrac{1}{6}a_4\right)\cos 2u - \left(\tfrac{1}{48}a_2^3 - \tfrac{1}{32}a_3\right)\cos 3u$$
$$- \left(\tfrac{1}{432}a_2^3 - \tfrac{1}{96}a_2a_3 + \tfrac{1}{120}a_4\right)\cos 4u \quad \text{usw.}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = c\chi_1(u) + c^2\chi_2(u) + c^3\chi_3(u) + c^4\chi_4(u) + \cdots;$$

$$\chi_1 = -\sin u,$$

$$\chi_2 = \tfrac{1}{3}a_2 \sin u + \tfrac{1}{3}a_2 \sin 2u,$$

$$\chi_3 = \left(\tfrac{31}{144}a_2^2 + \tfrac{11}{32}a_3\right)\sin u - \tfrac{2}{9}a_2^2 \sin 2u + \left(\tfrac{3}{32}a_3 - \tfrac{1}{16}a_2^2\right)\sin 3u,$$

$$\chi_4 = -\left(\tfrac{61}{432}a_2^3 + \tfrac{1}{96}a_2a_3 - \tfrac{1}{5}a_4\right)\sin u + \left(\tfrac{11}{36}a_2^3 + \tfrac{13}{24}a_2a_3 + \tfrac{1}{3}a_4\right)\sin 2u$$
$$+ \left(\tfrac{1}{16}a_2^3 - \tfrac{3}{32}a_2a_3\right)\sin 3u + \left(\tfrac{1}{108}a_2^3 - \tfrac{1}{24}a_2a_3 + \tfrac{1}{30}a_4\right)\sin 4u \quad \text{usw.}$$

Durch Umstellung der Glieder in den Reihen für x und $\frac{dx}{dt}$ erhält man trigonometrische Reihen von u, deren Koeffizienten Potenzreihen von c sind. Es ist

$$x = A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + A_3 \cos 3u + A_4 \cos 4u + \cdots{}^{2)};$$

$$A_0 = \tfrac{1}{2}a_2c^2 - \tfrac{1}{3}a_2^2c^3 + \left(\tfrac{25}{48}a_2^3 + \tfrac{21}{32}a_2a_3 + \tfrac{3}{8}a_4\right)c^4 + \cdots,$$

$$A_1 = c - \tfrac{1}{3}a_2c^2 + \left(\tfrac{29}{144}a_2^2 + \tfrac{1}{32}a_3\right)c^3 - \left(\tfrac{119}{432}a_2^3 + \tfrac{35}{96}a_2a_3 + \tfrac{1}{5}a_4\right)c^4 + \cdots,$$

$$A_2 = -\tfrac{1}{6}a_2c^2 + \tfrac{1}{9}a_2^2c^3 - \left(\tfrac{2}{9}a_2^3 + \tfrac{1}{3}a_2a_3 + \tfrac{1}{6}a_4\right)c^4 + \cdots,$$

$$A_3 = \left(\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3\right)c^3 - \left(\tfrac{1}{48}a_2^3 - \tfrac{1}{32}a_2a_3\right)c^4 + \cdots,$$

$$A_4 = -\left(\tfrac{1}{432}a_2^3 - \tfrac{1}{96}a_2a_3 + \tfrac{1}{120}a_4\right)c^4 + \cdots \quad \text{usw.}$$

---

1) Für $t = 0$ sei $x = c$, $\frac{dx}{dt} = 0$.

2) Die hier mit A_0 bezeichnete Größe war in I, § 4 mit $\frac{1}{2}A_0$ bezeichnet.

und

$$\frac{dx}{dt} = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + B_4 \sin 4u + \cdots;$$

$$B_1 = -c + \tfrac{1}{3} a_2 c^2 + (\tfrac{31}{144} a_2^2 + \tfrac{11}{32} a_3) c^3 - (\tfrac{61}{432} a_2^3 + \tfrac{1}{96} a_2 a_3 - \tfrac{1}{5} a_4) c^4 + \cdots,$$

$$B_2 = \tfrac{1}{3} a_2 c^2 - \tfrac{2}{9} a_2^2 c^3 + (\tfrac{11}{36} a_2^3 + \tfrac{13}{24} a_2 a_3 + \tfrac{1}{8} a_4) c^4 + \cdots,$$

$$B_3 = (\tfrac{3}{32} a_3 - \tfrac{1}{16} a_2^2) c^3 + (\tfrac{1}{16} a_2^3 - \tfrac{3}{32} a_2 a_3) c^4 + \cdots,$$

$$B_4 = (\tfrac{1}{108} a_2^3 - \tfrac{1}{24} a_2 a_3 + \tfrac{1}{30} a_4) c^4 + \cdots \quad \text{usw.}$$

§ 2.

Im Anschluß an § 1 und I, §§ 1—4 bestimmen wir *die Zeit t, welche das System braucht, um aus der äußersten Lage c in die Lage x zu gelangen.*

Wir entwickeln

$$x = c\psi_1(u) + c^2 \psi_2(u) + c^3 \psi_3(u) + \cdots,$$

indem wir

$$c^2 \cos 2u = 2(c \cos u)^2 - c^2, \quad c^3 \cos 3u = 4(c \cos u)^3 - 3c^2 (c \cos u), \quad \cdots$$

setzen, in eine Potenzreihe von $c \cos u$, deren Koeffizienten Potenzreihen von c sind[1]):

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} a_2 c^2 - \tfrac{4}{9} a_2^2 c^3 + \cdots \\ &+ c \cos u \cdot [1 - \tfrac{1}{3} a_2 c + (\tfrac{5}{36} a_2^2 + \tfrac{1}{8} a_3) c^2 + \cdots] \\ &+ (c \cos u)^2 \cdot [-\tfrac{1}{3} a_2 + \tfrac{2}{9} a_2^2 c + \cdots] + (c \cos u)^3 \cdot [\tfrac{1}{12} a_2^2 - \tfrac{1}{8} a_3 + \cdots] + \cdots; \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich $c \cos u$ als Potenzreihe von x und c, welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Größen hinreichend klein sind:

$$\begin{aligned} c \cos u = x &+ \tfrac{1}{3} a_2 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x c - \tfrac{2}{3} a_2 c^2 + (\tfrac{5}{36} a_2^2 + \tfrac{1}{8} a_3) x^3 \\ &+ \tfrac{1}{9} a_2^2 x^2 c - (\tfrac{17}{36} a_2^2 + \tfrac{1}{8} a_3) x c^2 + \tfrac{2}{9} a_2^2 c^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Einer beliebig gegebenen Lage x zwischen c und $\bar{c}$ entspricht ein bestimmter Wert von $\cos u$, zu welchem ein Wert $u = u_1$ zwischen 0 und π und ein Wert $u = u_2 = 2\pi - u_1$ zwischen π und 2π gehört. Die Lage x wird zum ersten mal zur Zeit $t_1 = \frac{\omega}{\pi} u_1 < \omega$, zum zweiten

---

1) Die Reihe für x, deren Glieder $c^n \psi_n(u)$ als ganze rationale Funktionen von c und $z = c \cos u$ dargestellt werden, ist für $|c| \leqq \mathfrak{r}$, $|z| \leqq \mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}$ positiv, hinreichend klein) unbedingt und gleichmäßig konvergent, sie läßt sich also als Potenzeihe von c und z darstellen, welche für $|c| \leqq \mathfrak{r}$, $|z| \leqq \mathfrak{r}$ konvergiert.

mal zur Zeit $t_2 = \frac{\omega}{\pi} u_2 = 2\omega - t_1 > \omega$ erreicht, und zwar mit entgegengesetzt gleichen Werten der Geschwindigkeit x'. Ist z. B. $c > 0$, so ist $x' < 0$ für $t = t_1$, $x' > 0$ für $t = t_2$.

Eine Formel für $c \sin u$ erhält man auf folgende Weise. In der Reihe

$$x' = c\chi_1(u) + c^2\chi_2(u) + c^3\chi_3(u) + \cdots$$

setzen wir

$$\begin{aligned} c^2 \sin 2u &= c \sin u \cdot 2c \cos u \\ &= c \sin u \cdot (2x + \tfrac{2}{3} a_2 x^2 + \tfrac{2}{3} a_2 x c - \tfrac{4}{3} a_2 c^2 + \cdots), \\ c^3 \sin 3u &= 3c^2 \cdot (c \sin u) - 4(c \sin u)^3 \quad \text{usw.}; \end{aligned}$$

wir erhalten für x' eine nach ungeraden Potenzen von $c \sin u$ fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten Potenzreihen von x und c sind:

$$\begin{aligned} -x' = c \sin u \cdot [1 - \tfrac{2}{3} a_2 x - \tfrac{1}{3} a_2 c - \tfrac{2}{9} a_2^2 x^2 + \tfrac{2}{9} a_2^2 x c + (\tfrac{5}{12} a_2^2 - \tfrac{5}{8} a_3) c^2 + \cdots] \\ + (c \sin u)^3 \cdot [\tfrac{3}{8} a_3 - \tfrac{1}{4} a_2^2 + \cdots] + \cdots. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß

$$x'^2 = c^2 - x^2 + \tfrac{2}{3} a_2 (x^3 - c^3) + \cdots$$

ist (§ 4 oder I, § 1), so ergibt sich für $c \sin u$ das Produkt aus x' und einer Potenzreihe von x und c, welche konvergiert, wenn $|x|$ und $|c|$ hinreichend klein sind:

$$c \sin u = -x' [1 + \tfrac{2}{3} a_2 x + \tfrac{1}{3} a_2 c + (\tfrac{5}{12} a_2^2 + \tfrac{3}{8} a_3) x^2 + \tfrac{2}{9} a_2^2 x c + (\tfrac{1}{4} a_3 - \tfrac{1}{18} a_2^2) c^2 + \cdots].$$

Da durch ein Paar zusammengehöriger Werte x, x' die äußersten Lagen c und $\bar{c}$ bestimmt sind, *so läßt sich die zum Übergang aus einer der Lagen c, $\bar{c}$ in die Lage x erforderliche Zeit, sowie die halbe Periode ω durch x, x' ausdrücken.*

Die durch die Bedingungen $x = c$, $\frac{dx}{dt} = 0$ für $t = 0$ bestimmte Lösung x unserer Differentialgleichung nimmt für $t = \omega$ den Wert $\bar{c}$ an, während $\frac{dx}{dt}$ wieder gleich Null wird. Setzt man $t = \omega + \mathfrak{t}$, so wird die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{d\mathfrak{t}^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

und die betrachtete Lösung erfüllt die Bedingungen $x = \bar{c}$, $\frac{dx}{d\mathfrak{t}} = 0$ für $\mathfrak{t} = 0$. Demnach bleibt sowohl der Ausdruck für x als auch derjenige für $\frac{dx}{dt}$ ungeändert, wenn man c durch $\bar{c}$ und t durch $\mathfrak{t} = t - \omega$ oder $u = \frac{\pi}{\omega} t$ durch $u - \pi$ ersetzt.

Es ist also

$$\bar{c}\cos(u-\pi) = -\bar{c}\cos u = x + \tfrac{1}{3}a_2x^2 + \tfrac{1}{3}a_2x\bar{c} - \tfrac{2}{3}a_2\bar{c}^2 + \left(\tfrac{5}{36}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)x^3$$
$$+ \tfrac{1}{9}a_2^2x^2\bar{c} - \left(\tfrac{17}{36}a_2^2 + \tfrac{1}{8}a_3\right)x\bar{c}^2 + \tfrac{2}{9}a_2^2\bar{c}^3 + \cdots;$$

addiert man hierzu den Ausdruck für $c\cos u$, so erhält man

$$\frac{c-\bar{c}}{2}\cos u = x + \tfrac{1}{3}a_2x^2 + \tfrac{1}{3}a_2x\cdot\frac{c+\bar{c}}{2} - \tfrac{2}{3}a_2\cdot\frac{c^2+\bar{c}^2}{2}$$
$$- \left(\tfrac{5}{36}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)x^3 + \tfrac{1}{9}a_2^2x^2\cdot\frac{c+\bar{c}}{2}$$
$$- \left(\tfrac{17}{36}a_2^2 + \tfrac{1}{8}a_3\right)x\cdot\frac{c^2+\bar{c}^2}{2} + \tfrac{2}{9}a_2^2\cdot\frac{c^3+\bar{c}^3}{2} + \cdots.$$

Die Addition des Ausdrucks für $c\sin u$ zu

$$\bar{c}\sin(u-\pi) = -\bar{c}\sin u$$
$$= -x'\left[1 + \tfrac{2}{3}a_2x + \tfrac{1}{3}a_2\bar{c} + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)x^2 + \tfrac{2}{9}a_2^2x\bar{c} + \left(\tfrac{1}{4}a_3 - \tfrac{1}{18}a_2^2\right)\bar{c}^2 + \cdots\right]$$

ergibt

$$\frac{c-\bar{c}}{2}\sin u = -x'\Big[1 + \tfrac{2}{3}a_2x + \tfrac{1}{3}a_2\cdot\frac{c+\bar{c}}{2} + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)x^2$$
$$+ \tfrac{2}{9}a_2^2x\cdot\frac{c+\bar{c}}{2} + \left(\tfrac{1}{4}a_3 - \tfrac{1}{18}a_2^2\right)\cdot\frac{c^2+\bar{c}^2}{2} + \cdots\Big].$$

Ist $\pm c'$ der Wert der Geschwindigkeit x' in der Gleichgewichtslage $x = 0$, so ist nach I, § 1:

$$c'^2 = x'^2 + x^2 - \tfrac{2}{3}a_2x^3 - \tfrac{2}{4}a_3x^4 - \cdots,$$
$$c = c' + \tfrac{1}{3}a_2c'^2 + \left(\tfrac{5}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)c'^3 + \cdots,$$

also:

$$c = A + Bc', \quad \bar{c} = A - Bc',$$

wobei gesetzt ist:

$$A = \tfrac{1}{3}a_2(x'^2 + x^2) - \tfrac{2}{9}a_2^2x^3 + \cdots,$$
$$B = 1 + \left(\tfrac{5}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)(x'^2 + x^2) + \cdots.$$

Setzt man $B^2c'^2 = R$, also

$$R = x'^2 + x^2 - \tfrac{2}{3}a_2x^3 - \tfrac{1}{2}a_3x^4 + \left(\tfrac{5}{9}a_2^2 + \tfrac{1}{2}a_3\right)(x'^2 + x^2)^2 + \cdots,$$

so hat man

$$c = A + \sqrt{R}, \quad \bar{c} = A - \sqrt{R}$$

oder

$$\frac{c+\bar{c}}{2} = A, \quad \frac{c-\bar{c}}{2} = \sqrt{R}.$$

Nach der letzten Formel ist der positive oder der negative Wert von $\sqrt{R}$ zu nehmen, je nachdem der Wert c, welchen x für $t = 0$ annimmt, positiv oder negativ ist. Beachtet man noch die Gleichungen

$$\frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} = \left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c - \bar{c}}{2}\right)^2 = A^2 + R,$$

$$\frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} = \left(\frac{c + \bar{c}}{2}\right)^3 + 3\,\frac{c + \bar{c}}{2}\left(\frac{c - \bar{c}}{2}\right)^2 = A^3 + 3AR$$

u. s. w., so erhält man

$$\sqrt{R}\cos u = x - \tfrac{1}{3}a_2 x^2 - \tfrac{2}{3}a_2 x'^2 - \left(\tfrac{1}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)x^3 - \left(\tfrac{13}{36}a_2^2 + \tfrac{1}{8}a_3\right)xx'^2 + \cdots$$

und

$$\sqrt{R}\sin u = -x'\left[1 + \tfrac{2}{3}a_2 x + \left(\tfrac{17}{36}a_2^2 + \tfrac{5}{8}a_3\right)x^2 + \left(\tfrac{1}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)x'^2 + \cdots\right].$$

Die in

$$u = \frac{\pi}{\omega}\,t$$

enthaltene halbe Periode ω läßt sich als Potenzreihe von x, x' darstellen. Da ω ungeändert bleibt, wenn man c in $\bar{c}$ verwandelt, so hat man:

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)\frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} + \cdots = 1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)R + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder mindestens vom vierten Grad in x, x' sind. Es ist also

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)(x'^2 + x^2) - \left(\tfrac{5}{18}a_2^3 + \tfrac{1}{4}a_2 a_3\right)x^3 + \cdots.$$

§ 3.

An die Stelle der bisherigen Anfangsbedingung $t = 0$, $x = c$, $\frac{dx}{dt} = 0$ *trete jetzt die Bedingung*

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = x_0',$$

wo x_0, x_0' Größen von hinreichend kleinem absoluten Betrage sind, während die Differentialgleichung der Bewegung ungeändert bleibt.

Die am Ende von § 2 aufgestellten Formeln lassen sich hier anwenden, wenn man das Paar zusammengehöriger Werte x, x' durch die jetzigen Anfangswerte x_0, x_0' ersetzt. Die Dauer ω einer einfachen Schwingung ergibt sich aus:

$$\frac{\omega}{\pi} = 1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)(x_0^2 + x_0'^2) - \left(\tfrac{5}{18}a_2^3 + \tfrac{1}{4}a_2 a_3\right)x_0^3 + \cdots.$$

Die äußersten Lagen c und $\bar{c}$ berechnen sich aus

$$c = A + \sqrt{R}, \quad \bar{c} = A - \sqrt{R},$$

wo

$$A = \tfrac{1}{3} a_2 (x_0^2 + x_0'^2) - \tfrac{2}{9} a_2^2 x_0^3 + \cdots,$$
$$R = x_0'^2 + x_0^2 - \tfrac{2}{3} a_2 x_0^3 - \tfrac{1}{2} a_3 x_0^4 + (\tfrac{5}{9} a_2^2 + \tfrac{1}{2} a_3)(x_0^2 + x_0'^2)^2 + \cdots$$

ist. Je nachdem man den positiven oder den negativen Wert von $\sqrt{R}$ nimmt, ist $c > 0$ der größte oder $c < 0$ der kleinste Wert von x.

In § 2 wurde die Zeit t berechnet, welche das System braucht, um aus der Lage c in die Lage x mit der Geschwindigkeit x' zu gelangen. Eben so groß ist die Zeit, in welcher das von der Lage x mit der Geschwindigkeit $-x'$ ausgehende System in die Lage c kommt. Um die Zeit t_0 zu berechnen, welche der Übergang des jetzt betrachteten Systems aus der Anfangslage x_0 (Anfangsgeschwindigkeit x_0') in die äußerste Lage c erfordert, hat man in den Formeln für $\sqrt{R}\cos u$ und $\sqrt{R}\sin u$ in § 2 t durch t_0, x durch x_0 und $-x'$ durch x_0' zu ersetzen. Man erhält so

$$\sqrt{R} \,.\, \cos\frac{\pi}{\omega} t_0 = x_0 - \tfrac{1}{3} a_2 x_0^2 - \tfrac{2}{3} a_2 x_0'^2 - (\tfrac{1}{18} a_2^2 + \tfrac{1}{4} a_3) x_0^3 - (\tfrac{13}{36} a_2^2 + \tfrac{1}{8} a_3) x_0 x_0'^2 + \cdots$$

und

$$\sqrt{R} \,.\, \sin\frac{\pi}{\omega} t_0 = x_0' \,[1 + \tfrac{2}{3} a_2 x_0 + (\tfrac{17}{36} a_2^2 + \tfrac{5}{8} a_3) x_0^2 + (\tfrac{1}{18} a_2^2 + \tfrac{1}{4} a_3) x_0'^2 + \cdots].$$

Gelangt das System nach Ablauf der Zeit t_0 zum ersten mal in eine äußerste Lage, die wir c nennen, so muß $t_0 < \omega$ sein; das Vorzeichen von c und damit auch dasjenige von $\sqrt{R}$ stimmt mit dem Vorzeichen von x_0' überein.

Indem man jetzt von der Bedingung

$$t = t_0, \quad x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

ausgeht, sieht man, daß die Formeln in § 1 für x und $\frac{dx}{dt}$ hier gültig sind, wenn t durch $t - t_0$ ersetzt, also $u = \frac{\pi}{\omega}(t - t_0)$ gesetzt wird.

Wir leiten indessen den Ausdruck für x als Funktion von t direkt aus der Differentialgleichung her. Setzt man

$$w = \frac{\pi}{\omega} t,$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{d^2 x}{dw^2} + x = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

worin

$$\frac{\pi^2}{\omega^2} = 1 - \left(\tfrac{5}{6} a_2^2 + \tfrac{3}{4} a_3\right)\left(x_0^2 + x_0'^2\right) + \cdots$$

ist; die Anfangsbedingungen sind

$$w = 0, \quad x = x_0, \quad \frac{dx}{dw} = \frac{\omega}{\pi} x_0' = x_0' + \left(\tfrac{5}{12} a_2^2 + \tfrac{3}{8} a_3\right)\left(x_0^2 + x_0'^2\right) x_0' + \cdots.$$

Demnach erscheint x als Potenzreihe von x_0, x_0', welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Größen hinreichend klein sind. Wenn wir

$$x = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$$

setzen, wo X_n eine ganze Funktion $n$ten Grades von x_0, x_0' darstellt, so haben wir nacheinander die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 X_1}{dw^2} + X_1 = 0,$$
$$\frac{d^2 X_2}{dw^2} + X_2 = a_2 X_1^2$$

u. s. w. mit den Anfangsbedingungen

$$X_1 = x_0, \quad \frac{dX_1}{dw} = x_0',$$
$$X_2 = 0, \quad \frac{dX_2}{dw} = 0$$

u. s. w. für $w = 0$ zu integrieren. Es ergibt sich

$$X_1 = x_0 \cos w + x_0' \sin w,$$
$$X_2 = \tfrac{1}{2} a_2 \left(x_0^2 + x_0'^2\right) - \tfrac{1}{3} a_2 \left(x_0^2 + 2 x_0'^2\right) \cos w + \tfrac{2}{3} a_2 x_0 x_0' \sin w$$
$$- \tfrac{1}{6} a_2 \left(x_0^2 - x_0'^2\right) \cos 2w - \tfrac{1}{3} a_2 x_0 x_0' \sin 2w$$

u. s. w. Als periodische Funktion w mit der Periode 2π läßt sich x in eine Fouriersche Reihe entwickeln

$$x = A_0 + A_1 \cos w + A_2 \cos 2w + \cdots + B_1 \sin w + B_2 \sin 2w + \cdots;$$
$$A_0 = \tfrac{1}{2} a_2 \left(x_0^2 + x_0'^2\right) + \cdots,$$
$$A_1 = x_0 - \tfrac{1}{3} a_2 \left(x_0^2 + 2 x_0'^2\right) + \cdots, \quad B_1 = x_0' + \tfrac{2}{3} a_2 x_0 x_0' + \cdots,$$
$$A_2 = -\tfrac{1}{6} a_2^2 \left(x_0^2 - x_0'^2\right) + \cdots, \quad B_2 = -\tfrac{1}{3} a_2 x_0 x_0' + \cdots \quad \text{u. s. w.}$$

Wir untersuchen jetzt *die Bewegung unseres Systems unter der Voraussetzung, daß es zur Zeit $t = 0$ die Gleichgewichtslage $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = c'$ verläßt.* Wir haben in den Formeln des gegenwärtigen Paragraphen $x_0 = 0$, $x_0' = c'$ zu setzen; wir können aber auch an § 1 und I, § 1 ff. anknüpfen.

Das System erreicht nach Ablauf der Zeit ω_1 die Lage $x = c$ oder nach Ablauf der Zeit ω_2 die Lage $x = \bar{c}$, je nachdem es die Lage $x = 0$ mit der Geschwindigkeit c' oder mit der Geschwindigkeit $-c'$ verläßt. Demnach geht c in $\bar{c}$ und ω_1 in ω_2 über, wenn man c' in $-c'$ verwandelt; $\omega = \omega_1 + \omega_2$ bleibt also bei der Zeichenänderung von c' ungeändert. Setzt man $\omega_1 - \frac{\omega}{2} = f(c')$, so ist $\omega_2 - \frac{\omega}{2} = f(-c')$; die Addition der beiden Gleichungen ergibt $f(c') + f(-c') = 0$, d. h. $f(c')$ ist eine ungerade Funktion von c'.

Nach I, § 1 ist

$$\begin{aligned} c &= c' + \tfrac{1}{3}a_2 c'^2 + \left(\tfrac{5}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)c'^3 + \cdots, \\ \bar{c} &= -c' + \tfrac{1}{3}a_2 c'^2 - \left(\tfrac{5}{18}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3\right)c'^3 + \cdots; \end{aligned}$$

die in § 1 aufgestellten Ausdrücke für ω, ω_1, ω_2 gehen hiernach über in

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\pi} &= 1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)c'^2 \\ &\quad + \left(\tfrac{385}{576}a_2^4 + \tfrac{105}{64}a_2^2 a_3 + \tfrac{105}{256}a_3^2 + \tfrac{7}{8}a_2 a_4 + \tfrac{5}{16}a_5\right)c'^4 + \cdots; \\ \omega_1 &= \frac{\omega}{2} + \tfrac{2}{3}a_2 c' + \left(\tfrac{64}{81}a_2^3 + \tfrac{4}{3}a_2 a_3 + \tfrac{8}{15}a_4\right)c'^3 + \cdots, \\ \omega_2 &= \frac{\omega}{2} - \tfrac{2}{3}a_2 c' - \left(\tfrac{64}{81}a_2^3 + \tfrac{4}{3}a_2 a_3 + \tfrac{8}{15}a_4\right)c'^3 - \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man

$$w = \frac{\pi}{\omega}t,$$

so hat man

$$\begin{aligned} x &= c'\eta_1(w) + c'^2\eta_2(w) + c'^3\eta_3(w) + \cdots; \\ \eta_1 &= \sin w, \\ \eta_2 &= \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{2}{3}a_2\cos w + \tfrac{1}{6}a_2\cos 2w, \\ \eta_3 &= \left(\tfrac{5}{144}a_2^2 + \tfrac{9}{32}a_3\right)\sin w + \tfrac{2}{9}a_2^2\sin 2w + \left(\tfrac{1}{32}a_3 - \tfrac{1}{48}a_2^2\right)\sin 3w \end{aligned}$$

u. s. w.; η_n ist eine gerade oder eine ungerade Funktion von w mit der Periode 2π, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Wenn man in der Reihe für x in § 1 c durch c' ausdrückt und

$$u = \frac{\pi}{\omega}(t - \omega_1)$$

setzt, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= c'\xi_1(u) + c'^2\xi_2(u) + c'^3\xi_3(u) + \cdots; \\ \xi_1 &= \cos u, \\ \xi_2 &= \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{6}a_2\cos 2u, \\ \xi_3 &= \left(\tfrac{37}{144}a_2^2 + \tfrac{9}{32}a_3\right)\cos u + \left(\tfrac{1}{48}a_2^2 - \tfrac{1}{32}a_3\right)\cos 3u \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
A_0 &= \tfrac{1}{2} a_2 c'^2 + \cdots, \\
A_1 &= c' + \left(\tfrac{37}{144} a_2^2 + \tfrac{9}{32} a_3\right) c'^3 + \cdots, \\
A_2 &= -\tfrac{1}{6} a_2 c'^2 + \cdots, \\
A_3 &= \left(\tfrac{1}{48} a_2^2 - \tfrac{1}{32} a_3\right) c'^3 + \cdots
\end{aligned}$$

u. s. w. Je nachdem n gerade oder ungerade ist, enthält ξ_n nur die Kosinus der geraden oder nur der ungeraden Vielfachen von u. Denn das System, welches zur Zeit $t = 0$ von der Lage $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $x' = c'$ ausgeht, befindet sich zur Zeit $t = \omega_1$ in der Lage $x = c$, zur Zeit $t = 2\omega_1$ in der Lage $x = 0$ mit der Geschwindigkeit $x' = -c'$. Setzt man $t = 2\omega_1 + t_1$, so ändert sich die Form der Differentialgleichung nicht, die Anfangsbedingungen werden $t_1 = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt_1} = -c'$; wenn man

$$u_1 = \frac{\pi}{\omega}(t_1 - \omega_2)$$

setzt, ist

$$x = \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^n c'^n \xi_n(u_1);$$

wegen

$$u_1 = \frac{\pi}{\omega}(t - 2\omega_1 - \omega_2) = \frac{\pi}{\omega}(t - \omega_1 - \omega) = u - \pi$$

ist

$$\xi_n(u) = (-1)^n \xi_n(u - \pi),$$

w. z. b. w. Demnach enthält A_n nur gerade oder ungerade Potenzen von c', je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Nun läßt sich schreiben:

$$\xi_{2m} = \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{A}_\nu \cos^{2\nu} u \quad = \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{A}_\nu (\cos^2 u)^\nu (\cos^2 u + \sin^2 u)^{m-\nu},$$

$$\xi_{2m+1} = \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{B}_\nu \cos^{2\nu+1} u = \cos u \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{B}_\nu (\cos^2 u)^\nu (\cos^2 u + \sin^2 u)^{m-\nu};$$

also sind

$$c^{2m}\xi_2, \quad \frac{c^{2m+1}\xi_{2m+1}}{c \cos u}$$

ganze homogene Funktion $m$ten Grades von $(c\cos u)^2$ und $(c\sin u)^2$. Daher läßt sich x als Potenzreihe von $c\cos u$ und $c\sin u$ darstellen, welche konvergiert, wenn die absoluten Beträge dieser Argumente hinreichend klein sind, und nur gerade Potenzen von $c\sin u$ enthält.

§ 4.

Wir schlagen jetzt einen anderen Weg ein, um die Zeit t zu berechnen, welche das System braucht, um aus der äußersten Lage c in eine beliebige Lage x zu gelangen. Daraus ergeben sich insbesondere auch die Formeln für ω, ω_1, ω_2. Die weitere Verfolgung dieses Weges führt in § 5 zu den aus § 1 und I, §§ 3—4 bekannten Reihenentwicklungen von x.

Ist die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und die bei der Verrückung dx geleistete Arbeit

$$Q\,dx = (-x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\,dx,$$

ist ferner

$$x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

so liefert das Prinzip der lebendigen Kraft die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \int_c^x Q\,dx$$

oder

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \Phi(x) = c^2 - x^2 + \tfrac{2}{3}a_2(x^3 - c^3) + \tfrac{2}{4}a_3(x^4 - c^4) + \tfrac{2}{5}a_4(x^5 - c^5) + \cdots.$$

Man hat

$$\Phi(x) = (c - x)(x - \bar{c})\,\Phi_1(x),$$

wo

$$\bar{c} = -c + \tfrac{2}{3}a_2 c^2 - \tfrac{4}{9}a_2^2 c^3 + \left(\tfrac{16}{27}a_2^3 + \tfrac{2}{3}a_2 a_3 + \tfrac{2}{5}a_4\right)c^4 + \cdots$$

und

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) = 1 &- \tfrac{2}{3}a_2 x - \tfrac{1}{2}a_3 x^2 - \left(\tfrac{4}{9}a_2^2 + \tfrac{1}{2}a_3\right)c^2 \\ &- \tfrac{2}{5}a_4 x^3 - \left(\tfrac{1}{3}a_2 a_3 + \tfrac{2}{5}a_4\right)xc^2 + \left(\tfrac{8}{27}a_2^3 + \tfrac{1}{3}a_2 a_3\right)c^3 + \cdots\end{aligned}$$

Potenzreihen sind, welche für hinreichend kleine Werte von $|c|$ bezw. von $|x|$ und $|c|$ konvergieren.

Gehört x dem Intervall $c \ldots \bar{c}$ an, so ist die Zeit t, nach welcher die Lage x *zum erstenmal* erreicht wird, dargestellt durch

$$t = \mp\int_c^x \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \mp\int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})}}\,\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}},$$

wo das Zeichen — oder + gilt, je nachdem c positiv oder negativ ist, während alle vorkommenden Quadratwurzeln positiv zu nehmen sind. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots,$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1 + (\tfrac{2}{9}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3)c^2 - (\tfrac{4}{27}a_2^3 + \tfrac{1}{6}a_2 a_3)c^3 + \cdots,\\
g_1 &= \tfrac{1}{3}a_2 + (\tfrac{2}{9}a_2^3 + \tfrac{5}{12}a_2 a_3 + \tfrac{1}{5}a_4)c^2 + \cdots,\\
g_2 &= (\tfrac{1}{6}a_2^2 + \tfrac{1}{4}a_3) + 0 \cdot c + \cdots,\\
g_3 &= (\tfrac{5}{54}a_2^3 + \tfrac{1}{4}a_2 a_3 + \tfrac{1}{5}a_4) + \cdots \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Nimmt man $c > 0$, also $\bar{c} < 0$ an, so ist

$$\begin{aligned}
t &= \int_x^c (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots) \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}\\
&= [g_0 + \tfrac{1}{2}g_1(c+\bar{c}) + g_2(\tfrac{3}{8}(c+\bar{c})^2 - \tfrac{1}{2}c\bar{c}) + g_3(\tfrac{5}{16}(c+\bar{c})^3 - \tfrac{3}{4}c\bar{c}(c+\bar{c})) + \cdots] \int_x^c \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}\\
&+ [g_1 + \tfrac{3}{4}g_1(c+\bar{c}) + g_3(\tfrac{5}{8}(c+\bar{c})^2 - \tfrac{2}{3}c\bar{c}) + (\tfrac{1}{2}g_2 + \tfrac{5}{12}g_3(c+\bar{c}) + \cdots)x + \tfrac{1}{3}g_3 x^2 + \cdots]\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$x' = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} \cdot \sqrt{\Phi_1(x)}$$

folgt

$$\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = -\frac{x'}{\sqrt{\Phi_1(x)}};$$

ferner ist

$$\int_x^c \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = \arccos \frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}},$$

wo der Wert von arc cos zwischen 0 und π zu nehmen ist. Setzt man für $\bar{c}$ und $\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}}$ die oben angeschriebenen Reihen ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
t &= [1 + (\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 - (\tfrac{5}{18}a_2^3 + \tfrac{1}{4}a_2 a_3)c^3 + \cdots] \arccos \frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}}\\
&- x'[\tfrac{1}{3}a_2 + (\tfrac{7}{36}a_2^2 + \tfrac{1}{8}a_3)x + (\tfrac{37}{324}a_2^3 + \tfrac{5}{24}a_2 a_3 + \tfrac{1}{15}a_4)x^2 + (\tfrac{143}{324}a_2^3 + \tfrac{19}{24}a_2 a_3 + \tfrac{1}{5}a_4)c^2 + \cdots];
\end{aligned}$$

hierin ist

$$\frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}} = \frac{x + \frac{1}{3}a_2 xc - \frac{1}{3}a_2 c^2 - \frac{1}{9}a_2^2 xc^2 + \frac{1}{9}a_2^2 c^3 + \cdots}{c}.$$

Im Falle $c < 0$, $\bar{c} > 0$ ist

$$t = \int\limits_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}}(g_0 + g_1 x + \cdots)$$

$$= [g_0 + \tfrac{1}{2} g_1 (c+\bar{c}) + \cdots] \int\limits_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} - [g_1 + \cdots] \sqrt{(c-x)(x-\bar{c})};$$

es ist jetzt

$$\int\limits_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})}} = \arccos \frac{x - \frac{c+\bar{c}}{2}}{\frac{c-\bar{c}}{2}},$$

wo wieder der Wert von arc cos zwischen 0 und π zu nehmen ist, und

$$\sqrt{(c-x)(x-\bar{c})} = \frac{x'}{\sqrt{\Phi_1(x)}};$$

demnach gilt die für t gefundene endgültige Formel auch jetzt.

Die zu einer gegebenen Lage x gehörige Geschwindigkeit x' ergibt sich aus $x'^2 = \Phi(x)$. Um den ersten Wert von t zu erhalten, hat man x' negativ oder positiv zu nehmen, je nachdem $c > 0$ oder < 0 ist.

Insbesondere erhält man die zum Übergang aus der Lage c in die Lage $\bar{c}$ erforderliche Zeit ω, indem man in dem Ausdruck für t $x = \bar{c}$, $x' = 0$ setzt:

$$\omega = \pi[1 + (\tfrac{5}{12} a_2^2 + \tfrac{3}{8} a_3) c^2 - (\tfrac{5}{18} a_2^3 + \tfrac{1}{4} a_2 a_3) c^3 + \cdots].$$

Die zum Übergang aus der Lage $x = c$ in die Lage $x = 0$ erforderliche Zeit ω_1 ist der Wert von t für $x = 0$; wegen

$$\arccos\left(-\frac{c+\bar{c}}{c-\bar{c}}\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{c+\bar{c}}{c-\bar{c}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{3} a_2 c - \tfrac{1}{9} a_2^2 c^2 + (\tfrac{31}{162} a_2^3 + \tfrac{1}{3} a_2 a_3 + \tfrac{1}{5} a_4) c^3 + \cdots$$

und

$$-x' = c' = c - \tfrac{1}{3} a_2 c^2 - (\tfrac{1}{18} a_2^2 + \tfrac{1}{4} a_3) c^3 + \cdots$$

hat man

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \tfrac{2}{3} a_2 c - \tfrac{2}{9} a_2^2 c^2 + (\tfrac{61}{81} a_2^3 + \tfrac{7}{6} a_2 a_3 + \tfrac{8}{15} a_4) c^3 + \cdots.$$

Die zum Übergang aus der Lage $x = 0$ in die Lage $x = \bar{c}$ erforderliche Zeit ist $\omega_2 = \omega - \omega_1$ oder

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \tfrac{2}{3} a_2 c + \tfrac{2}{9} a_2^2 c^2 - (\tfrac{61}{81} a_2^3 + \tfrac{7}{6} a_2 a_3 + \tfrac{8}{11} a_4) c^3 + \cdots.$$

Wir fügen noch die Formel hinzu:

$$u = \frac{\pi}{\omega} t = \arccos \frac{x - \frac{c + \bar{c}}{2}}{\frac{c - \bar{c}}{2}}$$

$$- x'[\tfrac{1}{3}a_2 + (\tfrac{7}{36}a_2^2 + \tfrac{1}{8}a_3)x + (\tfrac{37}{324}a_2^3 + \tfrac{5}{24}a_2 a_3 + \tfrac{1}{15}a_4)x^2 + (\tfrac{49}{162}a_2^3 + \tfrac{2}{3}a_2 a_3 + \tfrac{1}{3}a_4)c^2 + \cdots].$$

§ 5.[1])

Wir setzen

$$v = \arccos \frac{x - \frac{c + \bar{c}}{2}}{\frac{c - \bar{c}}{2}} \quad (0 \leqq v \leqq \pi)$$

und entwickeln t in eine nach Sinus der Vielfachen von v fortschreitende Reihe.

Es ist

$$x = \frac{c + \bar{c}}{2} + \frac{c - \bar{c}}{2} \cos v$$

$$= \tfrac{1}{3}a_2 c^2 - \tfrac{2}{9}a_2^2 c^3 + \cdots + (c - \tfrac{1}{3}a_2 c^2 + \tfrac{2}{9}a_2^2 c^3 + \cdots)\cos v$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\Psi(v)}} = [1 + (\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 + \cdots]$$

$$+ \cos v \cdot [\tfrac{1}{3}a_2 c - \tfrac{1}{9}a_2^2 c^2 + \cdots] + \cos 2v \cdot [(\tfrac{1}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 + \cdots] + \cdots.$$

Im Falle $c > 0$ ist

$$\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})} = \frac{c - \bar{c}}{2} \sin v, \quad - \frac{dx}{\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})}} = dv,$$

$$t = -\int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})}} \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{\Psi(v)}};$$

im Falle $c < 0$ haben wir

$$-\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})} = \frac{c - \bar{c}}{2} \sin v, \quad \frac{dx}{\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})}} = dv,$$

$$t = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})}} \frac{1}{\sqrt{\Phi_1(x)}} = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{\Psi(v)}}.$$

---

1) Vgl. Weierstraß, Über eine Gattung reell periodischer Funktionen (Berliner Monatsberichte 1866; Werke Bd. II).

Also ist allgemein

$$t = v \cdot [1 + \tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3)c^2 + \cdots]$$

$$+ \sin v \cdot [\tfrac{1}{3}a_2 c - \tfrac{1}{9}a_2^2 c^2 + \cdots] + \sin 2v \cdot [(\tfrac{1}{12}a_2^2 + \tfrac{1}{8}a_3)c^2 + \cdots] + \cdots.$$

Für $v = \pi$ ist $x = \bar{c}$, also $t = \omega$; man erhält wieder den bekannten Wert für ω. Nun ist

$$u = \frac{\pi}{\omega} t = v + \sin v \cdot [\tfrac{1}{3}a_2 c - \tfrac{1}{9}a_2^2 c^2 + \cdots]$$

$$+ \sin 2v \cdot [(\tfrac{1}{24}a_2^2 + \tfrac{1}{16}a_3)c^2 + \cdots] + \cdots.$$

Schließlich *geben wir noch eine andere Herleitung der in* I, § 3 *und* § 4 *erhaltenen Reihenentwicklungen von* x im Anschluß an die angeführte Abhandlung von Weierstraß.

Als gerade periodische Funktion von u mit der Periode 2π läßt sich $\cos v$ in eine Fouriersche Reihe von der Form

$$\cos v = \mathsf{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n \cos nu$$

entwickeln. Es ist

$$\mathsf{A}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos v \, du;$$

$\cos v \cdot \dfrac{du}{dv} = \cos v \cdot \dfrac{\pi}{\omega} \dfrac{1}{\Psi(v)}$ läßt sich in eine nach Kosinus der Vielfachen von v fortschreitende Reihe entwickeln, deren konstantes Glied lautet:

$$\tfrac{1}{6}a_2 c - \tfrac{1}{18}a_2^2 c^2 + \cdots;$$

wegen $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos mv \, dv = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ist

$$\mathsf{A}_0 = \tfrac{1}{6}a_2 c - \tfrac{1}{18}a_2^2 c^2 + \cdots.$$

Ferner ist

$$\mathsf{A}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos v \cos nu \, du$$

oder, wenn man partiell integriert,

$$\mathsf{A}_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin v \sin nu \, dv.$$

Setzt man

$$\eta = u - v = \sin v \cdot [\tfrac{1}{3}a_2 c - \tfrac{1}{9}a_2^2 c^2 + \cdots]$$

$$+ \sin 2v \cdot [(\tfrac{1}{24}a_2^2 + \tfrac{1}{16}a_3)c^2 + \cdots] + \cdots,$$

$$\text{in}\,(nv + n\eta) = \sin nv \cos n\eta + \cos nv \sin n\eta$$
$$- \tfrac{1}{2} n^2 \eta^2 + \cdots) + \cos nv \cdot (n\eta - \tfrac{1}{6} n^3 \eta^3 + \cdots);$$

e ungeraden Potenzen von η nach Sinus und die
von η nach Kosinus der Vielfachen von v, so daß
ıe nach Sinus der Vielfachen von v fortschreitende
ı Koeffizienten Potenzreihen von c sind:

$$\sin nu = \mathfrak{p}_{n1}(c) \sin v + \mathfrak{p}_{n2}(c) \sin 2v + \mathfrak{p}_{n3}(c) \sin 3v + \cdots.$$

Daraus folgt

$$\sin v \sin nu = \tfrac{1}{2} \mathfrak{p}_{n1} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{p}_{n2} \cos v - \tfrac{1}{2} (\mathfrak{p}_{n1} - \mathfrak{p}_{n3}) \cos 2v + \cdots$$

und

$$\int_0^\pi \sin v \sin nu\, dv = \frac{\pi}{2} \mathfrak{p}_{n1},$$

also

$$\mathsf{A}_n = \frac{1}{n} \mathfrak{p}_{n1}(c).$$

Man findet

$$\begin{aligned}
\sin u \;\; &= [1 + (\tfrac{1}{32} a_3 - \tfrac{1}{48} a_2^2) c^2 + \cdots] \sin v + \cdots, \\
\sin 2u &= [- \tfrac{1}{3} a_2 c + \tfrac{1}{9} a_2^2 c^2 + \cdots] \sin v + \cdots, \\
\sin 3u &= [(\tfrac{1}{16} a_2^2 - \tfrac{3}{32} a_3) c^2 + \cdots] \sin v + \cdots
\end{aligned}$$

usw., also

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_1 &= \mathfrak{p}_{11} = 1 + (\tfrac{1}{32} a_3 - \tfrac{1}{48} a_2^2) c^2 + \cdots, \\
\mathsf{A}_2 &= \tfrac{1}{2} \mathfrak{p}_{21} = - \tfrac{1}{6} a_2 c + \tfrac{1}{18} a_2^2 c^2 + \cdots, \\
\mathsf{A}_3 &= \tfrac{1}{3} \mathfrak{p}_{31} = (\tfrac{1}{48} a_2^2 - \tfrac{1}{32} a_3) c^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

usw. Mithin ist

$$x = \tfrac{1}{3} a_2 c^2 - \tfrac{2}{9} a_2^2 c^3 + \cdots + (c - \tfrac{1}{3} a_2 c^2 + \cdots)(A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \cdots)$$

oder

$$\begin{aligned}
x = {} & (\tfrac{1}{2} a_2 c^2 - \tfrac{1}{3} a_2^2 c^3 + \cdots) + (c - \tfrac{1}{3} a_2 c^2 + (\tfrac{29}{144} a_2^2 + \tfrac{1}{32} a_3) c^3 + \cdots) \cos u \\
& + (- \tfrac{1}{6} a_2 c^2 + \tfrac{1}{9} a_2^2 c^3 + \cdots) \cos 2u + ((\tfrac{1}{48} a_2^2 - \tfrac{1}{32} a_3) c^3 + \cdots) \cos 3u + \cdots.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\mathsf{A}_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin v \sin nu\, dv \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

geht durch partielle Integration über in

$$\mathsf{A}_n = \frac{J_n}{n^2}, \quad J_n = \frac{2\omega}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{d}{dv}(\sin v\sqrt{\Psi(v)})\cos nu\,dv.$$

Wenn $|c| \leqq \mathfrak{r}$ angenommen wird, wo $\mathfrak{r}$ eine hinreichend kleine positive Größe bedeutet, so ist eine von n sowie von c und u unabhängige positive Größe K so vorhanden, daß $|J_n| < K$ ist. Demnach ist die Reihe

$$x = \frac{c + c}{2} + \frac{c - \bar{c}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{A}_n \cos nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nu$$

für alle reellen Werte von u und für $|c| \leqq \mathfrak{r}$ unbedingt und gleichmäßig konvergent. Das Reihenglied $A_n \cos nu$ ist eine Potenzreihe von c und $z = c\cos u$ (in z ganz rational), welche für $|c| \leqq \mathfrak{r}$, $|z| \leqq 1$ konvergiert; folglich ist x eine in demselben Bereich konvergente Potenzreihe von c und z; ordnet man diese nach Potenzen von c, so hat man die aus I, § 3 bekannte Reihe

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \psi_n(u).$$

§ 6.

In § 1 und I, § 1 wurden vereinfachte Ausdrücke für die lebendige Kraft und die Arbeit zu Grunde gelegt.

Ist die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\alpha_0\left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \qquad \alpha_0 > 0$$

und die Arbeit

$$Qdx = -(\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots)dx; \qquad \beta_1 > 0,$$

so lautet die Differentialgleichung der Bewegung

$$\alpha_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots = 0$$

oder

$$\frac{d^2x}{d\left(t\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}\right)^2} + x + \frac{\beta_2}{\beta_1}x^2 + \frac{\beta_3}{\beta_1}x^3 + \cdots = 0.$$

Die Formeln für den jetzigen Fall ergeben sich dadurch, daß man in §§ 1—5 und I, §§ 1—4 t durch $t\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}$ und a_n durch

$-\frac{\beta_n}{\beta_1}$ $(n=2,3,\ldots)$ ersetzt. Infolge davon werden die Zeiten ω, ω_1, ω_2 durch $\omega\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}$, $\omega_1\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}$, $\omega_2\sqrt{\frac{\beta_2}{\alpha_0}}$, die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ durch $\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\frac{dx}{dt}$ und die Geschwindigkeit c' in der Gleichgewichtslage $x=0$ durch $c'\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}$ ersetzt.

Demnach nehmen die früheren Formeln die folgende Gestalt an[1]).

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= -c - \frac{2\beta_2}{3\beta_1}c^2 - \frac{4\beta_2^2}{9\beta_1^2}c^3 + \cdots,\\
c' &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}\left\{c + \frac{\beta_2}{2\beta_1}c^2 + \left(\frac{\beta_3}{4\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{18\beta_1^2}\right)c^3 + \cdots\right\},\\
\omega &= \pi\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left\{1 + \left(\frac{5\beta_2^2}{12\beta_1^2} - \frac{3\beta_3}{8\beta_1}\right)c^2 + \left(\frac{5\beta_2^3}{18\beta_1^3} - \frac{\beta_2\beta_3}{4\beta_1^2}\right)c^2 + \cdots\right\},\\
\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} &= \frac{\omega}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left\{\frac{2\beta_2}{3\beta_1}c + \frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2}c^2 + \cdots\right\}.
\end{aligned}$$

Von der Übertragung der übrigen Formeln wollen wir absehen.

In den in der Einleitung angeführten physikalischen Arbeiten sind die Schwingungen eines durch Torsion des Aufhängefadens aus dem Meridian abgelenkten Magneten untersucht, für welche die Differentialgleichung gilt:

$$K\frac{d^2x}{dt^2} = -D\sin(\gamma + x) + D\frac{\omega - \gamma - x}{\omega - \gamma}\sin\gamma$$

oder

$$\alpha_0\frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots = 0;$$

$$\alpha_0 = K,\quad \beta_1 = D\left(\frac{\sin\gamma}{\omega-\gamma} + \cos\gamma\right),\quad \beta_2 = -\frac{D}{2}\sin\gamma,\quad \beta_3 = -\frac{D}{6}\cos\gamma,\ \cdots.$$

Durch Drehung des Aufhängefadens um einen Winkel ω erhält der Magnet eine Gleichgewichtslage, welche mit dem Meridian den Winkel γ einschließt; mit dieser Gleichgewichtslage bildet der schwingende Magnet zur Zeit t den Winkel x; K und D sind positive Konstante. Man vergleiche die obige Formel für $\bar{c}$ mit der Formel für die Asymmetrie ε in der Arbeit von F. Richarz und P. Schulze, sowie die Formeln für ω, ω_1, ω_2 mit den Formeln für T, T_r, T_l in der Arbeit von F. A. Schulze; die obigen Formeln für ω usw. stellen eine Verbesserung der Formeln für T usw. dar.

1) Nach § 1 läßt sich bei jeder Reihe ein weiteres Glied anschreiben.

Es sei jetzt die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \quad \alpha_0 > 0$$

und die Arbeit

$$Q\,dx = -(\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots)\,dx; \; \beta_1 > 0.$$

Es genügt, die verschiedenen Behandlungsweisen dieses allgemeinen Falles kurz zu skizzieren; dabei sollen die Reihenentwicklungen mit der der früheren Arbeit entsprechenden Gliederzahl angeschrieben werden, damit unmittelbar anwendbare, jedoch nicht zu komplizierte Formeln zur Verfügung stehen.

Die Lagrangesche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \frac{dx}{dt}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q$$

geht, wenn man

$$\mathfrak{t} = t\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}$$

als unabhängige Veränderliche einführt, über in

$$\frac{d^2 x}{d\mathfrak{t}^2} + x = a x^2 + b\left(\frac{dx}{d\mathfrak{t}}\right)^2 + a' x^3 + b' x\left(\frac{dx}{d\mathfrak{t}}\right)^2 + \cdots;$$

$$a = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad b = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_0},$$

$$a' = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_0 \beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1}, \quad b' = \frac{\alpha_1^2}{2\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}$$

usw. Führt man

$$u = \mathfrak{t}\sqrt{1 + \lambda_2 c^2 + \cdots} = \mathfrak{t}(1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 c^2 + \cdots)$$

als neue Veränderliche ein und setzt man

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \psi_n(u),$$

während die Anfangsbedingungen

$$\psi_1(0) = 1, \quad \psi_2(0) = 0, \ldots; \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_2'(0) = 0, \cdots$$

vorgeschrieben sind, so lassen sich $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ so bestimmen, daß $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots$ periodische Funktionen von u mit der Periode 2π werden. Man findet so nach der Methode I, § 4 und § 10:

$$\lambda_2 = \frac{3\beta_3}{4\beta_1} - \frac{5\beta_2^2}{6\beta_1^2} + \frac{\alpha_1 \beta_2}{2\alpha_0 \beta_1} + \frac{\alpha_1^2}{8\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_0}$$

usw. Ist ω die halbe Periode in Bezug auf die Veränderliche t, $\omega_{\mathfrak{t}}$ die halbe Periode in Bezug auf die Veränderliche $\mathfrak{t}$, so hat man

$$\pi = \omega_{\mathfrak{t}}\left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 c^2 + \cdots\right)$$

und

$$\omega_{\mathfrak{t}} = \omega \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}},$$

also

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left(1 - \tfrac{1}{2}\lambda_2 c^2 + \cdots\right)$$

oder

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left\{1 + \left(\frac{5\beta_2^2}{12\beta_1^2} - \frac{3\beta_3}{8\beta_1} - \frac{\alpha_1\beta_2}{4\alpha_0\beta_1} + \frac{\alpha_2}{4\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{16\alpha_0^2}\right)c^2 + \cdots\right\}.$$

Ist zur Zeit $t = 0$

$$x = c, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

so ist zur Zeit t, wenn

$$u = \frac{\pi}{\omega}t$$

gesetzt wird,

$$x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + c^3\psi_3(u) + \cdots;$$

$$\psi_1 = \cos u,$$

$$\psi_2 = \left(\frac{\alpha_1}{4\alpha_0} - \frac{\beta_2}{2\beta_1}\right) + \frac{\beta_2}{3\beta_1}\cos u + \left(\frac{\beta_2}{6\beta_1} - \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\right)\cos 2u,$$

$$\psi_3 = \left(\frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{3\beta_1^2}\right) + \left(\frac{\alpha_2}{16\alpha_0} - \frac{7\alpha_1^2}{64\alpha_0^2} + \frac{5\alpha_1\beta_2}{48\alpha_0\beta_1} + \frac{29\beta_2^2}{144\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{32\beta_1}\right)\cos u$$

$$+ \left(\frac{\beta_2^2}{9\beta_1^2} - \frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1}\right)\cos 2u + \left(\frac{\beta_3}{32\beta_1} + \frac{\beta_2^2}{48\beta_1^2} - \frac{5\alpha_1\beta_2}{48\alpha_0\beta_1} + \frac{7\alpha_1^2}{64\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{16\alpha_0}\right)\cos 3u$$

usw. Die zur Zeit $t = \omega$ (für $u = \pi$) erreichte äußerste Lage $x = \bar{c}$ wird dargestellt durch

$$\bar{c} = -c - \frac{2\beta_2}{3\beta_1}c^2 - \frac{4\beta_2^2}{9\beta_1^2}c^3 + \cdots.$$

Man kann auch den jetzigen allgemeineren Fall auf den in §§ 1—5 und I, §§ 1—4 behandelten speziellen Fall zurückführen. Setzt man

$$\mathfrak{x} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}}\int_0^x \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots}\,dx = \sqrt{\beta_1}\left(x + \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}x^2 + \left(\frac{\alpha_2}{6\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{24\alpha_0^2}\right)x^3 + \cdots\right)$$

und

$$\mathfrak{t} = t\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}},$$

so wird

$$x = \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\beta_1}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1^2}{6\alpha_0^2} - \frac{\alpha_2}{6\alpha_0}\right)\left(\frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{\beta_1}}\right)^3 + \cdots,$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2,$$

$$Q\,dx = (-\mathfrak{x} + a_2\mathfrak{x}^2 + a_3\mathfrak{x}^3 + \cdots)\,d\mathfrak{x},$$

wobei gesetzt ist:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}}\left(\frac{3\alpha_1}{4\alpha_0} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right),$$

$$a_3 = \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{2\alpha_2}{3\alpha_0} - \frac{19\alpha_1^2}{24\alpha_0^2} + \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_0\beta_1} - \frac{\beta_3}{\beta_1}\right)$$

usw. Dadurch erhält die Differentialgleichung die frühere Form:

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \mathfrak{x} = a_2\mathfrak{x}^2 + a_3\mathfrak{x}^3 + \cdots.$$

Bezeichnet man die äußersten Werte von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{c}$ und $\bar{\mathfrak{c}}$, so besteht zwischen $\mathfrak{c}$ und c sowie zwischen $\bar{\mathfrak{c}}$ und $\bar{c}$ dieselbe Beziehung wie zwischen $\mathfrak{x}$ und x; es ist

$$\mathfrak{c} = \sqrt{\beta_1}\left(c + \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}c^2 + \cdots\right).$$

Führt man diesen Wert von $\mathfrak{c}$ in die Formel:

$$\omega = \omega_t\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} = \pi\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left\{1 + \left(\tfrac{5}{12}a_2^2 + \tfrac{3}{8}a_3\right)\mathfrak{c}^2 + \cdots\right\}$$

ein, so erhält man die oben angeschriebene Formel für ω. Ebenso ergeben sich aus

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left(\tfrac{2}{3}a_2\mathfrak{c} - \tfrac{2}{9}a_2^2\mathfrak{c}^2 + \cdots\right),$$

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left(\tfrac{2}{3}a_2\mathfrak{c} - \tfrac{2}{9}a_2^2\mathfrak{c}^2 + \cdots\right)$$

die Formeln

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left\{\left(\frac{2\beta_2}{3\beta_1} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0}\right)c + \left(\frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2} - \frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1}\right)c^2 + \cdots\right\},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}}\left\{\left(\frac{2\beta_2}{3\beta_1} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0}\right)c + \left(\frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2} - \frac{\alpha_1\beta_2}{6\alpha_0\beta_1}\right)c^2 + \cdots\right\}.$$

Schließlich läßt sich auch die in § 4 und § 5 dargestellte Methode unmittelbar auf unseren allgemeineren Fall anwenden. Das Prinzip der lebendigen Kraft

$$T = \int_c^x Q\,dx$$

ergibt

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$= \beta_1 (c^2 - x^2) + \tfrac{2}{3}\beta_2 (c^3 - x^3) + \tfrac{2}{4}\beta_3 (c^4 - x^4) + \cdots.$$

Hieraus erhält man die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \pm c'$ in der Lage $x = 0$:

$$c' = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_0}} \left[c + \frac{\beta_2}{3\beta_1} c^2 + \left(\frac{\beta_3}{4\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{18\beta_1^2}\right) c^3 + \cdots\right].$$

Nimmt man zunächst $c > 0$ an, so ist

$$t = \int_x^c \sqrt{\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots}{\beta_1 (c^2 - x^2) + \frac{2}{3}\beta_2 (c^3 - x^3) + \frac{2}{4}\beta_3 (c^4 - x^4) + \cdots}}\, dx.$$

Der Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen gestattet die Faktorenzerlegung

$$(c - x)(x - \bar{c})\, \Phi_1(x),$$

wo $\bar{c}$ die oben angeschriebene Potenzreihe von c und

$$\Phi_1(x) = \beta_1 \left\{1 + \frac{2\beta_2}{3\beta_1} x + \frac{\beta_3}{2\beta_1} x^2 + \left(\frac{\beta_3}{2\beta_1} - \frac{4\beta_2^2}{9\beta_1^2}\right) c^2 + \cdots\right\}$$

ist. Es gilt die Reihenentwicklung

$$\sqrt{\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots}{\Phi_1(x)}} = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots;$$

$$g_0 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left[1 + \left(\frac{2\beta_2^2}{9\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{4\beta_1}\right) c^2 + \cdots\right],$$

$$g_1 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left[\frac{\alpha_1}{2\alpha_0} - \frac{\beta_2}{3\beta_1} + 0 \,.\, c + \cdots\right],$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_1}} \left[\frac{\alpha_2}{2\alpha_0} - \frac{\alpha_1^2}{8\alpha_0^2} + \frac{\beta_2^2}{6\beta_1^2} - \frac{\beta_3}{4\beta_1} - \frac{\alpha_1 \beta_2}{6\alpha_0 \beta_1} + \cdots\right]$$

usw. Wie in § 4 rechnet man

$$t = \int_x^c (g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots) \frac{dx}{\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})}}$$

aus; setzt man für $g_0, g_1, g_2, \ldots$ die angeschriebenen Werte ein und beachtet man, daß jetzt

$$\sqrt{(c - x)(x - \bar{c})} = -x' \sqrt{\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots}{\Phi_1(x)}}$$

ist, so erhält man die Formel

$$t = \frac{\omega}{\pi} \arccos \frac{x - \frac{c + \bar{c}}{2}}{\frac{c - \bar{c}}{2}}$$

$$- x' \left[\left(\frac{\alpha_1}{2\beta_1} - \frac{\alpha_0 \beta_2}{3\beta_1^2} \right) + \left(\frac{\alpha_2}{4\beta_1} - \frac{3\alpha_1^2}{16\alpha_0\beta_1} + \frac{7\alpha_0\beta_2^2}{36\beta_1^3} - \frac{\alpha_0\beta_3}{8\beta_1^2} - \frac{5\alpha_1\beta_2}{12\beta_1^2} \right) x + \cdots \right],$$

wo ω den bereits oben angegebenen Wert hat. Die endgültige Formel für t gilt auch im Falle $c < 0$. Für $x = \bar{c}$ geht t in ω, für $x = 0$ in ω_1 über.

Die Methode von § 5 überträgt sich leicht auf den jetzigen Fall; insbesondere liefert sie x in Form einer nach Kosinus der Vielfachen von $u = \frac{\pi}{\omega} t$ fortschreitenden Reihe, welche aus der oben aufgestellten Reihe $x = c\psi_1(u) + c^2\psi_2(u) + \cdots$ durch Umstellung der Glieder hervorgeht.

Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie.

Von F. Ludwig in Greiz.

Im 4. Heft des Jahrganges 1898 dieser Zeitschrift habe ich in einem Aufsatze über „die Variabilität der Lebewesen und das Gaußsche Fehlergesetz“ einen Überblick gegeben über die Arbeiten, die bis dahin auf dem mathematischen Grenzgebiet nach den biologischen Wissenschaften (Anthropologie, Zoologie, Botanik) hin erschienen waren. Inzwischen hat sich dieses Grenzgebiet mächtig erweitert, ohne daß meines Wissens deutsche Mathematiker sich mit diesen neuen interessanten Anwendungen ihrer Wissenschaft — von den Herausgebern der Fechnerschen Kollektivmaßlehre abgesehen — näher beschäftigt hätten, während die Mathematiker Englands und Amerikas unausgesetzt tätig waren. Eine neue internationale Zeitschrift, Biometrika (A Journal for the Statistical Study of Biological Problems edited in Consultation with Francis Galton by W. F. R. Weldon, Karl Pearson and C. B. Davenport) ist im Oktober 1901 erstmals erschienen und liegt bereits im II. Heft des II. Jahrganges vor. Ich glaubte daher im folgenden eine Übersicht über die seit dem Druck meines genannten Aufsatzes erschienenen Arbeiten auf dem Gebiet der Biometrie zu Nutz und Frommen der wissenschaftlichen Arbeiter diesseits und jenseits der Grenze geben zu sollen.

1. Variationsstatistik etc.

(„Biom.“ = Biometrika.)

1. *Amann, J.* Application du calcul des probabilités à l'étude de la variation d'un type végétal (Bryum cirrhatum Br. Eur.) Bull. Herb. Boissier. T 2. Genève et Bale. 1896. p. 577—590.

2. *Ammon, Otto.* Der Abänderungsspielraum. Ein Beitrag zur natürlichen Auslese. Berlin 1896, Ferd. Dümmler. 54 p.

3. *Ammon, Otto.* Über den Kopf-Index. („Die Umschau“. Jahrgang III. 1899. No. 29. 15. Juli. p. 574.)

4. *Ammon, Otto.* Zur Anthropologie der Badener. (Bericht über die von der anthropologischen Kommission des Karlsruher Altertumsvereins an Wehrpflichtigen und Mittelschülern vorgenommenen Untersuchungen, im Auftrag der Kommission bearbeitet. 707 pp. mit 24 Figuren im Text und 15 Tafeln. Jena 1899, Gustav Fischer.

4b. *Ammon, Otto.* Zur Theorie der reinen Rassetypen. Ztschr. f. Morphologie und Anthropologie. 1900. Bd. II. H. 3. p. 679—685.

5. *Bateson, M. A.* Heredity, Differention and other Conceptions of Biology. A Consideration of Professor Karl Pearsons Paper, On the Principle of Hornotyposis. Proceed. of the R. S. Vol. 69. 1901. p. 193—205.

6. *Bateson, W.* On numerical variation in teeth with a discussion of the conception of homology. Proc. Zool. Soc. 1892. p. 102—115.

7. — On the colour variations of a beetle of the family Chrysomelidae statistically examined. Proc. Zool. Soc. 1895. p. 850—860.

8. — On progress in the study of variations. Science Progress. Vol. 7 (Vol. 2 of new Ser.). No. 6. I 1897. II 1898. 16 pp.

9. *Bateson, W.* and *H. H. Brindley.* On some cases of variation in secondary sexual characters statistically examined. Proceed. of the Zool. Soc. of London. 1892. p. 585—594.

10. *Blanchard, N.* On the Inheritance in Coat-Colour of Thoroughbred Horses (Grandsire and Grandchildren) Biom. V. I p. 361—364.

11. — On Inheritance (Grandparent and Offspring) in Thorougbred Racehorses Biom. Vol. II p. 229—233.

12. *Blankinship* and *Davenport.* A precise criterion of species. Science N. S. Vol. 7 Nr. 177 1898 p. 685—695 (Allgem. Methode und Var. von Typha latifolia u. angustifolia).

13. *v. Bortkewitsch, L.* Das Gesetz der kleinen Zahlen. gr. 8°. VII, 52 pp. Leipzig (B. G. Teubner) 1898. — Naturw. Rundschau. 1898. No. 53. p. 693.

14. *Breton, Mary* and *Pearson, Karl.* Inheritance of the Duration of Life and the Intensity of Natural Selection in Man. Biom. Vol I p. 50—89.

15. *Brewster, Edwin Tenney.* Variation and sexual selection in man. (Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XXIX. 1898. No. 2. p. 45—51.)

16. *Browne, E. T.* Variation in Aurelia aurita L. Biom. V. I p. 90—108.

17. *De Bruyker, Caesar.* Over correlatieve variatie bij de Rogge en de Gerst. (l. c. p. 42—56. Mit 6 Figuren.)

18. *De Bruyker, C.* Correlatieve variatie bij de Rogge. 2e mededeeling. (Overgedruckt nit de Handelingen van het deerde Vlaamsch natuur- en geneeskundig Congres gehouden te Antwerpen op 24 September 1899. p. 75—87.) Handelt weiter über Korrelation zwischen Länge der Ähren und des obersten Halmgliedes beim Roggen.

19. *Bumpus, H. C.* The variations and mutations of the introduced squarrow. (Biol. Lectures Woods Holl. (1896.) 1897. p. 1—15.)

20. *Bumpus, H. C.* On the identification of fish artificially hatched. (Amer. Natural. V. 32. 1898. No 378. p. 407—412.)

21. *Burkill, M. A.* On the Variation of the Flower of Ranunculus arvensis. Journ. Asiatic Society of Bengal Vol. LXXI. Part. XI No. 2. 1902. p. 93—120.

22. *Byrne, L. W.* On the Number and Arrangemunt of the Bony Plates of the Young John Dory. Biom. Vol. II. p. 115—120.

23. *Chodat.* Note sur la variation numérique dans l'Orchis Morio. Bull. de l'Herbies Boissier II Série. 1901. I. p. 682 ff.

24. *Darbishire, A. D.* Note on the Results of Crossing Japanese Waltzing mice with European Albino Races. Biom. Vol. II. p. 101—104, 165—173.

25. *Davenport, Ch. B.* Statistical methods with special reference to biological variation. 148. pp. New-York City (John Wiley & Sons) 1899.

26. *Davenport, Ch. B.* Biological Lectures from the Marine Biological Laboratory of Woods Holl Boston 1898. p. 267—272. (Aimes of the Quantitative Study of Variation.)

27. — The Statistical Study of Evolution. The Popular Science Monthly September 1901. p. 447—460.

28. *Davenport, Chas. B.* A History of the Development of the Quantitative Study of Variation Science N. S. Vol. XII. No 310. 1900. p. 864—870.

29. *Davenport, C. B.* On the Variation of the Statoblasts of Pectinatella magnifica from Lake Michigan at Chicago. American Naturalist. Vol. XXXIV. 1900. Boston. p. 959—968.

30. — On the Variation of the Shell of Pecten irradians Lamark from Long

Island. Am. Nat. Vol. XXXIV. 1900. p. 863—877.

31. *Dimon, Camp Abigail.* Quantitative Study of the Effect of Enivironment upon the Forms of Nassa obsoleta and Nassa trivittata from Cold Spring Harbor, Long Island. Biom. V. II. p. 24—43.

32. *Duncker, Gg.* Preliminary report on the results of statistical and ichtyological investigations made as the Plymouth Laboratory. (Journal of the Marine Biological Association. N. S. Vol. V. No. 2. April 1898. p. 172—175.)

33. *Duncker, Gg.* Bemerkung zu dem Aufsatz von *H. C. Bumpus*, „The variations and mutations of the introduced Littorina" [Das Maß der Variabilität.] (Biolog. Zentralblatt. Bd. XVIII. 1898. No. 15. p. 569—573.)

34. *Duncker, Georg.* Die Methode der Variationsstatistik. (Sep.-Abdruck aus dem Archiv für Entwickelungsmechanik der Organismen von *With. Roux* in Halle a. S. Bd. VIII. 1889. No. 1. p. 112—183. Mit 8 Figuren im Text. Leipzig (Wilhelm Engelmann).

35. *Duncker, Georg.* Wesen und Ergebnisse der variationsstatistischen Methode in der Zoologie. (Verhandlungen der Deutschen zoologischen Gesellschaft. 1899. p. 209—226.)

36. *Duncker, Georg.* Kritisches Referat über Heincke (50) (Biolog. Zentralblatt. Bd. XIX. 1899. No. 11. 1. Juni 1899. p. 363—383.)

37. *Duncker, Georg.* On Variation of the rostrum in Palaemonetes vulgaris Herbst. The American Naturalist. Vol. XXXIV. No. 404. Aug. 1900. p. 621—633.

38. *Duncker, Georg.* Variation and Asymmetrie bei Pleuronectus flesus L. Sonderabdr. aus Wissenschaftl. Meeresuntersuchungen, herausgegeben von der Kommission zur Untersuchung der Deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Neue Folge III. Bd. Abt. Helgoland Heft 2. p. 333—402, Taf. XI—XIV. Kiel und Leipzig 1900.

39. *Elderton, Palin.* Tables for Testing the Goodness of Fitt of Theory to Observation. Biom. Vol. I. p. 155—163.

40. *Elderton, Palin.* Interpolation by Finite Differences. Two independent Variables. Biom. V. II. p. 105—107.

41. *Fawcett Cicely D., Lee Alice.* A Second Study of the Variation and Correlation of the human Skull, with special reference to the Nagada Crania. Biom. V. I. p. 408—467.

42. *Fechner, G. T.* Kollektivmaßlehre Im Auftrag der Königl. Sächs. Ges. der Wissensch. herausgegeben von *Gottl. Friedr. Lipps*, 483 pp. Leipzig [Engelmann] 1897.

43. *Field, William L. W.* A contribution to the study of individual variation in the wings of Lepidoptera. (Proceedings of the American Acad. of Arts and Sciences. Vol. XXXIII. No. 21. June 1898. p. 389—396.)

44. *Galton, Francis.* The most suitable Proportion between the Values of First and Second Prices. Biom. Vol. I. p. 385—389.

45. *Gallardo, Angel.* La Phytostatistique. Bull. Congrès internat. de Bot. à l'Exposition Universelle de 1900. Paris. p. 102—109.

46. Les Mathématiques et la Biologie. Deuxième Congrès international des Mathématiciens Paris. 1900. p. 395—403.

47. — Las Matemáticas y la Biología. Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Buenos Aires. 1901. t. LI. p. 112—122.

48. — Concordancia entre les polígonos empiricos de variación y les correspondientes curvas teoricas. l. c. t. LII. 1901. p. 61—68.

49. *Gallardo, Angel.* Sur la variabilité tératologique chez la Digitale. Compt. rend. Congrès internat. de Bot. à l'Expos. Univers. de 1900. Paris. p. 108—111.

50. *Heincke, Fr.* Naturgeschichte des Herings. 2 Bde. Text und 1 Band Tafeln. Bisher liegt 1 Band Text und der Tabellenband vor. (Abhandlungen des Deutschen Seefischereivereins. Bd. II. Heft 1—3. CXXXVI. 128 Quartseiten, Tabellenband erst XI, 206 pp., und 26 prächtig ausgeführten Tafeln mit 17 pp. Erläuterungen.)

51. *Helm, G.* Über statistische Beobachtungen biologischer Erscheinungen. (Sitzungsbericht und Abhandl. der Nturw. Gesellsch. Isis zu Dresden. 1899. Januar—Juni. p. 11.)

52. *Helm, Georg.* Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe. Ostwald Annalen der Naturphilosophie Leipzig. I 1902. S. 364—381. Zur Theorie auch Bruns in Wundt's Philos. Stud. Bd. 14. 1899. Lipps u. Wundt's Philos. Stud. Bd. 17. 1901.

53. *Hensgen, C.* Biometrische Untersuchungen über die Spielarten von Helix nemoralis. Biom. V. I. p. 468—492.

54. *Jost, L.* Über die Blüten-Anomalien bei *Linaria spuria*. (Biol. Zentralblatt. Bd. XIX. No. 5 u. 6.

p. 145—195. — Ref. Bot. Zentralblatt. LXXX. 1899. p. 21—26.)

55. *Latter, Oswald H.* The Egg of Cuculus Canorus. Biom. V. I. p. 164—176.

56. *Lee, Alice* assisted by *Pearson, V.* Data for the Problem of Evolution in Man. VI. A First Study of the Correlation of the Human Skull. Philos. Transact. A Vol. 196. p. 225—264.

57. *Lee, Alice.* Prof. Dr. Ludwig. On Variation and Correlation in Plants. Biom. V. I. p. 316—318.

58. *Lee, Alice.* On Inheritance (Great-Grandparents and Great-great-grandparents and Offspring) in Thoroughbred Racehorses. Biom. V. II. p. 234—237.

59. *Lewenz, B. A.*, Whiteley M. A. Data for the Problem of Evolution in Man. A Second Study of the Variability and Correlation of the Hand. Biom. Vol. I. p. 343—360.

60. *Ludwig, F.* Über Variationskurven. 1. Weiterer Ausbau der mathematischen Grundlage, Neue Anwendungen 2. Neue Fibonaccikurven und das Gesetz der Nebenzahlen. Botanisches Zentralbl. Bd. 75. 1898.

61. *Ludwig, F.* Über Variationspolygone und Wahrscheinlichkeitskurven. Bot. Zentralbl. Beihefte Bd. IX. H. 2. 1900.

62. — Über Variationspolygone und Wahrscheinlichkeitskurven. Bot. Zentralbl. XXI. 1900. No 15. (82 Bd. No. 2).

63. *Ludwig, F.* Een fondamenteel Verschil in de Veranderlijkheid bij het Dier en de Plant? Botanisch Jearbock uitgegeven door het Kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent. Elfde Jahrgang 1899. p. 109—121.

64. *Ludwig, F.* Über neuere Ergebnisse der Variationsstatistik. Sonderabdr. aus d. 39—42. Jahresber. der Gesellsch. von Freunden d. Naturw. in Gera (Reuß). 1896—1899. 22. S.

65. *Ludwig, F.* Das Liebesorakel der Wucherblume und die Gesetze der pflanzlichen Variation. („Mutter Erde“. Jahr. II. 1900. No 8. p. 150—153. 4. Fig. — No. 9. p. 164—167. 5 Fig.)

66. *Ludwig, F.* Variationsstatistische Probleme und Materialien. Biom. Vol. I. p. 11—29, 316—318.

67. *Lutz, Frank E.* A study of the Variation in the Number of Grooves upon tho Shells of Pecten irradians Lam, Science N. f. Vol. XII. 1900. p. 371—373.

68. *Lutz, Frank E.* Note on the Influence of Change in Sex on the Intensity of Heredity. Biom. Vol. II. p. 237.

69. *Macdonell, W. R.* Criminal Anthropometry and the Identification of Criminals. Biom. Vol. I. p. 177—227.

70. *Macdonell, W. R.* On the Influence of Previous Vaccination in cases of Smallpox. Biom. V. I. p. 375—384. A Further Study V. II. p. 135—144.

71. *Mac Leod, J.* Over de correlatic tusschen lengte en breedte van licht en schaduwbladen bij den groenen an den bruinen beuk. (Hendelingen van het tweede Vlaamsch natuur-en geneeskundig congres gehouden te Gent op 28. Augustus 1898. p. 29- 41.)

72. *Mac Leod, J.* Over de veranderlijkheid van het aantal randbloemen en het aantal schijfbloemen bij de Korenbloem (*Centaurea Cyanus*) en over correlatie verschijnselen. (Hendelingen van het deerde Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres gehouden te Antwerpen op 24. September 1899.)

73. *Mac Leod, J.* Over de correlatie tusschen het aantal meeldraden en het aantal stampers bij het speenkruid (*Ficaria ranunculoides*). (Botanish Jaarboek Dodonaea. Elfde Jaarg. 1899. Gent. p. 91—107.)

74. *Matzdorff, C.* Variationskurven. Referate über die einschläg. Arbeiten in Just's Bot. Jahresb. 1897 ff. Jahre.

75. *Obermayer, Albert Edler v.* Ein Apparat zur Veranschaulichung des Fehlerverteilungsgesetzes. (Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrg. 1899. Wien. — Ref. Naturw. Rundschau. XIV. 1899. No. 39. p. 500.)

76. *Obermayer, A. von.* Quincunx zur Veranschaulichung des Fehlergesetzes von *Francis Galton*, F. R. S. (Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrg. 1900. Heft 2. 3 pp.)

77. *Pearson, Karl.*, Contributions to the mathematical theory of evolution. Philos. Transact. R. Soc. of London. Vol. 185 A. p. 71—110. 1894. — II. Skew Variation on homogeneous material. Philos. Trans. A 186. 1895. p. 343—414. — III. Repression, Heredity and Panmixia. Phil. Trans. A 187. 1896. p. 253—318.

78. *Pearson, K.* and *Lee, Alice.* On the distribution of frequency (varition and correlation) of the barometric height at divers stations. Phil. Trans. A. Vol. 199. 1897. p. 423—469.

79. *Pearson, K.* On the relative variation and correlation in civilised and uncivilised races. Proceed. Roy. Soc. Vol. 61. 1897. p. 343—357.

80. *Pearson, K.* Mathematical contributions to the theory of evolution. Skew Variation in homogeneous Material Proceed. of the Roy. Soc. Vol. 57. 1894. p. 257—266.

81. — Note on reproductive Selection. Vol. 59. 1896. p. 302—305.

82. — On telegony in man, etc. Vol. 60. 1896. p. 273—283.

83. — On a form of spurious correlation which may arise when indices are used in the measurement of organs. Vol. 60. 1897. p. 489—498. Dazu Galton (p. 498—502).

84. — Cloudiness, note on a nouvel case of frequency. Vol. 62. 1897. p. 287—290.

85. — On the law of ancestral hieredity. V. 62. 1898. p. 386—417.

86. *Pearson, K.* and *Miss Cicely D. Fawcett.* On the Inheritance of the cephalic index. Vol. 62. 1898. p. 413—417.

87. *Pearson, K.* and *Filon, L. N. G.* VII. Mathematical contributions to the theory of Evolution: IV On the probable errors of frequency constants and on the influence of Random selection on variation and correlation. Phil. Transact. Roy. Soc. London. Ser. A. Vol. 191. 1898. p. 229—311.

88. *Pearson, Karl.* Mathematical contributions to the theory of evolution. V. On the reconstruction of the stature of prehistoric races. (Philos. Transact. of the Roy. Soc. of London. Ser. A. Vol. 192. p. 179—244. London 1898.)

89. *Pearson, K.* On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling. Philosophical Magazine for July 1900. p. 157—175.

90. *Pearson, Karl, Breton, M. Yule, G. U.* Data for the Problem of Evolution in Man. On the Correlation between Duration of Life and the Number of Offspring Proceed. Roy. Soc. Vol. 67. 1900. p. 159—179.

91. *Pearson, Karl.* Mathematical Contributions to the Theory of Evolution VII. On the Correlation of Characters not Quantitatively measurable. Philos. Transact. A Vol. 195. 1900. p. 1—47.

92. — Math. Contr. to the Theory of Evolution VIII. On the Inheritance of Charakters not capable exact quantitative Measurement. Phil. Trans. A. Vol. 195. 1900. p. 79—150.

93. *Pearson, K.* Math. Contrib. to the Theory of Evolution IX. On the Principle of Homotyposis and its Relation to Heredity, to the Variability of the Individual and to that of the Race. P. T. Homotyposis in the Vegetable Kingdom. Philos. Transact. A. Vol. 197. 1901. p. 285—379.

94. *Pearson, K.* Note on Variation in Leaves of Mulberry Trees. Biom. Vol. I. p. 258—261. — On Inheritance in the Shirley Poppy. Coop. Inv. of Pl. Biom. V. II. p. 56—100.

95. *Pearson, K.* and *G. N. Yule.* Note on Variation of Ray-flowers of Chrysanthemum leucanthemum L at Keswick. Biom. V. I. p. 319.

96. *Pearson, K.* On the Fundamental Conceptions of Biology. Biom. V. I. p. 320—344.

97. *Pearson, K.* Variation in the Egg of Passer domesticus. Biom. V. I. p. 256.

98. *Pearson, K.* Note on Dr. Simpsons Measurements of Paramaecium caudatum. Biom. V. I. p. 404-407.

99. *Davenport* and *Pearson.* Statoblasts of Pectinatella magnifica. Biom. V. I. p. 128.

100. *Pearson, Karl.* On the Systematic Fitting of Curves to Observations and Measurement. Biom. Vol. I. p. 255—303. Vol. II. p. 1—23.

101. — The Law of Ancestral Heredity. Vol. II. p. 211—228.

102. *Pearson.* Note on Francis Galtons Individual Difference Problem in Statistic.

103. *Powys, A. O.* Data for the Problem of Evolution in Man. Anthropometric Data from Austral. Biom. Vol. I. p. 30—49.

104. *Schuster, E. H. J.* Variation in Eupagurus Prideauxii Heller. Biom. Vol. II. p. 191—210.

105. *Sheppard, W.* New Tables of the Probability Integral. Biom. V. II. p. 174—190.

106. *Shull George, Harrison.* A Quantitative Study of Variation in the Bracts, Rays and Dish Florets of Aster Shortii Hook., A Novae-Angliae L., A. Puniceus L., A. Prenanthoides Mihl. from Yellow Springs Ohio. Contributions from the Biological Laboratory of Antioch College at Yellow Springs Ohio (W. L. Tower) No. 5. American Naturalist. Vol. XXXVI. No. 422. 1902. p. 111—152.

107. *Shull, G. H.* Seasonal Change in the Charakters of Aster prenanthoides (Mühl.) Biom. V. II. p. 113—114.

108. *J. G. Simpson.* The Relation of Binary Fission to Variation. Biom. V. I. p. 400—403.

109. *Smallwood, M. E.* Statistical Studies on Sand Fleas Science N. S. Vol. XII. 1900. p. 371—373.

110. *Tower, W. L.* Variations in Color pattern produced by Changes in Temperature and Moisture (Variation on Leptinotarsa decemlineata Say, dem Coloradokäfer). Science N. S. Vol. XII. 1900. No. 297. p. 371—373.

111. *Tower, W. L.* Variation in the Ray-flowers of Chrysanthemum leucanthemum at Yellow Springs, Ohio. Biom. V. I. p. 309—315.

112. *Vandevelde, J. J.* Over den invloed van de grotte der zaden op de kieming. (Bot. Jaarbock, uitgegeven door het Kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent. Jaargang X. 1898. p. 109—131. Met plaat III—IX [mit französischem Resumé].)

113. *Verschaffelt, Ed.* Galtons regression to mediocrity bij ongeslachtelijke voortplanting. (Livre jubilaire dedié à Charles van Bambeke blz. 1—5.) Brussel (Lammertin) 1899. (Blattmessungen bei *Bellis perennis.*)

114. *Vöchting, H.* Über Blüten-Anomalien. Statistische morphologische, experimentale Untersuchungen. Berlin. Bornträger. 1899.

115. *Vogler, Paul.* Über die Variationskurven von Primula farinosa. Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellsch. Zürich XLVI. 1901. p. 264—274.

116. *Vogler, Paul* und *Schröter.* Variationsstatistische Untersuchungen über Fragilaria crotonensis im Plankton des Zürichsees. Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich XLVI. 1901. p. 185—206.

117. *Vogler, Paul.* Die Anwendung der Variationsstatistik zur Untersuchung von Planktondiatomeen. Flora od. Allg. bot. Ztg., Ergänzungsband 1892. 4 S.

118. *Vogler, Paul.* Variationskurven bei Pflanzen mit tetrameren Blüten. Arb. aus d. bot. Mus. d. eidg. Polytechnikums. Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellsch. zu Zürich XVVII. 1902. p. 429—436.

119. *De Vries, Hugo.* Over het omkeeren van halve Galton curven. (Bot. Jaarboek, uitgegeven door het Kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent 1899. p. 29—61. Met Plaat I. — Ref. Bot. Zentralbl. Bd. LXXVIII. 1899. p. 48—51.)

120. *De Vries, Hugo.* Über Kurvenselektion bei Chrysanthemum segetum. (Berichte der Deutschen Bot. Ges. Bd. XVII. 1899. p. 84—98. — Ref. Bot. Zentralbl. Bd. LXXX.)

121. *De Vries, Hugo.* Über die Periodizität der partiellen Variationen. (Berichte der Deutschen Bot. Ges. Bd. XVII. 1899. p. 46—51. — Ref. Bot. Zentralblatt. LXXX. 1899. p. 21—26.)

122. *De Vries, Hugo.* Über die Abhängigkeit der Fasciation vom Alter bei zweijährigen Pflanzen. (Bot. Zentralbl. Bd. LXXVII. 1899.)

123. *De Vries, Hugo.* On biostrepsis in its relation to cultivation. (Annals of Botany. Vol. XIII. No. 51. Sept. 1899. p. 395—420.)

