

ANNALI
DI
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — Eugenio Beltrami *in Roma*

Ulisse Dini *in Pisa*.

SERIE II - TOMO XX

(dal marzo dell'anno 1892 al gennaio dell'anno 1893.)

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XX.^o (SERIE II.^a)

	PAG.
Sur la surface des ondes. — <i>A. Cayley</i>	1
Il concetto di lunghezza e la retta. — <i>Rodolfo Bettazzi</i>	19
Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. — <i>Prof. Giulio Ascoli</i>	41
Ricerche sulla deformazione ed i fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino. — <i>Carlo Somigliana</i>	61
Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine. — <i>L. Berzolari</i>	101
Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni. — <i>Ernesto Pascal</i>	163
Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie ∞^1 giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione. — <i>Federico Amodeo</i>	227

Indice.

	PAG.
Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane. — <i>C. Segre</i> .	237
Delle funzioni regolari in un'area connessa qualsivoglia a distanza finita. — <i>Prof. Giulio Ascoli</i>	243
Annuncio necrologico	256
Sopra due curve invariantive di una quartica piana. — <i>Edgardo Ciani</i> . .	257
Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3. ^o ordine e sui gruppi ad esso isomorfi. — <i>Ernesto Pascal</i> (Memoria 2. ^a) .	269

Sur la surface des ondes.

(Par M. A. CAYLEY, à Cambridge.)

1. Il y a dans les *Annali di Matematica*, tom. II (1859) deux Notes très intéressantes sur cette surface, COMBESCURE, *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*, pp. 278-285 et BRIOSCHI, *Osservazioni sulla medesima quistione*, pp. 285-287. Je me propose de reproduire et développer cette théorie, en changeant les notations et l'arrangement des recherches de la manière qui me paraît convenable.

2. Je prends a, b, c pour les carrés des semiaxes ($a > b > c$) et j'écris

$$A, B, C = a + b + c, \quad ab + ac + bc, \quad abc;$$

$$\alpha, \beta, \gamma = b - c, \quad c - a, \quad a - b$$

($\alpha + \beta + \gamma = 0$, et ainsi, $\alpha = +$, $\gamma = +$ et $\beta = -\alpha - \gamma = -$, et en magnitude absolue plus grand que α ou γ):

$$\xi = \quad x^2 + \quad y^2 + \quad z^2,$$

$$\eta = \quad ax^2 + \quad by^2 + \quad cz^2,$$

$$\zeta = a(b + c)x^2 + b(c + a)y^2 + c(a + b)z^2,$$

et de là réciproquement

$$\beta\gamma x^2 = \zeta - a\eta - bc\xi,$$

$$\gamma\alpha y^2 = \zeta - b\eta - ca\xi,$$

$$\alpha\beta z^2 = \zeta - c\eta - ab\xi.$$

3. L'équation de la surface est

$$\xi\eta - \zeta + abc = 0,$$

Annali di Matematica, tomo XX.

et de là, en écrivant $\zeta = \xi\eta - abc$, on obtient pour un point de la surface

$$\beta\gamma x^2 = (\xi - a)(\eta - bc),$$

$$\gamma\alpha y^2 = (\xi - b)(\eta - ca),$$

$$\alpha\beta z^2 = (\xi - c)(\eta - ab),$$

équations qui donnent les valeurs des coordonnées (x, y, z) du point en termes de deux paramètres ξ, η . Je remarque que ces équations donnent

$$\frac{x^2}{\xi - a} + \frac{y^2}{\xi - b} + \frac{z^2}{\xi - c} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\eta - bc} + \frac{y^2}{\eta - ca} + \frac{z^2}{\eta - ab} = 0;$$

la première équation, en y considérant ξ comme dénotant $x^2 + y^2 + z^2$, et la seconde équation en y considérant η comme dénotant $ax^2 + by^2 + cz^2$, sont équivalentes l'une et l'autre à l'équation $\xi\eta - \zeta + abc = 0$ de la surface.

4. Je prends λ, μ, ν pour les cosinus des inclinations de la normale (ou, ce qui est la même chose, de la perpendiculaire par le centre sur le plan tangent) aux trois axes, et v pour le carré de la longueur de ce perpendiculaire, $v = (\lambda x + \mu y + \nu z)^2$, on a

$$\lambda = \frac{x}{D} \{a\xi + \eta - a(b + c)\},$$

$$\mu = \frac{y}{D} \{b\xi + \eta - b(c + a)\},$$

$$\nu = \frac{z}{D} \{c\xi + \eta - c(a + b)\},$$

et de là, par l'équation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, on a

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma D^2 = & \alpha(\xi - a)(\eta - bc) \{a\xi + \eta - a(b + c)\}^2, \\ & + \beta(\xi - b)(\eta - ca) \{b\xi + \eta - b(c + a)\}^2, \\ & + \gamma(\xi - c)(\eta - ab) \{c\xi + \eta - c(a + b)\}^2, \end{aligned}$$

équation laquelle (en réduisant à moyen des relations $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, $a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = -\alpha\beta\gamma$, etc.) devient,

$$\alpha\beta\gamma D^2 = \alpha\beta\gamma(\xi\eta - C)(\eta - \xi^2 + A\xi - B),$$

et l'on a ainsi

$$D = \sqrt{(\xi\eta - C)(\eta - \xi^2 + A\xi - B)}.$$

5. On trouve de même manière

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \frac{\xi \eta - C}{D};$$

$$a\lambda x + b\mu y + c\nu z = \frac{\eta}{D}(\eta - \xi^2 + A\xi - B),$$

$$bc\lambda x + ca\mu y + ab\nu z = \frac{1}{D} \{ -(\xi \eta - C)(\eta - B) - C(\eta - \xi^2 + A\xi - B) \},$$

ou, en y substituant la valeur de D ,

$$\lambda x + \mu y + \nu z, \quad = \sqrt{v}, \quad = \sqrt{\frac{\xi \eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B}}.$$

La première de ces équations donne

$$v = \frac{\xi \eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B},$$

et de là réciproquement

$$a\lambda x + b\mu y + c\nu z = \eta \sqrt{\frac{\eta - \xi^2 + A\xi - B}{\xi \eta - C}},$$

$$bc\lambda x + ca\mu y + ab\nu z = -(\eta - B) \sqrt{\frac{\xi \eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B}} - C \sqrt{\frac{\eta - \xi^2 + A\xi - B}{\xi \eta - C}};$$

$$\eta = \frac{b(\xi^2 - A\xi + B) - C}{v - \xi}, \quad = \xi^2 - A\xi + B + \frac{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{b - \xi}.$$

On a ainsi les formules

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \sqrt{v},$$

$$a\lambda x + b\mu y + c\nu z = \frac{\eta}{\sqrt{v}},$$

$$bc\lambda x + ca\mu y + ab\nu z = -\eta\sqrt{v} + B\sqrt{v} - \frac{C}{\sqrt{v}};$$

et de là aussi

$$a(b+c)\lambda x + b(c+a)\mu y + c(a+b)\nu z = \eta\sqrt{v} + \frac{C}{\sqrt{v}}.$$

6. On peut introduire dans les formules v au lieu de η ; les deux paramètres seront ainsi; ξ , carré de la distance au centre; v , carré de la perpendiculaire sur le plan tangent.

On a d'abord

$$\begin{aligned}\eta - bc &= \xi^2 - (a + b + c)\xi + a(b + c) + \frac{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - \xi}, \\ &= (\xi - a) \left\{ \xi - b - c + \frac{\xi - b \cdot \xi - c}{v - \xi} \right\}, \\ &= \frac{\xi - a}{v - \xi} \{ bc - (b + c)v + v\xi \};\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\beta\gamma x^2 &= \frac{(\xi - a)^2}{v - \xi} \{ bc - (b + c)v + v\xi \}, \text{ et de même} \\ \gamma\alpha y^2 &= \frac{(\xi - b)^2}{v - \xi} \{ ca - (c + a)v + v\xi \}, \\ \alpha\beta z^2 &= \frac{(\xi - c)^2}{v - \xi} \{ ab - (a + b)v + v\xi \},\end{aligned}$$

lesquelles sont les expressions des coordonnées ξ , η , ζ en termes des paramètres ξ , v .

7. On a

$$vD^2 = (\xi\eta - C)^2,$$

$$\xi\eta - C = \xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c \cdot \left\{ 1 + \frac{\xi}{v - \xi} \right\}, = \frac{v \cdot \xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - \xi},$$

et de là

$$D^2 = v \left(\frac{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - \xi} \right)^2.$$

On a aussi

$$a\xi + \eta - a(b + c) = \xi - b \cdot \xi - c \cdot \left(1 + \frac{\xi - a}{v - \xi} \right), = \frac{v - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - \xi},$$

et de là

$$\lambda = \frac{x}{D} \frac{v - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - \xi},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\beta\gamma\lambda^2 &= \frac{(v - a)^2}{v \cdot v - \xi} \{ bc - (b + c)v + v\xi \}, \text{ et de même} \\ \gamma\alpha\mu^2 &= \frac{(v - b)^2}{v \cdot v - \xi} \{ ca - (c + a)v + v\xi \}, \\ \alpha\beta\nu^2 &= \frac{(v - c)^2}{v \cdot v - \xi} \{ ab - (a + b)v + v\xi \},\end{aligned}$$

lesquelles sont les expressions de λ , μ , ν en termes des paramètres ξ , v .

8. On obtient

$$\alpha\beta\gamma\left\{\frac{\lambda^2}{v-a} + \frac{\mu^2}{v-b} + \frac{\nu^2}{v-c}\right\} = \frac{1}{v \cdot v - \xi} \cdot \alpha(v-a)\{bc - (b+c)v + v\xi\} \\ + \beta(v-b)\{ca - (c+a)v + v\xi\} \\ + \gamma(v-c)\{ab - (a+b)v + v\xi\},$$

ou, en réduisant comme auparavant,

$$\frac{\lambda^2}{v-a} + \frac{\mu^2}{v-b} + \frac{\nu^2}{v-c} = 0.$$

9. Je rappelle que l'équation du plan tangent est

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \sqrt{v} = 0,$$

ou v est déterminé comme fonction de λ, μ, ν par l'équation qui vient d'être donnée; et qu'en considérant λ, μ, ν, v comme des paramètres variables qui satisfont à cette équation et à l'équation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, l'on obtient la surface comme enveloppe de ce plan tangent.

10. On a ainsi v comme l'une des racines de l'équation quadrique

$$\frac{\lambda^2}{\theta-a} + \frac{\mu^2}{\theta-b} + \frac{\nu^2}{\theta-c} = 0;$$

en dénotant par u l'autre racine, on a donc

$$\theta^2 - \{(b+c)\lambda^2 + (c+a)\mu^2 + (a+b)\nu^2\}\theta + bc\lambda^2 + ca\mu^2 + ab\nu^2 = \theta - u \quad \theta - v,$$

et de là

$$u + v = (b+c)\lambda^2 + (c+a)\mu^2 + (a+b)\nu^2, \\ uv = bc\lambda^2 + ca\mu^2 + ab\nu^2,$$

la première de ces équations peut aussi s'écrire sous la forme

$$A - u - v = a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2,$$

et la seconde sous la forme

$$B - uv = a(b+c)\lambda^2 + b(c+a)\mu^2 + c(a+b)\nu^2.$$

11. J'observe que λ, μ, ν sont les cosinus des inclinations de la perpendiculaire par le centre sur le plan tangent au point x, y, z , la longueur de cette perpendiculaire étant \sqrt{v} ; il y a un plan tangent parallèle qui corresponde aux mêmes valeurs de λ, μ, ν , et évidemment on a alors \sqrt{u} pour la longueur de la perpendiculaire sur ce plan tangent parallèle; autrement

dit, les équations de deux plans tangents sont

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - \sqrt{v} = 0,$$

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - \sqrt{u} = 0,$$

il convient de remarquer qu'on a pris (x, y, z) pour les coordonnées du point de la surface qui est le point de contact du premier de ces deux plans, et qu'ainsi les deux quantités v et u n'entrent pas symétriquement dans les formules.

12. En substituant dans l'expression de $u + v$ ou uv , ou ce qui est plus simple dans celle de $A - u - v$, les valeurs de λ^2 , μ^2 , ν^2 en termes de v , ξ , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma(A - u - v) = & \frac{1}{v \cdot v - \xi} \cdot \alpha a(v - a)^2 \{bc - (b + c)v + v\xi\} \\ & + \beta b(v - b)^2 \{ca - (c + a)v + v\xi\} \\ & + \gamma c(v - c)^2 \{ab - (a + b)v + v\xi\}, \end{aligned}$$

équation laquelle (en réduisant comme auparavant) devient

$$A - u - v = A - 2v + \frac{1}{v \cdot v - \xi} \{v - a \cdot v - b \cdot v - c\},$$

c'est à dire

$$(v - \xi)(v - u) = \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v},$$

équation qui donne dans des formes très simples, ξ en termes de v , u , et aussi u en termes de v , ξ .

13. On a comme auparavant

$$v = \frac{\xi\eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B},$$

je cherche l'expression de u en termes de ξ , η . En écrivant pour abrégier $\eta - \xi^2 + A\xi - B = M$, nous trouvons

$$v - a = \frac{1}{M} (\xi - a) \{a\xi + \eta - a(b + c)\},$$

$$v - b = \frac{1}{M} (\xi - b) \{b\xi + \eta - b(c + a)\},$$

$$v - c = \frac{1}{M} (\xi - c) \{c\xi + \eta - c(a + b)\},$$

$$v - \xi = \frac{1}{M} \cdot \xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c,$$

$$v = \frac{1}{M} (\xi\eta - C);$$

et de là

$$v - u = \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v \cdot v - \xi} = \frac{\{a\xi + \eta - a(b + c)\} \{b\xi + \eta - b(c + a)\} \{c\xi + \eta - c(a + b)\}}{M(\xi\eta - C)},$$

ou enfin, et en réstituant pour M sa valeur,

$$u = \frac{(\xi\eta - C)^2 - \{a\xi + \eta - a(b + c)\} \{b\xi + \eta - b(c + a)\} \{c\xi + \eta - c(a + b)\}}{(\xi\eta - C) \{\eta - \xi^2 + A\xi - B\}}.$$

14. On peut introduire dans les formules u au lieu de ξ , et ainsi exprimer les coordonnées, etc. en termes des deux paramètres v, u . On a pour cela

$$\xi = v - \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v \cdot v - u},$$

donc

$$\xi - a = (v - a) \left\{ 1 + \frac{v - b \cdot v - c}{v \cdot v - u} \right\}, \quad = - \frac{v - a}{v(v - u)} \{bc - (b + c)u + uv\}.$$

De plus

$$\begin{aligned} bc - (b + c)v + v\xi &= (v - b)(v - c) - v(v - \xi) = \\ (v - b)(v - c) - (v - b)(v - c) \cdot \frac{v - a}{v - u} &= v - b \cdot v - c \cdot \left(1 + \frac{v - a}{v - u} \right) = \\ &= - \frac{u - a \cdot v - b \cdot v - c}{v - u}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \eta - bc &= \frac{\xi - a}{v - \xi} \{bc - (b + c)v + v\xi\} = \\ &= - \frac{\xi - a \cdot u - a \cdot v - b \cdot v - c}{v - \xi \cdot v - u} = - \frac{v \cdot \xi - a \cdot u - a}{v - a}, \end{aligned}$$

ou enfin, à moyen de la valeur de $\xi - a$,

$$\eta - bc = \frac{u - a}{v - u} \{bc - (b + c)u + uv\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} -\beta\gamma x^2 &= \frac{u - a \cdot v - a}{v(v - u)^2} \{bc - (b + c)u + uv\}^2, \quad \text{et de même} \\ -\gamma\alpha y^2 &= \frac{u - b \cdot v - b}{v(v - u)^2} \{ca - (c + a)u + uv\}^2, \\ -\alpha\beta z^2 &= \frac{u - c \cdot v - c}{v(v - u)^2} \{ab - (a + b)u + uv\}^2, \end{aligned}$$

équations qui donnent les coordonnées x, y, z en termes des deux paramètres v, u .

15. De la valeur ci-dessus donnée pour $\eta - bc$ on déduit celle de η ; en effet on trouve

$$\begin{aligned}\eta(v-u) &= bc(v-a) + (u-a)\{- (b+c)v + uv\} \\ &= v\{u^2 - (a+b+c)u + ab + ac + bc\} - abc,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\eta = \frac{v(u^2 - Au + B) - C}{v-u}, \quad = u^2 - Au + B + \frac{u-a \cdot u - b \cdot u - c}{v-u},$$

ainsi η est la même fonction de v, u et de v, ξ .

16. De plus

$$\beta\gamma\lambda^2 = \frac{(v-a)^2}{v \cdot v - \xi} \{bc - (b+c)v + v\xi\}, \quad = - \frac{u-a \cdot (v-a)^2 \cdot v - b \cdot v - c}{v \cdot v - \xi \cdot v - u},$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}-\beta\gamma\lambda^2 &= u - a \cdot v - a, \quad \text{et de même} \\ -\gamma\alpha\mu^2 &= u - b \cdot v - b, \\ -\alpha\beta\nu^2 &= u - c \cdot v - c,\end{aligned}$$

équations qui se déduisent plus simplement des équations

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1 \\ \frac{\lambda^2}{v-a} + \frac{\mu^2}{v-b} + \frac{\nu^2}{v-c} &= 1, \\ \frac{\lambda^2}{u-a} + \frac{\mu^2}{u-b} + \frac{\nu^2}{u-c} &= 0.\end{aligned}$$

Je rappelle les équations

$$\begin{aligned}\lambda x + \mu y + \nu z &= \sqrt{v}, \\ a\lambda x + b\mu y + c\nu z &= \frac{\eta}{\sqrt{v}}, \\ a(b+c)\lambda x + b(c+a)\mu y + c(a+b)\nu z &= \eta\sqrt{v} + \frac{C}{\sqrt{v}};\end{aligned}$$

et j'ajoute aussi celles-ci

$$\frac{\lambda^2}{(v-a)^2} + \frac{\mu^2}{(v-b)^2} + \frac{\nu^2}{(v-c)^2} = \frac{-1}{v \cdot v - \xi} = - \frac{v-u}{v-a \cdot v - b \cdot v - c},$$

et de même

$$\frac{\lambda^2}{(u-a)^2} + \frac{\mu^2}{(u-b)^2} + \frac{\nu^2}{(u-c)^2} = \frac{v-u}{u-a \cdot u - b \cdot u - c}.$$

17. Formules différentielles. Nous avons

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0, \quad x d\lambda + y d\mu + z d\nu = \frac{1}{2} \frac{dv}{\sqrt{v}};$$

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta\gamma(a\lambda dx + b\mu dy + \nu dz) &= \frac{\alpha\alpha}{D} \{a\xi + \eta - a(b+c)\} 2\beta\gamma x dx + \text{etc.} \\ &= \frac{\alpha\alpha}{D} \{a\xi + \eta - a(b+c)\} \{(\eta - bc)d\xi + (\xi - a)d\eta\} \\ &\quad + \frac{b\beta}{D} \{b\xi + \eta - b(c+a)\} \{(\eta - ca)d\xi + (\xi - b)d\eta\} \\ &\quad + \frac{c\gamma}{D} \{c\xi + \eta - c(a+b)\} \{(\eta - ab)d\xi + (\xi - c)d\eta\}, \end{aligned}$$

ou, en réduisant comme auparavant,

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{D} \{-(\xi\eta - C)d\xi + (\eta - \xi^2 + A\xi - B)d\eta\},$$

c'est à dire

$$2(a\lambda dx + b\mu dy + \nu dz) = -\sqrt{\frac{\xi\eta - C}{\eta - \xi^2 + A\xi - B}} d\xi + \sqrt{\frac{\eta - \xi^2 + A\xi - B}{\xi\eta - C}} d\eta,$$

ou enfin

$$a\lambda dx + b\mu dy + \nu dz = -\frac{1}{2} \sqrt{v} d\xi + \frac{1}{2} \frac{d\eta}{\sqrt{v}},$$

et de là en différentiant l'équation

$$a\lambda x + b\mu y + \nu z = \frac{\eta}{\sqrt{v}},$$

on déduit

$$ax d\lambda + by d\mu + cz d\nu = \frac{1}{2} \sqrt{v} d\xi + \frac{1}{2} \frac{d\eta}{\sqrt{v}} - \frac{1}{2} \frac{\eta dv}{v\sqrt{v}}.$$

18. Nous avons de plus

$$2\beta\gamma x dx = (\eta - bc)d\xi + (\xi - a)d\eta,$$

donc

$$4\beta\gamma dx^2 = \frac{\{(\eta - bc)d\xi + (\xi - a)d\eta\}^2}{\xi - a \cdot \eta - bc}, \quad \text{et de même}$$

$$4\gamma\alpha dy^2 = \frac{\{(\eta - ca)d\xi + (\xi - b)d\eta\}^2}{\xi - b \cdot \eta - ca},$$

$$4\alpha\beta dz^2 = \frac{\{(\eta - ab)d\xi + (\xi - c)d\eta\}^2}{\xi - c \cdot \eta - ab};$$

et de là, après les réductions nécessaires,

$$4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{\xi^2 - A\xi + B - \eta}{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c} d\xi^2 + \frac{C - \xi\eta}{\eta - bc \cdot \eta - ca \cdot \eta - ab} d\eta^2,$$

$$4(adx^2 + bdy^2 + cdz^2) = \frac{C - \xi\eta}{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c} d\xi^2 + \frac{\eta^2 - B\eta + AC - C\xi}{\eta - bc \cdot \eta - ca \cdot \eta - ab} d\eta^2;$$

en écrivant la première de ces équations sous la forme

$$ds^2 = Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2,$$

on a

$$E = \frac{1}{4} \frac{\xi^2 - A\xi + B - \eta}{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}, \quad F = 0, \quad G = \frac{1}{4} \cdot \frac{C - \xi\eta}{\eta - bc \cdot \eta - ca \cdot \eta - ab}.$$

19. De plus, de l'équation $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, et des valeurs de $u + v$ et uv , on déduit

$$\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0$$

$$a\lambda d\lambda + b\mu d\mu + c\nu d\nu = \frac{1}{2}(du + dv)$$

$$bc\lambda d\lambda + ca\mu d\mu + ab\nu d\nu = \frac{1}{2}(vdu + u dv).$$

20. Équation différentielle des courbes de courbure de la surface. En partant de l'équation

$$\begin{vmatrix} d\lambda, & d\mu, & d\nu \\ dx, & dy, & dz \\ \lambda & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

ou, plus simplement des équations

$$d\lambda : d\mu : d\nu = dx : dy : dz,$$

équivalentes à cette première équation, on déduit

$$(x d\lambda + y d\mu + z d\nu)(a\lambda dx + b\mu dy + c\nu dz) - (x dx + y dy + z dz)(a\lambda d\lambda + b\mu d\mu + c\nu d\nu) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} \left(-\sqrt{v} d\xi + \frac{d\eta}{\sqrt{v}} \right) + d\xi (du + dv) = 0,$$

ou enfin

$$dv d\eta + v du d\xi = 0,$$

laquelle est la forme la plus simple de l'équation dont il s'agit.

21. On a ici

$$\eta = \frac{b(\xi^2 - A\xi + B) - C}{v - \xi}, \quad u = v - \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v(v - \xi)},$$

et il s'agit de substituer ces valeurs dans l'équation différentielle. J'écris pour un moment

$$\eta = \frac{H}{v - \xi}, \quad u = \frac{U}{v - \xi},$$

où l'on a

$$H = v(\xi^2 - A\xi + B) - C, \\ U = -v\xi + Av - B + \frac{C}{v};$$

l'équation devient

$$-(v - \xi) \{dHdv + v d\xi dU\} + (dv - d\xi)(Hdv + vud\xi) = 0,$$

et l'on trouve

$$dH = (\xi^2 - A\xi + B)dv + (2\xi - A)v d\xi, \\ dU = \left(-\xi + A - \frac{C}{v^2}\right)dv - v d\xi,$$

et en substituant ces valeurs, on obtient

$$\{v^2(v - \xi) - vU\} d\xi^2 - \left\{(v - \xi)\left(\xi v - \frac{C}{v}\right) - vU + H\right\} dv d\xi + \\ \{-(v - \xi)(\xi^2 - A\xi + B) + H\} dv^2 = 0.$$

Le coefficient de $d\xi^2$ est $v^3 - Av^2 + Bv - C$, c'est à dire $v - a \cdot v - b \cdot v - c$; de même le coefficient de dv^2 est $\xi^3 - A\xi^2 + B\xi - C$, c'est à dire $\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c$. Le coefficient de $-dv d\xi$ est

$$\left(\xi v^2 - C - \xi^2 v + \frac{C\xi}{v}\right) + (v^2\xi - Av^2 + Bv - C) + (v\xi^2 - Av\xi + Bv - C), \\ = \xi\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C;$$

l'équation différentielle est donc

$$(v^3 - Av^2 + Bv - C)d\xi^2 - \left\{\xi\left(2v^2 - Av + \frac{C}{v}\right) - Av^2 + 2Bv - 3C\right\} dv d\xi + \\ (\xi^3 - A\xi^2 + B\xi - C)dv^2 = 0.$$

22. Mais on a identiquement

$$\begin{aligned} & \xi - a \cdot v - b \cdot v - c \\ & + \xi - b \cdot v - c \cdot v - a \\ & + \xi - c \cdot v - a \cdot v - b \\ & - \xi \cdot \frac{1}{v} \cdot v - a \cdot v - b \cdot v - c = \xi \left(2v^2 - Av + \frac{C}{v} \right) - Av^2 + 2Bv - 3C, \end{aligned}$$

donc en divisant par

$$v^3 - Av^2 + Bv - C, \quad = v - a \cdot v - b \cdot v - c,$$

l'équation devient

$$d\xi^2 - d\xi dv \left(\frac{\xi - a}{v - a} + \frac{\xi - b}{v - b} + \frac{\xi - c}{v - c} - \frac{\xi}{v} \right) + dv^2 \cdot \frac{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - a \cdot v - b \cdot v - c} = 0.$$

23. De même en substituant dans l'équation $dv d\eta + v du d\xi = 0$ les valeurs

$$\eta = \frac{v(u^2 - Au + B)}{v - u}, \quad \xi = v - \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v - u},$$

on obtient

$$\begin{aligned} (v^3 - Av^2 + Bv - C) du^2 - \left\{ u \left(2v^2 - Av + \frac{C}{v} \right) - Av^2 + 2Bv - 3C \right\} dv du + \\ (u^3 - Au^2 + Bu - C) dv^2 = 0. \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$du^2 - du dv \left(\frac{u - a}{v - a} + \frac{u - b}{v - b} + \frac{u - c}{v - c} - \frac{u}{v} \right) + dv^2 \cdot \frac{u - a \cdot u - b \cdot u - c}{b - a \cdot v - b \cdot v - c} = 0;$$

les équations différentielles entre ξ, v et entre u, v respectivement sont ainsi précisément de la même forme: on peut vérifier sans beaucoup de peine qu'en introduisant dans la première équation u au lieu de ξ par la substitution

$$\xi = v - \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v - u},$$

on obtient la seconde équation: c'est là un théorème d'analyse assez remarquable.

24. L'équation différentielle en u, v est changée en entrechangeant ces deux variables: cela doit être ainsi, car autrement les deux courbes de courbure par le point de contact du plan tangent $\lambda X + \mu Y + \nu Z - \sqrt{v} = 0$, et

les deux courbes de courbure par le point de contact du plan tangent parallèle $\lambda X + \mu Y + \nu Z - \sqrt{u} = 0$ seraient parallèles les unes aux autres, ce qui n'est pas en général vrai. Pour que les deux équations soient identiques on doit avoir

$$v - a \cdot v - b \cdot v - c \cdot \left(\frac{u-a}{v-a} + \frac{u-b}{v-b} + \frac{u-c}{v-c} - \frac{u}{v} \right) =$$

$$u - a \cdot u - b \cdot u - c \cdot \left(\frac{v-a}{u-a} + \frac{v-b}{u-b} + \frac{v-c}{u-c} - \frac{v}{u} \right),$$

c'est à dire

$$u \left(2v^2 - Av + \frac{C}{a} \right) - Av^2 + 2Bv - 3C = v \left(2u^2 - Au + \frac{C}{u} \right) - Au^2 + 2Bu - 3C,$$

ou enfin

$$(u - v) \{ 2u^2v^2 - A(u + v)uv + 2Buv - C(u + v) \} = 0;$$

$u = v$ donne le plan à l'infinité, qui coupe la surface selon les deux coniques imaginaires $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ et $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, et aussi les plans tangents singuliers qui touchent la surface chacun selon un cercle réel ou imaginaire; je n'ai pas considéré la courbe sur la surface que l'on obtient en égalant à zéro l'autre facteur.

25. Rayons de courbure.

Les équations de la normale au point (x, y, z) sont

$$X = x - R\lambda, \quad Y = y - R\mu, \quad Z = z - R\nu,$$

et, en supposant que les coordonnées X, Y, Z se rapportent à un centre de courbure, on a

$$dx = R d\lambda, \quad dy = R d\mu, \quad dz = R d\nu,$$

et de là

$$x dx + y dy + z dz = R(x d\lambda + y d\mu + z d\nu),$$

c'est à dire $d\xi = \frac{R dv}{\sqrt{v}}$; donc $R = \sqrt{v} \frac{d\xi}{dv} = \theta \sqrt{v}$, en posant $\theta = \frac{d\xi}{dv}$: θ est donc déterminé en fonction de ξ, v par l'équation

$$\theta^2 - \left(\frac{\xi - a}{v - a} + \frac{\xi - b}{v - b} + \frac{\xi - c}{v - c} - \frac{\xi}{v} \right) \theta + \frac{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - a \cdot v - b \cdot v - c} = 0,$$

et les deux rayons de courbure sont alors données par la formule $R = \theta \sqrt{v}$.

26. Surface des centres de courbure. En écrivant pour R sa valeur, $= \theta \sqrt{v}$, nous avons

$$X = x - \lambda \theta \sqrt{v}, \quad Y = y - \mu \theta \sqrt{v}, \quad Z = z - \nu \theta \sqrt{v},$$

où X, Y, Z dénotent les coordonnées d'un point de la surface cherchée; et si nous formons les expressions Ξ, H, Z analogues à ξ, η, ζ , savoir

$$\begin{aligned}\Xi &= X^2 + Y^2 + Z^2, \\ H &= aX^2 + bY^2 + cZ^2, \\ Z &= a(b+c)X^2 + b(c+a)Y^2 + c(a+b)Z^2,\end{aligned}$$

on obtient sans peine, à moyen des valeurs trouvées pour $\lambda x + \mu y + \nu z$, $a\lambda x + b\mu y + c\nu z$, $a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2$, etc.

$$\begin{aligned}\Xi &= \xi - 2\theta v & + \theta^2 v, \\ H &= \eta - 2\theta \eta & + \theta^2 v(A - u - v), \\ Z &= \xi \eta + C - 2\theta(\eta v + C) + \theta^2 v(B - uv);\end{aligned}$$

où comme auparavant

$$\theta^2 - \left(\frac{\xi - a}{v - a} + \frac{\xi - b}{v - b} + \frac{\xi - c}{v - c} - \frac{\xi}{v} \right) \theta + \frac{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}{v - a \cdot v - b \cdot v - c} = 0,$$

$$\eta = \frac{v(\xi^2 - A\xi + B) - C}{v - \xi},$$

$$(v - \xi)(v - u) = \frac{v - a \cdot v - b \cdot v - c}{v};$$

en éliminant entre ces six équations les cinq quantités ξ, η, θ, v, u , on obtient l'équation de la surface des centres en termes de Ξ, H, Z qui sont des fonctions données des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface.

27. Je remarque que les sections principales de la surface des ondes sont des courbes de courbure de cette surface; en particulier pour fixer les idées, la section par le plan $z = 0$, savoir le cercle $\xi - c = 0$ et l'ellipse $\eta - bc = 0$ sont des courbes de courbure. Pour l'une ou l'autre de ces courbes, il y a une suite des courbes de courbure de l'autre espèce qui coupent le cercle ou l'ellipse à angle droit, et qui sont symétriques aux deux côtés du plan $z = 0$. En considérant par exemple l'ellipse, les normales à la surface aux points successifs de cette courbe sont situées dans le plan de xy et se coupent selon une courbe dans ce plan, la développée de l'ellipse, laquelle est une courbe sur la surface des centres; l'ordre de cette développée est = 6. Mais, de plus, chaque normale de la surface à un point $(x, y, 0)$ de l'ellipse est rencontrée par les normales de la surface aux points $(x, y, \pm dz)$ au-dessus et au-dessous du point de l'ellipse: les points d'intersection forment une courbe

dans le plan de xy , laquelle est aussi une courbe sur la surface des centres, et de plus elle est une courbe cuspidale sur cette surface: nous allons voir que l'ordre de cette courbe est $= 6$. De même pour le cercle, la développée du cercle est le point $x = 0, y = 0$, lequel à ce que je crois doit être considéré comme cercle infiniment petit (ou deux droites imaginaires) $x^2 + y^2 = 0$; le cercle donne lieu aussi à une courbe qui est une courbe cuspidale sur la surface des centres, et nous allons voir que l'ordre de cette courbe est $= 4$. La section de la surface des centres par le plan xy est donc composée comme suit:

développée de l'ellipse	ordre	6
courbe cuspidale, ordre 6, trois fois	"	18
développée du cercle	"	2
courbe cuspidale, ordre 4, trois fois	"	$\frac{12}{38}$,

et il paraît ainsi que l'ordre de la surface des centres de la surface des ondes doit être $= 38$.