124. *De Vries, Hugo.* Over het periodisch optreden der anomalien op monstreuze planten. (Bot. Jaarboek, uitgegeven door het kruidkundig Genootschap Dodonaea te Gent. Jaargang XI. 1899. p. 46—67. Met plaat I.)

125. *De Vries, H.* Alimentation et sélection. (Sep.-Abdr. ohne Quellenangabe. 1900. p. 17—38.)

126. *De Vries, Hugo.* Mutationstheorie. Amsterdam. 1902.

127. *Warren, Ernest.* Variation and Inheritance in the Parthenogenesis Generations of the Aphis Hyalopterus trirhodus Walk. Biom. V. I. p. 129—154.

128. *Warren, E.* On observation on inheritance in parthenogenesis. (Proc. Roy. Soc. London. Vol. 65. No. 415. 1890. p. 154—158.)

129. *Weldon.* On the principal objections urged against the theory of natural selection. (Rep. 68. Meet. Brit. Assoc. Bristol 1899. p. 887—902. — Nature. V. 58. No. 1408. 1898. p. 499—506.)

130. *Weldon, W. F. R.* Über die Haupteinwände gegen die Theorie der natürlichen Auslese. (Rede zur Eröffnung der zoologischen Section d. Brit. Assoc. Bristol 1898. — Nature. LVIII. 1898. p. 499. — Naturw. Rundschau. 1898 No. 52 u. 53.)

131. *Weldon, W. F. R.* Change in Organic Correlation of Ficaria ranunculoides during the Flowisms Season. Biom. V. I. p. 125.

132. — Variation and Correlation in Lesser Celandine from divers Localities Properative Investigations on Plants. Biom. V. I. p. 145—164.

133. *Weldon, W. F. R.* A First Study of Natural Selection in Clausilia laminata Nom. Biom. V. I. p. 109—128.

134. *Whitshead, Henry.* Variation in the Moscatel (Adoxa moschatellina). Biom. V. II. p. 108—112.

135. *Yule Udny, G.* Variation in the number of Sepals in Anemone nemorosa L. Biom. V. I. p. 307—308.

136. *Yule, G. Udny.* Notes on the Theory of Association of Attributes in Statistics. Biom. V. II. p. 121—134.

Die Entwicklung der jungen Wissenschaft wird übersichtlich dargestellt besonders durch die Arbeiten von Bateson (8), Davenport (26, 27, 28), Duncker (35), Angel Gullardo (45, 46, 47, 48), Ludwig (66).

Als Anleitung zu variationsstatistischen Untersuchungen können außer den früher von mir citierten Werken besonders dienen die Lehrbücher von Davenport (25), Georg Duncker (34), Fechner (42).

Nach verschiedener Richtung haben der mathematische Ausbau und die allgemeinen Theorien, welche in Betracht kommen, wesentliche Erweiterungen und Ergänzungen — namentlich durch die Arbeiten von Karl Pearson erfahren (71, 80, 83, 84, 87, 89, 91, 92, 93, 5, 100, 101, 102, 105, 108, 113, 119, 121, 129, 136, 2, 3, 27, 50, 39, 40, 44, 51, 52, 60, 61, 62, 63 und 68, 71, 81, 85, 96, 125, 126, 129, 130).

Auf Anthropometrie und andere biometrische Probleme der Anthropologie beziehen sich die Abhandlungen 3, 4, 6, 14, 15, 41, 56, 59, 69, 70, 79, 82, 86, 88, 90, 103. Außer anderen Anwendungen auf die Zoologie, die sich in einzelnen der citierten Abhandlungen niedergelegt finden, sind Gegenstand der neueren biometrischen Untersuchungen gewesen: von Säugetieren: Pferde und Pferderassen (10, 11, 58), japanische Tanzmäuse und weiße Mäuse (24); von Vögeln: Sperling (19, 97) und Kuckuck (55); Fische (20, 26, 32, 38, 50); ferner Schnecken und Muscheln (30, 31, 33, 53, 67, 133); Kruster (37, 104); Käfer (7, 110); Schmetterlinge (43), Blattläuse (127, 128), Moostierchen (29, 99), Seesterne (60), Quallen (16), Infusorien (98).

Gegenstand der phytometrischen Arbeiten waren: Algen (116, 117); Lebermoose (Marchantia 61); Laubmoose (1); Orchideen (23); Gramineen (17, 18, 61, 66); Ranunculaceen: Ficaria verna (66, vgl. die frühere Arbeit von Burkill, ferner 21, 64, 72, 131, 132), Ranunculus, Caltha, Trollius (60, 61, 64); Anemone (135); Amygdaleen (66); Papilionaceen (61); Compositen: Bellis (60), Petasites (61), Homogyne (66), Solidago 2 Arten (61), Chrysanthemum (61, vgl. auch die daselbst erörterte Notiz von Lucas; 65, 66, 95, 111, 120, 126), Tussilago (60), Aster (107, 107); Centaurea (72); Caprifoliacen: Lonicera (61), Adoxa (134); Scrofulariaceen (teratolog.) Linaria (54, 114), Digitalis (49), sonstige Mißbildungen (122, 123, 124), Primulaceen: Primula farinosa (60, 61, 115); ferner Blätter von Rot-Buche (62, 71), Hainbuche (63), Maulbeerbaum (94).

2. Spaltungsgesetz der Bastarde von Arten und Varietäten.

1. *Bateson* and *Miss E. R. Saunders.* Experiments. Reports to the Evolution Committee of the Royal Society London Harrison and Sons. 1902. 160 pp.

2. *Correns, C.* Über Levkojenbastarde. Zur Kenntnis der Grenzen der Mendelschen Regeln. Bot. Zentralbl. Bd. 84. 1900. No. 43. p. 97—113.

3. *Correns, C.* Bastarde zwischen Maisrassen mit besonderer Berücksichtigung der Xenien. Bibliotheca botanica herausgeg. von Luerssen. Stuttgart 53.

4. *Correns, C.* G. Mendels Regel über das Verhalten der Nachkommenschaft der Rassenbastarde. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. 18. 1900. p. 158—168.

5. *Fruhwirt.* Neue Forschungen und ihre Verwertung bei der Pflanzenzüchtung. Jahrbuch d. Deutschen Landwirtschaftsgesellsch. Bd. 17. 1902. p. 220—236.

6. *Mendel, Gregor, Johann.* Über Gesetzmäßigkeiten bei Vererbung nach einer Bastardierung. Abh. d. naturf. Ges. Brünn. 1865. Vol. 4. p. 1. Abgedruckt in Goebel Flora 1900, Ergänzungsband und in Ostwalds Klassikern der exakt. Wissensch. No. 121.

7. *Tschermak, E.* Über künstliche Kreuzung bei Pisum sativum. Wien. 1900. 91 S.

8. *Tschermak, E.* Weitere Beiträge über Verschiedenartigkeit der Merkmale bei Kreuzung von Erbsen und Bohnen. Ber. d. D. B. Ges. Bd. 19. 1901. p. 35—51. Zeitschr. f. landwirtsch. Versuchsw. in Österr. 1901. 95 S.

9. *Tschermak, E.* Über Züchtung neuer Getreiderassen mittelst künstlicher Kreuzung. Kritisch historische Betrachtungen. Zeitschr. f. landwirtsch. Versuchswesen in Österr. 1901. 32. S.

10. *Tschermak, E.* Über die gesetzmäßige Gestaltungsweise der Mischlinge (Fortgesetzte Studie an Erbsen und Bohnen) l. c. 1902. 80. S.

11. *De Vries.* Sur la loi de disjonction des hybrides. Compt. rend. de l'Acad. des scienc. Paris 26. Mars 1900.

12. *De Vries, H.* Das Spaltungsgesetz der Bastarde. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. 18. 1990. p. 83—90.

13. *De Vries, H.* Über erbungleiche Kreuzungen. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. Bd. 18. 1900. p. 435—443.

14. *De Vries, H.* Sur l'origine expérimentale d'une nouvelle espèce vegetale. Compt. rend. des séances de l'acad. d. sciences Paris 21. 1900. p. 124.

15. — Sur la mutabilité de l'Oenothera Lamarckiana l. c. p. 193.

16. — Variabilité et mutabilité. Congrès internat. de Bot. à l'Exposition univers. de 1900. Paris. 6 S.

17. *De Vries, H.* La loi de Mendel et les caractères constants des hybrides. Compt. rend. des séances de l'Acad. d. Sc. Paris. 2. Févr. 1903. 3 S.

18. — Die Mutationslehre. Veit. Leipzig. II. Bd. 1902.

19. *Weldon, W. F. R.* Mendels Laws of Alternative Inheritance in Peas. Biom. V. I. 228—264.

20.. — On the Ambiguity of Mendels Categories. Biom. V. II. p. 44.

Die merkwürdigen Gesetzmäßigkeiten bei der Vererbung von Merkmalen bei Bastarden, welche der Brünner Abt Gregor Johann Mendel 1865 entdeckt hatte, haben unabhängig von einander und zunächst unbekannt mit der Arbeit Mendels (6) fast gleichzeitig Hugo de Vries (11, 12), C. Correns (3, 4, 5) und E. Tschermak bestätigt und durch die Wahrscheinlichkeits- und math. Kombinationslehre begründet und in weiterer Folge vor dem bestätigenden Experiment abgeleitet. Indem sie mit den verschiedensten Pflanzenspecies und -varietäten experimentierten, fanden sie bald die vererblichen Merkmale verschieden und konnten für sie verschiedene weitere Gesetzmäßigkeiten nachweisen. Zuletzt haben Bateson und Miß Saunders noch mit Schmetterlingen (Pieris Napi und der Varietät bryoniae derselben und Pararge egeria und der Varietät egerides) und mit Varietäten von Atropa Belladonna und Lychnis vespertina, mit Arten von Datura und Matthiola experimentiert und die Mendelsche Lehre weiter geprüft und erweitert (1). Inzwischen hatte H. de Vries die Entstehung neuer Arten durch Mutation nachgewiesen (14, 15, 16, 18) und den Unterschied zwischen Mutation und Variation wie zwischen Art und Varietät neu und scharf festgelegt, so daß es ihm in seiner jüngsten Arbeit (17), wie es uns scheint, gelungen ist, mit einem Schlag Licht in den scheinbaren Wirrwarr der neu ermittelten Tatsachen und die scheinbaren Ausnahmen des Spaltungsgesetzes der Bastarde zu bringen und seine Hypothese tiefer zu begründen, nach welcher die bei der Kreuzung in Betracht kommenden Merkmale an gewisse materielle Einheiten gebunden sind. Sie stellen die eigentlichen Einheiten dar, während das Individuum, die Varietät und Species aus ihnen zusammengesetzte komplexe Größen sind. Eine übersichtliche, leichfaßliche Darstellung der Ergebnisse von Mendel, de Vries, Correns, Tschermak etc. gibt (5) (vgl. auch Naturw. Rundschau 1902 No. 51, 52); während die letzten Untersuchungen in (18) und (17) niedergelegt sind.

Kleinere Mitteilungen.

Über die darstellend-geometrische Konstruktion der Schmiegungsebene einer Raumkurve in einem gegebenen Punkt.

Die Aufgabe, bei einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve die Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkt zu konstruieren, wird in den mir bekannten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie (z. B. dem von Chr. Wiener, Band I, S. 212, Nr. 255, und dem von Rohn-Papperitz, Band I, 2. Auflage, S. 335, Nr. 458) auf die folgende Weise gelöst. Es werden auf der Kurve, deren Tangente im gegebenen Punkt als bekannt vorausgesetzt wird, in der Nähe dieses Punktes willkürlich einige Punkte angenommen und mit dem gegebenen Punkt durch Geraden verbunden, dann die Spuren dieser Geraden mit einer Tafel, z. B. der Grundrißtafel, konstruiert, worauf an den Ort dieser Spuren in der gleichnamigen Spur der erwähnten Tangente der gegebenen Kurve die Tangente gezogen wird, welche Tangente die betreffende Spur der gesuchten Schmiegungsebene ist. Es gibt noch ein anderes Verfahren, das mir bei der Ausführung einige Vorteile zu bieten scheint. Man projiziere die gegebene Kurve C parallel der (wieder als bekannt angesehenen) Tangente T im gegebenen Punkt p auf irgend eine Tafel, dann wird die erhaltene Kurve C^s in der Projektion p^s von p eine Spitze haben, wenn p ein gewöhnlicher Punkt von C ist, und die Tangente von C^s in p^s wird wieder die fragliche Spur der gesuchten Schmiegungsebene von C in p vorstellen. Die Konstruktion bleibt richtig, wenn p ein singulärer Punkt von C ist.[1])

Stuttgart. R. Mehmke.

1) Die Art des Punktes p^s der Kurve C^s entspricht dem „Tangentenanblick" von C in p, vgl. diese Zeitschrift, S. 64 des laufenden Bandes. — Die Projektion von C aus einem beliebigen (nicht dem unendlich fernen) Punkte der Tangente T führte selbstverständlich auch zum Ziel, wäre aber für die wirkliche Ausführung weniger geeignet.

Auskünfte.

F. M., K. In der Tat wird schon in der ersten Auflage von B. Guglers Lehrbuch der deskriptiven Geometrie (Nürnberg 1841) das Wort *Spitze* ausschließlich für den Rückkehrpunkt erster Art gebraucht und für den Rückkehrpunkt zweiter Art das Wort *Schnabel* (nicht „Schnabelspitze"). Eingeführt werden diese Benennungen auf S. 143. — Außer den auf S. 90 des laufenden Bandes dieser Zeitschrift genannten Werken von Wolff, Klingenfeld und Pohlke gibt es allerdings nicht wenige andere, in denen ebenfalls *Punkte mit kleinen lateinischen Buchstaben* statt mit großen bezeichnet sind, z. B.: J. C. G. Hampel, Geometrische Konstruktionen, Weimar 1839; W. Marx, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Nürnberg 1885; A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris 1894. Eine etwas vollständigere Liste wäre sicher ganz erwünscht. M.

J. H., S. Der in der Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. 1, S. 1028, Anm. 423 erwähnte *antilogarithmische Maßstab* zur Bestimmung von Flächeninhalten ist, wie unsere Anfrage bei seinem Erfinder, Herrn Joh. Schnöckel, vereid. Landmesser in Düren (Rhld.), Kölnerstr. 101, ergeben hat, bis jetzt nicht in den Handel gekommen, kann jedoch beim Erfinder bestellt werden. Wir können noch mitteilen, daß Herr Schnöckel neue Anwendungen des antilogarithmischen Maßstabes gefunden hat, die er in dieser Zeitschrift veröffentlichen wird. M.

Bücherschau.

Study, E. Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig 1902. B. G. Teubner. XIII u. 603 S. gr. 8^0.

Die Beziehungen zwischen den Gebilden der Liniengeometrie und den Lehren der Kinematik und Dynamik eines starren Körpers sind schon in den ersten Anfängen beider Disziplinen bei Möbius und Plücker hervorgetreten und seither nach vielen Richtungen ins einzelne ausgearbeitet und verwertet worden. Der Verfasser hat jedoch diese Gebiete zum erstenmale systematisch unter den Gesichtspunkten der Gruppentheorie und Mengenlehre bearbeitet und nicht nur neue Einzelheiten hinzugefügt, sondern auch die Grundlagen für ein festes Urteil über die Tragweite seiner Methoden an sich und für verwandte Gebiete geschaffen.

Schon in einer Reihe von Aufsätzen, welche in den Berichten der sächsischen Akademie, der deutschen Mathematikervereinigung und den mathematischen Annalen erschienen sind, hat der Verfasser einen Teil seiner Methoden, aber auch seinen grundsätzlichen kritischen Standpunkt gegenüber den Arbeiten anderer Autoren auseinandergesetzt, und auch hier nimmt er Gelegenheit, darauf zurückzukommen und nachdrücklich die Forderung zu vertreten, daß auch auf dem Gebiete der Geometrie den Grenz- und Ausnahmefällen dieselbe Beachtung zuteil werde, wie im Gebiete der Analysis. Wir berichten nun über den Inhalt.

Neben die bisher ausschließlich zur Zusammensetzung von Kräften verwendete Figur des Stabes, d. i. einer auf einer bestimmten Geraden verschiebbaren Strecke, stellt der Verfasser im ersten Abschnitt zwei andere Figuren: den Keil, d. i. ein um die gemeinsame Gerade drehbares Ebenenpaar und den Quirl, d. i. die Figur eines Punktes und einer Ebene. Er zeigt, daß diese Figuren ebenso einer geometrischen Addition fähig sind, welche durch zwei Figuren, das Keiltrapez und das Quirltrapez, erklärt werden können und dem Parallelogramm der Kräfte analog sind. Dabei finden nach dem Programm des Verfassers die Ausartungen und die als uneigentliche Stäbe, Keile, Quirle zu bezeichnenden Figuren ihre eingehende Erörterung.

Zu diesen tritt nun die Figur des Motors, das ist eines in bestimmte Reihenfolge gesetzten Geradenpaares, dessen Gerade einander nicht rechtwinklig schneiden oder kreuzen. Die beiden nacheinander um diese Geraden des Motors ausgeführten Umwendungen (Drehungen um den Winkel π) liefern eine Schraubenbewegung, welche die gemeinsame Normale der beiden

Geraden des Motors zur Achse, den doppelten kürzesten Abstand derselben zur Schiebungsgröße und deren doppelten Winkel zur Drehung hat.

Damit erkennt man die Möglichkeit, einem Motor eine allgemeine Schraubung zuzuordnen und die Zweckmäßigkeit der Vorschrift, Motoren einander gleichzusetzen, welche zur selben Schraube gehören. Einer allgemeinen Summe von Stäben (heteraptischen Summe) läßt sich also die Figur des Motors zuordnen.

Es ergeben sich drei Arten von Superposition von Bewegungen, welche als lineare, korrelative und stereometrische unterschieden werden, neben welche eine geometrische und eine stereometrische Addition der Motoren gestellt wird.

Die Quelle aller dieser verschiedenen Konstruktionen und ihrer in Ausartungen wieder vielfach durchbrochenen Analogien wird darin aufgedeckt, daß die betrachteten Konstruktionen aus einem geschlossenen System solcher im nichteuklidischen Raum durch Grenzübergang hergeleitet werden können, wobei jedoch einzelne Teile und Beziehungen des Gesamtsystems ihren Sinn verlieren.

Während bisher vorwiegend elementargeometrische Methoden zur Verwendung kommen, wird im zweiten Abschnitt die analytische Geometrie und mit ihr die symbolische Darstellung herangezogen, um die Ergebnisse des ersten Abschnittes algebraisch zu begründen und neue Methoden zu gewinnen. Das wichtigste Hilfsmittel zu diesem Zwecke ist die Einführung dualer Größen, d. h. bikomplexer Größen von der Form $a + b\varepsilon$, wo a und b gewöhnliche komplexe Größen, ε dagegen eine neue Einheit bezeichnet, für welche $\varepsilon^2 = 0$ ist.

Es zeigt sich dann, daß man die Verhältnisse von drei reellen dualen Größen $x_1 : x_2 : x_3$ als Koordinaten eines Strahles verwenden kann. Es sind im Grunde die Verhältnisse von sechs reellen Größen, welche im Plückerschen Sinne als Koordinaten eines Gewindes (linearen Komplexes) aufzufassen sind. Der durch die dualen Koordinaten bestimmte Strahl ist dann die Hauptachse des Gewindes oder vielmehr eines ganzen koaxialen Bündels von solchen.

Die Einführung dieser dualen Größen gestattet nun die Erklärung dualer Winkelgrößen und ihrer trigonometrischen Funktionen, so daß eine Übertragung der sphärischen Trigonometrie auf den Strahlenraum entsteht.

Diese an sich schon sehr interessante Tatsache wird noch dahin erweitert, daß man nunmehr den einzelnen Figuren, Keil, Motor etc., alternierende duale Formen in der Weise zuordnen kann, daß den verschiedenen Arten der Addition auch eine einfache Addition der zugeordneten Formen entspricht.

Die Bewegungen erscheinen dann als orthogonale, lineare, duale Transformationen eines dualen, ternären Gebietes. Dieser Umstand leitet zu den Betrachtungen des dritten Abschnittes über, als deren Hauptproblem die Klassifikation der linearen Systeme von Gewinden (Dynamen, infinitesimalen Bewegungen) anzusehen ist. Dabei nehmen insbesondere die geometrischen Orte der Hauptachsen dieser Gebilde — Ketten genannt — besondere Aufmerksamkeit in Anspruch.

Die Methode des Verfassers geht nun dahin, daß er entsprechend dem sich selbst reziproken Charakter des Strahles die Strahlenmannigfaltigkeit des Raumes sich doppelt überdeckt denkt, und nun die Bestimmung trifft, daß die dualen Koordinaten der Strahlen der einen Schicht kontragredient zu denen der andern Schicht linearen homogenen Transformationen unterworfen werden.

Nimmt man hierzu noch die Vertauschung der beiden Schichten und die Ähnlichkeitstransformation, so entsteht eine Gruppe, welche als die der radialen Kollineationen und Korrelationen bezeichnet wird und unter dem Namen der radialen Projektivität die Grundlage für das Weitere bildet. Analog wie Segre Antiprojektivität eingeführt hat, so lassen sich auch hier noch Antikollineationen und Antikorrelationen durch Übergang zu konjugiert-dual komplexen Größen definieren. Diese Transformationen umfassen dann alle, welche aus dem Normalennetz eines eigentlichen Strahles wieder ein solches hervorgehen lassen.

Um nun die zu entwickelnden Sätze möglichst einfach und ohne unnötige Beschränkungen aussprechen zu können, ist es notwendig, das Kontinuum der eigentlichen Strahlen zu einem abgeschlossenen im Sinne Cantors zu ergänzen, und zwar so, daß die radiale Projektivität ausnahmslos bestimmt eindeutig und stetig ist.

Die Aufgabe ist vollständig analog der in der Geometrie der Ebene auftretenden Frage nach der Definition der uneigentlichen Punkte und durch die Gruppe der Operationen bestimmt. So wie in der Ebene die Annahme der projektiven Gruppe die uneigentliche Gerade, dagegen die Annahme der Gruppe der Inversionen den uneigentlichen (unendlich fernen) Punkt zum Abschluß des Kontinuums erfordert, so zeigt sich hier, daß bei der Gruppe der radialen Projektivitäten die Definition der uneigentlichen Strahlen verschieden ausfallen muß von der Definition eben dieser in der projektiven (Plückerschen) Liniengeometrie. Besonders merkwürdig aber ist, daß dieser Forderung auf zwei verschiedene Arten entsprochen werden kann. Algebraisch findet diese Tatsache ihren Ausdruck darin, daß das Kontinuum der Strahlen auf zwei verschiedene Arten auf vierfach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten des Raumes von 8, resp. 17 Dimensionen abgebildet werden kann.

Es ist ferner klar, daß die Außerachtlassung der Unterschiede in der Definition der uneigentlichen Elemente ebenso zu Fehlern führen wird, wie wenn man projektive Sätze ohne weiteres, also mit den Grenzfällen, auf die Inversionsgeometrie übertragen wollte.

Nach Erledigung dieser besonders eingehend behandelten Fragen wendet sich der Verfasser nun zu dem weiteren Ausbau der Theorie der Systeme linearer Gewinde, der dazugehörigen Ketten und Kettenkongruenzen. Dabei erfährt auch die systematische Stellung der radial projektiven Geometrie zur euklidischen eine neue Beleuchtung.

Eine auszugsweise Wiedergabe ist aber schon wegen der Fülle der neu zu erklärenden Gebilde unmöglich.

Ein Anhang entwickelt eine neue Methode der Kinematik, welche so als natürliche Erweiterung der Strahlengeometrie im radialprojektiven Sinne erscheint.

Es zeigt sich nämlich, daß die Lage eines starren Körpers (Soma) zu einem festen solchen Körpers (dem Protosoma) durch die Verhältnisse von vier dualen Größen gegeben gedacht werden kann. Damit erscheinen die Somen als ein dual-quaternäres Größengebiet, und die ganze Algebra der linearen dualen Transformationen läßt sich für die Lehre von den Somen und Somenketten verwerten, da die grundlegenden Formenbildungen auch einfache geometrische Bedeutung haben.

So sagt zum Beispiel die Kovariante der vereinigten Lage durch ihr Verschwinden aus, daß die beiden Somen durch Umschraubung auseinander hervorgehen. Aber auch eine bestimmte, einfache Metrik läßt sich entwickeln und in einfacher Weise ein Begriff der Entfernung zweier Somen als Invariante gegenüber orthogonalen Transformationen aufweisen, der einfach aus der halben Drehung und der halben Schiebung jener Schraubung zusammengesetzt ist, welche das erste Soma in das zweite überführt.

Der Ausbau der so begründeten Somengeometrie wird nun nach denselben Gesichtspunkten begonnen wie die der radialprojektiven Geometrie, deren Weiterbildung für vier Veränderliche sie ist.

Bei dieser Inhaltsangabe mußten wir uns begnügen, dem Leser über die wichtigsten Objekte und Gesichtspunkte zu berichten, welche der Verfasser geboten hat. Man mag hieraus ersehen, daß das Werk reichhaltig und eigenartig ist, nicht bloß in bezug auf Resultate, sondern auch, was vielleicht mehr ist, in bezug auf Methoden und Auffassungen.

Innsbruck. WIRTINGER.

Veröffentlichung des Königl. Preußischen Geodätischen Instituts. (Neue Folge Nr. 7.) **Astronomisch-geodätische Arbeiten erster Ordnung. Bestimmung der Längendifferenz Potsdam—Pulkowa im Jahre 1901.**

Die Arbeit enthält die Beobachtungsergebnisse der deutschen Beobachter Herren Albrecht und Borraß bei der Längenbestimmung Potsdam—Pulkowa und hat im wesentlichen die Form anderer Längenbestimmungen des geodätischen Instituts. Die ca. 1 Stunde 9 Minuten betragende Längendifferenz wurde zu zwei Dritteln zu den Zeitbestimmungen, der Rest zu den Signalwechseln verwendet.

Jede vollständige Zeitbestimmung umfaßte fünf bis sechs Zenitsterne und einen Polstern. An jedem vollständigen Abend wurden sowohl in Potsdam wie in Pulkowa fünf solcher Gruppen beobachtet, davon die erste nur in Potsdam, die letzte nur in Pulkowa, die drei mittleren an beiden Orten.

Während des Durchganges je eines Sternes wurde das betreffende Passageinstrument einmal umgelegt und zehn Repsoldkontakte in jeder Lage benutzt. Das Niveau wurde gleichzeitig mit umgelegt und so die Neigung ohne Umhängen des Niveaus erhalten.

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels aus je einem Kontakte Kreis Ost und Kreis West ergibt sich im Mittel aus den beiden Beobachtern etwa zu:

$$m = \sqrt{(0^s\!.048)^2 + (0^s\!.0228)^2 \sec^2 \delta}.$$

Bei Herrn Albrecht scheint keine Helligkeitsgleichung vorhanden zu sein, wohl aber bei Herrn Borraß. Dies könnte sich in der Tat wohl dadurch erklären, daß das von ersterem durchgehend benutzte Instrument 81 mm Öffnung hatte, während das von letzterem benutzte Instrument bei nahezu gleicher Brennweite nur 68 mm Öffnung hatte.

Die Positionen der Sterne sind dem Berliner Jahrbuche entnommen worden mit Anbringung der Auwersschen Korrektionen. Trotzdem sind aber an den Rektaszensionen noch Korrektionen angebracht worden, um das Beobachtungsmaterial homogener zu machen. Diese Korrektionen scheinen, wenn man die Gesamtheit der Resultate betrachtet, im allgemeinen reell zu sein.

Die Signalwechsel wurden zwischen den Zeitbestimmungen des geodätischen Instituts unter strengem Ausgleich der Stromstärken ausgeführt. Obgleich zwischen Berlin und Petersburg nur ältere Eisendrahtleitungen vorhanden waren, hat sich doch keine merkbare Beeinflussung des Resultats herausgestellt, es bedurfte aber kräftiger Batterien von je 300 Meidinger Elementen.

So zeigen denn auch die Werte für die Stromzeit an den verschiedenen Beobachtungsabenden eine bemerkenswerte Übereinstimmung.

Übrigens haben die Beobachter am 22. September die Stromstärke variiert, ohne einen merklichen Einfluß auf die Signalwechsel zu finden (S. 35—36). Interessant ist, daß die Stromzeit auf der 1696 km langen Eisendrahtleitung Potsdam—Pulkowa mehr als doppelt so groß war, als auf der 1878 km langen Bronzedrahtleitung Potsdam—Bukarest.

Die Kontaktbreite und der tote Gang der Mikrometerschrauben sind durch wenige Messungen sehr genau erhalten worden.

Der mittlere Fehler der Uhrkorrektion aus einem Stern ergibt sich im Mittel zu $\pm 0^s\!.034$, und zwar in Pulkowa wohl infolge des ungünstigeren Klimas etwas größer als in Potsdam.

Die Summe der persönlichen und instrumentellen Gleichung ergibt sich zu $-0^s\!.025$, was hauptsächlich durch die Verschiedenheit der angewandten Instrumente bedingt zu sein scheint.

Der mittlere Fehler eines vollen Tagesresultates ergibt sich aus der Übereinstimmung der Tagesresultate untereinander zu $\pm 0^s\!.018$.

Greifswald. W. Ebert.

P. Güssfeldt. Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und die Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. XIX u. 377 S., 8⁰. Braunschweig 1902 (auf dem Umschlag 1903).

Dieses Werk will vorwiegend vom pädagogischen Standpunkte beurteilt werden; auch so scheint es nicht ganz leicht, ihm vollkommen gerecht zu werden.

Die ersten 90 Seiten befassen sich mit den geometrischen und analytischen Grundlagen des zu behandelnden Stoffes und zwar unter Voraussetzung der geringstmöglichen Vorkenntnisse. Der dritte Abschnitt leitet mit den „tatsächlichen Grundlagen der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung" über zum engeren Thema. Der Erläuterung der verschiedenen Koordinatensysteme, der aus der scheinbaren Bewegung der Himmelskugel hervorgehenden einfachen Beziehungen wird ein breiter Raum gewidmet. Der vierte Abschnitt „Zeit und Zeitmessung", bringt zunächst die Definition des Prinzips aller Zeitmessung in der Form: „Durch identische Vorgänge werden identische Zeitintervalle erfüllt". Dann folgt die Besprechung der astronomischen Zeiteinheiten, der Kalenderrechnung, der Verwandlung der verschiedenen Zeitarten und eine Betrachtung des Sonnenlaufs in seiner Wirkung auf Klimate und Jahreszeiten. Im nächsten Abschnitt findet man eine elementare Darstellung der sphärischen Trigonometrie und ihrer Anwendung auf das astronomische Grunddreieck. Die Fehlertheorie des Universals im 6ten Abschnitt setzt die Kenntnis des Instrumentes und seiner Handhabung voraus, unterweist indes erschöpfend im richtigen Gebrauch.

Auf Seite 245 — das Buch zählt im ganzen 368 Seiten Text — beginnt der Vortrag der eigentlichen „Messungsmethoden für Zeit, Polhöhe und Azimut", dem aber noch eine Erklärung von „Uhren, Uhrkorrektion und Uhrgang", auf $4\frac{1}{2}$ Seiten vorangeschickt ist. Bei der Zeitbestimmung mittelst Zenitdistanzen wird das Universal angenommen und die Manipulation am Instrument und die Berechnung ausführlich beschrieben. Die Gangbestimmung einer Uhr nach dem Olbersschen Vorschlag (Verschwinden eines Sternes hinter der vertikalen Kante eines terrestrischen Gegenstandes) schließt sich kurz an. Sodann folgt eine wiederum umständliche Darlegung der Zeitbestimmung aus korrespondierenden Höhen. Zur Polhöhenbestimmung wird auf $9\frac{1}{2}$ Seiten die Methode der Circummeridianhöhen gelehrt und die gleichzeitige Ermittelung von Zeit und Polhöhe durch die Beschreibung der indirekten Methode erledigt. Mit der Azimutsbestimmung durch die Sonne schließt dieser Abschnitt, für dessen sämtliche Methoden, wie nochmals hervorgehoben sei, dem Universal der Vorzug gegeben wird.

Bei der Behandlung der Fehlereinflüsse der verschiedenen Stücke des Grunddreiecks im 8ten Abschnitt hat der Verf. die Grundbegriffe der Differentialrechnung (bis auf den Taylorschen Lehrsatz) auf 6 Seiten dargelegt. Ohne Differentialrechnung die Frage einfacher zu lösen, hätte eher in den Rahmen des Buches gepaßt. „Das nautische Jahrbuch und der Gebrauch fünfstelliger Logarithmen", „Beispiele für das numerische Rechnen angestellter Beobachtungen", „Meridianellipse und Gestirnsparallaxe" füllen den 9ten, 10ten, 11ten Abschnitt. Der 12te bringt die „Methoden der Längenbestimmung", von denen eingehend nur diejenige durch Sternbedeckungen behandelt wird. — Der Anhang enthält Tafeln für $\log \frac{2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}{\sin 1''}$ und für $\log \frac{2 \sin^4 \frac{\tau}{2}}{\sin 1''}$.

Überblickt man den sachlichen Inhalt des Werkes, so erkennt man, daß es vertraut gemacht hat mit der Zeitbestimmung durch Höhen beim I. Vertikal und durch korrespondierende Höhen, mit der Polhöhenbestimmung durch Circummeridianhöhen und der Längenbestimmung durch Sternbedeckungen. Einige andere Methoden sind indes soweit gestreift worden, daß ein aufmerksamer Leser sie sich selbst leicht wird konstruieren können.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

S. Günther. Astronomische Geographie. 16^0, 170 Seiten. Leipzig 1902. Sammlung Göschen Nr. 92.

In dem kleinen Werkchen, welches alle Vorzüge Günther scher Darstellung aufweist, fixiert der Verf. das Programm der astronomischen Geographie wie folgt: „Ermittelt sollen werden die Gestalt und Größe des Erdkörpers, dessen Bewegungsverhältnisse im Raume und die Methoden der geographischen Ortsbestimmung; letztere im ausdrücklichen Zusammenhang mit der Frage, ob das Koordinatensystem, auf welches man sich zu beziehen pflegt, als ein vollkommen stabiles oder als ein selbst in seiner Lage veränderliches anzuerkennen sei." Die hier angedeuteten Aufgaben finden eine ansprechende und kurze Darstellung, sodaß nicht nur der Laie, sondern auch der Physiker und Astronom das reichhaltige in 14 Kapitel gegliederte Buch noch mit Vergnügen durchlesen wird. Den Wert des Buches erhöhen nicht wenig die zahlreichen historischen Anmerkungen und Hinweise. Auch jedem, der als Lehrer mit dem Gegenstande zu tun hat, wird es sehr willkommen sein.

Straßburg i. E. C. W Wirtz.

C. v. Dillmann. Astronomische Briefe. Neue Folge. Kometen, Sonne, Fixsterne. 8^0. III u. 234 S. Tübingen 1901.

In schlichter und klarer Darstellung behandelt der Verfasser einige Kapitel der deskriptiven Astronomie. Die einzelnen Abschnitte stehen in keinem inneren Zusammenhang; jeder Brief ist vielmehr ein in sich geschlossenes Ganzes. Durch zahlreiche historische Einstreuungen wird der Stoff angenehm belebt. Hier und da stießen uns zwar schiefe Ausdrücke, aber keine direkten Unrichtigkeiten auf. Auch die nötige Vorsicht im Vortrag noch nicht gesicherten astronomischen Wissens wird man dem Buche nicht absprechen können.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Schubert (Hamburg). **Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentages für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt,** mit Berücksichtigung der Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christi Geburt und zur Bestimmung der Daten der christlichen Feste. 8^0. 6 S. auf Carton. Leipzig 1902.

Das übersichtlich angeordnete Werkchen zerfällt in 5 Tabellen, von denen I und II der Bestimmung des Wochentages eines beliebigen vorgelegten Datums alten oder neuen Stils gewidmet sind. I ist in 3 Tabellen gespalten, gültig der Reihe nach für die Jahre nach Christo, vor Christo und die Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christo. Den gesuchten Wochentag findet man recht einfach durch Eingehen in 2 Tafeln mit je 2 Argumenten. Tabelle III und IV vermitteln in Verbindung mit I die Kenntnis des Osterdatums und Tabelle V die Festsetzung einiger von Ostern abhängiger Feste.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Neue Bücher.

Astronomie.

1. Möbius, A. F., Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. (Sammlung Göschen Nr. 11.) 10. verb. Aufl. bearb. v. Walt. F. Wislicenus. 12°, 170 S. m. 36 Abb. u. 1 Karte des nördl. Sternhimmels. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 80.

Darstellende Geometrie.

2. Müller, Carl Heinr., und Presler, Otto, Leitfaden der Projektionslehre. Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien u. Oberrealschulen. Leipzig, Teubner. geb. M. 4. — Dasselbe. Ausgabe B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Ebenda. geb. M. 2.

Mechanik.

3. Gauss, Carl Friedrich, Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. Übers. v. Rudolf H. Weber hrsg. v. H. Weber. (Ostwalds Klassiker Nr. 135.) Leipzig, Engelmann. 8°, 73 S. geb. M. 1.20.
4. Mehrtens, Geo. Christoph, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. (In 3 Bdn.) 1. Bd. Einführung in die Grundlagen. gr. 8°, XVI u. 423 S. m. 377 z. Tl. farb. Fig. Leipzig, Engelmann. M. 20; geb. in Leinw. M. 21.
5. Schenk, Jul., Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. gr. 8°, IV u. 59 S. m. 45 Fig. u. 1 Doppeltaf. Leipzig, Teubner. M. 1.60.

Physik.

6. Atkinson, A. A., Electrical and magnetic calculations; for the use of electrical engineers and artisans, teachers, students, and all others interested in the theory and application of electricity and magnetism. 2d edition, revised. New York, Van Nostrand. 12mo. 7 + 310 pp. Cloth. $ 1.50.
7. Bauer, Heinz, Telegraphie ohne Draht, Röntgenstrahlen, Teslalicht. Eine Einführung in die neueren elektrophysikalischen Forschungen und deren praktische Ausgestaltung. 8°, VII u. 230 S. m. 98 Abb. Berlin, Duncker. M. 4.
8. Berliner, Arnold, Lehrbuch der Experimentalphysik in elementarer Darstellung. gr. 8°, XVI u. 857 S. m. 3 lith. Taf. u. 695 zum Tl. farb. Abb. Jena, Fischer. M. 14; geb. M. 16.50.
9. Bordier, H., Précis de physique biologique. 2e édit. revue et corrigée. In-12 avec 288 fig. dont 20 en coul. dans le texte et 1 pl. Paris, Doin. Cart. Frs. 8.
10. Boussinesq, J., Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome II. Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière. Gr. 8°, XXXII et 625 p. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.
11. Classen, J., Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 1. Bd. Elektrostatik und Elektrokinetik. (Sammlung Schubert XLI.) 8°, X u. 184 S. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 5.

12. Faraday, Michael, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität. XVI. und XVII. Reihe. Hrsg. v. A. J. v. Oettingen. (Ostwalds Klassiker Nr. 134). 8°, 103 S. m. 18 Fig. Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.60.
13. — Dasselbe, XVIII. und XIX. Reihe. (Ostwalds Klassiker Nr. 136.) 8°, 58 S. m. 11 Fig. Ebenda. geb. M. 1.20.
14. Fortschritte, Die, der Physik im J. 1902. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 58. Jahrg. 1. Abtlg. Physik der Materie. gr. 8°, XL u. 496 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 20.
15. Grünberg, Vikt., Hypothese zur Thermodynamik. Versuch einer leichtfaßl. Darstellung einiger Prinzipe der Molekulartheorie mit Zugrundelegung der Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung. gr. 8°, VI u. 73 S. m. 10 Fig. u. 7 Tab. Leipzig, Barth. M. 3.
16. Helfenstein, A., Die Energie und ihre Formen. Kritische Studien. gr. 8°, IV u. 152 S. Wien, Deuticke. M. 4.20.
17. Mahler, G., Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Nr. 136.) 2. verb. Aufl. 12°, 190 S. m. 65 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
18. Matthiessen, Ludwig, Die astigmatische Brechung der Sonnenstrahlen im Regenbogen. Mit Anwendung von Kettenbruch-Determinanten dargestellt. (Publikationen des astronomisch-meteoronomischen Observatoriums zu Rostock.) 4°, 14 S. m. 9 Abb. auf 5 Taf. Rostock, Boldt.
19. Miller, Andr., Vergleich der elektrischen Kontakt- und Influenzwirkung. Progr. gr. 8°, 16 S. München, Kellerer. M. 1.
20. Reychler, A., Physikalisch-chemische Theorieen. Nach der 3. Aufl. des Originals bearb. v. B. Kühn. gr. 8°, XII u. 389 S. m. Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9; geb. in Leinw. M. 10.

Tafeln. Rechenapparate. Zeichenwerkzeuge.

21. d'Ocagne, Maurice, Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. In-4°, 63 p. Paris, Gauthiers-Villars.
22. Pellehn, G., Der Pantograph. 1603. 1903. Vom Urstorchschnabel zur modernen Zeichenmaschine. Mit 18 Abbildungen versch. Pantographen, 7 Textfiguren, 1 Übersicht der Übertragungssysteme. [Aus: „Deutsche Mechaniker-Zeitung“ m. e. Nachtrag.] Lex. 8°, 20 S. Berlin, Reimer. M. 1.
23. Schröder, C., Die Rechenapparate der Gegenwart, gesammelt, geordnet, beschrieben und begutachtet. 8°, 112 S. Magdeburg. M. 2.
24. Table de Logarithmes à cinq décimales des nombres naturels de 1 à 10 000 et des lignes-trigonométriques des arcs du premier quadrant dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale de la circonférence, avec un Supplement et un Formulaire rédigés par M. Chollet. in-12°. Paris, Garnier frère. Cart. Frs. 3.
25. Vaes, F. J., Handleiding voor het gebruik van de rekenliniaal van Dennert en Pape, Faber en Tavernier-Gravet. 8°, 32 blz. Rotterdam, Nijgh & van Ditmar. Fl. —.60.
26. Witkowski, A. W., Tablice logarytmowe i goniometryczne czterocyfrowe. Osobne odbicie z „Tablic matematyczno-fizycznych“ autora. Warszawa, wydawnictwo redakcyi „Wiadomości Matematycznych“.

Verschiedenes.

27. Holzmüller, Gustav, Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. 3. Teil. Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Oberklassen realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschulmathematik. 2. Aufl., im Anschluß an die neuen preußischen Lehrpläne mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen bearbeitet. 8°, XIV u. 370 S. m. 223 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner.

28. Schreber, K., Die Kraftmaschinen. Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen, für Zuhörer aller Fakultäten an der Universität Greifswald gehalten. 8°, XII u. 348 S. m. 56 Abb. u. 1 Taf. Leipzig, Teubner.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Bauer, Gustav, Vorlesungen über Algebra. Hrsg. vom Mathematischen Verein München. Mit dem Bildnis Gustav Bauers als Titelbild. gr. 8°, VI u. 376 S. m. 11 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 13.

Boussinesq, J., Théorie analytique de la chaleur, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 10.

Dickson, Leonard Eugene, Ternary orthogonal groups in a general field, and the groups defined for a general field by the rotation group. Reprints from the University of Chicago Decennial Publications. 1st ser. vol. IX. 4°, 26 pp. Chicago, The University of Chicago Press. $ —.50.

Fenkner, Hugo, Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. I. Teil: Ebene Geometrie. 4. umgearb. u. vermehrte Aufl. Berlin, Salle. M. 2.20.

Gauss, C. Fr., Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten . . ., s. N. B. 3.

Helfenstein, A., Die Energie und ihre Formen, s. N. B. 16.

Hittorf, W., Über die Wanderung der Jonen während der Elektrolyse. (1853—1859.) Erster Teil. Hrsg. v. W. Ostwald. (Ostwalds Klassiker Nr. 21.) 2. erweiterte Aufl. 8°, 115 S. m. 1 Taf. Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.60.

Holzmüller, G., Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik. 3. T., s. N. B. 27.

Huyghens, Chr., Abhandlung über das Licht (1678). Hrsg. von E. Lommel. (Ostwalds Klassiker Nr. 20.) In 2. Aufl. durchgesehen u. berichtigt von A. J. v. Oettingen. 8°, 115 S. m. 75 Fig. Leipzig, Engelmann. geb. M. 2.

Kwietniewski, Stefan, Über die Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven. Diss. gr. 8°, 51 S. Zürich, Speidel. M. 1.

Maschke, Heinrich, Invariants and Covariants of quadratic differential quantics of n variables. Reprint from the University of Chicago Decennial Publications, 1st ser. vol. IX. 4°, 14 pp. Chicago, The University of Chicago Press. $ —.25.

Matthiessen, L., Die astigmatische Brechung der Sonnenstrahlen im Regenbogen, s. N. B. 18.

Müller, C. H., u. Presler, O., Leitfaden der Projektionslehre. Ausgabe A u. B, s. N. B. 2.

Robin, Gustave, Œuvres scientifiques. Mathématiques: Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Gr. 8°. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 7.

Schenk, Jul., Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen, s. N. B. 5.

Schreber, K., Die Kraftmaschinen, s. N. B. 28.

Schwering, Karl, Sammlung von Ausgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 2. Lehrgang. 2., verbesserte Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1.20; geb. M. 1.50.

Witkowski, A. W., Tablice logarytmowe i goniometryczne czterocyfrowe, s. N. B. 26.

Über die Spannungskurve gesättigter Dämpfe.

Von L. Graetz in München.

1. Um den Zusammenhang zwischen dem Druck P des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit und der Temperatur zu finden, gibt die mechanische Wärmetheorie bekanntlich einen Weg, falls die Zustandsgleichung des Körpers bekannt ist. Man kann dann durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf die theoretische und wirkliche Isotherme drei Gleichungen erhalten, welche P, ferner die spezifischen Volumina v und σ des gesättigten Dampfes und der Flüssigkeit, als Funktionen der Temperatur zu ermitteln gestatten. Dieser Weg hat einerseits den Nachteil, daß bei Anwendung einer der bekannten Zustandsgleichungen, die Gleichungen derartige Formen erhalten, daß eine explizite Darstellung von P als $f(T)$ nicht möglich ist.[1]) Andererseits, und das ist noch schwerwiegender, ist ja eine genaue Zustandsgleichung noch nicht bekannt. Die Van der Waalssche Gleichung ebenso wie die Boltzmannsche enthält zwei Konstanten, welche aber in Wirklichkeit unbekannte Funktionen von Temperatur und Volumen sind, und bei den anderen Zustandsgleichungen, wie bei denen von Clausius, sind unbestimmte Temperaturfunktionen eingeführt, die in jedem Falle besonders bestimmt werden müssen. Da nun aber gerade die Ermittelung des P als Funktion der Temperatur verlangt wird, so machen solche unbekannte Temperaturfunktionen die ganze Methode unbrauchbar.

2. Eine zweite Methode, theoretisch die Dampfspannungskurve zu ermitteln, beruht auf der Anwendung des thermodynamischen Potentials. Bezeichnet man das thermodynamische Potential der Masseneinheit gesättigten Dampfes mit ψ, das der Masseneinheit der Flüssigkeit mit φ, wobei sowohl ψ als φ Funktionen von Druck und Temperatur sind, so ist die strenge Gleichung für die Dampfspannungskurve

$$\psi - \varphi = 0, \tag{1}$$

1) Planck, Wied. Ann. **14**, S. 279 u. 692. 1881. Clausius, Wied. Ann. **13**, S. 535. 1881.

da nur unter dieser Bedingung die Flüssigkeit und ihr Dampf im Gleichgewicht sind. Die Bedeutung von ψ und φ ist nach der Definition des thermodynamischen Potentials

$$\psi = u - JTs + pv,$$

$$\varphi = w - JT\tau + p\sigma,$$

worin u und w die spezifischen Energien, s und τ die spezifischen Entropien des Dampfes und der Flüssigkeit sind und J die Joulesche Zahl bedeutet. Eine wirkliche Ausrechnung der Werte von ψ und φ und damit eine Darstellung der Gleichung der Dampfspannungskurve läßt sich leicht durchführen unter folgenden drei Voraussetzungen:

1) Die genaue Gültigkeit des Mariotte-Gay Lussacschen (MGL) Gesetzes für den gesättigten Dampf.

2) Die Vernachlässigung von σ gegen v.

3) Die Annahme der Konstanz der spezifischen Wärme c der Flüssigkeit.

Unter diesen Annahmen ist nämlich, wenn das MGL-Gesetz in der Form

$$pv = RT$$

geschrieben wird[1]),

$$u = H' + J\gamma T, \quad w = H + JcT,$$

worin γ die spezifische Wärme des Dampfes bei konstantem Volumen ist und H' und H Konstanten bedeuten, ferner

$$Js = RE' + J\gamma \log T + R \log v = RE' + (J\gamma + R) \log T - R \log \frac{p}{R},$$

$$J\tau = RE + Jc \log T,$$

worin RE' und RE zwei neue Konstante sind.

Daraus ergibt sich

$$\psi = H' + T(J\gamma - RE' + R) - T \log T(J\gamma + R) + TR \log \frac{p}{R},$$

$$\varphi = H + T(Jc - RE) - JcT \log T,$$

und die Gleichung der Dampfspannungskurve wird, wenn man den Druck des gesättigten Dampfes mit P bezeichnet,

$$\log \frac{P}{R} = A' - \frac{B}{T} - C \log T, \tag{2}$$

---

1) S. wegen der Ableitung L. Graetz in Winkelmanns Handbuch der Physik II, 2, S. 441. 1. Aufl.

die bekannte Rankine-Dupré sche Formel. Darin haben die Konstanten A', B, C folgende Bedeutung

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
A' &= (E' - E) + \frac{J(c-\gamma)}{R} - 1, \\
B &= \frac{H' - H}{R}, \\
C &= \frac{J(c-\gamma)}{R} - 1.
\end{aligned}
$$

Mithin ist $A' = (E' - E) + C$.

Unter derselben Annahme wird die Verdampfungswärme r der Flüssigkeit eine lineare Funktion der absoluten Temperatur; denn es ist

$$Jr = T(v - \sigma)\frac{dP}{dT} = RT^2 \frac{d \log P}{dT} = RB - RC \cdot T.$$

Es ist daher $H' - H$ gleich der Verdampfungswärme r_0 der Substanz beim Nullpunkt und $CR = J(c - \gamma) - R$ ist gleich der Abnahme, welche die Verdampfungswärme pro 1^0 C erfährt.

3. Die angeführten theoretischen Voraussetzungen lassen nun die Rankinesche Formel nur als eine Näherungsformel erscheinen, von der man nicht ohne weiteres sagen kann, wie weit ihre Gültigkeit sich erstreckt. Da das MGL-Gesetz vorausgesetzt ist, die gesättigten Dämpfe aber erfahrungsgemäß schon bei nicht zu hohen Drucken erhebliche Abweichungen von diesem Gesetz zeigen, so erscheint der Bereich der Gültigkeit der Formel hauptsächlich aus diesem Grunde als ziemlich geringfügig. Zwar kommen hierbei nicht diejenigen Abweichungen in Betracht, welche das Produkt pv auf einer Isotherme zeigt, Abweichungen, welche bekanntlich durch das Amagatsche Diagramm dargestellt sind und welche sich durch dieses mit einem Blick als sehr bedeutend erweisen. Vielmehr kommen hier, da zu jeder Temperatur nur *ein* Druck und das zugehörige Volumen ins Auge gefaßt werden, nur die Abweichungen in Frage, welche die Größe $\frac{Pv}{T}$ mit wachsenden Temperaturen zeigt. Aber auch diese sind erheblich genug. Nach den Beobachtungen nimmt der Wert von $\frac{Pv}{T}$, welcher bei Gültigkeit des MGL-Gesetzes konstant bleiben sollte, bei jeder Flüssigkeit zwischen der gewöhnlichen und der kritischen Temperatur auf die Hälfte bis ein Drittel seines Anfangswertes ab. So ist z. B. bei Wasser nach den Beobachtungen von Battelli bei 100^0 $\frac{Pv}{T} = 3362$, bei der kritischen Temperatur 364^0 aber $\frac{Pv}{T} = 1118$. Bei Alkohol ist nach den Beobachtungen von Ramsay und Young bei 110° $\frac{Pv}{T} = 985{,}8$, bei der kritischen Temperatur 243,6° aber $\frac{Pv}{T} = 426{,}6$. Bei Schwefelkohlenstoff ist nach Battelli für 0° $\frac{Pv}{T} = 809$, für die kritische Temperatur 270° aber $\frac{Pv}{T} = 269$. Und Abweichungen von derselben Größe sind bei allen Flüssigkeiten konstatiert. Nach der Gleichung von Van der Waals muß bekanntlich am kritischen Punkt $\frac{Pv}{T} = \frac{3}{8}$ sein, wenn es bei 0° gleich 1 gesetzt wird. Die angeführten Zahlen stimmen angenähert mit diesem Wert $\frac{3}{8}$ überein. Diese erheblichen Abweichungen vom MGL-Gesetz beschränken die Gültigkeit der Rankineschen Formel nur auf niedere Temperaturen und Drucke. Immerhin müßte eine genauere Diskussion zeigen, welche Abänderungen an dieser Formel anzubringen sind und welche Beträge diese erreichen, um den ganzen Verlauf der Dampfspannung bis zur kritischen Temperatur darzustellen. Die oben angeführte Ableitung aus dem thermodynamischen Potential erlaubt sofort eine genauere Untersuchung der betreffenden Kurve, wenn für den Dampf nicht das MGL-Gesetz, sondern das Van der Waalsche Gesetz zu Grund gelegt wird, das ja in der Hauptsache das Verhalten aller Gase bis auf minder wichtige Einzelheiten zusammenfaßt.

4. Es soll also jetzt die obige Annahme 1 fallen gelassen werden, und statt des MGL-Gesetzes das Van der Waalssche Gesetz zu Grunde gelegt werden. Aber auch die Annahme 2 soll fallen gelassen werden. Während nämlich bei niederen Temperaturen σ unbedingt gegen v zu vernachlässigen ist, wird bei wachsender Temperatur σ immer größer, v immer kleiner, so daß der Fehler immer größer wird. Bei der kritischen Temperatur ist endlich σ gleich v, also die Vernachlässigung von σ durchaus nicht erlaubt. Wenn wir also für den Dampf die Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

als gültig annehmen, so ist zunächst die spezifische Energie u und die spezifische Entropie s desselben zu bilden. Man hat dazu die allgemeinen Formeln[1])

$$u = H' + J\gamma T + T^2 \int \frac{d}{dT}\left(\frac{p}{T}\right) dv,$$

$$Js = RE' + J\gamma \log T + \int \frac{\partial p}{\partial T} dv.$$

1) S. z. B. L. Graetz l. c. S. 441.

Da

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{p}{T}\right) = \frac{a}{T^2 v^2}, \qquad \frac{dp}{dT} = \frac{R}{v-b}$$

ist, so wird

$$u = H' + J\gamma T - \frac{a}{v},$$

$$Js = RE' + J\gamma \log T + R \log (v - b).$$

Man ersieht übrigens daraus, daß von den beiden Konstanten a und b, welche in der Van der Waalsschen Formel vorkommen, nur die eine a in dem Ausdruck für die Energie und nur die andere b in dem Ausdruck für die Entropie vorkommt. So wie man a die Druck- und b die Volumenkonstante des Van der Waalsschen Gesetzes genannt hat, so könnte man sie auch als Energie- und Entropiekonstanten unterscheiden.

Das thermodynamische Potential des Dampfes wird daher

$$\psi = H' + (J\gamma - RE')\, T - J\gamma\, T \log T - \frac{a}{v} - RT \log (v - b) + pv.$$

Das thermodynamische Potential der Flüssigkeit ist

$$\varphi = H + (Jc - RE)\, T - Jc\, T \log T + p\sigma$$

und die Gleichung

$$\psi - \varphi = 0$$

wird also

$$P(v - \sigma) - RT \log (v - b) - \frac{a}{v} = -(H' - H) + T[J(c - \gamma) + R(E' - E)]$$
$$- T \log T (J(c - \gamma)).$$

Nach unserer obigen Bezeichnung (3) wird also

$$P(v - \sigma) - RT \log (v - b) - \frac{a}{v} = -BR + R(A' + 1)\, T - R(C + 1)\, T \log T.$$

Wir führen hier nach der Van der Waalsschen Gleichung ein:

$$Pv = RT + Pb - \frac{a}{v} + \frac{ab}{v^2},$$

$$v - b = \frac{RT}{P\left(1 + \frac{a}{Pv^2}\right)}.$$

Dann wird nach Division durch RT

$$\log \frac{P}{R} + \log \left(1 + \frac{a}{Pv^2}\right) - \frac{P(\sigma - b)}{RT} - \frac{2a}{vRT} + \frac{ab}{v^2 RT} = A' - \frac{B}{T} - C \log T.$$

Diese Formel ist noch ganz streng. Um sie zur praktischen Benutzbarkeit gerecht zu machen, vernachlässigen wir die Glieder, welche die Produkte und Quadrate der Korrektionsgrößen a und b enthalten. Indem wir ferner entwickeln

$$Pv^2 = \frac{R^2T^2}{P} + 2bRT - 2a\frac{RT}{Pv},$$

$$\log\left(1 + \frac{a}{Pv^2}\right) = \log\left(1 + \frac{aP}{R^2T^2}\right),$$

$$\frac{2a}{vRT} = \frac{2aP}{R^2T^2},$$

erhalten wir

$$\log\frac{P}{R} + \log\left(1 + \frac{aP}{R^2T^2}\right) - \frac{P(\sigma - b)}{RT} - \frac{2aP}{R^2T^2} = A' - \frac{B}{T} - C\log T.$$

Nun nimmt die Größe $\frac{aP}{R^2T^2}$ von einem sehr kleinen Wert, den sie bei niedrigen Drucken besitzt, mit wachsendem Druck zu bis zu dem Maximalwert $\frac{27}{64}$ am kritischen Punkt. Denn führen wir die reduzierten Drucke ε und Temperaturen m ein, indem wir setzen $P = \varepsilon\pi$, $T = m\vartheta$, wo π, ϑ kritischen Druck und Temperatur bedeuten $\left(\pi = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2},\right.$ $\left.R\vartheta = \frac{8}{27}\frac{a}{b}\right)$, so wird $\frac{aP}{R^2T^2} = \frac{\varepsilon}{m^2}\frac{27}{64}$, also am kritischen Punkt ($\varepsilon = 1$, $m = 1$) gleich $\frac{27}{64}$. In diesem Intervall ist daher

$$\log\left(1 + \frac{aP}{R^2T^2}\right) - \frac{2aP}{R^2T^2} = -\frac{aP}{R^2T^2},$$

und unsere Formel wird

$$\log\frac{P}{R} - \frac{aP}{R^2T^2} - \frac{P(\sigma - b)}{RT} = A' - \frac{B}{T} - C\log T.$$

Die einfache Rankinesche Formel erfordert also eine Korrektion. Um zu ermitteln, wie groß die Korrektion im Maximum ist, berechnen wir sie für den kritischen Punkt. Für diesen ist $\frac{aP}{R^2T^2}$, wie oben ausgeführt, gleich $\frac{27}{64}$, das zweite Glied $\frac{P(\sigma - b)}{RT}$ wird am kritischen Punkt, da dort $\sigma = v = 3b$ ist, gleich $\frac{2b\pi}{R\vartheta} = \frac{1}{4}\cdot$ Die beiden Korrekturen geben also im Maximum den Wert $-\frac{43}{64}$. (Dabei ist als Volumeneinheit das Volumen der Masseneinheit des Dampfes bei 0^0 und dem Einheitsdruck genommen.) Man sieht sofort, daß der Einfluß der Korrektion um so geringer werden wird, je höher der kritische Druck der Substanz ist. Da die Abhängigkeit des σ von der Temperatur nicht bekannt ist, so könnte man σ in erster Annäherung konstant setzen. Geringer wird der Fehler noch und zugleich wird die Formel vereinfachter durch folgende Betrachtung. Da $R\vartheta = \frac{8}{27}\frac{a}{b}$ ist, so ist

$$\frac{a}{RT} = \frac{27}{8} b \frac{\vartheta}{T} = \frac{27}{8} b \left(1 + \frac{\vartheta - T}{T}\right),$$

also

$$\frac{aP}{R^2T^2} + \frac{P(\sigma - b)}{RT} = \frac{P}{RT}\left(\sigma - b + \frac{27}{8} b \left(1 + \frac{\vartheta - T}{T}\right)\right).$$

In dieser Klammer, die im ganzen selbst nur eine Korrektion vorstellt, wächst σ mit steigender Temperatur, während $\frac{27}{8} b \left(1 + \frac{\vartheta - T}{T}\right)$ mit steigender Temperatur abnimmt. Wir können deshalb diese Klammer als eine Konstante f einführen (genauer wird die Klammer mit wachsender Temperatur kleiner werden) und die Gleichung unserer Kurve wird

$$\log\frac{P}{R} - \frac{fP}{RT} = A' - \frac{B}{T} - C\log T$$

oder $\left(A' + \log R = A,\ \frac{f}{R} = \delta \text{ gesetzt}\right)$

$$\log P - \delta\frac{P}{T} = A - \frac{B}{T} - C\log T. \tag{4}$$

Die Rankinesche Formel lautet, wenn man zu den Numeri übergeht

$$P = \frac{a e^{-\frac{B}{T}}}{T^c}, \tag{5}$$

während die vervollkommnete Formel, zu der wir gelangt sind, heißt

$$P e^{-\delta\frac{P}{T}} = \frac{a e^{-\frac{B}{T}}}{T^c}. \tag{6}$$

Da δ eine sehr kleine Zahl ist, so weicht $e^{-\delta\frac{P}{T}}$ erst bei hohen Drucken merklich von 1 ab, während bei niederen Drucken die Rankinesche Formel bestehen bleibt. Will man P explicite durch T darstellen, so ist angenähert, aber nicht genau

$$\log P = A - \frac{B}{T} - C\log T + \delta\frac{e^{A - \frac{B}{T}}}{T^{c+1}}.$$

5. Was den Vergleich dieser Formel mit den Beobachtungen betrifft, so ist zunächst zu erwähnen, daß von den drei Konstanten der Rankineschen Formel zwar A und B willkürliche Werte haben, daß dagegen C durch die Natur der Substanz von vornherein bestimmt ist. Es ist nämlich

$$C = \frac{J(c-\gamma)}{R} - R,$$

und da R bekanntlich gleich $J(\gamma_p - \gamma)$ ist, worin γ_p die spezifische Wärme des Dampfes bei konstantem Druck ist, so wird

$$C = \frac{c-\gamma_p}{\gamma_p - \gamma}.$$

Die Rankinesche Formel enthält also nur *zwei* willkürliche Konstanten, und als solche ist sie auch für niedere Drucke vollständig brauchbar, wie insbesondere Hertz[1]) für den Quecksilberdampf gezeigt hat. Läßt man die dritte Konstante C auch unbestimmt, wodurch man nur die Form der Rankineschen Gleichung beibehält, ihre Bedeutung aber verändert, so kann man natürlich diese weitere Konstante so bestimmen, daß man in sehr viel größerem Intervall Anschluß an die Beobachtungen gewinnt. In der Tat hat Bertrand[2]) für eine Anzahl von Flüssigkeiten durch diese dreikonstantige Formel eine Darstellung der Beobachtungen von Dampfspannungen in sehr weitem Bereich erzielt und Juliusburger[3]), der sämtliche vorhandene Messungsreihen nach dieser Formel berechnete, fand, daß sie in 90% aller Fälle die Beobachtungen, bei denen keine Dissoziationen stattfinden, im ganzen Verlauf, sogar bis zur kritischen Temperatur darstellt. In der oben abgeleiteten genauen Formel (4) oder (6) hat die Konstante C genau den von der Theorie vorgeschriebenen Wert $\frac{c-\gamma_p}{\gamma_p-\gamma}$. Die Formel enthält also *drei* willkürliche Konstanten A, B und δ, und es war nach der Ableitung zu erwarten, daß sie auch den Beobachtungen sich gut anschließt. Die Konstante δ ist dabei im wesentlichen aus den Beobachtungen bei hohen Temperaturen zu entnehmen, da das mit ihr behaftete Glied bei niederen Temperaturen keine Rolle spielt. Ich habe so die Beobachtungen von Cailletet und Colardeau[4]) am Wasserdampf, bei denen die Drucke in mm-Hg ausgedrückt sind, mit dem Wert $C = 4{,}717$ berechnet. Die Konstanten wurden $A = 22{,}8843$, $B = 2936{,}6$, $\delta = 0{,}0005547$, und die Formel stellte die Drucke bis auf 1—2% dar. Die maximale Abweichung von den Beobachtungen beträgt 1,8%. Durch genauere Berechnung der Konstanten A, B, δ

1) H. Hertz, Wied. Annal. **17** p. 193. 1882.

2) Bertrand, Thermodynamique p. 93. 1887.

3) Juliusburger, Drude Annal. **3** p. 618. 1900.

4) Cailletet u. Colardeau, Journ. de phys. (2) **10** p. 333. 1891.

nach kleinsten Quadraten würde sich der Anschluß noch enger gestalten lassen, doch liegen die Abweichungen auch so schon innerhalb der Beobachtungsfehler.

6. Eine nicht unbeträchtliche Ungenauigkeit in der obigen Ableitung scheint darin zu liegen, daß die spezifische Wärme c der Flüssigkeit als konstant angesetzt wurde, während diese in Wirklichkeit mit steigender Temperatur nach den Beobachtungen wächst. Es ist aber zu bemerken, daß in den Ausdruck für die Energie und die Entropie der Masseneinheit einer verdampfenden Flüssigkeit streng genommen nicht die gewöhnliche spezifische Wärme c bei konstantem Druck eingeht, sondern diejenige spezifische Wärme c', welche die Flüssigkeit besitzt, wenn sich bei der Temperatursteigerung zugleich der Druck so ändert, wie bei den gesättigten Dämpfen, das heißt, wenn die Veränderung der Flüssigkeit auf der sogenannten *linken Grenzkurve* vor sich geht. Diese Größe c' hängt nach einer bekannten Formel der mechanischen Wärmetheorie[1]) mit c so zusammen, daß

$$c' = c - T\alpha\sigma\frac{dP}{dT},$$

worin α der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit ist. Da $T\frac{dP}{dT}$ mit steigender Temperatur nicht unerheblich wächst, so ist die Zunahme von c' mit der Temperatur jedenfalls viel geringer als die von c, sie könnte sogar in eine Abnahme übergehen, und der Fehler, der durch Konstantsetzung des c entsteht, wird in den meisten Fällen unbedeutend sein. Man wird daher die Formel mit drei Konstanten

$$Pe^{-\delta\frac{P}{T}} = \frac{ae^{-\frac{B}{T}}}{T^c}$$

als die theoretische Gleichung für die Dampfspannungskurve bis zur kritischen Temperatur anzusehen haben.

München, Juni 1903.

1) S. z. B. Graetz l. c. IIb p. 474.

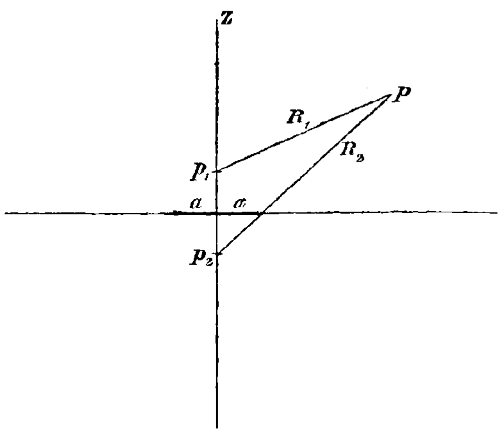
Ein Beitrag zur Theorie der Nobilischen Farbenringe.

Von Richard Gans in Tübingen.

Riemann[1]) hat die Erscheinung der Nobilischen Farbenringe theoretisch behandelt, ohne die Polarisation zu berücksichtigen, welche jedoch den Vorgang wesentlich modifiziert; berücksichtigt wurde dieselbe von H. Weber.[2]) Später wurde von Róiti[3]) eine Annahme gemacht, die von Volterra[4]) theoretisch verfolgt worden ist.

Nach dieser Annahme ist der Vorgang folgender: Die Polarisation kann in einem gegebenen Falle nur bis zu einem gewissen Werte ansteigen; eine weitere Ablagerung der polarisierenden Substanz verändert den Wert der Polarisation nicht mehr. Wird die Stärke des eintretenden Stroms konstant erhalten, so stellt sich bereits nach kurzer Zeit ein stationärer Zustand her. Auf einem Teile der Elektrodenplatte ist das Maximum der Polarisation erreicht, hier kann der Strom hindurchtreten, da neue Ablagerung keine Veränderung mehr bewirkt; an den Stellen jedoch, wo das Maximum der Polarisation noch nicht erreicht ist, darf kein Strom in die Elektrodenplatte eintreten, da sonst die Polarisation noch steigen würde und der Vorgang eben noch nicht stationär wäre.

Fig. 1.



Diese Bedingungen sollen jetzt in einem speziellen Falle formuliert werden.

1) B. Riemann, Werke S. 55.
2) H. Weber, Crelles Journal Bd. 75, 1872.
3) Nuovo Cimento vol. X.
4) Atti della R. Accademia di Torino vol. XVIII, 1882/83.

Auf einer unendlichen Metallplatte, deren obere Grenze die xy-Ebene sein möge, befinde sich eine Salzlösung von unendlicher Höhe. Aus einer punktförmigen Elektrode, welche im Abstand c von der Platte sich befindet, trete der konstant gehaltene Strom j aus. Auf der Platte bildet sich dann ein Kreis vom Radius a, in dessen Innern die Polarisation ihren Maximalwert $-E$ erreicht hat. Bezeichnet φ das Potential, so muß außerhalb des Kreises $\partial\varphi/\partial z = 0$ sein.

Im Unendlichen enden keine Stromlinien, sondern alle von der Elektrode ausgehenden Stromlinien münden auf der Platte in einem Kreise vom Radius a, d. h. im Unendlichen verschwindet φ wie $1/R^2$.

Es ergibt sich also folgende Formulierung des Problems:

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{für } z > 0, \tag{1}$$

$$\varphi = \frac{j}{4\pi\lambda R_1} + \text{funct. cont.} \qquad \text{in } p_1, \tag{2}$$

$$\varphi = -E \qquad \text{für } z = 0 \text{ und } r < a, \tag{3}$$

$$\partial\varphi/\partial z = 0 \qquad \text{für } z = 0 \text{ und } r > a, \tag{4}$$

$$R_1\varphi = 0 \qquad \text{im Unendlichen.} \tag{5}$$

Diese Aufgabe kann durch eine etwas andere ersetzt werden, bei der die Flüssigkeit den ganzen unendlichen Raum erfüllt. Im Punkte p_2 (vgl. Fig. 1) fügen wir eine punktförmige Elektrode von derselben Stromstärke j hinzu und bestimmen φ so, daß im ganzen Raume:

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1a}$$

$$\varphi = \frac{j}{4\pi\lambda R_1} + \text{funct. cont.} \qquad \text{in } p_1, \tag{2a}$$

$$\varphi = \frac{j}{4\pi\lambda R_2} + \text{funct. cont.} \qquad \text{in } p_2,$$

$$\varphi = -E \qquad \text{für } z = 0 \text{ und } r < a, \tag{3a}$$

$$R\varphi = 0 \qquad \text{im Unendlichen.} \tag{5a}$$

(4) wird aus Symmetriegründen von selbst erfüllt. Für positive z stimmt diese Lösung mit der durch die ursprüngliche Aufgabe geforderten Funktion überein.

Das Problem ist mathematisch identisch mit folgendem elektrostatischen: Das Potential ist zu bestimmen, wenn in den Punkten p_1 und p_2 je die elektrische Menge $e = \frac{j}{4\pi\lambda}$ und auf einer Kreisscheibe vom

Radius a, zu welcher p_1 und p_2 symmetrisch liegen, die Menge $-2e$ sich befindet.

In unserem Falle ist E gegeben, und daraus bestimmt sich der unbekannte Radius a.[1])

Wir lösen die elektrostatische Aufgabe für ein verlängertes Rotationsellipsoid, gehen dann zum abgeplatteten über und fassen die Kreisscheibe als Grenzfall des abgeplatteten Rotationsellipsoids auf.

Durch folgende Substitutionen führen wir krummlinige Koordinaten ein:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= a\sqrt{\varrho^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\cos\varphi, \\ y &= a\sqrt{\varrho^2 - 1}\sqrt{1 - \mu^2}\sin\varphi, \\ z &= a\,\varrho . \mu. \end{aligned}$$

Die Flächen $\varrho = \text{const.}$ sind eine Schar konfokaler verlängerter Rotationsellipsoide mit der Exzentrizität a, die Flächen $\mu = \text{const.}$ sind die hierzu orthogonale Schar konfokaler Rotationshyperboloide. Die Oberfläche des gegebenen Ellipsoids sei durch den Parameter $\varrho = \varrho_0$ gegeben.

Wir setzen

$$(7)\qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

und

$$(8)\qquad \varphi_1 = \frac{e}{R_1} + \frac{e}{R_2},$$

also wird durch Entwickelung nach Kugelfunktionen:

$$(9)\quad \varphi_1 = \frac{e}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(\varrho)\,Q_n(\varrho_1)\,P_n(\mu)\,[P_n(1) + P_n(-1)] \text{ für } \varrho < \varrho_1,$$

wo $P_n(x)$ die Kugelfunktion erster Art und n. Ordnung, $Q_n(x)$ die Kugelfunktion 2. Art und n. Ordnung bedeutet.[2])

Nun ist aber[3]):

$$(10)\qquad \begin{aligned} P_n(1) &= 1, \\ P_n(-1) &= (-1)^n, \end{aligned}$$

---

1) Wegen des Vorigen, insbesondere wegen der Formulierung des Problems, siehe H. Weber, Die part. Differentialgl. der math. Phys. Bd. 1, § 180, 1900.

2) cf. z. B. C. Neumann, Vorles. über die Theorie des Pot. u. d. Kugelfunct. Kap. XIV S. 341, 1887.

3) cf. z. B. C. Neumann, ibid. Kap. II S. 32.

also wird:

$$\varphi_1 = \frac{e}{a}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\,P_{2\nu}(\varrho)\,P_{2\nu}(\mu)\,Q_{2\nu}(\varrho_1) \quad \text{für } \varrho < \varrho_1. \tag{11}$$

Wegen (1a) und (7) muß φ_2 folgende Form haben:

$$\varphi_2 = \frac{e}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,A_n\,Q_n(\varrho)\,P_n(\mu). \tag{12}$$

Aus der Bedingung, daß $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ für $\varrho = \varrho_0$ konstant sein soll, ergibt sich, daß der Koeffizient von $P_n(\mu)$ in der Reihe für φ verschwinden muß, d. h. für alle ungeraden n ist

$$A_n = 0,$$

und es ist

$$A_{2\nu} = -\frac{P_{2\nu}(\varrho_0)\,Q_{2\nu}(\varrho_1)}{Q_{2\nu}(\varrho_0)} \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots \infty \tag{13}$$

Aus der Angabe, daß die Elektrizitätsmenge auf dem Ellipsoid $-2e$ sein soll, ergibt sich

$$A_0 = -1 \tag{14}$$

mit Hilfe der Formel

$$Q_0(\varrho) = \lg\frac{\varrho+1}{\varrho-1},$$

welche sich als Spezialfall aus dem Neumannschen Integral

$$Q_n(\varrho) = \int_{-1}^{+1}\frac{P_n(u)\,du}{\varrho - u}$$

ergibt, wenn man berücksichtigt, daß $P_0(u) = 1$ ist.

Also ist

$$\varphi_2 = -\frac{e}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}(4\nu+1)\frac{P_{2\nu}(\varrho_0)\,Q_{2\nu}(\varrho_1)}{Q_{2\nu}(\varrho_0)}\,Q_{2\nu}(\varrho)\,P_{2\nu}(\mu) - \frac{e}{a}\,Q_0(\varrho). \tag{15}$$

Gehen wir zum abgeplatteten Rotationsellipsoid über, so haben wir zu ersetzen a durch $\frac{a}{i}$ und ϱ durch $i\sigma$, denn die Substitutionsgleichungen lauten für dieses

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{\sigma^2+1}\,\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \\ y &= a\sqrt{\sigma^2+1}\,\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \\ z &= a\sigma\mu, \end{aligned} \tag{16}$$

und es wird

$$(15\text{a})\quad \varphi_2 = -\frac{ei}{a}\sum_{\nu=1}^{\infty}(4\nu+1)\frac{P_{2\nu}(i\sigma_0)\,Q_{2\nu}(i\sigma_1)}{Q_{2\nu}(i\sigma_0)}\,Q_{2\nu}(i\sigma)\,P_{2\nu}(\mu)-\frac{ei}{a}\,Q_0(i\sigma).$$

Um den Wert von φ_2 zu erhalten für den Fall, daß das Ellipsoid in eine Kreisscheibe übergeht, muß man $\sigma_0 = 0$ werden lassen.

Nun ist aber:

$$P_{2\nu}(0) = \frac{(-1)^\nu \Pi(2\nu)}{2^{2\nu}\Pi(\nu)^2}\ {}^{1})$$

und

$$Q_{2\nu}(0\cdot i) = \frac{(-1)^\nu \Pi(2\nu)}{2^{2\nu}\Pi(\nu)^2}\,\frac{\pi}{i}\,.\ {}^{2})$$

So ergibt sich

$$(17)\qquad \varphi_2 = \frac{e}{a\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}(4\nu+1)\,Q_{2\nu}(i\sigma_1)\,Q_{2\nu}(i\sigma)\,P_{2\nu}(\mu)-\frac{ei}{a}\,Q_0(i\sigma),$$

oder

$$(18)\quad \varphi_2 = \frac{e}{a\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\,Q_{2\nu}(i\sigma_1)\,Q_{2\nu}(i\sigma)\,P_{2\nu}(\mu)-\frac{e}{a\pi}\,Q_0(i\sigma)[Q_0(i\sigma_1)+i\pi],$$

oder da

$$i\,Q_0(i\sigma) = 2\,\mathrm{arc\,ctg}\,\sigma,$$

wo $\mathrm{arc\,ctg}\,\sigma < \frac{\pi}{2}$ ist[3]),

$$(19)\quad \varphi_2 = \frac{e}{a\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\,Q_{2\nu}(i\sigma_1)\,Q_{2\nu}(i\sigma)\,P_{2\nu}(\mu)-\frac{2e}{a}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\sigma$$
$$+\frac{4e}{a\pi}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\sigma\,\mathrm{arc\,ctg}\,\sigma_1.$$

Lassen wir in Formel (19) die Punkte p_1 und p_2 ins Unendliche rücken und setzen wir $-2e = M$, so erhalten wir das Potential einer mit der Elektrizitätsmenge M geladenen Kreisscheibe.

Da in diesem Falle $\varphi_1 = 0$ wird, so haben wir

$$(20)\qquad \varphi = \frac{M}{a}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\sigma.$$

Nun ist aber nach (16)

$$(16)\qquad \begin{aligned} r &= a\sqrt{\sigma^2+1}\,\sqrt{1-\mu^2},\\ z &= a\sigma\mu. \end{aligned}$$

---

1) cf. z. B. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, 2. Aufl. 1878, Bd. 1 S. 12.

2) cf. z. B. E. Heine, ibid. S. 133. (Wir haben mit Neumann die Funktion Q definiert; dieselbe ist doppelt so groß als die von Heine mit Q bezeichnete Funktion, also ändern sich alle aus Heine entnommenen Formeln dementsprechend.)

3) cf. z. B. E. Heine, ibid. S. 162.

Daraus ergibt sich:

$$(21)\qquad \sigma = \sqrt{\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{z^2}{a^2}}},$$

wo beide Wurzeln mit dem positiven Zeichen verstanden sind.

Also ist

$$(22)\quad \varphi = \frac{M}{a}\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2} + \sqrt{\left(\frac{r^2 + z^2 - a^2}{2a^2}\right)^2 + \frac{z^2}{a^2}}} < \frac{M}{a}\frac{\pi}{2}.$$

Für $z = 0$ wird

$$(23)\qquad \varphi = \frac{M}{a}\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{r^2 - a^2}{2a^2} \pm \frac{r^2 - a^2}{2a^2}},$$

wo das obere resp. untere Zeichen gilt, je nachdem $r \gtrless a$ ist; es ist also

$$(24)\qquad \varphi = \frac{M}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} = \frac{M}{a}\arcsin\frac{a}{r} \qquad \text{für } r > a,$$

$$(25)\qquad \varphi = \frac{M}{a}\frac{\pi}{2} \qquad \text{für } r < a.$$

Somit ist der von H. Weber[1]) gefundene Ausdruck für das Potential

$$\varphi = \frac{M}{a}\int_0^\infty e^{-\alpha z}\frac{\sin\alpha a}{\alpha}J_0(\alpha r)\,d\alpha,$$

wo J_0 die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung und erster Art bedeutet, auf die Formel (22) zurückgeführt, d. h. auf keine höhere Transszendente als den arc ctg, sodaß die numerische Berechnung des Potentials sich sehr einfach bewerkstelligen läßt.

Um im allgemeinen Fall, wo p_1 und p_2 im Endlichen liegen, nicht zu komplizierte Formeln zu bekommen, wollen wir das Potential nur für die xy-Ebene berechnen, da nur dieses für unser ursprüngliches Problem von Interesse ist.

Wir haben also $\mu = 0$ zu setzen.

Für $Q_{2\nu}(i\sigma)$ führen wir das Neumannsche Integral in folgender Form ein[2]):

$$Q_{2\nu}(i\sigma) = -\int_{-i}^{+i}\frac{P_{2\nu}(iv)}{\sigma - v}\,dv,$$

1) H. Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. 1. S. 329. 1900.

2) cf. z. B. E. Heine, ibid. S. 141.

dann wird:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_2 = &-\frac{e}{a\pi}\int\limits_{-i}^{+i}\frac{dv}{\sigma - v}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\,Q_{2\nu}(i\sigma_1)\,P_{2\nu}(iv)\,\frac{(-1)^{\nu}\Pi(2\nu)}{2^{2\nu}\Pi(\nu)^2}\\
&-\frac{2e}{a}\operatorname{arc\,ctg}\sigma + \frac{4e}{a\pi}\operatorname{arc\,ctg}\sigma\operatorname{arc\,ctg}\sigma_1.
\end{aligned}
$$

Nennen wir den Abstand des Punktes mit den Koordinaten $\sigma = v$; $\mu = 0$ vom Punkte p_1 oder p_2 R, so ist

$$
\frac{i}{a}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\,Q_{2\nu}(i\sigma_1)\,P_{2\nu}(iv)\,\frac{(-1)^{\nu}\Pi(2\nu)}{2^{2\nu}\Pi(\nu)^2} = \frac{2}{R} = \frac{2}{\sqrt{\varrho^2+c^2}},
$$

wenn ϱ den Abstand des Punktes $\sigma = v$; $\mu = 0$ vom Koordinatenursprung bedeutet.

Also wird:

$$
(27)\qquad \varphi_2 = \frac{ei}{\pi}\int\limits_{-i}^{+i}\frac{dv}{\sigma - v}\,\frac{2}{\sqrt{\varrho^2+c^2}} - \frac{2e}{a}\operatorname{arc\,ctg}\sigma + \frac{4e}{a\pi}\operatorname{arc\,ctg}\sigma\operatorname{arc\,ctg}\sigma_1.
$$

Nun ist aber nach (16)

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
\varrho^2 &= a^2(1+v^2),\\
\sigma &= \sqrt{\frac{r^2-a^2}{a^2}},\\
\sigma_1 &= \frac{c}{a},
\end{aligned}
$$

wenn r den Abstand des Punktes σ; $\mu = 0$ vom Koordinatenursprung bedeutet; also

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_2 = &\frac{2ei}{\pi}\int\limits_{-i}^{+i}\frac{dv}{\sigma - v}\,\frac{1}{\sqrt{a^2(1+v^2)+c^2}} - \frac{2e}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\\
&+\frac{4e}{a\pi}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Durch Ausführung der Quadratur und Addition von φ_1 erhalten wir:

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
\varphi = &\frac{2e}{\sqrt{r^2+c^2}} - \frac{4e}{\pi\sqrt{r^2+c^2}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{c}{a}\sqrt{\frac{r^2-a^2}{r^2+c^2}} - \frac{2e}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\\
&+\frac{4e}{a\pi}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß Formel (30), die nur abgeleitet ist für $\sigma < \sigma_1$, auch für $\sigma > \sigma_1$ gilt, also in der ganzen xy-Ebene besteht.

Um das Potential innerhalb des Kreises mit dem Radius a zu erhalten, setzen wir $r = a$; dann ergibt sich:

(31) $\varphi_0 = -\frac{2e}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{c}{a}\right)\cdot$

Für das Problem der Nobilischen Farbenringe ist

$$\varphi_0 = -E,$$

$$e = \frac{j}{4\pi\lambda},$$

also

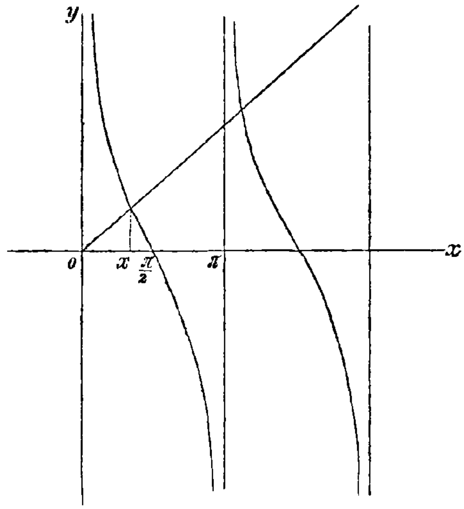
$$-E = -\frac{j}{2\pi\lambda a}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}\frac{c}{a}\right),$$

wo $\operatorname{arc\,ctg}\frac{c}{a} < \frac{\pi}{2}$ ist, oder

$$E = \frac{j}{2\pi\lambda a}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{a},$$

wo $\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{a} < \frac{\pi}{2}$ ist.

Fig. 2.



Daraus folgt die transzendente Gleichung zur Bestimmung von a

(32) $$\frac{a}{c} = \operatorname{ctg}\frac{2\pi\lambda E a}{j}, \text{ wo } \frac{2\pi\lambda E a}{j} < \frac{\pi}{2} \text{ ist.}$$

Setzen wir $\frac{2\pi\lambda E a}{j} = x$, so wird

(33) $$\frac{j}{2\pi\lambda E c}x = \operatorname{ctg} x, \text{ wo } 0 < x < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Es handelt sich also darum (s. Fig. 2), den Schnittpunkt der Geraden

$$y = \frac{j}{2\pi\lambda E c}x$$

und des ersten Astes der Kurve

$$y = \operatorname{ctg} x$$

auf der Seite der positiven x zu bestimmen. Daraus folgt, daß a eindeutig gegeben ist.

Über ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Form empirisch ermittelter Kurven.

Von Franz Berger in Wien.

Der Ingenieur und insbesondere der Elektrotechniker kommt häufig in die Lage, den gesetzmäßigen Verlauf der Änderung einer Größe y als Funktion einer anderen Größe x, also die Gleichung

$$y = f(x)$$

graphisch darstellen zu müssen durch Ermittelung einzelner Punkte nach irgend einem Meßverfahren (Charakteristiken von Maschinen, magnetische Untersuchung von Eisensorten etc.). Die so erhaltenen Kurven haben entweder den Zweck, den Verlauf einer Funktion im allgemeinen zu zeigen, oder sie sollen, falls der mathematische Ausdruck des Gesetzes, die Gleichung $y = f(x)$, unbekannt oder überhaupt nicht angebbar ist, die Gleichung selbst ersetzen. Man entnimmt in diesem Falle die Größe *einer* Koordinate für eine gegebene Größe der *anderen* der Kurve durch Abmessen (graphische Interpolation).

Dies setzt selbstverständlich voraus, daß der Kurvenzug mit solcher Genauigkeit festgelegt sei, daß der durch Abmessung daraus erhaltene Wert mit keinem größeren Fehler behaftet sei, als mit Rücksicht auf den praktischen Zweck noch zulässig ist. Diese Forderung wird nicht immer leicht zu erfüllen sein. Zweck des nachfolgend erläuterten Näherungsverfahrens ist es nun, diese Aufgabe zu erleichtern und eine einfache Methode anzugeben, nach der die wahrscheinlich richtigste Form einer aus mehreren (mit unvermeidlichen Fehlern behafteten) Beobachtungen gebildeten Kurve näherungsweise ermittelt werden kann. Das Ziehen der Kurven geschieht meist mit freier Hand „nach dem Gefühl". Dieses Gefühl, bei dem die persönliche Gleichung des Beobachters eine große Rolle spielt, soll tunlichst durch ein mathematisches Verfahren ersetzt oder doch unterstützt werden.

Von der Anwendung des Verfahrens sind von vornherein auszuschließen:

1. *Statistische Kurven*, bei denen es darauf ankommt, ein genaues Bild des Verlaufes der in Betracht kommenden Größen (z. B. Stromabgabestatistik einer Zentrale, Warenumsatz etc.) zu erhalten. In diesem Falle kann von einer „Kurve" im eigentlichen Sinn des Wortes nicht die Rede sein. Man wird die den Beobachtungen (die als genau bekannte Zahlen vorliegen) entsprechenden Punkte durch Gerade verbinden und kann die so erhaltene, gebrochene Linie durch Summierung der Ordinaten oder die von ihr und der Abscissenachse gebildete Fläche beliebig weiter verwerten.

Handelt es sich jedoch darum, ein allgemeines Bild des Steigens oder Fallens der betreffenden Größe (der Stromabgabe, des Warenumsatzes etc.) zu gewinnen, dann wird das Verfahren mit Vorteil Anwendung finden.

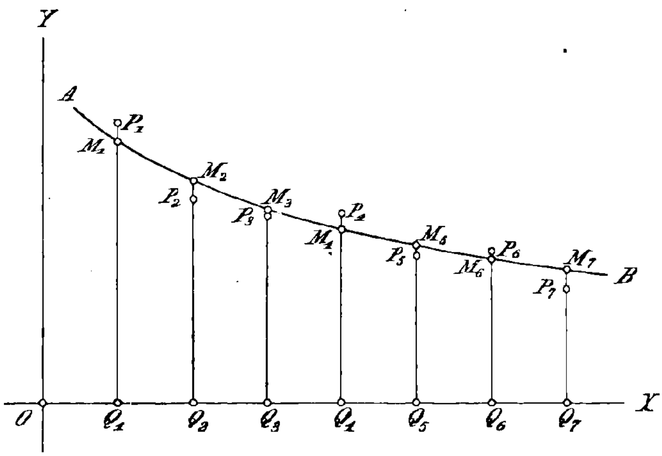
2. In manchen Fällen können die veränderlichen Größen leicht mit solcher Genauigkeit festgehalten werden, d. h. die Ordinaten können in beliebiger Zahl für jede gegebene Abscisse so sicher bestimmt werden, daß beim Auftragen der gefundenen Punkte ein Zweifel über den Verlauf der Kurve gar nicht möglich ist. Man braucht in diesem Falle nur die aufeinander folgenden Punkte durch eine elastische Linie zu verbinden, um die gesuchte Kurve mit genügender Genauigkeit zu erhalten. In diesem Falle ist natürlich ein Näherungsverfahren überflüssig.

Dagegen findet das Verfahren Anwendung in den Fällen, in denen, wie in Fig. 1, ein Kurvenzug AB bestimmt werden soll auf Grund der durch irgend ein Beobachtungsverfahren (Skalenablesung, Wägung, Längenmessung etc.) gewonnenen Punkte P_1, P_2, P_3, ... Der Deutlichkeit der Darstellung wegen sind in dieser und den folgenden Figuren die Fehler übertrieben groß angenommen. Es sei $AM_1 M_2 \ldots B$ der theoretisch richtige Kurvenzug. Der auf Grund der Punkte $P_1 P_2 \ldots$ „nach dem Gefühl" konstruierte Kurvenzug wird mit diesem nicht genau zusammenfallen. Die richtigen Ordinaten sind $M_1 Q_1$, $M_2 Q_2$, ... Die abgelesenen Werte $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, ... sind mit den Fehlern $P_1 M_1 = \Delta_1$, $P_2 M_2 = \Delta_2$, ... behaftet.

Wir setzen voraus, die Ablesungen seien frei von „systematischen" Fehlern (herrührend von unrichtiger Aufstellung oder von Indexfehlern der Meßinstrumente) und nur mit „zufälligen" Fehlern (unvermeidlichen Beobachtungsfehlern) behaftet. Erstere lassen sich bei entsprechender Sorgfalt bei Vornahme der Messungen meist vermeiden; in vielen Fällen kann man auch ihre Größe direkt oder indirekt ermitteln und als Korrektur in Rechnung ziehen.

Das charakteristische Merkmal der zufälligen Fehler ist, daß sie keinerlei Bevorzugung eines Vorzeichens (+ oder —) erkennen lassen. Wir dürfen daher annehmen, daß von n Beobachtungen $\frac{n}{2}$ mit positiven und $\frac{n}{2}$ mit negativen Fehlern behaftet sein werden, d. h. daß die Hälfte der gefundenen Punkte auf der einen Seite, die andere Hälfte auf der anderen Seite des betrachteten Kurvenastes liegen wird. Durch Umkehrung dieses Satzes findet man die Regel, *daß man der richtigen Form der gesuchten Kurve dann am nächsten kommen wird,* also die „wahrscheinlichste" Form derselben erhält, *wenn man die Kurve so zieht, daß zu beiden Seiten derselben gleich viele Punkte liegen.*

Fig. 1.

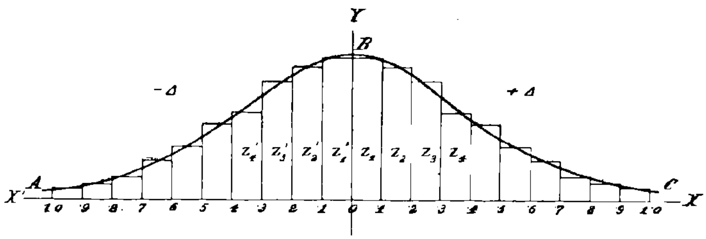


Die absolute Größe der einzelnen Fehler $\varDelta$ ist selbstverständlich eine verschiedene und in ihrem Auftreten in der Reihenfolge der Beobachtungen an keinerlei Gesetz gebunden. Dagegen nimmt die Zahl der Fehler oder richtiger, die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens in dem Maße ab, als ihre absolute Größe zunimmt, so zwar, daß die Zahl der Fehler eines gegebenen Intervalls (etwa $0 - 0 \cdot 1$ in irgend einem Maßstabe) in unmittelbarer Nähe des wahren Wertes y (also zwischen 0 und $0 \cdot 1$) größer sein wird als die Zahl der Fehler desselben Intervalls in größerer Entfernung vom Werte y (z. B. zwischen $0 \cdot 7$ und $0 \cdot 8$). Mit anderen Worten, kleine Fehler werden relativ häufiger, größere relativ seltener auftreten. Der Zusammenhang zwischen der absoluten Größe der Fehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens (ihrer relativen Häufigkeit) bei einer Beobachtungsreihe ist ein vollkommen gesetzmäßiger. Dieses Gesetz (das Laplacesche Gesetz der zufälligen Fehler)[1]) tritt um so schärfer zu Tage, je größer die Zahl der vorliegenden Beobachtungen ist. Der mathematische Ausdruck dieses Gesetzes lautet:

$$y = a e^{-h^2 x^2}, \tag{1}$$

wobei a und h Konstanten sind, die für jede Beobachtungsreihe besonders bestimmt werden müssen. $e = 2 \cdot 718 \ldots$ Um ein Bild des Verlaufes der durch obige Gleichung dargestellten Kurve zu erhalten, tragen wir als Abscissen Strecken auf, die den gewählten Fehlerintervallen (etwa $0 - 0 \cdot 1$, $0 \cdot 1 - 0 \cdot 2, \ldots$) entsprechen (Fig. 2), wobei wir sinngemäß die + Fehler nach rechts, die — nach links auftragen. Über jedem einzelnen Intervall als Basis konstruieren wir nun ein Rechteck, dessen Inhalt gleich ist der Zahl der Fehler, die in das gewählte Intervall fallen (z_1, $z_2, \ldots$ Zahlen der + Fehler; z'_1, $z'_2, \ldots$

Fig. 2.



Zahlen der — Fehler). Liegt eine genügende Zahl von Beobachtungen vor und hat man das Fehlerintervall entsprechend klein gewählt, so kann man die aufeinander folgenden Rechtecke durch eine Kurve ABC ersetzen, wobei natürlich die Summe der außerhalb der Kurve fallenden Flächenstücke gleich der der innerhalb liegenden sein muß. Die von der Kurve und der Abscissenachse eingeschlossene Fläche $ABCXOX'$ entspricht somit der Gesamtzahl der Fehler. Bei n Beobachtungen also:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k = \frac{n}{2}, \tag{2}$$

$$z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_k = \frac{n}{2}. \tag{3}$$

Wie vielfache Vergleiche ergeben, entspricht das Gesetz sehr gut den tatsächlichen Verhältnissen. Die Übereinstimmung ist eine um so bessere, je größer die Zahl der gemachten Beobachtungen ist.

---

1) Laplace: Théorie analytique des probabilités. Paris.

Aus diesem Gesetze können wir nun für unseren Zweck den Schluß ziehen, daß die Zahl der + Fehler eines Intervalls annähernd gleich ist der Zahl der — Fehler desselben Intervalls und *daß die algebraische Summe aller Fehler annähernd Null sein* und sich der Null um so mehr nähern wird, je größer die Zahl der Beobachtungen ist.

Bezeichnen wir den mittleren Fehler eines Intervalls mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezw. $-\delta_1, -\delta_2, \ldots$, so ist demnach mit wachsendem n:

$$z_1\delta_1 + z_2\delta_2 + \cdots + z_k\delta_k - (z_1'\delta_1' + z_2'\delta_2' + \cdots + z_k'\delta_k') \doteq 0 \tag{4}$$

oder

$$\lim \sum z\delta = 0, \tag{5}$$

wobei:

$$z_1 = z_1', \quad z_2 = z_2' \ldots$$

und

$$\delta_1 = \delta_1', \quad \delta_2 = \delta_2' \ldots$$

wird.

Auf das Beispiel Fig. 1 angewendet, ergibt dies, daß wir die annähernd zutreffende Annahme machen dürfen, daß

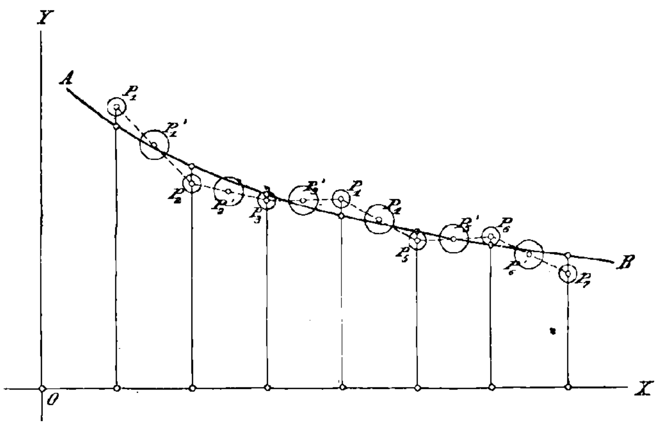
$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = \sum \Delta = 0. \tag{6}$$

Wir wollen uns nun vorstellen, jeder Punkt $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sei mit einem beliebigen, aber für alle Punkte gleichen Gewicht g behaftet. Dieses „Gewicht", das wir vielleicht „graphisches Gewicht" benennen wollen, sei durch einen Kreis von beliebigem Flächeninhalt (um jeden einzelnen Punkt als Mittelpunkt beschrieben) dargestellt (Fig. 3). Wir benutzen hierzu die Punkte des Beispiels Fig. 1. Um nun Punkte zu erhalten, die der wahren Kurve AB näher liegen, vereinigen wir je zwei benachbarte Punkte zu einem einzigen, indem wir den Schwerpunkt je zweier benachbarter, starr verbunden gedachter Punkte bestimmen. Er liegt im Halbierungspunkte der Verbindungslinie der beiden.

Wir verbinden also alle Punkte der Reihe nach durch Gerade und erhalten die gebrochene Linie $P_1P_2 \ldots P_7$. Hierauf halbieren wir die Strecken P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, P_6P_7 und erhalten die Schwerpunkte $P_1', P_2', \ldots, P_6'$.

Wie aus Fig. 3 hervorgeht, liegen diese Punkte der wahren Kurvenform bereits ziemlich nahe; *sie liegen alle der Kurve AB näher als die Punkte $P_1P_2 \ldots P_7$.* In vielen Fällen kann diese erste Annäherung bereits genügen, um durch die gefundenen Punkte $P_1'P_2' \ldots P_6'$ eine Kurve zu legen, deren Form vom „Gefühl" nicht mehr sonderlich beeinflußt werden kann. Genügt die erste Annäherung nicht, dann kann man das Verfahren auf diese Punkte nochmals anwenden (Ziehen und Halbieren der Strecken $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, ..., $P_5'P_6'$) und erhält die Schwerpunkte $P_1''P_2'' \ldots P_5''$. Wie man sofort erkennt, sinkt die Zahl der erhaltenen Punkte nach jedesmaliger Anwendung des Verfahrens um 1. Bei n gegebenen Punkten wird daher das Verfahren im Maximum $(n-1)$mal angewendet werden können. Führt man dies bei dem vorliegenden Beispiel durch, so würde man finden, daß der durch die letzte Annäherung gefundene Punkt P_1^{VI} keineswegs der wahren Kurve am nächsten liegt, wie anzunehmen gewesen wäre. Daß dies nach dem bisher Gesagten auch gar nicht der Fall zu sein braucht, geht schon daraus hervor, daß man ja nicht wissen kann, *wie groß* die Annäherung ist, die man bereits nach der ersten Anwendung des Verfahrens erzielte. Dazu bedürfte es der Kenntnis der absoluten Größe

Fig. 3.



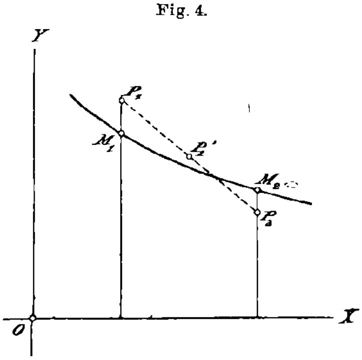
und Richtung jedes einzelnen Fehlers und der wahren Form der Kurve, was nach unserer Voraussetzung ausgeschlossen ist. Dafür, *wie oft* das Verfahren anzuwenden ist, kann keine Regel angegeben werden, das richtet sich nach dem jeweilig vorliegenden Fall. Als *Richtschnur* kann nur dienen, daß man das günstigste Resultat wahrscheinlich dann erzielt hat, wenn sich durch die gefundenen Punkte eine mehr oder weniger „elastische Linie" legen läßt, was durch die gegebenen Punkte nicht geschehen konnte. In den weitaus meisten Fällen wird eine oder höchstens zwei „Annäherungen" genügen. Dann ist auch die Anwendung des Verfahrens wegen seiner Einfachheit für den Praktiker von Wert und zu empfehlen. Öfteres Anwenden macht die Sache immer unübersichtlicher und praktisch wertlos. Insbesondere an flachen Kurvenstellen werden die neuen Punkte den alten so nahe fallen, daß weiteres „Annähern" zwecklos wäre.

Anknüpfend an die Bemerkung, daß wir das „Gewicht“ eines Punktes (P_1, P_2, ...) durch die Fläche eines Kreises darstellen wollen, können wir nun das Gewicht der in erster Annäherung gefundenen Punkte (P_1', P_2', ...) als graphische Schwerpunkte je zweier gegebener Punkte durch je eine doppelt so große Kreisfläche darstellen; die Punkte der zweiten Annäherung (P_1'', P_2'', ...) durch eine viermal so große Kreisfläche u. s. w. Wenn wir im Sinne des oben Gesagten mit der „Annäherung“ nicht über ein vernünftiges, durch den jeweiligen Fall bestimmtes Maß hinausgehen, können wir damit die Vorstellung verbinden, die Größe der Kreisfläche stelle das „Gewicht“ des Punktes als Maß der Einflußnahme auf die Form der Kurve dar. Diese Anschauungsweise darf selbstverständlich streng genommen nur auf die ersten Annäherungen ausgedehnt werden, da alle gefundenen Schwerpunkte von sämtlichen benutzten Einzelpunkten beeinflußt sind.

Der *Beweis*, daß durch das beschriebene Verfahren tatsächlich eine genauere Bestimmung der wahren Kurvenform möglich ist, kann aus den wiederholt angeführten Gründen nicht mathematisch erbracht werden. Wir wollen ihn durch folgende Überlegungen ersetzen:

1. Gesetzt, zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 lägen auf verschiedenen Seiten der (unbekannten) Kurve. Der Fehler des Halbierungspunktes P_1' der Verbindungslinie $P_1 P_2$ (Fig. 4) wird *annähernd* (wegen der unbekannten Krümmung des Kurvenstückes zwischen den Abscissen) gleich der Differenz der Fehler der gegebenen Punkte sein. Ist die Krümmung des Kurvenstückes $M_1 M_2$ eine so große, daß diese Annahme unzulässig wird, dann reichen die Punkte $P_1 P_2$ zur Bestimmung der Kurvenform überhaupt nicht aus, und es müssen weitere Punkte zwischen P_1 und P_2 bestimmt werden, soll die Kurve noch praktischen Wert besitzen und nicht durch bloßes Schätzen gefunden sein.

Fig. 4.



2. Liegen zwei benachbarte Punkte auf derselben Kurvenseite, so wird der Fehler des gefundenen Näherungspunktes P_1' annähernd gleich sein dem arithmetischen Mittel der Fehler der Punkte P_1 und P_2.

a. Liegen die Punkte auf der konvexen Seite der Kurve, dann ist der Fehler kleiner (Fig. 5),

b. liegen sie auf der konkaven Seite der Kurve, dann ist der Fehler größer als das arithmetische Mittel (Fig. 6). Dieser Fall ist der ungünstigste für das Näherungsverfahren, da letzteres den Fehler zu vergrößern strebt. Er wird jedoch teilweise ausgeglichen durch die nach dem Laplaceschen Gesetze zu erwartenden Punkte, die auf der

Fig. 5.

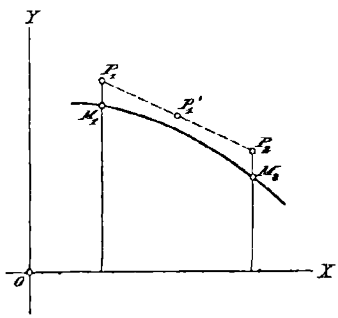
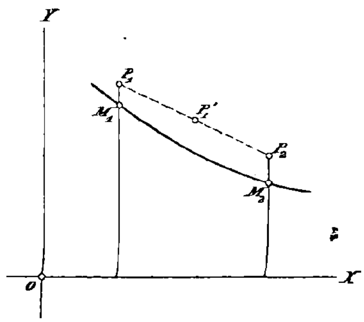


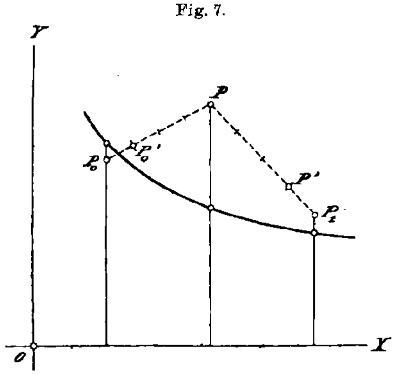
Fig. 6.



anderen Kurvenseite liegen. Das Maß der Krümmung des Kurvenstückes $M_1 M_2$ entscheidet wieder dafür, ob die Punkte zur einwandfreien Konstruktion der Kurvenform überhaupt ausreichen.

Das beschriebene Verfahren setzt uns ferner in den Stand, folgendem Umstand Rechnung zu tragen: Gesetzt den Fall, wir hätten Grund zur Annahme, bei der Bestimmung eines Punktes P wäre aus irgend einer Ursache ein Fehler unterlaufen, der größer ist als der durchschnittliche Fehler der übrigen Punkte. Man wird dies auch daraus erkennen, daß der Punkt P im Vergleich zu den anderen Punkten auffallend weit von der Kurve abliegen wird (Fig. 7). Diesen Punkt können wir zur Konstruktion der Kurve unter der Bedingung heranziehen, daß wir seine Einflußnahme auf die Kurvenform, sein „graphisches Gewicht“, entsprechend herabsetzen. Hierzu müssen wir eine zahlenmäßige Annahme treffen. Wir wollen als einfaches Beispiel annehmen, sein „Gewicht“ sei blos $1/3$ von dem der beiden Nachbarpunkte. Dann liegt der graphische Schwerpunkt der Strecke $P_0 P$ in P_0', der der Strecke $P P_1$ in P'. Wir haben somit nach der ersten Annäherung mit den Punkten P_0' und P' zu rechnen und sind der wahren Kurvenform näher ge-

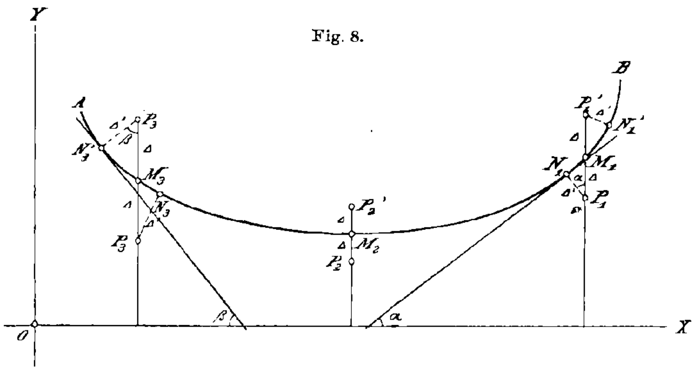
Fig. 7.



kommen. Es versteht sich von selbst, daß diese Art der Fehlerbewertung ihrer Unsicherheit wegen nur selten in Anwendung kommen kann und nach Tunlichkeit vermieden werden wird. Als Konsequenz des allgemeinen Verfahrens der Bestimmung „graphischer Schwerpunkte" bietet sie immerhin Interesse.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß der Einfluß des Fehlers eines Punktes auf die richtige Kurvenform nicht an allen Stellen einer Kurve derselbe ist, sondern von der Neigung der Kurve gegen die Koordinatenachsen abhängt. Hätten wir beispielsweise (Fig. 8) an Stelle des

Fig. 8.



richtigen Punktes M_1 den mit dem Fehler $\varDelta$ behafteten Punkt P_1 gefunden und benutzt, so wäre die Kurve an der betreffenden Stelle um

$$\varDelta' = \varDelta \cdot \cos \alpha$$

falsch gegen die richtige Kurve AB, also um einen Betrag, der unbedingt kleiner ist als der absolute Fehler des Punktes P_1. α ist jedoch der Neigungswinkel der Tangente an die Kurve in N_1. Der begangene Fehler ist daher proportional dem cos des Neigungswinkels der Kurve zur x-Achse an der betrachteten Stelle. Er liegt zwischen den Grenzen 0 und $\varDelta$ (dem absoluten Fehler des beobachteten Punktes). Bei M_3 bezw. P_3' liegen die Verhältnisse analog, wie aus der Fig. 8 zu ersehen. Bei M_2 ist der Fehler ein Maximum ($= \varDelta$). *Der Einfluß der Beobachtungsfehler auf die Kurve ist daher um so größer, je geringer die Neigung der Kurve zur Abscissenachse ist und um so kleiner, je größer diese Neigung ist.*

Zusammenfassung.

Für die graphische Darstellung von Beobachtungsreihen, die nur mit zufälligen Fehlern behaftet sind, haben wir folgende Anhaltspunkte zur Ermittelung der wahrscheinlich richtigen Kurvenform:

1. Auf jeder Seite der richtigen Kurve werden annähernd gleich viele Beobachtungspunkte liegen.

2. Die algebraische Summe aller Beobachtungsfehler wird annähernd $= 0$ sein.

3. Aus den Beobachtungspunkten lassen sich durch Bestimmung der „graphischen Schwerpunkte“ nach dem oben beschriebenen Verfahren Punkte finden, die der richtigen Kurve näher liegen als die gegebenen Punkte.

Über die Kreiselbewegung an der Erdoberfläche.

Von OLUF KRAGH in Nykóbing-Falster (Dänemark).

In meiner Dissertation[1]) habe ich gezeigt, daß die Eulerschen Koordinaten der Pendelachse durch elliptische Funktionen zweiter Art und ihre Differentialquotienten ausgedrückt werden können, auch wenn man die erste Potenz der Winkelgeschwindigkeit der Erde mit in Rechnung nimmt, vorausgesetzt, daß die Trägheitsmomente bezüglich zweier auf einander und auf der Pendelachse senkrechter Achsen durch den Aufhängepunkt des Pendels von gleicher Größe sind.

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß dieses Ergebnis seine Gültigkeit behält, auch wenn das Pendel am Anfang der Bewegung eine Drehung um die Achse erhält, also auch für die Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels. Daß die Bewegungsgleichungen des Kreisels durch elliptische Funktionen zweiter Art ausgedrückt werden können, wenn man die Winkelgeschwindigkeit der Erde nicht ins Auge faßt, ist seit lange wohl bekannt.

Während dieser Untersuchung werden wir die kanonische Form der Differentialgleichungen der relativen Bewegung benutzen, die zuerst von Bour[2]) gegeben worden ist.

Dieses Gleichungssystem ist, wie bekannt:

$$\frac{dq_k}{dt} = -\frac{d\mathsf{H}}{dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{d\mathsf{H}}{dq_k}, \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

wo

$$p_k = \frac{dT_1}{dq'_k}, \quad \text{und} \quad \mathsf{H} = U + K + G - T.$$

---

1) Studier over Pendulbevaegelsen, Kóbenhavn 1902.

2) Journal de math. pure et appl., 2ième ser. t. VIII. pag. 1—51.

T ist die lebendige Kraft der relativen Bewegung, T_1 die der absoluten, demnach

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_1^n m_i \cdot \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right],$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\sum_1^n m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2),$$

wo

$$\xi = \frac{dx}{dt} + \beta z - \gamma y,$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} + \gamma x - \alpha z,$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt} + \alpha y - \beta x.$$

α, β, γ sind die Komponenten der augenblicklichen Drehung nach den beweglichen Achsen. U ist das Potential der äußeren Kräfte. Ferner ist

$$K = -u\sum_1^n m_i x_i - v\sum_1^n m_i y_i - w\sum_1^n m_i z_i$$

(u, v, w die Komponenten der Beschleunigung des Anfangspunktes nach den beweglichen Achsen), und

$$G = \tfrac{1}{2}\sum_1^n m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2].$$

I.

Ermittelung der Funktionen T_1, G, $U + K$ und H.

Der Unterstützungspunkt des Kreisels wird mit A bezeichnet, AR ist die Achse des Kreisels, AP und AQ sind zwei auf einander senkrechte Geraden durch A, die senkrecht auf der Achse stehen. Die Trägheitsmomente in Bezug auf diese Koordinatenachsen werden mit J_R, J_P, J_Q bezeichnet. J_P und J_Q sind einander gleich. Außer diesem Koordinatensystem führen wir noch ein anderes $A - \mathrm{MNP}$ ein. $A\mathrm{P}$ ist die — positiv nach unten — gerichtete Lotlinie des Unterstützungspunktes, die der M ist positiv nach Süden, die der N positiv nach Westen gerichtet.

Die Ebene $[APQ]$ schneidet die Ebene $[A\mathrm{MN}]$ in einer Geraden, deren positive Richtung Γ so bestimmt ist, daß $(R_1\Gamma) = +\frac{\pi}{2}$ (R_1 ist die positive Richtung der Projektion von AR auf die Ebene $[A\mathrm{MN}]$).

Wir führen nun die drei Eulerschen Winkel $(R\mathsf{P}) = \theta$, $(\Gamma P) = \varphi$, $(\Gamma M) = \psi$ ein. Bedeuten p, q, r die Komponenten der augenblicklichen Drehung nach den Achsen AP, AQ, AR, so ist, wie bekannt:

$$
\begin{aligned}
p &= \cos\varphi\cdot\theta' + \sin\theta\sin\varphi\cdot\psi' \\
q &= -\sin\varphi\cdot\theta' + \sin\theta\cos\varphi\cdot\psi' \qquad (1)\\
r &= \varphi' + \cos\theta\cdot\psi'.
\end{aligned}
$$

Führt man in den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}\cdot(J_{\mathrm{P}}\cdot(p^2+q^2) + J_R r^2)$$

diese Werte ein, dann erhält man

$$T = \tfrac{1}{2}\cdot[J_{\mathrm{P}}\cdot(\theta'^2 + \sin^2\theta\cdot\psi'^2) + J_R(\varphi' + \cos\theta\cdot\psi')^2]. \qquad (2)$$

Werden nun die Koordinaten eines willkürlichen Punktes im Systeme $A - \mathsf{MNP}$ durch (x, y, z) bezeichnet, dann ist

$$G = \tfrac{1}{2}\cdot\int[(\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2]\,dm,$$

die Integration über den ganzen Kreisel erstreckt. Hier ist

$$\alpha = n\cos\lambda, \quad \beta = 0, \quad \gamma = n\sin\lambda.$$

λ ist die geographische Breite des Ortes. n ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde. Diese Größe ist $= c\cdot\frac{1}{13\,713}$.

Wir erhalten demnach

$$G = \frac{n^2}{2}\cdot\int[y^2 + (x\sin\lambda - z\cos\lambda)^2]\,dm.$$

Dieses Integral ist das Trägheitsmoment des Kreisels in Bezug auf eine Gerade durch den Unterstützungspunkt, parallel mit der Drehungsachse der Erde.

Bedeuten δ_1, δ_2, δ_3 die Kosinus der Winkel, welche diese Achse — positiv nach Süden — mit den Hauptträgheitsachsen des Kreisels einschließt, dann ist

$$G = \frac{n^2}{2}\cdot[J_{\mathrm{P}}(\delta_1^2 + \delta_2^2) + J_R\delta_3^2].$$

Man hat aber

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \cos\lambda\cdot\cos(P\mathsf{M}) + \sin\lambda\cos(P\mathsf{P}), \\
\delta_2 &= \cos\lambda\cdot\cos(Q\mathsf{M}) + \sin\lambda\cos(Q\mathsf{P}), \\
\delta_3 &= \cos\lambda\cdot\cos(R\mathsf{M}) + \sin\lambda\cos(R\mathsf{P}).
\end{aligned}
$$

Werden nun in diese Gleichungen die Werte für $\cos(PM)$ usw. eingesetzt, und führt man in den letzten Ausdruck für G die so erhaltenen Werte ein, dann ergibt sich

$$(3)\qquad G = \frac{n^2}{2} \cdot [J_P - (J_P - J_R)(\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\psi\sin\theta)^2].$$

Es bleibt nun übrig, um die Funktion H zu erhalten, $U + K$ zu berechnen. Man hat, wenn m die Masse des Kreisels bedeutet:

$$\frac{d(U+K)}{dx} = \frac{dU}{dx} - mu,$$

$$\frac{d(U+K)}{dy} = \frac{dU}{dy} - mv,$$

$$\frac{d(U+K)}{dz} = \frac{dU}{dz} - mw.$$

U bedeutet hier das Potential der Erde. Man überzeugt sich leicht davon[1]), daß man von der Anziehung des Mondes, der Sonne und aller andern Himmelskörper absehen kann. Von dem Widerstande der Luft sehen wir gleichfalls ab.

Man sieht, daß $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$ die Komponenten der Erdanziehung, während $-mu$, $-mv$, $-mw$ die Komponenten der Zentrifugalkraft sind. Also sind $\frac{d(U+K)}{dx}, \frac{d(U+K)}{dy}, \frac{d(U+K)}{dz}$ die Komponenten des Gewichts des Teilchens dm, wie man dieses beobachtet.

Demnach hat man:

$$\frac{d(U+K)}{dx} = 0, \quad \frac{d(U+K)}{dy} = 0, \quad \frac{d(U+K)}{dz} = mg.$$

Die Integration dieser Gleichungen gibt $U + K = mgz_0$ (z_0 ist die z-Koordinate des Schwerpunktes). Wird die Entfernung des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte mit l bezeichnet, dann ergibt sich

$$z_0 = l\cos\theta$$

und demnach:

$$(4)\qquad U + K = mgl\cos\theta$$

Jetzt ist

$$(5)\quad \mathsf{H} = mgl\cos\theta + \frac{n^2}{2} \cdot \{J_P(\theta'^2 + \sin^2\theta \cdot \psi'^2) + J_R \cdot (\varphi' + \cos\theta \cdot \psi')^2\}.$$

---

1) Diss. S. 8—10.

Statt θ', φ', ψ' führt man in H die neuen Variabeln Θ, Φ, Ψ ein, die dadurch bestimmt sind, daß

$$\frac{dT_1}{d\theta'} = \Theta, \quad \frac{dT_1}{d\varphi'} = \Phi, \quad \frac{dT_1}{d\psi'} = \Psi.$$

Man hat aber

$$T_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dm,$$

und

$$\xi = \frac{dx}{dt} - n \sin\lambda \cdot y,$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} + n \sin\lambda \cdot x - n \cos\lambda \cdot z,$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt} + n \cos\lambda \cdot y.$$

Also

$$T_1 = T + G + n \sin\lambda \int (xy' - yx')\, dm + n \cos\lambda \int (yz' - zy')\, dm.$$

Nun ist

$$\int (xy' - yx')\, dm = J_{\mathrm{P}} (\gamma_1 p + \gamma_2 q) + J_R \cdot \gamma_3 r,$$

$$\int (yz' - zy')\, dm = J_{\mathrm{P}} (\alpha_1 p + \alpha_2 q) + J_R \cdot \alpha_3 r,$$

indem

$$\gamma_1 = \cos(P\mathrm{P}), \quad \gamma_2 = \cos(Q\mathrm{P}), \quad \gamma_3 = \cos(R\mathrm{P}),$$

$$\alpha_1 = \cos(P\mathrm{M}), \quad \alpha_2 = \cos(Q\mathrm{M}), \quad \alpha_3 = \cos(R\mathrm{M}),$$

woraus, wenn man einsetzt und ausrechnet,

$$\int (xy' - yx')\, dm = (J_{\mathrm{P}} \sin^2\theta + J_R \cdot \cos^2\theta) \cdot \psi' + J_R \cos\theta \cdot \varphi',$$

$$\int (yz' - zy')\, dm = J_{\mathrm{P}} \cos\psi \cdot \theta' + (J_{\mathrm{P}} - J_R) \sin\psi \sin\theta \cos\theta \cdot \psi' - J_R \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \varphi'.$$

Im obenstehenden Ausdruck für T_1 führt man diese Werte ein und erhält:

$$\begin{aligned} T_1 = {} & \tfrac{1}{2} \cdot \{ J_{\mathrm{P}} (\theta'^2 + \sin^2\theta \cdot \psi'^2) + J_R (\varphi' + \cos\theta \cdot \psi')^2 \} + G \\ & + n \sin\lambda \cdot \{ (J_{\mathrm{P}} \sin^2\theta + J_R \cos^2\theta) \cdot \psi' + J_R \cos\theta \cdot \varphi' \} \\ & + n \cos\lambda \cdot \{ J_{\mathrm{P}} \cos\psi \cdot \theta' + (J_{\mathrm{P}} - J_R) \sin\psi \sin\theta \cos\theta \cdot \psi' - J_R \sin\psi \sin\theta \cdot \varphi' \}. \end{aligned}$$

Differentiiert man in Bezug auf θ', φ' ψ', so wird erhalten:

$$\frac{dT_1}{d\theta'} = \Theta = J_P \cdot \theta' + nJ_P \cos\lambda\cos\psi,$$

$$\frac{dT_1}{d\varphi'} = \Phi = J_R \cdot (\varphi' + \cos\theta\cdot\psi') + nJ_R\cdot(\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\psi\sin\theta),$$

$$\frac{dT_1}{d\psi'} = \Psi = \cos\theta\cdot\Phi + J_P\sin^2\theta\cdot\psi' + nJ_P\sin\theta\cdot(\sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\psi\cos\theta).$$

Wenn man diese Gleichungen in Bezug auf $\varphi' + \cos\theta\cdot\psi'$, θ' und ψ' auflöst, so ergibt sich

$$\varphi' + \cos\theta\cdot\psi' = \frac{\Phi}{J_R} - n\cdot(\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\psi\sin\theta),$$

$$\theta' = \frac{\Theta}{J_P} - n\cos\lambda\cos\psi,$$

$$\psi' = \frac{\Psi - \cos\theta\cdot\Phi}{J_P\sin^2\theta} - \frac{n}{\sin\theta}\cdot(\sin\lambda\sin\theta + \cos\lambda\sin\psi\cos\theta).$$

Führt man diese Werte in (5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathsf{H} &= mgl\cos\theta - \tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{\Theta^2}{J_P} + \frac{\Phi^2}{J_R}\right] - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(\Psi - \cos\theta\cdot\Phi)^2}{J_P\sin^2\theta} \\ (6)\qquad &+ n\cdot\Theta\cdot\cos\lambda\cos\psi + n\cdot\Phi\cdot(\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\psi\sin\theta) \\ &+ n\cdot\frac{\Psi - \cos\theta\cdot\Phi}{\sin\theta}\cdot(\sin\lambda\sin\theta + \cos\lambda\sin\psi\cos\theta). \end{aligned}$$

II.

Die kanonische Form der Bewegungsgleichungen.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind nun den in der Einleitung angeführten Gleichungen zufolge

$$(1)\qquad \begin{aligned} &1)\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\mathsf{H}}{d\Phi}, &&2)\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\mathsf{H}}{d\varphi}, \\ &3)\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\mathsf{H}}{d\Theta}, &&4)\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\mathsf{H}}{d\theta}, \\ &5)\ \frac{d\psi}{dt} = -\frac{d\mathsf{H}}{d\Psi}, &&6)\ \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\mathsf{H}}{d\psi}, \end{aligned}$$

Aus $(1)^2$ erhält man, da H φ nicht enthält,

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \text{woraus} \quad \Phi = C.$$

Es wird im folgenden bequem sein $C = \mu J_R$ zu setzen.[1])

Aus $(1)^1$ ergibt sich:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mu - \frac{\Psi - \mu J_R \cos\theta}{J_P \sin^2\theta} \cdot \cos\theta - n(\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\psi\sin\theta)$$
$$+ n\cdot\cot\theta\cdot(\sin\lambda\sin\theta + \cos\lambda\sin\psi\cos\theta);$$

aber — wie früher gefunden ist —

$$\frac{\Psi - \mu J_R\cos\theta}{J_P\sin^2\theta} = \psi' + \frac{n}{\sin\theta}\cdot(\sin\lambda\sin\theta + \cos\lambda\sin\psi\cos\theta),$$

und demnach

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\cdot\frac{d\psi}{dt} = r = \mu - n\cdot(\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\psi\sin\theta),$$

eine Gleichung, die auch früher gefunden worden ist.

Hat man vermittelst der vier letzten Gleichungen (1) θ und ψ als Funktionen von t bestimmt, dann erhält man φ aus (2) durch Quadratur.

Die Werte von H in $(1)^{3,4,5,6}$ eingesetzt gibt nun

$$(3)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Theta}{J_P} - n\cos\lambda\cos\psi,$$

$$(4)\qquad \frac{d\Theta}{dt} = -mgl\sin\theta - \mu\cdot\frac{J_R}{J_P}\cdot\frac{\Psi - \mu J_R\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$+ \frac{\cot\theta}{J_P}\cdot\left[\frac{\Psi - \mu J_R\cos\theta}{\sin\theta}\right]^2 - n\cdot\frac{\cos\lambda\sin\psi}{\sin\theta}\cdot\frac{\Psi - \mu J_R\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$(5)\qquad \frac{d\psi}{dt} = -n\sin\lambda + \frac{1}{J_P\sin\theta}\cdot\frac{\Psi - \mu J_R\cos\theta}{\sin\theta} - n\cos\lambda\sin\psi\cot\theta,$$

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} &= -n\cdot\Theta\cdot\cos\lambda\sin\psi - n\mu J_R\cos\lambda\cos\psi\sin\theta\\ &\quad + n\cdot\frac{\Psi - \mu J_R\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\lambda\cos\psi\cos\theta.\end{aligned}$$ [2])

Aus (2) sieht man, daß μ die Winkelgeschwindigkeit ist, welche der Kreisel am Anfang der Bewegung um die Figurenachse erhält. Es folgt hieraus für das Pendel, daß die Drehung der Erde allein im stande ist, eine Drehung um die Pendelachse hervorzubringen.

Betrachten wir die dreiseitige Ecke, welche durch die Lotlinie (positiv nach unten), die Pendelachse und eine Gerade durch den An-

---

1) C ist nämlich die Projektion des Impulses auf die Figurenachse des Kreisels.

2) Ψ ist die Projektion des Impulses auf die Vertikale, und man sieht hieraus, daß Ψ, wenn man n vernachlässigt, konstant ist.

fangspunkt parallel mit der Drehungsachse der Erde (positiv nach Süden, Richtung V) bestimmt wird, dann ist

$$(R\mathsf{P}) = \theta, \quad (V\mathsf{P}) = \frac{\pi}{2} - \lambda, \quad (VR) = x.$$

Der Raumwinkel gegenüber der Ecke x ist

$$(\mathsf{M}R_1) = (\mathsf{M}\Gamma) + (\Gamma R_1) = -\frac{\pi}{2} - \psi$$

und also

$$\cos x = \cos\theta \sin\lambda - \sin\theta\cos\lambda\sin\psi.$$

Demnach ist, wenn $\mu = 0$,

$$r = -n\cos x.$$

Wird eine Ebene durch den Aufhängepunkt parallel mit dem Äquator der Erde gelegt, so wird die Bewegung um die Pendelachse oscillierend, wenn diese Achse im Laufe einer Schwingung des Pendels durch die Ebene geht, was nicht geschehen kann, falls die größte Elongation kleiner ist als die geographische Breite des Ortes. Auf dem Äquator wird die Achse immer zwei Mal in jeder Schwingung die Ebene passieren, die Bewegung also hier immer oscillierend werden; anderswo aber immer rotierend, wenn die Elongation kleiner als die Breite des Ortes ist.

III.

Integration der Bewegungsgleichungen.

Die Größe H enthält zweierlei Glieder, nämlich solche, die n als Faktor enthalten, und solche, in welchen dieser Faktor nicht vorkommt. Werden diese zwei Arten von Gliedern beziehungsweise H_2 und H_1 bezeichnet, dann hat man

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2.$$

Man kann aber, weil $n = c\,\frac{1}{13713}$, H_2 als unendlich klein annehmen und demnach als eine die Bewegung störende Funktion ansehen, deren Einfluß wir vorläufig vernachlässigen werden.

Dann haben wir

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad \Psi = a$$

und demnach

$$\mathsf{H}_1 = mgl\cos\theta - \tfrac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2}{J_P} + \mu^2 J_R\right] - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a - \mu J_R\cos\theta}{J_P\sin^2\theta}.$$

Die Zeit kommt in dieser Gleichung nicht explicite vor, und wir können also die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung durch Differentiation ausführen, falls man das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\mathsf{H}_1 + h = 0$$

finden kann. In H_1 soll Θ durch $\frac{dV}{d\theta}$ ersetzt werden, und $h = -\frac{dV}{dt}$. Wenn man dann

$$V = -ht + W(\theta, \psi)$$

setzt, wird man zur Bestimmung von W die Gleichung erhalten

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dW}{d\psi} = a \\ \sin^2\theta \cdot \left(\dfrac{dW}{d\theta}\right)^2 = J_P \sin^2\theta \cdot (2h + 2\,mgl\cos\theta - \mu^2 J_R) - (a - \mu J_R \cos\theta)^2, \end{cases}$$

wovon sich als vollständiges Integral ergibt:

$$(2)\quad W = \int \sqrt{J_P \sin^2\theta \cdot (2h + 2\,mgl\cos\theta - \mu^2 J_R) - (a - \mu J_R \cos\theta)^2} \cdot \frac{d\theta}{\sin\theta} + a\psi + b.$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen werde mit X bezeichnet. Jetzt erhält man:

$$V = -ht + \int \sqrt{X} \cdot \frac{d\theta}{\sin\theta} + a\psi + b.$$ (b spielt im folgenden keine Rolle.)

Die Bewegungsgleichungen der nicht gestörten Bewegung sind nun

$$(3)\quad \frac{dV}{dh} = -t + J_P \int \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{\sqrt{X}} = L$$

$$(4)\quad \frac{dV}{da} = \psi - \int \frac{(a - \mu J_R \cos\theta)\, d\theta}{\sin\theta \cdot \sqrt{X}} = M.$$

L und M sind willkürliche Konstanten.

Wird in $X = 0$, $\cos\theta = x$ gesetzt, so erkennt man ohne Schwierigkeit, daß die Wurzeln dieser Gleichung reell sind. Sie seien mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet.

$$-1 < x_2 < x_3 < +1, \quad x_1 < -1.$$

Aus (3) wird jetzt durch bekannte Transformationen erhalten:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{2 J_P}{mgl \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}},$$

$$k^2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} < 1, \quad y = \sqrt{\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}},$$

und daraus

$$(5)\quad \cos\theta = x_2\,\mathrm{sn}^2 u + x_3\,\mathrm{cn}^2 u,$$

indem

$$u = (t - t_0)\sqrt{\frac{mgl \cdot (x_3 - x_1)}{2 J_P}}.$$

Gehen wir nun zur Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung für die von der Drehung der Erde gestörte Bewegung des Kreisels über, so ist bekanntlich diese Gleichung

$$\frac{dV}{dt} - \mathsf{H}_1 - \mathsf{H}_2 = 0, \tag{6}$$

worin

$$\mathsf{H}_2 = n \cdot \Theta \cdot \cos\lambda \cos\psi + n \cdot \Phi \cdot (\sin\lambda \cos\theta - \cos\lambda \sin\psi \sin\theta)$$

$$+ n \cdot \frac{\Psi - \cos\theta \cdot \Phi}{\sin\theta} \cdot (\sin\lambda \sin\theta + \cos\lambda \sin\psi \cos\theta).$$

Wenn man

$$V = -ht + \mu J_R \cdot \varphi + W(\theta, \psi) + W_1(\theta, \psi)$$

setzt (W_1 entspricht den Gliedern in H_2 und ist demnach unendlich klein), so ergibt sich zur Bestimmung von W_1 — indem wir alle Glieder, die unendlich klein von höheren Potenzen als die erste sind, vernachlässigen — die partielle Differentialgleichung

$$\frac{2}{J_P} \cdot \frac{dW}{d\theta} \cdot \frac{dW_1}{d\theta} + \frac{2}{J_P \sin^2\theta} \cdot \left(\frac{dW}{d\psi} - \mu J_R \cos\theta\right) \cdot \frac{dW_1}{d\psi} - 2n \cdot \frac{dW}{d\theta} \cdot \cos\lambda \cos\psi$$

$$- 2n\mu J_R \cdot (\sin\lambda \cos\theta - \cos\lambda \sin\psi \sin\theta)$$

$$- 2n \cdot \frac{\left(\frac{dW}{d\psi} - \mu J_R \cos\theta\right)(\sin\lambda \sin\theta + \cos\lambda \sin\psi \cos\theta)}{\sin\theta} = 0.$$

Das dieser Gleichung entsprechende System simultaner Differentialgleichungen ist bekanntlich — nach Reduktion —

$$\frac{J_P \cdot d\theta}{\sqrt{X}} = \frac{J_P \sin\theta \cdot d\psi}{a - \mu J_R \cos\theta}$$

$$= \frac{dW_1}{n(\cos\lambda \cos\psi \sqrt{X} - \mu J_R \cos\lambda \sin\psi + a \sin\lambda \sin\theta + a \cos\lambda \sin\psi \cos\theta)}.$$

Hieraus erhält man

$$d\psi = \frac{a - \mu J_R \cos\theta}{\sin\theta \cdot \sqrt{X}} \cdot d\theta, \quad \psi = \int \frac{a - \mu J_R \cos\theta}{\sin\theta \cdot \sqrt{X}}\, d\theta + C.$$

Führt man diese Werte für ψ ein, dann ergibt sich

$$W_1(\theta, \psi) = nJ_P \cos\lambda \cdot \int \cos\psi \cdot d\theta - n\mu J_R J_P \cos\lambda \cdot \int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}}\, d\theta$$
$$+ naJ_P \sin\lambda \cdot \int \frac{\sin\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta + naJ_P \cos\lambda \cdot \int \frac{\sin\psi \cos\theta}{\sqrt{X}}\, d\theta.$$

Wir haben demnach für V die vollständige Lösung:

$$V = -ht + \mu J_R \varphi + \int \frac{\sqrt{X}}{\sin\theta} \cdot d\theta + a\psi + b$$
$$(7) \qquad + nJ_P \cos\lambda \cdot \int \cos\psi\, d\theta - n\mu J_R J_P \cos\lambda \cdot \int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}}\, d\theta$$
$$+ naJ_P \sin\lambda \cdot \int \frac{\sin\theta}{\sqrt{X}}\, d\theta + naJ_P \cos\lambda \cdot \int \frac{\sin\psi\cos\theta}{\sqrt{X}}\, d\theta.$$

In den Gliedern, die den Faktor n enthalten, müssen wir uns den oben für ψ gefundenen Ausdruck eingesetzt denken.

Nun ist, wenn von Gliedern, die unendlich klein höherer Ordnung sind, abgesehen wird:

$$(7') \qquad J_P \cdot \int \frac{\sin\theta}{\sqrt{X}}\, d\theta = t + L.$$

Um ψ zu berechnen, führen wir durch die Gleichung

$$x = \cos\theta = x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v$$

die neue Variable v ein. Man erhält

$$dx = -2 \cdot (x_3 - x_2) \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot dv$$

$$x - x_1 = (x_3 - x_1)\operatorname{dn}^2 v, \quad x - x_2 = (x_3 - x_2)\operatorname{cn}^2 v, \quad x_3 - x = (x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2 v$$

und demnach:

$$\psi - C = \frac{2}{\sqrt{2mglJ_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \int \frac{a - \mu J_R \cdot (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v)}{[1 + x_3 - (x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2 v][1 - x_3 + (x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2 v]} \cdot dv.$$

Wird die Größe unter dem Integralzeichen in Partialbrüche zerlegt, dann ergibt sich

$$(8) \quad \psi - C = \frac{1}{\sqrt{2mglJ_P \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \left\{ (a + \mu J_R) \int \frac{dv}{1 + x_3 - (x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2 v} \right.$$
$$\left. + (a - \mu J_R) \int \frac{dv}{1 - x_3 + (x_3 - x_2)\operatorname{sn}^2 v} \right\}.$$

Die Funktionen unter den Integralzeichen sind doppeltperiodische mit den Perioden $2K$ und $2iK'$.

Führt man die Bezeichnungen

$$\operatorname{sn}\alpha = \sqrt{\frac{1+x_3}{x_3-x_2}}, \quad \operatorname{sn}\beta = i\cdot\sqrt{\frac{1-x_3}{x_3-x_2}}$$

ein, so kommt:

$$\psi - C = \frac{1}{\sqrt{2\,mgl\,J_P\cdot(x_3-x_1)}}$$

$$\cdot\left\{-\frac{a+\mu J_R}{x_3-x_2}\cdot\int\frac{dv}{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha}+\frac{a-\mu J_R}{x_3-x_2}\cdot\int\frac{dv}{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\beta}\right\}.$$

Wird durch $\int\limits_P$ die Integration längs der Begrenzung der Periodenrechtecke bezeichnet, hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_P\frac{dz}{\operatorname{sn}^2 z-\operatorname{sn}^2\alpha}\cdot\frac{H'(z-v)}{H(z-v)} = \Gamma \text{ (= Konstante).}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber auch gleich der Summe der Residuen der Funktion unter dem Integralzeichen.

Die Unendlichkeitsstellen dieser Funktion sind

$$z = v, \quad \alpha, \quad -\alpha$$

1. $z = v$; Res. $\dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha}$.

2. $z = \alpha$; Res. $-\dfrac{1}{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}\cdot\dfrac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)}$.

3. $z = -\alpha$; Res. $\dfrac{1}{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}\cdot\dfrac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)}$.

Demnach ist

$$\Gamma = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}\cdot\left(\frac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)}-\frac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)}\right).$$

Wird $v = iK'$ gesetzt, dann ergibt sich

$$\Gamma = -\frac{1}{2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}\cdot\left(\frac{H'(iK'-\alpha)}{H(iK'-\alpha)}-\frac{H'(iK'+\alpha)}{H(iK'+\alpha)}\right) = \frac{1}{\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}\cdot\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}$$

und also schließlich:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\alpha} = \frac{1}{2\operatorname{sn}\alpha\cdot\operatorname{cn}\alpha\cdot\operatorname{dn}\alpha}\cdot\left[2\cdot\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}+\frac{H'(v-\alpha)}{H(v-\alpha)}-\frac{H'(v+\alpha)}{H(v+\alpha)}\right].$$

Vertauscht man α gegen β, so erhält man hieraus:

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v-\operatorname{sn}^2\beta} = \frac{1}{2\operatorname{sn}\beta\cdot\operatorname{cn}\beta\cdot\operatorname{dn}\beta}\cdot\left[2\cdot\frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}+\frac{H'(v-\beta)}{H(v-\beta)}-\frac{H'(v+\beta)}{H(v+\beta)}\right].$$

Die Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3 sind, ist aber

$$x^3 + \frac{2hJ_P + \mu^2 J_R^2 - \mu^2 J_R J_P}{2mgl\,J_P} \cdot x^2 - \frac{2mgl\,J_P + 2a\mu J_R}{2mgl\,J_P} \cdot x$$
$$- \frac{2hJ_P - \mu^2 J_R J_P - a^2}{2mgl\,J_P} = 0.$$

Man hat demnach:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = -\frac{(a + \mu J_R)^2}{2mgl\,J_P},$$

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = \frac{(a - \mu J_R)^2}{2mgl\,J_P},$$

und also:

$$\frac{a + \mu J_R}{\sqrt{2mgl\,J_P}} = -\nu_1 \cdot i \cdot \sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)},$$

$$\frac{a - \mu J_R}{\sqrt{2mgl\,J_P}} = \nu_2 \cdot \sqrt{(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)}.$$

(ν_1 das Vorzeichen für $a + \mu J_R$, ν_2 für $a - \mu J_R$.)

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{2\,\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha} = \nu_1 \cdot i \cdot \frac{(x_3 - x_2) \cdot \sqrt{2mgl\,J_P \cdot (x_3 - x_1)}}{2 \cdot (a + \mu J_R)},$$

$$\frac{1}{2\,\mathrm{sn}\,\beta \cdot \mathrm{cn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\beta} = -\nu_2 \cdot i \cdot \frac{(x_3 - x_2) \cdot \sqrt{2mgl\,J_P \cdot (x_3 - x_1)}}{2 \cdot (a - \mu J_R)}.$$

Führt man diese Werte in die oben für $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 \alpha}$ und $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 \beta}$ erhaltenen Ausdrücke ein, dann ergibt sich:

$$\frac{d\psi}{dv} = -\frac{i\nu_1}{2} \cdot \left[2\,\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{H'(v - \alpha)}{H(v - \alpha)} - \frac{H'(v + \alpha)}{H(v + \alpha)}\right]$$
$$-\frac{i\nu_2}{2} \cdot \left[2 \cdot \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} + \frac{H'(v - \beta)}{H(v - \beta)} - \frac{H'(v + \beta)}{H(v + \beta)}\right]$$

und, wenn man integriert,:

(9) $$\psi - C = \frac{\nu_1}{2i}\left[2\,\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot v + \mathrm{Log}\,\frac{H(v - \alpha)}{H(v + \alpha)}\right]$$
$$+ \frac{\nu_2}{2i} \cdot \left[2\,\frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \cdot v + \mathrm{Log}\,\frac{H(v - \beta)}{H(v + \beta)}\right].$$

Wir werden erstens den Fall betrachten, daß $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. In demselben ist

(10) $$\psi = \frac{\nu}{2i} \cdot \left\{2 \cdot \left(\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right) \cdot v + \mathrm{Log}\,\frac{H(v - \alpha) \cdot H(v - \beta)}{H(v + \alpha) \cdot H(v + \beta)}\right\} + C = U + C.$$

Aus (7) und (7') folgt als die erste integrierte Bewegungsgleichung:

$$(11) \qquad -t + J_P \cdot \int \frac{\sin\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta$$

$$+ nJ_P \cos\lambda \cdot \frac{d}{dh} \cdot \left\{ \int \cos\psi \cdot d\theta + a \int \frac{\sin\psi \cos\theta}{\sqrt{X}} d\theta - \mu J_R \int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}} d\theta \right\} = L.$$

In $\int \cos\psi \cdot d\theta + a \int \frac{\sin\psi\cos\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta - \mu J_R \cdot \int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta$

wird für ψ die in (10) gefundene Größe eingesetzt, und es soll bewiesen werden, daß man diese Summe allein durch Jacobische Funktionen ausdrücken kann, sodaß die Bewegung des Kreisels durch diese Funktionen und ihre Ableitungen beschrieben werden kann. Dieses Ergebnis ist — soviel mir bekannt — neu, indem die Bewegungsgleichungen des Kreisels bis jetzt, wenn man den Einfluß der Drehung der Erde beachtet hat, Quadraturen erhalten haben, die man nicht durch bekannte Funktionen ausdrücken kann.

Es ist nach (10)

$$\int \cos\psi \cdot d\theta = \cos C \int \cos U \cdot d\theta - \sin C \int \sin U \cdot d\theta.$$

$$\cos U = \tfrac{1}{2} \cdot \left\{ e^{\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}} \right.$$

$$\left. + e^{-\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}} \right\},$$

$$\sin U = \frac{v}{2i} \cdot \left\{ e^{\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}} \right.$$

$$\left. - e^{-\left[\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right] \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{H(v+\alpha) \cdot H(v+\beta)}{H(v-\alpha) \cdot H(v-\beta)}} \right\},$$

und weiter:

$$dv = \frac{2 \cdot (x_3 - x_2) \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v}{\sqrt{1 - (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v)^2}} \cdot dv = \frac{2 \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v}{i \cdot \sqrt{(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha)(\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \beta)}} \, dv;$$

man hat aber

$$\operatorname{sn}^2 v - \operatorname{sn}^2 \alpha = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Theta^2(o)}{\Theta^2(\alpha) \cdot \Theta^2(v)} \cdot H(v-\alpha) \cdot H(v+\alpha)$$

und die entsprechende Glleichung für β; demnach ist:

$$d\theta = \frac{2k \cdot \Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta) \cdot \Theta^2(v) \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v}{i \cdot \Theta^2(o) \cdot \sqrt{H(v+\alpha) \cdot H(v-\alpha) \cdot H(v+\beta) \cdot H(v-\beta)}} \cdot dv.$$

Man erhält dann, wenn kurz $\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} + \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}$ durch ϖ bezeichnet wird

$$(\mathrm{A}) \qquad \int \cos\psi \cdot d\theta = \left(\frac{1}{i}\cos C + v \sin C\right) \cdot k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)}$$

$$\cdot \int e^{\varpi \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot dv + \left(\frac{1}{i}\cos C - v \sin C\right)$$

$$\cdot k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{-\varpi \cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)} \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v \cdot dv.$$

Die zwei Integrale in (A) werden wir mit J_1 und J_2 bezeichnen. Setzen wir

$$\frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} v \,.\, \operatorname{dn} v = \frac{k'}{k} \cdot F_1(v),$$

so sieht man, daß $F_1(v)$ eine doppelperiodische Funktion zweiter Art ist mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ und zugehörenden Multiplikatoren 1 und $e^{\frac{\pi i}{K}\cdot(\alpha+\beta)}$. Bilden wir demnächst die Funktion

$$f_1(v) = M \cdot \frac{\Theta(v-\alpha)\cdot\Theta(v-\beta)}{H^2(v)},$$

so ist diese auch eine doppelperiodische Funktion zweiter Art mit denselben Perioden und Multiplikatoren als $F_1(v)$. Wird

$$M = -\frac{H'(o)^2}{\Theta(\alpha)\cdot\Theta'(\beta) + \Theta(\beta)\cdot\Theta'(\alpha)}$$

gesetzt, so erhält $f_1(v)$ an der Unendlichkeitsstelle $v = 0$ das Residuum 1. Die Funktion $F_1(z)\cdot f_1(v-z)$ ist nun doppelperiodisch erster Art und hat an der Unendlichkeitsstelle $z = v$ das Residuum $-F_1(v)$.

Wir werden nun die gewöhnliche Hermitesche Methode zur Zerlegung einer doppelperiodischen Funktion zweiter Art in Elementen benutzen.[1]) Zuerst muß aber der Hauptteil der Reihenentwickelungen für $F_1(z)$ in der Umgebung der drei Unendlichkeitsstellen $-iK'$, $-\alpha$, $-\beta$ berechnet werden.

Man erhält auf die gewöhnliche Weise für $-iK'$

$$-\frac{\Theta(o)\cdot\Theta_1(o)\cdot H_1(o)}{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2K}\cdot(\alpha+\beta)} \cdot \frac{1}{z}.$$

Gleichfalls für $-\alpha$

$$\frac{H(\alpha)\cdot H_1(\alpha)\cdot\Theta_1(\alpha)}{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot H(\alpha-\beta)} \cdot \frac{1}{z},$$

und für $-\beta$

$$-\frac{H(\beta)\cdot H_1(\beta)\cdot\Theta_1(\beta)}{H'(o)\cdot\Theta(\beta)\cdot H(\alpha-\beta)}.$$

1) Compt. Rend. T. 85. p. 693.

Jetzt ergibt sich nach Hermite a. a. O.

$$
(12)\quad \begin{aligned} F_1(v) = &-\frac{\Theta(o)\cdot\Theta_1(o)\cdot H_1(o)}{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2K}\cdot(\alpha+\beta)}\cdot f_1(v+iK') \\ &+\frac{H(\alpha)\cdot H_1(\alpha)\cdot\Theta_1(\alpha)}{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot H(\alpha-\beta)}\cdot f_1(v+\alpha)-\frac{H(\beta)\cdot H_1(\beta)\cdot\Theta_1(\beta)}{H'(o)\cdot\Theta(\beta)\cdot H(\alpha-\beta)}\cdot f_1(v+\beta). \end{aligned}
$$

Wird in J_2

$$
\frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)}\cdot \operatorname{sn} v\cdot \operatorname{cn} v\cdot \operatorname{dn} v = \frac{k'}{k}\cdot F_2(v)
$$

gesetzt, dann erhält man gleicher Weise:

$$
(13)\quad \begin{aligned} F_2(v) = &-\frac{\Theta(o)\cdot\Theta_1(o)\cdot H_1(o)}{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2K}\cdot(\alpha+\beta)}\cdot f_2(v-iK') \\ &+\frac{H(\alpha)\cdot H_1(\alpha)\cdot\Theta_1(\alpha)}{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot H(\alpha-\beta)}\cdot f_2(v-\alpha)-\frac{H(\beta)\cdot H_1(\beta)\cdot\Theta_1(\beta)}{H'(o)\cdot\Theta(\beta)\cdot H(\alpha-\beta)}\cdot f_2(v-\beta), \end{aligned}
$$

indem

$$
f_2(v) = N\cdot\frac{\Theta(v+\alpha)\cdot\Theta(v+\beta)}{H^2(v)}
$$

und

$$
N = \frac{H'(o)^2}{\Theta(\alpha)\cdot\Theta'(\beta)+\Theta(\beta)\cdot\Theta'(\alpha)}.
$$

Hermite hat[1]) eine Integralformel gegeben, welche wir im folgenden häufig brauchen. Die Formel ist:

$$
(\mathrm{B})\quad \begin{aligned} &\int e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]\cdot v}\cdot\frac{H(v+a)\cdot H(v+b)}{\Theta^2(v)}\cdot dv \\ &= -\frac{\Theta(a)\cdot\Theta(b)}{H'(o)\cdot H(a+b)}\cdot e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]\cdot v}\cdot\frac{\Theta(v+a+b)}{\Theta(v)}. \end{aligned}
$$

In (A) ist nach (12):

$$
\begin{aligned} k\cdot\frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)}\cdot J_1 = k'\cdot &\frac{H'(o)\cdot\Theta_1(o)\cdot H_1(o)}{\Theta(o)\cdot[\Theta'(\alpha)\cdot\Theta(\beta)+\Theta(\alpha)\cdot\Theta'(\beta)]}\cdot\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)}{\Theta^2(v)}dv \\ -k'\cdot &\frac{H'(o)\cdot\Theta(\beta)\cdot H(\alpha)\cdot H_1(\alpha)\cdot\Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot[\Theta'(\alpha)\Theta(\beta)+\Theta(\alpha)\Theta'(\beta)]}\cdot\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta(v)\cdot\Theta(v+\alpha-\beta)}{H^2(v+\alpha)}\cdot dv \\ +k'\cdot &\frac{H'(o)\cdot\Theta(\alpha)\cdot H(\beta)\cdot H_1(\beta)\cdot\Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot[\Theta'(\alpha)\Theta(\beta)+\Theta(\alpha)\cdot\Theta'(\beta)]}\cdot\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta(v)\cdot\Theta(v-\alpha+\beta)}{H^2(v+\beta)}dv. \end{aligned}
$$

Nach (B) erhält man aber:

$$
\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)}{\Theta^2(v)}dv = \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{H'(o)\cdot H(\alpha+\beta)}\cdot e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta(v-\alpha-\beta)}{\Theta(v)}.
$$

---

1) Compt. Rend. T. 85. S. 732.

Gleichfalls gibt (B) für das zweite Integral, indem man

$$v + \alpha = x + iK'$$

setzt, integriert und darauf wieder v für x einführt:

$$(14)\qquad \int e^{\varpi \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v + \alpha - \beta)}{H^2(v + \alpha)} dv = \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{H'(o) \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{\varpi \cdot v} \cdot \frac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)}.$$

Vertauscht man α mit β, so wird hieraus das dritte Integral erhalten:

$$(15)\qquad \int e^{\varpi \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v) \cdot \Theta(v - \alpha + \beta)}{H^2(v + \beta)} dv = \frac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{H'(o) \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{\varpi \cdot v} \cdot \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)}.$$

Schließlich ergibt sich also:

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} k \cdot \dfrac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot J_1 = \dfrac{H'(o)}{\varpi \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{\varpi \cdot v} \cdot \dfrac{\Theta(v - \alpha - \beta)}{\Theta(v)} \\ \quad - k' \cdot \dfrac{\Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \varpi} \cdot e^{\varpi \cdot v} \cdot \dfrac{H(v - \beta)}{H(v + \alpha)} \\ \quad + k' \cdot \dfrac{\Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \varpi} \cdot e^{\varpi \cdot v} \cdot \dfrac{H(v - \alpha)}{H(v + \beta)}. \end{cases}$$

Wenn man α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$ vertauscht, dann wird hieraus erhalten:

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} k \cdot \dfrac{\Theta(\alpha) \cdot \Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot J_2 = \dfrac{H'(o)}{\varpi \cdot H(\alpha + \beta)} \cdot e^{-\varpi \cdot v} \cdot \dfrac{\Theta(v + \alpha + \beta)}{\Theta(v)} \\ \quad - k' \cdot \dfrac{\Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \varpi} \cdot e^{-\varpi \cdot v} \cdot \dfrac{H(v + \beta)}{H(v - \alpha)} \\ \quad + k' \cdot \dfrac{\Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \varpi} \cdot e^{-\varpi \cdot v} \cdot \dfrac{H(v + \alpha)}{H(v - \beta)}. \end{cases}$$

Es kostet nur wenig Mühe, die Koeffizienten in (C) und (D) auf eine bequeme Form zu bringen.

Man hat:

$$- k' \cdot \frac{\Theta(\beta) \cdot H(\alpha) \cdot H_1(\alpha) \cdot \Theta_1(\alpha)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \varpi} = - k' \cdot \frac{\dfrac{H_1(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot \dfrac{\Theta_1(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot \dfrac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)}}{\left[\left(\dfrac{H(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right)^2 - \left(\dfrac{H(\beta)}{\Theta(\beta)}\right)^2\right] \cdot \varpi}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\operatorname{cn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha}{(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta) \cdot \varpi} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot (x_3 - x_2)}}{2 \cdot \sqrt{x_3 - x_1} \cdot \varpi} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)}$$

$$= \sqrt{k} \cdot \frac{i\nu \cdot (a + \mu J_R)}{2\varpi \cdot \sqrt{2 m g l J_P} \cdot (1 + x_3)} \cdot \frac{H(\alpha)}{\Theta(\beta)}.$$

Auf gleiche Weise wird erhalten

$$k' \cdot \frac{\Theta(\alpha) \cdot H(\beta) \cdot H_1(\beta) \cdot \Theta_1(\beta)}{\Theta^2(o) \cdot H(\alpha - \beta) \cdot H(\alpha + \beta) \cdot \varpi} = \sqrt{k} \cdot \frac{\nu \cdot (a - \mu J_R)}{2\varpi \cdot \sqrt{2 m g l J_P} \cdot (1 - x_3)} \cdot \frac{H(\beta)}{\Theta(\alpha)}.$$

Wir werden nun $\int \frac{\sin\psi\cos\theta}{\sqrt{x}}\cdot d\theta$ berechnen. Man hat:

$$\int \frac{\sin\psi\cos\theta}{\sqrt{X}}\, d\theta = \sin C \cdot \int \frac{\cos U \cdot \cos\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta + \cos C \cdot \int \frac{\sin U \cdot \cos\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta .$$

Führt man — wie früher — durch die Gleichung:

$$\cos\theta = x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v$$

die neue Variable v ein, dann ergibt sich ohne Schwierigkeit:

$$\int \frac{\sin\psi\cos\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta = -\frac{k}{\sqrt{2mglJ_p}} \cdot \frac{1}{(x_3 - x_2)^{\frac{3}{2}}} \cdot k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)}$$

$$\text{(E)} \quad \cdot \Big\{ (i\sin C + \nu\cos C) \cdot \int e^{\varpi\cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} \cdot (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v) \cdot dv$$

$$+ (i\sin C - \nu\cos C) \cdot \int e^{-\varpi\cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)} \cdot (x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v) dv \Big\} .$$

Wir haben hier die Integrale zu berechnen:

$$V_1 = k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{\varpi\cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} \cdot x_2 \operatorname{sn}^2 v \cdot dv ,$$

$$V_2 = k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{\varpi\cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} \cdot x_3 \operatorname{cn}^2 v \cdot dv ,$$

$$V_3 = k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{-\varpi\cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)} \cdot x_2 \operatorname{sn}^2 v \cdot dv ,$$

$$V_4 = k \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{-\varpi\cdot v} \cdot \frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)} \cdot x_3 \operatorname{cn}^2 v \cdot dv .$$

Führt man in V_1 statt $\operatorname{sn}^2 v$ den Ausdruck $\frac{1}{k} \cdot \frac{H^2(v)}{\Theta^2(v)}$ ein, so kommt

$$V_1 = x_2 \cdot \frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)} \cdot \int e^{\varpi\cdot v} \cdot \frac{H^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} dv .$$

Da $\frac{H^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)}$ eine doppelperiodische Funktion zweiter Art ist mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ (zugehörige Multiplikatoren 1 und $e^{\frac{\pi i}{K}\cdot(\alpha+\beta)}$), so können wir die Hermitesche Methode zur Zerlegung einer doppelperiodischen Funktion anwenden. Das Element ist

$$f_1(v) = M \cdot \frac{\Theta(v-\alpha)\cdot\Theta(v-\beta)}{H^2(v)} .$$

M hat den früher angegebenen Wert.

Aus einer mit der früheren ganz analogen Entwickelung ergibt sich dann

$$V_1 = x_2 \cdot \frac{H^2(\alpha)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\,.\,H(\alpha+\beta)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot\varpi} \cdot e^{\varpi\cdot v} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)}$$

$$- x_2 \cdot \frac{H^2(\beta)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi} \cdot e^{\varpi\cdot v} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} .$$

Vertauscht man α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$, erhält man:

$$V_3 = -x_2 \cdot \frac{H^2(\alpha)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{-\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)}$$
$$+ x_2 \cdot \frac{H^2(\beta)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{-\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)}.$$

Gleichfalls ergibt sich

$$V_2 = k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\alpha)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)}$$
$$- k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\beta)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)},$$

und durch Vertauschen von α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$:

$$V = -k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\alpha)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{-\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)}$$
$$+ k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\beta)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{-\varpi\cdot v}\cdot\frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)}.$$

Die Koeffizienten können ohne Schwierigkeit vereinfacht werden. Man erhält:

$$x_2 \cdot \frac{H^2(\alpha)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot\varpi} = x_2 \cdot \frac{\dfrac{H^2(\alpha)}{\Theta^2(\alpha)}}{\left[\dfrac{H^2(\alpha)}{\Theta^2(\alpha)} - \dfrac{H^2(\beta)}{\Theta^2(\beta)}\right]\cdot\varpi}\cdot\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)}$$
$$= x_2 \cdot \frac{\mathrm{sn}^2\,\alpha}{(\mathrm{sn}^2\,\alpha - \mathrm{sn}^2\,\beta)\cdot\varpi}\cdot\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} = \frac{x_2(1+x_3)}{2\varpi}\cdot\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)}.$$

Auf ganz analoge Weise ergibt sich

$$x_2 \cdot \frac{H^2(\beta)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot\varpi} = -\frac{x_2\cdot(1-x_3)}{2\varpi}\cdot\frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)},$$
$$k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\alpha)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot\varpi} = -\frac{x_3\cdot(1+x_2)}{2\varpi}\cdot\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)},$$
$$k' x_3 \cdot \frac{H_1^2(\beta)\cdot\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot H(\alpha-\beta)\cdot\varpi} = \frac{x_3(1-x_2)}{2\varpi}\cdot\frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)}.$$

Jetzt fehlt nur noch $\int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}}\cdot d\theta$. Führt man für ψ den Ausdruck $U + C$ ein und verfährt übrigens auf die gewöhnliche Weise, so erhält man:

$$\int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}}\cdot d\theta = -\frac{k^2}{(x_3-x_2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}}}}$$
$$\cdot\left[(i\sin C + \nu\cos C)\cdot\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)}\,dv\right.$$
$$\left.+ (i\sin C - \nu\cos C)\int e^{-\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)}\,dv\right].$$

Um die zwei Integrale zu berechnen, werden wir die Funktion

$$F(v) = \frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)},$$

welche doppelperiodisch und von zweiter Art ist, in Elemente zerlegen. Wir erhalten:

$$F(v) = -\frac{\Theta^2(\alpha)}{H'(o)\cdot H(\alpha-\beta)}\cdot f_1(v+\alpha) + \frac{\Theta^2(\beta)}{H'(o)\cdot H(\alpha-\beta)}\cdot f_1(v+\beta).$$

$f_1(v)$ hat die früher angegebene Bedeutung. Demnach haben wir

$$\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)}\cdot dv = \frac{H'(o)}{H(\alpha-\beta)\cdot[\Theta(\alpha)\cdot\Theta'(\beta)+\Theta(\beta)\cdot\Theta'(\alpha)]}$$
$$\cdot\left\{\Theta^2(\alpha)\cdot\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta(v)\cdot\Theta(v+\alpha-\beta)}{H^2(v+\alpha)}dv - \Theta^2(\beta)\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta(v)\cdot\Theta(v-\alpha+\beta)}{H^2(v+\beta)}dv\right\}.$$

Wir haben früher (14) und (15) die auf der rechten Seite stehenden zwei Integrale berechnet. Führen wir in diesen Ausdruck die dort gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$\int e^{\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta^2(v)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)}\cdot dv = \frac{1}{H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{\varpi\cdot v}$$
$$\cdot\left\{\Theta^2(\alpha)\cdot\frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} - \Theta^2(\beta)\cdot\frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)}\right\}.$$

Vertauscht man α und β mit $-\alpha$ und $-\beta$, so kommt

$$\int e^{-\varpi\cdot v}\cdot\frac{\Theta^2(v)}{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)}dv = -\frac{1}{H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\cdot e^{-\varpi\cdot v}$$
$$\cdot\left\{\Theta^2(\alpha)\cdot\frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} - \Theta^2(\beta)\cdot\frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)}\right\}.$$

Wir haben also nach Einsetzung:

$$(\mathrm{F})\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\sin\psi}{\sqrt{X}}\cdot d\theta = -\frac{k^2}{(x_3-x_2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}}}}\cdot\frac{1}{H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi}\\ \displaystyle\cdot\left\{(i\sin C+\nu\cos C)\cdot e^{\varpi\cdot v}\cdot\left[\Theta^2(\alpha)\frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} - \Theta^2(\beta)\cdot\frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)}\right]\right.\\ \displaystyle\left.-(i\sin C-\nu\cos C)\cdot e^{-\varpi\cdot v}\cdot\left[\Theta^2(\alpha)\frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} - \Theta^2(\beta)\cdot\frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)}\right]\right\}.\end{cases}$$

Der Ausdruck wird dadurch vereinfacht, daß wir setzen:

$$\frac{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}{\Theta^2(o)}\cdot\frac{1}{H(\alpha-\beta)\cdot H(\alpha+\beta)\cdot\varpi} = \frac{1}{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{H(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right)^2-\left(\frac{H(\beta)}{\Theta(\beta)}\right)^2}\cdot\frac{1}{\varpi}$$
$$= \frac{1}{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}\cdot\frac{1}{k\cdot(\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\beta)}\cdot\frac{1}{\varpi} = \frac{1}{\Theta(\alpha)\cdot\Theta(\beta)}\cdot\frac{x_3-x_2}{2k}\cdot\frac{1}{\varpi}.$$

Schließlich haben wir demnach

$$
\text{(G)}\left\{\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}} \cdot d\theta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}} \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \Big\{ (i \sin C + \nu \cos C) \cdot e^{\varpi \cdot v} \\
&\cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right] + (\nu \cos C - i \sin C) \cdot e^{-\varpi \cdot v} \\
&\qquad \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right] \Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Werden in (A) die in (C) und (D) gefundenen Ausdrücke eingesetzt mit den reduzierten Werten der Koeffizienten, so ergibt sich:

$$
\text{(H)}\quad
\begin{aligned}
&\int \cos\psi \cdot d\theta = \sqrt{k} \cdot \frac{\Theta(o)}{\varpi \cdot H(\alpha+\beta)} \\
&\cdot \left[(-i\cos C + \nu \sin C) \cdot e^{\varpi \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v-\alpha-\beta)}{\Theta(v)} - (i \cos C + \nu \sin C) \cdot e^{-\varpi \cdot v} \cdot \frac{\Theta(v+\alpha+\beta)}{\Theta(v)} \right] \\
&+ \frac{a}{2\varpi \cdot \sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}}(x_3 - x_1)}} \cdot (\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{\varpi \cdot v} \\
&\qquad \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right] \\
&- \frac{a}{2\varpi \cdot \sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}}(x_3 - x_1)}} \cdot (-\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{-\varpi \cdot v} \\
&\qquad \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right] \\
&+ \frac{\mu J_R}{2\varpi \cdot \sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}} \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot (\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{\varpi \cdot v} \\
&\qquad \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right] \\
&- \frac{\mu J_R}{2\varpi \cdot \sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}} \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot (-\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{-\varpi \cdot v} \\
&\qquad \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} - \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right].
\end{aligned}
$$

Führt man in (E) die für V_1, V_2, V_3, V_4 gefundenen Werte und die vereinfachten Koeffizienten ein, so erhält man:

$$
\text{(L)}\quad
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\psi \cos\theta}{\sqrt{X}}\, d\theta = \frac{1}{2\varpi\sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}} \cdot (x_3 - x_1)}} \cdot (\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{\varpi \cdot v} \\
&\cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)} \right] - \frac{1}{2\varpi \cdot \sqrt{2\,mglJ_{\mathrm{P}} \cdot (x_3 - x_1)}} \\
&\cdot (-\nu \cos C + i \sin C) \cdot e^{-\varpi \cdot v} \cdot \left[\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} + \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)} \right].
\end{aligned}
$$

Nach Addition von (G), (H) und (L) ergibt sich:

$$\text{(M)}\qquad \int \cos\psi \cdot d\theta + a \cdot \int \frac{\sin\psi\cos\theta}{\sqrt{X}} \cdot d\theta + \mu J_R \cdot \int \frac{\sin\psi}{\sqrt{X}} d\theta = e^{\nu i C + \varpi \cdot v} \cdot F_1(v;\ h,\ a,\ \mu) + e^{-\nu i C - \varpi v} F_2(v;\ h,\ a,\ \mu),$$

$F_1(v;\ h,\ a,\ \mu)$ *und* $F_2(v;\ h,\ a,\ \mu)$ *sind doppelperiodische Funktionen zweiter Art mit den Perioden* $2K$ *und* $2iK'$. Die zugehörigen Multiplikatoren sind für F_1: 1 und $e^{\frac{\pi i}{K}\cdot(\alpha+\beta)}$, für F_2: 1 und $e^{-\frac{\pi i}{K}\cdot(\alpha+\beta)}$.

Die Ausdrücke für diese Funktionen sind

$$\text{(N)}\qquad F_1(v; h, a, \mu) = \frac{iH'(0)}{\varpi \cdot H(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Theta(v-\alpha-\beta)}{\Theta(v)} + \frac{\nu}{\varpi \cdot \sqrt{2mglJ_P} \cdot (x_3 - x_1)} \cdot \left[(a+\mu J_R) \cdot \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v+\alpha)} + (a-\mu J_R) \cdot \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v+\beta)}\right],$$

$$\text{(P)}\qquad F_2(v; h, a, \mu) = \frac{i \cdot H'(0)}{\varpi \cdot H(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Theta(v+\alpha+\beta)}{\Theta(v)} + \frac{\nu}{\varpi \cdot \sqrt{2mglJ_P} \cdot (x_3 - x_1)} \cdot \left[(a+\mu J_R) \cdot \frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v-\alpha)} + (a-\mu J_R) \cdot \frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v-\beta)}\right].$$

Wird von den Potenzen von n von höherem als dem ersten Grade abgesehen, so ist nach III (3)

$$J_P \int \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{\sqrt{X}} = t + L,$$

und wir haben (III, (7), (M))

$$\text{(Q)}\qquad \begin{cases} V = -ht + \mu J_R \cdot \varphi + \int \frac{\sqrt{X}}{\sin\theta} \cdot d\theta + a\psi + b + na\sin\lambda \cdot (t+L) \\ + nJ_P\cos\lambda \cdot \left[e^{\nu i C + \varpi \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-\nu i C - \varpi \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu)\right]. \end{cases}$$

Die Integrale der Bewegungsgleichungen des Kreisels werden bekanntlich aus (Q) durch Differentiation in bezug auf h, a und μ gebildet.