28. Je m'arrête pour un moment pour considérer la même théorie par rapport à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$. La section par le plan $z = 0$, est ici l'ellipse $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$; et pour la surface des centres on a dans le plan de xy , la développée d'ellipse, courbe d'ordre 6, et aussi une courbe cuspidale laquelle est une ellipse. En effet pour trouver l'équation de cette courbe on a pour les coordonnées X, Y du point où la normale au point (x, y, z) rencontre le plan $z = 0$, les équations $x = X + \frac{\lambda}{\nu} z, y = Y + \frac{\mu}{\nu} z$; c'est à dire $X = x \left(1 - \frac{c}{a}\right), Y = y \left(1 - \frac{c}{b}\right)$. Dans ces équations x, y se rapportent à un point de l'ellipse $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$; en éliminant entre les trois équations x, y on obtient $\frac{aX^2}{(a-c)^2} + \frac{bY^2}{(b-c)^2} = 1$, ou ce qui est la même chose $\frac{aX^2}{\beta^2} + \frac{bY^2}{\alpha^2} = 1$. La section principale de la surface des centres est donc composée de cette ellipse trois fois, et de la développée de l'ellipse $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$; l'ordre de la section, et ainsi l'ordre de la surface des centres est donc $6 + 3 \cdot 2, = 12$, comme cela doit être.

29. De même pour la surface des ondes on a $x = X + \frac{\lambda}{\nu} z$, $y = Y + \frac{\mu}{\nu} z$, c'est à dire

$$X = x - \frac{x\{a\xi + \eta - a(b+c)\}}{c\xi + \eta - c(a+b)}, \quad \text{où pour } z=0 \text{ on a } (\xi - c)(\eta - ab) = 0,$$

$$Y = y - \frac{y\{b\xi + \eta - b(c+a)\}}{c\xi + \eta - c(a+b)} \quad = 0; \quad 1.^{\circ} \text{ le cercle } \xi - c = 0; \quad 2.^{\circ} \text{ l'ellipse } \eta - ab = 0.$$

1.° Pour le cercle $\xi = c$, en écrivant $x^2 = c\theta$, $y^2 = c(1 - \theta)$, nous avons $\eta = ac\theta + bc(1 - \theta)$, $= c(b + \gamma\theta)$ et de là

$$a\xi + \eta - a(b+c) = b\beta + c\gamma\theta,$$

$$b\xi + \eta - b(c+a) = b\beta + c\gamma\theta,$$

$$c\xi + \eta - c(a+b) = c(\beta + \gamma\theta),$$

valeurs qui donnent

$$X = \sqrt{c} \sqrt{\theta} \left\{ 1 - \frac{b\beta + c\gamma\theta}{c(\beta + \gamma\theta)} \right\}, \quad = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{\theta}}{\beta + \gamma\theta},$$

$$Y = \sqrt{c} \sqrt{1 - \theta} \left\{ 1 - \frac{b\beta + c\gamma\theta}{c(\beta + \gamma\theta)} \right\}, \quad = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{1 - \theta}}{\beta + \gamma\theta};$$

donc

$$X^2 + Y^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{c} \frac{1}{(\beta + \gamma\theta)^2},$$

$$\alpha X^2 - \beta Y^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{c} \frac{\alpha\theta - \beta(1 - \theta)}{(\beta + \gamma\theta)^2}, \quad = -\frac{\alpha^2\beta^2}{c} \frac{1}{\beta + \gamma\theta},$$

et de là

$$(\alpha X^2 - \beta Y^2)^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{c} (X^2 + Y^2);$$

courbe de l'ordre 4, cuspidale sur la surface des centres.

2.° Pour l'ellipse $\eta = ab$, en écrivant $x^2 = b\theta$, $y^2 = a(1 - \theta)$, et de là $\xi = b\theta + a(1 - \theta)$, $= a - \gamma\theta$, on obtient

$$a\xi + \eta - a(b+c) = -a(\beta + \gamma\theta),$$

$$b\xi + \eta - b(c+a) = -b(\beta + \gamma\theta),$$

$$c\xi + \eta - c(a+b) = -b\beta - c\gamma\theta,$$

valeurs qui donnent

$$X = \sqrt{b} \sqrt{\theta} \left\{ 1 - \frac{a(\beta + \gamma\theta)}{b\beta + c\gamma\theta} \right\} = -\sqrt{b} \beta \gamma \frac{\sqrt{\theta}(1 - \theta)}{b\beta + c\gamma\theta},$$

$$Y = \sqrt{a} \sqrt{1 - \theta} \left\{ 1 - \frac{b(\beta + \gamma\theta)}{b\beta + c\gamma\theta} \right\} = -\sqrt{a} \alpha \gamma \frac{\theta \sqrt{1 - \theta}}{b\beta + c\gamma\theta};$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{X^2}{b\beta^2} + \frac{Y^2}{a\alpha^2} &= \gamma^2 \frac{\theta(1-\theta)}{(b\beta + c\gamma\theta)^2}, \\ \frac{X^2}{\beta} - \frac{Y^2}{\alpha} &= \gamma^2 \theta(1-\theta) \frac{b\beta(1-\theta) - a\alpha\theta}{(b\beta + c\gamma\theta)^2}, \quad = \gamma^2 \frac{\theta(1-\theta)}{b\beta + c\gamma\theta}; \\ \frac{X^2}{b\beta^2} \cdot \frac{Y^2}{a\alpha^2} &= \gamma^4 \frac{\theta^3(1-\theta)^3}{(b\beta + c\gamma\theta)^4}, \end{aligned}$$

et de là

$$\left(\frac{X^2}{b\beta^2} + \frac{Y^2}{a\alpha^2}\right) \left(\frac{X^2}{\beta} - \frac{Y^2}{\alpha}\right)^2 = \gamma^2 \cdot \frac{X^2}{b\beta^2} \cdot \frac{Y^2}{a\alpha^2},$$

courbe de l'ordre 6, cuspidale sur la surface des centres.

30. On aurait pu développer la théorie des courbes et rayons de courbure a moyen de la formule ci-dessus donnée, $ds^2 = Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2$ ($F = 0$), mais pour cela il faudrait trouver plusieurs expressions qui ne sont pas encore calculées, savoir les coefficients des formules

$$\begin{aligned} d^2x &= \alpha d\xi^2 + 2\alpha' d\xi d\eta + \alpha'' d\eta^2, \\ d^2y &= \beta d\xi^2 + 2\beta' d\xi d\eta + \beta'' d\eta^2, \\ d^2z &= \gamma d\xi^2 + 2\gamma' d\xi d\eta + \gamma'' d\eta^2, \end{aligned}$$

et puis

$$E', F', G' = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma, \quad \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma', \quad \lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma''.$$

En prenant comme auparavant R pour la rayon de courbure on aurait alors, [SALMON, *Geometry of three dimensions*, Ed. 4.^e (1882), pag. 347],

$$\left\| \begin{array}{l} R, \quad Ed\xi, \quad Gd\eta \\ EG, \quad E'd\xi + F'd\eta, \quad F'd\xi + G'd\eta \end{array} \right\| = 0,$$

et

$$\begin{aligned} d\eta, \quad RE' - E^2G, \quad RF' &= 0, \\ -d\xi, \quad RF', \quad RG' - EG^2 & \end{aligned}$$

formules pour les courbes et rayons de courbure: en particulier l'équation différentielle des courbes de courbure peut s'écrire sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} d\eta^2, \quad -d\xi d\eta, \quad d\xi^2 \\ E, \quad 0, \quad G \\ E', \quad F', \quad G' \end{array} \right| = 0.$$

Au reste cette équation en $d\xi$, $d\eta$ se déduirait plus simplement de l'équation $dv d\eta + v dud\xi = 0$, en y introduisant les expressions de v , u en termes de ξ , η .

31. Courbes géodésiques sur la surface. L'équation différentielle du second ordre des courbes géodésiques dépend seulement des coefficients E , F , G , savoir en supposant $F' = 0$, cette équation est

$$\begin{aligned} & E d\xi (-E_2 d\xi^2 + 2G_1 d\xi d\eta + G_2 d\eta^2) \\ & - G d\eta (E_1 d\xi^2 + 2E_2 d\xi d\eta - G_1 d\eta^2) \\ & + 2EG (d\xi d^2\eta - d\eta d^2\xi) = 0, \end{aligned}$$

ou ce qui est la même chose

$$\begin{aligned} & (-EE_2, 2EG_1 - GE_1, EG_2 - 2GE_2, GG_1)(d\xi, d\eta)^3 + \\ & 2EG(d\xi d^2\eta - d\eta d^2\xi) = 0, \end{aligned}$$

où

$$E_1, E_2, G_1, G_2 = \frac{dE}{d\xi}, \frac{dE}{d\eta}, \frac{dG}{d\xi}, \frac{dG}{d\eta} \text{ respectivement,}$$

voir CAYLEY, *On geodesic lines, in particular those of a Quadric Surface*, Proc. London Math. Soc., tom. IV (1872), pag. 197. Nous avons vu que pour la surface des ondes dont il s'agit les expressions de E , G sont

$$E = \frac{1}{4} \frac{\xi^2 - A\xi + B - \eta}{\xi - a \cdot \xi - b \cdot \xi - c}, \quad G = \frac{1}{4} \frac{C - \xi\eta}{\eta - bc \cdot \alpha - ca \cdot \eta - ab},$$

et l'on obtiendrait de là sans peine les expressions des coefficients de la fonction cubique $(-EE_2, \dots)(d\xi, d\eta)^3$ qui entre dans l'équation différentielle.

Il concetto di lunghezza e la retta.

(Di RODOLFO BETTAZZI, a Torino.)

Il concetto di lunghezza si suole ordinariamente far dipendere da quelli di retta e di segmento: è scopo del presente articolo il dimostrare come possa stabilirsi anche indipendentemente da essi. Si verrà così a rendere legittima la nota definizione di segmento come « linea di minor lunghezza fra due « punti » la quale altrimenti, col ricorrere all'idea di lunghezza fondata su quella di retta, si aggira in un circolo vizioso.

È necessario avvertire che, per quello che segue, immagino già stabiliti con la dovuta esattezza i concetti di solido, di superficie, di linea, di punto con tutte le relative proprietà fondamentali, che io qui non credo dovere svolgere per non dilungarmi troppo e non eccedere in quello che non è strettamente argomento del presente lavoro. Per i concetti e le definizioni di solido, superficie ecc., rimando a quanto ho enunciato nel mio articolo: *I postulati e gli enti geometrici* (*) ed alla Nota 1.^a in fine del presente lavoro; per le proprietà che di essi occorrerà applicare risparmierò ogni dimostrazione, indicando col segno (G) il momento in cui se ne farà uso. Se tali proprietà non enuncerò esplicitamente nel testo, citerò in apposite note in fine del lavoro quali esse siano, senza preoccuparmi se sono da ammettersi come postulati o da dimostrarsi come teoremi poichè ciò è indifferente per lo scopo che mi propongo, ma ritenendole come fatti geometrici indispensabili in ogni trattato di geometria.

Il numero notevole di postulati che introduco non rechi nessuna meraviglia, poichè è stata mia cura il cercare di enunciare i fatti (analoghi o corrispondenti a quelli della realtà) di cui si fa uso nelle dimostrazioni e dei quali spesso ci si serve inavvertentemente; essendo necessità che la geo-

(*) *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*. Anno 1.^o

metria adopri ragionamenti nei quali neppure un'idea sia nascosta, come scienza logica in cui si devono solo dedurre conseguenze da premesse dopo avere enunciate queste tutte e chiaramente. Mi sono studiato di dimostrare il più che per me si poteva, persuaso della necessità di ridurre minimo il numero delle verità arbitrarie (postulati); ma quello che non ho saputo provare ho dato chiaramente come postulato, senza escludere con ciò che altri possa dimostrarlo. Del resto, vari dei miei postulati si trovano dati come tali anche in pregevolissime opere, per es.: in quelle di geometria del PASCAL (*) e del PEANO (**).

Osservazione. — Alcune note che si vedranno a piè di pagina non sono necessario completamente del testo, ma ne costituiscono semplici e non indispensabili dilucidazioni: e non vi sono inserite, perchè si parla spesso in esse di enti non ancora definiti o non definiti mai nel presente scritto, ma ai quali si ricorre perchè il loro concetto, certamente noto al lettore supposto non digiuno di studi geometrici, faccia meglio afferrare e giudicare il metodo seguito in questo lavoro.

§ 1. Le sfere e l'apertura delle linee.

1. **Definizione 1.^a** — « Una linea si dirà *tratto* se ha due estremi; *ramo* « se ha un estremo solo; *linea chiusa* se, essendo illimitata, si può spezzare in « due tratti; *linea aperta* se, essendo illimitata, si può spezzare in due rami. »

Parlando in quello che segue di linee senz'altro aggiungere, intenderemo linee non intrecciate, che siano o tratti o linee chiuse.

Def. 2.^a — « Una superficie σ che divide lo spazio in due parti si dirà « *chiusa*, quando l'una o l'altra di queste parti sia tale che in ciascun suo « punto posto l'estremo di un ramo qualunque r e prese le infinite posizioni « di r , ciascuna di queste abbia punti anche nell'altra parte dello spazio. La « parte in quelle condizioni si dirà *interna* a σ , e si diranno interni a σ i « suoi punti. »

2. Una coppia di punti dati è una figura: la mancanza di un ente che colleghi i due punti non toglie niente alla invariabilità di tale figura, e possiamo pensare che questa si muova comunque. Se di una coppia di punti

(*) PASCAL, *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig, 1882.

(**) PEANO, *I principii di Geometria logicamente esposti*. Torino, 1889.

se ne tenga fermo uno, l'altro può assumere infinite posizioni: il seguente postulato fissa la natura dell'ente da esso generato.

Postulato I. — *Il luogo geometrico delle posizioni di un punto di una coppia il quale si muove mentre l'altro sta fermo, è una superficie chiusa a cui il punto immobile è interno.*

Def. — « La superficie precedente si dice *superficie sferica*; il punto « fisso, *centro*; una qualunque delle posizioni delle coppie di punti dati, *coppia* « *radiale*; ogni tratto cogli estremi nei due punti di una coppia radiale, *linea* « *radiale*; quella delle due parti in cui è diviso lo spazio la quale contiene « il centro, *sfera*. »

Cor. 1.° — Poichè una coppia di punti è rovesciabile (**G**) si ha che le due sfere originate da una coppia di punti prendendo per centro l'uno o l'altro di essi sono uguali.

Cor. 2.° — Il luogo geometrico delle posizioni di un estremo di un tratto, quando l'altro estremo è immobile ed il tratto assume tutte le posizioni possibili, è una superficie sferica di cui quella linea è radiale.

Cor. 3.° — Due superficie sferiche concentriche distinte non hanno punti comuni; quindi, date due superficie sferiche concentriche, ciascuna giace tutta da una parte dell'altra, (**G**) (*).

Cor. 4.° — I postulati ordinari sui solidi (**G**) (**) ed il Corollario precedente ci permettono di concludere che se due sfere rese concentriche non coincidono, una è parte dell'altra. In tal caso, se \mathcal{S}_1 è la sfera parte di \mathcal{S}_2 , deve la superficie σ_2 di \mathcal{S}_2 giacere rispetto a quella σ_1 di \mathcal{S}_1 da parte opposta del centro comune: altrimenti sarebbe σ_2 interna ad \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 parte di \mathcal{S}_1 , mentre invece è \mathcal{S}_1 parte di \mathcal{S}_2 (**G**) (***)).

Cor. 5.° — Date due sfere \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 accade necessariamente uno ed uno solo dei tre casi: \mathcal{S}_1 uguale ad \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_1 parte di \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_2 parte di \mathcal{S}_1 .

Se dunque usiamo le parole « uguale » « maggiore » e « minore » nel senso consueto facendovi corrispondere i consueti segni =, >, <, può dirsi che date due sfere \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 , avviene necessariamente uno ed uno solo dei tre casi $\mathcal{S}_1 \stackrel{=}{\parallel} \mathcal{S}_2$.

Cor. 6.° — Data una sfera, esistono sempre sfere maggiori e sfere minori di essa.

(*) Vedi Nota 2.^a in fine di questo scritto.

(**) Vedi Nota 3.^a in fine.

(***) Vedi Nota 4.^a in fine.

3. Se dato un tratto t si fa rotare attorno ad uno dei suoi estremi, esso genera coll'altro estremo una superficie sferica di cui è linea radiale (2, Cor. 2.^o).

Def. 1.^a — « La sfera descritta da un tratto come linea radiale si dirà *sfera di apertura* del tratto. »

Cor. 1.^o — La sfera di apertura di un tratto si ottiene indifferentemente tenendo fermo l'uno o l'altro estremo.

Def. 2.^a — « Data una linea chiusa diremo che essa ha una *sfera di apertura nulla*: e questa sfera diremo *uguale* a quella delle altre linee « chiuse e *minore* di quelle di qualunque tratto.

Def. 3.^a — « Date due linee l_1 ed l_2 diremo che l'*apertura* di l_1 è *uguale*, « *maggiore* o *minore* di quella di l_2 secondochè la sfera di apertura di l_1 è « uguale, maggiore o minore di quella di l_2 . »

Cor. 2.^o — Le linee chiuse sono quelle di apertura minima.

Def. 4.^a — « Date infinite linee λ ed un'altra l , diremo che le aperture « delle λ *possono differire da quelle di l tanto poco quanto si vuole*, quando « considerate le sfere di apertura delle λ e di l , qualunque siano le sfere S_1 « ed S_2 prese una maggiore ed una minore di quella di apertura di l , esiste « sempre la sfera di apertura di qualche λ che è minore di S_1 e maggiore « di S_2 . S'intende che se l è di apertura nulla, la sfera da considerarsi è una « sola, la S_1 . »

§ 2. Sistemi chiusi di linee.

4. **Def. 1.^a** — « Diremo *gruppo di linee* una figura formata da un numero finito di tratti l_1, l_2, \dots, l_n , tali che ciascuno abbia comune un estremo « col precedente ed uno col seguente, ed il primo non necessariamente con « l'ultimo, e che del resto non abbiano nessun altro punto comune fra loro. »

Un gruppo di linee è una linea, che è un tratto se l_1 ed l_2 non hanno un estremo comune, ed una linea chiusa nel caso opposto (G) (*).

Def. 2.^a — « Data una linea, se per mezzo di punti la si scompone in un numero finito di tratti e con questi si forma un gruppo qualunque (Def. 1.^a), « questo gruppo è una linea che diremo *linea di spezzamento* della linea data. »

Una linea ha infinite linee di spezzamento, sia per gli infiniti modi in

(*) Vedi Nota 5.^a in fine.

cui si può dividere in parti, sia per le infinite posizioni che nei gruppi si possono dare a queste parti.

COR. — Se l_1 è linea di spezzamento di l , sarà l linea di spezzamento di l_1 .

5. Def. — « Diremo *gruppo lineare di solidi* il solido formato da un « numero finito di solidi $S_1, S_2, \dots S_n$, quando ciascuno di questi ha comune « una parte di superficie col precedente ed un'altra col seguente, ed il primo « e l'ultimo hanno o no parti di superficie comune, senza che i solidi abbiano, « oltre questi, nessun altro punto comune fra loro. »

6. Def. 1.^a — « Dato un sistema Σ composto di una linea l e di tutte « le sue linee di spezzamento, un'altra linea l' si dirà *generata* di l , quando « per ogni solido arbitrariamente scelto S sia possibile costruire un gruppo « lineare formato con solidi $S_1, S_2, \dots S_n$ uguali ad S od a sue parti, tale « che interne al solido così risultante possano disporsi l' ed una conveniente « linea λ di Σ , in modo che: 1.^o su ogni solido S_r non giaccia che un solo « tratto tanto di l' quanto di λ ; 2.^o le aperture di tutte queste λ possano « differire da quella di l' tanto poco quanto si vuole (3, Def. 4.^a). »

Def. 2.^a — « Data una linea l , se si costruiscono tutte le sue linee di « spezzamento e tutte le sue linee generate, si ottiene un altro sistema di linee « che si dirà *sistema derivato* di l . »

COR. 1.^o — Se l_1 è linea di spezzamento di l , il sistema derivato di l_1 è lo stesso sistema derivato di l (4, Cor.).

È opportuno completare questo corollario col

Postulato II. — *Dato il sistema derivato di una linea l , ed una qualunque delle altre sue linee, λ (sia questa di spezzamento di l o generata), il sistema derivato di λ è quello stesso di l .*

Def. 3.^a — « Ogni sistema derivato di qualche linea si dirà *sistema chiuso* « di linee. »

COR. 2.^o — Se due sistemi chiusi di linee hanno una linea comune, essi sono identici (Post. II): e quindi due sistemi non identici non possono avere nessuna linea comune.

COR. 3.^o — Se in due sistemi chiusi di linee si ha che una linea dell'uno non è nell'altro, i due sistemi non possono avere linee comuni.

7. Def. 1.^a — « Se le linee di un sistema chiuso si trasportano in modo « da avere tutte un estremo (se sono tratti) o un punto qualunque (se sono « chiuse) in uno stesso punto dato ad arbitrio O , si dirà che si ha il *fascio* « delle linee del sistema col *centro* O : e l'insieme di tutte le sfere di aper-

« tura in questa posizione (allora concentriche) si dirà il *fascio* delle sfere « stesse. »

COR. 1.º — Descritto il fascio delle sfere di apertura del sistema derivato di una linea l , se l_1 è una generata del sistema di l e delle sue linee di spezzamento e si considera la sua sfera di apertura, fra due sfere qualunque concentriche ad essa, una maggiore ed una minore di essa, si trovano infinite sfere di apertura di linee di spezzamento di l , giacchè l_1 essendo loro generata le aperture di esse possono differire da quella di l_1 poco quanto si vuole (6, Def. 1.^a).

— Dato il fascio delle sfere di apertura di un sistema, deve necessariamente accadere uno di questi due casi: o esiste una sfera concentrica ad esse (con tutte le infinite maggiori di essa) a cui nessuna delle sfere di apertura abbia punti esterni, o tale sfera non esiste.

Osservazione. — Vedremo in seguito (§ 5) che effettivamente può darsi l'un caso e l'altro.

Def. 2.^a — « Diremo sistemi *finiti* quei sistemi di linee chiusi tali che, « costruito il fascio delle loro sfere di apertura, esistono sfere concentriche ad « esse cui tutte le sfere di apertura sono interne: ed *infiniti* gli altri. »

Postulato III. — *Se l è una linea di un sistema finito ed l_1 è una sua parte, l ed l_1 non fanno parte di uno stesso sistema (*): e ciascuna linea del sistema derivato di l_1 è parte di convenienti linee del sistema derivato di l .*

COR. 2.º — Esistono infiniti sistemi chiusi non identici, per es.: quelli derivati di una linea l di un sistema finito, di una sua parte qualunque l_1 , di una parte l_2 di l_1 ecc.

COR. 3.º — Una parte l_1 di una linea l di un sistema finito non può essere uguale ad l , non potendo appartenere al suo sistema derivato.

Postulato IV. — *Se l_1 ed l_2 sono tratti di sistemi finiti, sarà finito il sistema derivato di una linea che sia un gruppo qualunque di l_1 ed l_2 .*

COR. 4.º — La proprietà vale anche per un numero qualunque (finito) di tratti.

Postulato V. — *Dati due sistemi finiti non identici, in uno di essi esiste una linea l_1 parte di una l_2 dell'altro.*

(*) Questa parte del postulato è destinata ad introdurre per il concetto di lunghezza che si sta svolgendo la proprietà che si suole sempre ammettere per gli enti finiti, quella che la parte non è equivalente al tutto. (Cfr. n.º 9, Cor. 2.º)

COR. 5.^o — Per il Postulato precedente ed il Post. III si conclude che dati due sistemi finiti non identici tutte le linee di uno di essi sono parti di convenienti linee dell'altro.

8. Def. 1.^a — « Data una classe Γ di enti nella quale siano definiti i « concetti di uguale, maggiore e minore, uno degli enti di essa, γ , si dirà « *limite superiore* di uno speciale sistema Γ' formato con alcuni di essi, o con « tutti, quando, appartenendo γ o no a Γ' , nessun ente di Γ' è maggiore di γ , « e per qualunque ente di Γ minore di γ ne esistono uno o più maggiori in Γ' . »

Postulato VI. — *Per ogni sistema finito di linee esiste una sfera limite superiore di tutte le sfere di apertura delle linee del sistema, che è differente per sistemi differenti.*

Def. 2.^a — « La sfera limite superiore delle sfere di apertura delle linee « di un sistema finito si dirà *sfera limitatrice* del sistema. »

COR. 1.^o — Se si considera il fascio delle sfere di apertura delle linee di un sistema finito e si dispone concentrica ad esso la sfera limitatrice, nessuna sfera di apertura ha punti esterni a questa, ma vi è qualche sfera di apertura che ha la superficie esterna ad una sfera concentrica alla sfera limitatrice e parte di essa, ma del resto qualunque.

COR. 2.^o — Se la sfera limitatrice è una delle sfere di apertura del sistema, ogni linea del sistema che sia sua radiale ha l'apertura massima fra quelle del sistema.

COR. 3.^o — Sistemi di linee identici hanno la stessa sfera limitatrice e reciprocamente.

Teorema 1.^o — « Costruito un fascio delle linee di un sistema finito, « ciascuna in tutte le posizioni possibili, e posta col centro nel centro del « fascio la sfera limitatrice del sistema, tutte le linee del fascio hanno punti « non esterni a questa sfera. »

Il teorema è chiaro per i punti estremi di queste linee, giacchè essi giacciono sulla superficie delle rispettive sfere di apertura, delle quali nessuna ha punti esterni alla sfera limitatrice \mathcal{S} . Se poi si considera un punto P non estremo di una linea l , esso pure dev'essere interno ad \mathcal{S} . Infatti P , o da solo o col centro, divide l in due parti l_1 ed l_2 che sono due tratti, uno l_1 cogli estremi P ed O , un altro l_2 cogli stessi estremi se l è chiusa o cogli estremi P ed O' se l è un tratto OO' . Col centro in P e colla linea radiale l_2 descrivo una superficie sferica (2, Cor. 2.^o), la quale dovrà non aver punti

esterni ad \mathcal{S} : altrimenti, se O' fosse un punto di essa esterno ad \mathcal{S} , e PO' la corrispondente posizione della radiale l_2 , il gruppo di OP e PO' sarebbe una linea di spezzamento di l , e quindi farebbe parte del sistema, talchè una sfera di apertura dovrebbe passare per O' ed essere quindi in parte esterna alla sfera limitatrice \mathcal{S} , contro il Corollario 1.º. Avendosi che la superficie della sfera di centro P e di radiale l_2 è non esterna a \mathcal{S} , saranno interni i suoi punti (\mathcal{G}) e quindi il suo centro: e perciò P , punto scelto comunque su l , è interno, c. d. d.

Teorema 2.º — « Se l è una linea di un sistema finito ed l_1 è una « sua parte, anche il sistema derivato di l_1 è finito: e la sfera limitatrice del « secondo sistema è minore di quella del primo. »

Infatti, se resi concentrici i fasci dei sistemi di l ed l_1 , un punto di una linea l'_1 del secondo fosse esterno alla sfera limitatrice \mathcal{S} del primo, poichè (Post. III) l'_1 è parte di una linea conveniente l' del sistema di l , anche qualche linea di tal sistema avrebbe un punto esterno ad \mathcal{S} contro il Teor. 1.º. Tutte le sfere di apertura del sistema di l_1 sono dunque senza punti esterni ad \mathcal{S} , ed il sistema di l_1 è perciò finito (7, Def. 2.ª) e la sua sfera limitatrice è \mathcal{S} o una sfera minore (8, Def. 2.ª). E siccome tale sfera non può essere \mathcal{S} a causa del Post. V, non essendo l_1 appartenente al sistema derivato di l , come sua parte (Post. III) sarà minore di \mathcal{S} , c. d. d.,

COR. 4.º — Se una linea l di sistema finito è formata dal gruppo di due tratti l_1 ed l_2 , sarà la sfera limitatrice di l maggiore di quelle di l_1 ed l_2 .

§ 3. Le linee equivalenti e la lunghezza.

9. **Def.** — « Due linee l_1 ed l_2 di sistemi finiti si dirà che sono *equivalenti* o *non equivalenti* od anche che hanno *uguale* o *disuguale lunghezza*, secondochè appartengono o no ad uno stesso sistema chiuso. »

Osservazione. — Per indicare i casi precedenti scriveremo rispettivamente $\bar{l}_1 = \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 \neq \bar{l}_2$.

COR. 1.º — Date due linee l_1 ed l_2 di sistemi finiti avviene necessariamente uno ed uno solo di questi due casi: o hanno uguale lunghezza, o l'hanno disuguale.

COR. 2.º — Se l è una linea di un sistema finito ed l_1 è una sua parte, si ha $\bar{l} = \bar{l}_1$ (Post. III).

10. **Def.** — « Si dirà che la lunghezza di una linea l è equivalente « alla somma delle lunghezze di altre due linee date l_1 ed l_2 , quando, sup-
« posti finiti i sistemi derivati di l , di l_1 e di l_2 , vi sia nel primo una linea
« composta di due parti equivalenti ad l_1 ed l_2 . »

Osservazione. — Per indicare il caso precedente si scriverà $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2$.

COR. — Date due linee l_1 ed l_2 di sistemi finiti, esistono infinite linee (tutte quelle di un sistema chiuso) la cui lunghezza è equivalente alla somma delle lunghezze di l_1 ed l_2 : giacchè basta fare il sistema derivato della linea formata da un gruppo composto di l_1 ed l_2 , o dei tratti loro parti (per il caso che l_1 ed l_2 siano linee chiuse) il quale è finito (Post. IV — 7, Cor. 4.^o).

11. Dati due sistemi finiti non identici, se \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 sono le loro sfere limitatrici, avviene sempre uno ed uno solo di questi due casi: \mathcal{S}_1 [necessariamente (Post. VI) differente da \mathcal{S}_2] è parte di \mathcal{S}_2 , o \mathcal{S}_2 è parte di \mathcal{S}_1 (2, Cor. 5.^o).

Def. — « Dati due sistemi chiusi di linee finiti e non identici, secon-
« dochè la sfera limitatrice del secondo è parte di quella del primo, o questa
« dell'altra, diremo che le linee del primo sono *prevalenti* o *survalenti* a
« quelle del secondo, oppure anche che le prime hanno *lunghezza maggiore*
« o *minore* delle seconde.

« Ogni linea di sistema finito si dirà che ha minor lunghezza di ogni
« linea di un sistema infinito. »

Osservazione. — Per indicare i casi precedenti rispetto alle linee l_1 , l_2 scriveremo $\bar{l}_1 > \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 < \bar{l}_2$.

COR. 1.^o — Date due linee l_1 , l_2 di sistemi finiti avviene necessariamente uno ed uno solo dei tre casi $\bar{l}_1 = \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 > \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 < \bar{l}_2$.

COR. 2.^o — Se l_1 è parte di l , sarà $\bar{l}_1 < \bar{l}$ (8, Teor. 2.^o).

COR. 3.^o — Data una linea di sistema finito ne esistono infinite altre di lunghezza minore della sua; per es.: le sue parti.

COR. 4.^o — Se $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2$, sarà $\bar{l} > l_1$, $\bar{l} > l_2$, giacchè essendo (10, Def.) una delle linee equivalenti ad l composta di due parti equivalenti ad l_1 ed l_2 , sarà la sfera limitatrice di l maggiore di quelle di l_1 e di l_2 (8, Cor. 4.^o).

COR. 5.^o — Se una linea l è prevalente ad un'altra l_1 , sarà l_1 uguale ad una parte l' di una linea equivalente ad l . Ed infatti, i sistemi derivati di l ed l_1 non essendo identici, saranno (7, Cor. 5.^o) tutte le linee dell'uno parti di convenienti linee dell'altro. E non potendo essere quelle del sistema di l parti di quelle dell'altro, altrimenti sarebbe (Cor. 2.^o) $\bar{l} < \bar{l}_1$, contro l'ipo-

tesi, dovranno essere quelle del sistema di l_1 parti di quelle del sistema di l . In particolare sarà l_1 uguale ad una parte di una linea equivalente ad l .

12. Se $\bar{l}_1 < \bar{l}$, ed è l' la linea equivalente ad l della quale l_1 è parte (11, Cor. 5.^o), indicando con l'_1 uno qualunque dei gruppi ottenuti dalle parti che restano in l' toltovi l_1 , sarà (10, Def.) $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}'_1$ e quindi (ivi) $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}'_1$.

Def. — « Date due linee l, l_1 di cui l_1 sia suvalente ad l , diremo che « la lunghezza di una linea l'_1 è equivalente alla differenza fra quelle di l « ed l_1 , quando la lunghezza di l sia la somma di quelle di l_1 ed l'_1 . »

Osservazione. — Per indicare il caso precedente scriveremo $\bar{l}'_1 = \bar{l} - \bar{l}_1$.

Cor. — Date due linee l ed l_1 , tali che $\bar{l}_1 < \bar{l}$, esistono sempre linee l'_1 la cui lunghezza \bar{l}'_1 è la differenza $\bar{l} - \bar{l}_1$ fra quelle di l o di l_1 .

13. Se ad ogni linea che appartenga a sistemi finiti si fa corrispondere un ente che si dica la sua *lunghezza* ed a questo ente si attribuiscono le proprietà ora sviluppate per le linee corrispondenti riguardo ai concetti di equivalenza, prevalenza, suvalenza, somma e differenza, si ha che le lunghezze delle linee appartenenti a sistemi finiti sono grandezze le quali costituiscono una classe rispetto all'operazione somma, classe che è ad una dimensione, ad un senso, illimitata e propria (*).