Nun ist

$$X = J_P \cdot (1-x^2) \cdot (2h + 2mglx - \mu^2 J_R) - (a - \mu J_R x)^2$$

und demnach:

$$\frac{dX}{dh} = 2J_P \cdot (1-x^2),$$

$$\frac{dX}{da} = -2(a - \mu J_R x),$$

$$\frac{dX}{d\mu} = 2(a - \mu J_R x) \cdot J_R x - 2\mu J_R J_P \cdot (1-x^2).$$

Also ist

$$\frac{d}{dh}\int\frac{\sqrt{X}}{\sin\theta}\cdot d\theta = -J_P\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\frac{d}{da}\int\frac{\sqrt{X}}{\sin\theta}\cdot d\theta = \int\frac{a-\mu J_R x}{(1-x^2)\sqrt{X}}\cdot dx,$$

$$\frac{d}{d\mu}\int\frac{\sqrt{X}}{\sin\theta}\cdot d\theta = J_R\cdot\int\frac{\mu J_R - a x}{(1-x^2)\sqrt{X}}dx + \mu J_R\cdot(J_R-J_P)\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\cdot$$

Die drei Bewegungsgleichungen im integrierten Zustande sind demnach:

$$\text{(a)}\qquad -t - J_P\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + nJ_P\cos\lambda\cdot$$
$$\frac{d}{dh}[e^{\nu i C+\varpi\cdot v}\cdot F_1(v;h,a,\mu) + e^{-\nu i C-\varpi\cdot v}\cdot F_2(v;h,a,\mu)] = L_1,$$

$$\text{(b)}\qquad \psi + \int\frac{a-\mu J_R x}{(1-x^2)\sqrt{X}}dx + n\sin\lambda\cdot(t+L)$$
$$+nJ_P\cos\lambda\cdot\frac{d}{da}[e^{\nu i C+\varpi\cdot v}\cdot F_1(v;h,a,\mu) + e^{-\nu i C-\varpi\cdot v}\cdot F_2(v;h,a,\mu)] = L_2,$$

$$\text{(c)}\qquad \varphi + \mu(J_R-J_P)\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \int\frac{\mu J_R - a x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{X}}dx$$
$$+n\cdot\frac{J_P}{J_R}\cos\lambda\cdot\frac{d}{d\mu}[e^{\nu i C+\varpi\cdot v}\cdot F_1(v;h,a,\mu) + e^{-\nu i C+\varpi\cdot v}\cdot F_2(v;h,a,\mu)] = L_3.$$

Sei nun angenommen, daß am Anfang der Bewegung

$$t = t_0,\quad x = x_3,\quad \psi = \psi_0 \quad\text{und}\quad \varphi = \varphi_0$$

ist. Wir haben früher gefunden (III (5)), wenn man den Einfluß der Drehung der Erde vernachlässigt:

$$\cos\theta = x_2\,\mathrm{sn}^2 u + x_3\,\mathrm{cn}^2 u,$$

wo

$$u = (t-t_0)\cdot\sqrt{\frac{mgl\cdot(x_3-x_1)}{2J_P}}.$$

Da wir keine Größen berücksichtigen, welche unendlich klein von höherer Ordnung als die erste sind, so können wir, nachdem die partielle Differentiation in Bezug auf h, a und μ ausgeführt worden ist, in den Gliedern, welche den Faktor n enthalten,

$$v = u$$

setzen. Wir haben für ψ die Größe $U + C$ eingeführt. Also haben wir am Anfang der Bewegung

$$\psi_0 = C + (U)_{t=t_0},$$

$t = t_0$ gibt aber $v = 0$, und mithin ist

$$(U)_{t=t_0} = 0,$$

so daß

$$C = \psi_0.$$

Wir haben dann aus (a), (b) und (c) die Bewegungsgleichungen auf die folgende Form gebracht:

$$\text{(d)} \quad \begin{aligned} t - t_0 = &- J_P \int\limits_{x_3}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}} + n J_P \cos\lambda \\ &\cdot \left\{ \frac{d}{dh} \left[e^{\nu i \psi_0 + \varpi \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \varpi \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu) \right] \right\}_{v=0}^{v=u}, \end{aligned}$$

$$\text{(e)} \quad \begin{aligned} \psi - \psi_0 = &- \int\limits_{x_3}^{x} \frac{a - \mu J_R \cdot x}{(1 - x^2)\sqrt{X}} dx - n \sin\lambda \cdot (t - t_0) - n J_P \cos\lambda \\ &\cdot \left\{ \frac{d}{da} \left[e^{\nu i \psi_0 + \varpi \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \varpi \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu) \right] \right\}_{v=0}^{v=u}, \end{aligned}$$

$$\text{(f)} \quad \begin{aligned} \varphi - \varphi_0 = \mu J_R \cdot \left(\frac{1}{J_R} - \frac{1}{J_P} \right) \cdot J_P \cdot \int\limits_{x_3}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int\limits_{x_3}^{x} \frac{\mu J_R - a x}{(1 - x^2)\sqrt{X}} dx - n \frac{J_P}{J_R} \cos\lambda \\ \cdot \left\{ \frac{d}{d\mu} \left[e^{\nu i \psi_0 + \varpi \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \varpi \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu) \right] \right\}_{v=0}^{v=u}. \end{aligned}$$

Man sieht hieraus, *daß die Bewegungsgleichungen keine unausführbaren Quadraturen enthalten,* indem wir die in (d), (e) und (f) vorkommenden Integrale früher untersucht haben.

Aus (d), (e) und (f) erhalten wir ohne Schwierigkeit die Bewegungsgleichungen im Falle

$$\nu_1 = - \nu_2 = \nu.$$

In III (9) haben wir gefunden:

$$\psi - C = \frac{\nu_1}{2i} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} \cdot v + \log \frac{H(v - \alpha)}{H(v + \alpha)} \right] + \frac{\nu_2}{2i} \cdot \left[2 \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \cdot v + \log \frac{H(v - \beta)}{H(v + \beta)} \right],$$

und wir erhalten also in diesem Falle:

$$\psi - C = \frac{\nu}{2i} \cdot \left\{ 2 \left(\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} - \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} \right) \cdot v + \log \frac{H(v - \alpha) \cdot H(v + \beta)}{H(v + \alpha) \cdot H(v - \beta)} \right\}.$$

Wird wie früher $\cos\theta = x = x_2 \operatorname{sn}^2 v + x_3 \operatorname{cn}^2 v$ gesetzt, so ergibt sich, daß man die Bewegungsgleichungen in diesem Falle bilden kann durch Vertauschen von β mit $-\beta$ in (d), (e) und (f).

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\sigma = \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} - \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)},$$

$$F_3(v;\,h,\,a,\,\mu) = \frac{i\,H'(o)}{\sigma \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\Theta(v - \alpha + \beta)}{\Theta(v)} + \frac{\nu}{\sigma \cdot \sqrt{2\,m\,g\,l\,J_P \cdot (x_3 - x_1)}}$$

$$\cdot \left[(a + \mu J_R)\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v+\beta)}{H(v+\alpha)} + (a - \mu J_R)\frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v-\alpha)}{H(v-\beta)}\right],$$

$$F_4(v;\,h,\,a,\,\mu) = \frac{i\,H'(o)}{\sigma \cdot H(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\Theta(v + \alpha - \beta)}{\Theta(v)} + \frac{\nu}{\sigma \cdot \sqrt{2\,m\,g\,l\,J_P \cdot (x_3 - x_1)}}$$

$$\cdot \left[(a + \mu J_R)\frac{\Theta(\alpha)}{\Theta(\beta)} \cdot \frac{H(v-\beta)}{H(v-\alpha)} + (a - \mu J_R)\frac{\Theta(\beta)}{\Theta(\alpha)} \cdot \frac{H(v+\alpha)}{H(v+\beta)}\right],$$

dann wird demnach:

$$\text{(d}'\text{)}\quad t - t_0 = -J_P \int_{x_3}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}} + n\,J_P \cos\lambda$$
$$\cdot \left\{\frac{d}{dh}\left[e^{\nu i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_3(v;\,h,\,a,\,\mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_4(v;\,h,\,a,\,\mu)\right]\right\}_{v=0}^{v=u},$$

$$\text{(e}'\text{)}\quad \psi - \psi_0 = -\int_{x_3}^{x} \frac{a - \mu J_R x}{(1 - x^2)\sqrt{X}}\,dx - n \sin\lambda \cdot (t - t_0) - n\,J_P \cos\lambda$$
$$\cdot \left\{\frac{d}{dh}\left[e^{\nu i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_3(v;\,h,\,a,\,\mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_4(v;\,h,\,a,\,\mu)\right]\right\}_{v=0}^{v=u},$$

$$\text{(f}'\text{)}\quad \varphi - \varphi_0 = \mu J_R \cdot \left(\frac{1}{J_R} - \frac{1}{J_P}\right) \cdot J_P \cdot \int_{x_3}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int_{x_3}^{x} \frac{\mu J_R - a x}{(1 - x^2)\sqrt{X}}\,dx - n\frac{J_P}{J_R} \cdot \cos\lambda$$
$$\cdot \left\{\frac{d}{dh}\left[e^{\nu i \psi_0 + \sigma \cdot v} \cdot F_3(v;\,h,\,a,\,\mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \sigma \cdot v} \cdot F_4(v;\,h,\,a,\,\mu)\right]\right\}_{v=0}^{v=u}.$$

In (f) und (f′) müssen wir uns $J_P \int_{x_3}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}}$, — aus (d), beziehungsweise (d′), genommen — eingesetzt denken.

Man sieht, daß wenn $J_R = J_P$ (d. h. die Trägheitsellipsoide in einer Kugel bestehen), die Ausdrücke für ψ und φ von ganz derselben Art sind.

Wird

$$\sqrt{\frac{m\,g\,l\,(x_3 - x_1)}{2\,J_P}} \cdot J_P \cos\lambda$$
$$\cdot \left\{\frac{d}{dh}\left[e^{\nu i \psi_0 + \bar\omega \cdot v} \cdot F_1(v;\,h,\,a,\,\mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \bar\omega \cdot v} \cdot F_2(v;\,h,\,a,\,\mu)\right]\right\} = \varepsilon$$

gesetzt, so erhält man unmittelbar aus (d)

$$\cos\theta = x_2 \cdot \operatorname{sn}^2(u - n\varepsilon) + x_3 \operatorname{cn}^2(u - n\varepsilon),$$

und man muß daher in den Gliedern, die nicht den Faktor n enthalten,

$$v = u - n\varepsilon$$

setzen.

Wir haben früher gefunden:

$$\int \frac{a - \mu J_R \cos\theta}{\sin\theta \cdot \sqrt{X}} \cdot d\theta = -\int^x \frac{a - \mu J_R x}{(1-x^2)\sqrt{X}}\, dx = \frac{\nu}{2i}$$

$$\cdot \left\{ 2\varpi \cdot v + \log \frac{H(v-\alpha)\cdot H(v-\beta)}{H(v+\alpha)\cdot H(v+\beta)} \right\} + C,$$

und es ist demnach:

$$\int_{x_1}^{x} \frac{a - \mu J_R x}{(1-x^2)\sqrt{X}}\, dx = \frac{\nu}{2i} \cdot \left\{ 2\varpi(u - n\varepsilon) + \log \frac{H(u-\alpha-n\varepsilon)\cdot H(u-\beta-n\varepsilon)}{H(u+\alpha-n\varepsilon)\cdot H(u+\beta-n\varepsilon)} \right\}.$$

ε enthält Glieder, die proportional mit der Zeit sind. Denkt man sich aber die Bewegung nicht länger fortgesetzt, als daß man $n\varepsilon$ hinreichend klein annehmen kann, dann können wir in eine Reihe entwickeln, und wenn man nur die erste Potenz von n berücksichtigt, ergibt sich:

$$\log \frac{H[u-\alpha-n\varepsilon]\cdot H[u-\beta-n\varepsilon]}{H[u+\alpha-n\varepsilon]\cdot H[u+\beta-n\varepsilon]} = \log \frac{H(u-\alpha)\cdot H(u-\beta)}{H(u+\alpha)\cdot H(u+\beta)} - n\varepsilon$$

$$\cdot \left[\frac{H'(u-\alpha)}{H(u-\alpha)} - \frac{H'(u+\alpha)}{H(u+\alpha)} + \frac{H'(u-\beta)}{H(u-\beta)} - \frac{H'(u+\beta)}{H(u+\beta)} \right].$$

Die Größe in der Klammer ist doppeltperiodisch erster Art mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ und den Unendlichkeitsstellen α, $-\alpha$, β, $-\beta$.

Die Hauptteile der Reihenentwickelungen der Funktion in der Umgebung dieser Unendlichkeitsstellen sind für α und β: $\frac{1}{\varepsilon}$, für $-\alpha$ und $-\beta$: $-\frac{1}{\varepsilon}\cdot$

Bilden wir die Funktion

$$\frac{2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\alpha},$$

so sieht man, daß diese die Unendlichkeitsstellen α und $-\alpha$ hat mit denselben Hauptteilen in deren Umgebungen, nämlich $\frac{1}{\varepsilon}$ und $-\frac{1}{\varepsilon}\cdot$

Wir können dann setzen

$$\frac{H'(u-\alpha)}{H(u-\alpha)} - \frac{H'(u+\alpha)}{H(u+\alpha)} + \frac{H'(u-\beta)}{H(u-\beta)} - \frac{H'(u+\beta)}{H(u+\beta)} = \frac{2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \alpha}$$

$$+ \frac{2\,\mathrm{sn}\,\beta\;\mathrm{cn}\,\beta\;\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \beta} + C;$$

führt man in dieser Gleichung $n = 0$ ein, so ergibt sich

$$C = 2 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha} + 2 \cdot \frac{\mathrm{cn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta} - 2 \cdot \frac{H'(\alpha)}{H(\alpha)} - 2 \cdot \frac{H'(\beta)}{H(\beta)}.$$

Führt man jetzt für $-\int\limits_{x_3}^{x} \frac{a - \mu J_R \cdot x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{X}} \cdot dx$ den Wert in (e) ein und bemerkt, daß

$$\frac{H'(\alpha)}{H(\alpha)} - \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} = \frac{\mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}, \qquad \frac{H'(\beta)}{H(\beta)} - \frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)} = \frac{\mathrm{cn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta}$$

ist, so erhält man die zweite Bewegungsgleichung:

$$\psi - \psi_0 = \frac{v}{2i} \cdot \left\{ 2\varpi \cdot u + \log \frac{H(u-\alpha)\cdot H(u-\beta)}{H(u+\alpha)\cdot H(u+\beta)} - 2n\cdot\varepsilon \cdot \left[\frac{\mathrm{sn}\,\alpha \cdot \mathrm{cn}\,\alpha \cdot \mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \alpha} + \frac{\mathrm{sn}\,\beta \cdot \mathrm{cn}\,\beta \cdot \mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \beta} \right] \right\}$$

$$- n \sin\lambda \cdot (t - t_0) - n J_P \cos\lambda \cdot \left\{ \frac{d}{da} \left[e^{\nu i \psi_0 + \varpi \cdot v} \cdot F_1(v; h, a, \mu) + e^{-\nu i \psi_0 - \varpi \cdot v} \cdot F_2(v; h, a, \mu) \right] \right\}.$$

Es ist leicht, auf gleiche Weise den Ausdruck für $(\varphi - \varphi_0)$ zu bilden. Ich will mich aber nicht dabei aufhalten und gleichfalls nicht bei der Behandlung der Gleichungen (d'), (e'), (f'), welche nun selbstverständlich ist. Die Ableitungen in Bezug auf h, a und μ werden ohne Mühe bestimmt.

Man sieht, *daß in allen Fällen die Bewegungsgleichungen keine unausführbaren Quadraturen enthalten.*

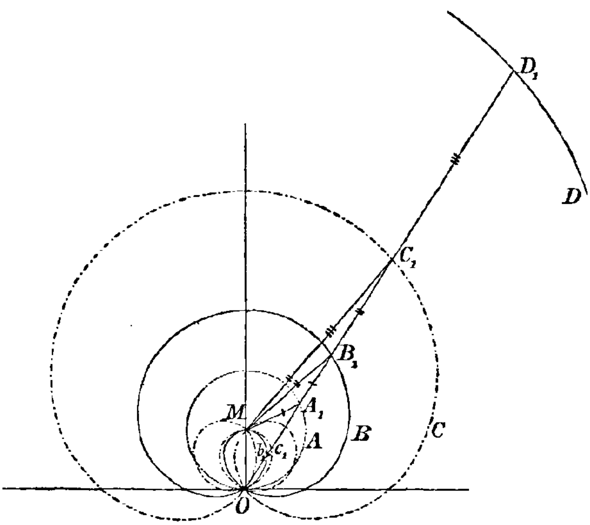
Über die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven, die einen beliebigen Winkel in gleiche Teile teilen.

Von A. Kempe in Rotterdam.

Wir verdanken Pascal die Erfindung, aus dem Kreise (gewissermaßen als Generatrix) den Limaçon entstehen zu lassen. Es ist aber noch nicht versucht worden — wenigstens nach meinem besten Wissen — dieses Verfahren fortzusetzen und aus dem Limaçon neue Kurven zu erzeugen, ähnlich wie jener aus dem Kreise entsteht.

Vor einiger Zeit habe ich diesen Versuch gemacht und Kurven gefunden, die, ihrer Form und Eigenschaften wegen, dem Studium wohl einiges Interesse verleihen.

Fig. 1.



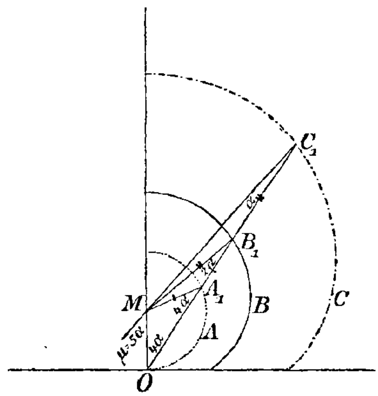
Ich verdanke es der Güte des Herrn J. Neuberg in Lüttich, daß die *Mém. de la Société royale des Sciences de Liége, 2ᵉ sér. t. XX, 1898* eine Abhandlung über diese Kurven enthalten und daß vor kurzem Herr Gino Loria in seinem Buche: *Über spezielle algebraische und transzendente Kurven* (Deutsche Übersetzung von Fr. Schütte, Leipzig 1902, B. G. Teubners Verlag) sie in dem Abschnitte *Sectrixkurven* erwähnt hat.

Es soll nun im folgenden dargetan werden, wie man sie stetig erzeugen kann: doch mögen einige kurze Notizen über sie, zum besseren Verständnis der Konstruktion, vorangehen.

Wir verallgemeinern nämlich das Pascalsche Gesetz und verlängern die aus dem festen Punkte O gezogenen Linien (Fig. 1) so, daß wir von ihren Schnittpunkten mit den aus einander entstehenden Kurven Strecken abtragen, die ihrem Abstande vom Mittelpunkte M des Kreises A gleich sind.

Ist also Kurve B (Fig. 1) der Pascalsche Limaçon und ist jede Strecke $A_1 B_1$ dem Radius R des Kreises A gleich — die Strecken sind nach beiden Seiten des Punktes A_1 auf OA_1 abgesetzt worden, $A_1 B_1 = A_1 b_1$ — so ist Kurve C ähnlich gebaut, nur ändert sich $B_1 C_1 = B_1 c_1 = B_1 M$ bei jedem B. Sie hat *drei* Schleifen. Ebenso entsteht Kurve D aus C: es ist $C_1 D_1 = C_1 d_1 = C_1 M$. Sie hat *sieben* Schleifen. Usw.

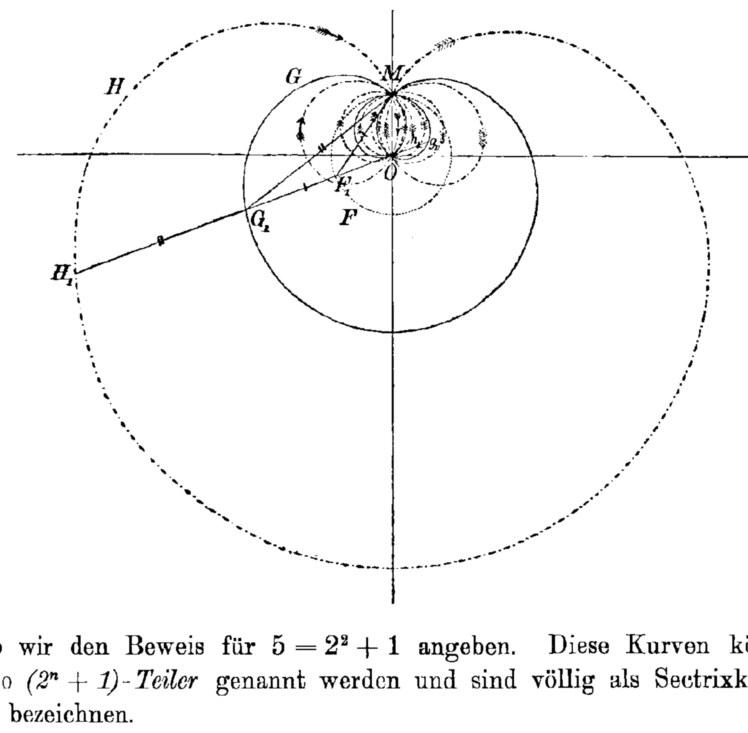
Fig. 2.



Die $n$te Kurve K_n entsteht aus Kurve K_{n-1}, indem man $K_{n-1} K_1 = K_{n-1} k_1 = K_{n-1} M$ macht. Sie hat $2^n - 1$ Schleifen.

Die Kurven $A, B, C \ldots K_n$ haben die Eigenschaft, daß sie jeden beliebigen bei M gegebenen Winkel μ beziehentlich in zwei, drei, fünf ... $2^n + 1$ gleiche Teile teilen, wie man leicht aus Fig. 2 ersieht,

Fig. 3.



wo wir den Beweis für $5 = 2^2 + 1$ angeben. Diese Kurven können also *($2^n + 1$)-Teiler* genannt werden und sind völlig als Sectrixkurven zu bezeichnen.

Wenn wir im Kreise die Punkte M und O so vertauschen, daß O in den Mittelpunkt des Kreises und M auf die Peripherie kommt, aber wieder aus O beliebig viele Geraden ziehen und von ihrem Schnittpunkte mit dem Kreise und mit den daraus erzeugten Kurven Strecken abtragen, die jedesmal dem Abstande vom Punkte M gleich sind, so erhalten wir (Fig. 3)

die Kurve G, wo $F_1 G_1 = F_1 g_1 = F_1 M$; sie hat *zwei* Schleifen,
ferner „ „ H, „ $G_1 H_1 = G_1 h_1 = G_1 M$; „ „ *sechs* „ ,
usw. „ „ L_n, „ $L_{n-1} L_n = L_{n-1} l_n = L_{n-1} M$; „ „ $2n-2$ „ .

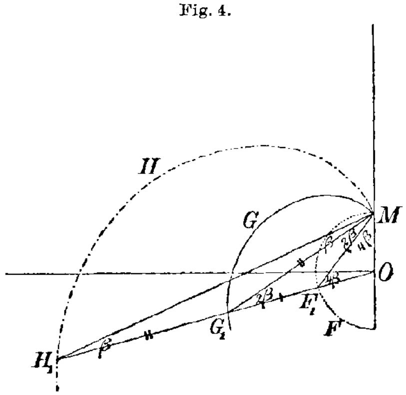
Diese Kurven haben die Eigenschaft, jeden beliebigen Winkel μ bei M beziehentlich in ein, drei, sieben ... $2^n - 1$ gleiche Teile zu teilen, wie man leicht aus der Fig. 4 ersieht, wo der Beweis für $7 = 2^3 - 1$ gegeben ist. Man kann sie füglich *$(2^n - 1)$-Teiler* nennen.

Nehmen wir die beiden Systeme zusammen, so haben wir folgendes Schleifengesetz:

$(2^n + 1)$-Teiler: 1 3 7 15 31 ... $2n - 1$ Schleifen,
$(2^n - 1)$- „ : 2 6 14 30 ... $2n - 2$ „ .

Weit wichtiger ist jedoch der Dienst, den das Zusammenzeichnen (Fig. 5) der Kurven uns bezüglich der Teilung leistet. Wird nämlich Winkel μ bei M derart gezeichnet, daß sein einer Schenkel Transversale $H_1 G_1 F_1 M A_1 B_1 C_1$ des ganzen Systems wird, so erhält man den Winkel gleichzeitig in $1:(2^n+1)$ und in $1:(2^n-1)$ Teile geteilt, denn es ist

Fig. 4.



$$\sphericalangle H_1 = \tfrac{1}{7}\mu, \quad \sphericalangle G = \tfrac{1}{3}\mu,$$
$$\sphericalangle F_1 = \mu, \quad \sphericalangle A_1 = \tfrac{1}{2}\mu,$$
$$\sphericalangle B_1 = \tfrac{1}{3}\mu, \quad \sphericalangle C_1 = \tfrac{1}{5}\mu$$

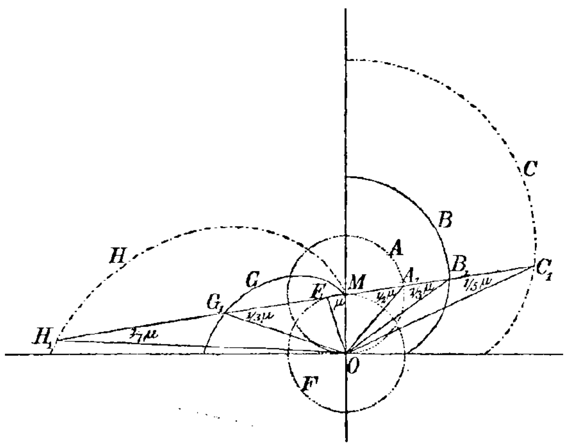
usw.

Da nun (nach Fermats Theorem) jede Primzahl p in $(2^{p-1} - 1)$ aufgeht und $2^{p-1} - 1 = \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = (2^n - 1)(2^n + 1)$, so erhält man unmittelbar, daß der Winkel μ hiermit ganz allgemein in *alle möglichen* Anzahlen gleicher Teile geteilt ist, denn $\frac{2^n \pm 1}{p} = m$ oder $\frac{1}{p} = m \times \frac{1}{2^n \pm 1}$. So z. B. geht 19 in $(2^{18} - 1)$ auf, also entweder

in 2^9+1 oder in 2^9-1. Nun ist $19 \times 27 = 2^9+1$ also $\frac{1}{19} = 27 \times \frac{1}{2^9+1}$.
Obengenannte Transversale teilt μ *also in alle möglichen gleichen Teile.*

Es ist kaum nötig zu bemerken, daß man zur Teilung nur ein Stück der Kurven braucht und daß nur Winkel $< \frac{1}{2}\pi$ oder zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π zu teilen sind.

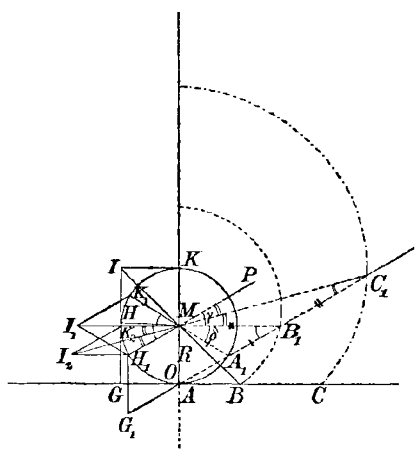
Fig. 5.



Es ist nun darzutun, wie man diese $(2^n \pm 1)$-Teiler ganz leicht stetig beschreiben kann. Wir benutzen dazu folgenden *Gelenkmechanismus*.

Es seien $OGHM$ und $MKIH$ zwei Quadrate (Fig. 6), deren Seiten gleich dem Radius R des Kreises A seien; die Punkte M und O sind fest, alle anderen sind Gelenkpunkte, also beweglich.

Fig. 6.



Im Anfang der Bewegung hat der Mechanismus die Stellung zweier aufeinander stehender Quadrate. Der Schnittpunkt B der verlängerten Diagonale IM und der verlängerten Linie GO fällt auf den Limaçon in B, wie leicht zu sehen ist. Es müssen also die Seiten GO, KM und die Diagonale MI im Mechanismus gehörig verlängert sein. Nun aber läßt man den Schnittpunkt A der verlängerten KM und GO — nicht zu verwechseln mit dem festen Punkte O — den Kreisumfang A beschreiben, was natürlich immer möglich ist. Es dreht sich dabei OG um O, A entfernt sich von O auf der Linie OA, indem es gleichzeitig den Kreisumfang beschreibt. Die Quadrate nehmen die Stellung $MOG_1H_1 - I_1K_1M$ an.

Es hat nun der Punkt B_1 den Bogen BB_1 des Limaçons B beschrieben.

Man überzeugt sich ganz leicht davon, da $I_1 M$ den Winkel $K_1 MH_1$ und dessen Gegenwinkel halbiert, $MP \parallel OA_1$ deshalb $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle\delta = \sphericalangle\beta$ ist, also $MA_1 = A_1 B_1$.

Läßt man nun den Schnittpunkt B_1, nachdem der Limaçon beschrieben ist und wo B_1 jetzt der verlängerten $K_2 M$ und $G_1 O$ angehört (also MK_1 die Stellung MK_2 und der Gelenkmechanismus die Stellung $G_1 OMH_1 - I_2 K_2 M$ annimmt), läßt man, wie gesagt, B_1 den Limaçon B beschreiben, *so beschreibt jetzt der Schnittpunkt C_1 der verlängerten $I_1 M$ und $G_1 O$ den Fünfteiler C.*

Es ist nämlich wieder wie zuvor $MB_1 = B_1 C_1$.

Es kann also mit diesem Gelenkmechanismus jede folgende Kurve aus der ihr unmittelbar vorangehenden stetig beschrieben werden, ebenso wie sie auch theoretisch auseinander entstehen.

Hiermit sind die $(2^n + 1)$-Teiler vollständig konstruiert.

Es möge hierbei erwähnt werden, daß es möglich ist, mit fehlerfreier Kreisdrehung der MA_1 *alle* Kurven B, C, D usw. zu erzeugen, wenn man nur den Mechanismus genügend ausbildet.

Man gebe dazu jeder Kurve ihre Raute, demgemäß, daß jede folgende Raute ihre Seite auf der Diagonale der vorhergehenden habe, wie z. B. die Rauten $MK_2 I_2 H_1$ und $MK_1 I_1 H_1$, die zu den Kurven C und B gehören. Die gewissermaßen feste Raute $MH_1 G_1 O$ gehört dem Grundkreise A an.

Um also mehrere Kurven D u. s. w. zu beschreiben, braucht man außer der festen Kreisraute $MH_1 G_1 O$ ebensoviele bewegliche Rauten wie Kurven gewünscht sind. *Beschreibt dann der Schnittpunkt A_1 seinen Kreis A, so beschreiben zugleich die Punkte B_1, C_1, D_1 usw. ihre Kurven B, C, D usw.*

Dies ist aber vielleicht theoretisch denkbar, jedoch für die Praxis ist es unausführbar, wie ich meine.

Es folgt nun die stetige Erzeugung der $(2^n - 1)$-Teiler.

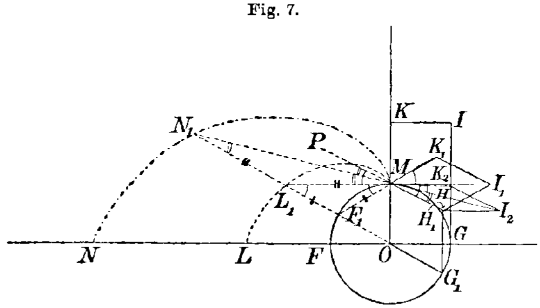
Man lege den Gelenkmechanismus Fig. 6 um, sodaß die Stellung Fig. 7 eingenommen wird und lasse nun den Schnittpunkt der verlängerten $K_1 M$ und $G_1 O$, also F_1, den Kreis OM beschreiben: *Der Schnittpunkt L_1 der verlängerten $I_1 M$ und $G_1 O$ wird die Kurve L beschreiben.*

Weiter: Beschreibt der Schnittpunkt L_1 die Kurve L, *so wird der Schnittpunkt N_1 der verlängerten $I_2 M$ und $G_1 O$ die Kurve N beschreiben usw.*

Dies alles läßt sich ganz leicht aus der Figur ablesen, wo die Halbierungslinien der Rautenwinkel und die gleichschenkligen Dreiecke, ähnlich wie in Fig. 6, den Beweis gestatten.

Man kann also *mit demselben Mechanismus sowohl die* $(2^n + 1)$-*als die* $(2^n - 1)$-*Teiler stetig beschreiben*, wodurch man eine Figur bekommt, genau so wie sie Fig. 5 zeigt. Wird hierin $\sphericalangle \mu$ an M gelegt, ähnlich wie es dort gezeichnet ist, so braucht man nur wie dort die Linien . . . OH_1, OG_1 und OA_1, OB_1, OC_1 . . . usw. zu ziehen, *um den Winkel* μ *auf einmal in alle möglichen gleichen Teile geteilt zu haben.*

Fig. 7.



Es möge nun zum Schlusse nur noch folgende Bemerkung gemacht werden.

Für die Anwendungen ist es wünschenswert, die Kurven . . . H, G, A, B, C . . . usw. (Fig. 5) möglichst genau zu erhalten. Kein Gelenkmechanismus ist im stande, hierin Vollkommenes zu leisten. Es wäre also erwünscht, die verschiedenen Stangen möglichst schmal und von Stoffen anzufertigen, deren Berührung leichte elektrische oder chemische Wirkungen hervorriefe, die auf präpariertem Papier reagierten und beim Übereinandergleiten Spuren hinterließen, welche die $(2^n \pm 1)$-Teiler fixierten.

Inwiefern dieses Desideratum bei dem heutigen Stande der technischen Wissenschaft zu ermöglichen ist, kann ich nicht beurteilen; es für „ganz unmöglich" zu erklären, fällt schwer in einer Zeit, wo fast alles möglich erscheint.

Man könnte die $(2^n \pm 1)$-Teiler auf diese Weise im Druck vervielfältigen und dadurch äußerst leicht jede Teilung ausführen.

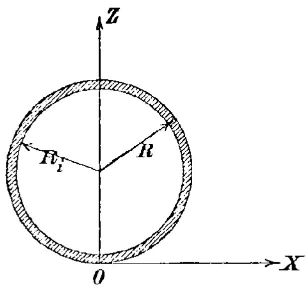
Doch wie dem auch sei, das Vorliegende möge ein Versuch sein, ein altes Problem auf nicht zu mühsame und möglichst vollständige Weise zu lösen.

Die durch Eigengewicht verursachte Deformation eines längs einer Mantellinie unterstützten Kreis-Cylinders.

Von H. Heimann in Zwickau i. S.

In der Praxis pflegt man Cylinder in *derjenigen Lage auszubohren, in der sie später gebraucht werden,* um von der durch Eigengewicht eintretenden Deformation unabhängig zu werden. Es läßt sich fragen, von welchem Cylinderdurchmesser an ist diese Regel der Praxis berechtigt? Das folgende ist eine Versuch zur Beantwortung dieser Frage.

Fig. 1.



Man wähle das Koordinatensystem so, daß die xy-Ebene Stützebene des Cylinders wird und die y-Achse mit der gestützten Mantellinie zusammenfällt. (Fig. 1.) Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie lauten in der Fassung von Clebsch[1]), wenn der Querkontraktionskoeffizient mit $\frac{1}{m}$ statt μ bezeichnet wird:

$$(1)\qquad \begin{cases} \triangle u + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial e}{\partial x} + 2\cdot\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{X}{E} = 0 \\ \triangle v + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial e}{\partial y} + 2\cdot\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{Y}{E} = 0 \\ \triangle w + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial e}{\partial z} + 2\cdot\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{Z}{E} = 0 \end{cases}$$

Dabei ist $\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $e \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, und X, Y, Z sind die inneren Kräfte. Im vorliegenden Falle ist $X = Y = 0$, $Z = \gamma$, wenn γ das Gewicht der Volumeinheit bedeutet. Die Verschiebung v längs der y-Achse ist gegen die Querverschiebungen u und w vernachlässigbar, und da bei der eintretenden Deformation eine Mantellinie *grad* bleiben wird, können u und w als Funktionen von x und z allein betrachtet werden. Die Gleichungen 1 gehen dadurch über in:

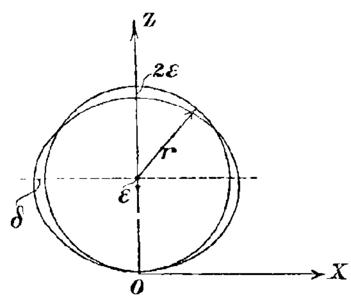
$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right\} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right\} + 2\cdot\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{\gamma}{E} = 0. \end{cases}$$

---

1) Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1894. S. 264 u. f.

Durch Einführung der Stützkräfte in die Grenzbedingungen wird das Problem erst zu einem bestimmten. Die Stützkräfte selbst hängen von der Deformation der Unterlage ab, eine allgemein zulässige Annahme über sie ist kaum aufstellbar. Daher scheint es richtiger, von bestimmten Voraussetzungen über die eintretende Deformation auszugehen und durch experimentell bestimmte Konstanten den Abweichungen der wirklichen Stützung von der vorausgesetzten Rechnung zu tragen.

Fig. 2.



Im folgenden wird angenommen, daß alle vorher auf einem zum Mantelkreis konzentrischen Kreise vom Radius r gelegenen Elemente nach eingetretener Deformation auf einer Ellipse liegen mit den Halbachsen $r + \delta$ und $r - \varepsilon$. (Fig. 2.)

Für dünnrandige Cylinder lautet gemäß dem gewählten Koordinatensystem die Gleichung eines beliebigen konzentrischen Kreises hinreichend genau:

$$z^2 - 2Rz + x^2 = 0\,, \tag{3}$$

wenn R der Radius des Mantelkreises ist.

Die Gleichung der entsprechenden Ellipse nach eingetretener Deformation wird:

$$\frac{(z+w)^2 - 2(z+w)(R-\varepsilon)}{(R-\varepsilon)^2} + \frac{(x+u)^2}{(R+\delta)^2} = 0, \tag{4}$$

wenn u und w die Verschiebungen eines Punktes mit den Koordinaten x, z bedeutet.

Unter Benutzung von (3) und Vernachlässigung kleiner Größen II. Ordnung geht (4) über in:

$$w\,(z - R) + \varepsilon \cdot \frac{z^2 - Rz}{R} + u \cdot x - x^2 \cdot \frac{\delta}{R} = 0\,,$$

also

$$u = w \cdot \frac{R - z}{x} + \varepsilon \cdot \frac{Rz - z^2}{R} + x \cdot \frac{\delta}{R}\,;$$

Man setze: $w = -\varepsilon \cdot \frac{z}{R} + \varphi\,(x, z)$, dann wird

$$\left\{\begin{aligned} u &= \quad x \cdot \frac{\delta}{R} + \frac{R - z}{x} \cdot \varphi \\ w &= -\,\varepsilon \cdot \frac{z}{R} + \varphi. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Führt man die Werte (5) in die Gleichungen (2) ein, so erhält man für φ folgende beiden Bedingungsgleichungen:

$$(6)\begin{cases} 2\cdot\dfrac{m-1}{m-2}\cdot\dfrac{R-z}{x}\left\{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{2\varphi}{x^2}\right\}+\dfrac{1}{x}\left\{(R-z)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}+\dfrac{m}{m-2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\cdot\dfrac{m-1}{m-2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\dfrac{m}{m-2}\left\{\dfrac{R-z}{x}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\dfrac{R-z}{x^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\varphi}{x^2}\right\}+2\cdot\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{\gamma}{E}=0. \end{cases}$$

Eine Lösung für φ, die den Gleichungen (6) genügt, ist:

$$\varphi = a_0 x^2 + a_1 x.$$

w, also auch φ, muß aber eine grade Funktion von x sein, d. h. $a_1 = 0$. Für a_0 folgt aus den Gleichungen (6):

$$a_0 = 2\cdot\frac{(m+1)(m-2)}{m(4-m)}\cdot\frac{\gamma}{E}.$$

Mit diesen Werten folgt:

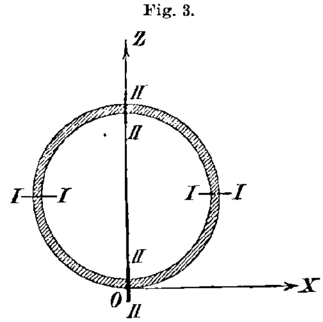
$$(7)\qquad\begin{cases} u = x\cdot\left\{\dfrac{\delta}{R}+2\cdot(R-z)\cdot\dfrac{(m+1)(m-2)}{m(4-m)}\cdot\dfrac{\gamma}{E}\right\} \\ w = -\,\varepsilon\cdot\dfrac{z}{R}+2\cdot\dfrac{(m+1)(m-2)}{m(4-m)}\cdot\dfrac{\gamma}{E}\cdot x^2. \end{cases}$$

Die Konstanten δ und ε werden gemäß Figur 3 aus den Bedingungen bestimmt:

$$(8)\quad\begin{cases} 2\cdot\displaystyle\int_{R_i}^{R} t_{33}\,dx = \frac{R+R_i}{2}\cdot\pi\cdot(R-R_i)\cdot\gamma, \quad \text{für } z=R, \quad \text{und} \\ \displaystyle\int_{R+R_i}^{2R} t_{11}\cdot z\cdot dz + \int_0^{R-R_i} t_{11}\,z\cdot dz = \frac{R+R_i}{2}\pi(R-R_i)\cdot\gamma\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{R+R_i}{2}, \ \text{für } x=0; \end{cases}$$

denn die Stützkräfte im Schnitt I I müssen das Gewicht der oberen Cylinderhälfte aufnehmen, während das Moment der Spannungen im Schnitt II II in Bezug auf den Drehpunkt O dem durch die Schwere hervorgerufenen Moment das Gleichgewicht zu halten hat.

Fig. 3.



Drückt man t_{33} und t_{11} durch die Verschiebungen u und w aus, so erhält man für δ und ε bei Vernachlässigung kleiner Größen II. Ordnung:

$$(9)\quad\begin{cases} \delta = \dfrac{m+1}{m^2}\dfrac{R^2\gamma}{E}\left\{\dfrac{(m+2)(m-1)}{4-m}-\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ \varepsilon = \dfrac{m+1}{m^2}\dfrac{R^2\gamma}{E}\left\{\dfrac{m+1}{4-m}-\dfrac{\pi}{2}(m-1)\right\}. \end{cases}$$

Für Metalle liegt m zwischen 3 und 4; aus den Formeln folgt eine *starke* Abhängigkeit der Deformation von dem Werte m. Daher müssen

δ, ε und a_0 für ein bestimmtes Material, ganz abgesehen von dem Unterschiede der vorausgesetzten zur wirklichen Stützung, jeweils durch Versuch bestimmt werden.

Sind die gemessenen Werte für einen Cylinderhalbmesser R' der Reihe nach gleich a_0', δ', ε', so sind sie für einen Cylinderhalbmesser R gleich $a_0' \cdot \frac{R^2}{R'^2}$, $\delta' \cdot \frac{R^2}{R'^2}$, $\varepsilon' \cdot \frac{R^2}{R'^2}$.

Es wird dann:

$$(10) \qquad \begin{cases} u = x\left\{\frac{1}{R}\,\delta' \cdot \frac{R^2}{R'^2} + (R - z)\, a_0' \frac{R^2}{R'^2}\right\} \\ w = -\,\varepsilon' \cdot \frac{R^2}{R'^2} \cdot \frac{z}{R} + a_0' \frac{R^2}{R'^2} \cdot x^2. \end{cases}$$

Die Versuchskonstanten δ', ε', a_0' reichen zur Bestimmung der Deformation eines Cylinders von beliebigem Radius für die Zwecke der Praxis vollkommen aus.

Als Beispiel diene die Deformation eines in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Band 45, 1901, S. 218 u. f. beschriebenen Gebläsecylinders vom lichten Durchmesser 2100 mm.

Setzt man für Gußeisen $m = 3{,}9$

$$E = 1\,000\,000 \, \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\gamma = 0{,}0072 \quad \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3},$$

und den äußern Cylinderradius $R = 110$ cm, so erhält man für a_0, δ und ε die folgenden Werte:

$$a_0 = 3{,}4 \;\cdot 10^{-7}\ \text{cm}^{-1}$$

$$\delta = 0{,}38\,.\,10^{-6} \cdot 110^2\ \text{cm} = 0{,}046\ \text{mm}$$

$$\varepsilon = 0{,}12 \cdot 10^{-6} \cdot 110^2\ \text{cm} = 0{,}014\ \text{mm}.$$

Die Verkürzung des Vertikaldurchmessers beträgt $2\varepsilon \sim {}^3/_{100}$ mm, die Verlängerung des Horizontaldurchmessers beträgt $2\delta \sim {}^9/_{100}$ mm, Deformationen, die unberücksichtigt gelassen, etwa wenn der Cylinder nicht liegend, sondern stehend ausgebohrt wäre, die Abdichtung durch die Kolbenringe in Frage stellen würden.

Allerdings liegt den *ausgerechneten* Werten der *angenommene* Wert m zu Grunde, der vom Material, also von der Zusammensetzung des Gußeisens abhängt und über den einwandfreie Messungen nicht vorliegen.

Über die Zusammensetzung von Vektoren.

Von FRIEDRICH SCHUR in Karlsruhe.

In dem Artikel „Die Prinzipien der rationellen Mechanik" (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV) hat A. Voß nach einer Übersicht der verschiedenen Beweise des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte auf eine Note von G. Darboux „Sur la composition des forces en statique" (Bulletin des sciences math. 9 (1875) p. 281 bis 288) hingewiesen mit der Bemerkung, daß hierdurch „ein gewisser Abschluß in der ganzen Frage erreicht" sei. In der Tat stellt Darboux alle diejenigen Postulate oder Hypothesen auf, welche seiner Meinung nach allen früheren Beweisen des Satzes gemeinsam sind, und zeigt, daß sie wirklich zu einem strengen Beweise des Satzes ausreichen. Diese Postulate sind:

1. Die Resultante zweier Vektoren OA und OB ist ein eindeutig bestimmter Vektor $OC = (OA, OB)$, der mit OA resp. OB zusammenfällt, falls OB resp. OA verschwindet.

2. Für die Zusammensetzung von Vektoren gilt das associative Gesetz, d. h. es ist:

$$((OA, OB), OC) = (OA, (OB, OC)).$$

3. Es gilt ebenso auch das kommutative Gesetz, d. h. es ist $(OA, OB) = (OB, OA)$.

4. Die Zusammensetzung von Vektoren gleicher oder entgegengesetzter Richtung geschieht nach der Regel der algebraischen Addition.

5. Die Zusammensetzung der Vektoren ist allen Drehungen um den Anfangspunkt O gegenüber invariant, d. h. die Resultante der aus OA und OB durch dieselbe Drehung hervorgehenden Vektoren geht durch dieselbe Drehung aus der Resultante der Vektoren OA und OB hervor.

6. Die Funktionen, welche die rechtwinkeligen Koordinaten des Endpunktes der Resultante durch diejenigen der Endpunkte der Komponenten darstellen, sind endlich und stetig.

Wenn nun auch Darboux bewiesen hat, daß diese 6 Postulate ausreichen, um die dadurch beschriebene Zusammensetzung von Vektoren als die geometrische Summation zu charakterisieren, so hat er doch die Frage, ob alle diese 6 Postulate hierfür wirklich notwendig seien, weder gestellt noch beantwortet. Nun sind diese 6 Postulate, wie G. Hamel demnächst zu beweisen gedenkt, in der Tat sämtlich notwendig, wenn man von den Funktionen des 6. Postulats nicht zugleich auch voraussetzt, daß sie erste und zweite Differentialquotienten besitzen. Macht man aber diese den üblichen Annahmen über die Natur der Kräfte durchaus entsprechende Voraussetzung, so ist das 5. Postulat eine Folge der übrigen und ebenso auch das dritte, so zwar, daß außer der Zusammensetzung der als Vektoren betrachteten Drehungen selbst nur die geometrische Summation den Postulaten 1, 2, 4 und 5 genügen kann. Diese Behauptungen, die zum Teil eine unmittelbare Folge aus Lies Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen sind, sollen im folgenden ohne irgend welche Voraussetzungen aus dieser Theorie bewiesen werden, einerseits in Rücksicht auf diejenigen Leser, die Lies Werke zu studieren keine Zeit fanden, andrerseits deshalb, weil in ihnen überall von analytischen Funktionen ausgegangen wird.

I.

Sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die rechtwinkeligen Koordinaten der Endpunkte zweier Vektoren OX und OY in Beziehung auf den Anfangspunkt O und x_1', x_2', x_3' diejenigen des Endpunktes der Resultante, so wird die Zusammensetzung der Vektoren den folgenden analytischen Ausdruck erhalten:

$$(1)\qquad x_\alpha' = f_\alpha(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = f_\alpha(x; y). \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Dann ist das zweite Postulat in den folgenden Formeln enthalten:

$$(2)\qquad f_\alpha(f(x; y); z) = f_\alpha(x; f(y, z)) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

das dritte in den Formeln:

$$(3)\qquad f_\alpha(x; y) = f_\alpha(y; x) \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

und das vierte in den Formeln:

$$(4)\qquad f_\alpha(x_1, x_2, x_3; tx_1, tx_2, tx_3) = x_\alpha(1 + t). \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Nach dem ersten Postulate sind die Funktionen $f_\alpha(x; y)$ eindeutig und genügen den Gleichungen:

$$(5)\qquad f_\alpha(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 0) = x_\alpha$$

und:

$$(6)\qquad f_\alpha(0, 0, 0; y_1, y_2, y_3) = y_\alpha. \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Wir setzen nun von diesen Funktionen außerdem voraus, daß sie *endliche und stetige erste und zweite Differentialquotienten* besitzen. Aus diesen Voraussetzungen wollen wir zuerst, ohne das 5. Postulat zu benutzen, beweisen, daß diese Funktionen die Form $x_\mathfrak{a} + y_\mathfrak{a}$ haben.

Zu diesem Zwecke führen wir die Funktionen von je drei Veränderlichen:

$$(7)\qquad \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x_1,\ x_2,\ x_3) = \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x) = \left[\frac{\partial f_\mathfrak{a}(x;\ y)}{\partial y_\mathfrak{b}}\right]_{y_1 = y_2 = y_3 = 0}$$

und:

$$(8)\qquad \eta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(y_1,\ y_2,\ y_3) = \eta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(y) = \left[\frac{\partial f_\mathfrak{a}(x;\ y)}{\partial x_\mathfrak{b}}\right]_{x_1 = x_2 = x_3 = 0}$$

ein und ziehen zunächst diejenigen Folgerungen, die das *associative Gesetz* (2) bedingt. Aus (5) und (6) folgt noch:

$$(9)\qquad \eta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(0) = \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}},$$

wenn das Symbol $\delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$ Null oder Eins bedeutet, je nachdem $\mathfrak{a} \lessgtr \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist.

Nunmehr ergibt sich aus den Gleichungen (2) durch Differentiation nach $z_\mathfrak{b}$ und Substitution von $z_1 = z_2 = z_3 = 0$:

$$(10)\qquad \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(f(x;\ y)) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3} \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x;\ y)}{\partial y_\mathfrak{c}}\, \omega_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(y)\cdot \qquad (\mathfrak{a},\ \mathfrak{b} = 1,\ 2,\ 3)$$

Da die Determinante $|\omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)|$ wegen (9) nicht identisch verschwindet, so können wir diese Gleichungen auflösen in der Form:

$$(11)\qquad \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x;\ y)}{\partial y_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3} \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{c}(f(x;\ y))\, E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(y),$$

wo:

$$(12)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3} \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{c}(y) E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(y) = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}},$$

so daß auch:

$$(13)\qquad E_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}.$$

Durch nochmalige Differentiation der Gleichungen (11) folgt in Rücksicht auf diese selbst:

$$(14)\quad \frac{\partial^2 f_\mathfrak{a}(x;\ y)}{\partial y_\mathfrak{b} \partial y_{\mathfrak{b}_1}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{3} \frac{\partial \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{c}(x')}{\partial x'_\mathfrak{d}}\, \omega_\mathfrak{d}^\mathfrak{e}(x') E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(y) E_\mathfrak{e}^{\mathfrak{b}_1}(y) + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3} \omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{c}(x') \frac{\partial E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(y)}{\partial y_{\mathfrak{b}_1}}.$$

Vertauscht man hierin $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ und zieht das Resultat von (14) ab, so ergeben sich als Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (11) die folgenden Gleichungen:

$$(15)\qquad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b},\mathfrak{e}=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}}\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{e}}(x')-\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{e}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}}\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}(x')\right)E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(y)E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}_1}(y) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3}\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x')\left(\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(y)}{\partial y_{\mathfrak{b}}}-\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(y)}{\partial y_{\mathfrak{b}_1}}\right).$$

Differentiieren wir endlich die Gleichungen (10) nach $x_{\mathfrak{b}_1}$ und setzen darnach $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, so folgt:

$$(16)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(y)}{\partial y_{\mathfrak{c}}}\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(y)-\frac{\partial\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(y)}{\partial y_{\mathfrak{c}}}\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(y)\right)=0.$$

Benutzen wir nunmehr das durch die Gleichungen (3) ausgedrückte *kommutative Gesetz*, so folgt durch Differentiation dieser Gleichungen nach $y_{\mathfrak{b}}$ und nachheriges Setzen von $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, daß:

$$(17)\qquad \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x).$$

Hieraus folgt in Rücksicht auf (16), daß die linken Seiten der Gleichungen (15) verschwinden, daß also, weil die Determinante $|\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x')|$ nicht identisch verschwindet, die Gleichungen bestehen:

$$(18)\qquad \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(y)}{\partial y_{\mathfrak{b}}}=\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(y)}{\partial y_{\mathfrak{b}_1}}.$$

Nunmehr ziehen wir auch das 4. Postulat heran, das die *algebraische Addition von Vektoren derselben Richtung* fordert und in den Gleichungen (4) seinen Ausdruck findet. Differentiieren wir diese Gleichungen nach t und setzen darnach $t = 0$, so folgt:

$$(19)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{3}\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)x_{\mathfrak{b}} = x_{\mathfrak{a}}. \qquad (\mathfrak{a}=1,2,3)$$

Auf Grund der Gleichungen (12) folgt hieraus, daß auch:

$$(20)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3}E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)x_{\mathfrak{c}} = x_{\mathfrak{a}}$$

ist. Denn aus (12) und (19) ergeben sich zunächst die Gleichungen:

$$(21)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{3}\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\sum_{\mathfrak{b}=1}^{3}(E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)x_{\mathfrak{b}}-x_{\mathfrak{c}}) = 0,$$

aus denen die Gleichungen (20) folgen, weil die Determinante $|\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)|$ nicht identisch verschwindet. Durch Differentiation der Gleichungen (20) nach $x_{\mathfrak{b}}$ folgt nunmehr in Rücksicht auf (18):

(22) $$E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) + \sum_{\mathfrak{b}=1}^{3} \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}} x_{\mathfrak{c}} = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}.$$

Setzen wir daher:

(23) $$t E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x_1 t,\ x_2 t,\ x_3 t) = \varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t),$$

so genügen diese 9 Funktionen einer Veränderlichen t den Differentialgleichungen:

(24) $$\frac{d\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)}{dt} = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$$

mit den Anfangsbedingungen, daß $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = 0$ ist. Hieraus folgt, daß $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t) = t\delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}$, also:

(25) $$E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}},$$

folglich auch:

(26) $$\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}}.$$

Es genügen daher nach (11) unsre Funktionen $f_{\mathfrak{a}}(x;\, y)$ den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;\, y)}{\partial y_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}},$$

d. h. es ist auf Grund der Anfangsbedingungen (5):

(28) $$f_{\mathfrak{a}}(x;\, y) = x_{\mathfrak{a}} + y_{\mathfrak{a}},$$

oder *unsre Zusammensetzung ist die geometrische Summation von Vektoren.*

II.

Nachdem wir in § 1 unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f_{\mathfrak{a}}(x;\, y)$ endliche und stetige erste und zweite Differentialquotienten besitzen, bewiesen haben, daß das 5. Postulat oder das der Invarianz unserer Zusammensetzung gegenüber allen Drehungen um den Anfangspunkt O überflüssig sei, entsteht dieselbe Frage bezüglich der übrigen Postulate. Da ergibt sich denn zuerst, daß das 4. Postulat auch bei Zulassung aller übrigen nicht entbehrt werden kann. Wir brauchen, um dies einzusehen, nur diejenige Zusammensetzung zu betrachten, die aus der geometrischen Summation dadurch entsteht, daß man jedem Vektor $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ den Vektor $\left(\frac{\varphi(r)}{r}x_1,\ \frac{\varphi(r)}{r}x_2,\ \frac{\varphi(r)}{r}x_3\right)$, wo wo $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ist, zuordnet, die zwei Vektoren so zugeordneten Vektoren geometrisch summiert und aus dieser Vektorsumme $(\mathfrak{x}_1',\ \mathfrak{x}_2',\ \mathfrak{x}_3')$ rückwärts den Vektor

$$\left(\frac{\psi(\mathfrak{r}')}{\mathfrak{r}'}\mathfrak{x}_1',\ \frac{\psi(\mathfrak{r}')}{\mathfrak{r}'}\mathfrak{x}_2',\ \frac{\psi(\mathfrak{r}')}{\mathfrak{r}'}\mathfrak{x}_3'\right)$$

bildet, wo $\mathfrak{r} = \varphi(r) = \sqrt{\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2}$ ist und $r = \psi(\mathfrak{r})$; außerdem muß $\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)_{r=0} = 1$ sein. Diese Art der Zusammensetzung ist dann allerdings die einzige, die allen übrigen Postulaten genügt. Wir verzichten auf den Beweis dieser Behauptungen, den eigentlich schon Darboux a. a. O. gegeben hat, und bemerken nur noch, daß man z. B.:

$$\varphi(r) = \frac{r}{1+r}, \quad \psi(\mathfrak{r}) = \frac{\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}} \tag{29}$$

setzen kann.

Was ferner das 3. Postulat oder die Geltung des *kommutativen Gesetzes* betrifft, so kann es zwar auch nicht durch das fünfte ersetzt werden, aber es ist insofern ein wesentlicher Unterschied gegen den eben behandelten Fall vorhanden, als *es nur eine Art der Zusammensetzung gibt, für die die übrigen Postulate gelten, aber nicht das kommutative Gesetz, nämlich die Zusammensetzung der Drehungen selbst.*

Aus der Invarianz der Zusammensetzung gegenüber den Drehungen folgt nämlich zuerst, daß *zwei entgegengesetzt gleiche Vektoren* OX *und* $O\overline{X}$ *die Resultante Null* haben müssen; denn jede andre Resultante würde bei den Drehungen um OX, die ja auch $O\overline{X}$ stehen lassen, nicht unveränderlich bleiben. *Haben umgekehrt zwei Vektoren* OX *und* OY *die Resultante Null, so sind sie entgegengesetzt gleich.* Denn ist $O\overline{Y}$ der OY entgegengesetzt gleiche Vektor, so ist der Vektor

$$((OX,\ OY),\ O\overline{Y}) = (OX,\ (OY,\ O\overline{Y}))$$

einerseits $O\overline{Y}$ und andrerseits OX, also $OX = O\overline{Y}$, oder $OY = O\overline{X}$.

Sei nunmehr $(OX,\ OY) = OZ$, aber $(OY,\ OX) = OU$; ergibt dann die Umwendung um die auf OX und OY senkrechte Achse:

$$(O\overline{X},\ O\overline{Y}) = OZ' \text{ und } (O\overline{Y},\ O\overline{X}) = OU',$$

so folgt aus:

$$(OZ,\ OU') = ((OX,\ OY),\ (O\overline{Y},\ OX)) = (OX,\ O\overline{Y}) = 0,$$

daß $OU' = O\overline{Z}$ und ebenso $OZ' = O\overline{U}$. OZ und OU liegen daher in einer auf der Ebene OXY senkrechten Ebene und sind Spiegelbilder von einander in Beziehung auf die Ebene OXY. Wir erkennen hieraus jedenfalls, daß wir die Geltung des kommutativen Gesetzes ersetzen können durch das Postulat: *Die Resultante zweier Vektoren liegt in deren Ebene.* Nehmen wir dies nicht an, so können wir nur so viel schließen, daß *die beiden Resultanten zweier Vektoren, die durch die Vertauschung der Reihenfolge der Zusammensetzung entstehen, Spiegelbilder von einander in Beziehung auf die Ebene der beiden Vektoren sind.*

Hieraus ergeben sich für die Funktionen $f_{\mathfrak{a}}(x;\, y)$ die folgenden Gleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} f_1(x_1,\, x_2,\, 0;\, y_1,\, y_2,\, 0) = f_1(y_1,\, y_2,\, 0;\, x_1,\, x_2,\, 0), \\ f_2(x_1,\, x_2,\, 0;\, y_1,\, y_2,\, 0) = f_2(y_1,\, y_2,\, 0;\, x_1,\, x_2,\, 0), \\ f_3(x_1,\, x_2,\, 0;\, y_1,\, y_2,\, 0) = -f_3(y_1,\, y_2,\, 0;\, x_1,\, x_2,\, 0) \end{cases}$$

und ihnen analoge für die beiden andern Koordinatenachsen. Daraus folgt weiter:

$$(31)\qquad \omega_1^1(x_1,\, x_2,\, 0) = \eta_1^1(x_1,\, x_2,\, 0);\; \omega_1^2(x_1,\, x_2,\, 0) = \eta_1^2(x_1,\, x_2,\, 0).$$

Führen wir daher die Bezeichnung ein:

$$(32)\qquad \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial x_{\mathfrak{c}}} - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = c_{\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}},$$

so ergibt sich hieraus und aus den Gleichungen (16):

$$(33)\qquad c_{1,\,2}^1 = 0 \text{ und analog } c_{1,\,2}^2 = 0,$$

während $c_{1,\,2}^3 = 2\frac{\partial \omega_3^1(0)}{\partial x_2}$ ist, aber im allgemeinen von Null verschieden sein wird. Da offenbar $c_{\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}$ stets verschwindet, wenn $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ist, und nur sein Zeichen wechselt, wenn man $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{c}$ vertauscht, so werden von diesen 18 Konstanten überhaupt nur $c_{1,\,2}^3$, $c_{2,\,3}^1$ und $c_{3,\,1}^2$ von Null verschieden sein können. Aus der Invarianz unserer Zusammensetzung gegenüber allen Drehungen folgt aber leicht, daß diese drei Konstanten jedenfalls denselben Wert haben müssen. Machen wir nämlich die Drehung:

$$(34)\qquad x_1' = x_2,\; x_2' = x_3,\; x_3' = x_1$$

(um die Achse mit den Richtungskosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Amplitude 240°), so findet nach der Erklärung des 5. Postulats diese Invarianz der Zusammensetzung gegenüber dieser Drehung ihren Ausdruck in den Gleichungen:

$$(35)\qquad f_1(x_1,\, x_2,\, x_3;\, y_1,\, y_2,\, y_3) = f_3(x_2,\, x_3,\, x_1;\, y_2,\, y_3,\, y_1) \text{ usw.}$$

Aus ihnen folgt:

$$\omega_1^2(x_1, x_2, x_3) = \omega_3^1(x_2, x_3, x_1) \text{ usw.} \tag{36}$$

und hieraus:

$$\frac{\partial \omega_1^2(0)}{\partial x_3} = \frac{\partial \omega_3^1(0)}{\partial x_2} \text{ usw.} \tag{37}$$

Es ist also in der Tat

$$c_{1,2}^3 = c_{2,3}^1 = c_{3,1}^2 = c. \tag{38}$$

Setzen wir nunmehr in den Gleichungen (15) $x_1' = x_2' = x_3' = 0$, so folgt:

$$\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}_1}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{3} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x) E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x). \tag{39}$$

Ist daher $c = 0$, so ist unsre Zusammensetzung auf Grund des 4. Postulats wieder die geometrische Summation. Nun ergibt aber dies Postulat unter allen Umständen die vollständige Bestimmtheit der Funktionen $E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$, falls die Konstanten $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}$ gegeben sind. Aus den Gleichungen (20) und den aus ihnen durch Differentiation entstehenden Gleichungen:

$$E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) + \sum_{\mathfrak{b}_1=1}^{3} \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} x_{\mathfrak{b}_1} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \tag{40}$$

folgt nämlich in Rücksicht auf (39):

$$E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) + \sum_{\mathfrak{b}_1=1}^{3} \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}_1}} x_{\mathfrak{b}_1} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{3} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x) x_{\mathfrak{d}}. \tag{41}$$

Es ergeben sich also für die in (23) definierten Funktionen $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)$ die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)}{dt} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} - \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{3} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}} \varphi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(t) x_{\mathfrak{d}}, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3) \tag{42}$$

die durch Elementarfunktionen vollständig integriert werden können. Man sieht zugleich, daß die Veränderung der Konstanten c, so lange sie von Null verschieden bleibt, nur die Bedeutung einer Veränderung des Maßstabes besitzt, durch den die Vektoren gemessen werden.

Da nun durch die $\varphi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(t)$ die $E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$, hieraus die $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ und daraus und aus den Anfangsbedingungen auch die $f_{\mathfrak{a}}(x; y)$ bestimmt sind, so gibt es nur eine Art der Zusammensetzung von Vektoren, für die alle unsre Postulate gelten bis auf das dritte.

Es ist nun leicht zu sehen, daß die *Zusammensetzung der Drehungen selbst, wenn wir jede Drehung durch einen Vektor darstellen, der auf die Drehungsachse fällt und der Amplitude der in irgend einem Maßstabe gemessenen Drehung gleich ist, alle unsre Postulate erfüllt bis auf das dritte.* Der wahre Grund dafür, daß man die Zusammensetzung von Drehungen als eine solche Zusammensetzung von Vektoren auffassen kann, liegt natürlich darin, daß die Aufeinanderfolge zweier Drehungen wieder eine Drehung ist. Wir erkennen dies am einfachsten daraus, daß man jede Drehung durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen an zwei Ebenen durch die Drehungsachse erzeugen kann, von denen die zweite aus der ersten durch die Drehung um die halbe Amplitude entsteht. Sind also zwei Drehungen gegeben, so kann man die Ebene ihrer Achsen für die erste Drehung als die zweite der spiegelnden Ebenen betrachten und für die zweite Drehung als die erste annehmen, so daß die Aufeinanderfolge der beiden Drehungen auch aus der Aufeinanderfolge der beiden Spiegelungen an der ersten und der vierten der vier Ebenen entsteht, die zu den vier Spiegelungen gehören, in die die beiden Drehungen zerlegt sind. Man erkennt hieraus zugleich, daß die Vertauschung der Reihenfolge der beiden Drehungen die resultierende Drehung in ihr Spiegelbild in Bezug auf die Ebene der beiden Drehungsachsen verwandelt.

Die Gültigkeit des 1. Postulats ist ja nun selbstverständlich, die des zweiten folgt daraus, daß wir die Drehungen auch als Transformationen des Raumes auffassen können, das Resultat von drei Drehungen also einmal durch die im associativen Prinzip geforderten Zusammenfassungen, dann aber auch durch die bloße Aneinanderfügung der drei Transformationen gebildet werden kann, daher von der Art dieser Zusammenfassung unabhängig ist. Das kommutative Gesetz gilt, wie wir sahen, gerade nicht, die algebraische Addition von Drehungen um dieselbe Achse ist ja selbstverständlich und ebenso die Invarianz gegenüber allen Drehungen. Es muß folglich diese Zusammensetzung der Drehvektoren diejenige sein, die wir für den Fall, daß die Konstante c von Null verschieden sei, aus den obigen Formeln erhalten, und es hängt diese Konstante von dem Maßstabe ab, in dem wir die Amplituden der Drehungen als Vektoren auftragen.

Nehmen wir an, daß der vollen Umdrehung der Vektor π entspreche, so geht der analytische Ausdruck dieser Zusammensetzung aus den bekannten Formeln:

$$(43) \qquad \mathfrak{x}_1' = \frac{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2}{1 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3}, \quad \text{usw.}$$

hervor vermöge der Substitution:

$$\mathfrak{x}_\alpha = x_\alpha \frac{\operatorname{tg} r}{r}, \tag{44}$$

woraus folgt $\mathfrak{r} = \operatorname{tg} r$, also umgekehrt:

$$x_\alpha = \mathfrak{x}_\alpha \frac{\mathfrak{r}}{\operatorname{arc\,tg} \mathfrak{r}}. \tag{45}$$

(S. z. B. Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig, 1898, p. 149 u. 154). Da diese Formeln, wie man sieht, sehr verwickelt werden, so glauben wir auf den analytischen Beweis unserer Behauptungen nicht eingehen zu sollen und bemerken nur noch, daß bei diesem Maßstabe die Konstante $c = 2$ ist.

Nachdem wir gesehen haben, daß das kommutative Gesetz auch bei Zulassung aller übrigen Postulate nicht zu entbehren ist, kann dies um so weniger der Fall sein, wenn wir wie in I auf die Invarianz gegenüber den Drehungen keine Rücksicht nehmen. Ein Beispiel einer solchen Zusammensetzung von Vektoren, bei der den Postulaten 3 und 5 nicht, wohl aber den übrigen genügt wird, liefern die Formeln:

$$\begin{gathered} x_1' = x_1 + y_1, \quad x_2' = x_2 + y_2, \\ x_3' = \frac{x_1 + y_1}{1 - e^{-(x_1 + y_1)}} \left(\frac{x_3}{x_1} (1 - e^{-x_1}) + \frac{y_3}{y_1} (1 - e^{-y_1}) e^{-x_1} \right). \end{gathered} \tag{46}$$

Daß schließlich das associative Gesetz unter allen Umständen die Grundlage der Voraussetzungen bilden muß, ist selbstverständlich, mag aber durch das Beispiel:

$$x_\alpha' = (x_\alpha + y_\alpha) \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}{\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2}}, \tag{47}$$

vollends in Evidenz gesetzt sein. Wir haben in ihm eine Zusammensetzung von Vektoren, bei der alle Postulate erfüllt sind bis auf das associative Prinzip.

Karlsruhe, im Juni 1903.

Über die Zusammensetzung von Vektoren.

Von Georg Hamel in Karlsruhe.

Einleitung.

Herr Darboux[1]) hat gezeigt, daß zur Charakterisierung der üblichen Zusammensetzung von Vektoren die folgenden 6 Axiome ausreichen:

1. Die Summe, d. h. die Resultante zweier endlichen Vektoren ist ein eindeutig bestimmter, endlicher Vektor.

2. Die Resultante mehrerer Vektoren ändert sich nicht, wenn man einzelne, auf einander folgende Summanden durch ihre Teilsumme ersetzt. (Das associative Gesetz der Addition.)

3. Die Resultante zweier Vektoren ist unabhängig von der Reihenfolge der Vektoren. (Das kommutative Gesetz der Addition.)

4. Vektoren, die in derselben Geraden liegen, werden algebraisch addiert.

5. Das Resultat der Addition ist in seiner relativen Lage zu den gegebenen Vektoren nur von der relativen Lage dieser Vektoren zu einander abhängig, nicht aber von ihrer absoluten Lage im Raume; eine Drehung um den Bezugspunkt[2]) ändert also die relative Lage der Resultanten zu ihren Komponenten nicht.

6. Die Operation der Zusammensetzung ist stetig, d. h. man kann, nachdem man um den Endpunkt der Resultanten zweier Vektoren ein beliebig kleines Gebiet G_1 abgegrenzt hat, auch um die Endpunkte der Komponenten derartig kleine Gebiete G_2 und G_3 abgrenzen, daß der Endpunkt der Resultanten im Innern von G_1 bleibt, wenn sich die Endpunkte der Komponenten im Innern der Gebiete G_2 resp. G_3 bewegen.

Darboux hat dann noch gezeigt, daß man dieses letzte Axiom durch das folgende ersetzen kann:

6a. Die Resultierende liegt in dem Winkel kleiner als 180^0, den die Komponenten einschließen.

---

1) Darboux: „Sur la composition des forces en statique". Bulletin des sciences mathématiques 9. (1875). Auch als Note in der Mécanique von Despeyrous I, p. 371. Paris 1884. Zur Geschichte des Problems lese man Nr. 19 des Encyklopädieartikels IV, 1 von A. Voß: „Die Prinzipien der rationellen Mechanik".

2) D. h. den Punkt, von dem aus wir uns alle Vektoren abgetragen denken.

Daß die Resultierende in der Ebene durch die beiden Komponenten liegt, folgt nach Darboux schon aus den Axiomen 5 und 3.

Darboux hat indessen noch nicht bewiesen, daß die genannten 6 Axiome auch notwendig, d. h. unabhängig von einander sind. *Und zur Frage nach der Unabhängigkeit jener 6 Axiome soll nun diese Note einen Beitrag liefern.*

Daß die Axiome 1, 2, 3 notwendig sind, hat bereits Herr Schur in einer in dieser Zeitschrift veröffentlichten Note über denselben Gegenstand[1]) hervorgehoben; daß man das vierte Axiom nicht entbehren kann, folgt leicht aus den Betrachtungen Darboux'. Inwieweit die Axiome 6 resp. 6a notwendig sind, will ich dahin gestellt sein lassen[2]); es erübrigt also nur noch eine Diskussion des fünften Axioms, das die Unabhängigkeit des Resultates von den Drehungen um den gemeinsamen Bezugspunkt der Vektoren ausspricht.

Herr Schur hat nun in der erwähnten Note mittels gruppentheoretischer Betrachtungen gezeigt, daß man das fünfte Axiom entbehren kann, wenn man statt seiner annimmt, daß gewisse auftretende Funktionen erste und zweite Differentialquotienten besitzen.

Hier soll nun folgendes dargetan werden:

1. Das fünfte Axiom Darboux' ist *nicht entbehrlich*, wenn man auf die *Differentiierbarkeit* verzichtet.

2. Es ist aber schon dann *nicht mehr notwendig*, wenn man nur die Existenz eindeutiger, stetiger und bestimmter *erster* Differentialquotienten der in Frage kommenden Funktionen voraussetzt.

Diese Tatsache gründet sich auf folgenden analytischen Satz, den wir auch beweisen werden:

Die einzigen homogenen Funktionen erster Dimension, die nebst ihren ersten Ableitungen in der Umgebung der Nullstellen der Variablen endlich, stetig und eindeutig sind, sind die ganzen linearen Funktionen.

3. Endlich soll dann noch auf eine neue Weise gezeigt werden, daß sämtliche Axiome Darboux' hinreichend sind (Ich nenne diesen Satz im folgenden kurz den Darbouxschen Satz.). Die dabei verwendeten Methoden sind zwar nicht ganz so elementar wie die Darbouxschen, benutzen aber keine speziellen elementargeometrischen Sätze und dürften dadurch an Durchsichtigkeit gewinnen.

Ein Kenner der Grundlagen der Geometrie wird übrigens merken, daß es sich bei dem ganzen Problem eigentlich nur um die Geometrie

---

1) Siehe diesen Band, S. 352.

2) Um die Unabhängigkeit zu beweisen, käme es darauf an, eine unstetige Funktion $\varphi(x)$ zu konstruieren, die der Funktionalgleichung $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ genügt.

des Strahlenbündels, d. h. um die ebene elliptische Geometrie handelt. Nennen wir das in § 2 betrachtete Gebilde $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ eine „Gerade“ in den homogenen Koordinaten x, y, so zeigt § 1, daß diese „Geraden“ bei geeigneten Koordinaten linearen Gleichungen genügen. Und da das Stetigkeitsaxiom erfüllt ist, so stellt die von diesen „Geraden“ gebildete Geometrie nichts anderes dar als eine Punktabbildung der gewöhnlichen elliptischen Geometrie. In dieser neuen Geometrie gelten natürlich auch die Kongruenzaxiome, es gibt also eine Gruppe von ∞^3 Bewegungen. Und nun sagt Axiom 5 einfach aus, daß diese Gruppe mit der Gruppe der Bewegungen der gewöhnlichen elliptischen Geometrie identisch ist. Daraus wird dann geschlossen, daß die Abbildung allein die kongruente sein kann, daß also die neu definierte Geometrie vollständig mit der elliptischen Geometrie der Ebene übereinstimmt. Und das ist dann im wesentlichen der Inhalt des Darbouxschen Satzes.

§ 1.

Die Addition und Subtraktion von Vektoren.

Bezeichnen wir, weil es so bequem ist, beliebige Vektoren mit $\bar{a}$, $\bar{b}$ etc. (nach Résal, Somoff und Heun), den Vektor, der λ mal so groß ist wie $\bar{a}$, aber gleichgerichtet, mit $\lambda \cdot \bar{a}$ und die Resultierende der Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ mit $\bar{a} + \bar{b}$, so gelten für diese Operation der Zusammensetzung nach den Axiomen 1—4 und 6 die folgenden Sätze:

α) Für die Vektoren $\lambda\bar{a}$ und $\mu\bar{a}$ bestehen die gewöhnlichen Rechnungsregeln der Addition, es ist also

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{a} = (\lambda + \mu)\bar{a} \qquad \text{(Axiom 4)}$$

Insbesondere ist auch

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = 0,$$

wenn wir mit $-\bar{a}$ den zu $\bar{a}$ entgegengesetzt gleichen Vektor bezeichnen.

β) Es gilt das associative Gesetz

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \qquad \text{(Axiom 2)}$$

γ) Es gilt das kommutative Gesetz

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}. \qquad \text{(Axiom 3)}$$

δ) Es gilt das distributive Gesetz

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}.$$

Denn zunächst ist nach α), β) und γ)

$$2(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} + \bar{b}) = 2\bar{a} + 2\bar{b}.$$

Ebenso ergibt sich der Satz für jedes ganzzahlige λ. Sei nun $\lambda = \frac{1}{n}$, wo n eine ganze Zahl ist, so ist nach dem schon Bewiesenen

$$n\left(\frac{1}{n}\bar{a} + \frac{1}{n}\bar{b}\right) = \bar{a} + \bar{b},$$

also

$$\frac{1}{n}\bar{a} + \frac{1}{n}\bar{b} = \frac{1}{n}(\bar{a} + \bar{b}).$$

Daraus folgt dann der behauptete Satz weiter für jedes rationale λ und schließlich nach dem Stetigkeitsaxiom auch für irrationales λ.

ε) Es gibt außer $-\bar{a}$ keinen Vektor $\bar{b}$, sodaß

$$\bar{a} + \bar{b} = 0$$

wäre. Denn sonst folgte

$$\bar{a} + \bar{b} + (-\bar{b}) = -\bar{b},$$

also nach α) und β)

$$\bar{a} = -\bar{b}$$

w. z. b. w.

ζ) Die Substraktion ist eindeutig, d. h. es gibt zu zwei bekannten Vektoren $\bar{a}$ und $\bar{b}$ nur einen bestimmten Vektor, nämlich $\bar{x} = \bar{b} + (-\bar{a})$ — wofür wir dann auch $\bar{b} - \bar{a}$ schreiben —, sodaß

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$$

wird.

(Folgerung aus ε.)

η) *Für Vektoren der Form $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$ gelten die gewöhnlichen Regeln der Addition und Subtraktion unter einander, sowie der Multiplikation mit gewöhnlichen Zahlen.*

Dieser Satz faßt nur die vorhergehenden Sätze noch einmal zusammen. Die Subtraktion macht deshalb keine Schwierigkeiten, weil ja nach dem Vorhergehenden die Differenz $\bar{a} - \bar{b}$ nichts anderes ist als die Summe $\bar{a} + (-\bar{b})$.

§ 2.

Beweis der Unabhängigkeit des fünften Axioms.

Wir schicken diesem Beweise noch zwei Bemerkungen voran:

α) Ein Vektor kann nicht auf zweierlei Weise in der Form $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ dargestellt werden, wo $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ gegebene Vektoren sind, die nicht in einer Geraden liegen. Denn aus

$$x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} = x'\bar{\lambda} + y'\bar{\mu}$$

folgt $(x - x')\bar{\lambda} + (y - y')\bar{\mu} = 0$. Und das ist nach § 1 und nach der Annahme über $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ nur möglich, wenn $x = x'$ und $y = y'$ ist.

β) Wählen wir zwei nicht in derselben Geraden liegende Vektoren $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ und betrachten die Gesamtheit der Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ bei variabeln x und y, so erfüllen die Endpunkte dieser Vektoren *nicht* den ganzen Raum. Denn sonst gäbe es eine ein-eindeutige (Axiom 1 und Satz α, § 2) und stetige (Axiome 4 und 6) Abbildung der ebenen Mannigfaltigkeit x, y auf einen dreidimensionalen Raum, die unmöglich ist.[1])

Daher können wir einen Vektor $\bar{\nu}$ finden, sodaß $\bar{\nu}$ nicht in der Mannigfaltigkeit $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ vorkommt. Aus denselben Gründen kann noch verlangt werden, daß $\bar{\nu}$ nicht in der durch $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ bestimmten Ebene liegt.

Wir fassen jetzt die Gesamtheit der durch

$$x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$$

darstellbaren Vektoren ins Auge, wobei $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ drei feste, nicht in einer Ebene gelegene Einheitsvektoren bedeuten. Außerdem sei $\bar{\nu}$ nicht in der Mannigfaltigkeit $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ enthalten. (Siehe β); $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ aber sollen nicht in einer Geraden liegen. x, y, z mögen unabhängig von einander sämtliche reellen Zahlen durchlaufen.

Dann beweist man ebenso, wie in α) für die Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ geschehen ist, daß kein Vektor durch zwei verschiedene Zahlentripel x, y, z dargestellt werden kann.

Betrachten wir nun x, y, z als Koordinaten in einem Bildraume, bezogen auf ein zu dem Dreikant $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ kongruentes Achsensystem $O'xyz$, so wird durch die obige Darstellung dieser Bildraum eindeutig und stetig auf einen gewissen Teil[2]) des Original-, d. i. des Vektorraumes abgebildet.

Diese Abbildung hat überdies noch die Eigenschaft, daß Punkte, die auf einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt O' liegen, wieder in Punkte auf einer Geraden durch den Anfangspunkt O des

1) Siehe G. Cantor: „Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten". Göttinger Nachrichten 1879 Seite 127. Man findet dort auch die weiteren Literaturangaben.

2) Es sei bemerkt, daß man ohne Hinzunahme des fünften Axioms oder eines Axioms der Differentiierbarkeit beweisen kann, daß diese Abbildung auf den *ganzen* Originalraum stattfindet und umkehrbar eindeutig ist. Der elementaren Darstellung wegen habe ich den Beweis für diese Behauptung, die ich nicht brauche, hier unterdrückt.

Vektorraumes übergehen (Distributives Gesetz 1, δ). Außerdem ist die Punktabbildung der einzelnen Geraden ähnlich (Axiom 4 und das distributive Gesetz 1, δ); speziell werden drei Geraden ($x\bar{\lambda}$, $y\bar{\mu}$ und $z\bar{\nu}$) kongruent transformiert.

Da nun der Zusammensetzung von Vektoren im Originalraum die gewöhnliche Zusammensetzung von Vektoren im Bildraum entspricht (Satz η, § 1), so *haben wir jetzt die allgemeinste Methode, Vektoren nach den Axiomen 1, 2, 3, 4 und 6 zusammenzusetzen* und zwar die folgende[1]):

Man bilde das Geradenbündel durch 0 eineindeutig und stetig auf das Geradenbündel durch 0′ ab und zwar so, daß drei beliebig gewählte, aber nicht in einer Ebene liegende Geraden ihre gegenseitige Lage beibehalten. Dann erzeuge man eine ein-eindeutige, stetige Punkttransformation dadurch, daß man die Punkte einer Originalgeraden in die Punkte ihrer Bildgeraden ähnlich transformiert, wobei man den Punkt 0 jedesmal in den Punkt 0′ überführt und die Punkte der drei ausgezeichneten Geraden kongruent überträgt. Der Ähnlichkeitsfaktor muß im übrigen von Strahl zu Strahl stetig variieren.

Um nun Vektoren zusammenzusetzen, suche man ihre Bilder, setze diese nach der gewöhnlichen Methode zu einer Resultierenden zusammen und bestimme zu dieser wieder das Original. Nennen wir dieses Original die Resultierende der gegebenen Vektoren, so haben wir eine Art der Zusammensetzung, die offenbar alle Axiome 1, 2, 3, 4 und 6 erfüllt, und nach den vorliegenden Betrachtungen auch die allgemeinste.

Jeder neuen Abbildung entspricht im allgemeinen eine neue Zusammensetzung, nur bei kongruenter Abbildung ergibt sich die gewöhnliche. Daß es aber sehr viele der oben beschriebenen Abbildungen gibt, leuchtet ein, ein spezielles Beispiel soll am Schlusse des folgenden Paragraphen gegeben werden. *Damit ist die Unabhängigkeit des Axiomes 5 erwiesen.*

§ 3.

Der Satz von den homogenen Funktionen erster Dimension. Die Voraussetzung der Differentiierbarkeit usw. ersetzt das Axiom 5 vollständig.

Um nun die Rolle zu erkennen, welche die Differentiierbarkeit bei der ganzen Frage spielt, drücken wir unser Resultat analytisch aus.

---

1) Ich habe den Satz so ausgesprochen, als ob die Möglichkeit der Darstellung eines jeden Vektors durch $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$ bewiesen wäre (siehe die Anmerkung 2) der vorigen Seite). Für den Fortgang der Untersuchung macht das nichts aus.

Seien die Koordinaten im Originalraum (bezogen auf $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$) ξ, η, ζ, so ist unsere Abbildung gegeben durch

$$\xi = \xi(x, y, z); \quad \eta = \eta(x, y, z); \quad \zeta = \zeta(x, y, z),$$

und diese Funktionen genügen der Funktionalgleichung:

$$f(tx, ty, tz) = t \cdot f(x, y, z), \qquad (f = \xi, \eta, \zeta)$$

d. h. ξ, η, ζ sind stetige, eindeutige, homogene Funktionen erster Dimension. Außerdem ist noch

$$\xi(x, 0, 0) = x; \quad \xi(0, y, 0) = 0; \quad \xi(0, 0, z) = 0 \text{ usw.}$$

Homogene Funktionen erster Dimension gibt es natürlich in großer Anzahl. Wir behaupten aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, *daß die einzige homogene Funktion erster Dimension, die sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ nebst ihren ersten Differentialquotienten endlich, stetig und eindeutig verhält, die ganze lineare Funktion ist.*

Beweis: Zunächst folgt aus obiger Funktionalgleichung, daß

$$f(0, 0, 0) = 0$$

ist. Daher kann man nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung schreiben:

$$f(tx, ty, tz) = tx \cdot f_1(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + tyf_2(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + tzf_3(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z),$$

wo f_1, f_2, f_3 die partiellen Ableitungen von f nach den drei Variabeln bedeuten, ϑ aber eine Zahl zwischen 0 und t.

Da aber nach der Funktionalgleichung die linke Seite gleich $t \cdot f(x, y, z)$ sein soll und alle vorkommenden Größen stetig sind, so ist

$$f(x, y, z) = x \cdot f_1(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + yf_2(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z) + zf_3(\vartheta x, \vartheta y, \vartheta z).$$

Geht man jetzt zur Grenze $t = 0$ also auch $\vartheta = 0$ über, so werden f_1, f_2, f_3 bestimmte Konstante c_1, c_2, c_3, also

$$f(x, y, z) = c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wenn wir daher die Existenz bestimmter, endlicher und stetiger Differentialquotienten als neues Axiom hinzunehmen, so können wir setzen

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$
$$\eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$
$$\zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Da aber für $y = 0$, $z = 0$ auch $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und $\xi = x$ werden sollte u. s. w., so folgt noch

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1, \quad a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0.$$

Es bleibt als einzig mögliche Abbildung die kongruente Abbildung, und damit ist die von Herrn Schur aufgestellte Behauptung nochmals erwiesen. *Das fünfte Axiom der Unabhängigkeit von den Drehungen läßt sich durch das Axiom der Differentiierbarkeit vollständig ersetzen, und zwar genügt bereits die Existenz und das reguläre Verhalten der ersten Differentialquotienten.*

Der *anschauliche* Inhalt des Beweises ist folgender: Jede Abbildung ist bei der Existenz regulärer Differentialquotienten im Unendlichkleinen affin und hier sogar kongruent nach den Nebenbedingungen. Da aber die Geraden durch 0 wieder in Gerade durch $0'$ und die Punkte einer jeden Geraden durch 0 ähnlich transformiert werden, so ist die Abbildung auch im Endlichen kongruent.

Leisten wir aber auf die Existenz, Stetigkeit, Endlichkeit oder Eindeutigkeit der Differentialquotienten Verzicht, so gibt es noch unendlich viele andere Funktionen, wie wir sie brauchen, z. B. können wir setzen

$$\xi = \frac{x^3}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\eta = \frac{y^3}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\zeta = \frac{z^3}{x^2 + y^2 + z^2},$$

also

$$x = \xi^{1/3}[\xi^{2/3} + \eta^{2/3} + \zeta^{2/3}] \text{ usw.}$$

Daraus aber ergibt sich eine andere als die gewöhnliche Zusammensetzung, z. B. hat der Endpunkt der Resultierenden von ξ, 0, 0 und 0, η, 0 die Koordinaten

$$\frac{\xi^3}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{\eta^3}{\xi^2 + \eta^2}, \quad 0 \text{ (statt } \xi, \eta, 0).$$

Damit ist die Unabhängigkeit des fünften Axioms nochmals durch ein Beispiel dargetan.

§ 4.

Der Beweis des Darbouxschen Satzes unter Benutzung des fünften Axioms.

Der Vollständigkeit halber mag jetzt der Beweis des Darbouxschen Satzes unter Hinzunahme des fünften Axioms durchgeführt werden.

Wie schon Darboux gezeigt hat, liegt nach diesem Axiom die Resultierende zweier Vektoren stets in der Ebene durch diese, unsere Flächen $x\bar{\lambda} + x\bar{\mu}$ sind also Ebenen, wie man auch $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ wählen mag. Mithin hat die in § 2 besprochene Abbildung des Strahlenbündels durch 0 die Eigenschaft, Ebenen in Ebenen überzuführen, die Abbildung ist also projektiv. Weil ferner von vornherein drei Geraden und wie man durch fortgesetzte Anwendung des fünften Axioms erkennt, alle durch Winkelhalbieren aus ihnen ableitbaren Geraden ihre gegenseitige Lage nicht ändern, so ist die Abbildung des Strahlenbündels kongruent. Fernerhin muß der Ähnlichkeitsfaktor, der bei der Punktabbildung für jeden Strahl auftritt, überall gleich 1 sein, wie man ebenfalls leicht aus der Unabhängigkeit des Resultates von allen Drehungen folgert.

Mithin ist die kongruente Abbildung die allein mögliche, *die gewöhnliche Addition der Vektoren ist die einzige, welche alle sechs Axiome befriedigt.*

Anhang.

Es mag noch kurz angedeutet werden, wie sich unser Beweis des Darbouxschen Satzes umgestaltet, wenn man gleich das fünfte Axiom hinzuzieht, aber statt des Stetigkeitsaxioms nur fordert, daß die Resultierende zweier Vektoren im Innern des von ihnen gebildeten Winkels liegt (Axiom 6a).

Zunächst bleiben die in § 1 genannten Sätze gültig bis auf das distributive Gesetz δ). Dieses kann einstweilen nur für den Fall geschlossen werden, daß λ in $\lambda(\bar{a} + \bar{b})$ eine rationale Zahl ist. Beschränken wir uns also zunächst auf rationale x, y, z, so erhalten wir eine ein-eindeutige Abbildung der rationalen Punkte des x-, y-, z-Raumes auf gewisse Punkte des Originalraumes. Da aber für rationale t, a, b, c die Endpunkte von $t(a\bar{\lambda} + b\bar{\mu} + c\bar{\nu})$ bei variablem t auf einer Geraden liegen, so gehen bei unserer Abbildung des Originalraumes ξ, η, ζ auf den Bildraum x, y, z nach Axiom 5 Ebenen wieder in Ebenen über, die ganze Abbildung ist daher nach der Schlußweise des § 5 kongruent. Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$ mit rationalem x, y, z werden in der gewöhnlichen Weise zusammengesetzt.

Da aber alle Schlüsse dieselben geblieben wären, wenn man statt der Einheitsvektoren $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ drei andere, unter sich gleichlange[1])

1) Gleichlang müssen sie sein, damit Punkte der Halbierungslinien rational darstellbar sind und daher die Schlußweise von § 4 angewendet werden kann.

Vektoren gewählt hätte, so gilt der eben genannte Satz auch noch für alle Vektoren $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu} + z\bar{\nu}$, für die nur die Verhältnisse $x:y:z$ rational sind.

Betrachten wir nun den Vektor $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ bei beliebigem aber festem x und variablem y, so ist die Richtung dieses Vektors eine monotone Funktion von y (nach Axiom 6a), d. h. der Vektor $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ nähert sich bei wachsendem positiven y immer mehr der Richtung von $\bar{\mu}$. Da aber für alle y, die zu x in rationalem Verhältnis stehen, die Richtung von $x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}$ zu den Richtungen $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ dieselbe Lage hat, wie im Bildraume der durch die Koordinaten x, y gegebene Vektor zu $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ im Bildraum, so gilt dasselbe auch noch, wenn $x:y$ eine beliebige irrationale Zahl ist.

Infolgedessen ist sicherlich für jedes t

$$t \cdot x \cdot \bar{\lambda} + t \cdot y \cdot \bar{\mu} = \varphi(t)\,(x\bar{\lambda} + y\bar{\mu}).$$

Es hat aber $\varphi(t)$ folgende Eigenschaften:

1) Für rationale t ist $\varphi(t) = t$. (Beweis genau so wie bei § 1, δ.)

2) $\varphi(t)$ hat das Vorzeichen von t. (Axiom 6a.)

3) Es besteht nach Axiom 4) und den Sätzen α, β, γ des § 1 die Funktionalgleichung

$$\varphi(t + t') = \varphi(t) + \varphi(t').$$

Daher ist nach Darboux stets $\varphi(t) = t$.

Die Vektoren der durch $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ bestimmten Ebene werden also sämtlich in der gewöhnlichen Weise zusammengesetzt. Da aber $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ beliebig gewählte Einheitsvektoren sein konnten, so gilt das Resultat für alle Vektoren; *der Darboux sche Satz ist somit bewiesen.*

Ein Apparat zur Bestimmung des Flächeninhalts, des statischen Moments, Trägheitsmoments und beliebiger anderer Momente krummlinig begrenzter ebener Figuren.

Von J. Schnöckel in Düsseldorf.

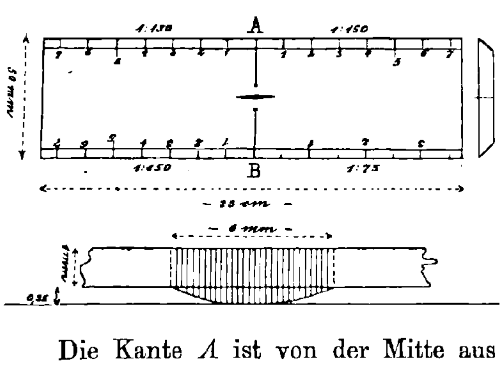
Allgemein bekannt ist das Verfahren, ebene n-Ecke durch eine einfache, geometrische Konstruktion in $n-1$-Ecke und nach $n-3$-maliger Anwendung der Methode in Dreiecke zu verwandeln, welche dem n-Eck an Fläche gleich sind. Der Praktiker bedient sich zu diesem Zweck zweier, gegen einander verschiebbarer Dreiecke aus Holz, Celluloid oder Metall und einer Kopiernadel, um Punkte auf dem Papier mit Sicherheit zu bezeichnen. Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob es nicht ein ebenso einfaches Verfahren gibt, *krummlinig begrenzte* Figuren nach Fläche auszugleichen, oder, was gleich bedeutend ist, in geradlinig begrenzte zu verwandeln, deren Flächeninhalt leicht als das Produkt von zwei Faktoren ermittelt werden kann.

Diese Aufgabe wird im folgenden gelöst, und es wird gezeigt werden, daß man nicht allein nach Flächeninhalt, sondern auch ebenso leicht in bezug auf das statische Moment, das Trägheitsmoment und jedes beliebige andere Moment auszugleichen vermag.

Beschreibung des Apparats.

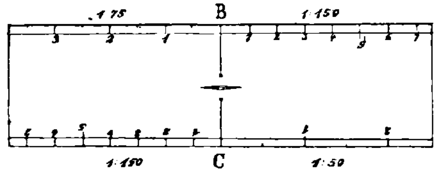
Die Figur 1 stellt ein zweiseitig geteiltes Lineal von 25 cm Länge, 5 cm Breite und 1 mm Dicke aus völlig durchsichtigem Celluloid in Form eines prismatischen Maßstabes vor. Der kurze Strich in der Mitte von AB bezeichnet eine, der Kante parallele, stählerne Schneide (siehe auch den Längsschnitt Fig. 1 unten), die in das Lineal eingelassen ist. Sie ist nach unten kreisförmig scharf angeschliffen und tritt auf der Kehrseite des Stabes etwa 0,35 mm hervor.

Fig. 1.



Die Kante A ist von der Mitte aus nach den Seiten hin im Maßstab 1 : 150 geteilt. Die Teilung ist auf der Unterseite des durchsichtigen Lineals mit kräftigen, schwarzen Strichen ausgeführt und auf Meterstriche beschränkt, damit die Übersichtlichkeit nicht durch für den vorliegenden Zweck unnötige Kleinstriche beeinträchtigt wird. Die Kante *B* zeigt Teilungen in 1 : 150 und 1 : 75. Das Lineal Fig. 2 gleicht bis auf eine Verschiedenheit in den Teilungen dem in Fig. 1 dargestellten vollkommen. Die Kante *C* entspricht *A* in Fig. 1 und ist im Maßstab 1 : 150 und 1 : 50 von der Mitte aus geteilt. Infolge der bedeutenden Länge eines Meterintervalles empfehlen sich hier kleine Zwischenstriche bei 0,5.

Fig. 2.

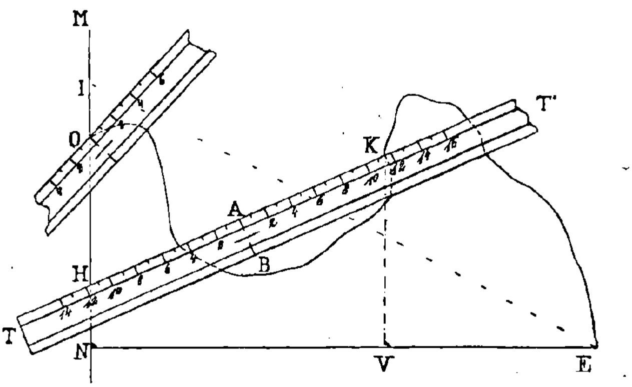


Die Ausgleichung.

Die Lineale Fig. 1 und 2 sind für die Ausgleichung offener Kurvenzüge wie Fig. 3 oder geschlossener, krummlinig begrenzter Figuren bestimmt.

Um den Linienzug *OKE* (Fig. 3) von *O* aus gegen die Leitlinie *MN* auszugleichen, legt man die Kante *A* des Apparats mit der Nullmarke so im Anfangspunkt der Kurve *O* an, daß die Kante in die

Fig. 3.



Tangentenrichtung fällt. Drückt man nun die Schneide des Celluloidlineals mit der rechten Hand ein wenig auf das Papier, so ist nur eine Drehung des Stabes um den Berührungspunkt der Schneide mit dem Papier und eine gleitende Bewegung in der Kantenrichtung möglich. Das Lineal wird nun mit Hilfe der Linken in der Schneidenrichtung stetig nach rechts verschoben und zugleich allmählich so gedreht, daß sich die gemeinsame Nullmarke der Teilungen immer zwischen dem Schnittpunkt der Kante mit der Leitlinie MN und der Kurve befindet. Die Entfernung der Nullmarke von den Schnittpunkten H und K wird durch die Teilungen der Kante so geregelt, daß für diese Punkte an den Skalen die gleichen Zahlen abgelesen werden. Mit der stetigen Änderung der Lage des Lineals ändern sich auch die Ablesungen stetig, jedoch ist die Bewegung so zu regeln, daß für eine bestimmte Lage beide Ablesungen gleich werden. In der Figur schneidet die Leitlinie die linke Teilung kurz vor der 12. Wäre bei K die 12 schon erreicht, so müßte eine korrigierende Veränderung in der Lage des Lineals stattfinden. Eine genauere Ablesung zwischen den Strichen wird nicht gemacht, aber es ist nötig, schätzungsweise die Entfernung des Schnittpunktes vom nächsten Strich zu merken. Man verfolgt so den ganzen Verlauf der auszugleichenden Kurve, ohne die Punkte H und K aus den Augen zu lassen. Benutzt man die Kante A, so liegt die Nullmarke auf der Mitte zwischen H und K, während sie bei B und C mehr nach K hin fällt.

Es gehört einige Übung dazu, einen Linienzug schnell und fehlerlos auszugleichen. Die Schwierigkeit, H und K ständig im Auge zu behalten, wächst zunächst mit der Entfernung der beiden Punkte, jedoch lehrt die Erfahrung, daß es immerhin leicht ist, Kurven in einer Längenausdehnung von 20 bis 50 cm scharf auszugleichen. Auch kommt dem Verfahren eine äußerst günstige Fehlerausgleichung zu statten.

Die Kante A ist zur Ausgleichung nach Fläche bestimmt. Während der Bewegung befindet sich die Nullmarke immer auf der Mitte zwischen H und K, da rechts und links von A gleiche Teilungen $1:150$ entworfen sind.

Um nach dem statischen Moment auszugleichen, benutzt man die Kante B des Apparats. Die Teilungen um B sind verschieden $1:150$ und $1:75$ (siehe Fig. 1 und 2); es wird daher $BK = \frac{1}{2}BH$.

Bei Anwendung der Seite C, Ausgleichung nach dem Trägheitsmoment einer Kurve, sind die Teilungen $1:150$ und $1:50$ gewählt, sodaß $CK = \frac{1}{3}CH$ ist.

Verwertung der ausgleichenden Geraden.

Der Kurvenzug OE (Fig. 4) wird durch die Gerade EA nach Fläche, durch EB nach dem statischen und durch EC nach dem Trägheitsmoment in bezug auf die Leitlinie MN ausgeglichen.

Es ergibt sich als Flächeninhalt des zwischen der Geraden OE und der Kurve liegenden Teils

$\Sigma_1 = \frac{1}{2} AO \cdot (EO) \cdot = 34{,}7$,

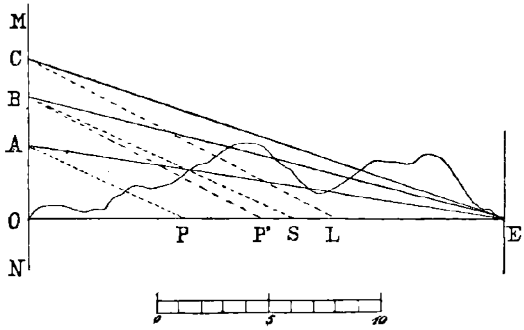
als statisches Moment

$\Sigma_2 = \frac{1}{3} BO (EO)^2 = 405{,}0$,

als Trägheitsmoment

$\Sigma_3 = \frac{1}{4} CO (EO)^3 = 5550{,}0$.

Fig. 4.



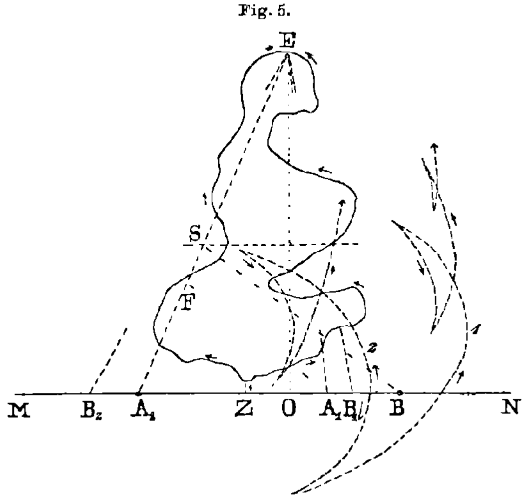
Man erhält die Schwerpunktsordinate, indem man $PO = \frac{1}{3} EO$ macht und zu AP durch B eine Parallele zieht, die EO in S schneidet. Dann ist SO der Abstand der Schwerlinie von MN.

Ebenso leicht wird die reduzierte Pendellänge für O als Drehungspunkt konstruiert.

Man mache $P'O = \frac{1}{2} EO$ und ziehe zu BP' durch C eine Parallele, die EO in L schneidet. LO ist die gesuchte Länge.

Bei der Ausgleichung sehr unregelmäßiger oder in ihrer Hauptrichtung der Leitlinie paralleler Kurven kann es vorkommen, daß die ausgleichende Kante des Lineals die Linie sehr schräg schneidet. Diese ungünstige Lage wird dadurch vermieden, daß man die Ausgleichung an irgend einer Stelle der Kurve abbricht und an einem anderen Punkte weiter fortsetzt. Der Linienzug wird so durch *zwei oder mehrere Gerade* ausgeglichen, was durch die Fig. 5 veranschaulicht wird.

Fig. 5.



Die Geraden A_1E und A_2E gleichen die Figur nach Fläche, B_1E und B_2E nach dem statischen Moment in bezug auf MN aus. Der Anfangspunkt der Ausgleichung ist für die rechte und linke Seite der Kurve Z. Für Berechnungen gelten die Formeln:

Fläche $\Sigma_1 = \frac{1}{2} A_1 A_2 (EO)$, stat. Moment $\Sigma_1 = \frac{1}{3} B_1 B_2 (EO)^2$.

Da, wo es auf die zahlenmäßige Ermittelung von Σ_1 ankommt, empfiehlt es sich, EO zu 20 anzunehmen, für Σ_2 zu $\sqrt{30}$ und für Σ_3 zu $\sqrt[3]{40}$. Die Lage des Endpunktes E kann auch außerhalb der Kurve gewählt werden. Dieser Fall tritt ein, wenn die Figur in mehr als zwei Teile zur Ausgleichung zerlegt wird. Man hat dann zu berücksichtigen, daß die Punkte E gleiche Entfernung von der gemeinsamen Leitlinie haben.

Der Weg, den die Schneide bei der Ausgleichung beider Kurvenzweige nach dem statischen Moment genommen hat, ist durch die punktierten Kurven 1 und 2 zur Anschauung gebracht.

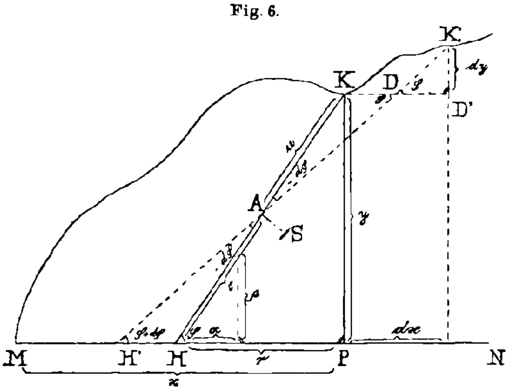
Für Flächenausgleichungen unregelmäßiger Figuren ist es zulässig und oft vorteilhaft, *krumme Leitlinien* zu ziehen, anstatt Zerlegungen der Kurven vorzunehmen.

Das Prinzip des Verfahrens ist durch die Betrachtung der drei am häufigsten in der Praxis vorkommenden Summenformen Σ_1, Σ_2 und Σ_3 zur Genüge erläutert, so daß es mit Benutzung der weiterhin entwickelten Formel leicht wird, nach jeder gewünschten Summenform auszugleichen.

Theorie.

Die Gerade HK sei Kante des Lineals mit der Nullmarke A und der Schneide S. Soll die Kurve MKK' gegen die Leitlinie $MH'H$ nach Fläche ausgeglichen werden, so muß $MHKM$ konstant bleiben, während HK in die unendlich wenig abweichende Lage $H'K'$ übergeht. Dann sind die spitzen Dreiecke AKK' und AHH' flächengleich. Also (Fig. 6)

Fig. 6.



$$\tfrac{1}{2}AK \cdot AK' \cdot d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}AH \cdot AH' d\varphi.$$

Ist KK' und HH' unendlich klein, so kann man setzen

$$AK = AK' = u, \quad AH = AH' = v.$$

Nach beiderseitiger Hebung des spitzen Winkels $d\varphi$ wird

$$u = v.$$

Für die Flächenausgleichung sind demnach die Teilungen der Kante einander gleich.

Mit Hilfe des Rotationskörpers von MK um MN ergibt sich nach der Guldinschen Regel ein ähnlicher Beweis für die Ausgleichung nach dem statischen Moment. Der Einfachheit wegen empfiehlt es sich aber, sogleich zur analytischen Ableitung der alle einzelnen Fälle umfassenden Formel für u und v überzugehen.

Für die Fläche $MHPKM$ besteht die Integralgleichung

$$\Sigma_1 = \int_{y=0}^{y=y} y\,dx.$$

Dieser entspricht für das rechtwinklige Dreieck

$$HPK = \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta\,d\alpha.$$

Die Ausgleichung bedingt, daß die Differenz der beiden Flächenstücke konstant bleibt:

$$\int_{y=0}^{y=y} y\,dx - \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta\,d\alpha = K.$$

Eine allgemeine Form erhält die Bedingung, wenn man schreibt

$$(1) \qquad \int_{y=0}^{y=y} y^n\,dx - \int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta^n\,d\alpha = K.$$

Als Gleichung der Geraden HK ergibt sich aus Fig. 6

$$\alpha = \frac{r}{y}\beta,$$

und als Ableitung folgt:

$$d\alpha = \frac{r}{y}\,d\beta.$$

Dieser Wert von $d\alpha$ wird in (1) eingesetzt und der Richtungskoeffizient $\frac{r}{y}$ vor das Integralzeichen gezogen:

$$(1a) \qquad \int_{y=0}^{y=y} y^n\,dx - \frac{r}{y}\int_{\beta=0}^{\beta=y} \beta^n\,d\beta = K.$$

Schreibt man y statt β und differentiiert, so wird

$$(2) \qquad y^n\,dx = \left(\frac{r}{y}\right) y^n\,dy + d\left(\frac{r}{y}\right)\int y^n\,dy.$$

Aus Fig. 6 ersieht man, daß

$$\frac{r}{y} = \operatorname{cotg}\varphi \quad \text{und} \quad d\left(\frac{r}{y}\right) = -\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Durch Benutzung dieser Gleichungen nimmt (2) leicht folgende Form an:

(3) $$dx - dy \cdot \operatorname{cotg}\varphi = -\frac{y \cdot d\varphi}{(n+1)\sin^2\varphi}.$$

Nach dem Sinussatz ist in dem spitzen Dreieck AKD

$$KD = KA \cdot \frac{\sin KAD}{\sin KDA}.$$

Da nun $\sphericalangle\ KDA = AH'P = \varphi$, so wird

$$KD = -\frac{u\,d\varphi}{\sin\varphi}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $DD'K'$ folgt

$$DD' = dy \cdot \operatorname{cotg}\varphi.$$

Bildet man die Differenz zwischen $KD' = dx$ und DD', so ergibt sich

$$dx - dy \cdot \operatorname{cotg}\varphi = -\frac{u\,d\varphi}{\sin\varphi}.$$

Durch Substitution in (3) erhält man

(4) $$u \cdot \sin\varphi = \frac{y}{n+1}.$$

Im Dreieck HPK ist

$$y = (u+v)\sin\varphi = u\sin\varphi + v\sin\varphi.$$

Nun folgt weiter aus (4)

(5) $$v \cdot \sin\varphi = y \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n \cdot y}{n+1}.$$

Durch (4) und (5) gelangt man zu der gesuchten Beziehung zwischen u, v und n:

(6) $$v = n \cdot u.$$

Wird die Ausgleichung im Anfangspunkte M der Kurve begonnen, so ist in der Formel (1a) die Konstante $K = O$. Man erhält für das allgemeine Integral

(7) $$\int_0^y y^n dx = \frac{r}{n+1} \cdot y^n.$$

Die oben behandelten Sonderfälle sind:

$$n = +1, \quad \text{Fläche } \Sigma_1 = \int y\,dx = \tfrac{1}{2} r y;$$

$$n = +2, \quad \text{Statisches Moment } \Sigma_2 = \int y^2\,dx = \tfrac{1}{3} r y^2;$$

$$n = +3, \quad \text{Trägheitsmoment } \Sigma_3 = \int y^3\,dx = \tfrac{1}{4} r y^3.$$

Ist (Fig. 3 und 6) die Kante des Lineals in der Richtung AH im Maßstab $1:m$ geteilt, so muß nach Gleichung (6) AK in $1:m\cdot n$ geteilt werden.

Für positive, ganze oder gebrochene n liegt die Schneide S zwischen H und K, für negative ganze n jenseits K und für gebrochene jenseits H. Nur für $n = -1$ versagt die Formel (6), da die Schneide im Unendlichen läge.

Wie erwähnt, wird bei der Ausgleichung nach der Summenform

$$\Sigma_{-n} = \int \frac{dx}{y^n} = \frac{r}{(1-n)y^n}$$

die Schneide und Nullmarke in die Verlängerung von HK (bei Fig. 3 und 7) nach T fallen. Da man von T aus nach einer Richtung nicht zwei Skalen $1:m$ und $1:m\cdot n$ an der Kante auftragen kann, hilft man sich dadurch, beide Teilungen auf folgende Weise in einer einzigen Skalentabelle zu vereinigen. Die Bedingung, welche erfüllt werden muß, lautet:

Wird in der Entfernung z von der Nullmarke die Zahl t an der Kante abgelesen, so soll bei $z' = n\cdot z$ die Zahl $t' = t+1$, bei $z'' = n^2\cdot z$ die Zahl $t'' = t+2$ und allgemein bei $z_a = n^a\cdot z$ die Ziffer $t_a = t+a$ erhalten werden.

Die noch unbekannte Gleichung der Skalentabelle möge durch die Beziehung

$$z = f(t)$$

ausgedrückt werden, wo f als Funktionszeichen dient. Durch Einsetzen ergibt sich aus der gestellten Bedingung die Funktionalgleichung:

$$z_a = n^a\cdot f(t) = f(t_a) = f(t+a).$$

Die partielle Ableitung des zweiten und vierten Gliedes der Gleichung nach t und a führt auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial f(t+a)}{\partial t} = n^a\cdot f'(t) = n^a\cdot\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{\partial f(t+a)}{\partial a} = n^a\cdot \log\operatorname{nat} n\cdot f(t) = n^a\cdot\log\operatorname{nat} n\cdot z.$$

Die Ableitungen der symmetrischen Form $f(t+a)$ müssen einander gleich sein. Es ist daher

$$\log \operatorname{nat} n \cdot dt = \frac{dz}{z}.$$

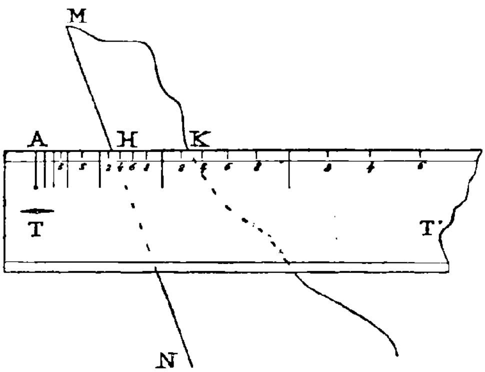
Durch Integration erhält man

$$\log \operatorname{nat} z = t \cdot \log \operatorname{nat} n$$

und durch Umkehrung die Gleichung der Exponentialskala

$$(8) \qquad z = n^t.$$

Fig. 7.



Figur 7 veranschaulicht die Skala zur Ausgleichung nach der Integralform

$$\Sigma = \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{2r}{\sqrt{y}}.$$

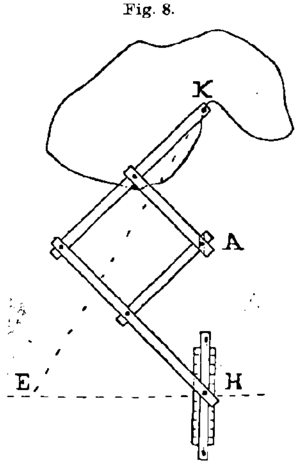
Hier ist $n = -2^{-1}$, so daß die Gleichung der entsprechenden Teilung lautet

$$z = 2^t.$$

Die Ziffern für die langen Teilstriche 0, 1 ... t sind in der Zeichnung weggelassen. Bei jedem dieser Striche beginnt die Bezifferung wieder mit Null.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Nullmarke A (vgl. Fig. 3) sich überall in der Entfernung der *mittleren Höhe* des Flächenstücks $NOKV$ von NV befindet, sodaß also ein bei A befestigter Farbstift den *Verlauf der Integration* von 0 bis K auf dem Papier *graphisch* zum Ausdruck bringt. Das Lot von A auf NV ist immer gleich $\frac{1}{2}(NO + VK)$, wenn nach Fläche ausgeglichen wurde.

Fig. 8.



Das allgemeine Ausgleichungsprinzip läßt sich, wie Fig. 8 zeigt, auch zur Konstruktion eines Umfahrungsplanimeters verwenden.

Die überbrückte Walze H ist durch einen Storchschnabel mit dem Fahrstift K und einem die Schneide ersetzenden Rädchen A verbunden. Der Weg HE der Walze entspricht der Leitlinie, während der Storchschnabel bewirkt, daß $AH : AK = n : 1$ bleibt. Macht man für $n = 1$ die lotrechte Entfernung des Anfangspunktes von der Leitlinie $HK = k = 2$, so entspricht die Umdrehungszahl der Walze resp. ihr Weg HE der Fläche der umfahrenen Figur. Ähnliches gilt für das statische und das Trägheitsmoment.

Genauigkeit der Ausgleichung.

Die Instrumentalfehler, welche das Resultat der Ausgleichung beeinflussen, sind zunächst gröbere Ungenauigkeiten in den Maßstäben u und v. Ihre gemeinsame Nullmarke muß mit der Projektion des Mittelpunktes der Schneide auf die Kante zusammenfallen, und schließlich müssen die letzteren einander parallel sein. Trifft diese Bedingung nicht zu, so weicht die ausgleichende Kante konstant nach einer Seite hin ab. Der Fehler ist dem von der Schneide zurückgelegten Wege proportional, fällt aber für geschlossene Kurvenzüge (vergl. Fig. 5) fort, da Hin- und Rückweg (Linie 1 und 2) etwa gleich werden.

Außer den genannten Fehlern, deren Beseitigung auf mechanischem Wege erreicht wird, ist die Genauigkeit nur von den Schätzungsfehlern bei H und K abhängig. Sie sind gleich häufig positiv und negativ, sodaß man für die mittlere, seitliche Abweichung nach dem Fehlergesetz schreiben kann

$$\mu = \pm \varkappa \sqrt{s},$$

wenn s die Länge der Kurve und $\varkappa$ eine Konstante bezeichnet. Die Versuche ergaben für Linienzüge von ca. 15 cm Länge einen mittleren Ausgleichungsfehler von weniger als 0,5 mm.

Anmerkung. Wegen anderer Apparate für denselben Zweck vergl. A. Amsler, Über mechanische Integrationen, Dycks Katalog mathematisch-physikalischer Modelle, 1892, Abschnitt 3, S. 110. — Außer dem Integraphen von Abdank-Abakanowicz gehört ferner zu dieser Gattung von Integrationsapparaten der sogenannte „Prytzsche Stangenplanimeter“.

Kleinere Mitteilungen.

Zur Reduktion eines Kräftesystems auf zwei Einzelkräfte.

Ein Kräftesystem, das auf ein starres Punktsystem wirkt, läßt sich, wie bekannt, auf unendlich viele Arten durch zwei Einzelkräfte ersetzen, von welchen die eine ihren Angriffspunkt in einem beliebig gegebenen Punkte hat. Man kann fragen, 1) welches dabei der geometrische Ort für den Endpunkt jener Einzelkraft ist, wenn ihr Angriffspunkt fest bleibt, 2) wie sich mit der Lage dieses Angriffspunktes der genannte geometrische Ort ändert.

Diese Fragen sollen hier mit Hilfe Graßmannscher Methoden beantwortet werden.

Das gegebene Kräftesystem sei mit S bezeichnet. Der Angriffspunkt der ersten Einzelkraft heiße a, ihr Endpunkt p. Diese Kraft selbst — als „Linienteil" oder „Stab" aufgefaßt — ist also durch das äußere Produkt $[ap]$ dargestellt, wenn wir uns die Punkte a und p mit der Masse 1 versehen denken. Daher wird, wenn man die zweite Einzelkraft X nennt,

$$[ap] + X = S$$

oder

$$X = S - [ap]. \tag{1}$$

Damit X wirklich eine einzelne Kraft sei, muß das Eigenmoment von X (das äußere Produkt von X mit sich selbst) verschwinden, also, weil $[apap] = 0$ ist,

$$[XX] = [SS] - 2\,[Sap] = 0 \tag{2}$$

sein. Diese Gleichung ist in bezug auf p vom ersten Grade, stellt folglich eine Ebene dar, womit die erste Frage beantwortet ist.

Wir können übrigens die gefundene Gleichung in bezug auf a und p homogen machen, indem wir mit Graßmann die unendlich ferne Ebene ω einführen. Das äußere Produkt von ω mit irgend einem Punkte ist nämlich der Masse dieses Punktes gleich, also wird bei obiger Festsetzung über die Massen von a und p:

$$[\omega a] = 1,\ [\omega p] = 1, \tag{3}$$

und Gleichung (2) läßt sich schreiben

$$[SS]\,[\omega a]\,[\omega p] - 2\,[Sap] = 0. \tag{4}$$

Bezeichnen wir die durch letztere Gleichung dargestellte Ebene (den Ort von p bei festem a) mit α, so ist

$$0 = [\alpha p] = [SS]\,[\omega a]\,[\omega p] - 2\,[Sap],$$

folglich

(5) $$\alpha = [SS]\,[\omega a]\,\omega - 2\,[Sa].$$

Man sieht aus dieser Gleichung (wie auch schon aus (4) oder (2)), daß die Ebene α parallel zur Ebene $[Sa]$, d. h. zur Nullebene des Punktes a in bezug auf das durch das Kräftesystem S bestimmte Nullsystem ist, weshalb die Intensität der Einzelkraft $[ap]$ ein Minimum wird, wenn diese Kraft senkrecht auf der Nullebene von a steht.

Da nach Gleichung (5) die Ebene α eine lineare Funktion des Punktes a ist, so haben wir als Antwort auf die zweite Frage: Wenn a (der Angriffspunkt der ersten Einzelkraft) eine Gerade beschreibt, so dreht sich die Ebene α (der geometrische Ort des Endpunktes der ersten Einzelkraft) ebenfalls um eine Gerade, oder durch Zuordnung von a und α entsteht eine lineare reziproke Verwandtschaft (Korrelation). Untersuchen wir, ob diese Verwandtschaft involutorisch ist (ein Polarsystem bedingt) oder nicht. Sei b ein beliebiger Punkt, β die zugeordnete Ebene, dann ergibt sich durch äußere Multiplikation von (5) mit b:

$$[\alpha b] = [SS]\,[\omega a]\,[\omega b] - 2\,[Sab]$$

und hieraus durch Vertauschung von a mit b:

$$[\beta a] = [SS]\,[\omega b]\,[\omega a] - 2\,[Sba],$$

oder weil

$$[Sba] = -\,[Sab],$$

$$[\beta a] = [SS]\,[\omega a]\,[\omega b] + 2\,[Sab].$$

Demnach folgt aus

$$[\alpha b] = 0$$

nicht allgemein

$$[\beta a] = 0,$$

also hat man es mit keinem Polarsystem zu tun.[1])

Welches Verhalten die Wirkungslinie der zweiten Einzelkraft X zeigt, wenn a fest bleibt und p sich in α bewegt, ist zwar aus bekannten Sätzen

1) Die beiden Kernflächen dieser Korrelation arten aus. Denn der Ort der Punkte a, welche in ihren zugeordneten Ebenen α liegen, hat die Gleichung $[\alpha a] = 0$, d. h. nach (5)

$$[SS]\,[\omega a]^2 = 0$$

oder weil $[SS]$ von Null verschieden ist,

$$[\omega a]^2 = 0,$$

welche Gleichung die doppelt zu denkende unendlich ferne Ebene darstellt. Ist aber $[\omega a] = 0$, so wird

$$\alpha = -\,2\,[Sa],$$

d. h. α fällt mit der Nullebene von a zusammen, die Nullebenen aller unendlich fernen Punkte bilden jedoch einen Ebenenbündel mit dem Nullpunkt der unendlich fernen Ebene als Mittelpunkt, in welchen Bündel demnach die zweite Kernfläche ausartet.

über Nullsysteme leicht zu erschließen, möge aber der Vollständigkeit wegen hier noch aus den obigen Gleichungen abgeleitet werden. X muß (wie bekannt) immer in einer bestimmten Ebene, der Nullebene $[Sa]$ von a liegen, denn durch äußere Multiplikation von (1) mit a erhält man $[Xa] = [Sa]$, welche Gleichung aussagt, daß die Verbindungsebene von X und a mit der festen Ebene $[Sa]$ zusammenfällt. Da zufolge (1) die Gerade X von dem Punkte p linear abhängt, so entsteht durch Zuordnung von X und p eine lineare reziproke Verwandtschaft zwischen den Ebenen $[Sa]$ und α. Diese Korrelation kann nicht etwa in der Weise ausarten, daß die Linie von X immer durch einen und denselben Punkt a' von $[Sa]$ geht, denn sonst hätte man $[Xa'] = 0$, oder wegen (1)

$$[apa'] = [Sa'],$$

es fiele also die Verbindungsebene $[apa']$ des in der Ebene α beweglichen Punktes p und der beiden festen Punkte a und a' fortwährend mit der festen Ebene $[Sa']$, der Nullebene von a' in dem durch S bestimmten Nullsystem zusammen. Das ist (für einen im Endlichen liegenden Punkt a) nicht möglich, weil sonst α durch a gehen, d. h. $[\alpha a] = 0$ sein und mithin wegen (5) das Eigenmoment $[SS]$ des Kräftesystems S verschwinden oder dieses Kräftesystem in ein solches ausarten müßte, das auf eine einzige Kraft reduziert werden kann.

Stuttgart. R. Mehmke.

Aussprüche über sexagesimale Winkelteilung und über Rechenmaschinen.

Lesefrüchte aus den Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens von H. Bruns.[1])

(Einleitung, S. 2.) Stevin — einer der Erfinder der Dezimalbrüche — hat seinerzeit, in klarer Erkenntnis der Wichtigkeit des Gegenstandes, die Forderung erhoben, daß entsprechend der streng dezimalen Anlage der Rechnung fortan auch die Maßgrößen dezimal abzustufen seien, wenn anders die neu erfundene Rechnungsart ihren vollen Wert entfalten solle. Leider ist die Rechentechnik auch heute noch recht weit davon entfernt, den aus einer Erfüllung der genannten Forderung fließenden Gewinn einheimsen zu können. Denn selbst auf rein wissenschaftlichem Gebiete, wo man noch am ehesten das Durchdringen einer solchen Neuerung erwarten sollte, behauptet sich z. B. in der *Winkelteilung ein atavistischer Rest der alten Sexagesimalteilung, die doch nur in einer früheren, unvollkommeneren Entwickelungsphase der Rechentechnik einen vernünftigen Sinn besaß. Dies ist um so mehr zu bedauern, als solche Rudimente früherer Bildungen ein ernsthaftes Hindernis sind, den massenhaften Ziffernverbrauch, der schon jetzt mit seiner routinemäßigen Öde in drückender Weise auf einzelnen rechnenden Wissenschaften lastet, auf besondere Rechenmaschinen abzuwälzen, die eigens für gewisse, massenhaft auftretende Operationen konstruiert sind.*

(S. 7.) Einige von den Wissenschaften, die mit einem starken Ziffernverbrauch belastet sind, wie z. B. die Fixstern-Astronomie, stehen — falls

1) Leipzig 1903, B. G. Teubner.

sie ihre Probleme mit Erfolg bewältigen wollen — vor der Notwendigkeit, über kurz oder lang zu einem zentralisierten Großbetriebe überzugehen, bei dem bestimmte zusammengesetzte Rechenoperationen hunderttausend- und millionenfach auszuführen sind. Daß hierbei die Maschine, und zwar die jedesmal für eine einzige bestimmte Aufgabe möglichst vollkommen durchgebildete Maschine, der unentbehrliche Helfer sein wird, steht meiner Überzeugung nach außer Frage. *Es besitzt übrigens ein gewisses psychologisches Interesse, zu beobachten, wie auf der einen Seite z. B. bei der Ausrüstung einer Sternwarte für ein neues Instrument ansehnliche Summen verausgabt und dabei nach Möglichkeit die Fortschritte der Technik herangezogen werden, wie man aber auf der anderen Seite vorläufig gar nicht daran denkt, ob die Technik, die so sinnreiche Apparate wie die Schreibmaschine und die Kontrollkasse geschaffen hat, nicht etwa auch für die Rechenarbeit, welche zeitlich bemessen ein Vielfaches der Beobachtungsarbeit ausmacht, hilfreiche Dienste leisten könnte.*

Auskünfte.

V. V., A. Das *Spiegellineal* nach Prof. Reusch zur mechanischen Bestimmung der Normalen gezeichnet gegebener Kurven kann, aus Glas in einer Länge hergestellt, die für gewöhnliche Zwecke genügt, von Hofoptiker E. Spindler, Stuttgart, Langestraße 17, bezogen werden. M.

Fr. S., Sz. Eine Darstellung des *absoluten Maßsystems* mit Angabe der Quellen finden Sie in dem von C. Runge verfaßten Abschnitt über Maß und Messen in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band V 1, Heft 1, S. 19 u. f. M.

Bücherschau.

P. Harzer. Über die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen. Mit einem Anhange unter Mithilfe von F. Ristenpart und W. Ebert berechneter Tafeln. Publ. der Sternw. in Kiel. XI. 4⁰. 106 S. u. 22 S. Tafeln. Leipzig 1901.

Nach Anlage und Durchführung bietet die schöne und wichtige Arbeit Harzers, die auf einem der bedeutsamsten Gebiete der theorischen Astronomie Neues schafft, ebensowohl dem Mathematiker wie jedem Astronomen hohes Interesse.

Das Problem der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen läuft in der Fassung, wie es bei der Bahnberechnung auftritt, auf die Ermittelung von 11 Unbekannten hinaus, denen 11 Gleichungen gegenüberstehen. Natürlich muß man zur Lösung einen indirekten Weg einschlagen, und die Art dieses Weges ist es, die den Unterschied der einzelnen Methoden ausmacht. Durch eine erste Näherung, die wie alle ersten Bahnbestimmungen kurze Zwischenzeiten voraussetzt, reduziert sich die Aufgabe auf drei Gleichungen mit drei

Unbekannten, die bei Harzer die drei den drei geozentrischen Beobachtungen entsprechenden heliozentrischen Distanzen sind. Übersichtlich setzt der Verfasser den Grundgedanken der Näherung nach Gauß, Encke, v. Oppolzer und Gibbs auseinander und weist analytisch und numerisch das Übergewicht der Gibbsschen Darstellung der Ausgangsfunktion nach. Er führt aber nun aus, daß gleich von vornherein die Annäherung sich noch weiter treiben lasse, so weit, daß die Hypothesen der früheren Methoden fortfallen und sogleich die wahren Werte der drei heliozentrischen Distanzen hervorgehen. Nachdem diese bekannt, ist die Ableitung der übrigen Bahnelemente ein Kleines. In einem zweiten Abschnitt werden nun die dem Zwecke einer weitergehenden Annäherung dienenden Reihenentwickelungen vorgenommen, die die Verhältnisse der Dreiecksflächen als Funktionen der heliozentrischen Entfernungen geben. Die Art des Konvergenzbeweises scheint uns von einer Bedeutung zu sein, die über den Rahmen der Arbeit hinausgeht.

Den bei ersten Bahnrechnungen fast nur in Frage kommenden Fall dreier Beobachtungen mit kleinen Zwischenzeiten und folglich auch geringen heliozentrischen Bewegungen behandelt das dritte Kapitel, wobei es sich als zweckmäßig herausstellt, den durch eine Reihenentwicklung ausgedrückten Parameter der Bahnellipse neben den drei heliozentrischen Radienvektoren mitzubestimmen. Während aber vielleicht die hier vorgetragene Methode noch keinen in die Augen springenden praktischen Gewinn gegenüber andern Verfahren darbietet, ergibt sich ein solcher unzweifelhaft für Beobachtungen, die um große Zwischenzeiten voneinander abliegen, wenn es also die Verbesserung einer schon genähert bekannten Bahn nach drei Beobachtungen gilt (Kap. IV). Reihenentwicklung verbietet hier die Länge der Zwischenzeiten, die selbst den Fall durch ganze Umläufe des Planeten getrennter Beobachtungen einschließen. Die Auswertung der Koeffizienten der linearen Gleichungen, die die Korrektion der zu Grunde gelegten geozentrischen Abstände liefern, ist sowohl für kleine Exzentrizitäten (Planetenbahnen) als auch für große um Eins herum gelegene (Kometenbahnen) durchgeführt. Eine Untersuchung über die Einwirkung von Fehlern in den geozentrischen Beobachtungen auf die Beträge der Unbekannten (i. e. heliozentrische Distanzen und Elemente) (Kap. V.) findet sich hier wohl zum erstenmal in einer für die praktische Verwendung völlig hinreichenden und einfachen Weise. Das Schlußkapitel des Werkes, betitelt „Beispiele“, bietet an Hand der klassischen Beispiele der Theoria motus und eines einer modernen Kometenbahn entnommenen eine eingehende Rekapitulation der vorgetragenen Methode und enthält zahlreiche wertvolle Winke. — Ein Anhang vereinigt mehrere Hilfstafeln für die Funktionen, die bei der Anwendung jener Methode auftreten.

Sehr bald nach ihrer Veröffentlichung hat sich Harzers Bahnbestimmung Eingang in die Praxis verschafft: schon jetzt sind mehrfach Planeten- und noch mehr Kometenbahnberechnungen nach ihren Regeln durchgeführt worden.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

H. Andoyer, Théorie de la lune. 8°. 86 S. Paris 1902.

Dieses Buch, das die Nr. 17 der bei C. Naud erscheinenden Kollektion „Scientia“ bildet, setzt es sich zum Ziel, nur unter Benutzung der einfacheren Hilfsmittel aus der Differential- und Integralrechnung analytisch die Bewegung des Mondschwerpunktes in bezug auf den Erdschwerpunkt zu lehren. Das

Hauptgebiet der Theorie findet eine geschlossene Darstellung, dagegen wird von vorneherein auf die numerische Bestimmung der in der Mondtheorie auftretenden Glieder verzichtet. Recht eingehend behandelt Kapitel II und III den Einfluß der Sonne auf die Bewegung des Mondes, allerdings — und das lag im Wesen der gestellten Aufgabe — nicht soweit, daß die Genauigkeit der Entwickelung einigermaßen jener der Beobachtung gleichkäme. Jedenfalls genügt es indes, um die Art der Schwierigkeiten, auf die man stößt, aufzudecken und zu zeigen, wie man sie überwindet. Strebt man aber eine Mondtheorie von höchstmöglicher praktischer Präzision an, so muß man ohnehin den rein analytischen Weg verlassen und mit Hansen, Hill, Brown rein numerisch das Problem anfassen. Kapitel IV und V befaßt sich mit den Gliedern zweiter Ordnung in der Bewegung des Mondes, die teils der Wirkung der Planeten, teils der Gestalt von Erde und Mond ihren Ursprung verdanken, und das VI. Kapitel berührt noch kurz die Einwirkung der säkularen Ungleichheiten im Sonnenlauf auf die Bewegung des Mondes.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

L. Dünner, Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Aus zwei Manuskripten der Nationalbibliothek in Paris, bezeichnet: Fonds hébreu Nr. 1058 und Nr. 1061. Ein Beitrag zur Geschichte der Astronomie. 8⁰. 54 S. Würzburg 1902.

Dem bekannten jüdischen Gelehrten Rabbi Mose ben Maimun, gewöhnlich Maimonides genannt (* Cordoba 1135 März 30, † Alt-Kairo 1204 Dezember 13), verdanken wir u. a. eine Schrift Qidusch Hachodesch (Heiligung des Neumonds), in welcher er streng wissenschaftlich die Grundlagen des jüdischen Kalenders behandelt. Als kurzer Auszug aus jener größeren Arbeit kann nun eine Reihe von Kapiteln gelten, die Maimonides in jungen Jahren (1158) in Briefform einem Freunde zukommen ließ und in denen er die Regeln über die Berechnung des Neumonds (Molad) und des Beginnes der Jahreszeiten (Tekufoth) gemeinverständlich niederlegt. Diese Briefsammlung findet sich in den beiden im Titel bezeichneten MS. der Pariser Nationalbibliothek. Die Handschriften sind in neuhebräischer Schrift abgefaßt und bereits in den Jahren 1849 und 1859 veröffentlicht. Herr Dünner gibt zum ersten mal die deutsche Übersetzung, der er einige einleitende Worte und viele kritische Anmerkungen beifügt. Die 11 Hilfstafeln des Maimonides sind mit abgedruckt; die zweite, die sich im MS. nicht mehr vorfand, hat der Herausgeber neu berechnet. Der oben erwähnten großen Arbeit Qidusch Hachodesch fügt die hier veröffentlichte „Abhandlung über die Wissenschaft der Kalenderlehre" nichts Neues hinzu, und da jene größere Schrift des Maimonides schon mehrfach von Historikern und Astronomen besprochen worden, kann hier auf eine nähere Inhaltsangabe der „Wissenschaft der Kalenderlehre" verzichtet werden.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

I. H. Lamberts Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen. Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von I. Bauschinger. 16⁰. 149 S. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 133). Leipzig 1902.

Der Herausgeber hat sich das Verdienst erworben, die Leistungen I. H. Lamberts (1728—1777) auf dem Gebiete der Kometenbahnberechnung in einem modernen Gewande leicht zugänglich gemacht und so dem elsässischen Gelehrten zu seinem historischen Recht verholfen zu haben. Der Hauptsache nach sind es zwei Abhandlungen Lamberts, die hier in ausgezeichneter Übersetzung vorliegen: „Insigniores orbitae Cometarum proprietates" (1761) und „Observations sur l'Orbite apparente des Comètes" (1771), und diesen folgen dann in den Anmerkungen Auszüge aus anderen Schriften Lamberts, die sich auf unseren Gegenstand beziehen. In jenen Anmerkungen gibt ferner der Herausgeber eine kurzgefaßte übersichtliche Darstellung der Geschichte der Bahnbestimmung der Kometen und hebt eben dort die großen Verdienste Lamberts um dieses Problem klar hervor. Die Olbersche Methode, die heutigen Tages über alle anderen Vorschläge den Sieg davongetragen, unterscheidet sich, abgesehen von einem Punkte, der zur Kürzung der Rechnung beiträgt, kaum von der Lambertschen.

Schließlich sei hier noch hingewiesen auf eine aufs engste mit dem Thema verknüpfte interessante Arbeit des Herausgebers: „Über die Lambertsche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen (Veröff. d. Kgl. astron. Recheninst. zu Berlin, Nr. 20), die sich eingehend mit der Frage der Identität der Lambertschen und Olberschen Methode beschäftigt und nachweist, „daß Lambert alle prinzipiellen Grundlagen der heute gebräuchlichsten, indirekten Bahnbestimmungsmethode der Kometen geschaffen hat und daß diese daher seinen Namen mit größerem Rechte zu tragen hätte, als den von Du Sejour und Olbers, wodurch des letzteren Verdienst, die Methode in ihrer einfachsten Form dargestellt und allgemein eingeführt zu haben, keineswegs geschmälert wird."

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

F. Hayn, Selenographische Koordinaten. I. Abhandlung. Abh. d. math.-ph. Kl. d. K. S. Ges. d. Wiss. XXVII. Bd, Nr. IX. 8⁰. 61 S. Leipzig 1902.

Die Abhandlung bildet die theoretische Vorarbeit zu einer vom Verfasser am 30 cm-Refraktor der Leipziger Sternwarte ausgeführten Beobachtungsreihe zur Bestimmung der selenographischen Lage einer größeren Anzahl von Punkten der Mondoberfläche. Die vorteilhafte Wahl der Gestalt des Hauptnetzes ermöglichte nun aber außerdem eine unabhängige Bestimmung der Rotationselemente des Mondes. Vor der Berechnung unterwarf indes der Verfasser die mathematische Behandlung der Monddrehung einer Revision, deren Ergebnis den Inhalt dieser Schrift bildet. Frühere Bearbeitungen beschränkten sich bei der Integration der Bewegungsgleichungen auf die erste Näherung und unterließen den Nachweis der verschwindenden Kleinheit der höheren Glieder. Es sollen hier nun die Untersuchungen so weit geführt werden, daß die Genauigkeitsgrenze selenozentrisch 2", geozentrisch aber 0".01 beträgt. Das entspricht der bei analogen irdischen Vorgängen festgehaltenen

Schärfe. Im Gegensatze zu früheren Bestrebungen, die die physische Mondlibration mehr geometrisch anschaulich geschlossen darzustellen suchten, will Verfasser sein Ziel nur auf dem Wege numerischer Durchrechnung erreichen. In den ersten vier Kapiteln wird von der direkten Anziehungswirkung der Sonne auf die Rotationsbewegung des Mondes abgesehen, der man von vorneherein einen sehr geringen Einfluß zuschreiben darf, und in der Tat lehrt dann das fünfte Kapitel, daß die einzig bemerkbare Wirkung der Sonnenanziehung auf das rotierende Mondellipsoid darin besteht, daß hierdurch die mittlere Neigung des Mondäquators um ein geringes sich anders ergibt, als wenn die Erde allein wirkt. Bei der Berechnung der physischen Libration darf der Einfluß der Sonne vernachlässigt werden.

Wenn auch das Endresultat der schönen und interessanten Arbeit darauf hinausläuft, „daß schließlich vielleicht die bisherigen Entwickelungen dem praktischen Bedürfnis genügen können," so wird man doch dem Verfasser durchaus beistimmen, „daß es jedenfalls ein wissenschaftliches Interesse hat, über die Rotationsverhältnisse des Mondes bis zu einem gewissen Grade genau unterrichtet zu sein; außerdem entspricht es den Gepflogenheiten der Astronomie, die Unsicherheiten der Beobachtungen nicht durch Ungenauigkeit der Rechnung zu vergrößern."

Der Veröffentlichung des II. Teiles, der wohl die Bestimmung der Rotationselemente des Mondes aus den Leipziger Beobachtungen bringen wird, sehen wir mit Interesse entgegen.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Neue Bücher.

Analysis.

1. Bruns, Heinrich, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. 8°. VI u. 159 S. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 4.

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

2. Mooser, J., Theorie der Entstehung des Sonnensystems. Eine mathem. Behandlung der Kant-Laplace'schen Nebularhypothese. gr. 8°. 30 S. St. Gallen, Fehr. M. 1.20.
3. Stebbins, F. C., Navigation and nautical astronomy. 8vo. pp. 352. London, Macmillan. 8 s. 6 d.

S. auch Nr. 28.

Darstellende Geometrie.

4. Enblom, R. S., Perspektivisch quadrierte Kartons. 2. verb. Aufl. 3 Bl. je 55,5 × 40 cm. Lith. Nebst Anleitung zum Gebrauch. 8°, 6 S. m. 2 Fig. Stuttgart, Wittwer. M. 3.

Geschichte.

5. Erményi, Dr. Josef Petzvals Leben u. Verdienste. 2., wesentlich verm. Ausg. m. 11. Bildern u. 2 Fig. gr. 8°, VIII u. 86 S. Halle, Knapp. M. 2.40.

Mechanik.

6. Cavalli, Ernesto, Avviamento allo studio della meccanica: elementi di cinematica teorica. 2ª ediz. 8°. p. 91 & 4 tav. Napoli. L. 4.
7. Encyklopädie d. mathemat. Wissenschaften. IV. Bd. 1. Tl. 3. Heft. Leipzig, Teubner. M. 4.60.
8. Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. II. Band. Graphische Statik. 2. Aufl. 8°, XII u. 471 S. m. 176 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 10.
9. Locht-Labaye, Léon de et Legrand, Laurent, Cours de graphostatique pure. In-4° avec fig. Liège, Cluck. Frs. 12.
10. Maggi, Gian Antonio, Principî di stereodinamica: corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi. 8°, p. 275. Milano. L. 7 50.
11. Wernicke, Ad., Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Anwendungen und Übungen aus den Gebieten der Physik und Technik. (In 2 Teilen.) I. Teil: Mechanik fester Körper. Von Alex. Wernicke. 4. völlig umgearbeitete Aufl. 3. (Schluß-)Abteilung: Statik und Kinetik elastisch-fester Körper (Lehre von der Elastizität u. Festigkeit). Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10; geb. M. 11.

Physik.

12. Brown, Theodore, Stereoscopic phenomena of light and sight. Cr. 8vo. pp. 100. London, Guttenberg press. 3 s. 6 d.
13. Christiansen, C., und Müller, J. C., Elemente der theoretischen Physik. 2. verb. Aufl. 8°, VIII u. 532 S. m. 160 Fig. Leipzig, Barth. M. 10; geb. M. 11.
14. Donle, Wilhelm, Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen u. Realgymnasien. 2. verm. u. verbess. Aufl. gr. 8°, X u. 380 S. m. 420 Abb. u. 560 Übungsaufgaben. Stuttgart, Grub. geb. M. 3.60.
15. Ites, Petrus, Über die Abhängigkeit der Absorption des Lichtes v. der Farbe in kristallisierten Körpern. Gekrönte Preisschrift. Diss. gr. 8°, 82 S. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.
16. Kerntler, Franz, Das Ampèresche elektrodynamische Elementarpotential. 8°, 17 S. Budapest, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft.
17. Kollert, Julius, Katechismus der Physik. 6. verbesserte u. vermehrte Aufl. 8°, XV u. 593 S. m. 364 Fig. Leipzig, Weber. geb. in Leinw. M. 7.
18. Nordmann, Charles, Essai sur le rôle des hertziennes en astronomie physique et sur diverses questions qui s'y rattachent (thèse). In-4°, avec 16 fig. Paris Gauthiers-Villars. Frs. 6.
19. Quesneville, M. G., Théorie nouvelle de la polarisation rotatoire. In-8° avec fig. Paris, Hermann. Frs. 4.
20. Sklodowska-Curie, Mme, Recherches sur les substances radio-actives (thèse). In-8°, avec fig. Paris, Gauthiers-Villars. Frs. 4.
21. Steinmetz, Charles Proteus, Theoretische Grundlagen der Starkstrom-Technik. Übers. v. J. Hefty. gr. 8°, XI u. 331 S. m. 143 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 9; geb. in Leinw. M. 10.
22. Steinmetz, Charles Proteus, Théorie et calcul des phénomènes du courant alternatif. Traduit sur la 3e édition américaine, revue et augmentée par Henri Mouzet. Gr. in-8° avec 210 fig. Paris, Vve Dunod. Frs. 20.
23. Tammann, Gustav, Kristallisieren und Schmelzen. Ein Beitrag zur Lehre der Änderungen des Aggregatzustandes. 8°, X u. 348 S. m. 38. Abb. Leipzig, Barth. M. 8; geb. M. 9.
24. Tetmajer, L. v., Die Gesetze der Knickungs- u. der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. 3. vervollständ. Aufl. gr. 8°, VIII u. 211 S. m. 19 Abb. u. 6 Taf. Wien, Deuticke. M. 8.

Rechenmaschinen, Tafeln.

25. Bouvart, C., et Ratinet, A., Nouvelles tables de logarithmes à 5 décimales conformes à l'arrêté ministeriel du 3 août 1901. Edition simple, division centésimale. In-8°, Paris, Hachette. Cart. Frs. 2.
26. — —, Les mêmes tables, édition double. Division centésimale et division sexagésimale. Cart. Frs. 2.50.
27. Burkitt, F. G., Tables of logarithms and decimals adapted to business and statistical calculations. 8vo. London, Simpkin. 1 s.
28. Koll, Otto, Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine. gr. 8°, IV u. 81 S. m. in den Text gedruckten Figuren. Halle a. S., Strien. geb. M. 5.

Verschiedenes.

29. Auerbach, Felix, Das Zeißwerk und die Karl-Zeiß-Stiftung in Jena, ihre wissenschaftliche, technische u. soziale Entwicklung und Bedeutung für weitere Kreise dargestellt. 8°, IV u. 124 S. m. 78 Abb. Jena, Fischer.
30. Biel, B., Mathematische Aufgaben f. d. höheren Lehranstalten, unter möglichster Berücksichtigung der Anwendungen, wie überhaupt der Verknüpfung der Mathematik m. anderen Gebieten zusammengestellt. Ausg. f. Gymnasien. 1. Tl.: Die Unterstufe. gr. 8°, VI u. 161 S. Leipzig, Freytag. geb. in Leinw. M. 2.50.
31. Fuhrmann, Arwed, Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung. Lehrbuch, Aufgabensammlung und Literaturnachweis. (Teil IV der „Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik".) gr. 8°, XIII u. 292 S. m. 83 Holzschnitten. Berlin, Ernst & Sohn. M. 9, geb. in Leinw. M. 10.
32. Intermediate Science. Applied mathematics papers. Being the questions set at the University of London from 1887 to 1903. (University Tutorial series.) Cr. 8vo, sd., pp. 58. London, Clive. 2 s. 6 d.
33. Kübler, J., Die Proportion des goldenen Schnitts als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. 8°, 36 S. m. 15 Fig. auf 4 Taf. Leipzig, Teubner. M. 1.60.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Blochmann, Rudolf, Die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage. gr. 8°, 24 S. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. —.60.

Bruns, H., Wissenschaftliches Rechnen, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 1.

Christiansen, C. u. Müller, J. C., Elemente der theoretischen Physik, s. N. B. 13.

Dassen, Claro Cornelio, Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions. Paris, Hermann. Frs. 5.

Donle, W., Lehrbuch der Experimentalphysik, s. N. B. 14.

Enriques, Federigo, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Hermann Fleischer. Mit einem Einführungswort von Felix Klein. Leipzig Teubner. M. 8; geb. in Leinw. M. 9.

Erményi, Dr. Josef Petzvals Leben u. Verdienste, s. N. B. 5.

Föppl, A., Graphische Statik, s. N. B. 8.

Fuhrmann, A., Bauwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechnung, s. N. B. 31.

Glinzer, E., Kurzgefaßtes Lehrbuch der Baustoffkunde nebst einem Abriß der Chemie. Zum Selbstunterricht für Studierende, Baubeflissene, Maurer- und Zimmermeister sowie besonders als Leitfaden für den Unterricht an Baugewerkschulen. 3, verm. u. verb. Aufl. Dresden, Kühtmann. M. 4; geb. M. 4.20.

Green, George, Mathematical papers. Edited by N. M. Ferrers. Fac-similé reprint. Paris, Hermann. Frs. 20.

Kerntler, Fr., Das Ampèresche elektrodynamische Elementarpotential, s. N. B. 16.

Koll, O., Geodätische Rechnungen mittels der Rechenmaschine, s. N. B. 28.

Kollert, J., Katechismus der Physik, s. N. B. 17.

Kommerell, V. und Kommerell, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. I. Band. (Sammlung Schubert XXIX.) Leipzig, Göschen. geb. M. 4.80.

—, Dasselbe. II. Band. (Sammlung Schubert XLIV.) Ebenda. geb. M 5.80.

Kübler, J., Die Proportion des goldenen Schnitts, s. N. B. 33.

Kühl, J. H., Grundriss der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht. II. Stereometrie. 2. verm. Aufl. bearb. v. A. Kasten. Dresden, Kühtmann. M. 1.80; geb. M. 2.

Lamé, G., Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géometrie. Réimpression fac-similé. Paris, Hermann. Frs. 5.

Ostmann, Paul, Ein objektives Hörmaß und seine Anwendung. gr. 8°, 75 S. m. 9 Kurventafeln. Wiesbaden, Bergmann. M. 5.

Portig, Gustav, Die Grundzüge der monistischen und dualistischen Weltanschauung unter Berücksichtigung des neuesten Standes der Naturwissenschaft. (Sonderabdruck aus dem II. Band von „Das Weltgesetz des kleinsten Kraftaufwandes in den Reichen der Natur und des Geistes".) Stuttgart 1904, Kielmann. M. 2; geb. M. 3.

Rosén, Karl, D. P., Studien und Messungen an einem Dreipendelapparate. Stockholm, Centraltryckeriet.

Schlotke, J., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Dresden, Kühtmann. M. 7.80; geb. M. 8.50.

Schubert, Hermann, Elementare Berechnung der Logarithmen, eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher. 8°, 87 S. Leipzig, Göschen. M. 1.60.

—, —, Niedere Analysis. II. Teil. Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen. (Sammlung Schubert XLV.) Leipzig, Göschen. geb. M. 3.80.

Sohncke, L., A., Sammlung von Aufgaben aus der Differential- u. Integralrechnung. I. Teil: Differentialrechnung. Hrsg. v. Hermann Amstein. 6. verbess. Aufl. bearb. v. Martin Lindow. 8°, VIII u. 304 S. m. 124 Fig. Halle a. S., Schmidt. M. 5.

Tammann, G., Kristallisieren und Schmelzen, s. N. B. 23.

Weber, Heinrich und Wellstein, Josef, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearb. v. Heinrich Weber. Leipzig, Teubnur. geb. in Leinw. M. 8.

Weighardt, E., Mathematische Geographie. Leitfaden für den Unterricht in der Obertertia der Mittelschulen. 2. verb. u. verm. Aufl. Bühl (Baden) 1902, Konkordia. M. —.60.

Wernicke, A., Lehrbuch der Mechanik, III. (Schluß-) Abteilung, s. N. B. 11.

Beitrag zur Geometrie der Bewegung ebener Getriebe.

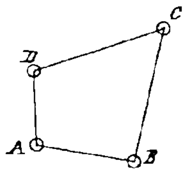
Von Otto Mohr in Dresden.

An den technischen Hochschulen fehlt es in den Vorlesungen über Geometrie und Elementarmechanik in der Regel an Zeit, um die geometrischen Eigenschaften der Bewegung starrer Körper und zwangläufiger Körperverbindungen so eingehend zu behandeln, wie die Wichtigkeit des Gegenstandes und die sehr zahlreichen Anwendungen in allen Teilen der technischen Mechanik es wünschenswert erscheinen lassen. Durch Selbststudium nachzuhelfen, wird dem Anfänger nicht leicht, weil die betreffenden Lehrbücher und Abhandlungen seinen Bedürfnissen nur wenig angepaßt sind. In der nachfolgenden Mitteilung habe ich daher versucht, den wichtigsten Teil dieses Gebietes, die Bewegung ebener Getriebe, mit den einfachsten Hilfsmitteln und in einer für das Selbststudium geeigneten Form darzustellen.

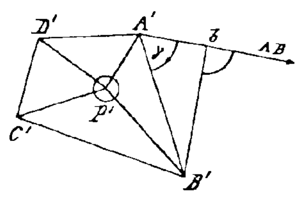
Meine Absicht, die Ergebnisse auch auf die *Kinetik* der Getriebe anzuwenden, mußte ich fallen lassen, um den Umfang der Arbeit nicht übermäßig auszudehnen. Ich behalte mir vor, diesen Gegenstand in einem besonderen Aufsatze zu behandeln.

1. *Der Geschwindigkeitsplan einer ebenen Punktgruppe.* — Wir betrachten während eines unendlich kleinen Zeitabschnittes eine Gruppe von Punkten $A, B, C, D \ldots$, die in einer Ebene sich bewegen, und deren augenblickliche Lage durch den *Lageplan* Fig. 1 in dem Maßstabe 1 cm gleich μ cm angegeben wird. Die Geschwindigkeiten der Punkte

L. Fig. 1.



G. Fig. 2.



während jenes Zeitabschnittes sollen in einer besonderen Zeichnung, dem *Geschwindigkeitsplan* Fig. 2, durch die Strecken $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ ... nach Größe, Richtung und Sinn und zwar in dem Maßstabe 1 cm gleich μ' cm $\cdot$ sec^{-1} dargestellt werden. In den Abbildungen tragen die

Lagepläne, die Geschwindigkeitspläne und die Beschleunigungspläne die abgekürzten Bezeichnungen L, G und B. Der gemeinschaftliche Anfangspunkt P' aller Geschwindigkeitsstrecken heißt der *Pol* des Geschwindigkeitsplans. Die Geschwindigkeit $P'B'$ des Punktes B kann zusammengesetzt werden aus der Geschwindigkeit $P'A'$ des Punktes A und der von der Strecke $A'B'$ dargestellten *relativen* Geschwindigkeit des Punktes B gegen den Punkt A. Wir zerlegen ferner diese relative Geschwindigkeit in die beiden zur Strecke AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A'b$, bB' und erhalten hierdurch folgendes Bild von der Bewegung der zwei Punkte A, B: Beide Punkte bewegen sich mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $P'A'$, während B gleichzeitig noch zwei andere Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $A'b$, bB' ausführt. Infolge der Geschwindigkeit $A'b$ ändert sich die *Länge* der Strecke AB und zwar in positivem oder in negativem Sinne, je nachdem die beiden Strecken AB, $A'b$ dem *Sinne* nach übereinstimmen oder einander entgegengesetzt sind. Die Strecke $A'b$ bestimmt sonach die *relative Dehnungsgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A. Das Verhältnis der Geschwindigkeit $A'b$ zur Länge AB, also die Größe

$$\delta = \frac{A'b}{AB}\frac{\mu'}{\mu}\sec^{-1}$$

heißt die *Dehnungsgeschwindigkeit der Strecke AB*. Sie gibt an, um welchen Bruchteil diese Strecke in einer Sekunde ihre Länge verändert. Es empfiehlt sich, das Verhältnis μ' zu μ gleich einer runden Zahl zu wählen. Im folgenden soll, wenn nichts anderes angegeben wird, stets μ' gleich μ angenommen werden, sodaß die Geschwindigkeit δ durch die Formel

$$(1) \qquad \delta = \frac{A'b}{AB}\sec^{-1}$$

bestimmt wird. Infolge der *dritten* von bB' dargestellten Geschwindigkeit des Punktes B ändert sich die *Richtung* der Strecke AB; wir nennen diese Komponente daher die *relative Drehgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A und das Verhältnis

$$(2) \qquad \omega = \frac{bB'}{AB}\sec^{-1}$$

die *Drehgeschwindigkeit der Strecke AB*. Um auch den *Sinn* der beiden Geschwindigkeiten δ, ω auf algebraischem Wege angeben zu können, wird es nötig, den von den beiden Strecken AB, $A'B'$ gebildeten Winkel γ in einer bestimmten Weise zu messen und zu bezeichnen: Der Winkel γ, den ein Strahl im Sinne der Uhrzeigerdrehung, dem *positiven* Drehungssinne, zu durchlaufen hat, um von der Richtung AB

nach der Richtung $A'B'$ zu gelangen, soll der *Geschwindigkeitswinkel* der Strecke AB genannt und mit $(AB, A'B')$ bezeichnet werden. Bei dieser Bezeichnung kommt nicht allein die Aufeinanderfolge der Buchstaben, durch die der *Streckensinn* angegeben wird, sondern auch die Reihenfolge der Strecken in Betracht; z. B. ist

$$(A'B', AB) = 360^0 - (AB, A'B')$$
$$(BA, B'A') = (AB, A'B').$$

Mit Benutzung dieser Regel, die bei allen Winkelbezeichnungen angewandt werden soll, ergeben sich die Geschwindigkeiten δ, ω nicht nur der Größe, sondern auch dem Sinne nach durch die Formeln:

$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma \tag{3}$$

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma. \tag{4}$$

Denn man ersieht ohne weiteres, daß AB sich *verlängert*, wenn $\cos \gamma$ positiv ist, und daß AB im *positiven* Sinne der Uhrzeigerbewegung sich dreht, wenn $\sin \gamma$ das positive Vorzeichen trägt.

2. *Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe,* Fig. 3 und 4. Wenn die bewegten Punkte A, B, C, D ... starr miteinander verbunden sind, so bleiben die Winkel zwischen den Strecken AB, BC, CA ... unverändert. Daher sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken nach Größe und Sinn einander gleich. Die Dehnungsgeschwindigkeit einer jeden Strecke ist ihrer Starrheit wegen gleich Null. Folglich sind die Geschwindigkeitswinkel aller Strecken gleich groß und zwar entweder alle gleich 90^0 oder gleich 270^0. Im ersten Falle hat die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit den *positiven* Sinn und die Größe

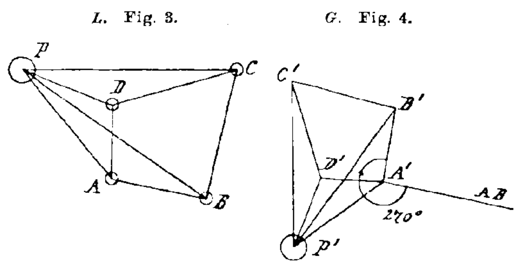


Fig. 3. Fig. 4.

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 90^0 = + \frac{A'B'}{AB} = + \frac{B'C'}{BC} = + \frac{A'C'}{AC} = \cdots$$

während sie im zweiten Falle den *negativen* Wert

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 270^0 = - \frac{A'B'}{AB} = - \frac{B'C'}{BC} = - \frac{A'C'}{AC} = \cdots$$

hat. Da diese Gleichungen für je zwei einander entsprechende Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gelten, so sind die beiden Punktgruppen

$ABCD \ldots$, $A'B'C'D' \ldots$ *geometrisch ähnlich und von gleichem Sinne*, was durch das Zeichen:

$$(5) \qquad A'B'C'D' \ldots \simeq ABCD \ldots$$

ausgedrückt werden soll. Dasselbe bringt also nicht nur die Ähnlichkeit der beiden Gruppen, sondern auch die Gleichheit der Geschwindigkeitswinkel zur Darstellung. In dem besonderen Falle, wenn die Drehgeschwindigkeit ω gleich Null ist, fallen alle Punkte $A'B'C' \ldots$ zusammen. Der Geschwindigkeitsplan besteht dann aus einer einzigen Strecke $P'A'$ und bestimmt eine *Parallelverschiebung* der Punktgruppe.

Der mit der Gruppe starr verbundene und durch die Bedingung:

$$PABC \ldots \simeq P'A'B'C' \ldots$$

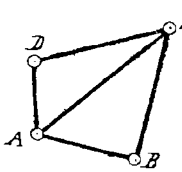
bestimmte Punkt P heißt der *Geschwindigkeitspol* des *Lageplans*. Von allen Punkten der mit der Gruppe starr verbundenen Ebene ABC ist P der einzige, dessen Geschwindigkeit im Zeitpunkt der Betrachtung gleich Null ist. Die Bewegung der starren Punktgruppe besteht also aus einer unendlich kleinen Drehung um den Pol P mit der Drehgeschwindigkeit ω. Die Geschwindigkeit v eines Punktes A der Gruppe wird bestimmt durch die beiden Bedingungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} v = \omega \; PA \\ (PA,\ v) = 90^0 \quad \text{oder} \quad = 270^0, \end{cases}$$

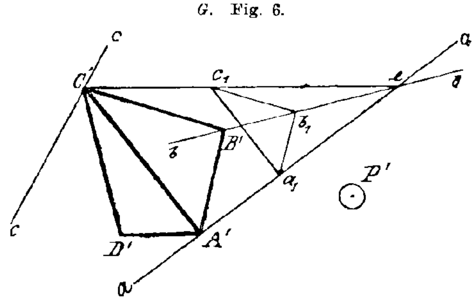
je nachdem ω positiv oder negativ ist.

Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe wird bestimmt durch die Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$ *zweier* Punkte A, B der

L. Fig. 5.



G. Fig. 6.



Gruppe. Diese beiden Geschwindigkeiten sind von einander abhängig durch die Bedingung, daß $A'B'$ normal zu AB gerichtet sein muß. Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol P' *drei* Gerade aa, bb, cc, Fig. 5 und 6, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die

Punkte A', B', C' liegen müssen. Läßt man die zwei Ecken a_1, b_1 des ähnlich-veränderlichen Dreiecks

$$a_1 b_1 c_1 \simeq ABC,$$

dessen Seiten $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 a_1$ zu den Geraden AB, BC, CA normal gerichtet sind, auf den Geraden aa, bb sich bewegen, so beschreibt die dritte Ecke c_1 die durch den Schnittpunkt e von aa und bb gehende Gerade $c_1 e$. Man bestimmt also C' durch den Schnitt der Geraden ec_1, cc, ferner einen zweiten Punkt A', indem man $C'A'$ normal zu CA zieht, und den übrigen Teil des Geschwindigkeitsplans durch die Bedingung

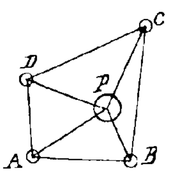
$$A'B'C'D' \ldots \simeq ABCD \ldots.$$

In dem besonderen Falle, wenn die beiden Geraden cc, $c_1 e$ zusammenfallen, wird der Plan unbestimmt.

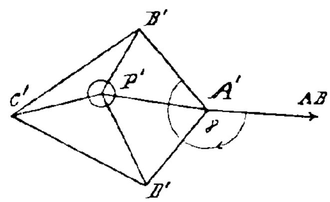
3. *Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe*, Fig. 7 und 8. Da die Winkel zwischen den Strecken AB, BC, $CA \ldots$ bei der *ähnlichen* Veränderung der Gruppe unverändert bleiben, so sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken gleich groß:

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma_1 = \frac{B'C'}{BC} \sin \gamma_2 = \frac{C'A'}{CA} \sin \gamma_3 = \cdots.$$

L. Ftg. 7.



G. Fig. 8.



Auch die Dehnungsgeschwindigkeiten aller Strecken sind infolge der ähnlichen Veränderung von gleicher Größe:

$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma_1 = \frac{B'C'}{BC} \cos \gamma_2 = \frac{C'A'}{CA} \cos \gamma_3 = \cdots.$$

Die Geschwindigkeitswinkel γ_1, γ_2, $\gamma_3 \ldots$ sind daher von gleicher Größe γ und durch die Bedingung

$$\frac{\omega}{\sin \gamma} = \frac{\delta}{\cos \gamma} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \cdots \tag{7}$$

bestimmt. Folglich ist wie bei einer starren Punktgruppe

$$A'B'C'D' \ldots \simeq ABCD \ldots \tag{8}$$

Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel γ kann jede Größe annehmen; er liegt

im ersten	Quadranten,	wenn	ω positiv	und	δ positiv	ist
„ zweiten	„	„	ω positiv	„	δ negativ	„
„ dritten	„	„	ω negativ	„	δ negativ	„
„ vierten	„	„	ω negativ	„	δ positiv	

ist. Zählt man alle Punkte der Ebene ABC zur ähnlich-veränderlichen Gruppe, so enthält dieselbe nur einen einzigen Punkt P, dessen augenblickliche Geschwindigkeit gleich Null ist. Dieser *Geschwindigkeitspol des Lageplans* ist wiederum bestimmt durch die Bedingung

$$PABC\ldots \simeq P'A'B'C'\ldots \tag{9}$$

Jede unendlich kleine Bewegung einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe besteht demnach aus dieser Veränderung in Verbindung mit einer gleichzeitigen unendlich kleinen Drehung um einen ruhenden Punkt P. Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel

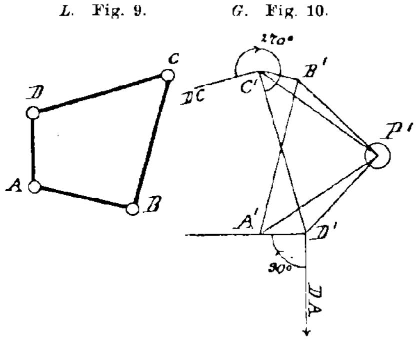
$$\gamma = (PA,\ P'A') = (PB,\ P'B') = (PC,\ P'C')\ldots$$

wird gleich Null oder 360°, wenn ω gleich Null ist, er wird gleich 90° oder 270° in dem besonderen Falle, wenn δ gleich Null ist.

Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe $ABC\ldots$ ist bestimmt durch die *voneinander unabhängigen* Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$ zweier Punkte A, B der Gruppe. Bleiben diese beiden Geschwindigkeiten unverändert, so ändern sich auch die Geschwindigkeiten der anderen Punkte nicht. Wenn also zwei Punkte einer ähnlich-veränderlichen Gruppe mit unveränderlichen Geschwindigkeiten in geraden Linien sich bewegen, so beschreibt auch jeder andere Punkt der Gruppe mit unveränderlicher Geschwindigkeit eine Gerade.

4. *Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons*, Fig. 9 und 10. AB, BC, $CD\ldots$ bezeichnen m starre Körper, die parallel zur Bildebene sich bewegen, in den Punkten A, B, $C\ldots$ durch Gelenke miteinander verbunden sind und eine geschlossene Kette bilden. Durch die Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$, $P'C'\ldots$ der Gelenke sind die Bewegungen der Körper vollständig bestimmt. Sie können also ersetzt werden durch starre Stäbe AB, BC, $CD\ldots$, und ein solches Körperpolygon soll daher ein *Stabpolygon* genannt werden. Die geometrische Beziehung des Geschwindigkeitsplans zum Lageplan besteht einfach darin, *daß jede Seite des geschlossenen m-Ecks $A'B'C'D'\ldots$ zu der entsprechenden Seite des m-Ecks $ABCD\ldots$ normal gerichtet sein muß.* Denn der Geschwindigkeitswinkel eines jeden starren Stabes ist entweder gleich 90° oder gleich 270°. Für die folgenden Anwendungen dieser Beziehung kommt nur der einfachste Fall inbetracht, in dem alle

L. Fig. 9. G. Fig. 10.



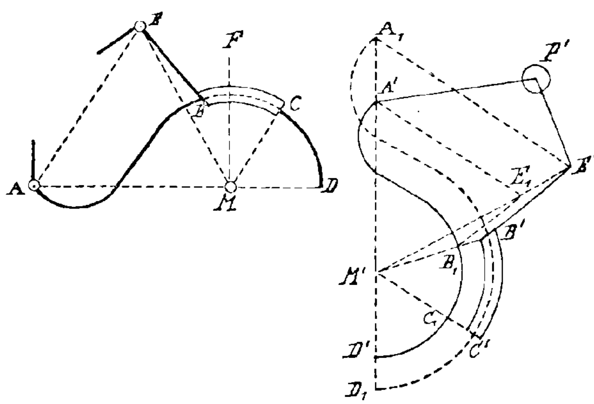
Ecken des Polygons $A'B'C'D'\ldots$ bis auf eine, z. B. B', gegeben sind. Man zieht $A'B'$ normal zu AB, $C'B'$ normal zu CB und bestimmt hierdurch die Geschwindigkeit $P'B'$ des Gelenkes B sowie die Drehgeschwindigkeiten

$$\frac{A'B'}{AB}\sin(AB,\ A'B') \text{ und } \frac{B'C'}{BC}\sin(BC,\ B'C')$$

der beiden Stäbe AB, BC.

5. *Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen*, Fig. 11 und 12. Es seien AD und BCE zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Der den Schieber führende Stabteil BCD bildet einen Kreisbogen vom Mittelpunkt M. Wir nehmen an, daß die voneinander unabhängigen Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'E'$ der Gelenke A, E gegeben seien. Die relative Bewegung der beiden Glieder gegeneinander besteht in einer Drehung um den Punkt M; denn diese Bewegung bleibt möglich, wenn ein Gelenk im Punkte M durch einen Stab MD starr mit dem Gliede AD und durch einen zweiten Stab MC starr mit dem Gliede BCE verbunden wird. Da also sowohl die Punkte A und M als auch die Punkte E und M starr miteinander verbunden sind, so bestimmt man die Geschwindigkeit $P'M'$ des Gelenkes M, indem man $A'M'$ normal zu AM und $E'M'$ normal zu EM zieht. Hierauf sind die Punktgruppen

L. Fig. 11. G. Fig. 12.



$$A'M'D' \simeq AMD \text{ und } M'B'C'E' \simeq MBCE$$

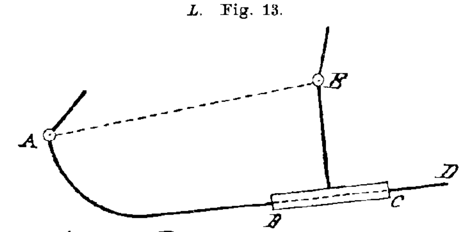
zu bilden.

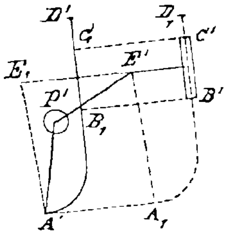
Zweites Verfahren. Man kann die Bewegung des Gliedes BCE zusammensetzen aus einer Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede AD und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M. Die erste Bewegung wird durch den Plan $P'A'D'B_1C_1E_1$, die zweite durch die im Punkte M' sich schneidenden Geschwindigkeitsstrecken B_1B',

C_1C', E_1E' dargestellt. Ebenso läßt sich auch die Bewegung des Gliedes AD zusammensetzen aus einer durch den Geschwindigkeitsplan $P'B'C'E'A_1D_1$ dargestellten Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede BCE und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M, bei der die Punkte A, D die Geschwindigkeiten A_1A', D_1D' annehmen. Man bestimmt also die Punkte A_1, E_1, indem man $E'A_1$ und $A'E_1$ normal zu AE, ferner $M'A'A_1$ normal zu MA und $M'E_1E'$ normal zu ME zieht. Alsdann können die Punktgruppen

$$A'D'B_1C_1E_1 \simeq A_1D_1B'C'E' \simeq ADBCE$$

L. Fig. 13.





G. Fig. 14.

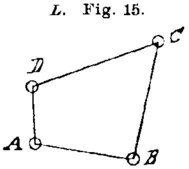
und hierdurch der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ gebildet werden.

Diese Bildungsweise ist auch in dem Falle anwendbar, wenn der den Schieber führende Stab BCD *gerade* ist, Fig. 13 und 14, wenn also der Punkt M unendlich fern liegt. Um den Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ zu bilden, zieht man $A'E_1$ und $E'A_1$ normal zu AE, ferner $A'A_1$ und $E'E_1$ parallel zu BD und bildet

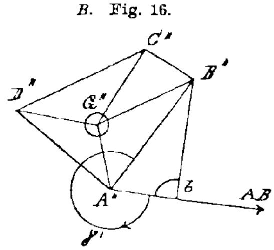
$$A'D'B_1C_1E_1 \simeq A_1D_1B'C'E' \simeq ADBCE.$$

6. *Der Beschleunigungsplan einer Punktgruppe,* Fig. 15 und 16. In ähnlicher Weise wie der Geschwindigkeitsplan entsteht der *Beschleunigungsplan* der ebenen Bewegung einer Punktgruppe, indem man die gleichzeitigen Beschleunigungen der Punkte A, B, C ... durch Strecken $Q''A''$, $Q''B''$, $Q''C''$ ... darstellt, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkt Q'', dem *Pol* des Beschleunigungsplans, ausgehen.