Il concetto di lunghezza è così pienamente stabilito.

§ 4. Il segmento come linea di lunghezza minima.

14. Passiamo a vedere come, introdotta la lunghezza, debba essa usarsi per dare del segmento una definizione rigorosa, nel senso già citato nell'introduzione.

Postulato VII. — *Fra tutti i tratti cogli stessi due estremi, ne esiste uno di un sistema finito ed uno solo che ha la lunghezza minima di fronte agli altri.*

Def. 1.^a — « La linea di lunghezza minima fra tutte quelle cogli estremi « in due punti si dice *segmento*. »

Def. 2.^a — « Nella sfera di apertura di un segmento, il segmento stesso, « che ne è linea radiale, si dice suo *raggio*. »

(*) Vedi la mia *Teoria delle Grandezze*. Pisa, 1890, §§ 3, 16, 21, 28, 30, 31.

Cor. 1.° — Un sistema di cui fa parte un segmento, cioè (Post. II) il sistema derivato di un segmento, è finito. L'esistenza di sistemi finiti è ora dunque una verità (*).

Cor. 2.° — Una parte di un segmento non è uguale nè equivalente al segmento stesso (7, Cor. 3.° — 9, Cor. 2.°).

Teorema 1.° — « Per due punti come estremi passa un segmento ed « uno solo. »

È conseguenza immediata del Post. VII.

Osservazione. — Indicheremo il segmento di estremi A e B con AB .

Teorema 2.° — « Se due segmenti sono raggi di una stessa sfera di « apertura sono uguali. »

Infatti, se essi sono OA , OB , poichè la superficie della sfera di apertura è il luogo geometrico delle posizioni di un estremo quando l'altro estremo è fisso, sarà B estremo di una posizione di A , e quindi per O e B passerà un segmento uguale ad OA ; per il Teor. 1.° questo segmento è OB , e quindi OA ed OB sono uguali.

Cor. 3.° — Due segmenti disuguali hanno disuguale sfera di apertura.

15. Teorema 1.° — « Le due parti in cui un segmento AB è di « viso (**) da un punto C che non ne sia un estremo, sono segmenti. »

Infatti, se per es.: la parte CA non fosse un segmento, sostituendola col segmento CA , che è di minor lunghezza, insieme all'altra parte CB darebbe un gruppo cogli estremi in A e B e di lunghezza minore di AB , il che non può essere.

(*) Possiamo facilmente dare un esempio di un sistema infinito. Sopra una direzione AB si stacchino a partire dall'estremo A segmenti AA_1 , AA_2 , AA_3 , ... AA_n , ... di lunghezze rispettive a , $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, ... $\frac{a}{n}$, ...; nei punti A_r si inalzino segmenti $A_r A'_r$, perpendicolari ad AB , di lunghezza $\frac{a}{r}$, e si congiungano le coppie di punti A'_r , A_{r+1} . Risulta una linea $A_1 A'_1 A_2 A'_2 A_3 A'_3$, ... composta di infiniti tratti, con un punto limite A , che fa da estremo, la quale quindi è da considerarsi come un tratto coi due estremi A_1 , A . La linea ha lunghezza maggiore della somma dei segmenti $A_r A'_r$, cioè maggiore di $\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \dots + \frac{a_r}{n} + \dots$, e quindi non finita, giacchè la serie $\sum \frac{1}{n}$ è divergente. Il sistema derivato della linea in questione è chiaro che non è finito. Si può discutere se figure come quelle qui usate siano da dirsi linee; ma mi pare che, comunque, almeno con un postulato speciale, si possa dar sempre loro questo nome.

(**) Vedi Nota 6.^a in fine.

COR. 1.^o — Se B è un punto di un segmento AC , C non è su AB : giacchè altrimenti AC sarebbe parte di AB , e quindi di AC , cioè AC uguale ad una sua parte, contro il Cor. 2.^o del n.^o 14.

Teorema 2.^o — « Di due segmenti disuguali, uno (quello la cui sfera « di apertura è minore) è uguale ad una parte dell'altro. »

Infatti si pongano i segmenti dati s_1 ed s_2 con un estremo comune O , e se ne descrivano le sfere di apertura \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 col centro in O . Se si ha $\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$, la superficie di \mathcal{S}_1 è esterna ad \mathcal{S}_2 , e quindi i suoi punti sono da parte opposta del centro rispetto alla superficie di \mathcal{S}_2 . Se P è uno di essi, il segmento OP , raggio di \mathcal{S}_1 e quindi uguale ad s_1 , incontra la superficie di \mathcal{S}_2 almeno in un punto (G) (*) per es.: C , il quale divide OP in due segmenti parti di OP (Teor. 1.^o). Una di esse, OC , sarà raggio di \mathcal{S}_2 e quindi uguale ad s_2 : si conclude che s_2 è uguale ad una parte di s_1 .

Postulato VIII. — *Se due segmenti uguali hanno a comune un estremo ed un altro punto essi coincidono (**).*

Teorema 3.^o — « Se due segmenti AC , AB con un estremo comune A hanno comune un altro punto B , uno di essi ha il suo estremo « sull'altro (e quindi coincide o con esso o con una sua parte: 14, Teor. 1.^o — « 15, Teor. 1.^o). »

Infatti, condotte le due sfere di apertura col centro in A , esse coincidono ed i segmenti sono uguali (14, Teor. 2.^o) ed il Post. VIII dimostra il teorema — o non coincidono, e quella minore, sia per es.: quella di AC , incontrerà colla sua superficie il segmento AD raggio dell'altra (che va ad un punto esterno ad essa) in un punto D' , ed allora AD' ed AC sono segmenti raggi di una stessa sfera di apertura e perciò uguali, che avendo B comune, per quanto si è già detto, coincidono, talchè C è un punto D' di AD . Così il teorema è dimostrato.

16. **Teorema 1.^o** — « Se un segmento AB ha immobili gli estremi, « ha tutti i punti immobili. »

Infatti, poichè intanto fra due punti passa un solo segmento, i punti di

(*) Vedi Nota 7.^a in fine.

(**) Questa appare verità indipendente dal Post. VII e sue conseguenze: giacchè se due segmenti AC , AD hanno un punto B comune, il Post. VII conduce a concludere che il segmento AB , parte di AC e di AD è comune ad entrambi, ma nulla dice circa le parti restanti BC e BD . Anche il PASCH (loco cit.) ammette qualcosa di simile nel suo Assioma VII, che corrisponde al mio Teor. 3.^o.

AB possono al più scorrere sul segmento stesso: se dunque un punto C di AB si muova, dovrà andare su un altro punto C' di AB . Ora C divide AB nei segmenti AC , CB (15, Teor. 1.^o) in uno dei quali, per es. in AC , dovrà essere C' , talchè AC' è parte di AC . Ma nel moto le figure non si alterano, per cui AC , che si cambia in AC' , dovrebbe essere uguale ad AC' , contro il Cor. 2.^o del n.^o 14.

Teorema 2.^o — « Se un segmento AB ha immobili due punti, anche « non estremi, C e D , ha tutti i punti immobili. »

Premettiamo che C divide AB in due parti, in una delle quali è D : sia D in AC . Se A e B movendosi vanno in A' e B' , andrà AC in $A'C$, e D , che è di AC ed è immobile, sarà anche di $A'C$: talchè AC ed $A'C$, avendo a comune un estremo C ed un punto D , o saranno una parte dell'altro, o coincideranno (15, Teor. 3.^o). Non accadendo il primo caso, perchè AC ed $A'C$ sono uguali essendo A' la nuova posizione di A , dovrà A' cadere in A . Allora sono uguali AB' ed AB , e, avendo, un punto comune C (e D) oltre l'estremo A , per lo stesso motivo coincidono. Restando dunque A' in A e B' in B , il segmento avrà immobili gli estremi, e quindi (Teor. 1.^o) tutti i punti.

17. COR. 1.^o — Due segmenti disuguali appartengono a sistemi chiusi disuguali (15, Teor. 2.^o — Post. III) ed hanno quindi disuguale lunghezza.

COR. 2.^o — Se di un sistema finito fa parte un segmento, non vi appartengono altri segmenti che i suoi uguali (Cor. 1.^o): in altre parole due segmenti equivalenti sono uguali.

Teorema 1.^o — « Se di un sistema chiuso fa parte un segmento, il « sistema, che è finito (14, Cor. 1.^o), ha per sfera limitatrice la sfera di apertura del segmento. »

Se infatti si considera il fascio delle linee del sistema col centro in O , e σ è la superficie della sfera \mathcal{S} di apertura del segmento OA del sistema, nessun punto di esse linee può cadere esterno ad \mathcal{S} . Giacchè se P fosse un punto di una linea l esterno ad \mathcal{S} , la parte OP della linea (o la linea intera se P è estremo, o una delle parti se la linea è chiusa) ha due punti da parti opposte di σ , e quindi incontra σ almeno in un punto B . La parte OB di OP ha lunghezza minore di OP (11, Cor. 2.^o) e quindi di l , e perciò il segmento OB ha lunghezza minore di l . Ma OB è una posizione di OA , ed OA è del sistema di l , e quindi $\overline{OB} = \overline{l}$. Da questo assurdo discende che tutti i punti delle linee del sistema ed in particolare quelli delle sfere di apertura, sono non esterni ad \mathcal{S} . Poichè \mathcal{S} è una delle sfere di apertura, e tutte le altre sono interne ad essa, \mathcal{S} è la sfera limitatrice.

Cor. 3.^o — Il segmento è fra le linee equivalenti quella di apertura massima (8, Cor. 2.^o).

Teorema 2.^o — « Di ogni sistema finito fa parte un segmento. »

Se infatti si costruisce la sua sfera limitatrice S di centro O , sia OP un segmento suo raggio. Poichè OP appartiene ad un sistema finito la cui sfera limitatrice è la sfera di apertura di OP stesso (Teor. 1.^o) ed è quindi S , il sistema dato e quello di OP hanno la stessa sfera limitatrice, e quindi sono identici (Post. VI) talchè OP fa parte del sistema dato, c. d. d.

Cor. 4.^o — Sono sistemi finiti tutti e soli quelli di cui fa parte un segmento.

Cor. 5.^o — Ogni linea di un sistema finito è equivalente ad un segmento e ad uno solo, che è quello del suo sistema, raggio della sua sfera limitatrice.

Def. 1.^a — « Ogni linea di un sistema finito si dirà *rettificabile* (a causa « della proprietà del Cor. 5.^o). »

Def. 2.^a — « Il segmento equivalente ad una linea rettificabile può dirsi « *lunghezza della linea*. »

Osservazione. — Colla definizione precedente le proprietà dell'ente lunghezza, dato come si è visto fin qui, relative ai concetti di grandezza, sono espresse dalle corrispondenti del segmento che lo rappresenta, come è facile a vedersi.

18. Def. — « Si dirà *spezzata* un gruppo di segmenti, e *spezzata in-
« scritta* in una linea l una spezzata coi vertici (estremi dei segmenti) punti
« di l , quando essa ed l siano o entrambe senza estremi o cogli estremi co-
« muni, in modo che se A, B sono due vertici consecutivi della spezzata,
« su uno dei tratti (o sul tratto) AB di l non cadano altri vertici della
« spezzata stessa. »

Cor. 1.^o — La lunghezza di una spezzata non chiusa che non sia un segmento, è maggiore di quella del segmento cogli stessi estremi.

Cor. 2.^o — La lunghezza di una spezzata inscritta in una linea l di sistema finito è minore di quella della linea l : l'apertura è uguale.

19. Def. — « Diremo *apertura* di un tratto il segmento che ha i suoi « stessi estremi. »

Osservazione. — Si conservano così evidentemente per l'apertura, come segmento, le proprietà espresse dalle definizioni già date di aperture uguali, maggiori, minori.

Cor. 1.^o — Nel segmento, ed in esso solo, l'apertura è uguale alla lunghezza: ed è il segmento stesso.

COR. 2.^o — In una linea rettificabile, che non sia il segmento, la lunghezza è maggiore dell'apertura, essendo questa un segmento minore di ogni linea coi suoi estremi, o essendo nulla.

COR. 3.^o — Dati più tratti per comporne un gruppo, fra tutti i modi possibili di disporli quello che dà una linea di maggiore apertura consiste nel disporre gli estremi dei tratti su uno stesso segmento: poichè in tal caso l'apertura è uguale alla lunghezza della spezzata inscritta nel gruppo coi vertici negli estremi dei tratti, mentre in ogni altro caso ne è minore (Cor. 2.^o).

§ 5. La retta.

20. **Postulato IX.** — « Esiste una linea aperta, tale che ogni suo tratto è un segmento, e sulla quale esistono tratti uguali a qualunque segmento arbitrariamente dato. »

Def. — « La linea precedente si dice *retta*. »

Teorema 1.^o — « Per due punti qualunque passa una retta. »

Infatti per A , B come estremi passa un segmento, AB : ora se l è una retta, qualche suo tratto sarà uguale ad AB (Post. IX) quindi si potrà muovere l in modo che uno di essi coincida con AB (G) (*) e perciò passi per A , B . — Per A e B passa dunque l , c. d. d.

Teorema 2.^o — « Se due rette hanno a comune due punti coincidenti, cioè per due punti passa una retta sola. »

Infatti siano l_1 ed l_2 due rette passanti entrambi per due punti A e B . Per A e B presi come estremi non passa che un segmento AB , comune quindi ad l_1 ed l_2 , giacchè i tratti delle rette sono segmenti. Dico che anche gli altri punti di una delle linee sono della seconda e viceversa. Poichè infatti (G) (**) i punti A e B dividono l_1 e così l_2 , nel tratto (segmento) AB e in due rami cogli estremi rispettivi A e B , sia P un punto del ramo di l_1 che ha per estremo B . Se con centro A e raggio AP si descrive la sfera, la sua superficie deve tagliare quel ramo di l_2 coll'estremo in A che contiene B , giacchè la superficie della sfera è chiusa ed A è un suo punto in-

(*) Vedi Nota 8.^a in fine.

(**) Vedi Nota 9.^a in fine.

terno e quindi questo ramo ha anche punti esterni e perciò la incontra. Se R è un punto d'incontro, AR è un segmento radiale della sfera, uguale quindi ad AP (14, Teor. 2.^o). Il punto R non è su AB , altrimenti sarebbe AR parte di AB ed anche di AP , mentre è uguale ad AP (14, Cor. 2.^o). I due segmenti AP ed AR sono uguali ed hanno comune l'estremo A ed un punto B , quindi (Post. VIII) coincidono ed è P in R , ossia P è un punto di l_2 . Potendosi dimostrare che, reciprocamente, ogni punto di l_2 , anche fuori di AB , è un punto di l_1 , si conchiude che le due rette coincidono.

Cor. Due punti qualunque individuano una retta.

Teorema 3.^o — « Tutte le rette sono uguali. »

Infatti se AB è un tratto di una, l , e su un'altra l' considero uno dei suoi uguali $A'B'$, trasporto l in modo che AB coincida con $A'B'$ (G). Allora l ed l' avendo comuni due punti A, A' e B, B' coincidono (Teor. 2.^o) talchè sono uguali.

Teorema 4.^o — « Se una retta ha due punti immobili, li ha immobili tutti. »

Se infatti A e B sono questi punti e C è un punto di AB , sarà C immobile (16, Teor. 1.^o). Se C è un punto qualunque non di AB , per es.: del ramo di A che contiene B , il segmento AC ha immobili i due punti A e B che esso contiene, e quindi li ha immobili tutti (16, Teor. 2.^o); perciò C è immobile.

§ 6. Coincidenza del concetto di lunghezza con quello ordinario.

21. È facile ora dimostrare che poichè la lunghezza di una linea rettificabile è uguale al segmento che le equivale (che è il segmento raggio della sfera limitatrice del sistema derivato della linea) il concetto di lunghezza così considerato coincide con l'ordinario concetto, quando questo si definisca dicendo lunghezza di una linea il segmento limite superiore (se esiste) della lunghezza di tutte le spezzate inscritte nella linea stessa. Si può cioè dimostrare che: 1.^o data una linea rettificabile, nel senso usato in questo scritto, esiste il limite superiore della lunghezza di tutte le spezzate inscritte nella linea, ed è uguale al segmento equivalente, nel nostro senso, alla linea; 2.^o data una linea per cui esiste il segmento limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte, essa è rettificabile ed il segmento equivalente ad essa è uguale al limite superiore accennato.

1.° Se la linea l è rettificabile ed è s il segmento che le equivale, ogni spezzata s_l inscritta in essa ha lunghezza minore di quella di l (18, Cor. 2.°): quindi si ha intanto che la lunghezza di s è maggiore di quella di qualunque spezzata s_l . Per completare la dimostrazione basta provare (8, Def. 1.ª) che preso qualunque segmento s' minore di s esistono sempre delle s_l la cui lunghezza è maggiore di s' . Infatti, costruito il sistema derivato di l e il fascio delle sue sfere di apertura, delle quali la sfera limitatrice \mathbf{S} ha per raggio s , per il Cor. 1.° del n.° 8 si ha che, presa la sfera concentrica di raggio s' , fra le superficie di essa e di \mathbf{S} giacciono infinite superficie di sfere di apertura di linee del sistema, e quindi anche (7, Cor. 1.°) di linee di spezzamento di l . Presa una di tali linee di spezzamento, l' , la sua apertura sarà dunque maggiore di s' , e così dicasi di una qualunque spezzata inscritta in essa, la quale ha la stessa apertura: quindi la lunghezza di tale spezzata è (19, Cor. 2.°) maggiore di s' . Ma fra tali spezzate vi è quella i cui vertici cadono nei punti in cui si sono ricongiunte le parti nelle quali è stata divisa l per comporre la linea di spezzamento l' , e questa ha la stessa lunghezza della corrispondente inscritta in l : talchè fra le spezzate inscritte in l ve ne sono la cui lunghezza è maggiore di s' . Così è provato che s è il limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte in l , ed è dimostrata la prima parte del teorema.

2.° Reciprocamente. Sia l una linea per la quale si sappia esistente il limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte. Si costruiscano tutte le sue linee di spezzamento; di esse quelle di apertura massima, fra le varie corrispondenti ad uno stesso modo di spezzare l , sono le linee in cui gli estremi delle parti ricongiunte sono in linea retta (19, Cor. 3.°), e per essa l'apertura è uguale al segmento equivalente alla spezzata inscritta in l coi vertici nei punti di spezzamento. Se si considerano le aperture di tutte quelle speciali linee di spezzamento, si vengono a considerare i segmenti equivalenti a tutte le spezzate possibili inscritte in l , e reciprocamente. Per le ipotesi fatte, esisterà dunque un limite superiore delle aperture di quelle speciali linee di spezzamento, e quindi anche di tutte le linee di spezzamento, essendo le prime quelle di apertura massima. Sia s questo segmento: dopo aver descritto un fascio delle linee di spezzamento di l ed una sfera \mathbf{S} concentrica al fascio e col raggio s , saranno tutte le sfere di apertura di quelle linee di spezzamento interne ad \mathbf{S} . Prese anche tutte le generate del sistema e condotte a far parte del fascio, nessun punto delle loro sfere di apertura sarà esterno ad \mathbf{S} ; altrimenti poichè fra le superficie di esse e la superficie di \mathbf{S} non cadono sfere di apertura di

linee di cui esse sono generate, si farebbe contro al Cor. 1.^o del n.^o 7. Si conclude che esiste una sfera S a cui nessuna delle sfere di apertura del sistema derivato ha punti esterni; quindi un tale sistema è finito (7, Def. 2.^a) ed l è perciò rettificabile. Per la prima parte del teorema è allora il segmento equivalente ad l uguale al limite superiore delle spezzate inscritte in l ed è quindi il segmento s .

Il teorema è così dimostrato: ed è posto in chiaro come il concetto di lunghezza svolto in questo scritto non differisca da quello ordinario, quando almeno questo si definisca nel modo accennato in principio di questo paragrafo.

22. Il prof. PEANO (*) definisce la lunghezza di una linea spezzando questa in parti, formando (sostituisco alle parole del prof. PEANO il linguaggio che ho seguito in questo lavoro) tutti i gruppi di quelle parti e prendendo il limite superiore (quando esiste) delle aperture di questi gruppi. Poichè egli stesso dimostra che la lunghezza così definita coincide col limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte, è chiaro che anche il suo concetto coincide col mio.

Del resto ciò si vede direttamente, osservando che il definire la lunghezza come fa il prof. PEANO equivale a chiamare lunghezza di una linea la linea equivalente alla data e che abbia l'apertura massima; e siccome tale linea è il segmento equivalente alla linea data, è chiaro che i due concetti si equivalgono.

Appendice.

23. Le considerazioni sin qui svolte mostrano un'altra, e forse non inopportuna, definizione del segmento.

Si supponga esposto quanto si è detto nei primi tre capitoli, cioè fino al n.^o 13 inclusivo.

Postulato VII'. — « In ogni sistema finito esiste una ed una sola « linea di apertura massima. »

Def. — « Tale linea si dice *segmento*. »

Cor. 1.^o — Il segmento di un sistema ha per sfera di apertura la sfera limitatrice del sistema.

(*) PEANO, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*. Torino 1887, pag. 161.

COR. 2.^o — Se s ed s_1 sono i segmenti di due diversi sistemi ed è $\bar{s} > \bar{s}_1$, sarà (11, Def.) la sfera limitatrice di s maggiore di quella di s_1 , e quindi (Cor. 1.^o) l'apertura di s maggiore di quella di s_1 .

Postulato VII''. — « Per due punti come estremi passa sempre un « segmento. »

Teorema. — « Il segmento cogli estremi in due punti è linea di minima lunghezza fra quelle cogli stessi estremi. »

Infatti se A e B sono due punti, s è il segmento AB ed l un'altra linea di sistema finito avente per estremi A e B , avverrà uno ed uno solo dei tre casi: $\bar{s} \geq \bar{l}$. Non può essere $\bar{s} = \bar{l}$ avendo s ed l la stessa apertura, e dovendo invece il segmento (Def.) avere apertura maggiore delle linee equivalenti. Neppure può essere $\bar{s} > \bar{l}$, giacchè sarebbe ancora $\bar{s} > \bar{s}_1$, dove s_1 è il segmento equivalente ad l , e quindi s avrebbe apertura maggiore di quella di s_1 (Cor. 2.^o) il quale a sua volta, perchè equivalente ad l , l'avrebbe per definizione maggiore di l : e questo non può essere poichè s , che dovrebbe avere apertura maggiore di l , ha invece gli stessi estremi A e B . Si conclude che $\bar{s} < \bar{l}$, c. d. d.

Osservazione. — Si potrebbe continuare a dimostrare le altre proprietà del segmento; ma ce ne dispensa questo teorema, che mostra l'identità dell'ente « segmento » definito colla primitiva maniera e coll'attuale.

NOTE.

Nota 1.^a Stimo opportuno il citare qui brevemente e senza nessuna spiegazione i concetti e le definizioni fondamentali a cui intendo appoggiarmi, e che non si trovano completi nella mia Memoria citata « I postulati e gli enti geometrici ».

Le proposizioni che seguono sono postulati e definizioni. Alcune definizioni sono per brevità incluse nei postulati.

Post. — Esiste un ente che si dice *spazio*.

Post. — Esistono infiniti enti che non sono lo spazio, e si dicono *parti dello spazio* o *solidi*, e infiniti solidi che si dicono *parti di un solido*.

Post. — Per ogni solido esistono uno o più enti (in numero finito) che non sono spazio nè solidi, il cui insieme costituisce il *limite del solido*, e ciascuno dei quali si dice *superficie*.

Per ogni superficie esistono infiniti enti, che si dicono *sue parti*, ed altri enti *parti di queste*, che pure sono parti della superficie data. Si dicono tutti *superficie*.

Post. — Per ogni superficie non limite di un solido esistono uno o più enti (in numero finito) non spazio, solidi o superficie il cui insieme è il *limite o contorno della superficie*, e che si dicono *linee*.

Per ogni linea esistono infiniti enti, *sue parti*, ed altri enti, *parti di queste*, che sono parti della linea data: si dicono tutte *linee*.

Post. — Per ogni linea non limite di una superficie esistono uno o due enti, che costituiscono il suo *limite* e ne sono *estremi*, ciascuno dei quali non è spazio, nè solido, nè superficie, nè linea, e si dice *punto*.

Def. — Si dice che *giacciono* su un ente tutte le sue parti, i limiti di esso e di queste, e tutti gli enti che, per questa stessa definizione, giacciono su quelle parti o su quei limiti. Così su una linea giacciono infiniti punti, su una superficie infinite linee ed infiniti punti ecc.: e nello spazio giacciono tutti gli enti.

Def. — Se un ente A giace su B , A è *di* B , B *contiene* A , *passa per* A .

Def. — Sono *parti associate* di un ente A due parti di esso che, avendo comuni al più solo punti dei loro limiti, col loro insieme costituiscono l'ente A , cioè sono tali che i punti di A sono tutti e soli quelli delle due parti.

Def. — Un ente A di B *divide* B , quando esso o solo o con parti associate del limite di B costituisca il limite di due parti associate di B .

Def. — Un aggregato o gruppo di enti si dice *figura*.

Def. — Quando si considera una figura si dice anche che si hanno *infinite figure coincidenti con essa*.

Def. — Il gruppo di tutti i punti di una figura si dirà che *forma* la figura.

Post. — Un gruppo di punti forma una figura sola e le sue infinite coincidenti.

Post. — Esistono infiniti gruppi di punti che formano una stessa figura.

Def. — Una figura *ha diverse posizioni* quando è formata da diversi gruppi di punti. Quando si considera una figura con diverse posizioni, si dice che si hanno altrettante *figure uguali*.

Def. — Il passaggio della mente da una figura ad una sua uguale si dice *moto* della prima figura.

Post. — Una figura può muoversi quando sono immobili uno o due dei suoi punti, ed assumere infinite posizioni.

Nota 2.^a (al Cor. 3.^o del n.^o 2). — Se date due superficie σ_1 e σ_2 , di cui σ_2 divide lo spazio, abbia σ_1 punti dalle due parti di σ_2 , esse avranno anche punti comuni.

Nota 3.^a (al Cor. 4.^o del n.^o 2). — Se date due superficie chiuse σ_1 e σ_2 ciascuna giace tutta da una parte dell'altra, il solido interno ad una di esse è parte di quello interno all'altra.

Nota 4.^a (ivi). — I solidi interni a qualche superficie chiusa (finiti) sono tali che una loro parte non è uguale ad essi stessi.

Nota 5.^a (alla Def. 1.^a del n.^o 4). — Esiste una linea di cui quelle di un gruppo sono parti, e i cui punti sono tutti e soli quelli di queste parti.

Nota 6.^a (al Teor. 1.^o del n.^o 15). — Un punto di un tratto divide questo in due parti.

Nota 7.^a (al Teor. 2.^o del n.^o 15). — Se una linea ha punti dalle due parti di una superficie che divide lo spazio, ha con essa punti comuni.

Nota 8.^a (al Teor. 1.^o del n.^o 20). — Se sopra una figura A giace un'altra figura B , si potrà muovere A in modo che B coincida con una figura qualunque uguale C .

Nota 9.^a (al Teor. 2.^o del n.^o 20). — Un punto di un ramo (che non sia il suo estremo) lo divide in un tratto ed in un ramo.

Torino, 14 novembre 1891.

Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita (*).

(Di GIULIO ASCOLI, a Milano.)

VI.

1. Sia ora A un'area connessa qualsivoglia a distanza finita posta nel primo quadrante ed $f_1(x, y)$ una funzione dei punti della medesima, continua e sempre crescente tanto nel verso positivo dell'asse X che in quello dell'asse Y , mentre lungo il contorno C_A la $f_1(x, y)$ è dotata di un numero limitato di massimi e minimi e di tratti in cui si mantiene costante.

Allo studio di tale funzione giova far precedere alcune considerazioni sul contorno C_A dell'area data.

Il limite C_B di una superficie B , il quale viene incontrato in soli due punti da una retta qualunque uscente da un punto dell'area $B - 0$ e parallela ad uno degli assi, può decomorsi, come si vide, nelle quattro parti $C_B^{(1)}$, $C_B^{(2)}$, $C_B^{(3)}$, $C_B^{(4)}$, e questa decomposizione si fa al certo in una maniera sola, quando la curva C_B non contenga dei tratti paralleli ad uno degli assi. È chiaro che l'area B non ha alcun punto sito nel primo quadrante rispetto ad un punto qualunque e della linea $C_B^{(1)}$ ed infinitamente vicino a quest'ultimo, tolto l'ente e , come è chiaro. In modo analogo si dica delle curve $C_B^{(2)}$, $C_B^{(3)}$, $C_B^{(4)}$, sempre nell'ipotesi che l'elemento C_B sia scevro da tratti paralleli ad uno degli assi.

Non è difficile il vedere che si può fare una divisione del tutto analoga del contorno C_A , qualunque sia la connessione dell'area data A .

La linea C_A si compone di rami semplici crescenti o decrescenti e di segmenti rettilinei paralleli all'uno od all'altro dei due assi. Un ramo cre-

(*) Continuazione e fine, vedi vol. XIX, pag. 289.

scente appartiene alla curva $C_A^{(2)}$ oppure all'altra $C_A^{(4)}$, secondo che nelle estreme vicinanze di un suo punto interno qualsivoglia non cade una parte di A sita nel secondo o quarto quadrante rispetto al medesimo per ordine; ed è manifesto che nel primo caso la linea contemplata lascia alla destra l'area data, quando si percorra in guisa, che l'ascissa cresca, nel secondo invece alla sinistra. Un ramo semplice decrescente farà parte all'incontro della curva $C_A^{(2)}$ oppure $C_A^{(3)}$, se si verifica la proprietà indicata relativamente al primo o terzo quadrante, e nella prima ipotesi rimarrà alla sua destra l'ente A , nel secondo alla sinistra, purchè si percorra nella maniera indicata or ora.

Un segmento della linea C_A parallelo alla retta $x = 0$, il quale abbia alla sinistra la superficie A , quando si percorra nel verso positivo dell'asse Y , può aggregarsi ad arbitrio alla curva $C_A^{(2)}$ o $C_A^{(4)}$; se poi il tratto in discorso ha alla destra l'area data, esso appartiene ad una delle due $C_A^{(2)}$ o $C_A^{(3)}$. Delle considerazioni analoghe possono ripetersi riguardo agli intervalli rettilinei paralleli all'asse X .

In tal modo anche il contorno di una superficie connessa qualunque A può scindersi nelle curve $C_A^{(1)}$, $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$, $C_A^{(4)}$. Questa decomposizione può farsi in una guisa soltanto se la linea C_A non contiene dei tratti paralleli ad una delle linee $xy = 0$, in caso diverso in 2^p ($p \geq 1$) maniere, quando il simbolo p indichi il numero dei tratti rettilinei paralleli agli assi dell'elemento C_A .

Ecco alcuni esempi di scomposizione del contorno C_A .

Sia l'area A limitata dalla circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ e dai due bordi del taglio eseguito lungo un tratto di retta di cui gli estremi m ed n sono i punti $(0, +a)$, $(0, -a)$, essendo $0 < a < r$. In questo caso la decomposizione del contorno C_A può farsi in $4 (= 2^2)$ maniere diverse, perchè esso contiene due segmenti rettilinei mpn ed nqm , laddove p e q sono due punti dei bordi del nostro taglio, il primo dei quali è alla destra di chi guardi nel verso positivo dell'asse Y .

Possiamo quindi fare:

$$\begin{array}{llll}
 C_A^{(1)} \equiv \alpha\beta, & \equiv \alpha\beta + nqm, & \equiv \alpha\beta + nqm, & \equiv \alpha\beta \\
 C_A^{(2)} \equiv \beta\gamma, & \equiv \beta\gamma, & \equiv \beta\gamma + nqm, & \equiv \beta\gamma + nqm \\
 C_A^{(3)} \equiv \gamma\delta + nqm, & \equiv \gamma\delta + nqm, & \equiv \gamma\delta, & \equiv \gamma\delta \\
 C_A^{(4)} \equiv \delta\alpha + nqm, & \equiv \delta\alpha, & \equiv \delta\alpha, & \equiv \delta\alpha + nqm.
 \end{array}$$

Se l'area A fosse un rettangolo la decomposizione potrebbe farsi in $8 (= 2^3)$ maniere, come tosto si avverte.

È degno di nota che due delle quattro parti del contorno C_A possono mancare, non però ad indice pari l'una e dispari l'altra.

Infatti, ammetto che la parte $C_A^{(1)}$ contenga un ramo semplice L , il quale è di necessità sempre decrescente all'aumentare della ascissa. Per un punto g di $L - 0$ posso tracciare una retta parallela all'asse Y , la quale penetri subito in $A - 0$, ed un'altra analoga parallela all'altro asse. La prima linea incontra di nuovo il contorno C_A non appena esce dall'area contemplata, e si può supporre che ciò avvenga nell'interno di un elemento, il quale è un ramo semplice oppure un tratto parallelo all'asse X , che in ognuno dei due casi dirò K , purchè si scelga in modo conveniente il punto g in $L - 0$. La linea K apparterrà alla curva $C_A^{(3)}$, quando sia un ramo decrescente; all'altra $C_A^{(4)}$, se crescente. Se per ultimo l'ente K fosse un tratto parallelo all'asse X , farebbe parte della curva $C_A^{(3)}$ o $C_A^{(4)}$ a piacere. La seconda retta uscente da g taglia il contorno C_A alla sua prima uscita dall'area contemplata in un punto interno di un ramo semplice crescente o decrescente, oppure di un tratto di retta parallelo all'asse Y , che chiamo indifferentemente H . Nel primo caso la linea H appartiene alla curva $C_A^{(2)}$, nel secondo alla $C_A^{(3)}$, nel terzo all'una od all'altra ad arbitrio.