L. Fig. 15.



B. Fig. 16.



Der Maßstab dieser Darstellung, 1 cm gleich μ'' cm sec^{-2}, ist zweckmäßig so zu wählen, daß er zum Maßstab des Lageplans, 1 cm gleich μ cm, in einem einfachen Verhältnis steht. Für die folgenden Anwendungen wählen wir, wenn nichts anderes bemerkt wird, stets

$$\mu'' = \mu' = \mu.$$

Auch die Zerlegung der Beschleunigungen kann in derselben Weise ausgeführt und bezeichnet werden wie die der Geschwindigkeiten im Abschnitt **1.** Wir zerlegen also z. B. die Beschleunigung $Q''B''$ des Punktes B in die Beschleunigung $Q''A''$ des Punktes A und die relative Beschleunigung $A''B''$ des Punktes B gegen den Punkt A. Der Winkel

$$\gamma' = (AB,\ A''B'')$$

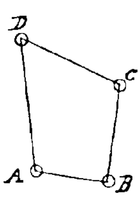
wird der *Beschleunigungswinkel* der Strecke AB genannt. Wir zerlegen ferner die Beschleunigung $A''B''$ in die zu AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A''b$, bB'' und bezeichnen erstere als die *relative Dehnungsbeschleunigung*, letztere als die *relative Drehbeschleunigung* des Punktes B gegen den Punkt A. Die Verhältnisse dieser Beschleunigungsstrecken zur Länge AB bilden die *Dehnungsbeschleunigung* δ' und die *Drehbeschleunigung* ω' *der Strecke* AB:

$$(10)\qquad \begin{cases} \delta' = \dfrac{A''b}{AB} = \dfrac{A''B''}{AB}\cos(AB,\ A''B'') = \dfrac{A''B''}{AB}\cos\gamma' \\[2ex] \omega' = \dfrac{bB''}{AB} = \dfrac{A''B''}{AB}\sin(AB,\ A''B'') = \dfrac{A''B''}{AB}\sin\gamma'. \end{cases}$$

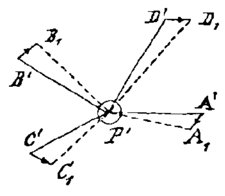
Sinn und Vorzeichen dieser beiden Größen, deren gemeinschaftliche Maßeinheit die $\sec^{-2}$ ist, werden durch $\cos\gamma'$ und $\sin\gamma'$ bestimmt.

Läßt man gleichzeitig mit der Bewegung der Punktgruppe $ABC\ldots$, Fig. 17—19, den zugehörigen Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'\ldots$ bei festliegendem Pol P' sich ändern, so bildet der Beschleunigungsplan $Q''A''B''C''\ldots$ der Gruppe $ABC\ldots$ zugleich den Geschwindigkeitsplan der Punktgruppe $A'B'C'\ldots$. Denn werden die Geschwindigkeiten der Punkte $A, B, C\ldots$ zur Zeit t durch die Strecken $P'A'$, $P'B'$, $P'C'\ldots$ und zur Zeit $t+dt$ durch die Strecken $P'A_1$, $P'B_1$, $P'C_1\ldots$ dargestellt, so ergeben sich sowohl die Geschwindigkeiten der Punkte A', B', $C'\ldots$ als auch die Beschleunigungen der Punkte A, B, $C\ldots$, indem man die unendlich kleinen Strecken $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1\ldots$ durch die unendlich kleine Zeit dt

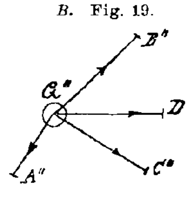
L. Fig. 17.



G. Fig. 18.



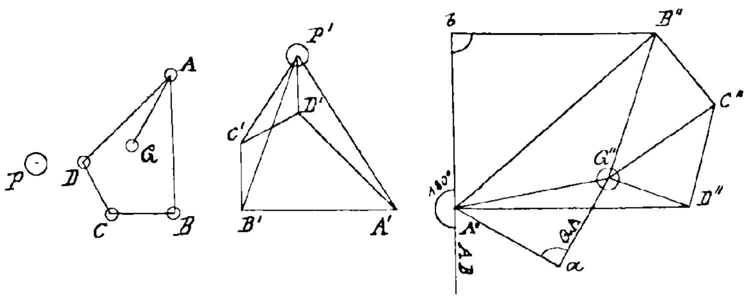
B. Fig. 19.



dividiert. Die Strecken sind im ersten Falle mit dem Längenmaßstabe, in dem zweiten mit dem Geschwindigkeitsmaßstabe zu messen.

7. *Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe,* Fig. 20—22. Wenn die beiden Punkte A, B, Fig. 20, starr miteinander verbunden sind, so ist zu jeder Zeit die Strecke $A'B'$, Fig. 21, normal zur

L. Fig. 20. *G.* Fig. 21. *B.* Fig. 22.



Strecke AB gerichtet. Die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten dieser beiden Strecken sind daher nach Größe und Sinn einander gleich:

$$(11) \qquad \frac{A''b}{A'B'} = \frac{A''B''}{A'B'} \sin(A'B',\ A''B'') = \frac{A'B'}{AB} \sin(AB,\ A'B').$$

Da demnach die gleichgroßen Winkel $(AB,\ A'B')$, $(A'B',\ A''b)$ beide entweder gleich 90^0 oder gleich 270^0 sind, so ist der doppelt so große Winkel

$$(AB,\ A''b) = (AB,\ A'B') + (A'B',\ A''b)$$

entweder gleich 180^0 oder gleich 540^0, d. h. *der Sinn der Strecke $A''b$ ist in jedem Fall dem Sinn der Strecke AB entgegengesetzt.* In Verbindung mit Gleichung 11 folgt hieraus:

$$(12) \qquad A''b = A''B'' \cos(AB,\ A''B'') = -\frac{(A'B')^2}{AB}$$

oder

$$(13) \qquad \delta' = -\omega^2,$$

d. h. *die Dehnungsbeschleunigung einer starren Strecke ist in jedem Zeitpunkt gleich dem negativen Quadrat ihrer Drehgeschwindigkeit.* Alle Strecken einer starren Punktgruppe haben dieselbe Drehgeschwindigkeit ω, also nach Gleichung (13) auch dieselbe Dehnungsbeschleunigung δ'. Da in jedem Zeitabschnitt alle Drehgeschwindigkeiten um gleiche Größen sich ändern, so haben alle Strecken auch gleiche Drehbeschleunigungen ω' und nach den Gleichungen (10) gleiche Beschleunigungswinkel γ'. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(14) \qquad \frac{\delta'}{\cos\gamma'} = \frac{\omega'}{\sin\gamma'} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA} = \dots,$$

d. h. die beiden Punktgruppen $A''B''C''D''\ldots$, $ABCD\ldots$ sind geometrisch ähnlich und von gleichem Sinn:

$$A''B''C''D''\ldots \simeq ABCD\ldots \tag{15}$$

Der mit der Gruppe $ABC\ldots$ starr verbundene und durch die Bedingung

$$QABC\ldots \simeq Q''A''B''C''\ldots \tag{16}$$

bestimmte Punkt Q heißt der *Beschleunigungspol des Lageplans.* Von allen Punkten der bewegten Ebene $ABC\ldots$ ist Q der einzige, dessen augenblickliche Beschleunigung Null ist, der also in zwei aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten mit unveränderter Geschwindigkeit in gerader Linie sich bewegt.

Der durch die Gleichung

$$\frac{\sin\gamma'}{\cos\gamma'} = \frac{\omega'}{\delta'} = -\frac{\omega'}{\omega^2} \tag{17}$$

bestimmte Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = (QA,\ Q''A'') = (QB,\ Q''B'') = \ldots$$

liegt, weil δ' stets negativ ist, im zweiten oder im dritten Quadranten, je nachdem ω' positiv oder negativ ist.

Die Beschleunigungsstrecke $Q''A''$ ist proportional der Strecke QA und setzt sich zusammen aus der relativen Dehnungsbeschleunigung des Punktes A gegen den Punkt Q

$$Q''a = \delta'\ QA = -\omega^2\ QA \tag{18}$$

und der relativen Drehbeschleunigung

$$aA'' = \omega'\ QA. \tag{19}$$

Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe wird zufolge (15) bestimmt durch die Beschleunigungen $Q''A''$, $Q''B''$ zweier Punkte der Gruppe. Diese beiden Strecken sind voneinander abhängig durch Gleichung (12), nach der die Projektion $A''b$ der Strecke $A''B''$ auf die Gerade AB den Sinn BA und die Größe $\frac{(A'B')^2}{AB}$ haben muß. Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol Q'' drei Gerade aa, bb, cc, Fig. 25, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die Punkte A'', B'', C'' liegen müssen. Man bildet zwei Vierecke $a_1 b_1 c_1 e_1$ und $a_2 b_2 c_2 e_2$, die folgende Bedingungen erfüllen: Die Punkte a_1, a_2 liegen auf aa, b_1, b_2 auf bb; die Strecken $a_1 e_1$, $a_2 e_2$ haben die Richtung und den Sinn BA, Fig. 23—25, und die gemeinschaftliche Größe

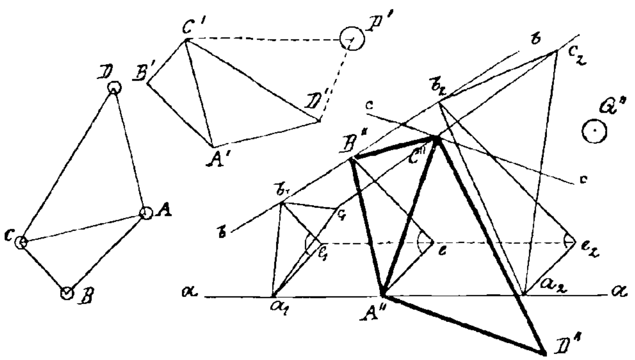
$$a_1 e_1 = a_2 e_2 = \frac{(A'B')^2}{AB}.$$

Die Strecken $e_1 b_1$, $e_2 b_2$ sind normal zu AB gerichtet, und endlich ist

$$a_1 b_1 c_1 \simeq a_2 b_2 c_2 \simeq ABC.$$

Erteilt man nun den Punkten a_1, b_1, c_1, e_1 gleichzeitig die Geschwindigkeiten $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $e_1 e_2$, so bleiben bei der Bewegung unverändert: die Richtungen der Strecken $a_1 e_1$, $e_1 b_1$, die Größe der Strecke $a_1 e_1$ und die Winkel des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$. Der Punkt C'' des Beschleunigungsplans ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden cc und $c_1 c_2$. Man bestimmt ferner einen der Punkte A'', B'' aus der Bedingung

L. Fig. 23. G. Fig. 24. B. Fig. 25.



$$\frac{a_1 A''}{a_1 a_2} = \frac{b_1 B''}{b_1 b_2} = \frac{c_1 C''}{c_1 c_2}$$

und den übrigen Teil des Plans nach der Bedingung:

$$A''B''C''D'' \ldots \simeq ABCD \ldots$$

8. *Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Gelenkverbindungen*, Fig. 26—28. Einem Stabpolygon $ABCD$ von m Seiten entspricht im Beschleunigungsplan ein Polygon $A''bB''cC''dD''aA''$ von $2\,m$ Seiten. In dem vorliegenden Beispiel ist, *wie in allen folgenden Fällen*, der Maßstab

des Lageplans:	1 cm = 100 cm,
des Geschwindigkeitsplans:	1 cm = 100 cm sec^{-1},
des Beschleunigungsplans:	1 cm = 100 cm sec^{-2}.

Nachdem der Geschwindigkeitsplan gebildet worden ist, sind von jenen $2\,m$ Seiten nach Größe, Richtung und Sinn m bekannt:

$$(20)\quad \begin{cases} A''b = \dfrac{(A'B')^2}{AB} = \dfrac{250^2}{200} = 313 \text{ cm sec}^{-2};\ (AB,\ A''b) = 180^0 \\ B''c = \dfrac{(B'C')^2}{BC} = \dfrac{120^2}{60} = 240 \text{ cm sec}^{-2};\ (BC,\ B''c) = 180^0 \\ C''d = \dfrac{(C'D')^2}{CD} = \dfrac{130^2}{290} = \ \ 58 \text{ cm sec}^{-2};\ (CD,\ C''d) = 180^0 \\ D''a = \dfrac{(D'A')^2}{DA} = \dfrac{80^2}{90} = \ \ 71 \text{ cm sec}^{-2};\ (DA,\ D''a) = 180^0. \end{cases}$$

Von den übrigen m Seiten sind die *Richtungen* bekannt:

$$(21) \qquad bB'' \perp AB, \; cC'' \perp BC, \; dD'' \perp CD, \; aA'' \perp DA.$$

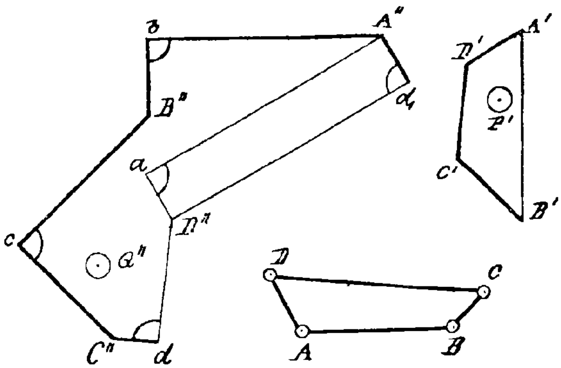
Um den Beschleunigungsplan des Stabpolygons bilden zu können, müssen demnach gegeben sein: der Geschwindigkeitsplan, Fig. 27, die Beschleunigung $Q''A''$ eines Gelenkes A und die Drehbeschleunigungen von $(m-2)$ Stäben z. B.:

$bB'' = +102$ cm sec^{-2}; also $(AB, bB'') = 90^0$

$cC'' = +180$ cm sec^{-2}; also $(BC, cC'') = 90^0$.

Durch die vorstehenden Angaben sind die Punkte Q'', A'', b, B'', c, C'' bestimmt. Es ist dann aufzutragen:

B. Fig. 28. G. Fig. 27.



L. Fig. 26.

$$(AD, A''d_1) = 180^0, \quad A''d_1 = D''a = 71 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(CD, \quad C''d) = 180^0, \quad C''d \; = 58 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$d_1D'' \perp AD, \quad dD'' \perp CD.$$

Die gegebenen und die durch Rechnung bestimmten Strecken sind in Fig. 28 wie in den folgenden Abbildungen durch kräftigere Linien gekennzeichnet.

9. *Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen.* — Die Figuren 29 und 30 bilden eine Wiederholung der Figuren 11 und 12. AD und BCE sind also, wie im Abschnitt **5**, zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Gegeben sind: der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, Fig. 30, und die voneinander unabhängigen Beschleunigungen $Q''A''$, $Q''E''$ der Gelenke A, E, Fig. 31. Es ist die Aufgabe, den Beschleunigungsplan der beiden Glieder AD, BCE zu bilden.

Erstes Verfahren. Im Abschnitt **5** wurde gezeigt, daß die Schieberverbindung ersetzt werden kann durch das Gelenk M, mit dem die Glieder AD, BCE durch Stäbe MD, MC starr zu verbinden sind.

Man bestimmt also nach Abschnitt 8 die Beschleunigung $Q''M''$ des Gelenkes M, indem man aufträgt:

$$(AM, A''m) = 180^0;\ A''m = \frac{(A'M')^2}{AM} = \frac{228^2}{260} = 200 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(EM, E''m_1) = 180^0,\ E''m_1 = \frac{(E'M')^2}{EM} = \frac{300^2}{249} = 361 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$mM'' \perp A''m, \quad m_1M'' \perp E''m_1.$$

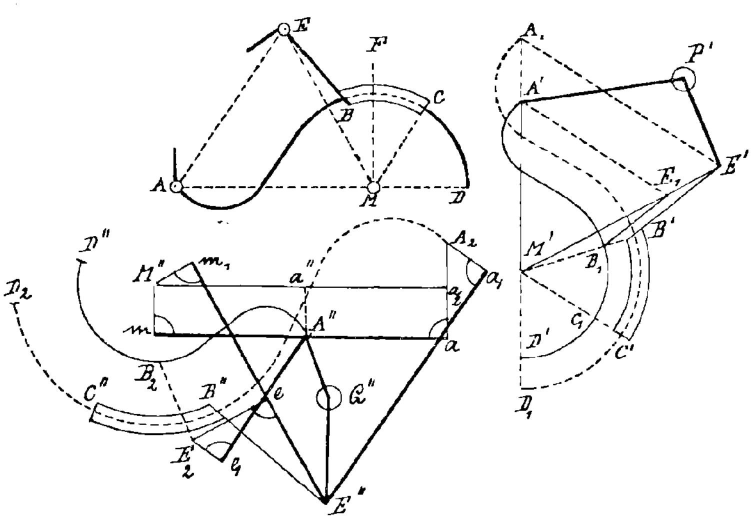
Der Beschleunigungsplan der beiden Glieder wird alsdann durch die Punktgruppen:

$$A''D''M'' \simeq ADM, \quad B''C''E''M'' \simeq BCEM$$

gebildet.

Zweites Verfahren. Man kann, ähnlich wie es im Abschnitt 5 mit den Geschwindigkeiten geschehen ist, die Beschleunigung $Q''A''$ eines

L. Fig. 29. *G.* Fig. 30.



B. Fig. 31.

jeden Punktes A des einen Gliedes AD zusammensetzen aus der Beschleunigung $Q''A_2$, die dieser Punkt in starrer Verbindung mit dem anderen Gliede BCE annehmen würde, und einer zweiten Beschleunigung A_2A''. Man kann ferner, wie es am Ende des Abschnittes 6 gezeigt ist, den Beschleunigungsplan $Q''A''A_2B''\ldots$, Fig. 31, ansehen als den Geschwindigkeitsplan der in Fig. 30 dargestellten Punktgruppe $A'A_1B'\ldots$ Hiernach ist $Q''A''$ die Geschwindigkeit des Punktes A', $Q''A_2$ die Geschwindigkeit des Punktes A_1 und

$$\omega = \frac{A_2A''}{A_1A'} \sin(A_1A', A_2A'') = \frac{a_2a''}{A_1A'}$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke A_1A'. Diese Größe steht in einer bemerkenswerten Beziehung zu den Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD und BCE. Es ist nämlich im Sinne der Achse MA:

$$M''a'' = -MA\ \omega_1^2,\ M''a_2 = -MA\ \omega_2^2$$

also

$$a_2a'' = MA(\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Ferner ist im Sinne einer Achse FM, die mit MA den Winkel (FM, MA) gleich 90^0 einschließt:

$$M'A' = -MA\ \omega_1,\quad M'A_1 = -MA\ \omega_2,$$

folglich

$$A_1A' = MA(\omega_2 - \omega_1).$$

Die Drehgeschwindigkeit ω der Strecke A_1A' hat also den *algebraischen* Wert

$$\omega = \frac{MA(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{MA(\omega_2 - \omega_1)} = \omega_1 + \omega_2. \tag{22}$$

Da dieser Wert unabhängig ist von der Wahl des Punktes A, so haben *alle Strecken* A_1A', B_1B', C_1C', D_1D', E_1E' *eine gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit* ω, *die gleich ist der algebraischen Summe der Drehgeschwindigkeiten* ω_1, ω_2 *der beiden durch den Schieber verbundenen Glieder* AD *und* BCE. Vermittels dieser Beziehung lassen sich die Punkte A_2, E_2 bestimmen, auch wenn die Punkte M, M', M'' nicht auf das Zeichnungsblatt fallen. Für das vorliegende Beispiel ist

$$\omega_1 = \frac{M'A'}{MA} \sin(MA, M'A') = +\tfrac{228}{260}$$

$$\omega_2 = \frac{M'A_1}{MA} \sin(MA, M'A_1) = +\tfrac{313}{260}$$

$$\omega\ = \omega_1 + \omega_2 = +\tfrac{541}{260}$$

Da dieser Wert positiv ist, so sind die Winkel

$$(A'A_1, A''a) = (E'E_1, E''e) = 90^0.$$

Ferner ist aufzutragen:

$$A''a = a''a_2 = A'A_1\ \omega = 85\,\tfrac{541}{260} = 177 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$E''e = E'E_1\ \omega = 80\,\tfrac{541}{260} = 166 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(EA, E''a_1) = (AE, A''e_1) = 180^0$$

$$E''a_1 = \frac{(E'A_1)^2}{EA} = \frac{313^2}{260} = 377 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$A''e_1 = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{230^2}{260} = 203 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$aA_2 \perp A''a,\quad eE_2 \perp E''e,\quad a_1A_2 \perp E''a_1,\quad e_1E_2 \perp A''e_1.$$

Nachdem hierdurch die Punkte A_2, E_2 bestimmt worden sind, kann der Beschleunigungsplan $Q''A''B''C''D''E''$ gebildet werden nach der Bedingung

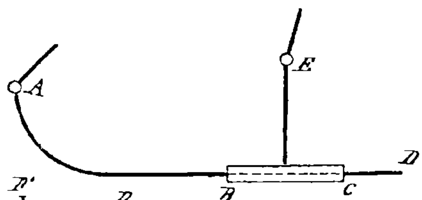
$$A''D''B_2C_2E_2 \simeq A_2D_2B''C''E'' \simeq ADBCE.$$

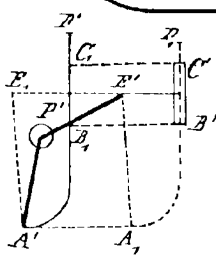
Wenn der den Schieber führende Stabteil BCD, Fig. 32—34, *gerade* ist, so vereinfacht sich das Verfahren, weil die Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD, BCE gleich groß sind, und also die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit der Strecken A_1A', B_1B', C_1C', D_1D', E_1E'

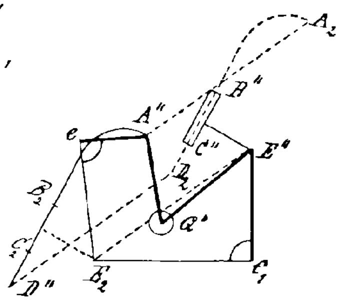
(23) $\omega = 2\omega_1 = 2\omega_2$

wird. Da ferner auch die Drehbeschleunigungen und die Beschleunigungswinkel für beide Glieder gleich groß sind, so sind die *Punktgruppen* $A''D''B_2C_2E_2$, $A_2D_2B''C''E''$ *kongruent und können durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden.* Die Strecken $A''A_2$, $D''D_2$, B_2B'', C_2C'', E_2E'' sind daher gleich groß und gleich gerichtet, und von den beiden Punkten A_2, E_2 braucht nur einer, z. B. E_2, bestimmt zu werden. Im vorliegenden Beispiel ist

L. Fig. 32.







G. Fig. 33. B. Fig. 34.

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{A'E_1}{AE} \sin(AE, A'E_1) = -\tfrac{180}{360} = -\tfrac{1}{2}\ \mathrm{sec}^{-1},$$

also

$$\omega = 2\omega_1 = -1\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Folglich ist aufzutragen:

$$(E'E_1, E''e_1) = 270^0$$

$$E''e_1 = E'E_1\ \omega = E'E_1 = 150\ \mathrm{cm\ sec}^{-2}$$

$$(AE, A''e) = 180^0$$

$$A''e = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{180^2}{360} = 90\ \mathrm{cm\ sec}^{-2}$$

$$e_1E_2 \perp E''e_1, \quad eE_2 \perp A''e.$$

Man bestimmt dann A_2, indem man der Strecke $A''A_2$ Größe, Richtung und Sinn der Strecke E_2E'' gibt, und bildet endlich die Punktgruppen:

$$A''D''B_2C_2E_2 \simeq A_2D_2B''C''E'' \simeq ADBCE.$$

10. *Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne ebener Getriebe.* Eine in der Ebene sich bewegende Stabverbindung, die so gestützt und so geführt wird, daß in jeder Lage ihr Geschwindigkeitsplan bestimmt ist, wird ein *ebenes Getriebe* genannt. In der Regel besteht die Stützung und die Führung des Getriebes darin, daß *ein* Glied festgestellt ist, während ein *zweites* Glied um einen Punkt des festgestellten Gliedes mit gegebener Drehgeschwindigkeit geführt wird. Diese Anordnung ist jedoch nicht wesentlich; es können anstatt dessen auch *zwei* Glieder auf vorgeschriebenen Bahnen mit gegebenen Geschwindigkeiten geführt werden.

Die Geschwindigkeiten in zwei unendlich nahe auf einander folgenden Zeitpunkten sind durch die Drehgeschwindigkeiten der geführten Glieder bestimmt. Um den *Beschleunigungsplan* des Getriebes für einen Zeitpunkt darstellen zu können, müssen also außer den Geschwindigkeiten aller Glieder noch die Drehbeschleunigungen der geführten Glieder gegeben sein.

Bei der Bildung der Geschwindigkeitspläne und der Beschleunigungspläne ebener Getriebe kommen in erster Linie die in den vorstehenden Abschnitten beschriebenen Gesetze zur Anwendung; außerdem noch einige Regeln über die Zusammensetzung mehrerer Bewegungen, für deren Darstellung wir folgende Bezeichnungen anwenden:

Die Glieder des Getriebes werden mit den Nummern 0, 1, 2, 3, …, verschiedene Bewegungen des Getriebes mit I, II, III … bezeichnet. ω_{mn} und ω'_{mn} bezeichnen die Drehgeschwindigkeit und die Drehbeschleunigung des Gliedes m in der Bewegung n. l_1, l_2, l_3 … sind die Längen der Seiten eines Stabpolygons, dem die Glieder 1, 2, 3, … angehören. Zur Darstellung einer *geometrischen* Summe benutzen wir das Summierungszeichen $\dotplus$.

Wir erinnern daran, daß der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, Fig. 26 und 27, eines Stabpolygons $ABCD$, dem die Glieder 1, 2, 3, 4 angehören, nur die *eine* Bedingung zu erfüllen hat:

$$l_1\omega_1 \dotplus l_2\omega_2 \dotplus l_3\omega_3 \dotplus l_4\omega_4 = 0, \tag{24}$$

d. h. die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ $D'A'$ von den Längen $l_1\omega_1, l_2\omega_2 \ldots$ und den gegebenen Richtungen

$$A'B' \perp AB, \quad B'C' \perp BC \text{ usf.}$$

bilden ein *geschlossenes* Polygon und haben daher eine geometrische Summe gleich Null. Ebenso hat der Beschleunigungsplan des Stabpolygons $Q''A''bB''cC''dD''aA''$, Fig. 28, nur *eine* Bedingung zu erfüllen:

$$(25)\quad l_1\omega_1^2 + l_2\omega_2^2 + l_3\omega_3^2 + l_4\omega_4^2 + l_1\omega_1' + l_2\omega_2' + l_3\omega_3' + l_4\omega_4' = 0,$$

d. h. die Seiten $A''b$, $B''c$, $C''d$, $D''a$, von den Größen $l_1\omega_1^2$, $l_2\omega_2^2$, $l_3\omega_3^2$, $l_4\omega_4^2$, deren Richtung und Sinn durch BA, CB, DC, AD gegeben sind, müssen in Verbindung mit den Seiten bB'', cC'', dD'', aA'' von den Richtungen

$$bB'' \perp AB, \quad cC'' \perp BC \ldots$$

und den Längen

$$bB'' = l_1\omega_1', \quad cC'' = l_2\omega_2' \ldots$$

ein *geschlossenes* Polygon bilden. Diese Bedingungen gelten in gleicher Form auch für Stabpolygone mit Schieberverbindungen, wenn man nach den Abschnitten **5** und **9** die Schieber durch Gelenke ersetzt.

1. Bezeichnet $P'A'B'C' \ldots$ den Geschwindigkeitsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \ldots$ und P_1 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $P_1A'B'C' \ldots$ der Geschwindigkeitsplan einer *möglichen* Bewegung II, d. h. einer Bewegung, die von der Stabverbindung gestattet wird. Denn die Bedingung (24) wird von jedem Stabpolygon für beide Bewegungen in gleicher Weise erfüllt. Die Bewegung II entsteht, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer gleichzeitigen Parallelverschiebung, die allen Punkten die gemeinschaftliche Geschwindigkeit P_1P' erteilt.

2. Bezeichnet $Q''A''B''C'' \ldots$ den Beschleunigungsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \ldots$ und Q_2 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $Q_2A''B''C'' \ldots$ der Beschleunigungsplan einer *möglichen* Bewegung II des Getriebes. Die Bewegung II entsteht, indem die Bewegung I zusammengesetzt wird mit einer Parallelverschiebung von beliebiger Geschwindigkeit und der Beschleunigung Q_2Q''. Die Bewegung II ist möglich, weil die Bedingungen (25) für beide Bewegungen I und II gleich lauten.

3. (Vergl. Beispiel 5.) Bezeichnen $P_1'A_1'B_1'C_1' \ldots$ und $P_2'A_2'B_2'C_2' \ldots$ die Geschwindigkeitspläne zweier Bewegungen I, II der Stabverbindung $ABC \ldots$, also

$$\omega_{01}, \quad \omega_{11}, \quad \omega_{21}, \quad \omega_{31} \ldots$$

und

$$\omega_{02}, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{22}, \quad \omega_{32} \ldots$$

die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2, 3 ... in diesen beiden Bewegungen, ferner ζ_1, ζ_2 zwei beliebige positive oder negative Zahlen, so wird der Geschwindigkeitsplan $P_3'A_3'B_3'C_3' \ldots$, einer möglichen Bewegung III gebildet, indem man

$$P_3'A_3' = \zeta_1 \; P_1'A_1' + \zeta_2 \; P_2'A_2'$$
$$P_3'B_3' = \zeta_1 \; P_1'B_1' + \zeta_2 \; P_2'B_2' \text{ usf.}$$

aufträgt. Die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2 ... erhalten in der Bewegung III die Größen

$$\omega_{03} = \zeta_1 \omega_{01} + \zeta_2 \omega_{02}$$
$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12}$$
$$\omega_{23} = \zeta_1 \omega_{21} + \zeta_2 \omega_{22} \text{ usf.}$$

Ist ζ negativ, so ist der Sinn der Drehgeschwindigkeit $\zeta\omega$ dem Sinn von ω entgegengesetzt. Der Beweis der vorstehenden Behauptungen ergibt sich, indem man für jedes Stabpolygon die Bedingung (24) für alle drei Bewegungen bildet und beachtet, daß die Bedingung der Bewegung III unmittelbar aus den Bedingungen I und II zu folgern ist. Sind die Drehgeschwindigkeiten ω_{03}, ω_{13} *zweier Glieder* 0, 1 in der Bewegung III gegeben, so sind die beiden Zahlen ζ_1, ζ_2 durch obige Gleichungen bestimmt:

$$(26) \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{\omega_{03}\,\omega_{12} - \omega_{13}\,\omega_{02}}{\omega_{01}\,\omega_{12} - \omega_{11}\,\omega_{02}} \\[2ex] \zeta_2 = \dfrac{\omega_{03}\,\omega_{11} - \omega_{13}\,\omega_{01}}{\omega_{02}\,\omega_{11} - \omega_{12}\,\omega_{01}} \end{cases}.$$

Bei Anwendung dieser Zusammensetzung kann man in der Regel als Bewegung II eine Drehung aller Glieder in starrer Verbindung mit einander und zwar mit der Drehgeschwindigkeit

$$+1 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \cdots$$

wählen; dann wird

$$(27) \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{\omega_{03} - \omega_{13}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\[2ex] \zeta_2 = \dfrac{\omega_{03}\,\omega_{11} - \omega_{13}\,\omega_{01}}{\omega_{11} - \omega_{01}} \end{cases}.$$

4. (vergl. Beispiel 6.) Für eine Stabverbindung sei gegeben die Bewegung I durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$\omega_{01}, \; \omega_{11}, \; \omega_{21}, \; \omega_{31} \cdots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega_{01}', \; \omega_{11}', \; \omega_{21}', \; \omega_{31}' \cdots,$$

Ferner die Bewegung II durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \omega_{32} = \cdots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{02} = \alpha\,\omega_{01}\,,\quad \omega'_{12} = \alpha\,\omega_{11}\,,\quad \omega'_{22} = \alpha\,\omega_{21}\quad \text{usf.}$$

α bezeichnet eine beliebige positive oder negative Drehgeschwindigkeit. Eine solche Bewegung nennt man eine *Anfangsbewegung*, weil sie an den Ruhezustand sich anschließt. Sie ist möglich, weil der Beschleunigungsplan der Bewegung II dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I geometrisch ähnlich ist, und weil infolgedessen die Bedingung (25) für jedes Stabpolygon erfüllt ist.

Gegeben sei endlich die Bewegung III, ebenfalls eine Anfangsbewegung, durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{03} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{33} = \cdots$$

und durch die Drehbeschleunigungen

$$\alpha' = \omega'_{03} = \omega'_{13} = \omega'_{23} = \omega'_{33} = \cdots$$

Der Beschleunigungsplan dieser Bewegung III ist dem *Lageplan* geometrisch ähnlich; es ist also für jedes Stabpolygon die Bedingung (25) erfüllt.

Es soll eine Bewegung IV gebildet werden, die in ihren Drehgeschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmt:

$$\omega_{04} = \omega_{01}\,,\quad \omega_{14} = \omega_{11}\,,\quad \omega_{24} = \omega_{21}\quad \text{usf.}$$

während für zwei beliebige Glieder 0 und 1 die Drehbeschleunigungen ω'_{04}, ω'_{14} vorgeschrieben sind. Die Bewegung IV entsteht durch Zusammensetzung der Bewegungen I, II, III. Hierdurch wird:

$$\omega'_{04} = \omega'_{01} + \alpha\,\omega_{01} + \alpha'$$
$$\omega'_{14} = \omega'_{11} + \alpha\,\omega_{11} + \alpha'$$
$$\omega'_{24} = \omega'_{21} + \alpha\,\omega_{21} + \alpha'\quad \text{usf.}$$

Die Drehgeschwindigkeit α und die Drehbeschleunigung α' werden durch die ersten beiden Gleichungen bestimmt:

$$(28)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\omega'_{04} - \omega'_{01} + \omega'_{11} - \omega'_{14}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\ \alpha' = \omega'_{04} - \omega'_{01} - \alpha\,\omega_{01}\,. \end{cases}$$

5. (Vergl. Beispiel 8.) Wenn *einem* Stabe eines Getriebes, z. B. dem Stabe 3, die *Eigenschaft der Dehnbarkeit* beigelegt wird, so erhält die Stabverbindung einen höheren Grad der Beweglichkeit, sodaß eine ihrer Bewegungen erst bestimmt wird, wenn die Drehgeschwindigkeiten und Drehbeschleunigungen von *drei* Gliedern, z. B. der Glieder 0, 1, 2,

gegeben sind. Es seien die Geschwindigkeiten der Bewegungen I und II bestimmt durch die gegebenen Größen

$$\omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1 \text{ sec}^{-1}$$

und

$$\omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +1 \text{ sec}^{-1}, \quad \omega_{22} = 0.$$

Aus den Geschwindigkeitsplänen dieser beiden Bewegungen können die Dehnungsgeschwindigkeiten δ_{31}, δ_{32} des dehnbaren Stabes 3 entnommen werden.

Es sei nun die Aufgabe, die Geschwindigkeiten einer Bewegung III zu bestimmen, für die vorgeschrieben ist: die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 0

$$\omega_{03} = 0,$$

ferner die Drehgeschwindigkeit ω_{13} des Gliedes 1 und endlich die Starrheit des Stabes 3

$$\delta_{33} = 0.$$

Diese Bewegung III kann also von dem *Getriebe* ausgeführt werden. Sie wird gebildet durch Zusammensetzung der ζ_1-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I mit den ζ_2-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, wenn die beiden Zahlen ζ_1, ζ_2 folgende zwei Bedingungen erfüllen: Die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 1 muß die vorgeschriebene Größe ω_{13} erhalten:

$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} = \zeta_2 \text{ sec}^{-1}$$

oder

(29) $$\zeta_2 = \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sec}^{-1}}.$$

Ferner muß die Dehnungsgeschwindigkeit des Stabes 3 gleich Null werden:

$$\delta_{33} = \zeta_1 \delta_{31} + \zeta_2 \delta_{32} = 0,$$

woraus folgt:

(30) $$\zeta_1 = -\frac{\delta_{32}}{\delta_{31}} \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sec}^{-1}}.$$

Die Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III haben demnach die Größen:

$$\omega_{03} = \zeta_1 \omega_{01} + \zeta_2 \omega_{02} = 0$$
$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} = \zeta_2$$
$$\omega_{23} = \zeta_1 \omega_{21} + \zeta_2 \omega_{22} \quad \text{usf.}$$

Es sei ferner die Aufgabe, die *Beschleunigungen* der Bewegung III zu bestimmen, wenn vorgeschrieben ist: die Drehbeschleunigung ω'_{13} des Gliedes 1 und diejenige des Gliedes 0

$$\omega'_{03} = 0.$$

Man erteilt wieder einem Stabe 3 die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmt durch einen Plan die Beschleunigungen der Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit denen der Bewegung III übereinstimmen

$$\omega_{04} = \omega_{03} = 0, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \quad \text{usf.},$$

während die Drehbeschleunigungen der *drei* Glieder 0, 1, 2 die Größen

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = \omega'_{13}, \quad \omega'_{24} = 0$$

erhalten. Mit V bezeichnen wir ferner eine Bewegung, deren Geschwindigkeiten alle gleich Null sind:

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} \ldots$$

und deren Drehbeschleunigungen den *bekannten* Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\begin{aligned} \omega'_{05} &= \alpha\,\omega_{01} = 0 \\ \omega'_{15} &= \alpha\,\omega_{11} = 0 \\ \omega'_{25} &= \alpha\,\omega_{21} = \alpha \sec^{-2} \\ \omega'_{35} &= \alpha\,\omega_{31} \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Die Beschleunigungen der vorgeschriebenen Bewegung III entstehen durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen IV, V, wenn die unbekannte Drehgeschwindigkeit α so gewählt wird, daß die Dehnungsbeschleunigung des Stabes 3 die einem *starren* Stabe entsprechende Größe erhält. Die Drehgeschwindigkeit dieses Stabes hat die Größe

$$\omega_{33} = \zeta_1\,\omega_{31} + \zeta_2\,\omega_{32}.$$

Seine Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} in der Bewegung IV kann aus dem Beschleunigungsplan dieser Bewegung entnommen werden, während seine Dehnungsbeschleunigung in der Bewegung V durch die Gleichung

$$\delta'_{35} = \alpha\,\delta_{31}$$

aus dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I ermittelt werden kann. Die Größe α wird demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$\delta'_{33} = -\,\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \delta'_{35} = \delta'_{34} + \alpha\,\delta_{31}$$

oder

(31) $$\alpha = -\,\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}}.$$

Nachdem α bestimmt worden ist, ergeben sich die Drehbeschleunigungen der Bewegung III durch die Gleichungen:

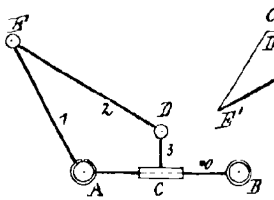
$$\begin{aligned} \omega'_{03} &= \omega'_{04} + \alpha\,\omega_{01} = 0 \\ \omega'_{13} &= \omega'_{14} + \alpha\,\omega_{11} = \omega'_{13} \\ \omega'_{23} &= \omega'_{24} + \alpha\,\omega_{21} \\ \omega'_{33} &= \omega'_{34} + \alpha\,\omega_{31} \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

11. *Beispiele und Aufgaben.* — Die vorstehenden Regeln sollen an einer Reihe von Beispielen erläutert werden. Wenn nichts anderes bemerkt wird, ist der Maßstab

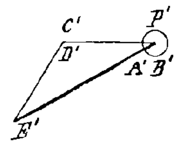
des Lageplans L: 1 cm = 100 cm
des Geschwindigkeitsplans G: 1 cm = 100 cm $\sec^{-1}$
des Beschleunigungsplans B: 1 cm = 100 cm $\sec^{-2}$.

In den Lageplänen sind die Gelenke durch kleine Kreise, die ruhenden Gelenke durch Doppelkreise bezeichnet. In den Geschwindigkeitsplänen und den Beschleunigungsplänen sind die Pole P' und Q'' durch Kreise, rechte Winkel durch Viertelkreise, die gegebenen und durch Rechnung bestimmten Strecken durch kräftigere Linien bezeichnet.

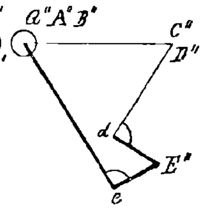
L. Fig. 35.



G. Fig. 36.



B. Fig. 37.



Beispiel 1. Das Getriebe Fig. 35 besteht aus den vier Gliedern AB, AE, ED, DC, die in dieser Reihenfolge mit 0, 1, 2, 3 bezeichnet sind. Das Glied 0 ist festgestellt:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_0' = 0,$$

das Glied 1 wird geführt mit der gegebenen Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1{,}08 \sec^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = +0{,}33 \sec^{-2}.$$

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 36. Die Punkte A', B' fallen mit dem Pol P' zusammen, weil die Punkte A, B ruhen. Die Strecke $A'E'$ ist nach Größe, Richtung und Sinn durch die gegebene Drehgeschwindigkeit ω_1 bestimmt:

$$\frac{A'E'}{AE} \sin(AE, A'E') = -1{,}08 \sec^{-1};$$

demnach ist der Winkel

$$(AE, A'E') = 270^0$$

und

$$A'E' = 1{,}08 \cdot AE = 1{,}08 \cdot 197 = 213 \text{ cm} \sec^{-1}.$$

Die Punkte C', D' fallen zusammen, weil alle Punkte des Schiebers CD dieselbe, zum ruhenden Stab AB parallel gerichtete Geschwindigkeit $P'C'$ haben. Man bestimmt also den Punkt $C'D'$, indem man

$$P'C' \parallel AB \quad \text{und} \quad E'D' \perp ED$$

zieht.

Der Beschleunigungsplan Fig. 37. Die den ruhenden Punkten A, B entsprechenden Punkte A'', B'' fallen mit dem Pol Q'' zusammen. Ferner werden die Strecken $A''e$, eE'' durch die gegebenen Größen ω_1, ω_1' bestimmt

$$\frac{A''E''}{AE}\cos(AE,\ A''E'') = -\,\omega_1^2$$

$$\frac{A''E''}{AE}\sin(AE,\ A''E'') = \omega_1',$$

folglich ist

$$(AE,\ A''e) = 180^0,\quad A''e = AE\ \omega_1^2 = 197 \cdot 1{,}08^2 = 230 \text{ cm sec}^{-2}$$

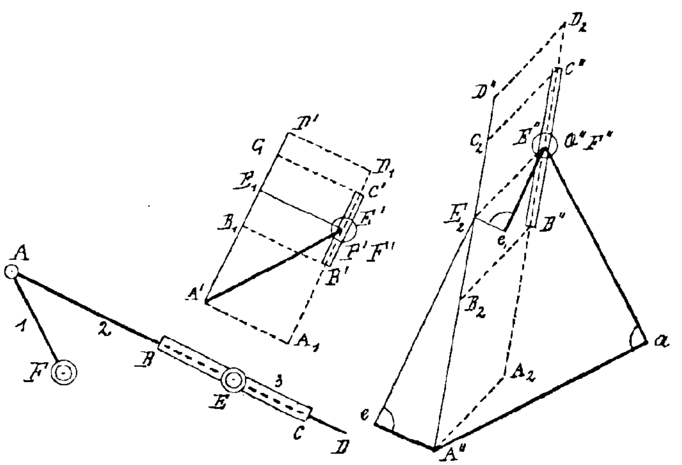
$$(AE,\ eE'') = 90^0,\quad eE'' = AE\ \omega' = 0{,}33 \cdot 197 = 65 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Die Punkte C'', D'' fallen zusammen, weil alle Punkte des Schiebers CD dieselbe zu AB parallel gerichtete Beschleunigung $Q''C''$ haben. Durch diese Bedingung und durch die Dehnungsbeschleunigung des Stabes ED ist der Punkt $C''D''$ bestimmt:

$$(ED,\ E''d) = 180^0,\quad E''d = \frac{(E'D')^2}{ED} = \frac{125^2}{234} = 67 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$dD'' \perp E''d,\quad Q''D'' \parallel AB.$$

G. Fig. 39. *B.* Fig. 40.



L. Fig. 38.

Beispiel 2, Fig. 38—40. Das Getriebe besteht aus dem ruhenden Gliede EF, dem mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -\,1{,}40 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = -\,2{,}14 \text{ sec}^{-2}$$

geführten Gliede FA, dem Stabe AD und dem um das Gelenk E sich drehenden Schieber BC.

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 39. Da die Gelenke E, F ruhen, so fallen die Punkte E', F' mit dem Pol P' zusammen. Der Punkt A' wird bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{F'A'}{FA} \sin(FA,\ F'A') = \omega_1 = -1{,}40 \text{ sec}^{-1},$$

also ist

$$(FA,\ F'A') = 270^0, \quad F'A' = FA\ \omega_1 = 150 \cdot 1{,}40 = 210 \text{ cm sec}^{-1}.$$

Im übrigen ist die Bildung des Geschwindigkeitsplans vollständig im Abschnitt **5** beschrieben. Man bestimmt hiernach die Geschwindigkeit $P'E_1$ des vom ruhenden Gelenke E gedeckten Punktes des Stabes AD, indem man

$$A'E_1 \perp AE, \quad E'E_1 \parallel AD$$

zieht. Dann entsteht der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, indem man die Punktgruppen

$$A'B_1C_1D'E_1 \simeq ABCDE$$

und

$$A_1B'C'D_1E' \simeq A'B_1C_1D'E_1$$

bildet. Die relative Geschwindigkeit der Punkte des Stabes AD gegen den Schieber BC wird durch die Strecken

$$A_1A' = D_1D' = 120 \text{ cm sec}^{-1}$$

dargestellt.

Der Beschleunigungsplan Fig. 40. Die Punkte E'', F'' fallen mit dem Pol Q'' zusammen. Ferner wird der Punkt A'' bestimmt durch die gegebenen Größen ω_1 und ω_1':

$$(FA,\ F''a) = 180^0$$

$$F''a = FA\ \omega_1^2 = 150 \cdot 1{,}4^2 = 294 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(FA,\ aA'') = 270^0$$

$$aA'' = FA\ \omega_1' = 150 \cdot 2{,}14 = 321 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Der Punkt E_2 wird nach Abschnitt **9** bestimmt:

$$(AE,\ A''e) = 180^0$$

$$A''e = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{170^2}{330} = 88 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(E'E_1,\ E''e_1) = (AD,\ A'D') = 270^0$$

$$E''e_1 = 2\,E'E_1 \frac{A'E_1}{AE} = 2 \cdot 120 \frac{170}{330} = 124 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$eE_2 \perp A''e, \quad e_1E_2 \perp E''e_1.$$

Nachdem die Strecke $A''A_2$ nach Größe, Richtung und Sinn gleich E_2E'' aufgetragen ist, können die Punktgruppen

$$A''D''B_2C_2E_2 \simeq A_2D_2B''C''E'' \simeq ADBCE$$

und hierdurch der Beschleunigungsplan $Q''A''D''B''C''E''$ gebildet werden.

Beispiel 3. Fig. 41—43. In dem sechsgliedrigen Getriebe $ABCDEFG$, Fig. 41, ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

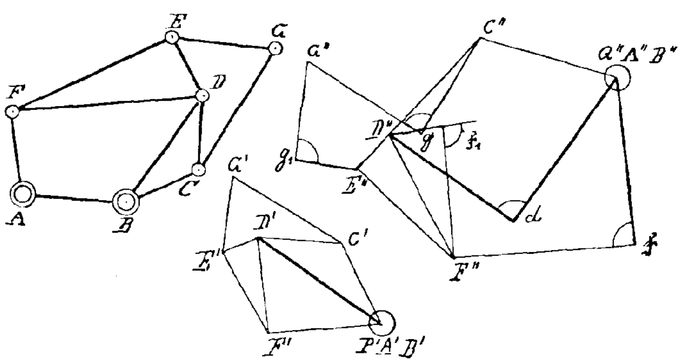
$$\omega_1 = -1{,}17 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = -1{,}18 \text{ sec}^{-2}$$

geführt werden soll. Da die Stabvierecke $ABDF$ und $CDEG$ in dieser Reihenfolge nur je zwei Glieder mit unbekannten Drehgeschwindigkeiten

L. Fig. 41. B. Fig. 43.



G. Fig. 42.

enthalten, so kommen die Regeln der Abschnitte 4 und 8 zur Anwendung, wie folgt:

Der Geschwindigkeitsplan Fig. 42.

$$(BD,\ B'D') = 270^0$$

$$B'D' = BD\ \omega_1 = 173 \cdot 1{,}17 = 202 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$A'F' \perp AF, \quad D'F' \perp DF$$

$$B'C'D' \simeq BCD, \quad D'E'F' \simeq DEF$$

$$C'G' \perp CG, \quad E'G' \perp EG.$$

Der Beschleunigungsplan Fig. 43.

$$(BD,\ B''d) = 180^0$$

$$B''d = BD\ \omega_1^2 = 173 \cdot 1{,}17^2 = 236 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(BD,\ dD'') = 270^0$$

$$dD'' = BD\ \omega' = 173 \cdot 1{,}18 = 204 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(AF,\ A''f) = 180^0$$

$$A''f = \frac{(A'F')^2}{AF} = \frac{156^2}{108} = 225 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(DF,\ D''f_1) = 180^0$$

$$D''f_1 = \frac{(D'F')^2}{DF} = \frac{132^2}{250} = 70 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$fF'' \perp A''f, \quad f_1F'' \perp D''f_1$$

$$B''C''D'' \simeq BCD, \ D''F''E'' \simeq DFE$$

$$(CG,\ C''g) = 180^0$$

$$C''g = \frac{(C'G')^2}{CG} = \frac{172^2}{190} = 155 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(EG,\ E''g_1) = 180^0$$

$$E''g_1 = \frac{(E'G')^2}{EG} = \frac{106^2}{140} = 80 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$gG'' \perp C''g, \quad g_1G'' \perp E''g_1.$$

Beispiel 4. In dem achtgliedrigen Getriebe Fig. 44 ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -0{,}95 \text{ sec}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = -0{,}63 \text{ sec}^{-2}$$

geführt werden soll. Das Getriebe enthält nur *ein* Stabviereck $ABDF$, alle übrigen Stabpolygone enthalten, abgesehen von den starren Stabdreiecken, mehr als vier Seiten. Die Pläne für den Teil $ABCDEFG$ des Getriebes werden wie im Beispiel 3 gebildet; die Beschreibung braucht hier nicht wiederholt zu werden.

Im *Geschwindigkeitsplan* Fig. 45 sind darauf die drei Geraden

$$C'M_1K' \perp CMK$$

$$G'L_1H' \perp GLH$$

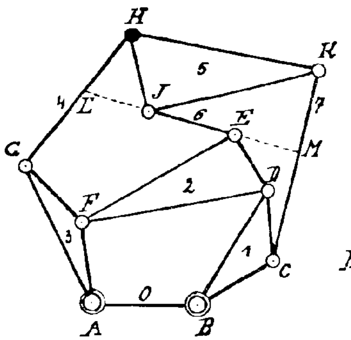
$$L_1I'E'M_1 \perp LIEM$$

zu ziehen und auf diesen nach Abschnitt 2 die dem starren Dreieck KHI entsprechenden Punkte K', H', I' zu bestimmen. Statt dessen kann man auch die Punktgruppe

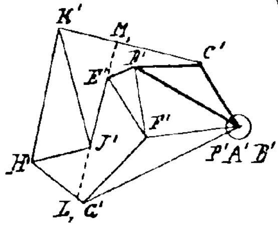
$$L_1 I' M_1 K' H' \simeq LIMKH$$

bilden, da den Dreiecken LHI, HIK, IKM die ähnlichen Dreiecke $L_1 H' I'$, $H' I' K'$, $I' K' M_1$ entsprechen. Der Geschwindigkeitsplan

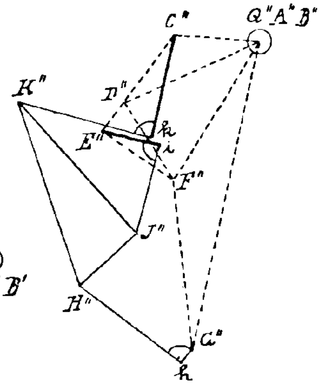
L. Fig. 44.



G. Fig. 45.



B. Fig. 46.



wird *unbestimmt*, wenn die drei Geraden $C'K'$, $G'H'$, $E'I'$ in *einem* Punkte sich schneiden.

Im *Beschleunigungsplan*, Fig. 46, sind die Winkel

$$(CK,\ C''k) = (GH,\ G''h) = (EI,\ E''i) = 180^0,$$

darauf die Strecken:

$$C''k = \frac{(C'K')^2}{CK} = \frac{195^2}{265} = 143 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$G''h = \frac{(G'H')^2}{GH} = \frac{85^2}{228} = 32 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$E''i = \frac{(E'I')^2}{EI} = \frac{100^2}{120} = 83 \text{ cm sec}^{-2}$$

und die Geraden:

$$kK'' \perp C''k, \quad hH'' \perp G''h, \quad iI'' \perp E''i$$

aufzutragen. Die Lage des Dreiecks $K''H''I''$ konnte darauf durch das im Abschnitt 7 und in den Figuren 23—25 beschriebene Verfahren bestimmt werden.

Beispiel 5. In dem Getriebe des vorigen Beispiels, Fig. 44, soll das Glied 4 (GH) festgestellt und das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+ 0{,}67 \text{ sec}^{-1}$ geführt werden. Es sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegung III zu bestimmen. Man bildet die Bewegung III nach Abschnitt **10, 3** durch Zusammensetzung der ζ_1-fachen Geschwindigkeiten der im vorigen Beispiel bestimmten Bewegung I mit den ζ_2-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, in der das Getriebe, ohne seine Form zu ändern, mit der Drehgeschwindigkeit $+1$ um irgend einen festen Punkt sich dreht. In der Bewegung I haben die Glieder 1 und 4 die Drehgeschwindigkeiten

$$\omega_{11} = -0{,}95$$

und

$$\omega_{41} = \frac{G'H'}{GH}\sin(GH,\ G'H') = -\tfrac{85}{228} = -0{,}37.$$

Damit

$$\zeta_1\omega_{11} + \zeta_2 = +0{,}67$$

$$\zeta_1\omega_{41} + \zeta_2 = \quad 0$$

werde, ist

$$\zeta_1 = \frac{+0{,}67}{-0{,}95+0{,}37} = -1{,}15$$

und

$$\zeta_2 = -\zeta_1\omega_{41} = -1{,}15\cdot 0{,}37 = -0{,}42$$

zu wählen. Die folgende Tabelle enthält die aus Fig. 45 entnommenen Drehgeschwindigkeiten ω_1 der Bewegung I und die nach der Formel

$$\omega_3 = -1{,}15\,\omega_1 - 0{,}42$$

berechneten Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	$-0{,}95$	$-0{,}38$	$-1{,}17$	$-0{,}37$	$-0{,}69$	$-0{,}83$	$-0{,}74$
ω_3	$-0{,}42$	$+0{,}67$	$+0{,}02$	$+1{,}35$	0	$+0{,}37$	$+0{,}53$	$+0{,}43$

Will man den Geschwindigkeitsplan der Bewegung III auftragen, so genügt die Berechnung von *zwei* Drehgeschwindigkeiten, z. B.

$$\omega_{33} = +1{,}35, \quad \omega_{53} = +0{,}37.$$

Der Pol des Geschwindigkeitsplans P' fällt selbstverständlich mit den Punkten G', H' zusammen.

Beispiel 6. Das Getriebe, Fig. 44, hat bei der durch die Fig. 45 und 46 dargestellten Bewegung I folgende Drehgeschwindigkeiten ω_1 und Drehbeschleunigungen ω_1'.

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	$-0{,}95$	$-0{,}38$	$-1{,}17$	$-0{,}37$	$-0{,}69$	$-0{,}83$	$-0{,}74$
ω_1'	0	$-0{,}63$	$-0{,}45$	$-1{,}33$	$-0{,}75$	$-0{,}88$	$-0{,}98$	$-0{,}70$
ω_4'	0	$+1{,}27$	$+0{,}32$	$+1{,}01$	$-0{,}01$	$+0{,}50$	$+0{,}68$	$+0{,}78$

Es soll die Bewegung IV des Getriebes gebildet werden, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmen, während die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die Größe

$$\omega'_{54} = +\,0{,}50 \ \sec^{-2}$$

erhalten soll.

Nach Abschnitt **10,** 4 entsteht die zu bestimmende Bewegung IV, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer Bewegung V, in der alle Geschwindigkeiten die Größe Null haben

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} = \ldots$$

und deren Beschleunigungen durch die Gleichungen:

$$\omega'_{05} = \alpha\,\omega_{01}, \quad \omega'_{15} = \alpha\,\omega_{11}, \ \omega'_{25} = \alpha\,\omega_{21} \ \text{usf.}$$

bestimmt werden, wenn man die Größe α so wählt, daß die aus der Zusammensetzung der beiden Bewegungen I und V entstehende Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die vorgeschriebene Größe erhält:

$$\omega'_{54} = +\,0{,}50 = \omega'_{51} + \alpha\,\omega_{51} = -\,0{,}88 - 0{,}69\,\alpha.$$

Im vorliegenden Falle ist also

$$\alpha = -\,\frac{0{,}50 + 0{,}88}{0{,}69} = -\,2{,}00 \ \sec^{-1}.$$

Die in der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle angegebenen Drehbeschleunigungen der Bewegung IV wurden demnach durch die Gleichung

$$\omega'_4 = \omega'_1 - 2{,}00\,\omega_1$$

bestimmt.

Beispiel 7. Das Getriebe, Fig. 47, enthält acht Glieder, nämlich das ruhende Glied, zu dem die Gelenke A, G und der Schieber I gehören, ferner die sechs aus Stäben gebildeten Glieder ABC, BE, CD, DEF, FG, HI und den Schieber H. Das Glied ABC wird mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = +\,1{,}75 \ \sec^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = 0$$

geführt.

Der Geschwindigkeitsplan, Fig. 48. Durch die gegebene positive Drehgeschwindigkeit des Gliedes ABC ist vorgeschrieben:

$$(BC,\ B'C') = 90_0$$

$$B'C' = BC\ \omega_1 = 200 \cdot 1{,}75 = 350 \ \text{cm}\ \sec^{-2}$$

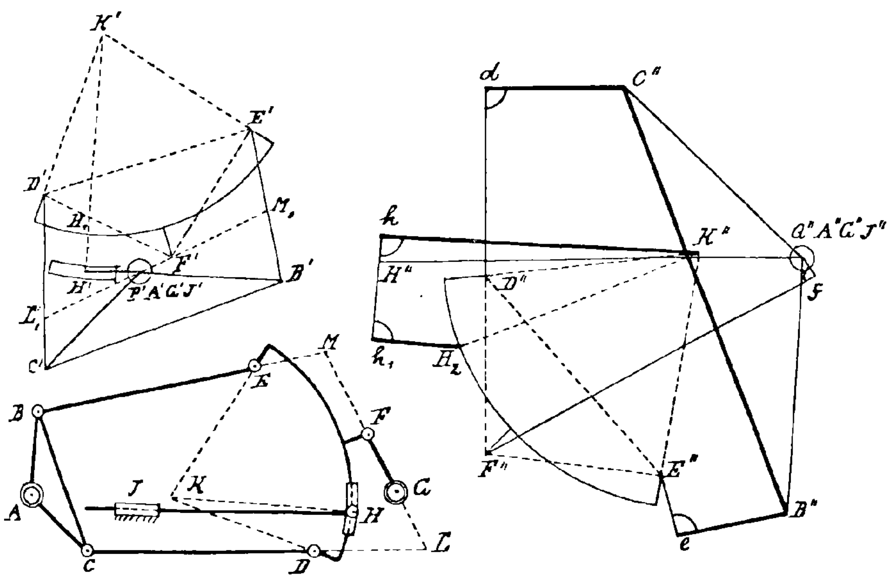
$$B'C'A' \simeq BCA.$$

Der Pol P' und die Punkte G', I' fallen mit A' zusammen. Durch die Bedingungen:

$$B'M_1E' \perp BEM, \quad C'L_1D' \perp CDL, \quad L_1G'F'M_1 \perp LGFM$$

sind ferner die drei Geraden $B'M_1E'$, $C'L_1D'$, $L_1G'F'M_1$ gegeben, auf welchen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte E', D', F' liegen müssen. Man bestimmt ihre Lage entweder nach dem im Abschnitt **2**, Fig. 5 und 6, beschriebenen Verfahren oder einfacher durch

G. Fig. 48. B. Fig. 49.



L. Fig. 47.

die Bedingung, daß den Dreiecken DLF, DFE, EFM, DEK die ähnlichen Dreicke $D'L_1F'$, $D'F'E'$, $E'F'M_1$, $D'E'K'$ entsprechen, und daß folglich:

$$L_1F'M_1E'K'D' \simeq LFMEKD$$

ist. Das Gelenk H bewegt sich infolge der Führung durch den festen Schieber I auf der festen Geraden HI:

$$P'H' \parallel IH,$$

und da sein Abstand KH vom Mittelpunkt des Führungsstabes unveränderlich ist, so ist

$$K'H' \perp KH.$$

Die Strecke H_1H' bezeichnet die relative Geschwindigkeit des Schiebers H gegen den Führungsstab.

Der Beschleunigungsplan, Fig. 49. Da die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes ABC gleich Null gegeben ist, so ist

$$(BC,\ B''C'') = 180^0$$

$$B''C'' = \frac{(B'C')^2}{BC} = \frac{350^2}{200} = 613 \text{ cm sec}^{-2}$$

und

$$B''C''A'' \simeq BCA$$

aufzutragen. Mit A'' fallen die Punkte G'', I'' und der Pol Q'' zusammen. Die Dehnungsbeschleunigungen der Stäbe BE, CD, GF bestimmen ferner die drei Geraden eE'', dD'', fF'', auf denen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte E'', D'', F'' liegen müssen:

$$(BE,\ B''e) = (CD,\ C''d) = (GF,\ G''f) = 180^0$$

$$B''e = \frac{(B'E')^2}{BE} = \frac{210^2}{300} = 147 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$C''d = \frac{(C'D')^2}{CD} = \frac{240^2}{300} = 192 \qquad ,,$$

$$G''f = \frac{(G'F')^2}{GF} = \frac{50^2}{83} = 30 \qquad ,,$$

$$eE'' \perp B''e, \quad dD'' \perp C''d, \quad fF'' \perp G''f.$$

Das im Abschnitt 7, Fig. 23—25, beschriebene Verfahren ergab die Lage des Dreiecks $E''D''F''$ und durch die Bedingung:

$$D''E''F''H_2K'' \simeq DEFHK$$

wurden darauf die den Punkten H_1, K' entsprechenden Punkte H_2, K'' bestimmt. Die Beschleunigung $Q''H''$ des Gelenkes H hat drei Bedingungen zu erfüllen: Sie ist infolge der Führung des Stabes IH durch den festen Schieber I parallel zu IH gerichtet:

$$Q''H'' \parallel IH;$$

wegen Starrheit der Strecke KH ist ferner:

$$(KH,\ K''h) = 180^0$$

$$K''h = \frac{(K'H')^2}{KH} = \frac{320^2}{240} = 427 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$hH'' \perp K''h.$$

Hierdurch ist der Punkt H'' bestimmt. Eine dritte Bedingung, die man als Probe benutzen kann, ergibt sich nach Abschnitt 9 aus der Drehgeschwindigkeit ω der Geschwindigkeitsstrecke H_1H'. Die Drehgeschwindigkeiten der beiden Glieder DEF und H sind:

$$\frac{K'H_1}{KH}\sin(KH,\ K'H_1) = +\frac{270}{240}\text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{K'H'}{KH}\sin(KH,\ K'H') = +\frac{320}{240}\text{ sec}^{-1}.$$

Folglich ist

$$(H_1 H',\ H_2 h_1) = 90^0$$

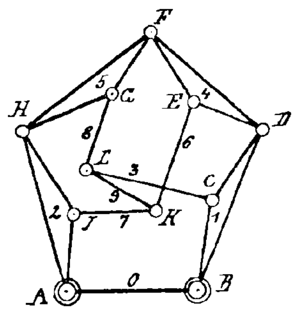
$$H_2 h_1 = H_1 H' \quad \omega = 50 \frac{270 + 320}{240} = 123 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$h_1 H'' \perp H_2 h_1$$

aufzutragen. Diese Gerade $h_1 H''$ muß durch den bereits bestimmten Punkt H'' gehen.

Beispiel 8. In dem zehngliedrigen Getriebe, Fig. 50, ruht das Glied 0 (AB), während das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+ 0{,}50 \text{ sec}^{-1}$ und der Drehbeschleunigung $+ 0{,}20 \text{ sec}^{-2}$ geführt wird. Da das Getriebe kein einziges Stabviereck enthält, so ist das im Abschnitt **10,** 5 beschriebene Verfahren anzuwenden.

L. Fig. 50.



Die Geschwindigkeiten. Wir erteilen dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen I, II, die bestimmt sind durch folgende Annahmen:

$$\text{Bewegung I: } \omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = + 1 \text{ sec}^{-1}$$

$$\text{Bewegung II: } \omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = + 0{,}50 \text{ sec}^{-1}, \ \omega_{22} = 0.$$

Die Bildung der hier nicht mitgeteilten Geschwindigkeitspläne, deren Ergebnisse in den ersten beiden Reihen der folgenden Tabelle zuzusammengestellt sind, bietet keine Schwierigkeit, da in den Stabpolygonen $ABDFH$, $ABDEKI$, $EFGLK$ in dieser Reihenfolge nur je *zwei* Glieder mit unbekannten Drehgeschwindigkeiten vorkommen.

	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	δ_3
Bewegung I	0	0	+ 1,00	+ 0,98	+ 1,08	− 0,57	− 0,43	− 0,75	+ 0,37	+ 0,68	− 0,61
Bewegung II	0	+ 0,50	0	− 0,32	− 0,33	+ 0,52	+ 0,66	+ 0,36	+ 0,34	− 0,11	+ 0,33
Bewegung III	0	+ 0,50	+ 0,54	+ 0,21	+ 0,25	+ 0,21	+ 0,43	− 0,04	+ 0,54	+ 0,26	0

Die von der Aufgabe geforderte Bewegung III ergibt sich durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der Bewegung II mit den ζ-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I, wenn man die Zahl ζ so wählt, daß die Dehnungsgeschwindigkeit δ_3 des Stabes 3 in der zusammengesetzten Bewegung III gleich Null wird:

$$0 = \zeta \delta_{31} + \delta_{32} = - 0{,}61\ \zeta + 0{,}33,$$

$$\zeta = + \frac{33}{61} = + 0{,}54.$$

Die in der letzten Tabellenreihe angegebenen Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III konnten demnach durch die Gleichung

$$\omega_3 = \omega_2 + \xi \omega_1 = \omega_2 + 0{,}54\, \omega_1$$

bestimmt werden.

Die Beschleunigungen. Wir erteilen wieder dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Beschleunigungen einer Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung III übereinstimmen:

$$\omega_{04} = \omega_{03}, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \text{ usf.,}$$

während die Drehbeschleunigungen durch die Annahme

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = +\,0{,}20 \text{ sec}^{-2}, \quad \omega'_{24} = 0$$

bestimmt sind. Der betreffende Plan bietet nichts Bemerkenswertes und ist daher hier nicht mitgeteilt. Das Ergebnis desselben, nämlich die Drehbeschleunigungen aller Glieder und die Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} des dehnbaren Gliedes 3 ist in der ersten Reihe der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Diese Bewegung IV ist zusammenzusetzen mit einer Anfangsbewegung V, deren Geschwindigkeiten also sämtlich Null, und deren Drehbeschleunigungen den Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\omega'_{05} = \omega'_{15} = 0, \quad \omega'_{25} = \alpha\,\omega_{21}, \quad \omega'_{35} = \alpha\,\omega_{31} \text{ usf.}$$

In dieser Bewegung hat die Dehnungsbeschleunigung δ'_{35} des Stabes 3 die Größe

$$\delta'_{35} = \alpha\,\delta_{31}.$$

Die Größe α ist so zu wählen, daß die Dehnungsbeschleunigung δ'_{33} der aus IV und V zusammengesetzten Bewegung III dem *starren* Stabe 3 entspricht:

$$\delta'_{33} = -\,\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \alpha\,\delta_{31}.$$

Mit Benutzung der Tabellenwerte erhält man

$$\alpha = -\,\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}} = +\,\frac{0{,}21^2 + 0{,}08}{0{,}61} = +\,0{,}20.$$

Die in der letzten Tabellenreihe zusammengestellten Drehbeschleunigungen der von der Aufgabe geforderten Bewegung III ergaben sich demnach aus der Gleichung:

$$\omega'_3 = \omega'_4 + \alpha\,\omega_1 = \omega'_4 + 0{,}20\,\omega_1.$$

	ω'_0	ω'_1	ω'_2	ω'_3	ω'_4	ω'_5	ω'_6	ω'_7	ω'_8	ω'_9	δ'_3
Bewegung IV	0	+ 0,20	0	— 0,05	— 0,06	+ 0,11	+ 0,26	+ 0,08	+ 0,24	+ 0,03	+ 0,08
Bewegung V	0	0	+ 1,00 α	+ 0,98 α	+ 1,08 α	— 0,57 α	— 0,43 α	— 0,75 α	+ 0,37 α	+ 0,68 α	— 0,61 α
Bewegung III	0	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,15	+ 0,16	0,00	+ 0,17	— 0,07	+ 0,31	+ 0,17	— 0,044

12. *Die Krümmung der Bahn eines Punktes und ihrer Evolute.* Der bewegte Punkt befindet sich zur Zeit t in A, Fig. 51, und zur Zeit $t + dt$ in C. Die Bahn AC hat den Krümmungshalbmesser

$$AB = r,$$

ihre Evolute BD hat den Krümmungshalbmesser

$$BE = r_1.$$

Der Strecke r wird der Sinn AB, der Strecke r_1 der Sinn BE beigelegt. Der Punkt A hat zur Zeit t die Geschwindigkeit v, die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v''. Die Beschleunigungen v', v'' haben in den Richtungen der

L. Fig. 51.

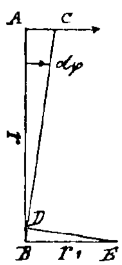
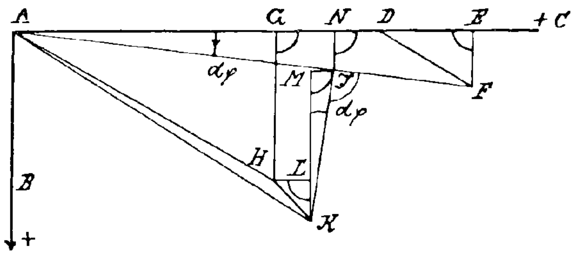


Fig. 52.



Bahnnormalen und der Bahntangente die Komponenten n', u' und n'', u''. Auf der Bahnnormalen geben wir dem Sinn AB, auf der Tangente dem durch die Bedingung

$$(AC, AB) = 90^0$$

bestimmten Sinn AC das positive Vorzeichen. Um allgemein gültige algebraische Beziehungen zu erhalten, betrachten wir einen Fall, in dem alle Größen das positive Vorzeichen tragen. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind in einer besonderen Figur 52 dargestellt, ihre unendlich kleinen Änderungen natürlich in unendlich starker Verzerrung. In dem unendlich kleinen Zeitabschnitt von t bis $t + dt$ ändert sich

$$v\,(AD) \text{ in } v + dv\,(AF)$$
$$v'(AH) \text{ in } v' + dv'(AK)$$
$$u'(AG) \text{ in } u' + du'(AJ)$$
$$n'(GH) \text{ in } n' + dn'(JK).$$

Die Geschwindigkeitsstrecke AF $(v + dv)$ bildet die geometrische Summe der zwei Geschwindigkeiten $AD(v)$ und $DF(v'dt)$ oder der drei Geschwindigkeiten $AD(v)$, $DE(u'dt)$ und $EF(n'dt)$. Da

$$AE = AD + DE$$

$$(v + dv) \cos d\varphi = v + u'dt$$

ist, so folgt

$$u' = \frac{dv}{dt}. \tag{32}$$

Die Richtung der Geschwindigkeit v dreht sich in der Zeit dt in positivem Sinne um den Winkel

$$d\varphi = \frac{n'dt}{v} = \frac{vdt}{r}. \tag{33}$$

Daher hat der Krümmungshalbmesser der Bahn die Größe

$$r = \frac{v^2}{n'} \tag{34}$$

und die Strecke AB hat stets den Sinn von n'.

Aus der Zeichnung ist zu ersehen:

$$AN = AG + HL + MJ$$

oder:

$$(u' + du') \cos d\varphi = u' + u''dt + (n' + dn') \sin d\varphi$$

oder:

$$u'' = \frac{du'}{dt} - n'\frac{d\varphi}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v}, \tag{35}$$

ferner:

$$GH + LK = NJ + MK$$

oder:

$$n' + n''dt = (u' + du') \sin d\varphi + (n' + dn') \cos d\varphi$$

oder:

$$n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v}. \tag{36}$$

Auch der Krümmungshalbmesser r_1 der Evolute durchläuft in der Zeit dt in positivem Sinne den Winkel $d\varphi$, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Änderung dr von r negativ ist, wenn r_1, d. h. die Strecke BE, den positiven Sinn AC hat:

$$d\varphi = -\frac{dr}{r_1} = \frac{vdt}{r},$$

woraus folgt

$$\frac{r_1}{r} = -\frac{1}{v}\frac{dr}{dt}.$$

Aus Gleichung (34) ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{dr}{dt} = 2\frac{v}{n'}\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{n'^2}\frac{dn'}{dt}$$

und nach Gleichung (32) und (36)

$$\frac{dr}{dt} = 3\frac{vu'}{n'} - \frac{v^2 n''}{n'^2}.$$

Daher ist:

(37) $$\frac{r_1}{r} = \frac{vn''}{n'^2} - \frac{3u'}{n'}.$$

Der Krümmungshalbmesser BE hat den positiven Sinn AC, wenn algebraisch

$$vn'' > 3u'n'$$

ist. Der Punkt A kann seine Bahn mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durchlaufen. Bei einer zwangläufigen Bewegung, d. h. bei gegebener Bahn haben aber in jedem Bahnpunkte die Größen

$$\frac{v^2}{n'} \text{ und } \left(\frac{vn''}{n'^2} - \frac{3u'}{n'}\right)$$

unveränderliche Werte.

13. *Die Beschleunigungen zweiter Ordnung der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe.* — Wir wählen für die relative Bewegung des Punktes A gegen den starr mit ihm verbundenen Punkt B die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes, und da bei dieser Bewegung A den Kreis vom Halbmesser

$$r = AB = a$$

um den ruhenden Punkt B beschreibt, so ist:

(38) $$n' = \frac{v^2}{a} = a\omega^2,$$

wenn wie früher mit

$$\omega = \frac{v}{a}$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke BA im Sinne der Uhrzeigerbewegung bezeichnet wird. Ferner ist nach den Gleichungen (32), (35), (36):

(39) $$u' = \frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt} = a\omega',$$

(40) $$u'' = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v} = a\left(\frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3\right) = a\left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3\right)$$

und

(41) $$n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v} = 2a\omega\frac{d\omega}{dt} + a\omega\omega' = 3a\omega\omega'.$$

Die Tangentialbeschleunigung zweiter Ordnung u'' hat den positiven Sinn AC, wenn algebraisch

$$\frac{d\omega'}{dt} > \omega^3$$

ist, und die Normalbeschleunigung n'' hat den positiven Sinn AB, wenn ω und ω' *gleiche* Vorzeichen haben. Gleichung (41) folgt auch aus Gleichung (37), wenn r_1 gleich Null gesetzt wird. In Übereinstimmung mit den Abschnitten **1** und **6** nennen wir das Verhältnis

$$\omega'' = \frac{u''}{a} = \frac{d\omega'}{dt} - \omega^3 = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 \tag{42}$$

die *Drehbeschleunigung zweiter Ordnung* und das Verhältnis

$$\delta'' = -\frac{n''}{a} = -3\omega\omega' \tag{43}$$

die *Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung* der starren Strecke a. Es ist hierbei zu beachten, daß die relative Dehnungsbeschleunigung $a\delta''$ des Punktes A gegen B den positiven Sinn BA hat, wenn n'' negativ ist.

Da die gleichzeitigen Werte der Drehgeschwindigkeit ω für alle Strecken AB, BC, CA ... der starren Punktgruppe ABC ... gleich groß sind, so haben auch die Größen $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, ω'', δ'' für alle Strecken gleichzeitig dieselben Werte. Werden von einem Punkte B''' aus die Strecken $B'''A'''$, $B'''C'''$, $B'''D'''$ ... aufgetragen, welche die nach Gleichung (40) und (41) bestimmten relativen Beschleunigungen zweiter Ordnung der Punkte A, C, D ... gegen den Punkt B darstellen, so entsteht, wie in den Abschnitten **2** und **7**, eine Punktgruppe $A'''B'''C'''D'''$ ..., die der starren Gruppe $ABCD$ ... des Lageplanes geometrisch ähnlich ist:

$$A'''B'''C'''D''' \ldots \simeq ABCD \ldots \tag{44}$$

Der gemeinschaftliche Beschleunigungswinkel zweiter Ordnung:

$$\gamma'' = (AB, A'''B''') = (BC, B'''C''') = \cdots$$

wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\delta''}{\cos\gamma''} = \frac{\omega''}{\sin\gamma''} = \frac{A'''B'''}{AB} = \frac{B'''C'''}{BC} = \cdots \tag{45}$$

Dieser Winkel kann alle Größen annehmen, da die Werte von δ'' und ω'' positiv und negativ sein können. Dem gegenüber erinnern wir daran, daß der *Geschwindigkeitswinkel* γ einer starren Strecke gleich 90^0 oder gleich 270^0 ist, und daß der Winkel γ' der Beschleunigungen *erster* Ordnung an die Bedingung

$$90^0 < \gamma' < 270^0$$

gebunden ist.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung $B'''A'''B'''C'''$ ... für eine starre Punktgruppe $ABC\ldots$ gebildet werden kann, wenn außer den Größen ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ noch die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''B'''$ irgend eines Punktes B der Gruppe bekannt ist. Denn die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''C'''$ irgend eines anderen Punktes C bildet die geometrische Summe aus $R'''B'''$ und der relativen Beschleunigung $B'''C'''$ des Punktes C gegen B. R''' ist also der Pol des Beschleunigungsplanes. Der im Lageplan durch die Bedingung

$$RABC\ldots \simeq R'''A'''B'''C'''\ldots$$

bestimmte Pol R ist der einzige Punkt der bewegten Ebene ABC, dessen Beschleunigung zweiter Ordnung zur Zeit t gleich Null ist. Für jeden Punkt A ergibt sich die Beschleunigung zweiter Ordnung AA_2 aus den algebraischen Gleichungen:

$$(46) \qquad \begin{cases} AA_2 \sin(RA, AA_2) = \omega''\, RA \\ AA_2 \cos(RA, AA_2) = \delta''\, RA. \end{cases}$$

14. *Der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung eines ebenen Getriebes.* — Es erscheint zweckmäßig, an dieser Stelle die nahe Verwandtschaft hervorzuheben, die inbetreff ihrer Entstehung zwischen dem Geschwindigkeitsplan und den Beschleunigungsplänen eines Getriebes zu bemerken ist.

Der *Geschwindigkeitsplan* kann gebildet werden, wenn außer dem festgestellten Gliede die Drehgeschwindigkeit *eines* Gliedes bekannt ist. Dem Bildungsgesetz liegt die Bedingung zu Grunde, daß die Dehnungsgeschwindigkeit eines starren Stabes gleich Null ist.

Der Plan der Beschleunigungen *erster* Ordnung kann gebildet werden, wenn außer dem Geschwindigkeitsplan noch die Drehbeschleunigung erster Ordnung für *ein* Glied gegeben ist. Dem Bildungsgesetz liegt eine ähnliche Bedingung zu Grunde: Die Dehnungsbeschleunigung eines jeden Stabes im Getriebe ist gleich dem negativen Quadrat seiner Drehgeschwindigkeit; sie ist also bestimmt durch den Geschwindigkeitsplan.

Um endlich die Beschleunigungen *zweiter* Ordnung bilden zu können, muß außer den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen *erster* Ordnung noch die Drehbeschleunigung zweiter Ordnung für *ein* Glied bekannt sein. Denn für jeden Stab des Getriebes ist die Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung bekannt: sie ist gleich dem negativen dreifachen Produkt aus der Drehgeschwindigkeit des Stabes und seiner Drehbeschleunigung erster Ordnung.

Es wird demnach genügen, die Bildung eines solchen Planes an einem Beispiel zu erklären.

Beispiel 9. Für das geführte Glied BCD des in den Fig. 41 u. 53 dargestellten Getriebes möge gegeben sein:

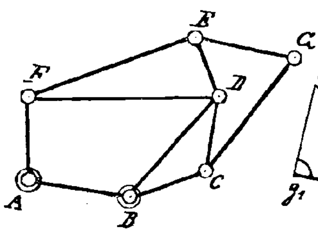
$$\omega = -1{,}17 \text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega' = -1{,}18 \text{ sec}^{-2}$$

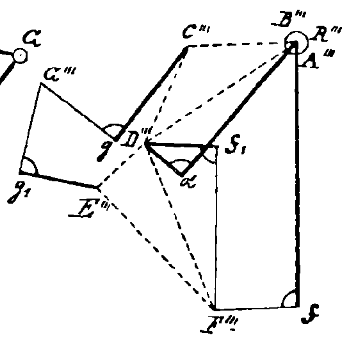
$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -2{,}64 \text{ sec}^{-3}.$$

In den Figuren 42 und 43 sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erster Ordnung in den normalen Maßstäben dargestellt.

L. Fig. 53.



B. Fig. 54.



Das nachstehende Verzeichnis enthält die aus jenen Figuren entnommenen Werte der Stablängen a, der Geschwindigkeiten $a\omega$, der Beschleunigungen $a\omega'$ und die hieraus berechneten Werte von $a\delta'' = -3a\omega\omega'$

Stab	a cm	$a\omega$ cm sec^{-1}	$a\omega'$ cm sec^{-2}	$a\delta''$ cm sec^{-3}
BD	173	-202	-204	-715
AF	108	-156	-246	-1066
FD	250	-132	-175	-277
CG	190	-172	-180	-489
EG	140	-106	-132	-300

Der in $\frac{1}{3}$ der normalen Größe, also in dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sec}^{-3}$$

dargestellte Beschleunigungsplan zweiter Ordnung, Fig. 54, ergibt sich aus den folgenden Bedingungen:

$$B'''d = -715 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(BD,\ B'''d) = 180^0.$$

$$dD''' = a\left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3\right) = 173(-2{,}64 + 1{,}17^3) = -180 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(BD,\ dD''') = 270^0.$$

$$A'''f = -1066 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(AF,\ A'''f) = 180^0.$$

$$D'''f_1 = -277 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(DF,\ D'''f_1) = 180^0.$$

$$fF''' \perp A'''f, \quad f_1F''' \perp D'''f_1.$$

$$B'''C'''D''' \simeq BCD, \quad D'''E'''F''' \simeq DEF$$

$$C'''g = -489 \text{ cm sec}^{-3},$$

daher

$$(CG,\ C'''g) = 180^0.$$

$$E'''g_1 = -300 \text{ cm sec}^{-3},$$

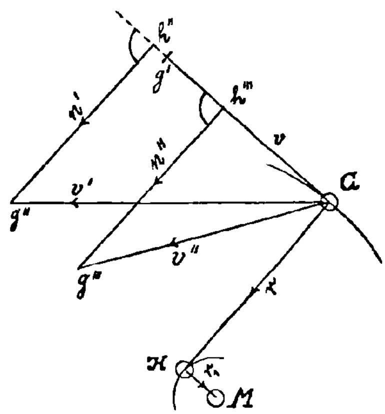
daher

$$(EG,\ E'''g_1) = 180^0.$$

$$gG''' \perp C'''g, \quad g_1G''' \perp E'''g_1.$$

15. *Die Krümmung der Bahn und der Bahnevolute eines mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punktes.* — Nachdem für irgend eine Bewegung des Getriebes, d. h. bei willkürlicher Wahl der Drehgeschwindigkeit und der Drehbeschleunigungen des geführten Gliedes, die Pläne der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung gebildet worden sind, können die Krümmungshalbmesser der Bahn und ihrer Evolute für jeden mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punkt nach den Gleichungen (34) und (37) ermittelt werden, indem man die algebraischen Werte der vier Größen v, n', u', n'' aus den Plänen entnimmt. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen.

Fig. 55.