Nella fatta ipotesi circa al ramo L il nostro asserto è dunque dimostrato.

Sia ora L un tratto parallelo all'asse X , il quale possa computarsi alla linea $C_A^{(1)}$. La parallela all'asse Y pel punto g interno ad L e scelto in modo conveniente fora non appena esce dall'area data il contorno C_A in un punto, che fa parte di necessità di un pezzo decrescente di $C_A^{(3)}$, oppure crescente di $C_A^{(4)}$, o infine in un elemento sito entro un tratto parallelo all'asse X , che può computarsi a piacere ad una delle due linee $C_A^{(3)}$ e $C_A^{(4)}$. Una parallela poi alla retta $y = 0$ ed un tantino al di sotto di g si comporta al suo primo uscire dalla superficie A verso sinistra come la seconda delle parallele contemplate nel caso che l'elemento L , pur appartenendo all'ente $C_A^{(1)}$, non è un segmento parallelo ad uno degli assi. Ed in maniera conforme si ragionerebbe se l'ente L fosse un segmento parallelo alla retta $x = 0$ e facesse parte della linea $C_A^{(1)}$.

In modo analogo poi si dimostrerebbe il teorema, se il punto g appartenesse ad una delle curve $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$, $C_A^{(4)}$.

Si è veduto or ora che il contorno C_A , quando contenga soltanto p segmenti paralleli agli assi, può scindersi in 2^p maniere, e non in un numero maggiore, nelle quattro parti $C_A^{(1)}$, $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$, $C_A^{(4)}$. Ora, ponendo mente che un tratto parallelo ad uno degli assi può considerarsi a piacere come il limite di una varietà di rami semplici crescenti o decrescenti, tornano forse opportune

le seguenti osservazioni. Assunta una tra le 2^p possibili partizioni, un segmento parallelo all'asse X od Y , il quale viene computato alla curva $C_A^{(q)}$ e si connette ad un ramo semplice decrescente, oppure ad un tratto della stessa parallelo all'altro asse, potrà considerarsi insieme a quest'ultimo come un solo elemento della linea $C_A^{(q)}$; e la medesima cosa si dica se la curva formata dai due enti contemplati ha un termine comune con un altro ramo semplice, oppure con un altro intervallo parallelo ad uno degli assi della linea $C_A^{(q)}$, e così via. In tal guisa la parte $C_A^{(q)}$ consta di un certo numero (≥ 1) di elementi, i quali sono tra loro sconnessi, laddove ciascuno si compone di *un solo pezzo*.

Valga ad esempio la figura generata nel seguente modo.

Nell'area A che viene incontrata in non più di due punti da una parallela ad uno degli assi, la quale contiene un suo elemento, eseguisco un taglio lungo la linea L disegnata in $A - 0$. L'ente L procedendo da sinistra verso destra si compone di un tratto parallelo all'asse X , di un ramo primitivo decrescente, di un secondo intervallo normale alla retta $x = 0$ ed infine di un segmento parallelo alla retta $x = 0$. Chiamo poi $enmlk$ il bordo destro del taglio andando lungo il verso positivo dell'asse X ed $efghk$ l'altro.

Il contorno C_A del nostro disegno contiene adunque sei segmenti paralleli agli assi e sono ef, gh, hk, kl, lm, ne ; può quindi decomporre in $64 (= 2^6)$ maniere diverse nelle quattro parti $C_A^{(1)}, C_A^{(2)}, C_A^{(3)}, C_A^{(4)}$. Assumo la scomposizione

$$\begin{aligned} C_A^{(1)} &\equiv \beta\alpha + en + nm + ml + kh, & C_A^{(2)} &\equiv \beta\gamma + kl, \\ C_A^{(3)} &\equiv \gamma\delta + ef + fg + gh, & C_A^{(4)} &\equiv \delta\alpha. \end{aligned}$$

La parte $C_A^{(1)}$ può supporre formata dalle tre linee $ba, en + nm + ml, kh$, le quali sono tra loro sconnesse e possono considerarsi come dei rami semplici decrescenti.

Dirò quindi innanzi ramo semplice crescente o decrescente per ordine una curva connessa, la quale mai decresce o cresce, mentre l'ascissa non diminuisce, e ramo semplice primitivo una curva sempre crescente o decrescente, oppure un segmento parallelo ad uno degli assi.

Un ramo semplice di curva è quindi composto di un numero limitato (≥ 1) di rami primitivi. La proiezione di una siffatta linea poi sull'asse X è un segmento di retta di lunghezza maggiore od eguale allo zero (un punto), e la stessa cosa si dica della sua immagine sull'altro asse. Queste due proiezioni però non sono manifestamente in pari tempo nulle.

Decomposto il contorno C_A nelle quattro parti $C_A^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, 4$) per

modo, che si abbia $C_A^{(s)} \equiv \sum_1^{q_s} {}^{(s)}L_t$ ($q_s \geq 0$), essendo gli elementi ${}^{(s)}L_1, {}^{(s)}L_2, \dots, {}^{(s)}L_{q_s}$ ($s \geq 1, \leq 4$) tra loro sconnessi, laddove ciascuno considerato a sè è connesso, possiamo asserire che la curva C_A contiene i quattro enti:

I. La linea $C_A^{(1)} \equiv \sum_1^{q_1} {}^{(1)}L_v$, la quale non cresce mentre l'ascissa non diminuisce e lascia alla destra l'area A , quando si percorra in guisa, che la quantità x non decresca (prima parte di C_A);

II. L'elemento $C_A^{(2)} \equiv \sum_1^{q_2} {}^{(2)}L_v$, che non decresce, laddove l'ascissa non diminuisce e lascia alla destra l'area A , se percorso come or ora (seconda parte del contorno C_A);

III. La curva $C_A^{(3)} \equiv \sum_1^{q_3} {}^{(3)}L_v$, che però lascia alla sinistra la superficie data (terza parte di C_A);

IV. L'ente $C_A^{(4)} \equiv \sum_1^{q_4} {}^{(4)}L_v$ è analogo all'altro $C_A^{(2)}$ ed ha alla sua sinistra l'area A (quarta parte di C_A).

2. Sono manifesti i teoremi:

I. La funzione $f_1(x, y)$ cresce ognora lungo una curva connessa tracciata in A , che non decresce, mentre lo stesso si verifica della ascissa, ossia in un ramo semplice crescente. Adunque, in ogni elemento ${}^{(2)}L_v, {}^{(4)}L_t$ delle curve $C_A^{(2)}$ e $C_A^{(4)}$.

II. L'insieme dei punti della superficie A , in ciascuno dei quali la $f_1(x, y)$ ha un valore costante ($\geq m, \leq M$), è una linea non di necessità connessa e sempre decrescente all'aumentare dell'ascissa, di cui gli estremi sono sopra C_A , più un numero limitato (al caso nullo) di punti isolati (non siti in $A = 0$). L'ente $f_1(x, y) = C$ è rettificabile.

Se D ed E sono due segmenti della linea $f_1(x, y) = C$, ciascuno dei quali ha i suoi estremi sulla curva C_A e tra loro sconnessi, non si potrà manifestamente assegnare sopra uno dei medesimi un punto da cui si possa pervenire ad uno dell'altro mediante un ramo semplice crescente tracciato in A .

L'ultima proposizione risulta manifesta decomponendo l'area A mediante delle parallele all'asse Y in più pezzi, ognuno dei quali sia connesso ed abbia per contorno una curva, la quale viene incontrata in soli due punti da una retta qualsivoglia uscente da un suo punto interno e parallela ad uno degli assi. Di più, la decomposizione sia fatta in maniera, che la $f_1(x, y)$ rag-

giunga due volte soltanto lo stesso valore lungo il contorno di ognuno di questi pezzi, fatta astrazione di due tratti, i limiti inclusi, ciascuno dei quali è maggiore od eguale allo zero. In uno di questi tratti la $f_1(x, y)$ raggiunge il suo massimo valore nella parte corrispondente di A , nell'altro il minimo.

Giova dare qualche schiarimento circa questa partizione.

Un punto b è sovrapposto o sottoposto ad un altro a , se ha una ordinata maggiore o minore del secondo per ordine, l'ascissa essendo la stessa. Ciò premesso, considero l'estremo p di un ramo $L \equiv pq$ semplice della linea C_A , che sia anche primitivo e non parallelo ad uno degli assi, ed avverto subito che si potranno verificare tre casi: i punti vicinissimi al termine p dell'arco L siti in A e ad esso sottoposti e sovrapposti, se pur ci sono, cadono in $A - 0$, ciò ha luogo coi primi oppure coi secondi soltanto, nè con gli uni nè con gli altri.

Rispetto ad un intervallo di retta parallelo all'asse X , che per convenzione è pure un ramo semplice e primitivo, vanno ripetute le stesse considerazioni.

Quanto ad un segmento parallelo all'asse Y , non potranno verificarsi che le due ultime ipotesi, come facilmente si avverte.

Ora, le parallele all'asse Y , che servono a decomporre l'area data nella guisa voluta, devono uscire dagli estremi di ciascun ramo semplice primitivo, nonchè da quei punti interni dei rami ora detti, nei quali la $f(s)$ muta andamento, e devono penetrare *tosto* nella superficie $A - 0$. Queste parallele cessino non appena incontrano di nuovo la linea C_A . È inutile poi l'osservare che, se la $f(s)$ muta andamento entro un ramo primitivo, questi è decrescente (*).

3. Meritano attenzione i seguenti teoremi:

I. *In ogni punto o tratto di massimo relativo della $f(s)$ tutto nell'interno di un ramo primitivo della linea $C_A^{(1)}$ la $f_1(x, y)$ ha pure un massimo relativo, e nelle vicinanze di un minimo, sempre nelle stesse circostanze, essa si comporta come se l'area data venisse forata due volte nel suo contorno da una parallela qualsivoglia ad uno qualunque degli assi uscente da un suo punto interno.*

Una proposizione analoga può enunciarsi rispetto alla curva $C_A^{(2)}$.

II. *In ogni tratto, in cui la $f(s)$ si mantiene costante nè ha un massimo o un minimo, tutto entro un ramo primitivo della linea $C_A^{(1)}$ o $C_A^{(2)}$, la $f_1(x, y)$ si comporta come se l'ente A venisse incontrato due volte soltanto*

(*) Nel Volume già citato dei *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo espongo delle considerazioni che rendono più chiara la decomposizione di cui sto facendo parola.

nella curva C_A da una parallela qualsivoglia ad una delle rette $xy = 0$ per un suo punto interno.

Questi due teoremi hanno luogo perchè si può sempre torre dall'area A un pezzo connesso B , di cui il contorno viene incontrato in soli due punti dalla solita parallela, che contiene in pari tempo il ramo primitivo, del quale è parola nei teoremi stessi.

Sia ora pq un elemento semplice primitivo della curva $C_A^{(4)}$, non però un intervallo parallelo ad una delle rette $xy = 0$, essendo p il termine più vicino all'asse Y . Ora, entro il secondo quadrante del punto p non cade al certo il ramo primitivo che si connette a quello che si considera nell'elemento p ; esso apparterrà di conseguenza ad uno degli altri, i limiti compresi. Così pure, l'altro ramo primitivo che ha un estremo in q farà parte del primo, secondo o terzo quadrante soltanto del punto q , non esclusi i raggi che li limitano.

Ciò posto, se la $f(s)$ ha un massimo in p , oppure è costante in un tratto pv dell'elemento pq di $C_A^{(4)}$ ($pv \leqq pq$), laddove il ramo primitivo di C_A che ha il limite p a comune con la linea pq appartiene al terzo quadrante del punto p , i lati compresi, oppure al quarto, stando però alla sinistra del ramo pq per chi guardi nel verso positivo dell'asse Y , il modo di comportarsi della $f_1(x, y)$ nella vicinanza del punto p è lo stesso che pel caso di un'area elementare (*). Questo fatto avviene per la ragione addotta nel dimostrare i due ultimi teoremi.

La stessa cosa si dica del punto q , purchè la linea primitiva diversa da pq che ha un termine in q cada nel secondo quadrante di questo ultimo ed alla sinistra dell'elemento qp oppure nel terzo, i lati non esclusi.

Se infine la $f(s)$ è costante nella curva qp , mentre i rami contermini in p ed in q si comportano nelle guise ora accennate, il tratto pq sarà necessariamente un massimo relativo tanto per la $f(s)$ che per la $f_1(x, y)$, e quest'ultima si comporterà nella maniera nota nei pressi dell'elemento pq .

Considerazioni analoghe si possono ripetere rispetto ad un tratto parallelo ad uno degli assi ed appartenente alla curva $C_A^{(4)}$, nonchè rispetto ad un ramo primitivo qualsivoglia dell'elemento $C_A^{(3)}$.

Sia ora pq un ramo primitivo della linea $C_A^{(4)}$ tale, che non si possa assegnare uno maggiore di cui formi una parte. Di più, ammetto che non si

(*) Dirò area elementare una superficie piana, di cui il contorno viene incontrato in soli due punti da una parallela qualsivoglia ad uno qualunque dei due assi uscente da un suo punto interno.

possa torre dall'area A un pezzo B , il contorno del quale C_B venga incontrato in soli due punti da ogni parallela ad uno degli assi uscente da un punto di $B - 0$ e che contenga in pari tempo una parte di C_A , la quale ha nel suo interno l'elemento pq . Nella nuova ipotesi se il secondo quadrante del punto p appartiene per intero all'area A nei pressi dell'ente p stesso; ne avviene che dal punto p esce una linea $f(x, y) = C$, di cui una parte cade nel secondo quadrante dell'elemento p medesimo. Analogamente si dica del punto q rispetto al suo quarto quadrante. In modo conforme si ragiona poi di un ramo primitivo che appartiene alla curva C_A^3 . Il ramo primitivo del quale si è fatto or ora parola potrebbe anche essere un segmento parallelo ad uno degli assi coordinati (*).

Possiamo quindi enunciare il teorema:

III. *I massimi e minimi relativi della funzione $f_1(x, y)$ cadono soltanto nei massimi e minimi della $f(s)$ [punti o tratti], quando sieno del tutto nell'interno di un ramo primitivo della curva $C_A^{(1)}$ oppure $C_A^{(3)}$ ordinatamente. I tratti possono però avere un estremo od anche amendue a comune col ramo rispettivo, purchè questi possa considerarsi come appartenente ad un'area B , di cui il contorno C_B viene incontrato in soli due punti da una parallela ad uno degli assi uscente dall'elemento $B - 0$, laddove la linea C_B contiene un pezzo di C_A , nel cui interno cade uno od amendue gli estremi del ramo primitivo per ordine. In modo analogo si dica di un massimo e minimo della $f(s)$, il quale è in un termine di un elemento primitivo della curva $C_A^{(1)} + C_A^{(3)}$.*

IV. *Il numero delle linee $f_1(x, y) = \text{cost.}$, ciascuna delle quali contiene dei punti isolati, è limitato.*

Ciò ha luogo perchè in un punto isolato le funzioni $f(s)$ ed $f_1(x, y)$ hanno un massimo ed un minimo relativo.

V. *È altresì assegnabile il numero delle linee $f_1(x, y) = \text{cost.}$, le quali hanno dei tratti a comune col contorno.*

VI. *Il limite superiore ed inferiore della funzione $f_1(x, y)$ vengono raggiunti ordinatamente nelle curve $C_A^{(1)}$ e $C_A^{(3)}$.*

Se scomponiamo l'area data mediante delle parallele all'asse Y nella guisa accennata al paragrafo precedente, avvertiamo tosto che in ciascun elemento così ottenuto reggono le proposizioni enunciate nei §§ 3, 4 e 5 del N. II.

(*) Nel Volume accennato dei *Rendiconti* si trovano delle ricerche più minuziose sull'argomento.

INDICE DELLA MEMORIA PRECEDENTE

N. I.

§ 1. Una funzione $f_i(x, y)$ dei punti dell'area connessa A posta a distanza finita è crescente secondo il verso positivo di amendue gli assi, quando siano soddisfatte le condizioni

$$f_i(x_1 + h, y_1) - f(x_1, y_1) > 0, \quad f_i(x_1, y_1 + k) - f(x_1, y_1) > 0, \\ (h > 0, k > 0),$$

essendo $(x_1, y_1) \overline{(x_1 + h, y_1)}$; $(x_1, y_1) \overline{(x_1, y_1 + k)}$ le coordinate degli estremi di due segmenti che appartengono per intero all'area A .

Ci proponiamo di studiare le proprietà della funzione $f_i(x, y)$, supponendo prima l'area A tale, che il suo contorno venga incontrato al massimo in due punti da una parallela ad uno degli assi uscente da un suo punto.

La $f_i(x, y)$ cade nella regione (+, +, +) dello spazio, quando si rappresenti geometricamente nel solito modo.

§ 2. Si può circoscrivere all'area A un rettangolo di cui i lati sono paralleli agli assi, ciascuno dei quali ha a comune un solo punto con la curva C_A . Detto α il punto del contorno C_A più discosto dalla retta $x = 0$, sieno β, γ, δ gli altri elementi comuni al rettangolo ed alla linea C_A , girando da destra a sinistra. Quando gli enti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono tra loro distinti, la curva C_A è completa e risulta divisa nelle quattro parti $C_A^{(1)} \equiv \alpha\beta, C_A^{(2)} \equiv \beta\gamma, C_A^{(3)} \equiv \gamma\delta, C_A^{(4)} \equiv \delta\alpha$.

Dirò ramo semplice crescente o decrescente una curva, che cresce o decresce sempre all'aumentare della ascissa e che si proietta semplicemente sull'asse X .

Si insegna a costruire un'area A , essendo i punti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tutti tra loro distinti o no.

§ 3. *La espressione $f_i(x, y)$ cresce ognora lungo una curva semplice crescente tracciata in A .*

§ 4. Condotte per il punto a nel piano della superficie A due rette aX' ed aY' parallele agli assi coordinati e nel loro verso, dirò che un punto b è nel primo quadrante rispetto all'elemento a , se appartiene all'angolo $X'aY'$, i lati compresi. Analogo significato attribuiremo alle locuzioni: il punto b è nel secondo, terzo, quarto quadrante dell'elemento a .

Preso un punto arbitrario f nell'area A , la funzione $f_1(x, y)$ assume un valore più grande che in esso, in ogni punto della superficie A , il quale appartiene al primo quadrante dell'elemento f , ed in ogni punto del terzo avviene l'opposto.

Questa asserzione è una conseguenza della proposizione:

La parte di $A - 0$, sita nel primo quadrante di un punto g dell'area A , ha la proprietà che si può pervenire dall'ente g ad un suo punto qualsivoglia mediante un ramo semplice crescente, di cui ciascun punto interno è in $A - 0$, oppure per mezzo di un segmento dei nuovi assi sito nella superficie data.

§ 5. La $f_1(x, y)$ raggiunge il limite superiore M dei suoi valori in uno o più punti della curva $C_A^{(1)}$. Il limite inferiore m all'incontro viene conseguito nella linea $C_A^{(3)}$.

La funzione $f_1(x, y)$ raggiunge un valore qualsivoglia $C (> m, < M)$ tante volte, quanto si vuole.

§ 6. Si definiscono le funzioni $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, $f_4(x, y)$, le quali sono crescenti per ordine secondo le direzioni

$$-X, +Y; \quad -X, -Y; \quad +X, -Y.$$

Queste funzioni sono dotate di proprietà analoghe a quelle dell'altra $f_1(x, y)$.

Alle quattro espressioni $f_s(x, y)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) giova aggiungere altre cinque, che sono rispettivamente costanti nelle direzioni dell'asse X od Y e crescenti o decrescenti nel verso $+Y$ oppure $+X$, costanti lungo la direzione della retta $y = 0$ e dell'altra $x = 0$.

N. II.

§ 1. *Suppongo che la funzione $f_t(x, y)$ ($t = 1, 2, 3, 4$) raggiunga una sol volta il limite superiore M e l'inferiore m dei suoi valori nei punti P e Q , laddove la funzione $f_t(s)$ ($t = 1, 2, 3, 4$) dei punti del contorno C_A è ognora crescente da Q a P .*

L'insieme dei punti della superficie A , in ciascuno dei quali si ha

$f_i(x, y) = \text{cost. } (t = 1, 2, 3, 4) (> m, < M)$, è una linea connessa decrescente o crescente al crescere dell'ascissa, di cui gli estremi sono sopra C_A , secondo che il numero t è impari o pari. Tolta questa linea, la funzione $f_i(x, y)$ non raggiunge il valore cost.

L'elemento $f_i(x, y) = C (m < C < M)$ è rettificabile.

§ 2. L'ente $f_i(x, y) = C'$ è sovrapposto all'altro $f_i(x, y) = C$, se $C' > C$, mentre $m < C < C' < M$. Quando poi si può determinare un punto della retta $y = 0$, nel quale si proietti un punto interno di ciascuna delle linee $f_i(x, y) = C, = C'$, quest'ultime si dicono *effettivamente sovrapposte*.

§ 3. La linea $f_i(x, y) = f_i(x_1, y_r)$ ($r = 1, 2, 3, \dots$) tende uniformemente all'altra $f_i(x, y) = f_i(x_1, y') = C (m < C < M)$ all'annullarsi del quoto $\frac{1}{r}$, essendo $y_1 > y_2 > y_3 > \dots$ oppure $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$, $\lim_{r \rightarrow \infty} y_r = y'$ ed (x_1, y') un punto in $A - 0$.

§ 4. L'area A è il luogo della varietà $f_i(x, y) = C (m \leq C \leq M)$, e si può assegnare una grandezza $\eta (> 0)$ tale, che due linee qualunque $f_i(x, y) = C, = \overline{C + \eta} (m < m_1 \leq C \leq M_1 < M)$ non abbiano una distanza maggiore della quantità arbitraria $\sigma (> 0)$, essendo m_1 ed M_1 due valori fissi.

Questa proposizione regge anche se la quantità η è negativa.

Dato un valore opportuno $\eta (> 0)$, la minima distanza delle due linee $f_i(x, y) = C, = \overline{C + \eta} (m_1 \leq C \leq M_1)$ non è minore di una quantità assegnabile, che si annulla con η , qualunque sia la grandezza C nei limiti indicati.

Il valore η potrebbe essere anche negativo.

Le linee $f_i(x, y) = C (m \leq C \leq M)$ sono continue in egual maniera.

§ 5. Chiamata $s(C)$ la lunghezza della linea rettificabile

$$f_i(x, y) = C,$$

ha luogo la proposizione:

La funzione $s(C)$ esiste nel tratto mM , raggiunge il limite inferiore dei suoi valori, che è lo zero, due volte soltanto in m ed in M , e si ha $s(m + 0) = s(M - 0) = 0$. I valori conseguiti dalla espressione $s(C \pm \epsilon)$ convergendo al punto $C (> m, < M)$ tanto all'annullarsi positivo che negativo della grandezza ϵ non sono minori della quantità $s(C)$.

Si adducono due esempi.

§ 6. Il valore M può considerarsi come un massimo assoluto e relativo della funzione $f_i(x, y)$. Una asserzione analoga può farsi rispetto alla grandezza m .

Detta y_1 l'ordinata dell'estremo sinistro della linea $f_1(x, y) = C$ ed y_2 l'ordinata dell'altro estremo, si ha la proposizione:

La funzione $y_1 - y_2$ considerata in un tratto connesso interno ad uno dei due segmenti QP del contorno C_A è positiva, continua, nè ha per limite inferiore dei suoi valori lo zero.

Analogamente si dica della differenza $x_1 - x_2$.

N. III.

§ 1. Si suppone che nella linea C_A ciascuno degli elementi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ possa essere un tratto ($\cong 0$) parallelo ad uno degli assi ($\alpha \parallel \gamma \parallel Y, \beta \parallel \delta \parallel X$), stando sempre l'ipotesi che il contorno C_A venga incontrato in soli due punti da una parallela ad uno degli assi uscente da un punto interno dell'area A .

Anche in questo caso si può dividere il contorno C_A nelle parti $C_A^{(1)}, C_A^{(2)}, C_A^{(3)}, C_A^{(4)}$.

Le proprietà già enunciate della funzione $f_1(x, y)$ reggono anche nella nuova area.

§ 2. La funzione $f(s)$ dei punti del contorno C_A raggiunga, se mai, più di due volte uno stesso valore, essendo però scevra da tratti in cui si mantenga costante e da infiniti massimi e minimi.

Se il complesso $f_1(x, y) = C$ consta di soli $t (\cong 1)$ pezzi, ciascuno dei quali cade in $A - 0$, tolti i due termini, essi pezzi formano una linea connessa sempre decrescente oppure possono considerarsi come delle parti tra loro sconnesse di una siffatta linea.

Ogni massimo relativo della funzione $f_1(x, y)$ cade nella parte di C_A che è sempre decrescente ed è interposta agli enti α e β , i limiti non esclusi, e può considerarsi come il limite di un pezzo connesso di linea $f_1(x, y) = C - \varepsilon (\varepsilon = + 0)$, che ha soltanto gli estremi sopra C_A . Ogni minimo della funzione $f(s)$ sito nella stessa parte di C_A cade nell'interno di una linea $f_1(x, y) = C$.

Delle asserzioni analoghe possono ripetersi relativamente ai minimi ed ai massimi di quell'elemento sempre decrescente della curva C_A posto tra gli enti γ e δ .

§ 3. Se una linea $f_1(x, y) = C$ si compone di p pezzi, il primo dei quali ha soltanto r_1 punti interni al suo corso sopra C_A , il secondo r_2 , e così via, esistono $p + \sum_1^p r_s$ tratti della linea $f_1(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$, ciascuno dei

quali tende all'annullarsi della quantità positiva ε ad uno degli intervalli connessi, di cui si compone la varietà $f_1(x, y) = C$, avente ogni suo punto interno soltanto in $A - 0$.

Un'asserzione analoga va ripetuta rispetto alla linea

$$f_1(x, y) = \overline{C - \varepsilon} (\varepsilon > 0).$$

La varietà $f_1(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon}$ non contiene alcun tratto diverso dai $p + \sum_1^p r_s$ già indicati, di cui la proiezione sull'asse X od Y si mantenga a distanza finita dalla proiezione del complesso $f_1(x, y) = C$ all'indefinito diminuire della grandezza ε .

Se il complesso $f_1(x, y) = C$ non contiene dei punti isolati, la linea $f_1(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$ tende in egual maniera all'altra $f_1(x, y) = C$ tanto per $\varepsilon = +0$ che per $\varepsilon = -0$.

Se l'insieme $f_1(x, y) = \text{cost.}$ contenesse uno o più punti isolati, ciascuna linea $f_1(x, y) = \overline{C \pm \varepsilon}$ tenderebbe al medesimo per $\varepsilon = +0$ ed in maniera uniforme, fatta astrazione di questi ultimi.

Le proposizioni dei §§ 3-4 del numero precedente, nonchè il teorema enunciato nel successivo, reggono anche per la funzione $f_1(x, y)$, di cui ci stiamo occupando.

§ 4. Si suppone adesso che la funzione $f(s)$ possa essere dotata di un numero limitato di tratti tra loro sconnessi, in ognuno dei quali non muta di valore.

§ 5. Ad un pezzo connesso T di linea $f_1(x, y) = C$ corrisponde una parte dell'insieme $f_1(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$, la quale converge in egual grado all'elemento T per $\varepsilon = +0$ oppure per $\varepsilon = -0$. Soltanto nel caso che il tratto T appartenga generalmente parlando all'area $A - 0$, si potrà fare $\varepsilon = +0$, oppure $\varepsilon = -0$.

La differenza $f_1(x, y) - C$ è di segno contrario dalle due parti di un pezzo connesso di linea $f_1(x, y) = C$ sito in $A - 0$.

Il limite superiore e l'inferiore della $f_1(x, y)$ vengono conseguiti sopra il contorno C_A , il primo nella curva $C_A^{(1)}$, nell'altra $C_A^{(2)}$ il secondo.

Se il complesso $f_1(x, y) = \text{cost.}$ è sito in $A - 0$, generalmente parlando, nè contiene dei punti isolati, la linea $f_1(x, y) = \overline{C + \varepsilon}$ tende in egual grado all'altra $f_1(x, y) = C$ tanto per $\varepsilon = +0$ che per $\varepsilon = -0$.

I risultati dei §§ 4 e 5 del numero precedente reggono anche in questo caso.

Si definiscono gli infiniti della funzione $f_1(x, y)$.

N. IV.

§ 1. Giova l'occuparsi alquanto delle funzioni ad una variabile sempre crescenti e continue in un dato intervallo, le quali raggiungono gli stessi valori agli estremi del medesimo.

È illimitato il numero delle funzioni $f(x)$ sempre crescenti in ab ($a < b$), ciascuna delle quali raggiunge il valore A in a e B in b ($A < B$). Ed in particolare, non ha limite il numero di quelle che a due a due non si incontrano nel tratto $\overline{a+0} \overline{b-0}$.

Esistono tante funzioni $f(x)$ quante si vogliono, le quali si confondono in un numero limitato od illimitato di punti tra loro sconnessi.

Non ha fine il numero delle espressioni $f(x)$, le quali hanno a comune un numero assegnabile o meno di tratticelli disgiunti tra loro.

La varietà delle funzioni $f(x)$ non è egualmente continua.

Se x_1 è un punto del segmento $\overline{a+0} \overline{b+0}$, il limite superiore della grandezza $f(x_1)$ è B , l'inferiore è A .

Data una varietà continua $y = \rho(x)$, che fa parte dell'altra $y = f(x)$ si può determinare un insieme $y = \rho_t(x)$ ($t \geq 1$), appartenente al complesso $y = \rho(x)$ per modo, che sia soddisfatta una delle disequazioni

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [\rho_s(x_1 + \varepsilon_s) - \rho_s(x_1 - \varepsilon_s)] = C, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} [\rho_s(a + \varepsilon_s) - \rho_s(a)] = C$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\rho_s(b) - \rho_s(b - \varepsilon_s)] = C,$$

essendo $a < x_1 < b$, C una quantità maggiore dello zero, ed ε_s un infinitesimo positivo ognora decrescente.

§ 2. *Una varietà di funzioni $\lambda(x)$ dell'insieme $f(x)$ tale, che ne passi una soltanto per ciascun punto interno dell'area S limitata dalle due linee $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ del sistema $f(x)$, non si accosta indefinitamente ad una funzione discontinua nel tratto ab .*

Essendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ le funzioni di cui è parola nell'ultima proposizione, si costruisce la varietà $y = \lambda(x)$ tale, che per ciascun punto dell'area $S - 0$ esca soltanto una funzione $\lambda(x)$.

§ 3. Per facilitare le ricerche successive giovano i postulati che seguono.

I. *Se A è un'area a contorno completo, la quale viene incontrata in soli due punti da ogni parallela ad uno degli assi uscente da un suo punto*

interno, e se P è un punto della prima parte di C_A e Q uno della terza, si può determinare una corrispondenza univoca tra le due curve \overline{QP} e QP per modo, che due punti corrispondenti possono considerarsi come i termini di una linea sempre decrescente. Se poi il punto s_1 si muove da Q a P , il suo corrispondente s_1 va da Q a P sempre scostandosi dall'elemento Q .

Il riscontro indicato può farsi in quante maniere si vuole.

Suppongo altresì che le cose dette reggano anche se al punto P od all'altro Q od anche a ciascuno dei due si sostituisca un tratto del contorno, che indicherò ancora con P e con Q , posto tutto nella curva $C_A^{(1)}$ o nell'altra $C_A^{(2)}$ per ordine.

II. Ammetto poi che esistano in A tanti sistemi di linee quanti si vogliono sempre decrescenti e tali, che per ogni punto della superficie data esca una linea soltanto di ciascun sistema, la quale abbia i suoi termini in punti corrispondenti degli archi \overline{QP} e QP . La corrispondenza è quella di cui è cenno nel postulato I.

Ciascuna linea di ogni varietà considerata a sè sia continua.

N. V.

§ 1. Ogni varietà di linee R , di cui è parola nel postulato II del § 3 del numero precedente, è continua in maniera eguale.

Se $y = u(x)$, $= u_r(x)$ ($r \geq 1$) sono due linee del sistema R , di cui la prima è fissa, laddove un estremo della seconda converge all'omologo dell'altra, l'elemento $y = u_r(x)$ tende uniformemente all'altro $y = u(x)$.

§ 2. Giovandoci di quanto è detto nei §§ 3 e 4 del precedente numero, nonchè del primo di questo, torna facile costruire una funzione crescente secondo il verso positivo di amendue gli assi nell'area A , la quale consegua dei valori continui dati ad arbitrio, per quanto è possibile, lungo la curva C_A .

Come conseguenza della costruzione fatta si ha il teorema:

Esiste un numero illimitato di funzioni $f_1(x, y)$ crescenti secondo il verso positivo di amendue gli assi coordinati nell'area A , ciascuna delle quali assume gli stessi valori $f(s)$ dati ad arbitrio, per quanto è possibile, lungo la curva C_A , laddove la funzione $f(s)$ raggiunge al massimo due volte uno stesso valore.

Due funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ della specie indicata possono essere diverse l'una dall'altra in ciascun punto dell'area $A - 0$.

Questa asserzione risulta poi chiarita dal postulato, che è bene aggiungere ai due già enunciati.

Tra i sistemi, di cui è parola nel postulato II, esistono quanti si vogliono tali, che due linee qualunque contermini di due dei medesimi non abbiano alcun punto comune entro il loro corso, laddove ogni elemento di una di queste varietà è sovrapposto al corrispondente dell'altra, tolti, ben si intende, gli estremi.

Laonde:

Esistono tante funzioni $f_1(x, y)$, quante si vogliono, le quali non assumono lo stesso valore in uno stesso punto dell'area $A - 0$ e coincidono lungo C_A .

Si illustra la proposizione con un esempio.

§ 3 (*). *Il numero delle funzioni $f_1(x, y)$, le quali coincidono in uno o più punti entro A , è senza limite. Questi elementi possono essere distribuiti in svariate guise.*

La nostra asserzione viene chiarita da alcuni esempi.

Se $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono due funzioni sempre crescenti in A e se lungo $C_A p(x, y) - q(x, y) = 0$, mentre si possono determinare due punti in $A - 0$, in uno dei quali essa differenza è positiva e nell'altro negativa, gli elementi della superficie A in cui

$$p(x, y) - q(x, y) = 0$$

spezzano la connessione dell'area data.

§ 4 (**). *La varietà di funzioni $f_1(x, y)$ non è continua in maniera uniforme.*

Un gruppo di funzione $\varphi(x, y)$ scelto dall'altro $f_1(x, y)$ per modo, che due qualsivoglia non escano da uno stesso punto rispetto ad $A - 0$, è in egual modo continuo, quando formi lo spazio compreso da due funzioni determinate dell'insieme $f_1(x, y)$, che non si incontrino in $A - 0$.

Se $\varphi(x, y)$ è un insieme che appartiene all'altro $f_1(x, y)$ ed è disegualmente continuo, esiste in A almeno un punto a nelle estreme vicinanze del quale la $\varphi(x, y)$ non è quasi costante.

Il numero dei punti a, di cui si fu parola nel teorema precedente, può essere limitato od illimitato, e nell'ultima ipotesi essi potranno essere disposti in svariate guise.

(*) L'argomento di questo paragrafo è trattato in maniera assai imperfetta, però sufficiente al nostro intento.

(**) Anche la trattazione di questo paragrafo e del successivo lascia alquanto a desiderare, perchè troppa succinta. Essa è però bastevole pei nostri studi.

§ 5. Si costruisce una varietà di funzioni dotate di un numero illimitato di punti a disposti lungo una curva tracciata in $A - 0$.

§ 6. Essendo di nuovo A un'area, di cui il contorno C_A viene incontrato in soli due punti da una parallela qualsivoglia ad uno degli assi uscente da un suo punto interno, mi propongo di costruire una funzione sempre crescente in A , la quale vari ognora con l'arco s lungo C_A , nè abbia infiniti massimi e minimi sempre nel contorno.

Si risolve lo stesso problema nella ipotesi che la funzione da costruirsi possa essere dotata nella curva C_A di un numero limitato di tratti, in ognuno dei quali si mantiene costante.

N. VI.

§ 1. Essendo A un'area connessa qualsivoglia a distanza finita si divide il contorno C_A nelle quattro parti $C_A^{(1)}$, $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$, $C_A^{(4)}$. La linea $C_A^{(1)}$ è formata da quei rami semplici decrescenti che lasciano alla destra la superficie A , mentre nelle estreme vicinanze di un punto c interno ad uno dei medesimi non cade alcuna parte dell'ente A , che sia nel primo quadrante di c . Se d è un punto qualsivoglia sito entro un tratto parallelo ad uno degli assi appartenente al contorno C_A , e se *entro* al suo primo quadrante non si trova alcun punto dell'area A , che gli sia infinitamente vicino, esso tratto potrà computarsi alla linea $C_A^{(1)}$.

In modo analogo si definiscono gli enti $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$, $C_A^{(4)}$.

La decomposizione accennata può farsi in una maniera soltanto se il contorno C_A non contiene degli intervalli paralleli ad uno degli assi, in caso diverso in 2^p ($p \geq 1$) maniere, quando il simbolo p indichi il numero dei tratti indicati dell'elemento C_A .

Si adducono due esempi di decomposizione.

Due delle quattro parti $C_A^{(1)}$, $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$, $C_A^{(4)}$ possono anche mancare, non però ad indice pari l'una e dispari l'altra.

Due esempi.

Dirò quindi innanzi ramo semplice crescente o decrescente per ordine una curva connessa aperta, la quale mai decresce o cresce mentre la si percorre da un capo all'altro in guisa, che l'ascissa mai diminuisca, e ramo semplice primitivo una curva sempre crescente o decrescente oppure un tratto parallelo ad uno degli assi.

Fatta una delle 2^p decomposizioni possibili di un'area A , di cui il contorno C_A contiene p segmenti paralleli agli assi, in enti primitivi, si aggruppano i vari rami, laonde ogni curva $C_A^{(s)}$ ($s = 1, 2, 3, 4$) consta di uno o più rami semplici, ciascuno dei quali è connesso, che vengono indicati coi simboli ${}^{(s)}L_1, {}^{(s)}L_2, \dots, {}^{(s)}L_q$, ($s = 1, 2, 3, 4$) per ordine. — Un csempio.

§ 2. Sono manifesti i teoremi:

I. *La funzione $f_1(x, y)$ cresce ognora lungo un ramo semplice crescente tracciato nell'area qualsivoglia A ; adunque, in ogni elemento ${}^{(2)}L$, ed ${}^{(4)}L$, delle curve $C_A^{(2)}$ e $C_A^{(4)}$.*

II. *L'insieme dei punti della superficie A , in ciascuno dei quali la $f_1(x, y)$ ha un valore costante ($\geq m, \leq M$) è una linea non di necessità connessa e sempre decrescente all'aumentare dell'ascissa, di cui gli estremi sono sopra C_A , più un numero limitato (al caso nullo) di punti isolati (non siti in $A - 0$). L'ente $f_1(x, y) = C$ è rettificabile.*

Questa proposizione risulta manifesta decomponendo l'area A mediante delle parallele all'asse Y in più pezzi, ognuno dei quali sia connesso ed abbia per contorno una curva, la quale viene incontrata in soli due punti da una retta qualsivoglia uscente da un suo punto interno e parallela ad uno degli assi. Di più, la $f_1(x, y)$ non raggiunga più di due volte lo stesso valore lungo il contorno di ciascuno di questi pezzi, fatta astrazione da due tratti (≥ 0).

§ 3. Meritano attenzione i teoremi:

I. *In ogni punto o tratto di massimo relativo della $f(s)$ tutto nell'interno di un ramo primitivo della linea $C_A^{(1)}$ la $f_1(x, y)$ ha pure un massimo relativo, e nelle vicinanze di un minimo, sempre nelle stesse circostanze, essa si comporta come se l'area data venisse forata due volte nel suo contorno da una parallela qualsivoglia ad uno qualunque degli assi uscente da un suo punto interno.*

Una proposizione analoga può enunciarsi rispetto alla curva $C_A^{(3)}$.

II. *In ogni tratto, in cui la $f(s)$ si mantiene costante nè ha un massimo o un minimo, tutto entro un ramo primitivo della linea $C_A^{(1)}$ o $C_A^{(3)}$, la $f_1(x, y)$ si comporta come se l'ente A venisse incontrato due volte soltanto nella curva C_A da una parallela qualsivoglia ad una delle rette $xy = 0$ per un suo punto interno.*

III. *I massimi e minimi relativi della funzione $f_1(x, y)$ cadono soltanto nei massimi e minimi della $f(s)$ (punti o tratti), quando sieno del tutto nell'interno di un ramo primitivo della curva $C_A^{(1)}$ oppure $C_A^{(3)}$ ordinatamente. I tratti possono però avere un estremo od anche amendue a comune*

col ramo rispettivo, purchè questi possa considerarsi come appartenente ad un'area B , di cui il contorno C_B viene incontrato in soli due punti dalla solita parallela, laddove la linea C_B contiene un pezzo di C_A , nel cui interno cade uno od amendue gli estremi del ramo primitivo per ordine. In modo analogo si dica di un massimo o minimo della $f(s)$, il quale è in un termine di un elemento primitivo della curva $C_A^{(1)} + C_A^{(3)}$.

IV. Il numero delle linee $f_1(x, y) = C$, ciascuna delle quali contiene dei punti isolati, è limitato.

V. È altresì assegnabile il numero delle linee $f_1(x, y) = \text{cost.}$, le quali hanno dei tratti a comune col contorno.

VI. Il limite superiore ed inferiore della funzione $f_1(x, y)$ vengono raggiunti ordinatamente nelle curve $C_A^{(1)}$ e $C_A^{(3)}$.

Se scomponiamo l'area data mediante delle parallele all'asse Y nella maniera indicata nel paragrafo precedente, avvertiamo tosto che in ciascun elemento così ottenuto reggono le proposizioni enunciate nei §§ 3, 4 e 5 del N. II.

Ricerche sulla deformazione ed i fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino.

(Di CARLO SOMIGLIANA, a Pavia.)

Lo studio delle deformazioni elastiche dei corpi cristallini, studio fatto finora soltanto in un numero assai limitato di casi, presenta notevole interesse non solo per sè, ma anche per lo studio di altre proprietà fisiche di questi corpi, le quali strettamente si collegano colle proprietà elastiche. Tali sono quelle a cui sono dovuti i fenomeni termoelettrici e piezoelettrici.

Il prof. VOIGT in un importante lavoro, recentemente pubblicato (*), generalizzando concetti teorici dovuti principalmente a THOMSON, ha sviluppato una teoria di questi fenomeni, la quale appunto presuppone risolto il problema della deformazione e conduce a molti risultati in perfetto accordo colla esperienza. I problemi di elasticità, nei quali il prof. VOIGT applica più particolarmente la sua teoria, sono stati da esso studiati in una precedente Memoria (**), e sono, si può dire, una generalizzazione del noto problema di DE SAINT-VENANT, in quanto egli considera un corpo cilindrico sulle cui basi sono applicate forze e momenti dati, mentre la superficie laterale è libera.

Nel presente lavoro io ho cercato le soluzioni particolari più semplici del problema dell'equilibrio nel caso, in certo modo opposto, in cui le basi sono libere da forze, e queste sono applicate invece sulla superficie laterale. Questo problema è analogo a quello trattato da CLEBSCH nei §§ 39-46 della

(*) VOIGT, *Allgemeine Theorie der piezo- und pyroelectrischen Erscheinungen an Krystallen*. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. XXXVI, 1890.

(**) VOIGT, *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystallen*. Id. id. Bd. XXXIV, 1887.

Theorie der Elasticität pel caso della isotropia, e generalizzato da DE SAINT-VENANT al caso della isotropia trasversale (*).

Ai risultati ottenuti ho applicato in seguito la teoria di VOIGT; questa è fondata sulla ipotesi che le variazioni dei momenti elettrici, prodotte dalla deformazione in un cristallo termoelettrico o piezoelettrico, siano funzioni lineari delle sei componenti di deformazione. L'azione elettrica esterna, che ne deriva, può quindi essere studiata mediante la funzione potenziale corrispondente a queste variazioni. Nei problemi da me trattati, ho potuto determinare per la funzione potenziale certe espressioni, abbastanza semplici, formate linearmente con funzioni circolari e certi integrali definiti, mediante le quali il modo di variare di questa funzione si può studiare sotto certi rapporti senza grandi difficoltà, e si può quindi dedurre una previsione teorica dei risultati, a cui condurrebbe l'esperienza.

Siccome avrò frequentemente occasione di richiamare le due memorie di VOIGT, precedentemente citate, indicherò, per brevità, i *Theoretische Studien* con (VOIGT, Mem. I), e la *Allgemeine Theorie* con (VOIGT, Mem. II).

PARTE PRIMA.

§ 1.

Consideriamo un cilindro retto cristallino, che supporremo riferito ad un sistema di assi ortogonali OX , OY , OZ , in modo che le generatrici siano parallele all'asse OZ , e le basi cadano sui piani $z = \pm l$. Se ammettiamo che sopra queste non agiscano forze ed indichiamo le componenti di pressione elastica colla notazione di KIRCHHOFF, X_x , Y_y , Z_z , Y_x , Z_x , X_y , per $z = \pm l$ dovremo avere:

$$Z_x = 0 \quad Z_y = 0 \quad Z_z = 0. \quad (1)$$

Seguendo l'esempio di CLEBSCH, ci proporremo di trovare dei casi semplici di equilibrio, supponendo che queste equazioni siano soddisfatte, non solo sulle basi, ma in tutto il corpo.

(*) CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Trad. par M. DE SAINT-VENANT, Chap. III.

avremo così, poichè Δ non può essere zero,

$$\Delta \frac{\partial w}{\partial x} = \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} & L \\ c_{43} & c_{44} & M \\ c_{53} & c_{54} & N \end{vmatrix} \quad \Delta \frac{\partial w}{\partial y} = \begin{vmatrix} c_{33} & L & c_{35} \\ c_{43} & M & c_{45} \\ c_{53} & N & c_{55} \end{vmatrix} \quad \Delta \frac{\partial w}{\partial z} = \begin{vmatrix} L & c_{34} & c_{35} \\ M & c_{44} & c_{45} \\ N & c_{54} & c_{55} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Le tre equazioni indefinite, a cui devono soddisfare in generale u , v , w si riducono, a cagione delle (1), a due sole, dalle quali noi potremo supporre eliminata la w mediante le formole precedenti. Supponendo che non esistano forze di massa, si hanno così due equazioni lineari omogenee di 2.° ordine, a cui devono soddisfare u , v :

$$\frac{\partial(X_x)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial(Y_x)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_y)}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

dove colle parentesi indichiamo che dalle componenti di pressione X_x , Y_y , X_y è stata eliminata la w .

Quando per u , v si prendono due integrali di queste equazioni, perchè sia possibile determinare w mediante le (3) è necessario che i secondi membri di queste equazioni, moltiplicati per dx , dy , dz rispettivamente e sommati, diano un differenziale esatto. Scrivendo le condizioni perchè ciò avvenga, otteniamo tre nuove equazioni lineari, omogenee di 2.° ordine per le funzioni u , v . Avremo così in tutto cinque equazioni lineari, omogenee di 2.° ordine con coefficienti costanti, a cui dovranno soddisfare le funzioni u , v :

$$H_1 = 0 \quad H_2 = 0 \quad H_3 = 0 \quad H_4 = 0 \quad H_5 = 0. \quad (5)$$

Ora noi possiamo proporci di cercare se è possibile soddisfare a questo sistema di equazioni, prendendo per u , v , w funzioni razionali intere delle variabili x , y , z .

Prendendo per u , v due funzioni lineari omogenee φ_1 , ψ_1 , le (5) risultano tutte soddisfatte, qualunque siano i coefficienti di queste funzioni. Prendendo invece due funzioni omogenee di 2.° grado, $u = \varphi_2$, $v = \psi_2$, le (5) danno 5 relazioni fra i 12 coefficienti di φ_2 , ψ_2 , e quindi potranno in generale essere soddisfatte lasciando in φ_2 , ψ_2 sette coefficienti arbitrari.

Ponendo poi $u = \varphi_3$, $v = \psi_3$, essendo φ_3 , ψ_3 , funzioni omogenee di 3.° grado, avremo dalle (5) 15 relazioni fra i 20 coefficienti di φ_3 , ψ_3 ; quindi rimarranno in questo caso 5 coefficienti arbitrari.

Finalmente per $u = \varphi_4$, $v = \psi_4$ otterremo dalle (5) 30 equazioni fra i 30

coefficienti di queste funzioni, che, essendo omogenee, non potranno in generale essere soddisfatte.

È facile vedere che parimenti con funzioni di grado superiore al quarto non è possibile soddisfare al sistema (5) senza supporre relazioni speciali fra le costanti che entrano nelle equazioni. Riassumendo possiamo quindi dire che *possono esistere casi di equilibrio, in cui sono soddisfatte le (2), e le u , v (e quindi anche la w) sono funzioni razionali intere di grado non superiore al terzo.*

Noi studieremo queste soluzioni speciali delle equazioni di equilibrio, introducendo però un'altra limitazione. Col procedimento indicato otterremo degli integrali pei quali le componenti di pressione X_x , Y_y , X_y , saranno in generale funzioni di z ; quindi le forze che si dovranno supporre applicate sulla superficie laterale del cilindro per mantenere l'equilibrio potranno pure dipendere da questa variabile. Noi escluderemo questa possibilità, supponendo che le X_x , Y_y , X_y siano *anche nell'interno del corpo* indipendenti da z . Allora tutte le componenti di pressione saranno indipendenti da questa variabile e quindi tali saranno anche le componenti di deformazione.

Poniamo ora:

$$\left. \begin{aligned} u &= U + z\left(f_1 - hy - \frac{1}{2}g_1z\right) \\ v &= V + z\left(f_2 + hx - \frac{1}{2}g_2z\right) \\ w &= W + z(g_1x + g_2y + g_3), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ove U , V , W sono funzioni delle variabili x , y e g_1 , g_2 , g_3 , f_1 , f_2 , h sono costanti; le sei componenti di deformazione corrispondenti a queste espressioni per u , v , w risultano indipendenti da z ; difatti si ha:

$$\left. \begin{aligned} x_x &= \frac{\partial U}{\partial x} & y_z &= \frac{\partial W}{\partial y} + f_2 + hx \\ y_y &= \frac{\partial V}{\partial y} & z_x &= \frac{\partial W}{\partial x} + f_1 - hx \\ z_z &= g_1x + g_2y + g_3 & x_y &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

ed è facile dimostrare (VOIGT, Mem. I) che le (6) sono le espressioni più generali per le quali ha luogo questa proprietà.

La terza delle equazioni (3) si riduce in questo caso ad una relazione lineare fra le derivate delle funzioni U , V che può essere scritta:

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial x} + D \frac{\partial V}{\partial y} + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0, \quad (7)$$

ove A , B , C , D , c_1 , c_2 , c_3 sono costanti formate colle c_{ih} , g_1 , g_2 , g_3 , f_1 , f_2 , h .

Le prime due equazioni (3) possono servire ad esprimere le derivate della W mediante le derivate delle due funzioni U , V , e funzioni lineari di x , y . Eliminando quindi fra esse la W otteniamo una equazione a derivate parziali di 2.° ordine per le funzioni U , V che possiamo scrivere:

$$K_1 + k_1 = 0,$$

ove K_1 è funzione lineare omogenea con coefficienti costanti delle derivate seconde di U , V e k_1 una costante.

Le equazioni (4) ci dànno altre due equazioni della forma stessa:

$$K_2 + k_2 = 0 \quad K_3 + k_3 = 0.$$

La equazione (7) può essere scritta:

$$\frac{\partial}{\partial x}(AU + CV) + \frac{\partial}{\partial y}(BU + DV) + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0,$$

e quindi le espressioni più generali per U , V , che soddisfanno ad essa, si otterranno ponendo:

$$\left. \begin{aligned} AU + CV &= \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 + 2\delta_1x + 2\delta_2y + \delta_3 - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ BU + DV &= \beta_{11}x^2 + 2\beta_{12}xy + \beta_{22}y^2 + 2\varepsilon_1x + 2\varepsilon_2y + \varepsilon_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ove Ω è una funzione arbitraria e α_{11} , α_{12} , ..., β_{11} , β_{12} , ... sono costanti, le quali debbono soddisfare alle tre relazioni:

$$\alpha_{11} + \beta_{12} + c_1 = 0 \quad \alpha_{12} + \beta_{22} + c_2 = 0 \quad \delta_1 + \varepsilon_2 + c_3 = 0.$$

Se ora sostituiamo le espressioni di U , V , che risultano dalle due relazioni precedenti, nelle equazioni:

$$K_1 + k_1 = 0 \quad K_2 + k_2 = 0 \quad K_3 + k_3 = 0, \quad (9)$$

otteniamo tre equazioni a derivate parziali di 3.° ordine, a cui dovrà soddi-

sfare la funzione Ω , le quali saranno della forma seguente:

$$a_{0i} + a_{1i} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^3} + a_{2i} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x^2 \partial y} + a_{3i} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y^2} + a_{4i} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y^3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

ove le a sono costanti. Se poniamo:

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3,$$

(ove Ω_i è una funzione omogenea, razionale, intera di grado i nelle variabili x, y) e sostituiamo questa espressione nelle tre equazioni precedenti, i coefficienti di $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ scompaiono e si ottengono tre relazioni lineari fra i quattro coefficienti di Ω_3 . Quindi $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ possono essere prese arbitrariamente, ed in Ω_3 , invece si avrà una sola costante arbitraria. Con funzioni di grado superiore al 3.° non è possibile in generale di soddisfare al sistema di equazioni che consideriamo.

Ora U, V sono formate (8) con funzioni di 2.° grado nelle x, y e colle derivate di Ω ; quindi possiamo concludere che *le soluzioni più generali, razionali, intere del nostro problema si otterranno prendendo per U, V e quindi anche per W , funzioni di 2.° grado nelle x, y .*

Vi è un caso, abbastanza generale, in cui le tre equazioni (9) si riducono a due sole ed allora sono possibili anche soluzioni di 3.° grado. Se supponiamo che il piano OXY sia un piano di simmetria elastica pel corpo, si ha:

$$c_{14} = c_{24} = c_{15} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0,$$

e le equazioni (2), quando per u, v, w si prendono le espressioni (6), divengono:

$$c_{13} \frac{\partial U}{\partial x} + c_{23} \frac{\partial V}{\partial y} + c_{33}(g_1 x + g_2 y + g_3) + c_{36} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} + f_2 + h x = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial x} + f_1 - h x = 0,$$

di cui le due ultime determinano immediatamente W ; da esse infatti risulta $h = 0$, e, trascurando una costante addittiva,

$$W = -f_1 x - f_2 y.$$

Resta quindi a considerarsi soltanto la prima, la quale è l'equazione, a cui si riduce la (7), nel caso particolare che consideriamo. Non vi è quindi più da tener conto dell'equazione $K_1 + k_1 = 0$, e dalle equazioni (9) basterà considerare le ultime due,

Un tale sistema ammette un integrale razionale intero della forma

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4,$$

dove $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$, sono completamente arbitrarie; Ω_3 contiene due coefficienti arbitrari ed Ω_4 uno. Sono quindi possibili in questo caso anche soluzioni di 3.° grado.

Noi studieremo ora separatamente le soluzioni di 1.°, 2.° e 3.° grado, di cui abbiamo visto la possibilità.

Richiamiamo le condizioni ai limiti che servono a determinare completamente i problemi che dobbiamo considerare. Se indichiamo con $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ le componenti della forza applicata nel punto (x, y, z) della superficie laterale del cilindro (riferite all'unità di superficie), sopra questa superficie dovrà essere

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) \\ \bar{Y} &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) \\ \bar{Z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ove n indica la normale diretta verso l'interno. Le forze che agiscono sulla superficie laterale devono quindi essere normali all'asse OZ , ed indipendenti da z .

Indicando con $d\sigma$ l'elemento superciale di una sezione normale del cilindro, dalle equazioni precedenti e dalle (4) si ricava

$$\int \bar{X} d\sigma = 0 \quad \int \bar{Y} d\sigma = 0 \quad \int (y \bar{X} - x \bar{Y}) d\sigma = 0,$$

ove gli integrali sono estesi a tutta la sezione normale. Queste condizioni devono essere soddisfatte, perchè il cilindro sia in equilibrio sotto l'azione delle forze \bar{X}, \bar{Y} quando si considera come rigido.

Riguardo al segno delle componenti di pressione ricordiamo che, se n indica la normale ad un elemento di superficie $d\sigma$, diretta da quella parte di $d\sigma$ ove giace il corpo, si suole ritenere come positiva la pressione elastica P_n esercitata sopra $d\sigma$, quando la direzione secondo cui agisce P_n fa un angolo acuto colla normale n .

Finalmente per stabilire le condizioni che fissano nello spazio la posizione del cilindro, considerato come rigido, riterremo che l'origine delle coordinate non subisca spostamenti, cioè:

$$u = v = w = 0 \quad \text{per} \quad x = y = z = 0,$$

e quindi anche

$$U = 0 \quad V = 0 \quad W = 0;$$

inoltre che il cilindro non possa avere movimenti di rotazione attorno a questo punto. Per questo basta porre, per $x = z = y = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

ossia

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

od' anche: per $x = y = 0, z = l$,

$$u = 0, \quad v = 0;$$

e, per $x = y = z = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Queste condizioni equivalgono alle seguenti:

$$f_1 = \frac{1}{2} g_1 l \quad f_2 = \frac{1}{2} g_2 l; \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{per } x = y = 0.$$

Nell'un caso e nell'altro le f_1, f_2 risultano determinate; noi non ci occuperemo di queste costanti, ritenendole determinate dalle condizioni precedenti.

§ 2. Applicazioni.

I.

Supponiamo le u, v, w funzioni lineari delle coordinate e precisamente poniamo:

$$u = \alpha x + \beta y \quad v = \alpha' x + \beta' y \quad w = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \quad (11)$$

Queste formole sono un caso speciale delle (6). Le componenti di deformazione e di pressione risultano costanti; quindi, oltre le condizioni (1), potremo porre le seguenti:

$$X_x = p \quad Y_y = q \quad X_y = r,$$

ove p, q, r sono costanti arbitrariamente date. Per l'immobilità del cilindro, considerato come rigido, basterà aggiungere una condizione, ad es.

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \beta - \alpha' = 0,$$

Le componenti di deformazione divengono

$$x_x = \alpha \quad y_y = \beta' \quad z_z = \gamma'' \quad y_z = \beta'' \quad z_x = \alpha'' \quad x_y = 2\beta,$$

quindi le condizioni poste per le componenti di pressione ci danno le seguenti equazioni lineari per determinare le costanti delle (11):

$$c_{11}\alpha + c_{12}\beta' + c_{13}\gamma'' + c_{14}\beta'' + c_{15}\alpha'' + 2c_{16}\beta = -p$$

$$c_{21}\alpha + c_{22}\beta' + c_{23}\gamma'' + c_{24}\beta'' + c_{25}\alpha'' + 2c_{26}\beta = -q$$

$$c_{31}\alpha + c_{32}\beta' + c_{33}\gamma'' + c_{34}\beta'' + c_{35}\alpha'' + 2c_{36}\beta = 0$$

$$c_{41}\alpha + c_{42}\beta' + c_{43}\gamma'' + c_{44}\beta'' + c_{45}\alpha'' + 2c_{46}\beta = 0$$

$$c_{51}\alpha + c_{52}\beta' + c_{53}\gamma'' + c_{54}\beta'' + c_{55}\alpha'' + 2c_{56}\beta = 0$$

$$c_{61}\alpha + c_{62}\beta' + c_{63}\gamma'' + c_{64}\beta'' + c_{65}\alpha'' + 2c_{66}\beta = -r.$$

Da queste equazioni risolvendo ed introducendo le costanti s_{ih} , che VOIGT chiama *moduli di elasticità* (Mem. II, pag. 28) otteniamo:

$$\alpha = -(s_{11}p + s_{21}q + s_{61}r) \quad \beta' = -(s_{14}p + s_{24}q + s_{64}r)$$

$$\beta' = -(s_{12}p + s_{22}q + s_{62}r) \quad \alpha'' = -(s_{15}p + s_{25}q + s_{65}r).$$

$$\gamma'' = -(s_{13}p + s_{23}q + s_{63}r) \quad \alpha = \beta' = -\frac{1}{2}(s_{16}p + s_{26}q + s_{66}r),$$

e restano così determinate tutte le costanti delle (11).

a) Supponiamo $r = 0$, $p = q$; sulla superficie laterale del cilindro avremo (10):

$$\bar{X} = p \cos(n, x) \quad \bar{Y} = p \cos(n, y),$$

e otteniamo così la soluzione generale della *deformazione di un cilindro retto cristallino, di sezione arbitraria, sottoposto all'azione di una pressione normale costante sulla superficie laterale.*

b) Supponiamo $r = 0$, e che la sezione dal cilindro sia un rettangolo, i cui lati siano $x = \pm a$, $y = \pm b$; avremo:

$$\text{sulle faccie } x = \pm a \quad \bar{X} = \mp p \quad \bar{Y} = 0$$

$$\text{sulle faccie } y = \pm b \quad \bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = \mp q.$$

Le formole ottenute risolvono quindi in questo caso il problema della *deformazione di un cilindro retto, cristallino a base rettangolare sottoposto all'azione di due pressioni normali costanti sulle due coppie di faccie opposte.*

c) Supponiamo $p = q = 0$, e la sezione rettangolare come nel caso precedente; avremo:

$$\begin{aligned} \text{sulle faccie } x = \pm a: & \quad \bar{X} = 0 & \quad \bar{Y} = \mp r \\ \text{sulle faccie } y = \pm b: & \quad \bar{X} = \mp r & \quad \bar{Y} = 0, \end{aligned}$$

e otteniamo quindi la *deformazione del prisma*, considerato nel caso precedente, sottoposto all'azione di una forza tangenziale costante sulla superficie laterale. La direzione di questa forza è tale che essa agisce sulle due coppie di faccie opposte, come due coppie di verso contrario.

d) Se finalmente il cilindro è circolare, indicando con θ l'angolo che un piano passante per l'asse OZ fa col piano OZX , avremo sulla superficie laterale

$$-\bar{X} = p \cos \theta + r \sin \theta \quad -\bar{Y} = r \cos \theta + q \sin \theta,$$

e quindi una forza in generale variabile di direzione ed intensità, con una legge che è assai facile determinare.

II.

Supponiamo che le U , V , W nelle (6) siano funzioni di 2.° grado, e precisamente poniamo:

$$\left. \begin{aligned} 2U &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \\ 2V &= \alpha' x^2 + 2\beta' xy + \gamma' y^2 \\ 2W &= \alpha'' x^2 + 2\beta'' xy + \gamma'' y^2 + 2\delta'' x + 2\varepsilon'' y. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Nelle u , v , w avremo quindi queste 11 costanti α , β , ..., ε'' ed inoltre le g_1 , g_2 , g_3 , h , che dovremo determinare in modo da soddisfare le equazioni che abbiamo stabilito, mentre le f_1 , f_2 risultano determinate, come si è visto, dalle condizioni che fissano la posizione del cilindro nello spazio.

Le componenti di deformazione (6') divengono in questo caso:

$$\begin{aligned} x_x &= \alpha x + \beta y & y_z &= \beta'' x + \gamma'' y + \varepsilon'' + f_2 + h x \\ y_y &= \beta' x + \gamma' y & z_x &= \alpha'' x + \beta'' y + \delta'' + f_1 - h y \\ z_z &= g_1 x + g_2 y + g_3 & x_y &= (\alpha' + \beta) x + (\beta' + \gamma) y. \end{aligned}$$

Se quindi supponiamo:

$$g_3 = 0 \quad \varepsilon'' = -f_2 \quad \delta'' = -f_1,$$

esse risulteranno funzioni lineari omogenee delle x, y , e tali quindi saranno anche le componenti di pressione, per cui potremo porre:

$$\begin{aligned} X_x &= A_{11}x + A_{12}y & Y_x &= A_{41}x + A_{42}y \\ Y_y &= A_{21}x + A_{22}y & Z_x &= A_{51}x + A_{52}y \\ Z_z &= A_{31}x + A_{32}y & X_y &= A_{61}x + A_{62}y, \end{aligned}$$

dove le A_{ih} sono costanti formate colle costanti di elasticità c_{ih} e le 12 costanti indeterminate delle formole precedenti. Le loro espressioni si possono dedurre dalla tabella seguente:

	$-c_{i1}$	$-c_{i2}$	$-c_{i3}$	$-c_{i4}$	$-c_{i5}$	$-c_{i6}$	
A_{i1}	α	β	g_1	$\beta'' + h$	α''	$\alpha' + \beta$	$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$
A_{i2}	β	γ'	g_2	γ'	$\beta'' - h$	$\beta' + \gamma$	

dalla quale A_{ih} si ottiene facendo la somma dei prodotti delle costanti $-c_{i1}, -c_{i2}, \dots$ della prima linea per le corrispondenti costanti della h -esima.

Le due equazioni (4) dell'equilibrio portano che fra le costanti A_{ih} sussistano le due relazioni:

$$A_{11} + A_{62} = 0 \quad A_{61} + A_{22} = 0, \quad (13)_a$$

e le (1), per le nostre convenzioni, danno:

$$A_{31} = A_{32} = 0 \quad A_{41} = A_{42} = 0 \quad A_{51} = A_{52} = 0. \quad (13)_b$$

Da ciò segue che per le tre componenti di pressione che non sono zero si avrà:

$$X_x = A_{11}x + A_{12}y \quad Y_y = A_{21}x + A_{22}y \quad X_y = -A_{22}x - A_{11}y.$$

Le condizioni per l'immobilità del cilindro non ci danno altre relazioni, oltre quelle che determinano f_1, f_2 .

Supponiamo ora fissati arbitrariamente i valori delle quattro costanti $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$; uguagliando le espressioni delle A_{ih} , che risultano dalla tabella, alle quattro costanti date, otteniamo un sistema di 4 equazioni lineari nei coefficienti α, β, \dots, h , le quali insieme alle 8 equazioni (13)_a (13)_b che sono della stessa forma, ci danno in tutto un sistema di 12 equazioni lineari,

quanti appunto sono i coefficienti indeterminati che compaiono nelle nostre formole.

Quando avremo determinato questi coefficienti, otterremo una deformazione del cilindro, nella quale tre delle componenti di pressione Z_x, Y_y, Z_x , sono nulle; X_x , ed Y_y sono funzioni lineari, omogenee arbitrariamente date, $ax + by, cx + dy$ e X_y ha per valore $-dx - ay$.