Beispiel 10. Das Gelenk G des Getriebes Fig. 41 und 53 hat die Geschwindigkeit

$$v = P'G' \perp\!\!\!\!= Gg', \quad \text{Fig. 42 und 55}$$

die Beschleunigung erster Ordnung

$$v' = Q''G'' \perp\!\!\!\!= Gg'', \quad \text{Fig. 43 und 55}$$

und die Beschleunigung zweiter Ordnung

$$v'' = R'''G''' \perp Gg''', \quad \text{Fig. 54 und 55.}$$

v	ist	in	dem	Maßstabe	$1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sec}^{-1}$
v'	„	„	„	„	$1 \text{ cm} = 100 \text{ cm sec}^{-2}$
v''	„	„	„	„	$1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sec}^{-3}$

dargestellt. Mit Berücksichtigung dieser Maßstäbe, entnimmt man aus Fig. 55:

$$Gg' = v = -280 \text{ cm sec}^{-1}$$
$$Gh'' = u' = -310 \text{ cm sec}^{-2}$$
$$h''g'' = n' = +270 \text{ cm sec}^{-2}$$
$$h'''g''' = n'' = +850 \text{ cm sec}^{-3}.$$

v und u' sind negativ, weil die Winkel

$$(v, n') = (u', n') = 270^0$$

sind, n'' ist positiv, weil der Sinn von n'' mit dem von n' übereinstimmt. Nach den Gl. (34) und (37) ist also

$$GK = r = \frac{280^2}{270} = 290 \text{ cm}$$

und

$$KM = r_1 = 290\left(-\frac{280 \cdot 850}{270^2} + 3\,\frac{310}{270}\right) = +52 \text{ cm}.$$

Da r_1 positiv ist, so ist der Winkel

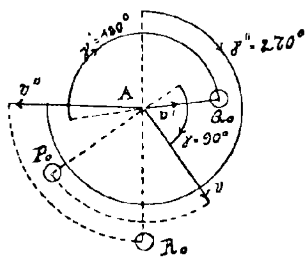
$$(KM, GK) = (r_1, r) = 90^0.$$

16. *Die geometrische Bewegung einer Ebene.* — Die Krümmungen der Bahnen und der Bahnevoluten aller Punkte einer bewegten Ebene werden für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt durch die Lage der drei Pole P, Q, R und durch die drei Größen ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$. Für eine *zwangläufige* Bewegung, die z. B. von einem Getriebegliede und von der starr mit ihm verbundenen Ebene ausgeführt wird, sind die Bahnen der Punkte bestimmt und unabhängig von den genannten drei Größen. Zu jeder Gruppe von willkürlich gewählten Werten ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ gehört eine bestimmte Gruppe von drei Polen P, Q, R. Die hier inbetracht kommenden Beziehungen nehmen ihre einfachste Form an, wenn man ω gleich der positiven Zahleneinheit und $\frac{d\omega}{dt}$ sowie $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ gleich Null wählt. Wir nennen diese Bewegung die *geometrische* Bewegung, weil die Zeit aus ihrer Betrachtung beseitigt wird. Nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch alle Beschleunigungen werden lediglich durch die Längeneinheit gemessen und können im Maßstab des Lageplans dargestellt werden. Für die geometrische Bewegung ist also

$$(47)\quad \begin{cases} \omega \ = +1 \\ \gamma \ = 90^0 \\ \delta' = -\omega^2 = -1 \\ \omega' = \dfrac{d\omega}{dt} = 0 \\ \gamma' = 180^0 \\ \delta'' = -3\omega\omega' = 0 \\ \omega'' = \dfrac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1 \\ \gamma'' = 270^0. \end{cases}$$

Wenn die drei Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung bekannt sind, so bestimmt man für jeden Punkt A der Ebene die Geschwindigkeit v, die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v'' durch folgende Bedingungen, Fig. 56:

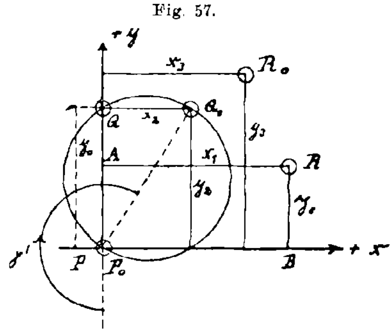
Fig. 56.



$$(48)\quad \begin{cases} \gamma \ = (P_0A,\ v) \ = 90^0, & v \ = P_0A \\ \gamma' = (Q_0A,\ v') = 180^0, & v' = Q_0A \\ \gamma'' = (R_0A,\ v'') = 270^0, & v'' = R_0A. \end{cases}$$

Durch den Geschwindigkeitsplan und die beiden Beschleunigungspläne eines Getriebes sind für den Zeitpunkt der Betrachtung und für jedes Glied gegeben: die Lage der Pole P, Q, R und die algebraischen Werte der Größen ω, δ', ω', δ'', ω''. Es ergibt sich also die Aufgabe, hieraus die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung zu bestimmen. Wir benutzen zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Koordinatensystem, Fig. 57, dessen Anfangspunkt mit P, dessen y-Achse auch dem Sinne nach mit PQ zusammenfällt, und dessen x-Achse durch die Bedingung:

Fig. 57.



$$(y,\ x) = 90^0$$

bestimmt ist. Der Geschwindigkeitspol P_0 fällt auf den ruhenden Punkt der Ebene, also auf den Pol P. Wir bezeichnen die bekannten Koordinaten der Punkte Q und R mit x_0, y_0 und x_1, y_1, ferner die unbekannten Koordinaten der Punkte Q_0 und R_0 mit x_2, y_2 und x_3, y_3. Die Gleichungen zur Bestimmung dieser vier unbekannten Größen ergeben sich, indem man für zwei beliebige Punkte A, B der Ebene nach Abschnitt **12** die Bedingungen bildet, daß jede der beiden Größen $\frac{v^2}{n'}$ und $\left(\frac{vn''}{n'^2} - 3\frac{u'}{n'}\right)$ in der geometrischen Bewegung denselben Wert haben muß wie in der gegebenen Bewegung. Um diese Bedingungen tunlichst einfach zu gestalten, wählen wir für den Punkt A die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = y_1$$

und für den Punkt B:

$$x = x_1, \quad y = 0.$$

Die Komponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser beiden Punkte haben die in dem nachstehenden Verzeichnis zusammengestellten Werte.

	Punkt A in der gegebenen Bewegung	Punkt A in der geometrischen Bewegung	Punkt B in der gegebenen Bewegung	Punkt B in der geometrischen Bewegung
v	$+ y_1 \omega$	$+ y_1$	$+ x_1 \omega$	$+ x_1$
n'	$(y_0 - y_1)\omega^2$	$y_2 - y_1$	$- x_1 \omega^2 - y_0 \omega'$	$x_2 - x_1$
u'	$(y_1 - y_0)\omega'$	$+ x_2$	$x_1 \omega' - y_0 \omega^2$	$- y_2$
n''	$+ x_1 \omega''$	$- x_3$	$- y_1 \omega''$	$+ y_3$

Die bezeichneten Bedingungen lauten also für den Punkt A:

$$\frac{y_1^2 \omega^2}{(y_0 - y_1)\omega^2} = \frac{y_1^2}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x_1 y_1 \omega \omega''}{(y_0 - y_1)^2 \omega^4} - \frac{3(y_1 - y_0)\omega'}{(y_0 - y_1)\omega^2} = - \frac{y_1 x_3}{(y_2 - y_1)^2} - \frac{3 x_2}{y_2 - y_1}$$

und für den Punkt B:

$$- \frac{x_1^2 \omega^2}{x_1 \omega^2 + y_0 \omega'} = \frac{x_1^2}{x_2 - x_1}$$

$$- \frac{x_1 y_1 \omega \omega''}{(x_1 \omega^2 + y_0 \omega')^2} + 3 \frac{x_1 \omega' - y_0 \omega^2}{x_1 \omega^2 + y_0 \omega'} = \frac{x_1 y_3}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{3 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Beachtet man, daß nach den Gl. (17), (43), (45):

$$\omega' = - \omega^2 \operatorname{tg} \gamma'$$
$$\omega'' = - 3 \omega \omega' \operatorname{tg} \gamma'' = + 3 \omega^3 \operatorname{tg} \gamma' \operatorname{tg} \gamma''$$

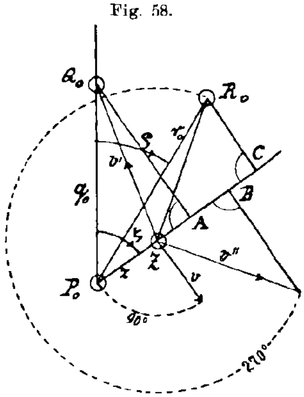
ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$(49) \qquad \begin{cases} x_2 = y_0 \operatorname{tg} \gamma' \\ y_2 = y_0 \\ x_3 = 3 \operatorname{tg} \gamma' (y_1 - y_0 - x_1 \operatorname{tg} \gamma'') \\ y_3 = 3 \operatorname{tg} \gamma' (y_0 \operatorname{tg} \gamma' - x_1 - y_1 \operatorname{tg} \gamma''). \end{cases}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ersieht man, daß der Beschleunigungspol Q bei jeder Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung auf dem festen Kreise vom Durchmesser $P_0 Q_0$ liegt, und daß der Winkel $(QP_0,\ P_0 Q_0)$ gleich dem Beschleunigungswinkel γ' der gegebenen Bewegung ist.

Für die folgende Darstellung der geometrischen Bewegung einer Ebene empfiehlt es sich, ein Polarkoordinatensystem, Fig. 58, anzuwenden, dessen Anfangspunkt mit dem Pol P_0 und dessen feste Achse auch dem Sinne nach mit $P_0 Q_0$ zusammenfällt. Wir bestimmen die Lage des Poles Q_0 durch den Vektor

Fig. 58.



$$P_0 Q_0 = q_0,$$

ferner die Lage des Poles R_0 durch den Winkel

$$(P_0 Q_0,\ P_0 R_0) = \varrho$$

und den Vektor

$$P_0 R_0 = r_0,$$

endlich die Lage eines beliebigen Punktes Z der Ebene durch den Winkel

$$(P_0 Q_0,\ P_0 Z) = \zeta$$

und den Vektor

$$P_0 Z = z.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes Z hat, da ω gleich $+1$ ist, die Größe

(50) $$v = +z,$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(z,\ v) = 90^0$$

bestimmt sind. Die Beschleunigung erster Ordnung des Punktes Z hat Größe, Richtung und Sinn der Strecke ZQ_0, weil

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und daher der Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = 180^0$$

ist. Folglich ist:

(51) $$\begin{cases} n' = ZA = P_0 A - P_0 Z = q_0 \cos\zeta - z \\ u' = A Q_0 = -q_0 \sin\zeta. \end{cases}$$

Hierbei ist zu beachten, daß auf der Bahnnormalen der Sinn des Vektors $P_0 Z$ und auf der Bahntangente der Sinn von v das positive

Vorzeichen trägt. Die Beschleunigung *zweiter* Ordnung des Punktes Z hat, weil

$$\delta'' = -3\,\omega\,\omega' = 0$$

$$\omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1$$

$$\gamma'' = 270^0$$

ist, die Größe

$$v'' = R_0 Z,$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(R_0 Z,\ v'') = 270^0$$

bestimmt sind. Demnach ist

$$n'' = ZB = CR_0 = r_0 \sin(\zeta - \varrho). \tag{52}$$

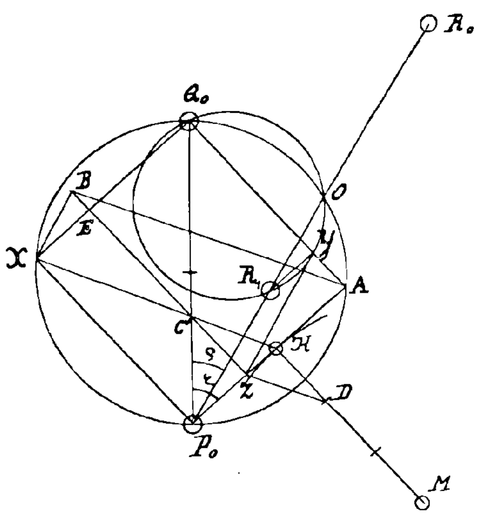
Nach den Gl. (34) und (37) ergeben sich die Krümmungshalbmesser r, r_1 der Bahnkurve und deren Evolute für den Punkt Z:

$$r = \frac{z^2}{q_0 \cos\zeta - z} \tag{53}$$

$$r_1 = r\left(\frac{z\,r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{(q_0 \cos\zeta - z)^2} + \frac{3\,q_0 \sin\zeta}{q_0 \cos\zeta - z}\right). \tag{54}$$

Diese Formeln werden durch Fig. 59 geometrisch dargestellt. Man zieht im Kreise vom Durchmesser $P_0 Q_0$ die Sehne $Q_0 X$ parallel zur Sehne $P_0 ZA$, ferner die Gerade $ZCEB$ normal zu $P_0 Z$. Die Gerade XC schneidet dann die Gerade $P_0 Z$ im Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve des Punktes Z. Denn wegen Ähnlichkeit der Punktgruppen

Fig. 59.



$$CP_0ZK \sim CQ_0EX$$

ist

$$\frac{ZK}{P_0 Z} = \frac{XE}{EQ_0} = \frac{ZK}{z} = \frac{z}{q_0 \cos\zeta - z},$$

also

$$ZK = r.$$

Man macht ferner

$$P_0 R_1 = \tfrac{1}{3} P_0 R_0,$$

zieht im Kreise vom Durchmesser $Q_0 R_1$ die Sehne $R_1 Y$ parallel zu $P_0 Z$, dann XB parallel zu YZ, ZD parallel zu BA und macht KM

gleich $3KD$; dann ist M der Krümmungsmittelpunkt der Bahnevolute des Punktes Z. Denn es ist:

$$AY = \tfrac{1}{3} r_0 \sin(\zeta - \varrho), \quad ZA = q_0 \cos\zeta - z$$

$$ZB = ZE + XE\frac{AY}{ZA} = q_0 \sin\zeta + z\frac{r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3(q_0 \cos\zeta - z)}$$

$$\tfrac{1}{3} KM = KD = ZK\frac{ZB}{ZA} = r\left(\frac{z r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3(q_0 \cos\zeta - z)^2} + \frac{q_0 \sin\zeta}{(q_0 \cos\zeta - z)}\right)$$

$$KM = r_1.$$

Wir entnehmen aus den Gleichungen (53) und (54) die folgenden Sätze, wobei wir absehen von den Grenzfällen, in denen z. B. einer der drei Pole P_0, Q_0, R_0 unendlich fern liegt, oder zwei von ihnen zusammenfallen.

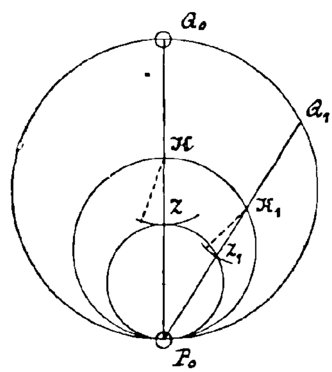
1. Der Pol P_0 ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Bahn einen Krümmungshalbmesser von der Größe Null hat.

2. Der Krümmungshalbmesser r der Bahn hat für alle Punkte innerhalb des Kreises P_0Q_0 einen positiven, für alle Punkte außerhalb dieses Kreises einen negativen Wert. Im ersten Falle hat also die Strecke ZK den Sinn P_0Z im zweiten den Sinn ZP_0. Für alle Punkte des Kreises P_0Q_0 ist r unendlich groß; die Richtungen der Geschwindigkeiten aller dieser Punkte gehen durch den Pol Q_0. Man hat den Kreis P_0Q_0 den Wendekreis des Bewegungszustandes und den Punkt Q_0 den Wendepol genannt.

3. Für alle Punkte der zu P_0Q_0 normal gerichteten Geraden P_0F, Fig. 64, fällt der Krümmungsmittelpunkt der Bahn mit dem Pol P_0 zusammen.

4. Bezeichnet K, Fig. 60, den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines auf der Achse P_0Q_0 liegenden Punktes Z, und sind KK_1, Q_0Q_1, ZZ_1 die von den Punkten K, Q_0, Z auf eine durch P_0 gehende Gerade gefällten Lote, so ist K_1 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes Z_1. Denn es ist

Fig. 60.



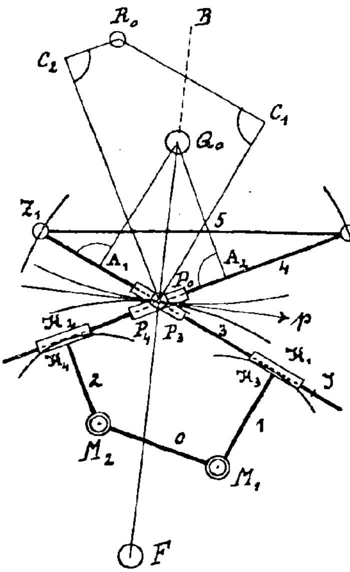
$$ZK = \frac{P_0Z^2}{ZQ_0},$$

$$Z_1K_1 : P_0Z_1 : Z_1Q_1 = ZK : P_0Z : ZQ_0$$

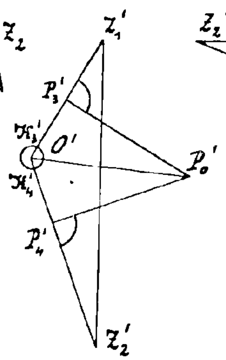
folglich $$Z_1K_1 = \frac{P_0Z_1^2}{Z_1Q_1}.$$

Die Bahnen aller Punkte des Kreises vom Durchmesser P_0Z haben ihre Krümmungsmittelpunkte also auf dem Kreise vom Durchmesser P_0K.

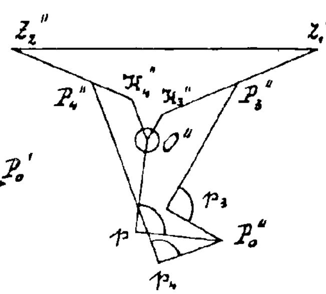
5. Durch die Krümmungsmittelpunkte K_1, K_2 zweier Punkte Z_1, Z_2, Fig. 61—63, sind die Pole P_0, Q_0 der geometrischen Bewegung und also die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen aller Punkte der Ebene bestimmt. P_0 ist der Schnittpunkt der Geraden K_1Z_1, K_2Z_2; Q_0 wird bestimmt durch die Bedingung, daß die Projektionen Z_1A_1,



L. Fig. 61.



G. Fig. 62.



B. Fig. 63.

Z_2A_2 der Strecken Z_1Q_0, Z_2Q_0 auf die Krümmungshalbmesser Z_1K_1, Z_2K_2 den Sinn dieser Halbmesser und die Größen

$$Z_1A_1 = \frac{P_0Z_1^2}{Z_1K_1} = \frac{180^2}{360} = 90 \text{ cm}, \quad Z_2A_2 = \frac{P_0Z_2^2}{Z_2K_2} = \frac{260^2}{390} = 143 \text{ cm}$$

haben müssen.

6. Für alle Punkte des Wendekreises P_0Q_0 mit Ausnahme des Punktes P_0 und des auf dem Kreise Q_0R_1 liegenden Punktes O, Fig. 59, ist der Krümmungshalbmesser r_1 der Bahnevolute unendlich groß (Gl. 54).

7. Die Punkte, deren Bahnevoluten einen Krümmungshalbmesser von der Größe Null haben, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung P_0OZ, Fig. 64, von der Gleichung:

$$z = \frac{3\,q_0^2 \sin\zeta \cos\zeta}{3q_0 \sin\zeta - r_0 \sin(\zeta - \varrho)} \tag{55}$$

(vergl. Gl. 54). Jede durch P_0 gelegte Gerade schneidet diese Kurve zweimal im Punkte P_0; den dritten Schnittpunkt Z, Fig. 64, bestimmt man durch die Gerade XYZ, indem man in den Kreisen P_0Q_0, Q_0R_1 die Sehnen Q_0X, R_1Y parallel zu P_0Z zieht. Denn wegen Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke P_0ZX, Q_0XY ist:

$$P_0Z : P_0X = Q_0X : Q_0Y$$

$$z : q_0 \sin\zeta = q_0 \cos\zeta : q_0 \sin\zeta - \frac{r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3}.$$

Die zu Q_0R_1 parallel gerichtete Gerade P_0G schneidet die Kurve in ihrem unendlich fernen Punkte.

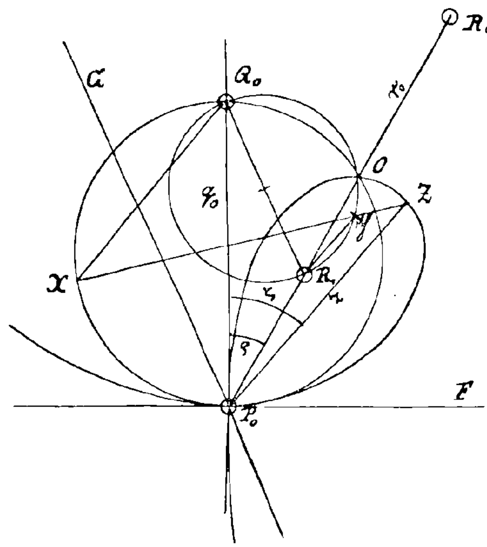


Fig. 64.

8. Der Fußpunkt O des von Q_0 auf die Gerade P_0R_0 gefällten Lotes Q_0O, also der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise P_0Q_0, Q_0R_1 ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Geschwindigkeit v mit seinen beiden Beschleunigungen v', v'' in einer Geraden, der Geraden OQ_0 zusammenfällt, der also in drei aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten in einer Geraden sich bewegt. Für diesen Punkt O ergibt Gleichung (54), ebenso wie für P_0, einen unbestimmten Wert von $\frac{r_1}{r}$.

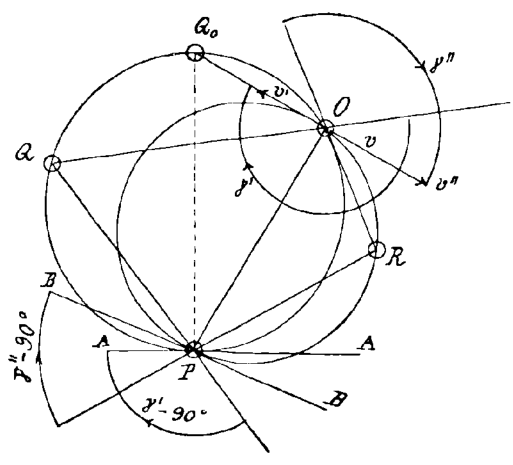


Fig. 65.

Wenn nicht die Pole der *geometrischen* Bewegung, sondern für irgend eine andere Wertgruppe ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ die Pole P, Q, R und also die zugehörigen Beschleunigungswinkel γ', γ'' bekannt sind, so bestimmt man den Punkt O in folgender Weise

(Fig. 65): Man zieht die beiden Geraden PA, PB, die durch die Bedingungen:

$$(QP, PA) = \gamma' \pm 90^0, \quad (RP, PB) = \gamma'' \pm 90^0$$

bestimmt sind; ferner den Kreis PQ, der die Gerade PA berührt, und den Kreis PR, der PB berührt. Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt O. Denn die Geschwindigkeit v dieses Punktes ist, ebenso wie seine beiden Beschleunigungen v', v'', normal zur Geraden PO gerichtet. Da der Pol R_0 auf der Geraden PP_0O liegt, so kann man zur Bestimmung dieses Pols die vorstehende Konstruktion in Verbindung mit *einer* der beiden nach Gleichung (49) zu berechnenden Koordinaten x_3, y_3 anwenden.

9. Wenn für zwei Punkte Z_1, Z_2 der Ebene außer den Krümmungsmittelpunkten K_1, K_2 der Bahnen auch die Krümmungsmittelpunkte M_1, M_2 der Bahnevoluten gegeben sind, so können die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung und hierdurch die Krümmungsmittelpunkte aller Bahnevoluten bestimmt werden (Fig. 61—63). Die Bestimmung der Pole P_0, Q_0 ist unter Nr. 5 dieses Abschnittes beschrieben worden. Um den Pol R_0 zu bestimmen, berechnet man nach Gleichung (54) für jeden der beiden Punkte Z_1, Z_2 Größe und Vorzeichen der Strecke

$$(56) \qquad r_0 \sin(\zeta - \varrho) = \frac{3(q_0 \cos\zeta - z)}{z}\left\{\frac{r_1}{3r}(q_0 \cos\zeta - z) - q_0 \sin\zeta\right\}$$

also die Abstände des Punktes R_0 von den beiden Geraden P_0Z_1, P_0Z_2.

In dem durch Fig. 61 dargestellten Beispiel (Maßstab 1:100) ist gegeben:

1. für den Punkt Z_1:

$$z = P_0Z_1 = +180 \text{ cm}$$

$$r = Z_1K_1 \cos(P_0Z_1, Z_1K_1) = -360 \text{ cm}$$

$$r_1 = K_1M_1 \sin(P_0Z_1, K_1M_1) = -150 \text{ cm}$$

$$P_0A_1 = q_0 \cos\zeta = P_0Q_0 \cos(P_0Q_0, P_0Z_1) = +90 \text{ cm}$$

$$Q_0A_1 = q_0 \sin\zeta = P_0Q_0 \sin(P_0Q_0, P_0Z_1) = -185 \text{ cm},$$

also nach Gleichung 56:

$$r_0 \sin(\zeta - \varrho) = P_0R_0 \sin(P_0R_0, P_0Z_1)$$

$$= \frac{3(90-180)}{180}\left\{\frac{150}{3 \cdot 360}(90-180) + 185\right\} = -268 \text{ cm}.$$

2. für den Punkt Z_2:

$$z = P_0 Z_2 = +\,260 \text{ cm}$$

$$r = Z_2 K_2 \cos(P_0 Z_2, Z_2 K_2) = -\,390 \text{ cm}$$

$$r_1 = K_2 M_2 \sin(P_0 Z_2, K_2 M_2) = +\,120 \text{ cm}$$

$$P_0 A_2 = P_0 Q_0 \cos(P_0 Q_0, P_0 Z_2) = q_0 \cos\zeta = +\,87 \text{ cm}$$

$$Q_0 A_2 = P_0 Q_0 \sin(P_0 Q_0, P_0 Z_2) = q_0 \sin\zeta = +\,187 \text{ cm},$$

also nach Gleichung (56):

$$r_0 \sin(\zeta - \varrho) = P_0 R_0 \sin(P_0 R_0, P_0 Z_2)$$
$$= \frac{3(87-260)}{260}\left\{-\frac{120}{3\cdot 390}(87-260) - 187\right\} = +\,338 \text{ cm}.$$

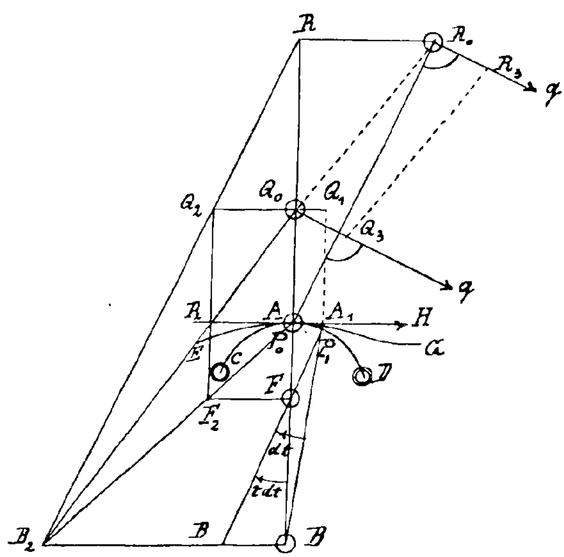
Demnach ist, um den Pol R_0 zu bestimmen,

$$(P_0 Z_1, P_0 C_1) = 90^0, \quad P_0 C_1 = 268 \text{ cm}$$
$$(P_0 Z_2, P_0 C_2) = 270^0, \quad P_0 C_2 = 338 \text{ cm}$$
$$C_1 R_0 \perp P_0 C_1, \qquad C_2 R_0 \perp P_0 C_2$$

aufzutragen.

17. *Die Krümmung der Bahnen des Geschwindigkeitspols.* — Zur Zeit t möge der Geschwindigkeitspol der mit einem Getriebegliede starr verbundenen Ebene die Lage P_0 haben. Dieser Pol beschreibt in der ruhenden Ebene die ruhende Polbahn CP_0P_1D, Fig. 66, und zugleich in der bewegten Ebene die bewegte Polbahn EAA_1G. Zur Zeit t fällt der Punkt A der bewegten Ebene mit dem ruhenden Punkte P_0 zusammen; die unendlich kleine Strecke AA_1 dreht sich also um A. Zur Zeit $t + dt$ fällt der Punkt A_1 der bewegten Ebene mit dem festen Punkt P_1 zusammen, und AA_1 dreht sich in diesem Zeitpunkt um A_1. Man ersieht hieraus, daß die mit der bewegten Ebene EG starr verbundene

Fig. 66.



Polbahn EAA_1G auf der festen Polbahn CP_0P_1D *rollt.* In den Lehrbüchern werden diese Polbahnen benutzt, um die Bewegung darzustellen und insbesondere die Krümmungen der Bahnkurven zu bestimmen. Es kommt daher in Frage, welche Beziehungen zwischen den Bahnen des Geschwindigkeitspols und den im vorigen Abschnitt benutzten Polen P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung bestehen. Wir nehmen an, es sei gegeben: der Geschwindigkeitspol P_0, der Krümmungsmittelpunkt F der festen Polbahn und der Krümmungsmittelpunkt B der bewegten Polbahn. Das positive Vorzeichen trägt auf der Polbahnnormalen BFP_0 der Sinn BP_0, auf der Polbahntangente der durch die Bedingung

$$(BP_0, P_0H) = 90^0$$

bestimmte Sinn P_0H. Der Krümmungshalbmesser der bewegten Polbahn

$$BP_0 = b$$

hat demnach stets einen positiven Wert, während der Krümmungshalbmesser

$$FP_0 = f$$

positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Polbahnen gleich oder entgegengesetzt gekrümmt sind. In der geometrischen Bewegung durchläuft die Ebene in der Zeit dt den Winkel

$$BA_1B_1 = dt.$$

Die Drehgeschwindigkeit τ des Halbmessers FP_0 der *festen* Polbahn ergibt sich demnach aus der Gleichung

$$\frac{P_0P_1}{FP_0} = \tau\ dt = \frac{BB_1}{FB} = \frac{b\ dt}{b-f}$$

(57) $$\tau = \frac{b}{b-f}.$$

Die Drehgeschwindigkeit τ hat den positiven Sinn der Uhrzeigerbewegung, wenn algebraisch b größer als f ist. Der Pol P_0 verschiebt sich mit der Geschwindigkeit

(58) $$p = f\tau = \frac{bf}{b-f}$$

und zwar im Sinne P_0H oder in dem negativen Sinne HP_0, je nachdem f und τ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Pol der Beschleunigungen erster Ordnung fällt mit dem Punkte Q_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der Verschiebungsgeschwindigkeit $f\tau$ von P_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$Q_0Q_1 \mathrel{\underline{\parallel}} P_0P_1 = f\tau\, dt$$

zurücklegt. Denn die Geschwindigkeit dieses Punktes Q_0 ändert in der Zeit dt weder ihre Richtung noch ihre Größe, weil die Drehgeschwindigkeit der Ebene die *unveränderliche* Größe $+1$ hat. Der Pol Q_0 liegt daher auf der Polbahnnormalen, und die Strecke $P_0 Q_0$ hat die *algebraische* Größe

$$P_0 Q_0 = p = f\tau = \frac{bf}{b-f}. \tag{59}$$

Die Strecke $P_0 Q_0$ hat den positiven Sinn BP_0, wenn f und τ gleiche Vorzeichen tragen.

Der Pol der Beschleunigungen *zweiter* Ordnung fällt mit dem Punkte R_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der noch unbekannten Verschiebungsgeschwindigkeit q des Poles Q_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$R_0 R_3 \;\underline{\|}\; Q_0 Q_3 = q\, dt$$

zurücklegt. Denn die Beschleunigung erster Ordnung von R_0 wird zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn durch die Strecke $R_0 Q_0$ und zur Zeit $t + dt$ durch $R_3 Q_3$ dargestellt; sie ändert in dieser Zeit also weder ihre Größe noch ihre Richtung. Der Punkt R_0 wird demnach bestimmt durch die Bedingungen:

$$(P_0 R_0, q) = 90^0, \quad P_0 R_0 = q.$$

Der Punkt Q_0 verschiebt sich auf der Polbahnnormalen; seine Geschwindigkeit q setzt sich also zusammen aus der Geschwindigkeit $q \sin(b, q)$ des mit ihm zusammenfallenden Punktes der Polbahnnormalen und einer Verschiebungsgeschwindigkeit $q \cos(b, q)$ von der Richtung dieser Normalen. Die erstgenannte Komponente ist zur Polbahntangente parallel gerichtet und hat die algebraische Größe

$$q \sin(b, q) = FQ_0\, \tau = f(1+\tau)\tau.$$

Da der Winkel

$$(b, q) = (b, P_0 R_0) + 90^0$$

ist, so ist

$$q \sin(b, q) = P_0 R_0 \cos(b, P_0 R_0) = f(1+\tau)\tau,$$

d. h. die Projektion $P_0 R$ der Strecke $P_0 R_0$ auf die Polbahnnormale hat die algebraische Größe

$$P_0 R = f\tau(1+\tau).$$

Daher ist

$$Q_0 R = f\tau^2. \tag{60}$$

Die *zweite* Komponente $q \cos(b, q)$ der Geschwindigkeit q, also die Strecke RR_0 kann nur bestimmt werden, wenn die Krümmungshalbmesser der Evoluten beider Polbahnen bekannt sind, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Wir entnehmen aus den Gleichungen (57), (59), (60) die folgenden Beziehungen:

$$\tau = \frac{BP_0}{BF} = \frac{P_0Q_0}{FP_0} = \frac{Q_0R}{P_0Q_0} = \frac{BQ_0}{BP_0} = \frac{BR}{BQ_0} \tag{61}$$

und

$$BF : BP_0 : BQ_0 : BR = 1 : \tau : \tau^2 : \tau^3. \tag{62}$$

In dieser geometrischen Reihe sind je zwei aufeinander folgende Strecken dem Sinne nach gleich oder entgegengesetzt, je nachdem τ positiv oder negativ ist. Die geometrische Bedeutung der vorstehenden Gleichungen wird durch Fig. 66 dargestellt. Trägt man die drei gleich großen und gleich gerichteten Strecken FF_2, P_0P_2, Q_0Q_2 auf, so schneiden sich die drei Geraden P_0F_2, Q_0P_2, RQ_2 in einem Punkte B_2 der zu FF_2 parallel gerichteten Geraden BB_2.

Sind von den fünf Punkten B, F, P_0, Q_0, R entweder B, F, P_0 oder P_0, Q_0, R bekannt, so können hiernach die beiden anderen Punkte bestimmt werden. Es ist aber zu beachten, daß durch die drei Punkte B, F, P_0 wohl der Punkt R, nicht aber der Pol R_0 bestimmt wird. Zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Bahnevoluten genügen also nicht die drei Punkte B, F, P_0, wohl aber die drei Pole P_0, Q_0, R_0.

Wenn für zwei Punkte Z_1, Z_2, Fig. 61, der Ebene die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen und der Bahnevoluten K_1, K_2, M_1, M_2 bekannt sind, so können die Krümmungsmittelpunkte der festen und der bewegten Polbahn F, B auch auf folgendem Wege bestimmt werden. Man bildet das Getriebe $M_1K_1Z_1Z_2K_2M_2$ aus den sechs Gliedern M_1M_2, M_1K_1, M_2K_2, K_1Z_1, K_2Z_2, Z_1Z_2, die in dieser Reihenfolge mit den Nummern 0 bis 5 bezeichnet sind. Das Glied 0 ruht; die Glieder 1, 3 und 2, 4 sind durch Schieber miteinander verbunden. Die Stäbe 3, 4 sind an ihrer Kreuzungsstelle durch zwei Schieber geführt, die durch ein Gelenk P_0 miteinander verbunden sind. Wenn die Gelenke Z_1, Z_2 auf ihren gegebenen Bahnen geführt werden, so beschreibt das Gelenk P_0 die feste Polbahn des Gliedes 5, also der Ebene Z_1Z_2. Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes F dieser Polbahn sind demnach nur die Geschwindigkeit p und die Normalbeschleunigung n' des Gelenkes P_0 erforderlich. Wir erteilen dem Gliede 5 die geometrische Bewegung, setzen also seine Drehgeschwindigkeit gleich $+1$, seine Drehbeschleunigung gleich Null. Im Geschwindigkeitsplan, Fig. 62, ist hierdurch die Strecke $Z_1'Z_2'$ bestimmt durch die Bedingungen:

$$(Z_1Z_2,\ Z_1'Z_2') = 90^0, \quad Z_1'Z_2' = Z_1Z_2.$$

Die Punkte K_3, K_4 der Stäbe 3, 4, die zur Zeit t mit den Krümmungsmittelpunkten K_1, K_2 zusammenfallen, ruhen in diesem Zeitpunkt. Die Punkte K_3', K_4' fallen also mit dem Pol O' des Geschwindigkeitsplans zusammen und werden durch die Bedingungen:

$$Z_1' O' \perp Z_1 K_3, \quad Z_2' O' \perp Z_2 K_4$$

bestimmt. Die Geschwindigkeit $O'P_0'$ des Gelenkes P_0 kann zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O'P_3'$ des vom Gelenk P_0 gedeckten Punktes P_3 des Stabes 3 und der Geschwindigkeit $P_3'P_0'$, womit der Schieber auf dem Stabe 3 sich bewegt. Sie kann ferner zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O'P_4'$ des vom Gelenk gedeckten Punktes P_4 des Stabes 4 und der Verschiebungsgeschwindigkeit $P_4'P_0'$ des Schiebers auf diesem Stabe. Demnach wird die Polgeschwindigkeit

$$p = O'P_0'$$

bestimmt durch die Bedingungen:

$$K_3'P_3'Z_1' \simeq K_3 P_3 Z_1$$

$$K_4'P_4'Z_2' \simeq K_4 P_4 Z_2$$

$$P_3'P_0' \parallel K_1 Z_1, \quad P_4'P_0' \parallel K_2 Z_2.$$

Wie oben gezeigt ist (Gleichung 59), bestimmt die Polgeschwindigkeit p die Lage des Beschleunigungspols Q_0 im Lageplan:

$$(P_0 Q_0,\ O'P_0') = 90^0, \quad P_0 Q_0 = O'P_0' = p.$$

Im Beschleunigungsplan, Fig. 63, ist, da die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 gleich Null ist:

$$(Z_1''Z_2'',\ Z_1 Z_2) = 180^0, \quad Z_1''Z_2'' = Z_1 Z_2$$

und der mit O'' bezeichnete Pol ergibt sich aus der Bedingung:

$$O''Z_1''Z_2'' \simeq Q_0 Z_1 Z_2.$$

Die Beschleunigung des von K_1 gedeckten Punktes K_3 läßt sich nach dem zweiten Verfahren des Abschnittes **9**, jedoch einfacher noch durch folgende Überlegung ermitteln. Zur Zeit t ruht der Punkt K_3; zur Zeit $t + dt$ ist der Punkt J des Stabes Berührungspunkt der Evolute, und die Strecke $K_3 J$ hat die Länge

$$K_3 J = M_1 K_1 \cdot \frac{O'Z_1'}{K_3 Z_1} dt,$$

da der Stab 3 in positivem Sinne mit der Drehgeschwindigkeit $\frac{O'Z_1'}{K_3 Z_1}$ sich bewegt. Die unendlich kleine Geschwindigkeit des Punktes K_3

hat zur Zeit $t + dt$ demnach Richtung und Sinn der Strecke M_1K_1 und die Größe

$$K_3J\frac{O'Z_1'}{K_3Z_1}dt = M_1K_1\left(\frac{O'Z_1'}{K_3Z_1}\right)^2 dt.$$

Daher hat die Beschleunigung $O''K_3''$ des Punktes K_3 zur Zeit t Richtung und Sinn von M_1K_1 und die Größe

$$O''K_3'' = M_1K_1\left(\frac{O'Z_1'}{K_3Z_1}\right)^2 = 150\left(\frac{180}{360}\right)^2 = 38 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Ebenso hat die Beschleunigung $O''K_4''$ des von K_2 gedeckten Punktes K_4 des Stabes 4 Richtung und Sinn von M_2K_2 und die Größe

$$O''K_4'' = M_2K_2\left(\frac{O'Z_2'}{K_4Z_2}\right)^2 = 120\left(\frac{260}{390}\right)^2 = 53 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Die Beschleunigung $O''P_0''$ des Gelenkes P_0 wird nach Abschnitt **9** bestimmt:

$$K_3''P_3''Z_1'' \simeq K_3P_3Z_1$$

$$K_4''P_4''Z_2'' \simeq K_4P_4Z_2$$

$$(P_3'P_0',\ P_3''p_3) = (P_3Z_1,\ P_3'Z_1') = 90^0$$

$$P_3''p_3 = 2\,P_3'P_0'\frac{O'Z'}{K_1Z_1} = 2 \cdot 185 \cdot \frac{180}{360} = 185 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$(P_4'P_0',\ P_4''p_4) = (P_4Z_2,\ P_4'Z_2') = 90^0$$

$$P_4''p_4 = 2\,P_4'P_0'\frac{O'Z_2'}{K_2Z_2} = 2 \cdot 187\frac{260}{390} = 249 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$p_3P_0'' \perp P_3''p_3, \quad p_4P_0'' \perp P_4''p_4.$$

Die Projektion $O''p$ der Beschleunigung $O''P_0''$ des Gelenkes P_0 auf die Polbahnnormale BF hat die Größe

$$n' = O''p = 124 \text{ cm sec}^{-2}.$$

Der Krümmungshalbmesser P_0F der festen Polbahn hat den Sinn $O''p$ und die Größe (Gleichung 34)

$$f = P_0F = \frac{(O'P_0')^2}{O''p} = \frac{205^2}{124} = 339 \text{ cm}.$$

Der Krümmungshalbmesser b der bewegten Polbahn ergibt sich darauf aus Gleichung (59):

$$b = P_0B = \frac{pf}{p-f} = -\frac{205 \cdot 339}{134} = -519 \text{ cm}.$$

Da die Vorzeichen von b und f verschieden sind, so sind die beiden Polbahnen entgegengesetzt gekrümmt; P_0B hat also den Sinn FP_0.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden Glieder 1 und 2 brauchten für den vorliegenden Zweck nicht bestimmt zu werden.

18. *Literaturangaben.* Die Gegenstände der vorstehenden Mitteilung wurden in anderer Form in den folgenden Werken und Abhandlungen dargestellt:

Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1870, zweite Auflage 1879.

Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888.

Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie; Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 1872.

Rittershaus: 1. Über die kinematische Kette. 2. Über die Beschleunigungen der ebenen Bewegung. Civilingenieur 1876 und 1877.

Mehmke: 1. Über die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich-veränderlichen Systems, Civilingenieur 1883. 2. Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1890.

Grübler: 1. Über die Krümmung der Polbahnen. 2. Über die Kreisungspunkte einer komplan bewegten Ebene. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1884, 1889 und 1892.

Rodenberg: 1. Die Bestimmung der quadratischen Verwandschaft der Krümmungsmittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1890. 2. Über die Kreispunktkurve eines ebenen Gelenkvierseits, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891. 3. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittelung, Civilingenieur 1896.

R. Müller, Über die Krümmung der Bahnevoluten im starren ebenen System, Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891.

Wittenbauer: 1. Über die Wendepole der kinematischen Kette. 2. Über den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. 3. Über die Beschleunigungspole der kinematischen Kette. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895. 4. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittelung, Civilingenieur 1896.

Hartmann, Über die Krümmung der Polbahnen einer Vierzylinderkette, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1902.

Mohr: 1. Über die Beschleunigungen der ebenen Bewegung. 2. Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne. Civilingenieur 1879 und 1887.

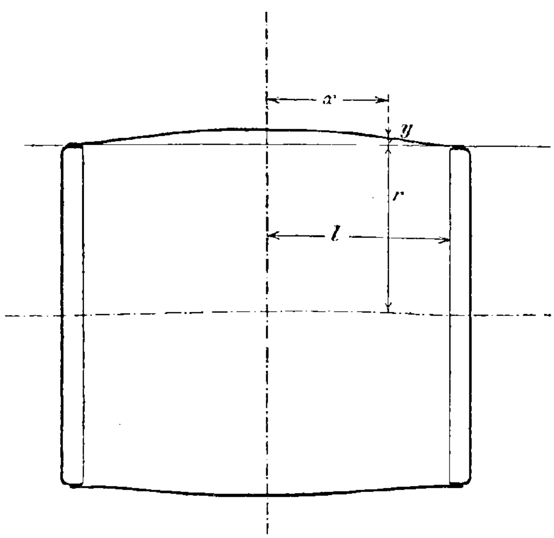
Weitere Angaben über die einschlägige Literatur finden sich in den Werken von Schell und Burmester, in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Abschnitt Kinematik und in allen Bänden des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik.

Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche.

Von H. SELLENTIN in Kiel.

Den Einfluß der Kesselstirnwände auf die Festigkeit der Mantelbleche hat man bisher nicht für wichtig genug gehalten, um sich eingehender mit ihm zu beschäftigen; man hat sich im allgemeinen damit begnügt, ihn als in geringem Maße entlastend anzusehen. Wenngleich die folgende Untersuchung zeigen wird, daß diese Ansicht selbst für die mittleren Teile des Mantels nicht unbedingt richtig ist, so wird sie doch auch ergeben, daß schon in geringer Entfernung von den Enden der Einfluß auf die *Querfestigkeit* verschwindend klein wird, und daß insofern die Vernachlässigung berechtigt erscheint. Ganz anders verhält es sich aber mit den in der Nähe der Stirnwände mit Notwendigkeit auftretenden *Biegungsspannungen*, welche naturgemäß um so größer werden, in je kürzerer Entfernung das Mantelblech den seiner mittleren Querspannung entsprechenden größeren Radius annimmt. Da sich zu ihnen noch die von dem Druck gegen die Stirnwände herrührenden Längsspannungen gesellen, so ist klar, daß ihre algebraische Summe unter Umständen das zulässige Maß überschreiten kann, und daß es nicht angängig ist, sie kurzer Hand zu vernachlässigen.

Fig. 1.



Figur 1 stelle den Querschnitt eines mit dem inneren Überdruck von p kg/qcm belasteten Kessels dar; die Maße sollen in cm gegeben sein. Der Mantel wird sich in der angegebenen Weise durchbiegen und somit an den Einspannstellen, welche ihre Lage unverändert beibehalten sollen, auf der Innenseite eine Zugbeanspruchung von σ_b kg/qcm aufzunehmen haben. Bezeichnet δ die Blechdicke und r den Kesselradius, so ist die der gebräuchlichen Berechnung zugrunde gelegte ideelle Querspannung

(1) $$k_z = \frac{p \cdot r}{\delta},$$

der gegenüber die wirklich eintretende Querspannung σ_q genannt werden soll. Die Längsspannung ist, soweit sie für die ganze Kessellänge als konstant angesehen wird,

(2) $$\sigma_l = \frac{k_z}{2},$$

woraus sich die größte Zugspannung am Mantelende zu

(3) $$\sigma_z = \sigma_b + \frac{k_z}{2}$$

ergibt.

Die Längsspannung σ_l ist zunächst bestrebt, eine Querkontraktion des Bleches von der Größe

(4) $$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma_l}{E} \cdot 2\pi r$$

herbeizuführen, welche ohne das Vorhandensein der Querspannungen eine Verkleinerung des Radius um

(5) $$y' = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma_l}{E} \cdot r$$

nach sich ziehen würde; beträgt nun im Abstande x von der Mitte der Kessellänge die Ausbiegung y cm, so ist bei der Berechnung der Querspannung σ_q mit einer wirklichen Vergrößerung des Radius von $y + y'$ cm zu rechnen, woraus

(6) $$\sigma_q = E \cdot \frac{y + y'}{r} = \frac{E \cdot y}{r} + \frac{\sigma_l}{m}$$

folgt.

Die umgekehrt durch σ_q hervorgerufene Verkürzung in der Längsrichtung kann außer Betracht bleiben, da angenommen werden soll, daß der Kessel keine einer Längenänderung hinderlichen Längsversteifungen besitze.

Es werde nun durch zwei radiale Schnitte ein Längsstreifen von der mittleren Breite db aus dem Mantel herausgeschnitten, aus welchem durch zwei in der Entfernung x und $x + dx$ von der Mitte aus gelegte Querschnitte ein kurzes Stück abgetrennt werde, welches in Fig. 2 dargestellt ist. Dasselbe wird in der Querrichtung beiderseits durch die als gleichmäßig verteilt zu denkende Spannung σ_q mit einer Kraft von der Größe

(7) $$dk = \sigma_q \cdot \delta \cdot dx$$

angegriffen. Die sich hieraus ergebende nach innen gerichtete Resultante ist

(8) $$dk \cdot d\varphi = \sigma_q \cdot \frac{\delta}{r} \cdot db \cdot dx\,,$$

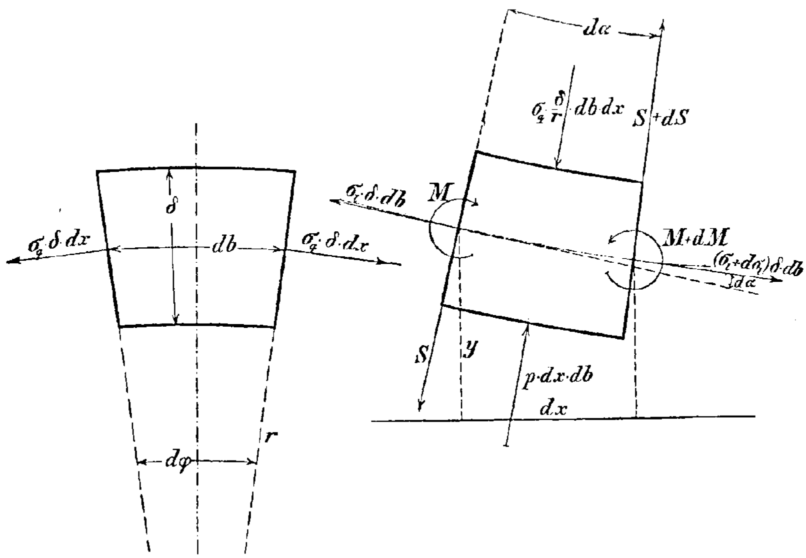
welche dem nach außen gerichteten Druck

$$p \cdot db \cdot dx$$

entgegenwirkt.

In der Längsrichtung wirkt die Längskraft $\delta \cdot \sigma_l \cdot db$ nach links und $\delta(\sigma_l + d\sigma_l)db$ nach rechts; außerdem sind die Scheerkräfte S und $S + dS$ sowie die Momente M und $M + dM$ tätig.

Fig. 2.



Unter der gewöhnlichen Voraussetzung, daß wegen der Kleinheit der Durchbiegungen die Bogenlänge ds des Elementes gleich dx, der Tangentenneigungswinkel $\alpha = \operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx}$ und der reziproke Wert des Krümmungsradius

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

gesetzt werden könne, ist offenbar Gleichgewicht vorhanden, wenn

(9) $$\left(p - \sigma_q \cdot \frac{\delta}{r}\right) db \cdot dx + dS + \delta \cdot \sigma_l \cdot db \cdot d\alpha = 0\,,$$

(10) $$\delta \cdot d\sigma_l \cdot db - S \cdot d\alpha = 0\,,$$

(11) $$dM + S dx = 0$$

ist; hinzu tritt noch die Biegungsgleichung

(12) $$M = E \cdot J \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{E \cdot \delta^3}{12} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} db.$$

Aus (11) folgt zunächst

(13) $$S = -\frac{E\delta^3}{12} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \cdot db$$

und sodann aus (10):

$$\frac{d\sigma_l}{dx} = -\frac{E\delta^2}{12} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

und durch Integration

(14) $$\sigma_l = C - \frac{E\delta^2}{24} \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$
$$= C - \frac{E \cdot \delta^2}{24\varrho^2}.$$

Solange der Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie im Vergleich zur Blechdicke δ sehr groß ist, kann $\frac{E\delta^2}{24\varrho^2}$ gegen C vernachlässigt und somit σ_l als konstant angesehen werden.

Aus Gleichung (9) ergibt sich nun, da

$$\frac{dS}{dx} = -E \cdot \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} \cdot db$$

ist, die Differentialgleichung der elastischen Linie zu

(15) $$\left(p - \sigma_q \cdot \frac{\delta}{r}\right) - E \cdot \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \delta \cdot \sigma_l \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

welche nach Einsetzen des Wertes von σ_q aus (6) die Gestalt annimmt:

(15a) $$p - \frac{\sigma_l \cdot \delta}{m \cdot r} - \frac{E}{r^2} \cdot y + \delta\sigma_l \frac{d^2y}{dx^2} - E \cdot \frac{\delta^3}{12} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Abgekürzt läßt sie sich

(15b) $$A - B \cdot y + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - D \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

schreiben, worin sämtliche Konstanten positiv sind.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y = a_0 + a_1 \operatorname{Cof}\frac{x}{\xi}\cos\frac{x}{\lambda} + a_2 \operatorname{Sin}\frac{x}{\xi}\sin\frac{x}{\lambda}$$
$$+ a_3 \operatorname{Cof}\frac{x}{\xi}\sin\frac{x}{\lambda} + a_4 \operatorname{Sin}\frac{x}{\xi}\cos\frac{x}{\lambda},$$

worin a_0, ξ und λ aus der Differentialgleichung zu bestimmen sind und a_1, a_2, a_3 und a_4 die willkürlichen Koeffizienten bedeuten. Da indessen die elastische Linie im vorliegenden Falle offenbar symmetrisch zur y-Achse liegen muß, so kann darauf sofort Rücksicht genommen und

(16) $$y = a_0 + a_1 \operatorname{Cof}\frac{x}{\xi}\cos\frac{x}{\lambda} + a_2 \operatorname{Sin}\frac{x}{\xi}\sin\frac{x}{\lambda}$$

gesetzt werden.

Die Differentialquotienten sind

(16a) $$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\lambda}\right) \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{\xi} \cos\frac{x}{\lambda} - \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2}{\xi}\right) \mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\xi} \sin\frac{x}{\lambda};$$

(16b) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{a_1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{\xi\lambda} - \frac{a_1}{\lambda^2}\right) \mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\xi} \cos\frac{x}{\lambda} + \left(\frac{a_2}{\xi^2} - \frac{2a_1}{\xi\lambda} - \frac{a_2}{\lambda^2}\right) \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{\xi} \sin\frac{x}{\lambda};$$

(16c) $$\frac{d^4y}{dx^4} = \left(\frac{a_1}{\xi^4} + \frac{4a_2}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_1}{\xi^2\lambda^2} - \frac{4a_2}{\xi\lambda^3} + \frac{a_1}{\lambda^4}\right) \mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\xi} \cos\frac{x}{\lambda}$$
$$+ \left(\frac{a_2}{\xi^4} - \frac{4a_1}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_2}{\xi^2\lambda^2} + \frac{4a_1}{\xi\lambda^3} + \frac{a_2}{\lambda^4}\right) \mathfrak{Sin}\,\frac{x}{\xi} \sin\frac{x}{\lambda};$$

sie sind in Gleichung (15b) einzusetzen, welche sodann identisch erfüllt sein muß. Daraus folgen die drei Bedingungsgleichungen für a_0, λ und ξ, nämlich:

(17a) $$A - B \cdot a_0 = 0$$

(17b) $$-Ba_1 + C\left(\frac{a_1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{\xi\lambda} - \frac{a_1}{\lambda^2}\right) - D\left(\frac{a_1}{\xi^4} + \frac{4a_2}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_1}{\xi^2\lambda^2} - \frac{4a_2}{\xi\lambda^3} + \frac{a_1}{\lambda^4}\right) = 0$$

(17c) $$-Ba_2 + C\left(\frac{a_2}{\xi^2} - \frac{2a_1}{\xi\lambda} - \frac{a_2}{\lambda^2}\right) - D\left(\frac{a_2}{\xi^4} - \frac{4a_1}{\xi^3\lambda} - \frac{6a_2}{\xi^2\lambda^2} + \frac{4a_1}{\xi\lambda^3} + \frac{a_2}{\lambda^4}\right) = 0.$$

Aus (17a) ergibt sich

(18) $$a_0 = \frac{A}{B};$$

wird (17c) mit a_1 multipliziert und von der mit a_2 multiplizierten Gleichung (17b) abgezogen, so erhält man nach Division mit $2\frac{a_1^2 + a_2^2}{\xi\lambda}$:

(19a) $$C - \frac{2D}{\xi^2} + \frac{2D}{\lambda^2} = 0;$$

multipliziert man hingegen (17b) mit a_1 und (17c) mit a_2, so läßt sich die Summe der Gleichungen durch $(a_1^2 + a_2^2)$ teilen und nimmt folgendes Aussehen an;

(19b) $$-B + \frac{C}{\xi^2} - \frac{C}{\lambda^2} - \frac{D}{\xi^4} + \frac{6D}{\xi^2\lambda^2} - \frac{D}{\lambda^4} = 0.$$

Die Glieder $\frac{C}{\xi^2}$ und $\frac{C}{\lambda^2}$ lassen sich mit Hilfe von Gleichung (19a) eliminieren, worauf sich

$$-B + \frac{D}{\xi^4} + \frac{2D}{\xi^2\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4} = 0$$

oder

$$\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \sqrt{\frac{B}{D}}$$

ergibt. Da nach (19a) aber

$$\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{C}{2D}$$

ist, so wird schließlich

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{2\sqrt{B \cdot D} + C}{4D};$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2\sqrt{B \cdot D} - C}{4D}.$$

Es ist jetzt zweckmäßig, die Koeffizienten der Gleichung (15b) wieder durch diejenigen von (15a) zu ersetzen und

$$A = p - \frac{\sigma_l}{m} \cdot \frac{\delta}{r},$$

$$B = \frac{\delta \cdot E}{r^2},$$

$$C = \delta \cdot \sigma_l,$$

$$D = \frac{E \cdot \delta^3}{12}$$

zu schreiben; man bekommt

$$a_0 = \frac{r}{E}\left(\frac{p \cdot r}{\delta} - \frac{\sigma_l}{m}\right); \tag{20a}$$

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{\sqrt{3}}{\delta \cdot r} + \frac{3\sigma_l}{\delta^2 \cdot E}; \tag{20b}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sqrt{3}}{\delta \cdot r} - \frac{3\sigma_l}{\delta^2 \cdot E}, \tag{20c}$$

und führt zweckmäßiger Weise aus Gleichung (1) und (2) noch die ideelle Querspannung k_z ein, wobei $\frac{1}{m} = 0{,}3$ gesetzt werden kann. Dann wird

$$a_0 = 0{,}85\, r \cdot \frac{k_z}{E}; \tag{21a}$$

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{1{,}732}{r^2} \cdot \frac{k_z}{p}\left(1 + 0{,}866 \frac{k_z^2}{p \cdot E}\right); \tag{21b}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1{,}732}{r^2} \cdot \frac{k_z}{p}\left(1 - 0{,}866 \frac{k_z^2}{p \cdot E}\right). \tag{21c}$$

Letzterer Wert muß positiv sein, wenn die Lösung brauchbar sein soll; da $E = 2 \cdot 10^6$ kg/qcm und $k_z < 1200$ kg/qcm, $p > 4$ kg/qcm anzunehmen ist, so ist diese Bedingung erfüllt.

Die Gleichungen (20b) und (20c) lassen übrigens erkennen, daß ξ und λ gleich werden, sobald die Längsspannung σ_l vernachlässigt wird.

Nunmehr handelt es sich um die Bestimmung der Konstanten a_1 und a_2, welche auf Grund der Bedingungen der Aufgabe vorgenommen werden muß; diese sind

$$y = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm l, \tag{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm l, \tag{b}$$

oder mit Benutzung von (16) und (16a):

$$a_0 + a_1 \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + a_2 \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} = 0; \tag{22a}$$

$$\left(\frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\lambda}\right) \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \left(\frac{a_1}{\lambda} - \frac{a_2}{\xi}\right) \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} = 0. \tag{22b}$$

Letztere Gleichung ergibt

$$a_1 = -a_2 \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}},$$

welcher Wert in (22a) eingesetzt

$$a_2 = 2 a_0 \cdot \frac{\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}$$

liefert; a_1 ist demnach

$$a_1 = -2 a_0 \cdot \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}.$$

Nunmehr lautet die Gleichung der elastischen Linie

$$y = 0{,}85 r \cdot \frac{k_z}{E} \left(1 - 2 \frac{\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \cdot \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda} \right), \tag{23}$$

aus welcher die Größe der Querspannung σ_q nach Gleichung (6) zu

$$\sigma_q = k_z \left(1 - 1{,}7 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}\right) \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} - \left(\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}\right) \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}} \right) \tag{24}$$

und die der Biegungsspannung nach der Gleichung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = E \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2}$$

unter Benutzung von (16b) zu

$$\sigma_b = \delta \cdot E \cdot a_0 \cdot \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) \cdot \tag{25a}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{\xi} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}\right) \operatorname{Cof} \frac{x}{\xi} \cos \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{1}{\xi} \operatorname{Sin} \frac{l}{\xi} \cos \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Cof} \frac{l}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda}\right) \operatorname{Sin} \frac{x}{\xi} \sin \frac{x}{\lambda}}{\frac{1}{\xi} \sin 2 \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Sin} 2 \frac{l}{\xi}}$$

folgt. Wird in (25a) der Wert von a_0 aus (21a) und der von $\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)$ aus (21b) und (c) eingesetzt, so findet man

$$(25\text{b})\quad \sigma_b \sim 3k_z \cdot \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\mathfrak{Sin}\frac{l}{\xi}\cos\frac{l}{\lambda}-\frac{1}{\xi}\mathfrak{Cof}\frac{l}{\xi}\sin\frac{l}{\lambda}\right)\mathfrak{Cof}\frac{x}{\xi}\cos\frac{x}{\lambda}+\left(\frac{1}{\xi}\mathfrak{Sin}\frac{l}{\xi}\cos\frac{l}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\mathfrak{Cof}\frac{l}{\xi}\sin\frac{l}{\lambda}\right)\mathfrak{Sin}\frac{x}{\xi}\sin\frac{x}{\lambda}}{\frac{1}{\xi}\sin 2\frac{l}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\mathfrak{Sin}\, 2\frac{l}{\xi}}.$$

Die Gestalt der für σ_q und σ_b gefundenen Werte läßt erkennen, daß bei langen Kesseln Maxima und Minima der Beanspruchungen abwechseln; für σ_q ergeben sich die Orte der größten bezw. kleinsten Werte durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{dy}{dx}=0$$

oder, unter Benutzung von Gleichung (16a):

$$\left(\frac{a_1}{\lambda}-\frac{a_2}{\xi}\right)\mathfrak{Cof}\frac{x}{\xi}\sin\frac{x}{\chi}-\left(\frac{a_1}{\xi}+\frac{a_2}{\lambda}\right)\mathfrak{Sin}\frac{x}{\xi}\cos\frac{x}{\lambda}=0,$$

welche nach Einsetzung von a_1 und a_2 übergeht in

$$(26)\qquad \mathfrak{Sin}\frac{l}{\xi}\cos\frac{l}{\lambda}\cdot\mathfrak{Cof}\frac{x}{\xi}\sin\frac{x}{\lambda}=\mathfrak{Cof}\frac{l}{\xi}\sin\frac{l}{\lambda}\cdot\mathfrak{Sin}\frac{x}{\xi}\cos\frac{x}{\lambda}.$$

Diese Gleichung ist stets erfüllt für

$$x=l \quad\text{und}\quad x=0;$$

dazwischen können bei langen Kesseln indessen noch mehrere andere Werte von x existieren, für die sie ebenfalls erfüllt ist, und für welche die Bedingungsgleichung lautet:

$$\mathfrak{Tang}\frac{l}{\xi}\operatorname{tang}\frac{x}{\lambda}=\mathfrak{Tang}\frac{x}{\xi}\operatorname{tang}\frac{l}{\lambda}.$$

Im allgemeinen interessiert nur der *größte* Wert von σ_q, welcher bei sehr kurzen Kesseln in der Mitte liegt und dann, da $x=0$ zu setzen ist, den Wert

$$\sigma_q=k_z\left(1-1{,}7\,\frac{\frac{1}{\lambda}\mathfrak{Sin}\frac{l}{\xi}\cos\frac{l}{\lambda}+\frac{1}{\xi}\mathfrak{Cof}\frac{l}{\xi}\sin\frac{l}{\lambda}}{\frac{1}{\xi}\sin 2\frac{l}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\mathfrak{Sin}\,2\frac{l}{\xi}}\right)$$

besitzt. Dieser Ausdruck hat auch für die in Wirklichkeit ausschließlich vorkommenden längeren Kessel Interesse und läßt sich dann für die Zwecke der Rechnung sehr vereinfachen. Man kann nämlich

$$\mathfrak{Sin}\frac{l}{\xi}=\mathfrak{Cof}\frac{l}{\xi}=\frac{e^{\frac{l}{\xi}}}{2}$$

und

$$\mathfrak{Sin}\,2\frac{l}{\xi}=2\,\mathfrak{Sin}^2\frac{l}{\xi}=\frac{e^{2\frac{l}{\xi}}}{2}$$

setzen, da nach Gleichung (21 b) und (c) für $p \leqq 20$ kg/qcm und $R_z \geqq 600$ kg/qcm

$$\xi \lesseqgtr \frac{r}{7}$$

und somit

$$\frac{l}{\xi} \gtreqless 7 \cdot \frac{l}{r}$$

ist. Wird $l = \frac{r}{2}$ als der äußerste vorkommende Fall angesehen, so ist immer noch

$$\frac{l}{\xi} > 3{,}5\,,$$

wofür obige Beziehungen als gültig angesehen werden können. Man findet dann, wenn noch $\sin 2\frac{l}{\lambda}$ gegen $\mathfrak{Sin}\, 2\frac{l}{\xi}$ vernachlässigt wird,

$$\text{(27a)} \qquad \sigma_{q\ \text{mit.}} = k_z \left(1 - 1{,}7\, \frac{\frac{\lambda}{\xi} \sin \frac{l}{\lambda} + \cos \frac{l}{\lambda}}{e^{\frac{l}{\xi}}} \right),$$

dessen Wert ebensowohl größer wie kleiner als k_z sein kann, sich aber von ihm wegen des großen Nenners $e^{\frac{l}{\xi}}$ nicht sehr unterscheidet.

Unter den oben über die Werte von $\frac{l}{\xi}$ gemachten Voraussetzungen kann die Bedingungsgleichung (26a) ebenfalls vereinfacht werden, da $\mathfrak{Tang}\frac{l}{\xi}$ und auch noch $\mathfrak{Tang}\frac{x}{\xi}$ für die von der Mitte weiter entfernt liegenden Maxima oder Minima gleich 1 gesetzt werden kann. Es wird dann

$$\operatorname{tang} \frac{x}{\lambda} = \operatorname{tang} \frac{l}{\lambda};$$

$$\text{(28)} \qquad \frac{x}{\lambda} = \frac{l}{\lambda} - n \cdot \pi.$$

Für $n = 1$ erhält man das den Stirnwänden am nächsten liegende Maximum, welches nach Gleichung (24) unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\sin \frac{x}{\lambda} = -\sin \frac{l}{\lambda};$$

$$\cos \frac{x}{\lambda} = -\cos \frac{l}{\lambda};$$

$$\mathfrak{Cof}\, \frac{x}{\xi} = \mathfrak{Sin}\, \frac{x}{\xi} = \frac{e^{\frac{x}{\xi}}}{2};$$

$$\mathfrak{Cof}\, \frac{l}{\xi} = \mathfrak{Sin}\, \frac{l}{\xi} = \frac{e^{\frac{l}{\xi}}}{2}$$

und nach Vernachlässigung von $\sin 2\frac{l}{\lambda}$ den Wert erhält

$$\sigma_{q\,\max} = k_z\left(1 - 0{,}85\,\frac{e^{\frac{x}{\xi}}\left[-\left(\cos\frac{l}{\lambda} + \frac{\lambda}{\xi}\sin\frac{l}{\lambda}\right)\cos\frac{l}{\lambda} + \left(\frac{\lambda}{\xi}\cos\frac{l}{\lambda} - \sin\frac{l}{\lambda}\right)\cdot\sin\frac{l}{\lambda}\right]}{e^{\frac{l}{\xi}}}\right);$$

$$\sigma_{q\,\max} = k_z\left(1 + 0{,}85\,\frac{e^{\frac{x}{\xi}}}{e^{\frac{l}{\xi}}}\right).$$

Da nun

$$\frac{x}{\xi} = \frac{l}{\xi} - \pi\frac{\lambda}{\xi}$$

oder angenähert

$$\frac{x}{\xi} = \frac{l}{\xi} - \pi$$

ist, so erhält man

$$\sigma_{q\,\max} \sim k_z\left(1 + \frac{0{,}85}{e^{\pi}}\right) \sim 1{,}04\,k_z.$$

Bei langen Kesseln ruft also die Einspannung des Mantels eine maximale *Vergrößerung* der Querspannung von $\sim 4\%$ hervor.

Die Biegungsspannung hat ebenfalls mehrere Maxima und Minima; hier genüge es indessen, ihre Größe an den Stirnwänden zu berechnen, welche zwar kein theoretisches Maximum ist, aber den höchsten vorkommenden Zahlenwert hat. Nach Gleichung (25b) wird für $x = l$:

$$\sigma_b \sim 3k_z\,\frac{-\frac{1}{\xi}\sin\frac{l}{\lambda}\cos\frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\operatorname{Sin}\frac{l}{\xi}\operatorname{Cof}\frac{l}{\xi}}{\frac{1}{\xi}\sin 2\frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\operatorname{Sin} 2\frac{l}{\xi}}$$

$$\sim \tfrac{3}{2}k_z\,\frac{-\frac{1}{\xi}\sin 2\frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\operatorname{Sin} 2\frac{l}{\xi}}{\frac{1}{\xi}\sin 2\frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\operatorname{Sin} 2\frac{l}{\xi}}$$

und mit Benutzung der früheren Vernachlässigungen

$$\sigma_b \sim \tfrac{3}{2}k_z.$$

Nach Gleichung (3) ist die gesamte Zugbeanspruchung

$$\sigma_z = \sigma_b + 0{,}5\,k_z,$$

also

$$\sigma_z \sim 2\,k_z.$$

Die Zugbeanspruchung auf der Innenseite des Kesselmantels ist an den Stirnwänden mithin doppelt so groß wie die ideelle Querspannung.

Tatsächlich wird dieser hohe Wert allerdings nicht erreicht werden, da die gebörtelten Ränder der Stirnplatten nicht als starr anzusehen sind; ein Nachgeben derselben führt aber eine Verminderung der Biegungsbeanspruchung herbei. Immerhin ist aber zu schließen, daß der unmittelbar an die Stirnwände stoßende Teil des Mantelbleches in der Längsrichtung wesentlich stärker beansprucht wird, als irgend ein anderer Teil desselben in der Querrichtung.

Kiel, den 5. Oktober 1903.

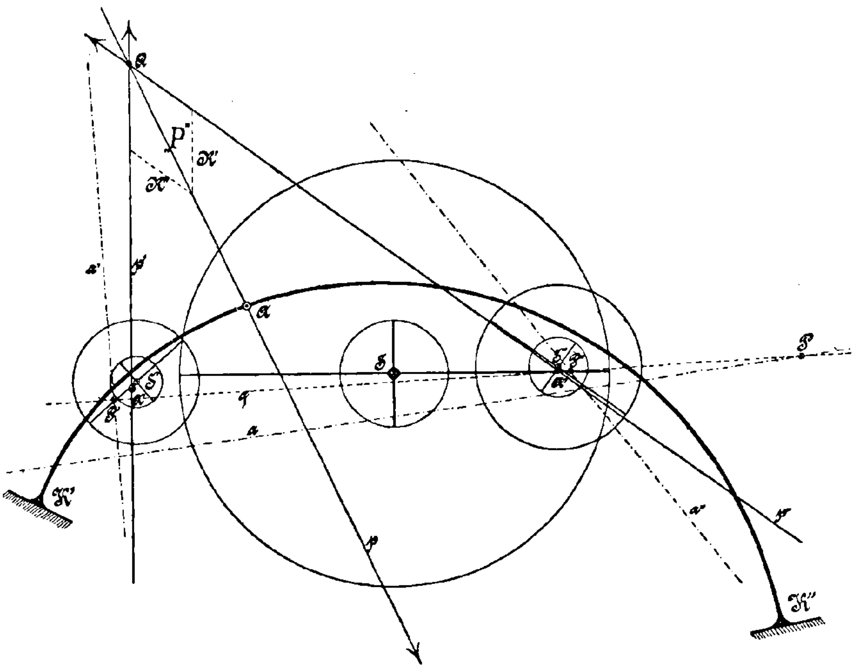
Der dreifach statisch unbestimmte Bogenträger unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte.

Von ADOLF LUDIN in Karlsruhe.

Mit Hilfe der von Culmann und Ritter-Zürich geschaffenen synthetischen Theorie der elastischen Formänderungen soll hier ein Satz über den Einfluß beliebig gerichteter Kräfte auf die Reaktionen des dreifach statisch unbestimmten Bogenträgers abgeleitet werden, der einen interessanten Einblick in das Spiel der Kräfte an dieser Konstruktion gestatten wird.

Zuvor aber wird es nützlich sein, die grundlegenden Untersuchungen der genannten Schriftsteller, wenigstens in ihren Ergebnissen, kurz nochmals hier wiederzugeben.

Schreibt man jedem Achselement (ds) eines elastischen Balkens vom (festen oder veränderlichen) Trägheitsmoment J das „elastische Gewicht“ $dG = \frac{ds}{EJ}$ und eine Zentralellipse mit den Halbachsen: $i_1 = \sqrt{\frac{J}{F}}$ normal zur Balkenachse und: $i_2 = i_1\sqrt{\frac{E \cdot \varkappa}{G}}$ parallel zu derselben zu, so fällt der augenblickliche Drehpunkt für die Bewegung, welche, unter der Einwirkung einer äußern Kraft, der eine Endquerschnitt des Balkenelements gegenüber dem andern ausführt, zusammen mit dem Antipol dieser Kraft bezüglich der eben bestimmten Ellipse: der „Elastizitätsellipse“ des Balkenelements. [Dabei bezeichnen E und G bez. den Elastizitätsmodul für Zug und Schub, $\varkappa$ eine von der Querschnittsform abhängige Konstante, F die Querschnittsgröße.] Ist der Krümmungshalbmesser der Balkenachse verhältnismäßig groß gegenüber den Querschnittsabmessungen, so kann man, statt für unendlich kleine Elemente ds, eine solche Elastizitätsellipse auch für Elemente von endlicher Länge Δs konstruieren. Ihre Halbachsen sind bez.: $i_1'' = \sqrt{\frac{J}{F}}$, $i_2'' = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{\varkappa \cdot E}{G} \cdot i_1^2}$, und die eben mitgeteilten Lagebeziehungen zwischen angreifender Kraft und Drehpunkt gelten auch für sie. Endlich kann man auch die Elastizitätsellipsen mehrerer solcher Elemente Δs, die in ihrer Gesamtheit einen Balken bilden, sei es durch Seilpolygone (Culmann, Graph. Statik 2. Aufl. S. 475; Ritter, der elast. Bogen berechnet mit Hilfe der graphischen Statik) oder durch ein direktes geometrisches Verfahren (Schweiz. Bzt. vom 13. Juni 1903) zu einer einzigen „Elastizitätsellipse des ganzen Balkens" vereinigen, für welche wieder die gleichen Beziehungen bestehen bleiben.



Damit hat man nun die Mittel zur Hand, um in anschaulicher Weise einen Zusammenhang zwischen den angreifenden Kräften und den Kämpferdrücken eines beiderseits eingespannten Bogens herzustellen. Greift z. B. den, in der Figur durch seine Achslinie dargestellten Bogen im Punkte 𝔄 eine Kraft „P" an, und denkt man sich das Widerlager bei K' entfernt, so wird der, nunmehr statisch bestimmt gewordene Balken eine Formänderung erfahren, die sich ohne weiteres feststellen läßt. Insbesondere wird der Kämpferpunkt K' eine Verschiebung er-leiden, die, nach den eben wiedergegebenen Sätzen, sich auffassen läßt als eine Drehung um den Antipol (P'') der Kraftlinie p bezüglich der Elastizitätselliqse S'' des Bogenstücks $\overparen{\mathfrak{A}K''}$, das allein der Wirkung der Kraft „P“ unterliegt.[1]) Sind nun die Widerlager tatsächlich als starr anzusehen, so muß zur Herstellung des wirklich eintretenden Zustandes eine Kraft R' als Ersatz der Wirkung des weggenommen gedachten Widerlagers K' hinzugefügt werden, deren Einfluß sich auf den ganzen Bogen erstreckt und die imstande sein muß, die durch „P“ hervorgerufene Verschiebung des Punktes K' wieder rückgängig zu machen. Dazu ist aber erforderlich, daß ihre Richtungslinie (p') die Antipolare des Drehpunktes P'', nun aber bezüglich der Elastizitätsellipse S des *ganzen* Bogens sei. Analoge Beziehungen bestehen zwischen der Richtungslinie p und derjenigen der *rechts*seitigen Kämpferkraft (p''): Auch diese ist die Antipolare bez. der Ellipse S zu einem Punkte P', der bestimmt ist als Antipol der Linie p bezüglich der Ellipse S' des Bogenstückes $\overparen{K'\mathfrak{A}}$. —

Wenn wir nun auf Grund der soeben wiedergegebenen Beziehungen uns einen weiteren Einblick in den Zusammenhang zwischen der Lage einer angreifenden Kraft und der ihr entsprechenden Kämpferdrücke verschaffen wollen, so wird es wegen der eben erwähnten Analogie im Verhalten der beiden Seiten des Bogens genügen, zunächst nur den linken Kämpferdruck R' näher ins Auge zu fassen: alle sich für ihn ergebenden Beziehungen lassen sich ohne weiteres auch auf die andere Seite mit bloßer Änderung der Indices ($P' - P''$) übertragen.

Lassen wir nun die Kraftlinie p sich um ihren Angriffspunkt $\mathfrak{A}$ drehen: Dann beschreibt, nach einem bekannten Satze der Polarentheorie, P'', ihr Antipol bezüglich der Ellipse S'', auf a'', der Antipolaren zu $\mathfrak{A}$, eine dem Strahlenbüschel der p projektive (und involutorische) Punktreihe. Die Richtungslinie des entsprechenben Kämpferdrucks (p') muß dann aber, und zwar nach dem reziproken Satze zu dem eben angeführten, einen der Punktreihe P'' und damit auch dem Strahlenbüschel der p projektiven (und involutorischen) zweiten Strahlenbüschel beschreiben, dessen Träger $\mathfrak{A}'$ der Antipol der Geraden a'', nun aber bezüglich der Ellipse S ist. Der Schnittpunkt Q von p und p' beschreibt, als Schnitt zweier projektiven Strahlenbüschel, einen Kegelschnitt.

Daß die jeweils entsprechende rechtsseitige Kämpferkraft (p'') stets durch denselben bez. Punkt Q gehen muß, läßt sich rein geo-

1) In der Figur sind die Ellipsen durch ihre Halbachsen nebst ein- und umbeschriebenem Kreis angegeben.

metrisch aus den Eigenschaften der Trägheitsellipse beweisen, es folgt aber einfacher daraus, daß R' und R'' ja mit „P“ im Gleichgewicht stehen müssen. Die Verbindungslinie q von P' und P'' umhüllt einen zweiten Kegelschnitt, sie ist die Antipolare des Punktes Q bezüglich der Ellipse S.

Von dem Kegelschnitt, auf dem sich Q bewegt, lassen sich leicht die fünf zu seiner Bestimmung erforderlichen Punkte angeben: es sind dies zunächst $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$, zwei weitere ergeben sich daraus, daß, wenn p durch S' oder S'' geht, das entsprechende p'' bezw. p' durch S gehen muß, weil nämlich der betreffende Punkt P' bezw. P'' ins Unendliche rückt.

Aus der Ableitung ergibt sich ferner, daß auch dann, wenn die den Bogen angreifende Kraft „P“ sich um einen ganz beliebigen Punkt der Ebene dreht, immer noch dieselben Beziehungen bestehen bleiben, sofern nur ihre Wirkung stets an einem und demselben Querschnitt $\mathfrak{A}$ auf den Balken übertragen wird. Ganz allgemein gilt also der Satz: *Dreht sich eine, den dreifach statisch unbestimmten Bogen stets an demselben Querschnitt angreifende Kraft um einen festen Punkt, so drehen sich auch die beiden ihr entsprechenden Kämpferdrücke um je einen festen Punkt, und die zugehörige Kämpferdruckschnittlinie ist ein Kegelschnitt, der durch die drei Drehpunkte geht.*

In welcher Weise sich dieses Ergebnis für die praktische Berechnung eines, verschieden gerichteten Kräften unterworfenen Bogens nutzbar machen ließe, ist leicht einzusehen; meist wird man es aber vorteilhafter finden, alle Kräfte nach zwei bestimmten Richtungen zu zerlegen und für diese Richtungen die Einflußlinien zu zeichnen (vgl. die genannten Quellen).

Karlsruhe im Juli 1903.

Kleinere Mitteilungen.

Konstruktion der Krümmungsachse und des Mittelpunkts der Schmiegungskugel einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve.

Beschreibt ein Punkt p eine beliebige Raumkurve und trägt man von p aus in der Tangente der Kurve eine beliebige, aber konstante Länge immer in demselben Sinne ab, so beschreibt der Endpunkt q eine neue Kurve[1]), welche, wie nachher bewiesen werden soll, die Eigenschaft hat, daß ihre Normalebene in q die Krümmungsachse der ersten Kurve zur Stelle p enthält, sowie daß ihre zur Stelle q gehörige Krümmungsachse den Mittelpunkt der zur Stelle p gehörigen Schmiegungskugel der ersten Kurve enthält. Hieraus ergibt sich folgende Lösung der in der Überschrift genannten beiden Aufgaben. Ist nur die Krümmungsachse der Bahn von p verlangt, so konstruiere man in der angegebenen Weise die Bahn des Punktes q und bestimme den Schnitt der zu den Punkten p und q gehörigen Normalebenen beider Kurven. Um auch den Mittelpunkt der zur Stelle p gehörigen Schmiegungskugel der gegebenen Kurve zu finden, trage man von dem Punkte q aus in der Tangente seiner Bahn wiederum eine beliebige, aber konstante Länge ab und zeichne die Bahn des Endpunktes q_1.[2]) Die Normalebenen der gegebenen Kurve und der beiden Hilfskurven in den Punkten p, q, q_1 schneiden sich dann offenbar in dem gesuchten Punkt. Die darstellend-geometrische Durchführung dieser Konstruktionen bietet keine Schwierigkeiten. Die Spuren der drei Normalebenen braucht man selbstverständlich nicht zu konstruieren, sondern man verwendet die durch p, bezw. q und q_1 gehenden Hauptlinien („Spurparallelen") der fraglichen drei Ebenen.

Durch Fortsetzung des Verfahrens kann man auch die Aufgabe lösen, bei einer durch drei Projektionen gegebenen Kurve in einem Raum von vier Dimensionen den Mittelpunkt des zu irgend einer Stelle der Kurve gehörigen kugelartigen dreidimensionalen Schmiegungsraumes zu konstruieren (d. h. den Punkt, der von fünf unendlich benachbarten Punkten der Kurve gleichen Abstand hat), und die entsprechende Aufgabe für eine beliebige Kurve in einem n-dimensionalen Raum.[3])

---

1) Sie wird nach Brocard eine Äquitangentialkurve der gegebenen Kurve genannt, s. Loria-Schütte, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902, S. 567.

2) Man könnte diese Kurve eine Äquitangentialkurve zweiter Ordnung der ursprünglichen Kurve nennen.

3) Die entsprechende Konstruktion für die Ebene, darin bestehend, daß man die Normale der gegebenen Kurve in p mit der Normale der Bahn von q schneidet, wodurch man den zur Stelle p gehörigen Krümmungsmittelpunkt der gegebenen

Die Richtigkeit der obigen Behauptungen läßt sich einsehen wie folgt. Sie sind ohne Zweifel richtig für jede sphärische Kurve, denn trägt man in den Tangenten einer solchen eine beliebige konstante Länge ab, so liegen die Endpunkte auf einer Kugel, welche zu der Kugel, auf der die gegebene Kurve liegt, konzentrisch ist. Wir können uns aber bei einer nicht-sphärischen Kurve durch vier unendlich benachbarte Punkte irgend eine sphärische Kurve hindurchgelegt denken, und diese wird mit der gegebenen Kurve an der betreffenden Stelle die Tangente, Normalebene, Krümmungsachse und den Mittelpunkt der Schmiegungskugel gemeinschaftlich haben. Ferner wird die mit Hilfe des Punktes q aus ihr abgeleitete Kurve noch drei unendlich benachbarte Punkte mit der auf dieselbe Art aus der gegebenen Kurve abgeleiteten Hilfskurve gemein haben, sodaß hier noch die Tangente, Normalebene und Krümmungsachse übereinstimmen.

Stuttgart. R. Mehmke.

Tafel der Antilogarithmen für die Basis 2.

Von J. Schnöckel in Düsseldorf.

Veranlassung zur Berechnung einer Antilogarithmentafel für die Basis 2 gab dem Verfasser die Herstellung eines antilogarithmischen Flächenmaßstabes, den er in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1900, Seite 413 u. flg. beschrieben hat.[1]) Die Einrichtung der vorliegenden, vierstelligen Tafel, welche außer zur Flächenberechnung auch anderen rechnerischen Zwecken dienen kann, ist folgende.

In der Spalte L stehen die Logarithmen von 0,00 bis 10,00, rechts deren Numeri und in Spalte δ deren Differenzen in Einheiten der vierten Stelle. Die römischen Ziffern I, II . . . in der ersten Spalte bedeuten, daß bei den Numeris hinter die erste, zweite, etc. Stelle ein Komma zu setzen ist. Bei Logarithmen zwischen 10,00 und 20,00 läßt man die 10 fort, fügt 0,034 hinzu und erhält rechts den Numerus. Letzterem entsprechen die Ziffern IV, V . . . .

Zur Erklärung seien folgende vier Beispiele gegeben:

1) Num 3,462 = 11,02,
2) log 1,083 = 0,115,
3) Num 13,6 = 1000 · Num 3,634 = 12420,
4) log 1100 = log 1,100 + 10 − 0,034 = 10,104.

Kurve erhält, ist, wie ich nachträglich bemerkt habe, schon von einigen angegeben worden, z. B. von Nicolaïdes, Nouv. Ann. de Mathématiques 1866, p. 383, Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 63 unten und Loria a. a. O. Ich erwähne noch, daß alle hier besprochenen Konstruktionen richtig bleiben, wenn man projektive Maßbestimmung oder nicht-euklidische Geometrie zugrunde legt. Die fragliche Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts einer ebenen Kurve gilt deshalb auch für sphärische Kurven und allgemeiner für Kurven auf beliebigen Flächen konstanten Krümmungsmaßes, wobei natürlich sphärische bezw. geodätische Tangenten und Normalen zu benützen sind und der Mittelpunkt des sphärischen bezw. geodätischen Krümmungskreises erhalten wird. Analytische Beweise dafür werde ich im Archiv der Mathematik und Physik mitteilen.

1) Vgl. R. Mehmke, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, Seite 1028, Anmerkung 423.