Per eseguire ora effettivamente la determinazione dei coefficienti, osserviamo che le 12 equazioni da risolversi si possono scomporre in due gruppi di 6; il primo gruppo:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a & A_{21} &= c & A_{31} &= 0 \\ A_{41} &= 0 & A_{51} &= 0 & A_{61} &= -d, \end{aligned}$$

è un sistema di equazioni lineari nei 6 coefficienti

$$\alpha, \quad \beta', \quad g_1, \quad \beta'' + h, \quad \alpha'', \quad \alpha' + \beta,$$

che ha per determinante il discriminante del potenziale di elasticità, che non è mai zero; esso determina quindi i valori di questi 6 coefficienti. Il secondo gruppo:

$$\begin{aligned} A_{12} &= b & A_{22} &= d & A_{32} &= 0 \\ A_{42} &= 0 & A_{52} &= 0 & A_{62} &= -a, \end{aligned}$$

analogamente determina le 6 costanti

$$\beta, \quad \gamma', \quad g_2, \quad \gamma'', \quad \beta' - h, \quad \beta' + \gamma.$$

La conoscenza di queste 12 costanti basta per ottenere i valori di tutte le costanti del nostro problema. I valori che così si trovano sono i seguenti:

$$\begin{aligned} -\alpha &= s_{11}a + s_{21}c - s_{61}d, & -\beta &= s_{11}b + s_{21}d - s_{61}a \\ -\beta' &= s_{12}a + s_{22}c - s_{62}d, & -\gamma' &= s_{12}b + s_{22}d - s_{62}a \\ -g_1 &= s_{13}a + s_{23}c - s_{63}d, & -g_2 &= s_{13}b + s_{23}d - s_{63}a \\ -\alpha'' &= s_{15}a + s_{25}c - s_{65}d, & -\gamma'' &= s_{14}b + s_{24}d - s_{64}a \\ -2\beta'' &= (s_{14} - s_{65})a + s_{15}b + s_{24}c + (s_{25} - s_{64})d \\ -2h &= (s_{14} + s_{65})a - s_{15}b + s_{24}c - (s_{25} + s_{64})d \\ -\alpha' &= 2s_{16}a - s_{11}b + s_{26}c - (s_{21} + s_{66})d \\ -\gamma &= -(s_{21} + s_{63})a + s_{16}b - s_{22}c + 2s_{26}d. \end{aligned}$$

Le componenti della forza che, applicata sulla superficie laterale del cilindro, produce la deformazione, ora determinata, sono date (10) dalle formole:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= (ax + by)\cos(n, x) - (dx + ay)\cos(n, y) \\ \bar{Y} &= -(dx + ay)\cos(n, x) + (cx + dy)\cos(n, y).\end{aligned}$$

Se ora supponiamo che il cilindro sia circolare, di raggio R , abbiamo sulla superficie laterale

$$\begin{aligned}x &= R\cos\theta & \cos(n, x) &= -\cos\theta \\ y &= R\sin\theta & \cos(n, y) &= -\sin\theta,\end{aligned}$$

e le componenti della forza superficiale divengono:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= p\cos 2\theta + r\sin 2\theta \\ \bar{Y} &= s\cos 2\theta + q\sin 2\theta,\end{aligned}$$

dove si è posto:

$$p = -Ra \quad r = -\frac{1}{2}R(b-d) \quad s = Rd \quad q = -\frac{1}{2}R(c-a),$$

e quindi p, r, s, q possono essere considerate come quattro costanti arbitrarie, al pari di a, b, c, d .

Se consideriamo il problema generale della deformazione di un cilindro retto circolare per l'azione di forze costanti lungo le generatrici e normali a queste, applicate sulla superficie laterale, per espressioni generali delle componenti di queste forze potremo prendere:

$$\bar{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \bar{Y} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta),$$

supponendo che esse siano sviluppabili in serie di FOURIER. La soluzione generale si potrà quindi pensare composta di tante soluzioni particolari

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n,$$

ciascuna delle quali u_n, v_n, w_n risolve il problema dell'equilibrio nel caso in cui

$$\bar{X} = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad \bar{Y} = c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta.$$

Possiamo allora dire che *gli integrali che abbiamo trovato danno una di queste soluzioni particolari, e precisamente quella corrispondente ad $n = 2$.*

Potremo poi scomporre anche questa soluzione in altre quattro, supponendo successivamente nulle tre delle costanti p, r, s, q ; abbiamo così quattro soluzioni speciali:

$$X = p \cos 2\theta \quad Y = 0 \quad (e) \quad \bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = s \cos 2\theta \quad (g)$$

$$\bar{X} = r \sin 2\theta \quad Y = 0 \quad (f) \quad \bar{X} = 0 \quad \bar{Y} = q \sin 2\theta. \quad (h)$$

Nei casi (f), (h) le forze superficiali sono nulle lungo le 4 generatrici intersezione della superficie cilindrica coi piani OZX, OZY ed acquistano valori massimi e minimi rispettivamente $(+r, -r, \text{oppure } +q, -q)$ lungo le due coppie di generatrici che sono intersezioni dei piani bisettori degli angoli dei piani precedenti. Nei casi (e), (g) reciprocamente le forze sono nulle lungo le generatrici di questa seconda quaderna, e massime o minime lungo le generatrici della prima.

III.

Consideriamo infine il caso in cui, essendo il piano OXY un piano di simmetria, si possono avere soluzioni di 3.° grado. Noi porremo:

$$\left. \begin{aligned} 3U &= \alpha x^3 + 3\beta x^2y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3 \\ 3V &= \alpha' x^3 + 3\beta' x^2y + 3\gamma' xy^2 + \delta' y^3, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

e, come abbiamo visto, si avrà:

$$W = -f_1x - f_2y.$$

Per le componenti di deformazione troviamo:

$$x_x = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \quad y_z = 0$$

$$y_y = \beta' x^2 + 2\gamma' xy + \delta' y^2 \quad z_x = 0$$

$$z_z = g_1x + g_2y + g_3 \quad x_y = (\alpha' + \beta)x^2 + 2(\beta' + \gamma)xy + (\gamma' + \delta)y^2.$$

Le condizioni $Y_z = 0, Z_x = 0$ sono soddisfatte, e l'equazione $Z_z = 0$ diviene:

$$c_{13}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) + c_{22}(\beta' x^2 + 2\gamma' xy + \delta' y^2) + c_{33}(g_1x + g_2y + g_3) + c_{16}[(\alpha' + \beta)x^2 + 2(\beta' + \gamma)xy + (\gamma' + \delta)y^2] = 0,$$

da cui ricaviamo $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, e quindi anche $w = W$, ed inoltre $z_z = 0$;

di più dovremo porre:

$$\left. \begin{aligned} c_{13}\alpha + c_{23}\beta' + c_{36}(\alpha' + \beta) &= 0 \\ c_{13}\beta + c_{23}\gamma' + c_{36}(\beta' + \gamma) &= 0 \\ c_{13}\gamma + c_{23}\delta' + c_{36}(\gamma' + \delta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Per le tre componenti di pressione che non sono zero, possiamo scrivere:

$$X_x = B_{11}x^2 + 2B_{12}xy + B_{13}y^2$$

$$Y_y = B_{21}x^2 + 2B_{22}xy + B_{23}y^2$$

$$X_y = B_{61}x^2 + 2B_{62}xy + B_{63}y^2.$$

dove i valori delle B_{ih} si hanno dalla seguente tabella:

	- c_{i1}	- c_{i2}	- c_{i6}	
B_{i1}	α	β'	$\alpha' + \beta$	$i = 1, 2, 6,$
B_{i2}	β	γ'	$\beta' + \gamma$	
B_{i3}	γ	δ'	$\gamma' + \delta$	

facendo la somma dei prodotti delle costanti $-c_{ih}$ per le corrispondenti costanti delle tre linee orizzontali.

Le due equazioni indefinite dell'equilibrio ci danno le seguenti relazioni fra le B_{ih}

$$\left. \begin{aligned} B_{11} + B_{62} &= 0 & B_{61} + B_{22} &= 0 \\ B_{12} + B_{63} &= 0 & B_{62} + B_{23} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

le quali, insieme alle (15), costituiscono un sistema di 7 equazioni lineari omogenee nelle 8 costanti delle (14), che si devono determinare; da esse si possono quindi ricavare i valori di queste costanti all'infuori di un fattore comune arbitrario.

Le condizioni per l'immobilità del cilindro non ci danno nulla oltre la determinazione di f_1, f_2 .

Tenendo conto delle (16) le espressioni delle componenti di pressione X_x, Y_y, Z_y possono essere scritte:

$$X_x = B_{11}x^2 + 2B_{12}xy + B_{22}y^2$$

$$Y_y = B_{21}x^2 + 2B_{22}xy + B_{11}y^2$$

$$X_y = -B_{22}x^2 - 2B_{11}xy - B_{12}y^2.$$

Per determinare ora le costanti α, β, \dots poniamo

$$\alpha' + \beta = \varepsilon \quad \gamma' + \delta = \varepsilon',$$

e scriviamo le equazioni (16) nella forma seguente:

$$\left. \begin{aligned} c_{11}\alpha + c_{16}\varepsilon &= - \{ (c_{12} + c_{66})\beta' + c_{61}\beta + c_{62}\gamma' + c_{66}\gamma \} = - H_1 \\ c_{61}\alpha + c_{66}\varepsilon &= - \{ (c_{62} + c_{26})\beta' + c_{21}\beta + c_{22}\gamma' + c_{26}\gamma \} = - H_2 \\ c_{22}\delta' + c_{26}\varepsilon' &= - \{ c_{66}\beta' + c_{61}\beta + c_{62}\gamma' + (c_{21} + c_{66})\gamma \} = - K_1 \\ c_{62}\delta' + c_{66}\varepsilon' &= - \{ c_{16}\beta' + c_{11}\beta + c_{12}\gamma' + (c_{16} + c_{61})\gamma \} = - K_2. \end{aligned} \right\} (16)$$

Fra le prime due di queste equazioni e la prima delle (15) possiamo eliminare α, ε ; e fra le ultime due di queste e l'ultima delle (15) possiamo eliminare δ', ε' . Otteniamo così:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{16} & H_1 & \\ c_{61} & c_{66} & H_2 & \\ c_{13} & c_{36} & c_{23}\beta' & \end{array} \right| = 0 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} c_{22} & c_{26} & K_1 & \\ c_{62} & c_{66} & K_2 & \\ c_{23} & c_{36} & c_{13}\gamma & \end{array} \right| = 0.$$

Queste due equazioni, insieme alla seconda delle (15),

$$c_{13}\beta + c_{23}\gamma' + c_{36}(\beta' + \gamma) = 0,$$

sono omogenee lineari nei coefficienti $\beta', \beta, \gamma', \gamma$ e ne determinano quindi i rapporti. Sostituendo i valori che se ne ricavano nelle equazioni precedenti (16') si hanno le rimanenti costanti, risolvendo 2 sistemi di equazioni lineari con due incognite.

Tralascieremo di fare questa sostituzione, che non porta a risultati semplici, se non si ammettono altre proprietà di simmetria, oltre quella già introdotta.

§ 3.

Le formole del paragrafo precedente si semplificano grandemente, quando si suppone che il corpo abbia le proprietà di simmetria elastica speciali dei diversi gruppi cristallini, e che il cilindro sia opportunamente orientato rispetto agli assi cristallografici. Le semplificazioni più notevoli si ottengono supponendo che la direzione delle generatrici del cilindro venga a coincidere successivamente con una delle direzioni degli assi cristallografici dei diversi gruppi cristallini.

Le 21 costanti d'elasticità c_{ih} , riferite agli assi cristallografici, hanno nei diversi gruppi relazioni speciali fra loro, per cui esse in parte sono nulle, in parte possono essere espresse mediante un certo numero minore di costanti indipendenti, i cui valori numerici sono dati dall'esperienza. Un quadro per queste costanti è riferito da VOIGT nella Mem. II (Tabella III) (*); io per brevità non riprodurrò questo quadro, supponendo che il lettore l'abbia presente.

Se indichiamo con OX' , OY' , OZ' gli assi cristallografici, le sostituzioni che converrà fare sulle nostre variabili x , y , z , quando per asse OZ si prende successivamente uno degli assi cristallografici, sono:

$$\begin{array}{lll} x = y' & y = z' & z = x' \quad (\text{asse } OX') \\ x = z' & y = x' & z = y' \quad (\text{asse } OY') \\ x = x' & y = y' & z = z' \quad (\text{asse } OZ'). \end{array}$$

Quindi potremo anche, senza introdurre nuove variabili, ottenere gli stessi risultati permutando circolarmente le variabili x , y , z e conseguentemente anche gli indici 1, 2, 3 e 4, 5, 6.

PARTE SECONDA.

§ 4.

L'attuale teoria dei fenomeni piroelettrici e piezoelettrici è fondata sul concetto [primamente enunciato da THOMSON (**)] che i cristalli piroelettrici o piezoelettrici in condizioni naturali si trovino in uno stato permanente di polarizzazione elettrica, e che l'azione esterna, dovuta a questa polarizzazione, venga neutralizzata da uno strato elettrico, che si produce per induzione alla loro superficie. Quando lo stato di polarizzazione molecolare viene rapidamente alterato, e prima che una corrispondente variazione si produca nello strato elettrico superficiale, si manifesta all'esterno un'azione elettrica uguale alla differenza fra l'azione dovuta alla polarizzazione e quella dello strato superficiale. Tale azione esterna può quindi essere considerata come dovuta

(*) Vedi anche LIEBISCH, *Physikalische Krystallographie*. Leipzig, 1891, pag. 552.

(**) THOMSON, *On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter*. Philosophical Magazine, V Serie, 1878.

ad una polarizzazione degli elementi di volume, i cui momenti elettrici siano uguali alle variazioni dei momenti primitivi.

VOIGT nella Mem. II suppone che le variazioni a , b , c delle componenti dei momenti elettrici primitivi in ogni elemento di un cristallo piroelettrico e piezoelettrico siano funzioni lineari generali delle sei componenti della deformazione prodotta nell'elemento stesso da pressioni esterne o da variazioni di temperatura; cioè pone:

$$\left. \begin{aligned} a &= \varepsilon_{11}x_x + \varepsilon_{12}y_y + \varepsilon_{13}z_z + \varepsilon_{14}y_z + \varepsilon_{15}z_x + \varepsilon_{16}x_y \\ b &= \varepsilon_{21}x_x + \varepsilon_{22}y_y + \varepsilon_{23}z_z + \varepsilon_{24}y_z + \varepsilon_{25}z_x + \varepsilon_{26}x_y \\ c &= \varepsilon_{31}x_x + \varepsilon_{32}y_y + \varepsilon_{33}z_z + \varepsilon_{34}y_z + \varepsilon_{35}z_x + \varepsilon_{36}x_y, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ove le ε_{ih} sono 18 costanti dipendenti dalla sostanza del cristallo e dalla orientazione degli assi coordinati.

Siccome poi le componenti di deformazione sono funzioni lineari delle componenti di pressione, i momenti a , b , c si possono esprimere anche come funzioni lineari di queste ultime componenti:

$$\left. \begin{aligned} a &= \delta_{11}X_x + \delta_{12}Y_y + \delta_{13}Z_z + \delta_{14}Y_z + \delta_{15}Z_x + \delta_{16}X_y \\ b &= \delta_{21}X_x + \delta_{22}Y_y + \delta_{23}Z_z + \delta_{24}Y_z + \delta_{25}Z_x + \delta_{26}X_y \\ c &= \delta_{31}X_x + \delta_{32}Y_y + \delta_{33}Z_z + \delta_{34}Y_z + \delta_{35}Z_x + \delta_{36}X_y. \end{aligned} \right\} \quad (17')$$

Fra le costanti ε_{ih} , δ_{ih} si hanno le relazioni:

$$\delta_{ih} = - \sum_{k=1}^6 \varepsilon_{ik} \delta_{hk} \quad \varepsilon_{ih} = - \sum_{k=1}^6 \delta_{ik} \varepsilon_{hk} \quad (*).$$

A cagione delle proprietà di simmetria, fra le costanti ε_{ih} , o δ_{ih} , esistono relazioni speciali, quando gli assi coordinati coincidono cogli assi cristallografici, nei 32 gruppi cristallini. La forma che allora assumono i secondi membri delle formole (17) è esposta da VOIGT nella Tabella I della Mem. II; noi ci serviremo di questi risultati per determinare i momenti elettrici corrispondenti ai principali casi di deformazione, che abbiamo studiato nel § 2.

Indicheremo con a_x , b_x , c_x , od a_y , b_y , c_y , od a_z , b_z , c_z le componenti a , b , c dei momenti elettrici secondo che il cilindro ha le generatrici parallele (o, come diremo anche per brevità, è parallelo) all'asse cristallografico OX , od OY , od OZ .

(*) VOIGT (Mem. II) prende le costanti δ_{ih} con segno contrario.

I.

Se poniamo:

$$\begin{aligned} s_{x,h} &= -(s_{2h}p + s_{3h}q + s_{4h}r) \\ s_{y,h} &= -(s_{3h}p + s_{1h}q + s_{5h}r) \quad h = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ s_{z,h} &= -(s_{1h}p + s_{2h}q + s_{6h}r) \end{aligned}$$

le sei componenti di deformazione nel problema I del § 2 sono rispettivamente uguali ai sei valori di $s_{x,h}$ quando il cilindro è diretto secondo l'asse cristallografico OZ . Analogamente le $s_{y,h}$, $s_{z,h}$ danno le sei componenti di deformazione negli altri due casi. Perciò dalle formole (17) avremo per i momenti elettrici le formole seguenti:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{1h} s_{x,h} & a_y &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{1h} s_{y,h} & a_z &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{1h} s_{z,h} \\ b_x &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{2h} s_{x,h} & b_y &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{2h} s_{y,h} & b_z &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{2h} s_{z,h} \\ c_x &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{3h} s_{x,h} & c_y &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{3h} s_{y,h} & c_z &= \sum_{h=1}^6 \varepsilon_{3h} s_{z,h} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Se invece esprimiamo i momenti elettrici in funzione delle componenti di pressione mediante le formole (17'), troviamo:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \partial_{12}p + \partial_{13}q + \partial_{14}r & a_y &= \partial_{13}p + \partial_{11}q + \partial_{15}r & a_z &= \partial_{11}p + \partial_{12}q + \partial_{16}r \\ b_x &= \partial_{22}p + \partial_{23}q + \partial_{24}r & b_y &= \partial_{23}p + \partial_{21}q + \partial_{25}r & b_z &= \partial_{21}p + \partial_{22}q + \partial_{26}r \\ c_x &= \partial_{32}p + \partial_{33}q + \partial_{34}r & c_y &= \partial_{33}p + \partial_{31}q + \partial_{35}r & c_z &= \partial_{31}p + \partial_{32}q + \partial_{36}r \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

È ora interessante, per poter dedurre qualche conseguenza da queste formole, il determinare come esse si semplifichino per diversi gruppi cristallini, tenendo conto dei valori speciali che, per le proprietà di simmetria, devono avere le costanti s_{ih} , ε_{ih} , ∂_{ih} .

Ci limiteremo a considerare le espressioni (18') dei momenti elettrici, a cagione della loro semplicità in confronto delle (18). Indicheremo poi i 32 gruppi cristallini coi numeri progressivi 1, 2, ..., 32 nell'ordine seguito da Voigt nella Mem. II. I risultati a cui si arriva sono raccolti nel seguente quadro:

I. *Sistema triclinico.*

Gruppo 2: le formole (18').

II. *Sistema monoclinico.*

Gruppo 4:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= \delta_{24} r & c_x &= \delta_{32} p + \delta_{33} q \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= \delta_{25} r & c_y &= \delta_{33} p + \delta_{34} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} p + \delta_{32} q + \delta_{36} r. \end{aligned}$$

Gruppo 5:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{12} p + \delta_{13} q & b_x &= \delta_{22} p + \delta_{23} q & c_x &= \delta_{34} r \\ a_y &= \delta_{13} p + \delta_{11} q & b_y &= \delta_{23} p + \delta_{21} q & c_y &= \delta_{35} r \\ a_z &= \delta_{11} p + \delta_{12} q + \delta_{16} r & b_z &= \delta_{21} p + \delta_{22} q + \delta_{26} r & c_z &= 0. \end{aligned}$$

III. *Sistema rombico.*

Gruppo 7:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & b_x &= \delta_{24} r & c_x &= \delta_{31} p + \delta_{33} q \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= 0 & c_y &= \delta_{33} p + \delta_{34} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (p + q) + \delta_{36} r. \end{aligned}$$

Gruppo 8:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= 0 & b_y &= \delta_{25} r & c_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{36} r. \end{aligned}$$

IV. *Sistema quadratico.*

Gruppo 10:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & b_x &= \delta_{15} r & c_x &= \delta_{31} p + \delta_{33} q \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= 0 & c_y &= \delta_{33} p + \delta_{34} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (p + q) \end{aligned}$$

Gruppo 11:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= 0 & b_y &= -\delta_{14} r & c_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppo 13:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= \delta_{15} r & c_x &= \delta_{31} p + \delta_{33} q \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= -\delta_{11} r & c_y &= \delta_{33} p + \delta_{31} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31}(p + q) \end{aligned}$$

Gruppo 14:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= 0 & b_y &= \delta_{11} r & c_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{36} r. \end{aligned}$$

Gruppo 15:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= -\delta_{15} r & c_x &= -\delta_{31} p \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= \delta_{14} r & c_y &= \delta_{31} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31}(p - q) + \delta_{36} r. \end{aligned}$$

V. Sistema esagonale.

Gruppo 17:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & b_x &= \delta_{15} r & c_x &= \delta_{31} p + \delta_{33} q \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= 0 & c_y &= \delta_{33} p + \delta_{31} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31}(p + q) \end{aligned}$$

Gruppo 18:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= 0 & b_y &= -\delta_{14} r & c_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppo 20:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} r & b_x &= \delta_{15} r & c_x &= \delta_{31} p + \delta_{33} q \\ a_y &= \delta_{15} r & b_y &= -\delta_{14} r & c_y &= \delta_{33} p + \delta_{31} q \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31}(p + q). \end{aligned}$$

Gruppo 21:

$$\begin{aligned} a_x &= -\delta_{11} p & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= \delta_{11} q & b_y &= 0 & c_y &= 0 \\ a_z &= \delta_{11}(p - q) & b_z &= -2\delta_{11} r & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppo 22:

$$\begin{aligned} a_x &= -\delta_{11} p & b_x &= \delta_{22} p & c_x &= 0 \\ a_y &= \delta_{11} q & b_y &= -\delta_{22} q & c_y &= 0 \\ a_z &= \delta_{11}(p - q) - 2\delta_{22} r & b_z &= -\delta_{22}(p - q) - 2\delta_{11} r & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppo 24:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & b_x &= \delta_{22}p + \delta_{15}r & c_x &= \delta_{31}p + \delta_{33}q \\ a_y &= \delta_{15}r & b_y &= -\delta_{22}q & c_y &= \delta_{33}p + \delta_{31}q \\ a_z &= -\delta_{22}r & b_z &= -\delta_{22}(p - q) & c_z &= \delta_{31}(p + q). \end{aligned}$$

Gruppo 25:

$$\begin{aligned} a_x &= -\delta_{11}p + \delta_{14}r & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= \delta_{11}q & b_y &= \delta_{14}r & c_y &= 0 \\ a_z &= \delta_{11}(p - q) & b_z &= 2\delta_{11}r & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppo 27:

$$\begin{aligned} a_x &= -\delta_{11}p + \delta_{14}r & b_x &= \delta_{22}p + \delta_{15}r & c_x &= \delta_{31}p + \delta_{33}q \\ a_y &= \delta_{11}q + \delta_{15}r & b_y &= -\delta_{22}p - \delta_{14}r & c_y &= \delta_{33}p + \delta_{31}q \\ a_z &= \delta_{11}(p - q) - 2\delta_{22}r & b_z &= -\delta_{22}(p - q) - 2\delta_{14}r & c_z &= \delta_{31}(p + q). \end{aligned}$$

VI. Sistema regolare.

Gruppo 29, 32:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14}r & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= 0 & b_y &= \delta_{14}r & c_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{14}r. \end{aligned}$$

I gruppi che non compaiono in questo quadro sono quelli che, per qualsiasi deformazione, non sono elettrizzabili.

Se supponiamo $r = 0$, come nel problema (b), e confrontiamo ciò che diviene il quadro precedente colla Tabella IV di VOIGT che dà le espressioni dei momenti elettrici prodotti in un cristallo per pressione normale uniforme esercitata su tutta la sua superficie, vediamo che, eccettuati i gruppi 15, 21, 22, 24, 25, 27, in tutti i rimanenti i momenti che si annullano sono gli stessi. Se poi supponiamo $p = q$, la differenza indicata scompare nelle espressioni dei momenti a_x , b_x , c_x . Possiamo quindi dire:

Fissati come abbiamo convenuto gli assi cristallografici, le condizioni di elettrizzazione per pressione normale uniforme esercitata sopra la superficie laterale di un cilindro retto, di sezione arbitraria, parallelo all'asse OZ, sono identiche alle condizioni di elettrizzazione per pressione normale uniforme esercitata su tutta la superficie di un cristallo di forma qualunque.

Se invece il cilindro è parallelo agli assi OX , OY le condizioni di elettrizzazione sono differenti nei gruppi: 15 del sistema quadratico e 21, 22, 24, 25, 27 del sistema esagonale.

L'identità però, di cui è parola nel teorema precedente, non si riferisce in modo assoluto ai valori delle componenti dei momenti elettrici, ma soltanto al fatto che esse sono contemporaneamente uguali a zero o differenti da zero.

Se poi si suppone $p = q = 0$, e si confrontano le espressioni che ne risultano per i momenti elettrici con quelle corrispondenti al caso in cui $p = q$, $r = 0$, si trova: che i cristalli dei gruppi 8, 11, 14, 15, 21, 22 i quali non sono elettrizzabili per pressione normale, laterale, uniforme p , quando il cilindro ha la direzione di uno degli assi cristallografici (che deve essere l'asse OZ per i gruppi 15, 21, 22), lo sono invece per le pressioni tangenziali che dipendono, nel modo che si è visto, da r [problemi (c), (d)]. Reciprocamente i cristalli dei gruppi 10, 13, 17, 20 che non sono elettrizzabili in questo secondo caso, quando il cilindro ha la direzione dell'asse OZ , lo sono invece mediante la pressione normale p .

II.

In questi problemi le componenti di deformazione e di pressione sono funzioni lineari omogenee delle coordinate normali alla direzione del cilindro. Per le componenti di pressione si ha, quando il cilindro è diretto secondo l'asse OX :

$$\begin{aligned} Y_y &= ay + bz & Z_z &= cy + dz & Y_z &= -dy - az \\ X_x &= Y_x = Z_x & &= 0, \end{aligned}$$

secondo l'asse OY :

$$\begin{aligned} Z_z &= az + bx & X_x &= cz + dx & Z_x &= -dz - ax \\ X_y &= Y_y = Z_y & &= 0, \end{aligned}$$

secondo l'asse OZ :

$$\begin{aligned} X_x &= ax + by & Y_y &= cx + dy & X_y &= -dx - ay \\ X_z &= Y_z = Z_z & &= 0. \end{aligned}$$

Distingueremo le componenti di pressione in questi tre casi con gli indici (1), (2), (3) in alto.

Se consideriamo i problemi (e), (f), (g), (h) separatamente, abbiamo, colle notazioni già introdotte, la seguente tabella per le componenti di pressione differenti da zero:

	$Y_y^{(1)}$	$Z_z^{(1)}$	$Y_x^{(1)}$	$Z_x^{(2)}$	$X_x^{(2)}$	$Z_x^{(2)}$	$X_x^{(3)}$	$Y_y^{(3)}$	$X_y^{(3)}$
e)	$-\frac{p}{R}y$	$-\frac{p}{R}y$	$\frac{p}{R}z$	$-\frac{p}{R}z$	$-\frac{p}{R}z$	$\frac{p}{R}x$	$-\frac{p}{R}x$	$-\frac{p}{R}x$	$\frac{p}{R}y$
f)	$-\frac{2r}{R}z$	0	0	$-\frac{2r}{R}x$	0	0	$-\frac{2r}{R}y$	0	0
g)	$\frac{s}{R}z$	$\frac{s}{R}z$	$-\frac{s}{R}y$	$\frac{s}{R}x$	$\frac{s}{R}x$	$-\frac{s}{R}z$	$\frac{s}{R}y$	$\frac{s}{R}y$	$-\frac{s}{R}x$
h)	0	$-\frac{2q}{R}y$	0	0	$-\frac{2q}{R}z$	0	0	$-\frac{2q}{R}x$	0

dove i valori delle componenti di pressione, scritte nella prima linea, sono dati dalle 4 espressioni, che si trovano nella colonna corrispondente.

Le espressioni dei momenti elettrici corrispondenti sono raccolti nel quadro seguente:

I. Sistema triclinico.

Gruppo 2:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \delta_{12} Y_y^{(1)} + \delta_{13} Z_z^{(1)} + \delta_{14} Y_x^{(1)} & b_x &= \delta_{22} Y_y^{(1)} + \delta_{23} Z_z^{(1)} + \delta_{24} Y_x^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{13} Z_z^{(2)} + \delta_{14} X_x^{(2)} + \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= \delta_{23} Z_z^{(2)} + \delta_{21} X_x^{(2)} + \delta_{25} Z_x^{(2)} \\
 a_z &= \delta_{14} X_x^{(3)} + \delta_{12} Y_y^{(3)} + \delta_{16} X_y^{(3)} & b_z &= \delta_{21} X_x^{(3)} + \delta_{22} Y_y^{(3)} + \delta_{26} X_y^{(3)} \\
 c_x &= \delta_{32} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} + \delta_{34} Y_x^{(1)} \\
 c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} + \delta_{35} Z_x^{(2)} \\
 c_z &= \delta_{31} X_x^{(3)} + \delta_{32} Y_y^{(3)} + \delta_{36} X_y^{(3)}.
 \end{aligned}$$

II. Sistema monoclinico.

Gruppo 4:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \delta_{14} Y_x^{(1)} & b_x &= \delta_{24} Y_x^{(1)} & c_x &= \delta_{32} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= \delta_{25} Z_x^{(2)} & c_y &= \delta_{31} X_x^{(2)} + \delta_{33} Z_z^{(2)} \\
 a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} X_x^{(3)} + \delta_{32} Y_y^{(3)} + \delta_{36} X_y^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Gruppo 5:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \delta_{12} Y_y^{(1)} + \delta_{13} Z_z^{(1)} & b_x &= \delta_{22} Y_y^{(1)} + \delta_{23} Z_z^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{11} X_x^{(2)} + \delta_{13} Z_z^{(2)} & b_y &= \delta_{21} X_x^{(2)} + \delta_{23} Z_z^{(2)} \\
 a_z &= \delta_{11} X_x^{(3)} + \delta_{12} Y_y^{(3)} + \delta_{16} X_y^{(3)} & b_z &= \delta_{21} X_x^{(3)} + \delta_{22} Y_y^{(3)} + \delta_{26} X_y^{(3)} \\
 & & c_x &= \delta_{34} Y_z^{(1)} \\
 & & c_y &= \delta_{35} Z_x^{(2)} \\
 & & c_z &= 0.
 \end{aligned}$$

III. Sistema rombico.

Gruppo 7:

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0 & b_x &= \delta_{24} Y_z^{(1)} & c_x &= \delta_{32} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= 0 & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\
 a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} X_x^{(3)} + \delta_{32} Y_y^{(3)} + \delta_{36} X_y^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Gruppo 8:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\
 a_y &= 0 & b_y &= \delta_{25} Z_x^{(2)} & c_y &= 0 \\
 a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{36} X_y^{(3)}.
 \end{aligned}$$

IV. Sistema quadratico.

Gruppo 10:

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0 & b_x &= \delta_{15} Y_z^{(1)} & c_x &= \delta_{31} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{15} X_x^{(2)} & b_y &= 0 & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\
 a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}).
 \end{aligned}$$

Gruppo 11:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\
 a_y &= 0 & b_y &= -\delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= 0 \\
 a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= 0.
 \end{aligned}$$

Gruppo 13:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= \delta_{15} Y_z^{(1)} & c_x &= \delta_{31} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\ a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= -\delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}). \end{aligned}$$

Gruppo 14:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{11} Y_z^{(1)} & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= 0 & b_y &= \delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{36} X_y^{(3)}. \end{aligned}$$

Gruppo 15:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= -\delta_{15} Y_z^{(1)} & c_x &= -\delta_{31} Y_y^{(1)} \\ a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= \delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= \delta_{31} X_x^{(2)} \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) + \delta_{36} X_y^{(3)}. \end{aligned}$$

V. Sistema esagonale.

Gruppo 17:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & b_x &= \delta_{15} Y_z^{(1)} & c_x &= \delta_{31} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\ a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= 0 & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}). \end{aligned}$$

Gruppo 18: identico al gruppo 11.

Gruppo 20:

$$\begin{aligned} a_x &= \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= \delta_{15} Y_z^{(1)} & c_x &= \delta_{31} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\ a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= -\delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\ a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{31} (X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}). \end{aligned}$$

Gruppo 21:

$$\begin{aligned} a_x &= -\delta_{11} Y_y^{(1)} & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\ a_y &= \delta_{11} X_x^{(2)} & b_y &= 0 & c_y &= 0 \\ a_z &= \delta_{11} (X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) & b_z &= -2\delta_{11} X_y^{(3)} & c_z &= 0. \end{aligned}$$

Gruppo 22:

$$\begin{aligned}
 a_x &= -\delta_{11} Y_y^{(1)} & b_x &= \delta_{22} Y_y^{(1)} & c_x &= 0 \\
 a_y &= \delta_{11} X_x^{(2)} & b_y &= -\delta_{22} X_x^{(2)} & c_y &= 0 \\
 a_z &= \delta_{11}(X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) - 2\delta_{22} X_y^{(3)} & b_z &= -\delta_{22}(X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) - 2\delta_{11} X_y^{(3)} & c_z &= 0.
 \end{aligned}$$

Gruppo 24:

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0 & b_x &= \delta_{22} Y_y^{(1)} + \delta_{15} Y_z^{(1)} & c_x &= \delta_{31} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= -\delta_{22} X_x^{(2)} & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\
 a_z &= -2\delta_{22} X_y^{(3)} & b_z &= -\delta_{22}(X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) & c_z &= \delta_{31}(X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}).
 \end{aligned}$$

Gruppo 25:

$$\begin{aligned}
 a_x &= -\delta_{11} Y_y^{(1)} + \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\
 a_y &= \delta_{11} X_x^{(2)} & b_y &= \delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= 0 \\
 a_z &= \delta_{11}(X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) & b_z &= 2\delta_{11} X_y^{(3)} & c_z &= 0.
 \end{aligned}$$

Gruppo 27:

$$\begin{aligned}
 a_x &= -\delta_{11} Y_y^{(1)} + \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= \delta_{22} Y_y^{(1)} + \delta_{15} Y_z^{(1)} \\
 a_y &= \delta_{11} X_x^{(2)} + \delta_{15} Z_x^{(2)} & b_y &= -\delta_{22} X_x^{(2)} - \delta_{14} Z_x^{(2)} \\
 a_z &= \delta_{11}(X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) - 2\delta_{22} X_y^{(3)} & b_z &= -\delta_{22}(X_x^{(3)} - Y_y^{(3)}) - 2\delta_{11} X_y^{(3)} \\
 & & c_x &= \delta_{31} Y_y^{(1)} + \delta_{33} Z_z^{(1)} \\
 & & c_y &= \delta_{33} Z_z^{(2)} + \delta_{31} X_x^{(2)} \\
 & & c_z &= \delta_{31}(X_x^{(3)} + Y_y^{(3)}).
 \end{aligned}$$

VI. Sistema regolare.

Gruppi 29, 32:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \delta_{14} Y_z^{(1)} & b_x &= 0 & c_x &= 0 \\
 a_y &= 0 & b_y &= \delta_{14} Z_x^{(2)} & c_y &= 0 \\
 a_z &= 0 & b_z &= 0 & c_z &= \delta_{14} X_y^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Semplificazioni notevoli non si ottengono in questo quadro nel caso dei problemi (e), (g), poichè nessuna delle tre componenti di pressione corrispon-

denti si annulla. Le formole precedenti invece si semplificano assai nei problemi (f), (h), poichè una sola delle componenti di pressione è differente da zero. Anche le componenti di deformazione acquistano valori molto semplici.

Nei problemi (f) ed (h) sono nulli tutti i momenti elettrici, cioè si ha:

$$a_{x,y,z} = b_{x,y,z} = c_{x,y,z} = 0 \quad \text{nei gruppi 8, 11, 14, 18, 29, 32.}$$

Inoltre pei gruppi 15, 21, 22, 25, 27 si ha:

$$a_y = b_y = c_y = 0 \quad \text{nel problema (f),}$$

ed

$$a_x = b_x = c_x = 0 \quad \text{nel problema (h).}$$

§ 5.

Determinati i momenti elettrici a , b , c , l'azione che il cristallo esercita all'esterno si deduce dalla funzione potenziale:

$$V = \int \left(a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dS = \int \frac{\bar{\varepsilon} d\sigma}{r} + \int \frac{\varepsilon dS}{r},$$

ove $d\sigma$ indica l'elemento superficiale, e dS l'elemento di volume, relativi allo spazio occupato dal corpo; inoltre:

$$\bar{\varepsilon} = a \cos(n, \xi) + b \cos(n, \eta) + c \cos(n, \zeta) \quad \varepsilon = - \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{\partial b}{\partial \eta} + \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right)$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

ed n indica la normale esterna.

Nel nostro caso la superficie è composta delle due basi del cilindro σ_l , σ_{-l} e della superficie laterale s ; sopra le due basi, essendo i momenti a , b , c indipendenti da z , avremo per $\bar{\varepsilon}$ i valori:

$$\bar{\varepsilon}_l = c \quad \bar{\varepsilon}_{-l} = -c,$$

e sopra la superficie s

$$\bar{\varepsilon}_s = a \cos(n, \xi) + b \cos(n, \eta).$$

La densità dello strato superficiale $\bar{\varepsilon}$, ha quindi sempre valori uguali, ma contrari di segno, nei punti delle due basi che sono sopra una stessa parallela alla direzione del cilindro.

Per la funzione potenziale V si può prendere anche la espressione:

$$V = -\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_3}{\partial z},$$

ove:

$$V_1 = \int \frac{a dS}{r} \quad V_2 = \int \frac{b dS}{r} \quad V_3 = \int \frac{c dS}{r},$$

e allora la determinazione della V , si riduce alla determinazione di queste tre funzioni V_1 , V_2 , V_3 , ossia, nel nostro caso, a quella della funzione potenziale di un cilindro retto, quando la densità è costante, oppure funzione di 1.° o di 2.° grado delle coordinate dei punti di una sezione normale.

Noi seguiremo questa via, limitandoci al caso del cilindro circolare.

Nel *Handbuch der Kugelfunctionen* di HEINE (Vol. II, pag. 177) è dimostrata la formola seguente per la funzione potenziale di un cilindro retto.

Siano x, y, z le coordinate del punto potenziato, ξ, η, ζ quelle di un punto attraente, come nelle formole precedenti, e si introducano coordinate cilindriche ponendo:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi & \xi &= s \cos \omega \\ y &= \rho \sin \psi & \eta &= s \sin \omega. \end{aligned}$$

Suppongasi inoltre sviluppata in serie di FOURIER la densità $k(\xi, \eta, \zeta)$, ossia $k(s, \zeta, \omega)$, e si abbia (*):

$$k = \sum_{\mu=0}^{\infty} \{ A_{\mu}(s, \zeta) \cos \mu \omega + B_{\mu}(s, \zeta) \sin \mu \omega \}.$$

La funzione potenziale di un cilindro circolare retto, il cui asse sia l'asse delle z , il cui raggio sia R e che si estenda da $z = -l$, a $z = +l$, si può rappresentare mediante la serie

$$V = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{ a_{\nu}(\rho, z) \cos \nu \psi + b_{\nu}(\rho, z) \sin \nu \psi \}, \quad (19)$$

dove si ha:

$$\left. \begin{aligned} a_{\nu}(\rho, z) &= 2\pi \int_0^R s ds \int_0^{\infty} J_{\nu}(\lambda \rho) J_{\nu}(\lambda s) U_{\nu}(\lambda, s) d\lambda \\ b_{\nu}(\rho, z) &= 2\pi \int_0^R s ds \int_0^{\infty} J_{\nu}(\lambda \rho) J_{\nu}(\lambda s) V_{\nu}(\lambda, s) d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(*) Il segno ' aggiunto al simbolo Σ indica che al termine $\mu = 0$ deve essere attribuito il coefficiente $\frac{1}{2}$.

e le funzioni U_ν , V_ν sono definite dalle uguaglianze:

$$\left. \begin{aligned} U_\nu &= e^{\mp \lambda z} \int_{-l}^l A_\nu(s, \zeta) e^{\pm \zeta \lambda} d\zeta \\ V_\nu &= e^{\mp \lambda z} \int_{-l}^l B_\nu(s, \zeta) e^{\pm \zeta \lambda} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

nelle quali si devono prendere i segni superiori od inferiori secondo che $z - \zeta > 0$ oppure $z - \zeta < 0$. J_ν rappresenta la funzione cilindrica di prima specie e di ordine ν .

Le formole (19) (20) (21) sono suscettibili di semplificazioni nei casi speciali che noi abbiamo bisogno di considerare, quando cioè: 1.° k è costante; 2.° è funzione lineare omogenea delle coordinate ξ , η ; 3.° è funzione omogenea quadratica delle coordinate stesse.

Cominciamo ad osservare che, quando A_ν , B_ν sono indipendenti da ζ , come avviene nei casi accennati, si può eseguire la quadratura delle espressioni di U_ν , V_ν , e si trova:

$$\frac{U_\nu}{A_\nu(s)} = \frac{V_\nu}{B_\nu(s)} = \varphi(\lambda, z) = \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\lambda} e^{z\lambda} \operatorname{senh}(l\lambda) & \quad \text{per } z \leq -l \\ \frac{2}{\lambda} [1 - e^{-\lambda} \cosh(\lambda z)] & \quad \text{per } -l \leq z \leq l \\ \frac{2}{\lambda} e^{-z\lambda} \operatorname{senh}(l\lambda) & \quad \text{per } z \geq l, \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

e quindi:

$$\left. \begin{aligned} a_\nu &= 2\pi \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_\nu(\lambda \rho) d\lambda \int_0^R J_\nu(\lambda s) A_\nu(s) s ds \\ b_\nu &= 2\pi \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_\nu(\lambda \rho) d\lambda \int_0^R J_\nu(\lambda s) B_\nu(s) s ds. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

I tre casi che noi dobbiamo considerare sono i seguenti:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \alpha_0 \\ k &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta = (\alpha_1 \cos \omega + \beta_1 \operatorname{sen} \omega) s \\ k &= \alpha_{11} \xi^2 + 2\alpha_{12} \xi \eta + \alpha_{22} \eta^2 = \frac{1}{2} \alpha'_0 + (\alpha_2 \cos 2\omega + \beta_2 \operatorname{sen} 2\omega) s^2, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

dove le α sono costanti e si ha:

$$\alpha'_0 = \alpha_{11} + \alpha_{22} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2} \quad \beta_2 = \alpha_{12}.$$

Avremo quindi rispettivamente in questi tre casi:

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} a_0(\rho, z) \\ V &= a_1(\rho, z) \cos \psi + b_1(\rho, z) \sin \psi \\ V &= \frac{1}{2} a_0(\rho, z) + a_2(\rho, z) \cos 2\psi + b_2(\rho, z) \sin 2\psi, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

dove le a , b , devono essere determinate mediante le (22) tenendo conto delle (23) per i valori delle A , B .

Ora una delle due quadrature, che compaiono nelle espressioni (22) nei tre casi indicati, si può sempre eseguire, e precisamente quella rispetto ad s . Nelle espressioni (24) della funzione potenziale si avranno quindi solo integrali semplici.

Poniamo infatti:

$$P_{n,m} = \int_0^R J_{2n}(\lambda s) s^{2m+1} ds \quad Q_{n,m} = \int_0^R J_{2n+1}(\lambda s) s^{2m} ds;$$

gli integrali che dobbiamo calcolare sono casi particolari di questi. Prendendo una nuova variabile di integrazione $x = \lambda s$, abbiamo:

$$\lambda^{2(m+1)} P_{n,m} = \int_0^{R\lambda} J_{2n}(x) x^{2m+1} dx \quad \lambda^{2m+1} Q_{n,m} = \int_0^{R\lambda} J_{2n+1}(x) x^{2m} dx.$$

La funzione $J_\nu(x)$ soddisfa, come è noto, all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 J_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d J_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu = 0,$$

da cui, moltiplicando per x^μ , si ottiene un'equazione che può essere scritta nella forma seguente:

$$\frac{d}{dx} \left(x^\mu \frac{d J_\nu}{dx} \right) - (\mu - 1) \frac{d}{dx} (x^{\mu-1} J_\nu) + \{(\mu - 1)^2 - \nu^2\} x^{\mu-2} J_\nu = - x^\mu J_\nu. \quad (25)$$

Se in questa formola poniamo $\mu - 1 = \nu$, si ha:

$$\frac{d}{dx} \left(x^{\nu+1} \frac{d J_\nu}{dx} \right) - \nu \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu) = - x^{\nu+1} J_\nu;$$

quindi integrando e ricordando che si ha (HEINE, I, pag. 243):

$$x \frac{d J_\nu}{d x} - \nu J_\nu = -x J_{\nu+1},$$

troviamo:

$$\int x^{\nu+1} J_\nu dx = x^{\nu+1} J_{\nu+1} + \text{cost.} \quad (26)$$

Vediamo quindi che l'integrale indefinito della funzione $x^\mu J_\nu$, può essere calcolato colla formola ora ottenuta quando μ ha il valore $\nu + 1$. Ora dalla (25) è facile dedurre formole che danno il modo di calcolare l'integrale di $x^\mu J_\nu$, anche per $\mu > \nu + 1$, purchè μ e ν non siano contemporaneamente pari o dispari, come avviene in $P_{n,m}$, $Q_{n,m}$.

Supponiamo infatti $\nu = 2n$, $\mu = 2m + 1$, ove m ed n sono interi. La (25) ci dà:

$$\frac{d}{d x} \left(x^{2m+1} \frac{d J_{2n}}{d x} \right) - 2m \frac{d}{d x} (x^{2m} J_{2n}) + 4(m^2 - n^2) x^{2m-1} J_{2n} = -x^{2m+1} J_{2n},$$

e di qui, integrando, potremo ottenere in termini finiti l'integrale di $x^{2m+1} J_{2n}$ quando sia noto l'integrale di $x^{2m-1} J_{2n}$; quindi partendo dall'integrale di $x^{2n+1} J_{2n}$, che possiamo calcolare mediante la (26), potremo ottenere tutti gli integrali delle funzioni $x^\mu J_{2n+1}$, dove μ è un numero dispari superiore a $2n + 1$.

Supponiamo poi $\nu = 2n + 1$, $\mu = 2m$; la (25) ci dà:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d x} \left(x^{2m} \frac{d J_{2n+1}}{d x} \right) - (2m - 1) \frac{d}{d x} (x^{2m-1} J_{2n+1}) + \\ & + 4(m + n)(m - n - 1) x^{2m-2} J_{2n+1} = -x^{2m} J_{2n+1}, \end{aligned}$$

e di qui integrando potremo ottenere in termini finiti l'integrale di $x^{2m} J_{2n+1}$ quando sia noto l'integrale di $x^{2(m-1)} J_{2n+1}$; quindi partendo dall'integrale della funzione $x^{2n+2} J_{2n+1}$, che sappiamo calcolare mediante la (26), potremo ottenere tutti gli integrali delle funzioni $x^\mu J_{2n+1}$, dove μ è un numero pari superiore a $2n + 2$.

Per ottenere le espressioni di $P_{n,m}$, $Q_{n,m}$ in termini finiti non avremo ora che a limitare fra 0 ed R gli integrali indefiniti che si possono trovare col procedimento ora indicato.

Nelle formole (24) compaiono i seguenti integrali:

$$P_{0,0}, \quad Q_{0,1}, \quad P_{0,1}, \quad P_{1,1},$$

ed applicando la (26), posto $\nu = 0, 1, 2$ troviamo immediatamente:

$$\lambda^2 P_{0,0} = [\lambda s J_1(\lambda s)]_{s=0}^{s=R} = \lambda R J_1(\lambda R)$$

$$\lambda^3 Q_{0,1} = [\lambda^2 s^2 J_2(\lambda s)]_{s=0}^{s=R} = \lambda^2 R^2 J_2(\lambda R)$$

$$\lambda^4 P_{1,1} = [\lambda^3 s^3 J_3(\lambda s)]_{s=0}^{s=R} = \lambda^3 R^3 J_3(\lambda R).$$

Per calcolare $P_{0,1}$ facciamo nella (25) $\nu = 0, \mu = 3$; avremo:

$$\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{dJ_0}{dx} \right) - 2 \frac{d}{dx} (x^2 J_0) + 4x J_0 = -x^3 J_0,$$

ed integrando

$$\begin{aligned} - \int x^3 J_0 dx &= x^2 \left(x \frac{dJ_0}{dx} - 2J_0 \right) + \\ &+ 4x J_1 + \text{cost.} = -x(x^2 - 4)J_1 - 2x^2 J_0 + \text{cost.} \end{aligned}$$

Quindi limitando:

$$\lambda^4 P_{0,1} = \lambda R (\lambda^2 R^2 - 4) J_1(\lambda R) + 2 \lambda^2 R^2 J_0(\lambda R).$$

Abbiamo così pei quattro integrali cercati le seguenti espressioni:

$$P_{0,0} = \frac{R}{\lambda} J_1(\lambda R) \quad Q_{0,1} = \frac{R^2}{\lambda} J_2(\lambda R) \quad P_{1,1} = \frac{R^3}{\lambda} J_3(\lambda R)$$

$$P_{0,1} = \frac{R}{\lambda^2} (R^2 \lambda^2 - 4) J_1(\lambda R) + \frac{2R^2}{\lambda^2} J_0(\lambda R).$$

Sostituendo queste espressioni nelle formole (22) (24) troviamo per la funzione potenziale nei tre casi considerati:

$$a) \quad k = \frac{1}{2} \alpha_0$$

$$V = \pi R \alpha_0 \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_0(\lambda \rho) J_1(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

formola che si trova anche nel *Handbuch* di HEINE (Bd. II, pag. 179)

$$b) \quad k = (\alpha_1 \cos \omega + \beta_1 \sin \omega) s$$

$$V = 2\pi R^2 (\alpha_1 \cos \psi + \beta_1 \sin \psi) \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_1(\lambda \rho) J_2(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$c) \quad k = \frac{1}{2} \alpha'_0 + (\alpha_2 \cos 2\omega + \beta_2 \sin 2\omega)$$

$$V = \pi R \alpha'_0 \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_0(\lambda \rho) \{ (R^2 \lambda^2 - 4) J_1(\lambda R) + 2R\lambda J_0(\lambda R) \} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ + 2\pi R^3 (\alpha_2 \cos 2\psi + \beta_2 \sin 2\psi) \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_2(\lambda \rho) J_3(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

dove $\varphi(\lambda, z)$ è la funzione che abbiamo definito precedentemente (21').

Non sarà inutile il trovare come si modifichino le formole precedenti, allorchè l'altezza del cilindro diviene infinitesima, e tutta la massa del cilindro viene a condensarsi in una massa a due dimensioni. Dovremo allora nelle formole precedenti mutare k in $\frac{k}{2l}$ e poi far tendere l a zero.

Ora si ha:

$$\lim_{l=0} \frac{1}{2l} \varphi(\lambda, z) = e^{\pm z\lambda} \quad \text{per } z \geq 0,$$

quindi:

a) per la funzione potenziale di un disco di densità costante $k' = \frac{1}{2} \alpha_0$ abbiamo:

$$V = \pi R \alpha_0 \int_0^\infty e^{\pm z\lambda} J_0(\lambda \rho) J_1(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

(HEINE, *Handbuch*, Bd. II, pag. 180),

b) per la funzione potenziale di un disco di densità $k' = (\alpha_1 \cos \omega + \beta_1 \sin \omega)s$, si ha:

$$V = 2\pi R^2 (\alpha_1 \cos \psi + \beta_1 \sin \psi) \int_0^\infty e^{\pm z\lambda} J_1(\lambda \rho) J_2(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

c) e finalmente quando si ha $k' = \frac{1}{2} \alpha'_0 + (\alpha_2 \cos 2\omega + \beta_2 \sin 2\omega)s^2$, si trova:

$$V = \pi R \alpha'_0 \int_0^\infty e^{\pm z\lambda} J_0(\lambda \rho) \{ (R^2 \lambda^2 - 4) J_1(\lambda R) + 2R\lambda J_0(\lambda R) \} \frac{d\lambda}{\lambda^3} \\ + 2\pi R^3 (\alpha_2 \cos 2\psi + \beta_2 \sin 2\psi) \int_0^\infty e^{\pm z\lambda} J_2(\lambda \rho) J_3(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

§ 6.

Il procedimento sperimentale più semplice, e più comunemente usato, per studiare qualitativamente lo stato elettrico di un cristallo, è quello delle miscele di polveri (di minio e solfo) di KUNDT (*). Una teoria rigorosa della distribuzione di queste polveri non è stata fin ora stabilita. VOIGT ammette (Mem. II, pag. 61) che le particelle elettrizzate positivamente siano attratte verso quei luoghi della superficie, ove la funzione potenziale ha valori più piccoli, e quelle elettrizzate negativamente verso quelli, dove la funzione potenziale ha valori maggiori, quando non vi sia attrito. In pratica questa ultima circostanza non si verifica, quindi le due specie di polveri si troveranno disposte anche nelle adiacenze dei luoghi indicati.

Le soluzioni, da noi trovate, si prestano specialmente per essere applicate a cilindri di altezza piccola rispetto alle basi; perciò sarà interessante studiare il modo di variare della funzione potenziale sopra di queste. Immaginiamo sulle due basi del cilindro una serie di circoli concentrici infinitamente vicini col centro nel punto $x = y = 0$. Sopra ciascuna di queste circonferenze la funzione potenziale avrà dei punti di massimo e dei punti di minimo; la successione di questi punti, quando si passa da una circonferenza all'altra, dà luogo a linee, che possiamo dire *di massimo* e *di minimo*, intorno alle quali, da una banda e dall'altra, dovranno disporsi le polveri.

Analogamente potremmo considerare la successione dei massimi e minimi valori della funzione potenziale (quando esistano) sopra i diversi raggi del sistema di circonferenze e potremo avere altre linee di massimo e di minimo.

In molti dei casi, in cui abbiamo trovato la funzione potenziale, la prima classe di linee di massimo e minimo (che è anche la più interessante, poichè esiste sempre quando la funzione potenziale non è simmetrica) può essere determinata con facilità, come ora vedremo.

Si aveva in generale (§ 5):

$$V = -\frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_3}{\partial z},$$

ove V_1 , V_2 , V_3 sono le funzioni potenziali del cilindro, quando si suppone

(*) A. KUNDT, *Ueber eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-, Actino- und Piezoelectricität der Krystalle*. — Sitzungsberichte der k. Acad. der Wiss. zu Berlin, 1883; Annalen der Physik und Chemie, Bd. XX, N. F., 1883.

che la densità sia rispettivamente uguale ai momenti elettrici a , b , c . Introducendo le coordinate cilindriche del § 5 avremo:

$$V = - \left(\frac{\partial V_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial \psi} \right) \cos \psi - \left(\frac{\partial V_2}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_1}{\partial \psi} \right) \operatorname{sen} \psi - \frac{\partial V_3}{\partial z}, \quad (27)$$

per espressione della funzione potenziale. Limitandoci al caso di un cilindro circolare potremo prendere per V_1 , V_2 , V_3 le espressioni che abbiamo stabilito nel paragrafo precedente.

I.

Supponendo i momenti a , b , c costanti, e ponendo:

$$P(\rho, z) = 2\pi R \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_0(\lambda \rho) J_1(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

avremo:

$$V_1 = aP(\rho, z) \quad V_2 = bP(\rho, z) \quad V_3 = cP(\rho, z),$$

e quindi:

$$V = - (a \cos \psi + b \operatorname{sen} \psi) \frac{\partial P}{\partial \rho} - c \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Se a , b non sono contemporaneamente uguali a zero possiamo porre anche:

$$V = - \sqrt{a^2 + b^2} \frac{\partial P}{\partial \rho} \cos(\psi - \psi_0) - c \frac{\partial P}{\partial z},$$

ove ψ_0 è determinato dalla relazione $\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{b}{a}$. I valori che V assume in una delle basi $z = \pm l$, sopra una circonferenza $\rho = \rho_0$, hanno quindi un massimo od un minimo nei due punti

$$\psi = \psi_0 \quad \psi = \psi_0 + \pi.$$

Questi valori di ψ sono indipendenti da ρ_0 ; abbiamo quindi sopra ciascuna base due raggi vettori, giacenti sullo stesso diametro, che sono rispettivamente linee di massimo e di minimo.

Nel problema generale I, ove la funzione potenziale ha la forma ora considerata, a_x , b_x ed a_y , b_y non sono contemporaneamente nulli in nessun gruppo; a_x , b_x invece sono sempre nulli eccettuati i gruppi 2, 5, 21, 22, 24, 25, 27.

Quando $a = b = 0$, abbiamo:

$$V = -c \frac{\partial P}{\partial z},$$

e quindi V è costante sopra ciascuna delle circonferenze $\rho = \rho_0$, e varia da una circonferenza all'altra. Si potranno quindi avere delle circonferenze di massimo o di minimo per i valori di ρ determinati dall'equazione:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \quad \text{ossia} \quad \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} \varphi(\lambda, z) J'_0(\lambda \rho) J_1(\lambda R) d\lambda = 0,$$

che soddisfanno alla condizione $\rho < R$.

II.

Quando i momenti elettrici a , b , c sono funzioni lineari delle coordinate x , y , cioè:

$$a = \alpha_1 x + \beta_1 y \quad b = \alpha_2 x + \beta_2 y \quad c = \alpha_3 x + \beta_3 y,$$

abbiamo:

$$V_i = (\alpha_i \cos \psi + \beta_i \sin \psi) Q(\rho, z) \quad (i = 1, 2, 3),$$

dove si è posto:

$$Q(\rho, z) = 2\pi R^2 \int_0^\infty \varphi(\lambda, z) J_1(\lambda \rho) J_2(\lambda R) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Applicando la formola (27) si trova:

$$V = -\frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_2) \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} + \frac{Q}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \{ (\alpha_1 - \beta_2) \cos 2\psi + (\alpha_2 + \beta_1) \sin 2\psi \} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{Q}{\rho} \right) - (\alpha_3 \cos \psi + \beta_3 \sin \psi) \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Se supponiamo $c = 0$, ossia $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, sopra una circonferenza $\rho = \rho_0$ di una qualunque delle basi, i massimi ed i minimi di V dipendono dai massimi e dai minimi del fattore $(\alpha_1 - \beta_2) \cos 2\psi + (\alpha_2 + \beta_1) \sin 2\psi$; essi sono quindi indipendenti da ρ_0 , e perciò avremo due linee rette di massimo e due di minimo lungo i quattro raggi vettori determinati dall'equazione:

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\alpha_1 - \beta_2},$$

giacenti sopra due diametri ortogonali.

Nel problema generale II la condizione supposta si verifica in molti casi; difatti si ha $c_x = c_y = 0$ nei gruppi 8, 11, 14, 18, 21, 22, 25, 29, 32, e si ha $c_z = 0$ nei gruppi 5, 11, 18, 21, 22, 25.

Se invece supponiamo $a = b = 0$ la funzione potenziale assume la forma:

$$V = - (\alpha_3 \cos \psi + \beta_3 \sin \psi) \frac{\partial Q}{\partial z},$$

quindi siamo nel caso del problema precedente I; avremo due raggi vettori, l'uno sul prolungamento dell'altro, lungo i quali V è rispettivamente massima e minima.

Nel problema generale II in nessun gruppo si ha $a_x = b_x = 0$ oppure $a_y = b_y = 0$; invece la condizione $a_z = b_z = 0$ è soddisfatta in tutti i gruppi eccettuati solo i gruppi 2, 5, 21, 22, 24, 25, 27.

Il caso in cui non si verifica nè l'una nè l'altra delle particolarità, ora considerate, presenta maggiori difficoltà ad essere discusso. L'equazione, che determina i massimi ed i minimi di V sopra una circonferenza $\rho = \rho_0$, è:

$$\{(\alpha_1 - \beta_2) \sin 2\psi - (\alpha_2 + \beta_1) \cos 2\psi\} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{Q}{\rho} \right) + (\alpha_3 \sin \psi - \beta_3 \cos \psi) \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

e si riduce ad un'equazione di 4.^o grado rispetto a $\cos \psi$ od a $\sin \psi$; i valori reali, che da essa si potranno ricavare per ψ , non saranno generalmente indipendenti da ρ_0 . Quindi le linee di massimo e di minimo corrispondenti non coincideranno più coi raggi vettori.

Considerazioni analoghe, ma meno semplici, si possono fare nel caso, in cui i momenti elettrici sono funzioni quadratiche delle coordinate x, y mediante le espressioni che abbiamo precedentemente determinato per le funzioni potenziali.

Aprile, 1892.

Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine.

(Di L. BERZOLARI, a Pavia.)

La curva gobba razionale del 4.^o ordine C_4 (detta anche di 2.^a specie) è conosciuta da lungo tempo (*), e, prescindendo dai lavori generali di SALMON e CAYLEY, in cui per la prima volta se ne trova stabilita l'esistenza, la maggior parte delle sue proprietà più importanti si trova dimostrata con metodo sintetico nella Memoria fondamentale del prof. CREMONA, che ha per titolo *Intorno alla curva gobba del quart'ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado* (Annali di Matem., Serie I, tom. 4.^o, 1861).

Alcune di tali proprietà vennero nuovamente dimostrate, dieci anni più tardi, dal sig. EMIL WEYR (**), partendo dalla rappresentazione analitica della curva mediante quattro forme binarie biquadratiche. Invece l'anno appresso il sig. BERTINI (***), notata l'esistenza di tre corde (*corde principali*), di cui ciascuna è l'intersezione dei piani osculatori ne' suoi estremi, si giovò delle medesime per introdurre una particolare e assai semplice rappresentazione analitica, colla quale potè stabilire alcuni nuovi teoremi, ed in ispecie l'esi-

(*) Le notizie storiche che seguono non si stimeranno, spero, del tutto superflue, poichè non sembrano abbastanza noti taluni lavori italiani relativi al presente argomento, od aventi con esso stretta attinenza.

(**) WEYR, *Ueber rationale Raumcurve vierter Ordnung* (Sitzungsb. d. K. Akad. d. Wissen. zu Wien, Bd. 63, 16 marzo 1871).

(***) BERTINI, *Sulla curva gobba di 4.^o ordine e 2.^a specie* (Rendic. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 5, 20 giugno 1872). — A questa Memoria si collega una mia breve Nota pubblicata nel vol. 23 (1890) dei medesimi Rendiconti.

stenza e le più salienti proprietà di una notevole involuzione biquadratica di punti sulla curva. Quattro anni più tardi, questo lavoro diede occasione al sig. WEYR di riprendere (*) lo studio della C_4 servendosi, come egli stesso aveva già fatto in un lavoro precedente (**), della rappresentazione della curva sopra una conica: con questo metodo egli ha dato dimostrazioni puramente geometriche dei principali risultati dovuti al sig. BERTINI, e di qualche altro.

Ma prima ancora di questi due scritti del sig. WEYR era comparsa una Memoria dell'ARMENANTE (***), nella quale, partendo dalla rappresentazione generale mediante quattro forme binarie biquadratiche, e facendo uso della notazione simbolica, egli dimostrava (con quella speditezza ed eleganza che sono proprie di questo metodo) la maggior parte dei teoremi dovuti al CREMONA ed al BERTINI, ed altri ne aggiungeva. In particolare, l'ARMENANTE ha trovato il significato geometrico di tutte le forme componenti il sistema completo della forma k che dà i punti di contatto dei quattro piani stazionari (****), dimostrando ad un tempo che l'involuzione biquadratica, di cui sopra si è parlato, non è altro che l'involuzione sizigetica determinata sulla curva dalla forma k , e trovando quelle costruzioni dei diversi gruppi polari di k , che furono poi soltanto enunciate parecchi anni più tardi dal WEYR (*****).

In questi ultimi anni lo studio di C_4 è stato proseguito con indirizzo

(*) WEYR, *Weitere Bemerkungen ueber die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt* (Sitzungsb. di Vienna, Bd. 73, 17 febbrajo 1876).

(**) WEYR, *Ueber die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt* (Sitzungsb. di Vienna, Bd. 72, 9 dicembre 1875). Specialmente con questi ultimi lavori del sig. WEYR si collegano tre Note pubblicate dal sig. ADLER nel Bd. 86 (2 novembre e 14 dicembre del 1882) dei medesimi Sitzungsb.: in esse è soprattutto studiato il sistema delle direttrici semplici delle ∞^4 rigate cubiche passanti per C_4 ; sono inoltre distinte le C_4 in quattro specie a seconda della realtà dei loro elementi, ed infine vengono considerati alcuni casi particolari. Nel Bd. 93 dei Sitzungsb. (17 dicembre 1885) trovasi pure uno scritto d'indole analitica dovuto al sig. WIRTINGER, ma esso ha molto di comune colla Nota del sig. WEYR citata in principio. V. altresì l'*Inaugural-Dissertation* del sig. JOLLES: *Die Raumcurve vierter Ordnung II. Species syntetisch behandelt* (Dresden, 1883).

(***) ARMENANTE, *Sulle curve gobbe razionali del quarto ordine* (Giornale di Matem. del prof. BATTAGLINI, vol. 11 e 12, 1873-74).

(****) Di questa rappresentazione della forma binaria biquadratica sulla C_4 si è anche occupato, con metodo diverso, il sig. FRANZ MEYER nel § 24 dell'opera *Apolarität* ecc. (1883), dove però è ricordata la Memoria dell'ARMENANTE.