	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	δ
I	0,0	1000	1007	1014	1021	1028	1035	1042	1050	1057	1064	8
	0,1	1072	1079	1087	1094	1102	1110	1117	1125	1133	1141	8
	0,2	1149	1157	1165	1173	1181	1189	1197	1206	1214	1223	8
	0,3	1231	1240	1248	1257	1266	1275	1283	1292	1301	1310	10
	0,4	1320	1329	1338	1347	1357	1366	1376	1385	1395	1404	10
IV	0,5	1414	1424	1434	1444	1454	1464	1474	1485	1495	1505	11
	0,6	1516	1526	1537	1548	1558	1569	1580	1591	1602	1613	12
	0,7	1625	1636	1647	1659	1670	1682	1693	1705	1717	1729	12
	0,8	1741	1753	1765	1778	1790	1803	1815	1828	1840	1853	13
	0,9	1866	1879	1892	1905	1919	1932	1945	1959	1972	1986	14
	1,0	2000	2014	2028	2042	2056	2071	2085	2099	2114	2129	15
	1,1	2144	2158	2173	2189	2204	2219	2235	2250	2266	2282	15
	1,2	2297	2313	2329	2346	2362	2378	2395	2412	2428	2445	17
	1,3	2462	2479	2497	2514	2532	2549	2567	2585	2603	2621	18
	1,4	2639	2657	2676	2694	2713	2732	2751	2770	2789	2809	19
	1,5	2828	2848	2868	2888	2908	2928	2949	2969	2990	3010	21
	1,6	3031	3053	3074	3095	3117	3138	3160	3182	3204	3227	22
	1,7	3249	3272	3294	3317	3340	3364	3387	3411	3434	3458	24
	1,8	3482	3506	3531	3555	3580	3605	3630	3655	3681	3706	26
	1,9	3732	3758	3784	3811	3837	3864	3891	3918	3945	3972	28
	2,0	4000	4028	4056	4084	4112	4141	4170	4199	4228	4257	30
	2,1	4287	4317	4347	4377	4408	4438	4469	4500	4532	4563	32
	2,2	4595	4627	4659	4691	4724	4757	4790	4823	4857	4891	34
	2,3	4925	4959	4993	5028	5063	5098	5134	5169	5205	5242	36
	2,4	5278	5315	5352	5389	5426	5464	5502	5540	5579	5618	39
	2,5	5657	5696	5736	5776	5816	5856	5897	5938	5979	6021	42
	2,6	6063	6105	6148	6190	6233	6277	6320	6364	6409	6453	45
	2,7	6498	6543	6589	6635	6681	6727	6774	6821	6869	6916	48
	2,8	6964	7013	7062	7111	7160	7210	7260	7311	7362	7413	51
	2,9	7464	7516	7568	7621	7674	7727	7781	7835	7890	7945	55
	3,0	8000	8056	8112	8168	8225	8282	8340	8398	8456	8515	59
	3,1	8574	8634	8694	8754	8815	8877	8938	9000	9063	9126	64
	3,2	9190	9254	9318	9383	9448	9514	9580	9646	9714	9781	68
II	3,3	9849	9918	9987	1006	1013	1020	1027	1034	1041	1048	8
	3,4	1056	1063	1070	1078	1085	1093	1100	1108	1116	1124	7
	3,5	1131	1139	1147	1155	1163	1171	1179	1188	1196	1204	9
	3,6	1213	1221	1230	1238	1247	1255	1264	1273	1282	1291	9
V	3,7	1300	1309	1318	1327	1336	1345	1355	1364	1374	1383	10
	3,8	1393	1403	1412	1422	1432	1442	1452	1462	1472	1483	10
	3,9	1493	1503	1514	1524	1535	1545	1556	1567	1578	1589	11
	4,0	1600	1611	1622	1634	1645	1656	1668	1680	1691	1703	12
	4,1	1715	1727	1739	1751	1763	1775	1788	1800	1813	1825	13
	4,2	1838	1851	1864	1877	1890	1903	1916	1929	1943	1956	14
	4,3	1970	1984	1997	2011	2025	2039	2053	2068	2082	2097	14
	4,4	2111	2126	2141	2156	2171	2186	2001	2216	2232	2247	16
	4,5	2263	2278	2294	2310	2326	2343	2359	2375	2392	2408	17
	4,6	2425	2442	2459	2476	2493	2511	2528	2546	2563	2581	18
	4,7	2599	2617	2635	2654	2672	2691	2710	2728	2747	2767	19
	4,8	2786	2805	2825	2844	2864	2884	2904	2924	2945	2965	21
	4,9	2986	3006	3027	3048	3070	3091	3112	3134	3156	3178	22
	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	δ

	L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	δ
	5,0	3200	3222	3245	3267	3290	3313	3336	3359	3382	3406	24
	5,1	3430	3454	3478	3502	3526	3551	3575	3600	3625	3650	26
	5,2	3676	3701	3727	3753	3779	3805	3832	3859	3885	3912	28
	5,3	3940	3967	3995	4022	4050	4079	4107	4136	4164	4193	29
	5,4	4222	4252	4281	4311	4341	4371	4402	4432	4463	4494	31
	5,5	4525	4557	4589	4621	4653	4685	4718	4750	4784	4817	33
	5,6	4850	4884	4918	4952	4987	5021	5056	5091	5127	5163	35
	5,7	5198	5235	5271	5308	5345	5382	5419	5457	5495	5533	39
	5,8	5572	5610	5649	5689	5728	5768	5808	5849	5889	5930	41
	5,9	5971	6013	6055	6097	6139	6182	6225	6268	6312	6356	44
	6,0	6400	6445	6489	6534	6580	6626	6672	6718	6765	6812	47
	6,1	6859	6907	6955	7003	7052	7101	7151	7200	7250	7301	51
	6,2	7352	7403	7454	7506	7558	7611	7664	7717	7771	7825	54
	6,3	7879	7934	7989	8045	8101	8157	8214	8271	8329	8387	58
	6,4	8445	8504	8563	8622	8682	8743	8803	8865	8926	8988	63
	6,5	9051	9114	9177	9241	9305	9370	9435	9501	9567	9634	67
III	6,6	9701	9768	9836	9904	8973	1004	1011	1018	1025	1033	7
	6,7	1040	1047	1054	1062	1069	1076	1084	1091	1099	1107	7
	6,8	1114	1122	1130	1138	1146	1154	1162	1170	1178	1186	8
	6,9	1194	1203	1211	1219	1228	1236	1245	1254	1262	1271	9
VI	7,0	1280	1289	1298	1307	1316	1325	1334	1344	1353	1362	10
	7,1	1372	1381	1391	1401	1410	1420	1430	1440	1450	1460	10
	7,2	1470	1481	1491	1501	1512	1522	1533	1543	1554	1565	11
	7,3	1576	1587	1598	1609	1620	1631	1643	1654	1666	1677	12
	7,4	1689	1701	1713	1724	1736	1749	1761	1773	1785	1798	12
	7,5	1810	1823	1835	1848	1861	1874	1887	1900	1913	1927	13
	7,6	1940	1954	1967	1981	1995	2009	2023	2037	2051	2065	14
	7,7	2079	2094	2108	2123	2138	2153	2168	2183	2198	2213	16
	7,8	2229	2244	2260	2275	2291	2307	2323	2339	2356	2372	17
	7,9	2389	2405	2422	2439	2456	2473	2490	2507	2525	2542	18
	8,0	2560	2578	2596	2614	2632	2650	2669	2687	2706	2725	19
	8,1	2744	2763	2782	2801	2821	2840	2860	2880	2900	2920	21
	8,2	2941	2961	2982	3002	3023	3044	3066	3087	3108	3130	22
	8,3	3152	3174	3196	3218	3240	3263	3286	3308	3331	3355	23
	8,4	3378	3401	3425	3449	3473	3497	3521	3546	3571	3595	25
	8,5	3620	3646	3671	3696	3722	3748	3774	3800	3827	3853	27
	8,6	3880	3907	3934	3962	3989	4017	4045	4073	4101	4130	29
	8,7	4159	4188	4217	4246	4276	4305	4335	4365	4396	4426	31
	8,8	4457	4488	4519	4551	4583	4614	4646	4679	4711	4744	33
	8,9	4777	4810	4844	4878	4911	4946	4980	5015	5050	5085	35
	9,0	5120	5156	5191	5228	5264	5301	5337	5375	5412	5450	37
	9,1	5487	5526	5564	5603	5642	5681	5721	5760	5800	5841	40
	9,2	5881	5922	5963	6005	6047	6089	6131	6174	6217	6260	43
	9,3	6303	6347	6391	6436	6481	9526	6571	6617	6663	6709	47
	9,4	6756	6803	6850	6898	6946	6994	7043	7092	7141	7191	50
	9,5	7241	7291	7342	7393	7444	7496	7548	7601	7654	7707	53
	9,6	7760	7814	7869	7924	7979	8034	8090	8146	8203	8260	57
	9,7	8317	8375	8434	8492	8551	8611	8671	8731	8792	8853	61
	9,8	8914	8976	9039	9102	9165	9229	9293	9358	9423	9488	66
	9,9	9554	9621	9688	9755	9823	9891	9960	1003	1010	1017	7
	L	0	·1	2	3	4	5	6	7	8	9	δ

Bücherschau.

K. J. Kugler. Multiplikator. Riesceneinmaleins. Preßburg 1900. Rudolf Drodtleff. Preis 50 Heller.

Die Tafel hat Plakatform und geht von 11 mal 11 bis 99 mal 99, d. h. sie enthält die Produkte aller zweiziffrigen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen, jedes Produkt nur einmal. Die Anordnung ist nicht sehr übersichtlich, weshalb das Aufsuchen der Produkte durchschnittlich mehr Zeit erfordert, als bei manchen anderen Produktentafeln größeren Umfangs. Stichproben ergaben keine Druckfehler.

Stuttgart. R. Mehmke.

J. A. Bonnerman. Vraagstukken over theoretische Mechanica, opgegeben bij het Examen C aan de Polytechnische School te Delft sedert 1883, met antwoorden. Delft 1900. J. Waltman jr. Preis Fl. —.50.

Es ist immer dankenswert, wenn Aufgaben aus Prüfungen veröffentlicht werden. Hier sind gegen 50, in den Jahren 1883—1900 gestellte Aufgaben dargeboten. Sie gehören den verschiedensten Gebieten der theoretischen Mechanik an und lassen sich für Unterrichtszwecke gut verwenden. Von Aufgaben, in denen Beweise verlangt sind, werden keine Auflösungen gegeben.

Stuttgart. R. Mehmke.

Allan Cunningham. A binary Canon, showing residues of powers of 2 for divisors under 1000, and indices to residues. London 1900. Taylor and Francis.

Diese, mit Unterstützung der British Assocation und der Royal Society herausgegebenen Tafeln sind in bezug auf Anlage, Zweck und Umfang Jacobis bekanntem Canon arithmeticus von 1839 sehr ähnlich, nur daß durchweg die Basis 2 zugrunde gelegt ist, während bei Jacobi die Basis einer jeden einzelnen Tafel eine primitive Wurzel des betreffenden Moduls ist. Für praktische Zwecke, wie die Prüfung der Teilbarkeit oder das Aufsuchen der Primfaktoren großer Zahlen, sind diese neuen Tafeln geeigneter, während Jacobis Tafeln den Vorrang behaupten, sobald die Anwendung einer primitiven Wurzel nötig und 2 keine solche ist, wie es bei rein theoretischen Untersuchungen vorkommen kann. Auf die Herstellung möglichst fehlerfreier Tafeln ist große Mühe verwendet worden, z. B. hat man zwei Handschriften unabhängig von einander berechnet. Es werden 15 in Jacobis Tafeln aufgefundene, bisher nicht veröffentlichte Druckfehler mitgeteilt.

Stuttgart. R. Mehmke.

Compte Rendu du 2. congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communi cations publiés par **E. Duporcq.** Paris 1902 Gauthier-Villars 15 fr.

Der angewandten Mathematik gehören folgende Mitteilungen an: J. Boccardi, Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes. Die Arbeit gibt einige Ratschläge für Berechnung der speziellen Störungen der Planetoïden, wobei der Methode der Variation der Elemente der Vorzug gegeben wird. J. Hadamard, Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. Der Verf. betrachtet die akustische Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a \varDelta V$ und zeigt, daß der Gegensatz zwischen Gleichungen mit reellen und imaginären Charakteristiken kein fundamentaler ist, wie man gewöhnlich glaubt. V. Volterra, Sur les équations aux dérivées partielles. Der Verf. dehnt den Satz von Poisson über die Potentialfunktion auf partielle Differentialgleichungen von hyperbolischem Typus aus. A. Gallardo, Les mathématiques et la biologie. Die Arbeit beschäftigt sich mit den Leistungen der Variationsstatistik in den einzelnen Ländern und zählt unter anderem die 5 von Pearson aufgestellten Typen der Frequenzkurven auf. M. d'Ocagne, Sur les divers modes d'application de la methode graphique à l'art du calcul. Calcul graphique et calcul nomographique. Der Verf. setzt den prinzipiellen Unterschied zwischen graphischem und nomographischem Kalkul auseinander. Ersterer liefert eine Größe durch geometrische Konstruktion, letzterer sucht ein Bild von den mathematischen Gesetzen zu geben.

Stuttgart. Wölffing.

J. C. Poggendorff's Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (1883 bis zur Gegenwart). Herausgegeben von Prof. Dr. **J. von Oettingen,** 1—13. Lieferung (A—L) Leipzig 1902—1903, Barth. (à Lieferung 3 *M.*)

Der dem dritten sehr rasch folgende vierte Band füllt ein dringendes Bedürfnis aus, umsomehr als er sich nicht dem ursprünglichen Plane gemäß auf das 19. Jahrhundert beschränkt, sondern bis zur Gegenwart weiter geführt worden ist. Von Mathematikern, welche in den vorliegenden Lieferungen fehlen, nenne ich folgende Namen: C. Alasia, U. Amaldi, A. C. Archibald, G. Arnoux, A. Aubry, M. A. Baraniecky, E. N. Barisien, G. Bellacchi, V. V. Bobynin, T. J. Bromwich, J. M. Brückner, W. E. Byerly B. Carrara, C. Ciamberlini, L. Couturat, R. H. van Dorsten, A. Droz-Farny, F. Dumont, E. Fauquembergue, F. Ferrari, N. Fialkowski, K. Fink, G. Frattini, M. Frolov, G. Z. de Galdeano, D. Gambioli, R. Geigenmüller, E. Gelin, E. Goedseels, W. Gosiewski, E. Gubler, R. Guimarães, D. Kikuchi, V. Kommerell, R. Lachlan, Ed. Lucas, A. Lugli. Von Vertretern der angewandten Mathematik fehlen E. Brauer, Ad. Franke, K. Hausmann, A. F. Jorini, L. Klerič, vor allem aber der Name C. Bach. Es muß freilich zugegeben werden, daß es bei der Gleichgültigkeit vieler hierher gehörigen Personen gegenüber einem solchen Wörterbuch und bei der totalen Verkennung der Wichtigkeit, welche das Zusammenwirken aller Fachgenossen besitzt, oft schwer ist, biographisches Material zu bekommen. Umso weniger ist es aber gerechtfertigt, daß die Redaktion es unterlassen hat, die eingelaufenen Originalmitteilungen auf Grund anderer Quellen zu verbessern und zu ergänzen. Denn auch diese Originalmitteilungen lassen die erforderliche Exaktheit in den Literaturangaben vielfach vermissen, und daher rühren die zahlreichen Auslassungen wichtiger Arbeiten, die fehlenden Druckjahre und Druckorte, z. T. auch die unzweckmäßigen Abkürzungen der Zeitschriften usw. Zu rügen ist auch, daß Schulprogramme bisweilen mitten unter den Zeitschriftenartikeln verzeichnet sind. Auch die Zahl der Druckfehler scheint eher größer zu sein als in den früheren Bänden. Trotz dieser Ausstellungen muß anerkannt werden, daß durch den neuen Band des Wörterbuchs ein wertvolles weitzerstreutes Material für geschichtliche, biographische und literarische Forschung in praktischer Anordnung allgemein zugänglich gemacht wird.

Stuttgart. WÖLFFING.

C. de Freycinet, Sur les principes de la Mécanique rationelle. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Der Verfasser ist ein entschiedener Gegner der neueren Bestrebungen, die Mechanik auf Grund von Axiomen deduktiv aufzubauen; er befürchtet, daß daraus nur Unfruchtbarkeit und Verödung folgen werde. Ohne Zweifel liegt hierin etwas Wahres. Die Geschichte zeigt, daß in den schöpferischen Perioden der einzelnen Disziplinen die Grundbegriffe noch unfertig sind und daß die kritische Betrachtung erst dann eintritt, wenn die Konzeptionskraft nachläßt. Ferner läßt sich nicht leugnen, daß die Beschäftigung mit solchen logischen Untersuchungen die Sache reiferen Alters ist und auf junge Gemüter lähmend wirken kann. Wer Mechanik lehrt, tut daher gut, wie Freycinet es empfiehlt, seine Zuhörer „im Kontakte mit der Natur" zu erhalten. Allein damit ist über den Wert der logisch-kritischen Untersuchungen noch nicht das letzte Wort gesprochen. Sie verbieten zu wollen, würde jedenfalls dem Geiste der Freiheit widersprechen, der die Lebensluft allen Fortschrittes in der Wissenschaft ist.

Indem der experimentelle Charakter der Mechanik in den Vordergrund gestellt wird, bespricht der Verfasser der Reihe nach die Grundbegriffe: Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Masse und die Grundgesetze der Mechanik, wobei er es vorzüglich versteht, die wahren Schwierigkeiten aufzudecken. Besonders gilt das für den Begriff der Masse; was der Verfasser hier bringt, verdiente in die Lehrbücher aufgenommen zu werden, die gerade in dieser Beziehung zu wünschen übrig lassen.

Kiel. PAUL STAECKEL.

P. Appell et J. Chappuis. Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de première, conformément aux programmes du 31 mai 1902. Paris Gauthier-Villars, 1903.

Die Programme vom 31. Mai 1902 bedeuten eine tiefgreifende Umgestaltung des französischen Mittelschulunterrichtes, die im besonderen auch den mathematischen Unterricht betrifft. Diesem war vorgeworfen worden, daß er zu abstrakt sei und daß die Anwendungen auf die Erfahrungswissenschaften vernachlässigt würden, „die in den Schülern den Geist der Initiative erwecken und sie auf den Tätigkeitskreis vorbereiten, in dem der größte Teil von ihnen sich zu entwickeln berufen ist". Jetzt ist eine ausgiebige Beschäftigung mit Kinematik, Statik und Dynamik für die classe première und die classe de Mathématiques vorgeschrieben, die der Unter- und Oberprima der deutschen Gymnasien entsprechen. Das vorliegende Werk enthält die Bearbeitung des Pensums, das für die Unterprima bestimmt ist. Da in Frankreich bei den Prüfungen — unsere Abiturientenprüfung ist dort in zwei Abteilungen zerlegt, die bei dem Übergang von Unter- zu Oberprima und von Oberprima zur Hochschule stattfinden, — genau nach dem Programm gefragt wird, haben sich die Verfasser, wie das auch sonst üblich ist, streng an das Programm gehalten; in diesem Rahmen geben sie eine sehr klare Darstellung des Gegenstandes. Bei dem großen Interesse, das diese neue Entwicklung des mathematischen Unterrichtes für uns in Deutschland hat — handelt es sich doch um einen Versuch, der, wenn er gelingt, auf die deutschen Verhältnisse bedeutsam einwirken muß —, sei es gestattet, das amtliche Programm für den Unterricht in Mechanik auf der classe première hier mitzuteilen.

Den Anfang bildet eine Einführung in die Theorie der Vektoren. Dabei ist es ausdrücklich vorgeschrieben, daß die Behandlung rein geometrisch sein solle, denn, wie Appel und Chappuis in der Vorrede ihres Werkes sagen, „der Mißbrauch der Methoden der analytischen Geometrie tötet die Anschauung und den Erfindungsgeist". Die Reihenfolge der zu unterrichtenden Dinge ist:

Projektion eines Vektors auf eine gerichtete Achse, geometrische Summe mehrerer zusammentreffender Vektoren. Theorie der Projektionen. Geometrische Differenz zweier Vektoren. Lineares Moment eines Vektors in Bezug auf einen Punkt: das lineare Moment der Summe mehrerer zusammentreffender Vektoren in Bezug auf einen Punkt ist gleich der geometrischen Summe der Momente dieser Vektoren. Systeme beliebiger Vektoren; geometrische Summe; resultierendes Moment in Bezug auf einen Punkt. Besonderer Fall: Paare von Vektoren. Momente in Bezug auf eine Axe. Moment der geometrischen Summe zusammentreffender Vektoren. Summe der Momente der beiden Vektoren eines Paares. Tetraeder und Parallelepipedon, die über zwei Strecken konstruiert werden. Verallgemeinerung des Begriffes des Momentes.

Es folgen die Grundbegriffe und -Tatsachen der Kinematik: Messung der Zeit. Angenommene Einheiten. Pendel. Von der Bewegung. Ihre Relativität. Bahn eines Punktes. Beispiele von Bewegungen. Geradlinige und gleichförmige Bewegung. Geschwindigkeit bei einer Bewegung. Ihre Darstellung durch einen Vektor. Beliebige ungleichförmige Bewegung. Mittlere Geschwindigkeit. Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblick. Ihre Darstellung durch einen Vektor. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Bogens der Bahn nach der Zeit (die Entwickelung des Begriffes der Ableitung gehört zu dem mathematischen Pensum der classe première!). Hodograph. Beschleunigung. Beispiele ungleichförmiger Bewegung. Gleichförmige beschleunigte Bewegung. Gleichförmige Bewegung auf einem Kreise. Winkelgeschwindigkeit. Einfache Schwingungen auf einer Geraden. Wechsel des Bezugsystems. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Beispiele und Anwendungen (wobei nicht etwa boß geometrische Anwendungen gegeben werden sollen). Drehbewegung eines Körpers um eine Achse.

Darstellung der Drehung durch einen auf der Achse aufgetragenen Vektor. Die Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers ist das lineare Moment des darstellenden Vektors in Bezug auf diesen Punkt. Translationsbewegung eines starren Körpers. Schraubenbewegung eines Körpers. Praktische Realisierung dieser Bewegungen. Wellen und Zapfenlager. Zapfen und Pfannen. Angeln und Gelenke. Geradlinige Gleitschienen. Schrauben und Schraubenmuttern.

Kiel. PAUL STAECKEL.

E. Picard. Quelques réflexions sur la mécanique suivies d'une première leçon de dynamique. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

„Am Ende des 18. Jahrhunderts", so beginnt der Verfasser seine Auseinandersetzungen, „schienen die Grundlagen der Mechanik über jede Kritik erhaben zu sein, und das Werk der Begründer der Wissenschaft der Bewegung bildete eine Gebäude, das, wie man glaubte, auf immer der Zeit trotzen würde. Seitdem hat eine eindringende Analyse die Fundamente des Gebäudes mit der Lupe untersucht, und da, wo ein Lagrange und ein Laplace selbstverständliche Dinge sahen, begegnen wir jetzt den ernstlichsten Schwierigkeiten. Ein jeder, der die Anfänge der Mechanik zu lehren gehabt hat, wird, wenn er darüber nur selbständig nachgedacht hat, gefühlt haben, wie wenig zusammenhängend die mehr oder weniger traditionellen Darstellungen der Grundlagen sind". Deshalb habe man versucht, den Gesichtspunkt der historischen Entwicklung zu verlassen, und, wie die Geometer es bei ihrer Wissenschaft getan haben, die Mechanik auf Grund einer Anzahl von Axiomen deduktiv zu entwickeln. Man erhält so ein System der Mechanik, das erst, nachdem es vollständig aufgebaut ist, mit der Erfahrung verglichen wird. Der Mangel dieser Methode besteht darin, daß der Anfänger nicht begreift, warum man gerade auf diese Axiome kommt; in der Geometrie macht sich das weniger geltend, weil ihre Forderungen einen anschaulicheren Charakter haben und sich auf alltägliche Erfahrungen beziehen.

Wie soll man unter diesen Umständen verfahren? Der Verfasser berichtet, welchen Weg er seit 1894 in seinen Vorlesungen eingeschlagen habe; allerdings entstehe dabei eine Mischung von Axiomen und mehr oder weniger genauen Erfahrungen, „avec quelque peu d'anthropomorphisme". Wie er im einzelnen verfährt, läßt sich in Kürze nicht darstellen, dazu muß man die meisterhafte Leçon selbst durchlesen.

Kiel. PAUL STAECKEL.

Neue Bücher.

Analysis.

1. Loewy, Alfred, Versicherungsmathematik. (Sammlung Göschen Nr. 180.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Astronomie und Geodäsie.

2. Frischauf, Johs., Grundriß der theoretischen Astronomie u. der Geschichte der Planetentheorien. 2., verm. Aufl. gr. 8°, XV u. 199 S. m. 22 Fig. Leipzig, Engelmann. M. 5; geb. in Leinw. M. 6.
3. Pietsch, C., Katechismus der Feldmeßkunst. (Webers illustr. Katech. Nr. 44.) 7. Aufl. Leipzig, Weber. geb. in Leinw. M. 1.80.
4. Schulze, Bruno, Das militärische Aufnehmen unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der königlich preußischen Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearb. gr. 8°, XIII u. 305 S. m. 129 Abb. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 8.

Geschichte und Biographien.

5. Poggendorff, J. C., Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. 4. Bd. (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), hrsg. v. A. J. von Oettingen. Lfg. 12—15. Leipzig, Barth. je M. 3.

Mechanik.

6. Ceresole, Pierre, Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gleichförmig rotierenden Fläche. 8°, VI u. 90 S. m. 23 Fig. Diss. Zürich.
7. Hauber, W., Statik. I. Tl. Die Grundlehren der Statik starrer Körper. (Sammlung Göschen Nr. 178.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
8. Klein, F., u. Sommerfeld, A., Über die Theorie des Kreisels. Heft III. Die störenden Einflüsse. Astronomische u. geophysikalische Anwendungen. Leipzig, Teubner. M. 9.
9. Ostenfeld, A., Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe besorgt v. D. Skouge. Leipzig 1904, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
10. Tait, P. G., and Steele, W. J., A treatise on dynamics of a particle. With numerous examples. 7th edition, carefully revised. London & New York, Macmillan. 12mo. 15 + 412 pp. Cloth. $ 3.
11. Wieghardt, Karl, Über die Statik ebener Flachwerke mit schlaffen Stäben. gr. 8°, IX u. 85 S. m. 31 Fig. Diss. Göttingen.

Physik und Chemie.

12. Abraham, Henri, Recueil d'expériences élémentaires de physique, publié avec la collaboration de nombreux physiciens. I. partie. Traveaux d'atelier. Géometrie et mécanique. Hydrostatique. Chaleur. Paris 1904, Gauthier-Villars.
13. Brillouin, Marcel, Propagation de l'électricité. Histoire et théorie. Cours du Collège de France. Paris, Hermann. Frs. 15.
14. Exner, Franz, u. Haschek, E., Wellenlängen-Tabellen für spektralanalytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Bogenspektren der Elemente. 2 Teile. Leipzig u. Wien 1904, Deuticke. M. 25.

15. Fortschritte, die, der Physik im J. 1902. Dargestellt v. der deutschen physikal. Gesellschaft. 58. Jahrg. 2. Abtlg. Physik des Äthers. gr. 8°, LIV u. 906 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 34.

16. —, Dasselbe. 58. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. gr. 8°, LXVIII u. 680 S. Ebenda. M. 26.

17. Fuss, Konrad, u. Hensold, Georg, Lehrbuch der Physik f. den Schul- u. Selbstunterricht. Allgemeine Ausgabe. 5., verb. u. verm. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 5; geb. M. 5.70.

18. —, Dasselbe. Gekürzte Ausg., nach den bayrischen Lehrplänen vom 30. Juli 1898 bearb. Freiburg i. B., Herder. M. 4; geb. 4.65.

19. Gallusser, H., u. Hausmann, M., Theorie u. Berechnung elektrischer Leitungen. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 5.

20. Hadamard, Jacques, Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Cours du Collège de France. Paris, Hermann. Frs. 18.

21. Hermes, O., u. Spies, P., Elementarphysik, unter Zugrundelegung des Grundrisses der Experimentalphysik von E. Jochmann hrsg. für den Anfangsunterricht in höheren Lehranstalten. 3., neu bearb. Aufl. Berlin, Winckelmann & Söhne. geb. M. 2.50.

22. Herz, W., Über die Lösungen. Einführung in die Theorie der Lösungen, die Dissoziationstheorie u. das Massenwirkungsgesetz. Nach Vorträgen. gr. 8°, V u. 50 S. Leipzig, Veit & Co. M. 1.40.

23. Jochmann, E., Grundriß der Experimentalphysik u. Elemente der Chemie sowie der Astronomie u. mathemat. Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten und zum Selbststudium hrsg. v. O. Hermes u. P. Spies. 15., vollständig neu bearb. Aufl. Berlin, Winckelmann & Söhne. geb. M. 5.50.

24. Mathias, E., Le point critique des corps purs. In-8°, VIII — 156 p. avec 44 fig. Paris 1904, Naud. Frs. 7.

25. Murani, Oreste, Onde Hertziane e telegrafo senza fili. (Manuali Hoepli.) 16°, p. 356, fig. Milano, Hoepli. L. 3.50.

26. Nippoldt jr., A., Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht. (Sammlung Göschen Nr. 175.) 8°, 136 S. m. 3 Taf. u. 14 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

27. Pellat, H., Cours d'électricité, Tome II. Electro-dynamique; Magnétisme; Induction: Mesures électro-magnétiques. Gr. in-8° avec fig. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.

28. Pfeiffer, Emanuel, Physikalisches Praktikum für Anfänger, dargestellt in 25 Arbeiten. 8°, VIII u. 149 S. m. 47 Abb. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.60.

29. Rosenberg, Karl, Lehrbuch der Physik f. die oberen Klassen der Mittelschulen u. verwandter Lehranstalten. Wien u. Leipzig 1904, Hölder. M. 5.20.

30. Stodola, A., Die Dampfturbinen u. die Aussichten der Wasserkraftmaschinen. Versuche und Studien. gr. 8°, VIII u. 220 S. m. 119 Fig. u. 1 Taf. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 6.

31. Van 't Hoff, J. H., Vorlesungen über theoretische u. physikalische Chemie. 3. Heft. Beziehungen zwischen Eigenschaften u. Zusammensetzung. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. Mk. 4.

32. Waals Jr., J. D. van der, De hypothesen in de natuurkunde. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het hoogleeraarsambt aan de rijks universiteit te Groningen op den 23sten September 1903. Groningen, Wolters. Fl. —.75.

Rechenapparate, Tafeln.

33. Bogenboekje voor centesimale verdeeling van den cirkelrand. Delft, Waltman Jr. Fl. —.75.

34. Krause, Rud., Rechnen m. dem Rechenschieber nach dem Dreiskalensystem der Firmen Dennert & Pape, A. W. Faber, Nestler u. a. 12°, 16 S. m. 1 Taf. Mittweida, Polytechn. Buchh. M. —.45.
35. Schubert, Herm., Vierstellige Tafeln u. Gegentafeln, für logarithmisches u. trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. (Sammlung Göschen Nr. 81.) 2. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Verschiedenes.

36. Alexejeff, W. G., Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung. (Nach Untersuchungen von N. W. Bugajew und P. A. Nekrassow im Zusammenhang mit meinen Untersuchungen über formale Chemie.) In der Sitzung der Gelehrten Literarischen Gesellschaft zu Jurjew am 30. November 1902 vorgetragen gr. 8°, 48 S. Jurjew (Dorpat), Mathiesens Buchdruckerei. (Berlin, Mayer & Müller.) M. 1.20.
37. Bolawelder, Anton, Mathematische Ableitung der Naturerscheinungen vom empirischen reinen Raume. Wien, Gerolds Sohn. M. 4.
38. Harperath, Ludwig, Sind die Grundlagen der heutigen Astronomie, Physik, Chemie haltbar? Beitrag zur Lösung der „Welträtsel" gestützt auf Berzelius und Koppernikus. Vortrag, gehalten in der 75. Versammlung deutscher Naturforscher u. Ärzte zu Cassel. 8°, 57 S. m. 6 Fig., 1 chem. Tab. u. 2 Taf. Berlin. Mayer & Müller. M. 1.
39. Schubert, Herm., Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Kleine Ausgabe. 2., durchgesehene Aufl. Leipzig 1904, Göschen. geb. in Leinw. M. 5.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abraham, H., Recueil d'expériences élémentaires de physique, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 12.

Alexejeff, W. G., Die Mathematik als Grundlage der Kritik wissenschaftlich-philosophischer Weltanschauung, s. N. B. 36.

Bolawelder, A. Mathematische Ableitung der Naturerscheinungen, s. N. B. 37.

Becker, H., Geometrisches Zeichnen. (Sammlung Göschen Nr. 58.) Neu bearb. v. J. Vonderlinn. 3. (der Neubearbeitg. 1.) Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Brillouin, M., Propagation de l'électricité, s. N. B. 13.

Campbell, John Edward, Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups. 8vo, pp. XXIV + 412. Oxford, Clarendon Press. 14 s.

Ceresole, P., Über die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer gleichförmig rotierenden Fläche, s. N. B. 6.

Féaux, B., Buchstabenrechnung u. Algebra verbunden mit Aufgabensammlung. 10., verbesserte u. vermehrte Aufl. besorgt durch Fr. Busch. Paderborn, Schöningh.

Frischauf, J., Grundriß der theoretischen Astronomie, s. N. B. 2.

Fuss, K., u. Hensold, E., Lehrbuch der Physik, s. N. B. 17 u. 18.

Gauss, C. Fr., Werke. Neunter Band. Herausg. v. d. Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. Leipzig, B. G. Teubner. kart. n. M. 26.—

Glaser, Rob., Stereometrie. (Sammlung Göschen Nr. 97.) 2., umgearb. u. verm. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Grace, J. H., and Young, A., The algebra of invariants. 8vo, VII and 384 pp. Cambridge, University Press.

Hadamard, J., Leçons sur la propagation des ondes, s. N. B. 20.

Hagen, Johann G., S. J., Synopsis der höheren Mathematik. III. Differential- und Integralrechnung. Lfg. 3 u. 4. Berlin 1900, Dames. je M. 5.

Harpfrath, L., Sind die Grundlagen der heutigen Astronomie, Physik, Chemie haltbar? S. N. B. 38.

Hauber, W., Statik, s. N. B. 7.

Hermes, O., u. Spies, P., Elementarphysik, s. N. B. 21.

Hilbert, David, Grundlagen der Geometrie. 2., durch Zusätze vermehrte u. mit 5 Anhängen versehene Aufl. Leipzig, Teubner. M. 5.20; geb. in Leinw. M. 5.60.

Jessop, C. M., A treatise on the line complex. 8vo. XV and 364 pp. Cambridge, University Press. Cloth. 10 s.

Jochmann, E., Grundriß der Experimentalphysik, s. N. B. 23.

Klein, F., u. Sommerfeld, A., Über die Theorie des Kreisels, s. N. B. 8.

Kronecker, Leopold, Vorlesungen über Mathematik. II. Tl. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, bearb. u. fortgeführt v. Kurt Hensel. 2. Abschn. Vorlesungen über Determinantentheorie. 2. Bd. Leipzig, Teubner. M. 20; geb. M. 21.

Loewy, A., Versicherungsmathematik, s. N. B. 1.

Mahler, G., Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Nr. 136.) 2., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Mathias, E., Le point critique des corps purs, s. N. B. 24.

Nippoldt jr., A., Erdmagnetismus, Erdstrom u. Polarlicht, s. N. 26.

Ostenfeld, A., Technische Statik, s. N. B. 9.

Pellat, H., Cours d'électricité, t. II, s. N. 27.

Pfeiffer, E., Physikalisches Praktikum, s. N. B. 28.

Pionchon, J., Grandeurs géométriques. (Bibliothèque de l'Elève Ingénieur. Mathématiques. IV.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch, s. N. B. 5.

Rosenberg, K., Lehrbuch d. Physik, s. N. B. 29.

Schlömilchs Handbuch der Mathematik. 2. Aufl.. hrsg. v. R. Henke u. R. Heger. 1. Bd. Elementarmathematik. Lex. 8°, XII u. 611 S. m. 321 Fig. Leipzig 1904, Barth. M. 20; geb. M. 22.50.

— dasselbe. 2. Bd Höhere Mathematik. 1. Tl. gr. 8°, VIII u. 765 S. m. 281 Fig. u. 12 Taf. Ebenda. M. 20; geb. M. 22.50.

Schubert, H., Mathemath. Mußestunden, s. N. B. 39.

Schubert, H., Vierstellige Tafeln u. Gegentafeln. s. N. B. 35.

Schulze, Br., Das militärische Aufnehmen, s. N. B. 4.

Simon, Max, Analytische Geometrie des Raumes. (Sammlung Göschen Nr. 89.) 2., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Stark, Johannes, Die Dissoziierung u. Umwandlung chemischer Atome. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1.50.

Stoffaes, l'Abbé, Cours de mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques. 2ième édition, entièrement refondue. In-8°. Paris 1904, Gauthiers-Villars. Frs. 10.

Van't Hoff, J. H., Vorlesungen über theoretische u. physikalische Chemie, s. N. B. 31.

Wieghardt, H., Über die Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben, s. N. B. 11.

Berichtigung.

Auf 344 Z. 9 v. o. lies $2^n - 2$ Schleifen statt $2n - 2$.
" " " " 16 " " " $2^n - 1$ " " $2n - 1$.
" " " " 17 " " " $2^n - 2$ " " $2n - 2$.

Fig. 1ª.

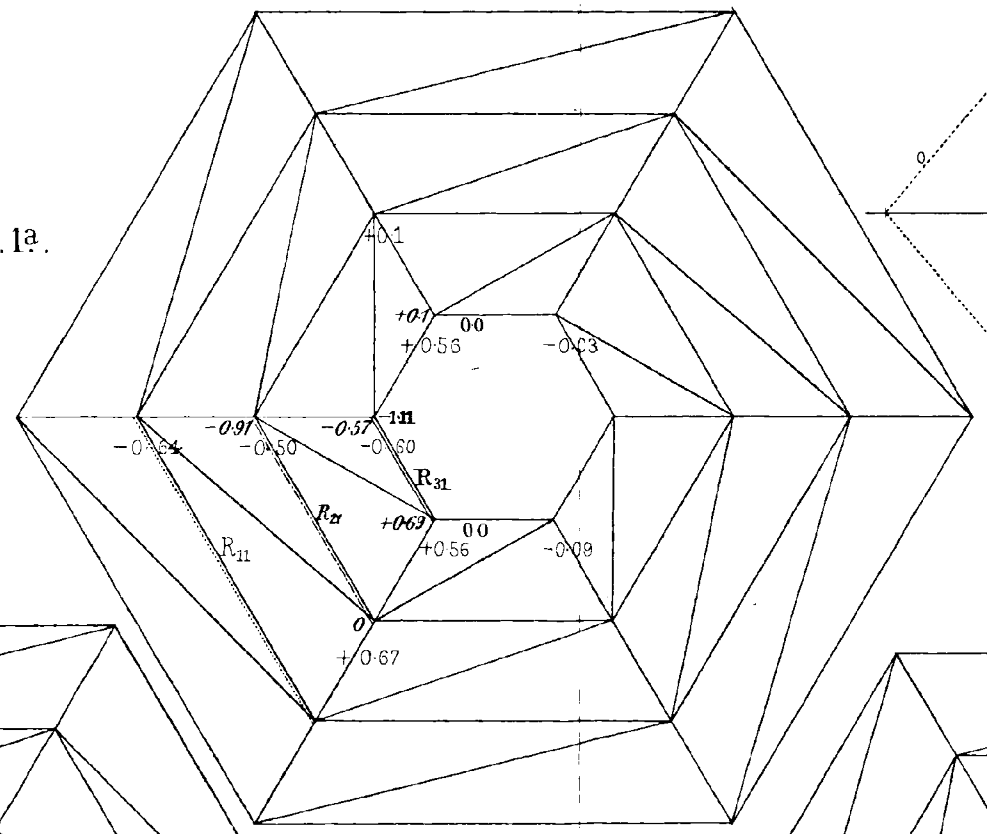


Fig. 2ª.

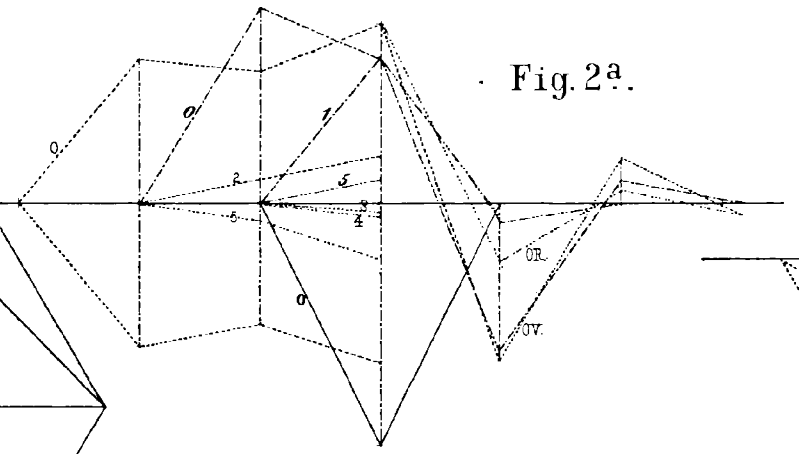


Fig. 2ᵇ.

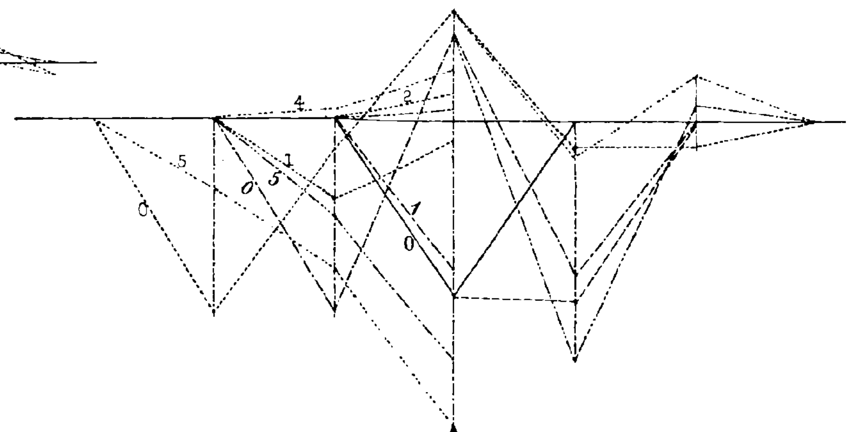


Fig. 1ᵇ.

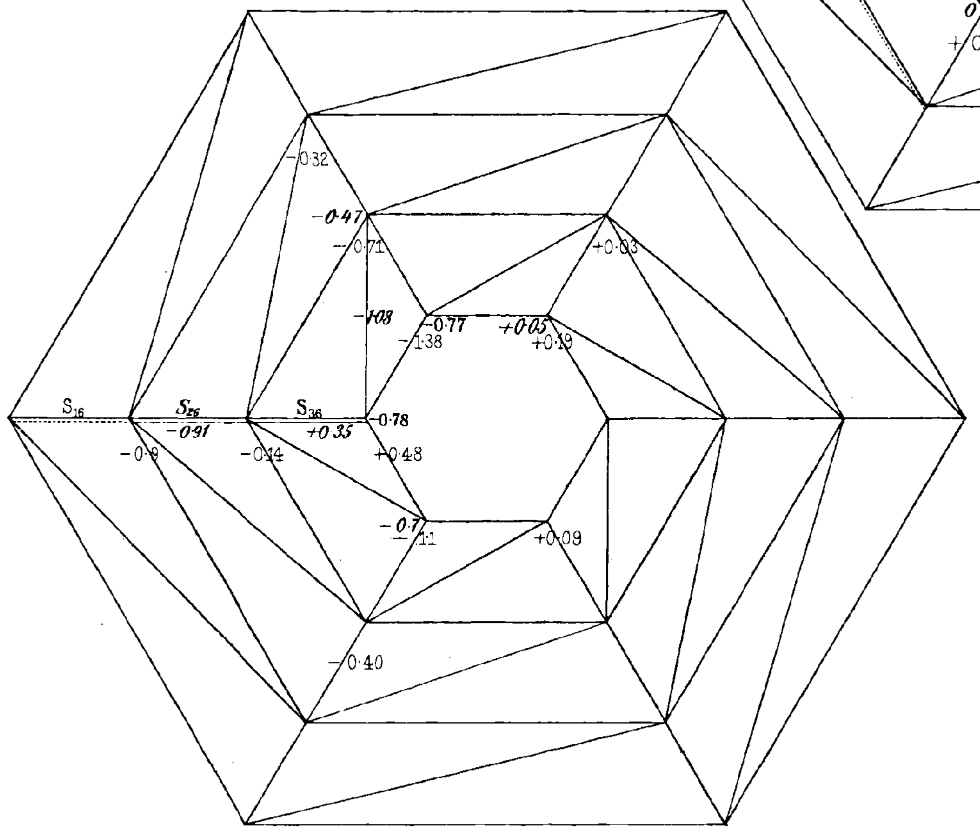


Fig. 2ᶜ.

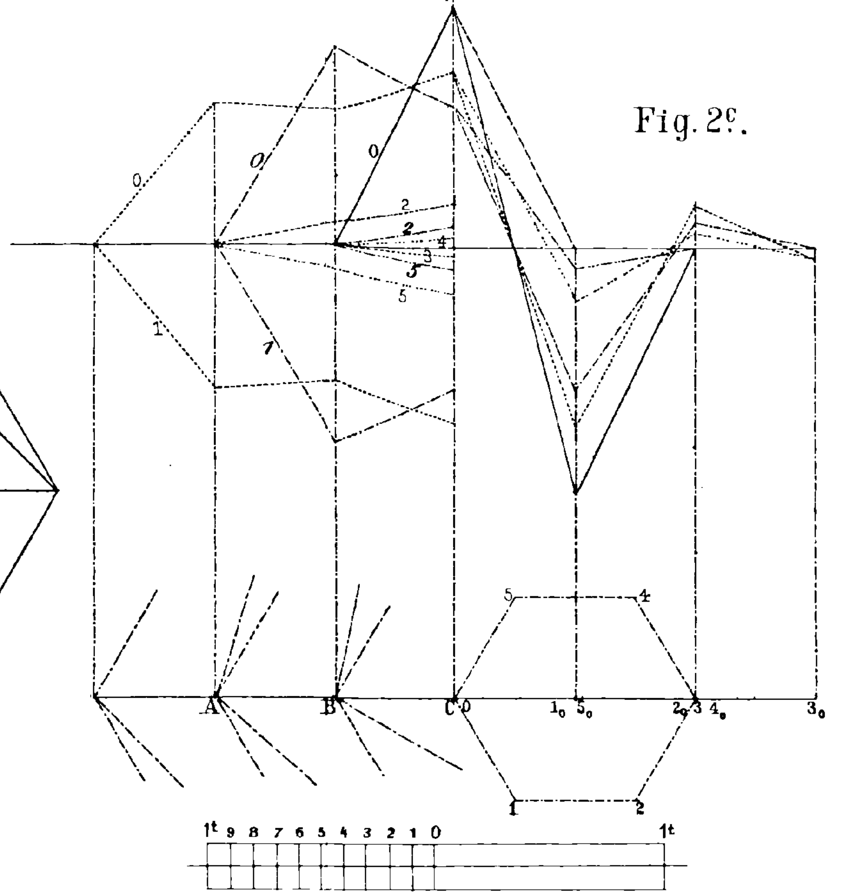
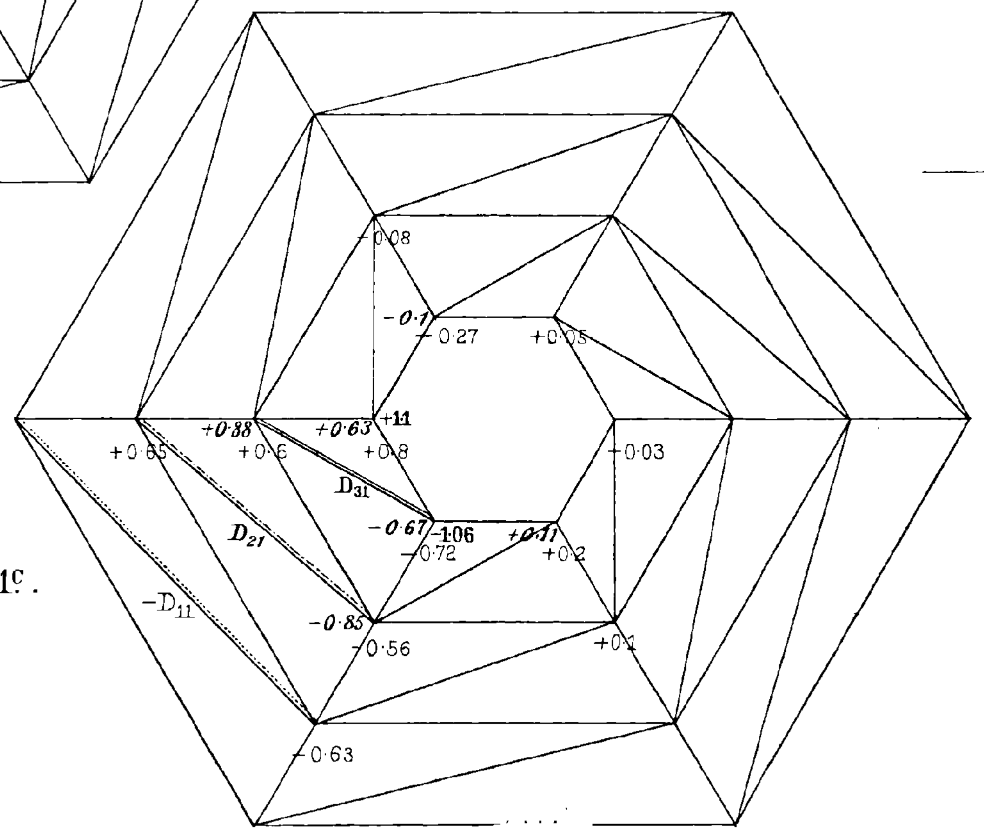


Fig. 1ᶜ.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Zug

Druck

Fig. 3a.

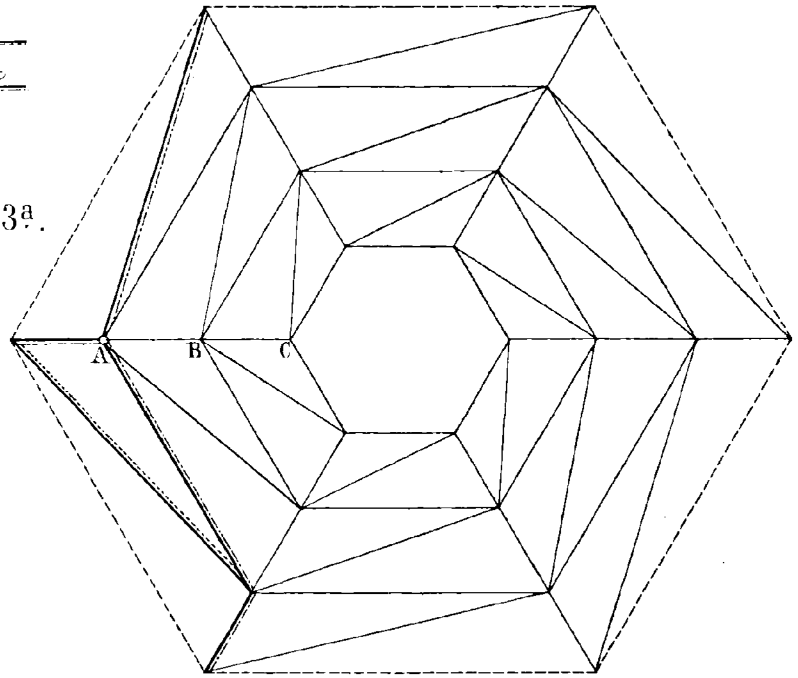


Fig. 3b.

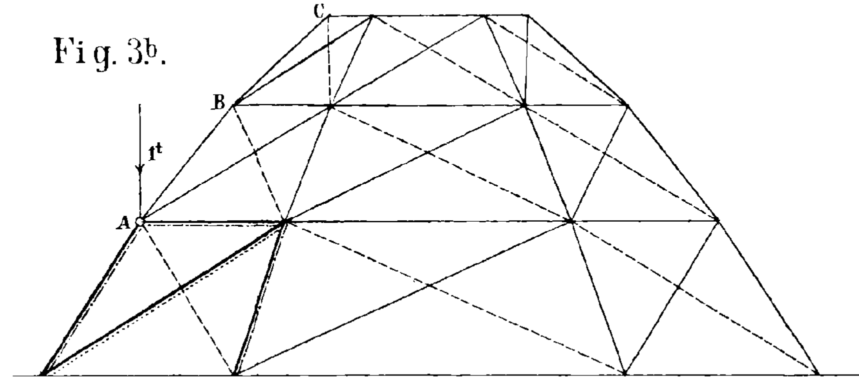


Fig. 6b.

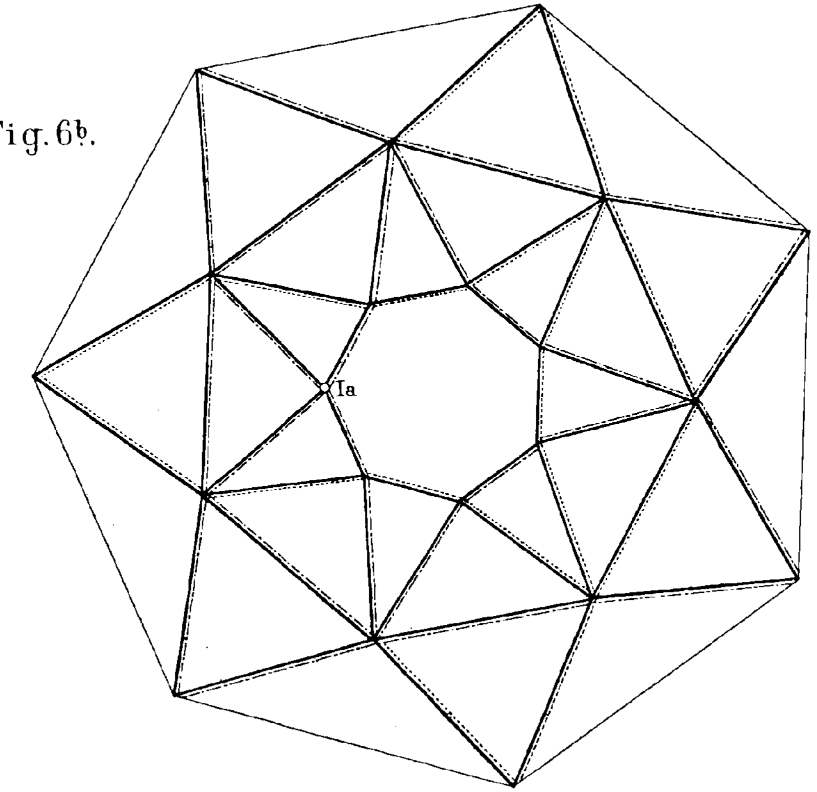


Fig. 4b.

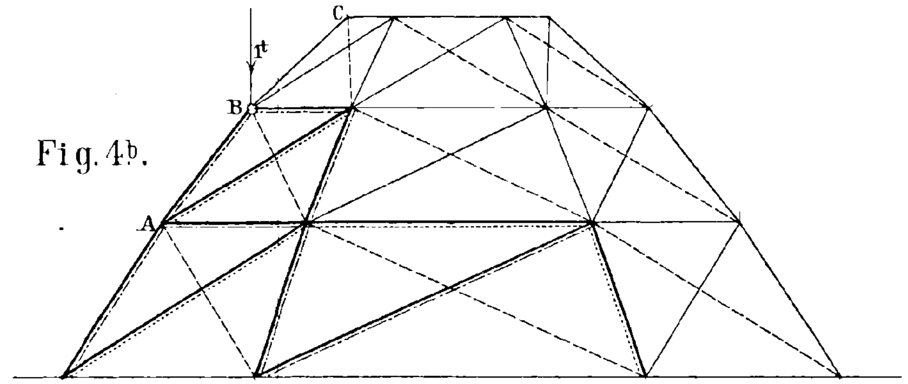


Fig. 4a.

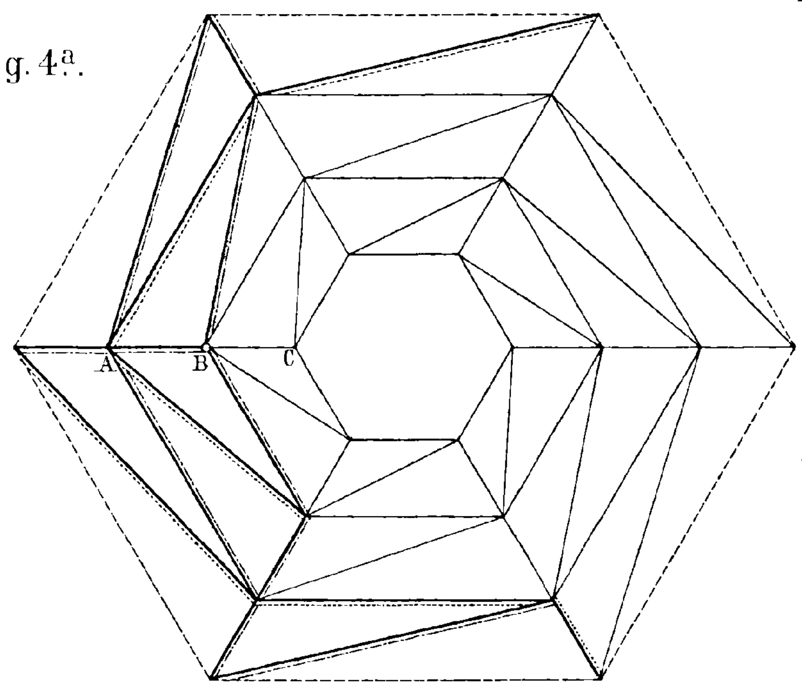


Fig. 5a.

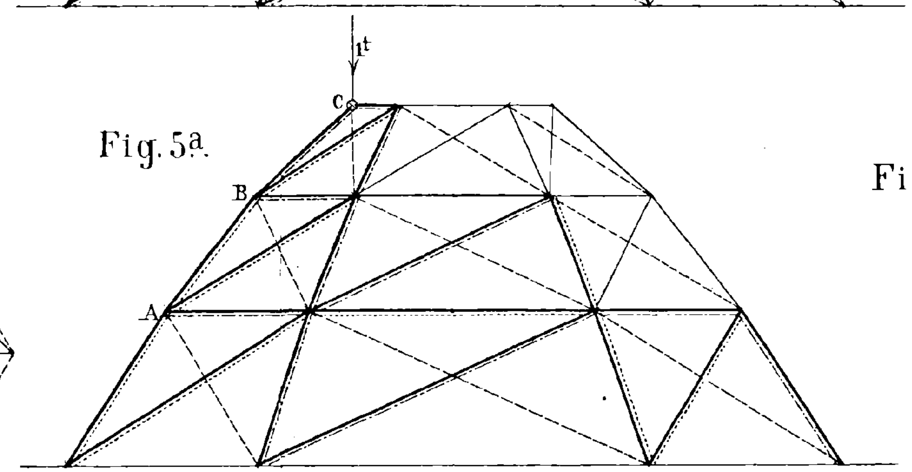


Fig. 5b.

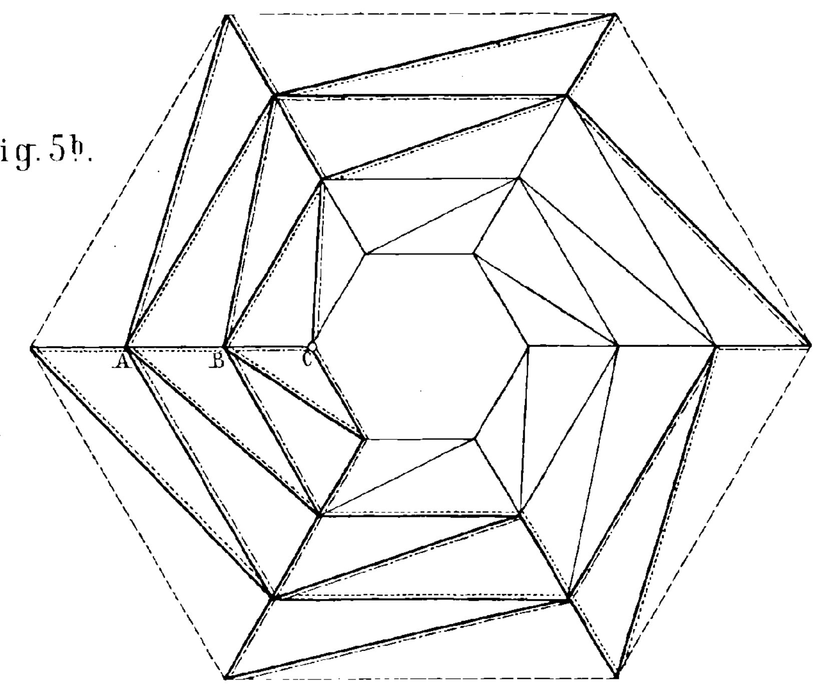
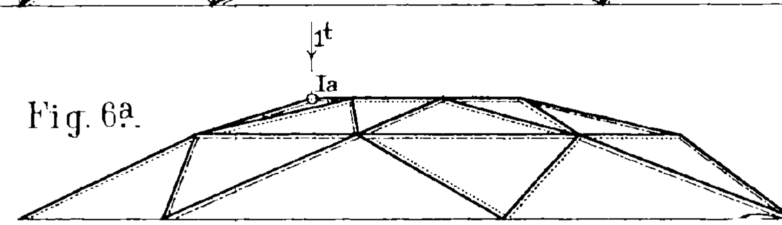


Fig. 6a.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Zug

Druck

Fig. 7b.

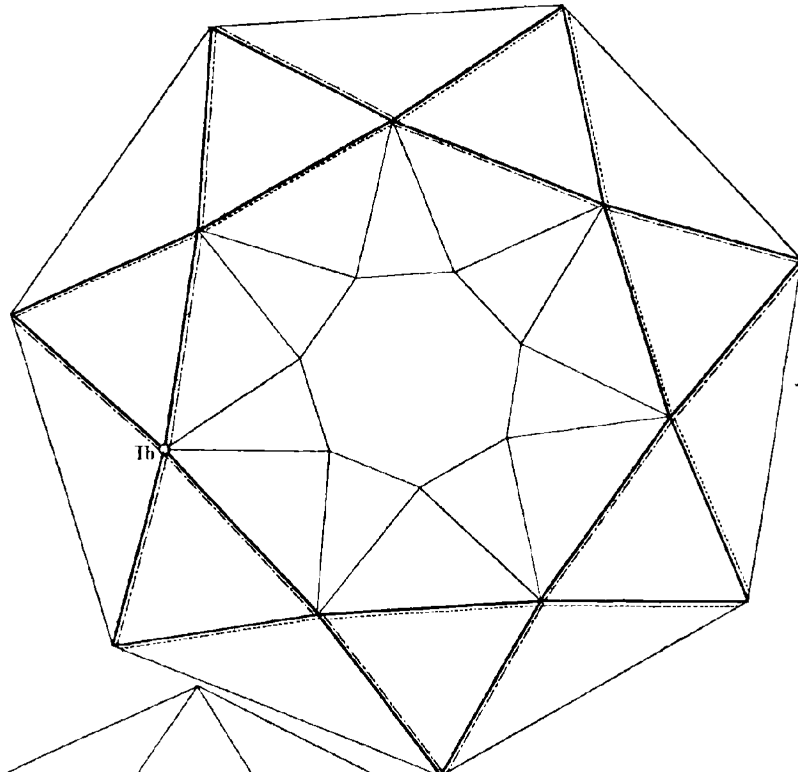


Fig. 7a.

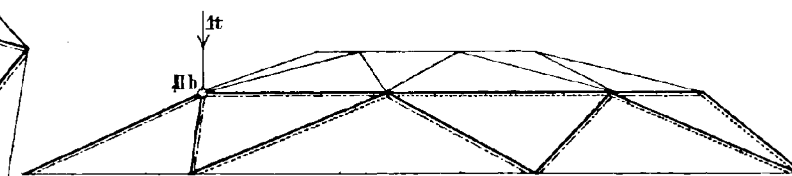
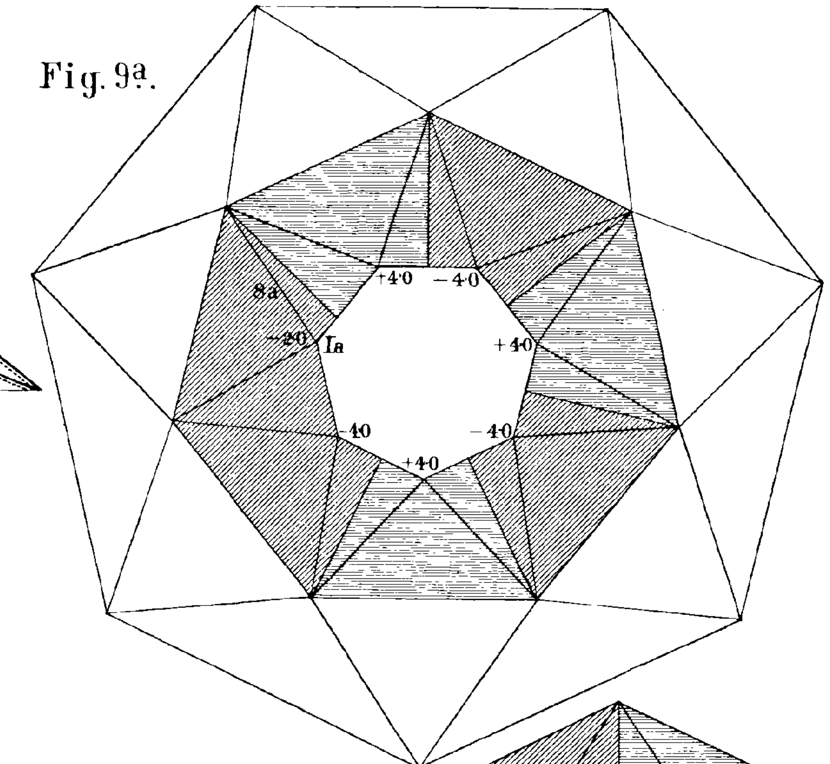


Fig. 9a.



+ Zug; −Druck

Fig. 8a.

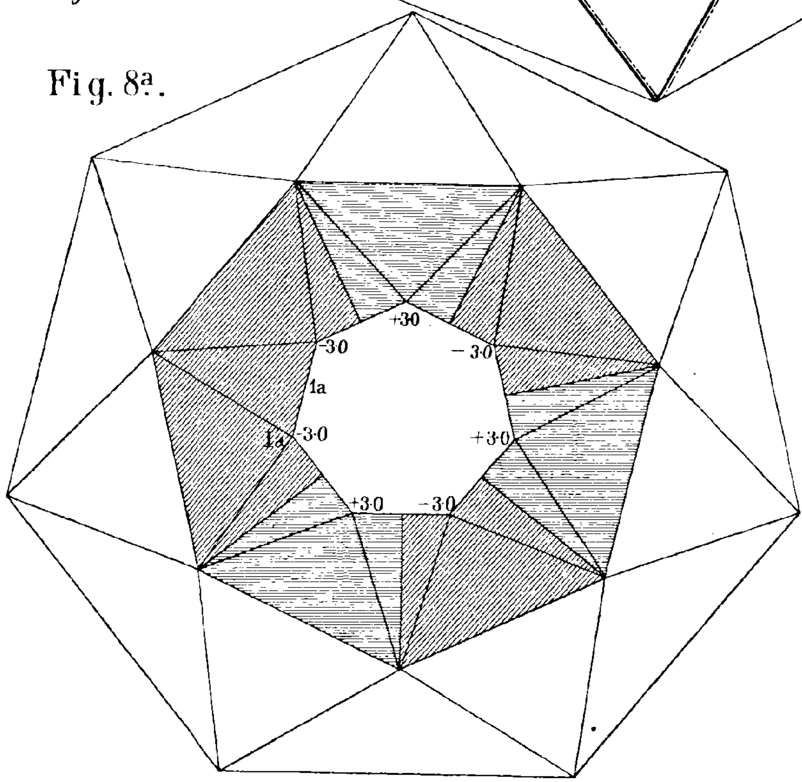


Fig. 8b.

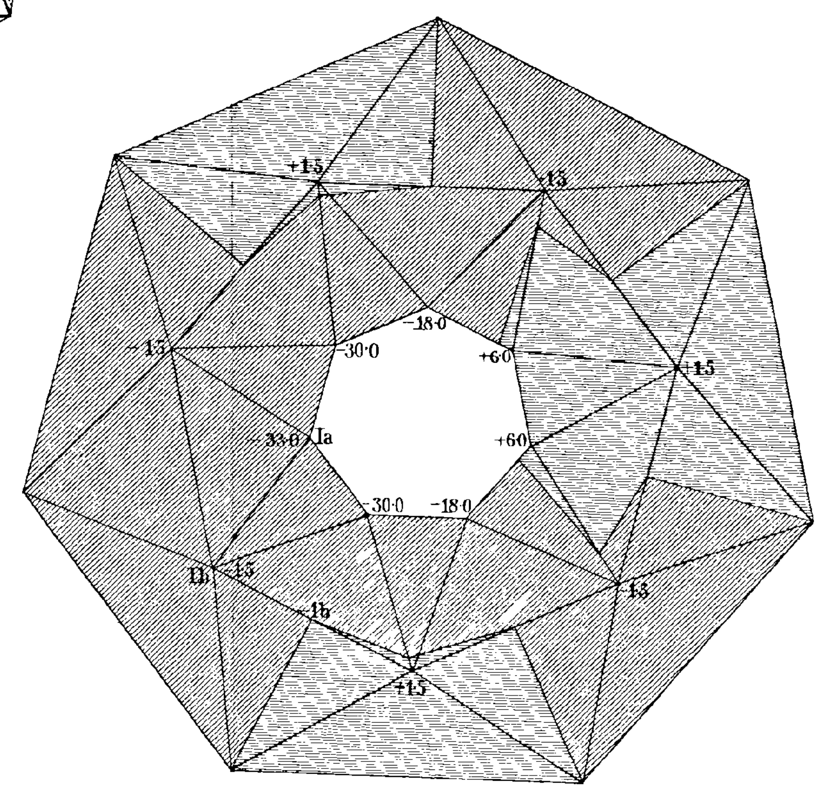
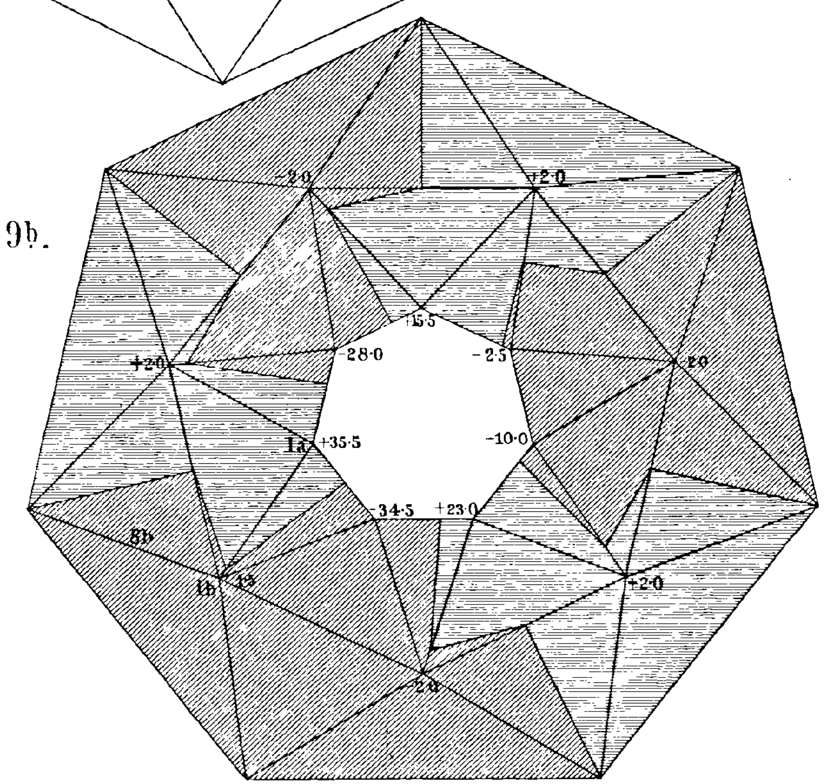


Fig. 9b.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig

Fig. 1.

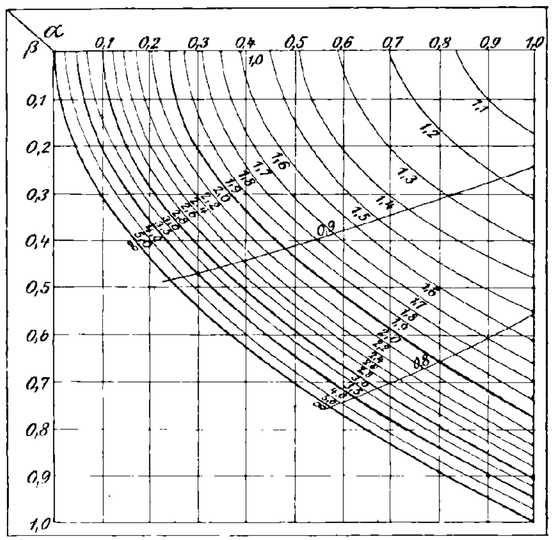


Fig. 3.

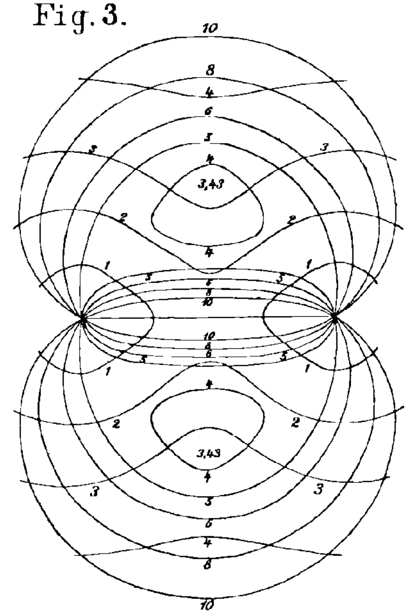
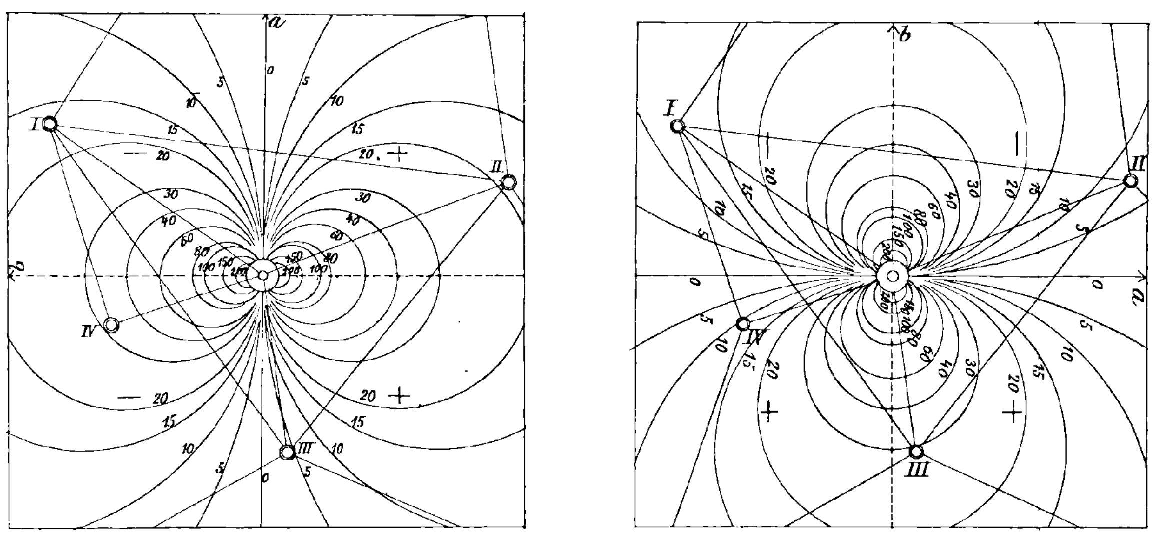


Fig. 11.



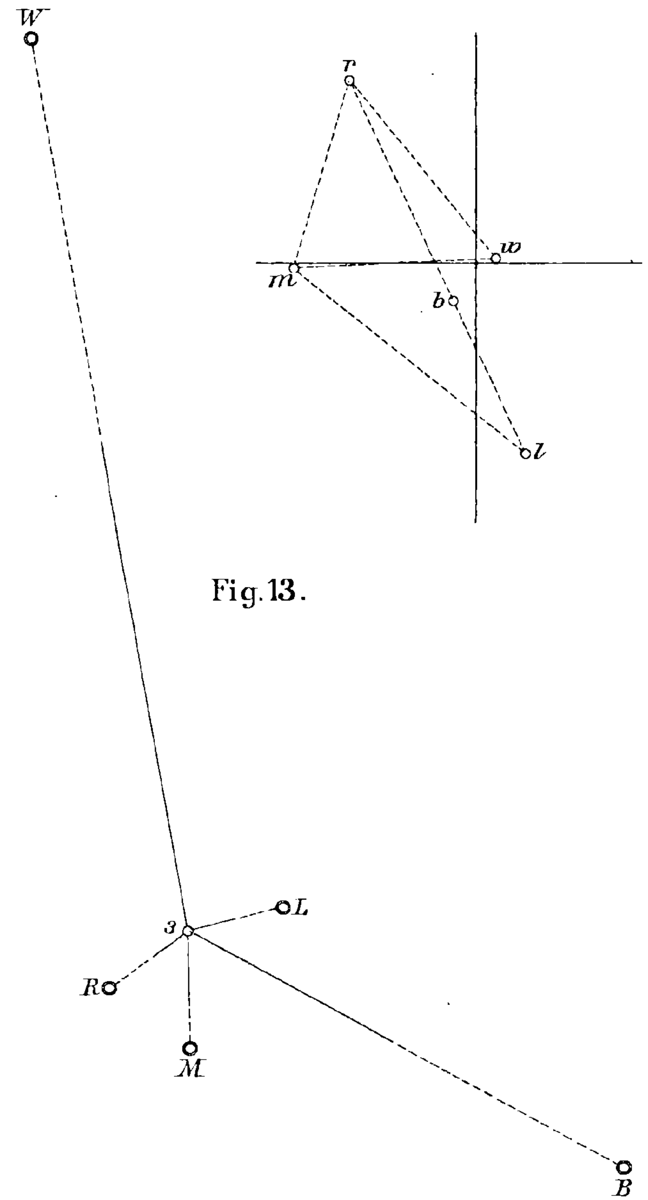
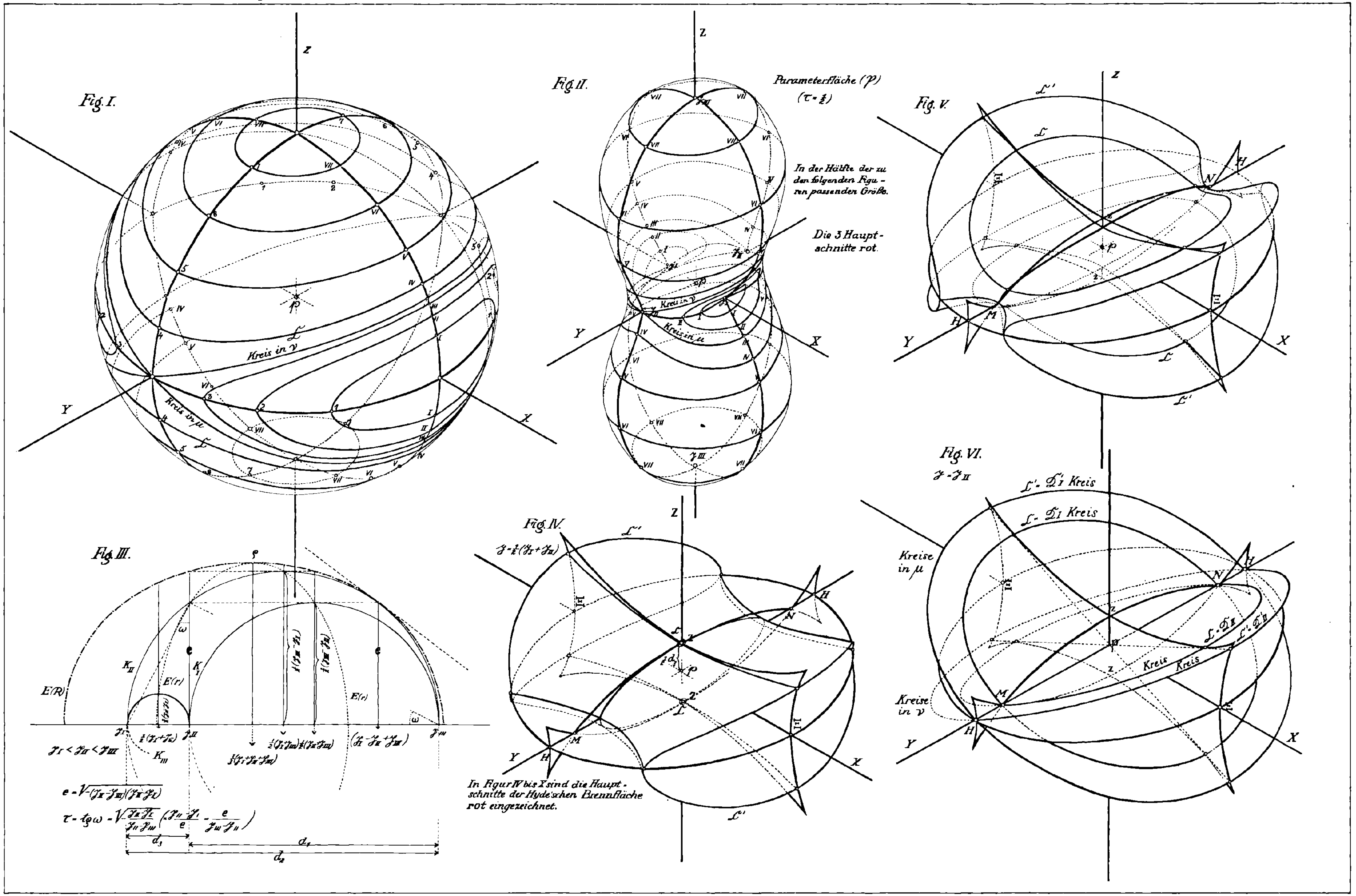


Fig. 13.

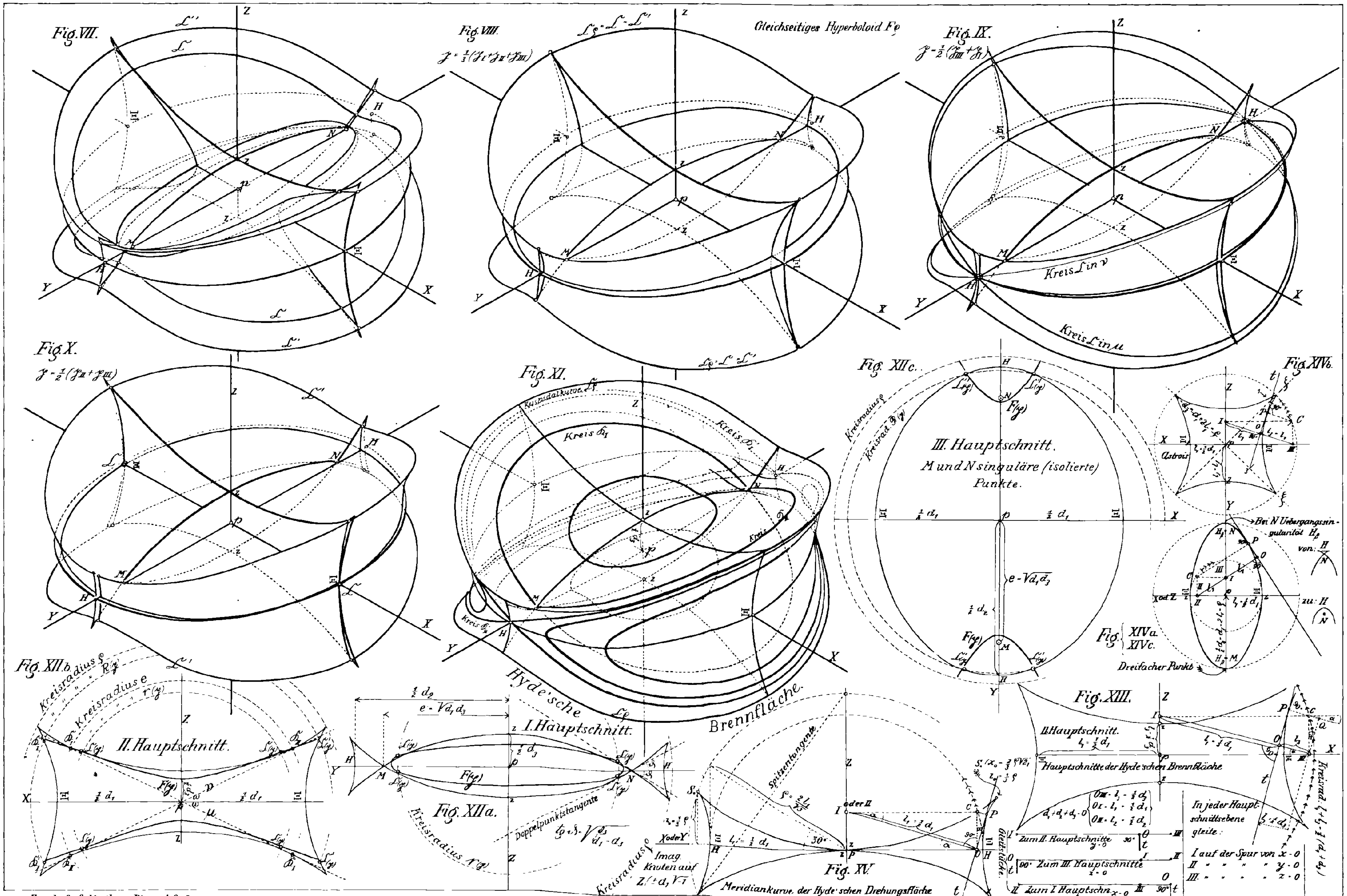
Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.