(***** WEYR, *Notiz ueber harmonische Mittelpunkte eines Quadruples* (Sitzungsb. di Vienna, Bd. 81, 13 maggio 1880).

alquanto differente, soprattutto per opera dei sig.ⁱ STUDY, JOLLES e STAHL (*), i quali hanno messo in rilievo il vantaggio che può trarre la teoria delle curve razionali dalla considerazione di certe curve ad esse intimamente legate, a cui il sig. JOLLES ha dato il nome espressivo di *osculanti*. Non si è però ancora osservato (ch'io sappia) che le osculanti di una curva gobba razionale del 4.^o ordine erano già state considerate in modo esplicito fino dal 1879 dal prof. BELTRAMI nel § 11 delle sue *Ricerche di geometria analitica* (Mem. dell'Accadem. d. Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie III, tom. 10, 27 febbrajo 1879), dove sono altresì dimostrate alcune loro proprietà; e che inoltre le prime osculanti della curva medesima non costituiscono che un caso particolare dei sistemi di cubiche gobbe studiati l'anno dopo dal sig. GERBALDI (**): le due quaterne di forme cubiche da cui parte questo Autore sono, nel caso presente, le prime polari delle quattro forme binarie biquadratiche che definiscono C_4 .

Da ultimo, negli anni 1890-91 è comparso (***) sullo stesso argomento un lavoro del sig. ROHN, fondato sopra una rappresentazione analitica particolare, e diviso in due parti: nella prima l'Autore ritrova molte delle proprietà già note, e determina le equazioni delle principali curve e superficie annesse alla C_4 ; nella seconda, i risultati precedenti vengono applicati alla discussione della realtà od immaginarietà delle più notevoli forme già studiate; poscia sono considerati alcuni casi particolari. Di questi ultimi (sui quali nel seguito, per brevità, non intendo trattenermi) hanno inoltre trattato molti Autori, fra cui ricordo i sig.ⁱ CAYLEY, CREMONA, CLEBSCH, BERTINI, WEYR, APPELL, PICARD, ADLER, WIRTINGER, STUDY, STAHL, BRAMBILLA e DEL RE.

Il presente lavoro trae la sua origine da un altro del sig. GROSS (****)

(*) STUDY, *Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art* (Berichte ueber die Verh. d. k. sächsischen Gesell. d. W. zu Leipzig, 11 gennajo 1886). — JOLLES, *Die Theorie der Osculanten*, ecc. Aachen, 1886. — STAHL, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche*, ecc. (CRELLE'S Journal, Bd. 101, 1887); *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven* (CRELLE, Bd. 104, 1889).

(**) GERBALDI, *Sui sistemi di cubiche gobbe*, ecc. (Mem. della R. Accad. d. Scienze di Torino, Serie II, tom. 32, 1880).

(***) ROHN, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species* (Berichte ueber d. Verhand. d. k. sächsischen Gesell. d. W. zu Leipzig, Erster Theil, 8 giugno 1890; Zweiter Theil, 12 gennajo 1891).

(****) GROSS, *Ueber die Combinanten binärer Formensysteme*, ecc., Inaugural-Dissertation, Stuttgart, 1887. — Un sunto di questa Memoria è comparso, col medesimo titolo, nel tom. 32 (1888) dei Math. Annalen.

relativo alle curve piane razionali, segnatamente del 3.° e del 4.° ordine. In esso, partendo da alcuni concetti generali del sig. BRILL, l'Autore ha dimostrato l'importante teorema che tutte le forme algebriche (o, se si vuole, geometriche), legate in modo invariante ad una C_n razionale del piano, sono invarianti e covarianti binari simultanei di un numero *finito* di tali forme (i *combinanti elementari*). Da questo punto di vista il sig. GROSS ha studiato diffusamente le curve piane del 3.° ordine, ed ha esposto alcuni nuovi risultati su quelle del 4.°

L'estensione degli accennati principii generali alle curve razionali dello spazio ordinario (come pure a quelle di un iperspazio) non offre difficoltà, e nell'Introduzione di questa Memoria essa è brevemente riassunta soltanto per la sua importanza, ed in quei soli punti che sono indispensabili per la chiara intelligenza delle cose che seguono. Invece lo studio e l'interpretazione geometrica dei detti combinanti e delle loro spinte (*Ueberschiebungen*) presentano molto maggiore varietà, e sono quindi meno semplici, per lo spazio che non per il piano. Aggiungasi a questo che, già nel caso della quartica gobba, fra le mutue spinte dei combinanti elementari e delle forme puramente binarie provenienti da quella che dà i punti di contatto dei piani stazionari, sussistono numerose identità, che non sempre sono facili a scoprirsi, ma di cui è assai importante tener conto.

Per la C_4 ho trovato che i combinanti elementari sono in numero di sette, ed ho determinato il loro significato geometrico, come pure quello di un gran numero di spinte formate con essi. Ciò mi ha dato altresì occasione di dimostrare per via diversa dalla consueta, ma affatto spontaneamente e senza riferirmi ad alcuna rappresentazione analitica particolare, molte delle proprietà già note, e, fra le altre, pressochè tutte quelle che il sig. STUDY ha soltanto enunciato nel pregevole articolo sopra riferito. Al contrario mi sembrano nuove, sopra tutte, talune proprietà dei cono quadrici aventi per triedro conjugato comune quello formato dalle corde principali, ed altre relative a certi notevoli complessi di rette BATTAGLINI (non ancora, credo, osservati) contenenti tutte le tangenti di C_4 , e determinati dalle quadriche di un importante fascio legato intimamente alla curva.

Gli sviluppi puramente algebrici e le interpretazioni geometriche, per quanto mi consta, sono del tutto nuove, quando se ne eccettuino le cose dovute all'ARMENANTE, che richiamo nel § 2.

Si noteranno in particolare le forme eleganti ed espressive che assumono le equazioni di molti enti che intervengono nella teoria della nostra curva,

quali la quadrica passante per essa, quella che è involupata dai piani secanti C_4 in quattro punti equianarmonici, la superficie di STEINER di cui C_4 è un'assintotica, la quadrica contenente le quattro coniche singolari di questa superficie, la quadrica su cui giace la curva doppia della sviluppabile osculatrice, l'insieme delle facce del triedro formato dalle corde principali, l'insieme dei quattro piani stazionari, il complesso tetraedrale a cui appartengono tutte le tangenti di C_4 , ecc., nonchè l'equazione del fascio già ricordato di quadriche, espressa in coordinate e di punti, e di piani, e di rette.

INTRODUZIONE.

LE CURVE GOBBE RAZIONALI DI ORDINE QUALUNQUE.

1. Le coordinate omogenee del punto corrente λ di una curva gobba razionale C_n di ordine n siano rappresentate dalle equazioni

$$\rho x_i = f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \dots + a_{in},$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Una proprietà, od un ente geometrico qualunque (curva, superficie, complesso di rette, ecc.) si dicono *invariantivi*, quando le forme algebriche, colle quali sono composte le loro equazioni, godono della proprietà invariantiva tanto rispetto ad una trasformazione lineare qualunque delle variabili quaternarie x_i e delle funzioni $f_i(\lambda)$ ad esse proporzionali (*prima trasformazione lineare*), quanto rispetto ad una trasformazione lineare qualunque delle variabili binarie λ_1, λ_2 (essendo $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$) (*seconda trasformazione lineare*).

È chiaro che le equazioni, da cui sono rappresentati tali enti e tali proprietà aventi relazione colla curva C_n , devono essere composte soltanto di *combinanti* delle quattro forme f_i . Per ciò che concerne quei combinanti, che contengono le sole variabili λ_1, λ_2 , essi sono *combinanti binari* delle forme f_i , e, per un noto teorema del sig. GORDAN (*), coincidono col sistema degl'invarianti e covarianti della seguente *funzione generatrice* con quattro serie di

(*) GORDAN, *Ueber Combinanten* (Math. Annalen, Bd. 5, pag. 116).

variabili binarie λ, μ, ν, ρ :

$$G = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) & f_4(\mu) \\ f_1(\nu) & f_2(\nu) & f_3(\nu) & f_4(\nu) \\ f_1(\rho) & f_2(\rho) & f_3(\rho) & f_4(\rho) \end{vmatrix}.$$

Ma, insieme con queste forme, altre se ne hanno, le quali contengono, oltre ai coefficienti delle f_i ed alle variabili λ_1, λ_2 , anche coordinate di punti, di piani e di rette. Nelle forme che studieremo potranno dunque comparire g serie di variabili $x_i^{(\rho)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $\rho = 1, 2, \dots, g$). In luogo poi delle coordinate di retta, che possono comparire in h serie $p_{ik}^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, h$), possiamo introdurre nuovamente coordinate di punti $y_i^{(\sigma)}, z_i^{(\sigma)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), mediante le relazioni

$$p_{ik}^{(\sigma)} = y_i^{(\sigma)} z_k^{(\sigma)} - y_k^{(\sigma)} z_i^{(\sigma)} = (y_i^{(\sigma)} z_k^{(\sigma)}), \\ \sigma = 1, 2, \dots, h.$$

Finalmente in luogo delle coordinate di piano, che possono intervenire in k serie $u_i^{(\tau)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $\tau = 1, 2, \dots, k$), possiamo introdurre ancora coordinate di punti $y_i^{(\tau)}, z_i^{(\tau)}, t_i^{(\tau)}$ mediante le relazioni

$$u_1^{(\tau)} = \begin{vmatrix} y_2^{(\tau)} & y_3^{(\tau)} & y_4^{(\tau)} \\ z_2^{(\tau)} & z_3^{(\tau)} & z_4^{(\tau)} \\ t_2^{(\tau)} & t_3^{(\tau)} & t_4^{(\tau)} \end{vmatrix}, \quad u_2^{(\tau)} = - \begin{vmatrix} y_3^{(\tau)} & y_4^{(\tau)} & y_1^{(\tau)} \\ z_3^{(\tau)} & z_4^{(\tau)} & z_1^{(\tau)} \\ t_3^{(\tau)} & t_4^{(\tau)} & t_1^{(\tau)} \end{vmatrix}, \\ u_3^{(\tau)} = \begin{vmatrix} y_4^{(\tau)} & y_1^{(\tau)} & y_2^{(\tau)} \\ z_4^{(\tau)} & z_1^{(\tau)} & z_2^{(\tau)} \\ t_4^{(\tau)} & t_1^{(\tau)} & t_2^{(\tau)} \end{vmatrix}, \quad u_4^{(\tau)} = - \begin{vmatrix} y_1^{(\tau)} & y_2^{(\tau)} & y_3^{(\tau)} \\ z_1^{(\tau)} & z_2^{(\tau)} & z_3^{(\tau)} \\ t_1^{(\tau)} & t_2^{(\tau)} & t_3^{(\tau)} \end{vmatrix}, \\ \tau = 1, 2, \dots, k.$$

E si conclude allora facilmente:

Tutte le forme, che sono invariantive rispetto alle due trasformazioni lineari, sono invarianti e covarianti binari simultanei delle seguenti *funzioni generatrici*:

$$\text{della funzione } G = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) & f_4(\mu) \\ f_1(\nu) & f_2(\nu) & f_3(\nu) & f_4(\nu) \\ f_1(\rho) & f_2(\rho) & f_3(\rho) & f_4(\rho) \end{vmatrix}; \quad (1)$$

$$\text{delle funzioni } G_1(x^{(\rho)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) & f_4(\mu) \\ f_1(\nu) & f_2(\nu) & f_3(\nu) & f_4(\nu) \\ x_1^{(\rho)} & x_2^{(\rho)} & x_3^{(\rho)} & x_4^{(\rho)} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\rho = 1, 2, \dots, g;$$

$$\text{delle funzioni } G_2(x^{(\rho_m)}, x^{(\rho_n)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) & f_4(\mu) \\ x_1^{(\rho_m)} & x_2^{(\rho_m)} & x_3^{(\rho_m)} & x_4^{(\rho_m)} \\ x_1^{(\rho_n)} & x_2^{(\rho_n)} & x_3^{(\rho_n)} & x_4^{(\rho_n)} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$\rho_m, \rho_n = 1, 2; 1, 3; \dots; g-1, g;$$

$$\text{delle funzioni } G_2(y^{(\sigma)}, z^{(\sigma)}) = G_2(p_{ik}^{(\sigma)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) & f_4(\mu) \\ y_1^{(\sigma)} & y_2^{(\sigma)} & y_3^{(\sigma)} & y_4^{(\sigma)} \\ z_1^{(\sigma)} & z_2^{(\sigma)} & z_3^{(\sigma)} & z_4^{(\sigma)} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, h;$$

$$\text{delle funzioni } G_3(x^{(\rho_m)}, x^{(\rho_n)}, x^{(\rho_i)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ x_1^{(\rho_m)} & x_2^{(\rho_m)} & x_3^{(\rho_m)} & x_4^{(\rho_m)} \\ x_1^{(\rho_n)} & x_2^{(\rho_n)} & x_3^{(\rho_n)} & x_4^{(\rho_n)} \\ x_1^{(\rho_i)} & x_2^{(\rho_i)} & x_3^{(\rho_i)} & x_4^{(\rho_i)} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$\rho_m, \rho_n, \rho_i = 1, 2, 3; 1, 2, 4; \dots; g-2, g-1, g;$$

$$\text{delle funzioni } G_3(x^{(\rho)}, y^{(\sigma)}, z^{(\sigma)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ x_1^{(\rho)} & x_2^{(\rho)} & x_3^{(\rho)} & x_4^{(\rho)} \\ y_1^{(\sigma)} & y_2^{(\sigma)} & y_3^{(\sigma)} & y_4^{(\sigma)} \\ z_1^{(\sigma)} & z_2^{(\sigma)} & z_3^{(\sigma)} & z_4^{(\sigma)} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

$$\rho = 1, 2, \dots, g; \quad \sigma = 1, 2, \dots, h;$$

$$\begin{aligned}
 \text{delle funzioni } G_3(y^{(\tau)}, z^{(\tau)}, t^{(\tau)}) = G_3(u^{(\tau)}) &= \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) & f_4(\lambda) \\ y_1^{(\tau)} & y_2^{(\tau)} & y_3^{(\tau)} & y_4^{(\tau)} \\ z_1^{(\tau)} & z_2^{(\tau)} & z_3^{(\tau)} & z_4^{(\tau)} \\ t_1^{(\tau)} & t_2^{(\tau)} & t_3^{(\tau)} & t_4^{(\tau)} \end{vmatrix} & (7) \\
 &= u_1^{(\tau)} f_1(\lambda) + u_2^{(\tau)} f_2(\lambda) + u_3^{(\tau)} f_3(\lambda) + u_4^{(\tau)} f_4(\lambda), \\
 &\tau = 1, 2, \dots, k.
 \end{aligned}$$

Esse sono inoltre composte algebricamente coi covarianti quaternari identici, cioè

$$(x^{(\rho_i)}, x^{(\rho_l)}, x^{(\rho_m)}, x^{(\rho_n)}) = \begin{vmatrix} x_1^{(\rho_i)} & x_2^{(\rho_i)} & x_3^{(\rho_i)} & x_4^{(\rho_i)} \\ x_1^{(\rho_l)} & x_2^{(\rho_l)} & x_3^{(\rho_l)} & x_4^{(\rho_l)} \\ x_1^{(\rho_m)} & x_2^{(\rho_m)} & x_3^{(\rho_m)} & x_4^{(\rho_m)} \\ x_1^{(\rho_n)} & x_2^{(\rho_n)} & x_3^{(\rho_n)} & x_4^{(\rho_n)} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_i, \rho_l, \rho_m, \rho_n = 1, 2, 3, 4; \quad 1, 2, 3, 5; \dots; \quad g-3, g-2, g-1, g; \\
 (x^{(\rho_m)}, x^{(\rho_n)}, y^{(\sigma)}, z^{(\tau)}), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\rho_m, \rho_n = 1, 2; \quad 1, 3; \dots; \quad g-1, g, \quad \sigma = 1, 2, \dots, h;$$

$$(x^{(\rho)}, y^{(\tau)}, z^{(\tau)}, t^{(\tau)}) = u^{(\tau)} x^{(\rho)} = u_1^{(\tau)} x_1^{(\rho)} + u_2^{(\tau)} x_2^{(\rho)} + u_3^{(\tau)} x_3^{(\rho)} + u_4^{(\tau)} x_4^{(\rho)}, \quad (10)$$

$$\rho = 1, 2, \dots, g; \quad \tau = 1, 2, \dots, k;$$

$$(y^{(\sigma_m)}, z^{(\sigma_n)}, y^{(\sigma_n)}, z^{(\sigma_n)}), \quad (11)$$

$$\sigma_m, \sigma_n = 1, 2; \quad 1, 3; \dots; \quad h-1, h.$$

La proposizione reciproca è evidente.

I combinanti che, insieme colle variabili binarie, contengono pure delle variabili quaternarie, saranno chiamati *forme bordate*: le forme G_1 , G_2 e G_3 si diranno rispettivamente una, due e tre volte bordate.

2. Le funzioni generatrici G , G_1 e G_2 sono rispettivamente divisibili per $(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\lambda - \rho)(\mu - \nu)(\mu - \rho)(\nu - \rho)$, $(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\mu - \nu)$, $\lambda - \mu$, ed i quozienti (*), che chiameremo G' , G'_1 , G'_2 , si possono sviluppare, colla nota

(*) Circa l'espressione di questi quozienti, vedi BRILL, *Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades* (Math. Ann., Bd. 20, pag. 331); e STEPHANOS CYPARISSOS, *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (Mémoires prés. par divers savants à l'Acad. d. Sciences, Paris, tom. 27, pag. 20).

formola di GORDAN, secondo le potenze dei determinanti $(\lambda\mu)$, $(\lambda\nu)$, ... I coefficienti di queste varie potenze sono allora polari binarié di forme contenenti una sola serie di variabili binarie, ed aventi per lo studio delle curve razionali la massima importanza. Tali forme si diranno i *combinanti elementari* relativi alla C_n , e saranno non bordati quando provengano dallo sviluppo di G' , e bordati una o due volte quando provengano da G'_1 o da G'_2 .

Considerando infine le forme G_3 come *combinanti elementari tre volte bordati*, risulta il teorema (*):

Tutte le forme algebriche che intervengono nella teoria di una curva gobba razionale C_n , e che godono della proprietà invariante rispetto alle due trasformazioni lineari, sono invarianti o covarianti binari simultanei dei combinanti elementari; e reciprocamente. — Intervengono inoltre le espressioni dei seguenti tipi:

$$(xx'x''x'''), \quad (xx'y'z), \quad (yzy'z'), \quad u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4.$$

L'importanza di questo teorema non ha bisogno di essere rilevata.

3. Alla determinazione dei combinanti elementari servono, oltre che gli sviluppi precedenti secondo le potenze dei determinanti identici, anche altri metodi, fra cui accennerò soltanto al seguente, per chiarire certe denominazioni, rimandando per tutto il resto al lavoro del sig. GROSS.

Date p forme binarie

$$f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \dots + a_{in}, \\ i = 1, 2, \dots, p,$$

di ordine n , esiste un sistema di $n - p + 1$ forme

$$\varphi_k(\lambda) = \alpha_{kn}\lambda^n + \binom{n}{1}\alpha_{k,n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{k0}, \\ k = 1, 2, \dots, n - p + 1,$$

di ordine n ad esse apolari. Ora è noto (vedansi i citati lavori dei sig.ⁱ BRILL e STEPHANOS) che i combinanti non bordati dei due sistemi sono gli stessi: non sono invece identiche le loro funzioni generatrici; pure, sviluppando queste nel caso delle φ_k , si possono determinare i combinanti elementari delle φ_k stesse, cioè quelli delle f_i . Queste funzioni generatrici delle φ_k , in

(*) Vedi GROSS, loc. cit., Math. Ann., Bd. 32, pag. 139-40.

virtù delle relazioni bilineari che per l'apolarità intercedono fra i coefficienti delle f_i e delle φ_k , si possono esprimere per mezzo dei coefficienti delle f_i , ed allora si chiameranno *funzioni generatrici indirette* del sistema delle forme f_i .

Applicando questi procedimenti al caso nostro, otterremo una funzione Γ , con $n - 3$ serie di variabili binarie, generatrice indiretta dei combinanti non bordati; e in modo del tutto analogo avremo tre funzioni Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 , rispettivamente con $n - 2$, $n - 1$ ed n serie di variabili binarie, generatrici indirette dei combinanti bordati una, due, tre volte. Le medesime funzioni, quando siano state divise per i determinanti identici $(\lambda\mu)$, $(\lambda\nu)$, ..., verranno ordinatamente significate con Γ' , Γ'_1 , Γ'_2 , Γ'_3 .

LA CURVA GOBBA RAZIONALE DEL QUART' ORDINE.

§ 1.

Le funzioni generatrici. — I combinanti elementari.

4. Le coordinate di un punto λ della curva C_4 siano espresse da

$$\rho x_i = f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + a_{i1}\lambda^3 + a_{i2}\lambda^2 + a_{i3}\lambda + a_{i4},$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

e si abbia in notazione simbolica:

$$f_1(\lambda) = a\lambda^4, \quad f_2(\lambda) = b\lambda^4, \quad f_3(\lambda) = c\lambda^4, \quad f_4(\lambda) = d\lambda^4.$$

Le coordinate p_{ik} della tangente λ sono date da

$$\sigma p_{ik} = F_{ik}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_1} \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_2} \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_1} \right)$$

$$= (01)_{ik}\lambda^6 + 2(02)_{ik}\lambda^5 + [(12)_{ik} + 3(03)_{ik}]\lambda^4 + 2[(13)_{ik} + 2(04)_{ik}]\lambda^3$$

$$+ [(23)_{ik} + 3(14)_{ik}]\lambda^2 + 2(24)_{ik}\lambda + (34)_{ik},$$

$$i, k = 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4,$$

dove si è posto

$$(pq)_{ik} = \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{kp} & a_{kq} \end{vmatrix}.$$

Le coordinate del piano osculatore λ sono

$$\tau u_i = \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{72} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_m}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_m}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 f_m}{\partial \lambda_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial \lambda_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_k}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f_k}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 f_k}{\partial \lambda_2^2} \end{vmatrix}$$

$$= (012)_{mnk} \lambda^6 + 3(013)_{mnk} \lambda^5 + 3[2(014)_{mnk} + (023)_{mnk}] \lambda^4$$

$$+ [8(024)_{mnk} + (123)_{mnk}] \lambda^3 + 3[2(034)_{mnk} + (124)_{mnk}] \lambda^2$$

$$+ 3(134)_{mnk} \lambda + (234)_{mnk},$$

$$i, m, n, k = 1, 2, 3, 4; \quad 2, 3, 1, 4; \quad 3, 1, 2, 4; \quad 4, 3, 2, 1,$$

dove si è posto

$$(pqr)_{mnk} = \begin{vmatrix} a_{mp} & a_{mq} & a_{mr} \\ a_{np} & a_{nq} & a_{nr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{vmatrix}.$$

I determinanti di 4.^o ordine, che compariranno come coefficienti nei combi-
nanti, verranno denotati come segue:

$a_4 = (0123)$	$A_1 = (x012)$	$B_1 = (yz01)$	$\omega_0 = (xyz0)$
$a_5 = (0124)$	$A_2 = (x013)$	$B_2 = (yz02)$	$\omega_1 = (xyz1)$
$a_6 = (0134)$	$A_3 = (x014)$	$B_3 = (yz03)$	$\omega_2 = (xyz2)$
$a_7 = (0234)$	$A_4 = (x023)$	$B_4 = (yz04)$	$\omega_3 = (xyz3)$
$a_8 = (1234);$	$A_5 = (x024)$	$B_5 = (yz12)$	$\omega_4 = (xyz4),$
	$A_6 = (x034)$	$B_6 = (yz13)$	
	$A_7 = (x123)$	$B_7 = (yz14)$	
	$A_8 = (x124)$	$B_8 = (yz23)$	
	$A_9 = (x134)$	$B_9 = (yz24)$	
	$A_{10} = (x234);$	$B_{10} = (yz34);$	

dove, per esempio, si ha

$$(0123) = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Porremo inoltre

$$\alpha_0 = \sum_1^4 a_{i0} u_i, \quad \alpha_1 = \sum_1^4 a_{i1} u_i, \quad \alpha_2 = \sum_1^4 a_{i2} u_i, \quad \alpha_3 = \sum_1^4 a_{i3} u_i, \quad \alpha_4 = \sum_1^4 a_{i4} u_i.$$

5. Allora le funzioni generatrici dirette sono:

$$G' = a_4 \lambda \mu \nu \rho + a_5 (\mu \nu \rho + \nu \lambda \rho + \lambda \mu \rho + \lambda \mu \nu)$$

$$+ a_6 (\lambda \mu + \lambda \nu + \lambda \rho + \mu \nu + \mu \rho + \nu \rho) + a_7 (\lambda + \mu + \nu + \rho) + a_8,$$

$$G'_1 = \{ (A_1 \nu^2 + A_2 \nu + A_3) \mu^2 + [A_2 \nu^2 + (A_3 + A_4) \nu + A_5] \mu + A_3 \nu^2 + A_5 \nu + A_6 \} \lambda,$$

$$+ \{ [A_2 \nu^2 + (A_3 + A_4) \nu + A_5] \mu^2 + [(A_3 + A_4) \nu^2 + (2A_5 + A_7) \nu + A_6 + A_8] \mu \\ + A_5 \nu^2 + (A_6 + A_8) \nu + A_9 \} \lambda$$

$$+ (A_3 \nu^2 + A_5 \nu + A_6) \mu^2 + [A_5 \nu^2 + (A_6 + A_8) \nu + A_9] \mu + A_6 \nu^2 + A_9 \nu + A_{10},$$

$$G'_2 = (B_1 \mu^3 + B_2 \mu^2 + B_3 \mu + B_4) \lambda^3$$

$$+ [B_2 \mu^3 + (B_3 + B_5) \mu^2 + (B_4 + B_6) \mu + B_7] \lambda^2$$

$$+ [B_3 \mu^3 + (B_4 + B_6) \mu^2 + (B_7 + B_8) \mu + B_9] \lambda$$

$$+ B_4 \mu^3 + B_7 \mu^2 + B_9 \mu + B_{10},$$

$$G_3 = \alpha \lambda^4 = \alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4,$$

$$g_3 = \omega \lambda^4 = \omega_0 \lambda^4 + \omega_1 \lambda^3 + \omega_2 \lambda^2 + \omega_3 \lambda + \omega_4.$$

La g_3 non è altro che la G_3 , in cui però le y , z siano combinate in determinanti di 2.^o ordine: essa contiene quindi linearmente le coordinate di punto e quelle di retta, e precisamente si ha

$$\omega_i = (a_{2i} p_{34} - a_{3i} p_{24} + a_{4i} p_{23}) x_1 + (-a_{1i} p_{34} + a_{3i} p_{14} - a_{4i} p_{13}) x_2 \\ + (a_{1i} p_{24} - a_{2i} p_{14} + a_{4i} p_{12}) x_3 + (-a_{1i} p_{23} + a_{2i} p_{13} - a_{3i} p_{12}) x_4.$$

Le funzioni generatrici indirette sono

$$\Gamma' = a_4 \lambda^4 + 4 a_5 \lambda^3 + 6 a_6 \lambda^2 + 4 a_7 \lambda + a_8,$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= (4 A_1 \mu^3 + 6 A_2 \mu^2 + 4 A_4 \mu + A_7) \lambda^3 \\ &+ [6 A_2 \mu^3 + 4(6 A_3 + A_4) \mu^2 + (16 A_5 + A_7) \mu + 4 A_8] \lambda^2 \\ &+ [4 A_4 \mu^3 + (16 A_5 + A_7) \mu^2 + 4(6 A_6 + A_8) \mu + 6 A_9] \lambda \\ &+ A_7 \mu^3 + 4 A_8 \mu^2 + 6 A_9 \mu + 4 A_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_2 &= \{(12 B_1 \nu^2 + 8 B_2 \nu + 2 B_5) \mu^2 + [8 B_2 \nu^2 + 2(6 B_3 + B_5) \nu + 3 B_6] \mu \\ &+ 2 B_5 \nu^2 + 3 B_6 \nu + 2 B_8\} \lambda^2 \\ &+ [8 B_2 \nu^2 + 2(6 B_3 + B_5) \nu + 3 B_6] \mu^2 \\ &+ [2(6 B_3 + B_5) \nu^2 + 6(8 B_4 + B_6) \nu + 2(6 B_7 + B_8)] \mu \\ &+ 3 B_6 \nu^2 + 2(6 B_7 + B_8) \nu + 8 B_9 \lambda \\ &+ (2 B_5 \nu^2 + 3 B_6 \nu + 2 B_8) \mu^2 + [3 B_6 \nu^2 + 2(6 B_7 + B_8) \nu + 8 B_9] \mu \\ &+ 2 B_8 \nu^2 + 8 B_9 \nu + 12 B_{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma'_3 &= \alpha_0 \lambda \mu \nu \rho + \frac{1}{4} \alpha_1 (\mu \nu \rho + \nu \lambda \rho + \lambda \mu \rho + \lambda \mu \nu) \\ &+ \frac{1}{6} \alpha_2 (\lambda \mu + \lambda \nu + \lambda \rho + \mu \nu + \mu \rho + \nu \rho) + \frac{1}{4} \alpha_3 (\lambda + \mu + \nu + \rho) + \alpha_4 = \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\rho, \end{aligned}$$

$$\gamma'_3 = \omega_0 \lambda \mu \nu \rho + \dots = \omega_\lambda \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho.$$

6. Le forme G' e Γ' danno senz'alcuno sviluppo i due unici combinanti elementari non bordati, che sono

$$\Gamma' = w_\lambda^4 = a_4 \lambda^4 + 4 a_5 \lambda^3 + 6 a_6 \lambda^2 + 4 a_7 \lambda + a_8,$$

$$G' = w_\lambda w_\mu w_\nu w_\rho.$$

In secondo luogo, sviluppando G'_1 e Γ'_1 secondo le potenze dei determinanti $(\lambda \mu), \dots$, si ottengono due combinanti elementari semplicemente bordati, l'uno W_λ^6 di 6.° grado, l'altro Q_λ^2 di 2.° grado in λ . I due sviluppi sono:

$$G'_1 = W_\lambda^2 W_\mu^2 W_\nu^2 - \frac{1}{10} [(\mu \nu)^2 Q_\lambda^2 + (\nu \lambda)^2 Q_\mu^2 + (\lambda \mu)^2 Q_\nu^2],$$

$$\Gamma'_1 = 4 W_\lambda^3 W_\mu^3 + \frac{8}{5} (\lambda \mu)^2 Q_\lambda Q_\mu,$$

dove

$$\begin{aligned} W_\lambda^6 &= A_1 \lambda^6 + 3 A_2 \lambda^5 + 3(A_4 + 2 A_3) \lambda^4 + (A_7 + 8 A_5) \lambda^3 \\ &\quad + 3(A_8 + 2 A_6) \lambda^2 + 3 A_9 \lambda + A_{10}, \\ Q_\lambda^2 &= (A_4 - 3 A_3) \lambda^2 + (A_7 - 2 A_5) \lambda + A_8 - 3 A_6. \end{aligned}$$

Da G'_2 e Γ'_2 si ottengono similmente due combinanti elementari doppiamente bordati, l'uno V_λ^6 di 6.º grado, l'altro P_λ^2 di 2.º grado in λ . I due sviluppi sono:

$$\begin{aligned} G'_2 &= V_\lambda^3 V_\mu^3 + \frac{1}{5} (\lambda \mu)^2 P_\lambda P_\mu, \\ \Gamma'_2 &= 12 V_\lambda^2 V_\mu^2 V_\nu^2 - \frac{3}{5} [(\mu \nu)^2 P_\lambda^2 + (\nu \lambda)^2 P_\mu^2 + (\lambda \mu)^2 P_\nu^2], \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} V_\lambda^6 &= B_1 \lambda^6 + 2 B_2 \lambda^5 + (3 B_3 + B_5) \lambda^4 + 2(2 B_4 + B_6) \lambda^3 \\ &\quad + (3 B_7 + B_8) \lambda^2 + 2 B_9 \lambda + B_{10}, \\ P_\lambda^2 &= (2 B_3 - B_5) \lambda^2 + (8 B_4 - B_6) \lambda + 2 B_7 - B_8. \end{aligned}$$

Infine dalle forme G_3 , Γ'_3 e g_3 , γ'_3 si ottengono senza sviluppi i combinanti elementari tre volte bordati, cioè

$$\begin{aligned} G_3 &= \alpha_\lambda^4 = \alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4, \\ g_3 &= \omega_\lambda^4 = \omega_0 \lambda^4 + \omega_1 \lambda^3 + \omega_2 \lambda^2 + \omega_3 \lambda + \omega_4, \end{aligned}$$

e le loro polari

$$\Gamma'_3 = \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\rho, \quad \gamma'_3 = \omega_\lambda \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho.$$

7. La nostra curva ha dunque i sette combinanti elementari

$$w_\lambda^4, \quad W_\lambda^6, \quad Q_\lambda^2, \quad V_\lambda^6, \quad P_\lambda^2, \quad \alpha_\lambda^4, \quad \omega_\lambda^4.$$

Prescindendo dagli ultimi due, la cui formazione è del tutto ovvia, gli altri sono espressi simbolicamente mediante le quattro forme $f_i(\lambda)$ nel modo che ora espongo. In primo luogo si ha

$$w_\lambda^4 = 96 (ab) (ac) (ad) (bc) (bd) (cd) a_\lambda b_\lambda c_\lambda d_\lambda,$$

e questa forma non differisce che per un fattore numerico da quella studiata dall'ARMENANTE e da lui chiamata k_λ^4 ; si ha infatti

$$w_\lambda^4 = -96 k_\lambda^4.$$

In secondo luogo abbiamo

$$\begin{aligned} W_\lambda^6 &= x_1 A_\lambda^6 + x_2 B_\lambda^6 + x_3 C_\lambda^6 + x_4 D_\lambda^6, \\ Q_\lambda^2 &= x_1 M_\lambda^2 + x_2 N_\lambda^2 + x_3 R_\lambda^2 + x_4 S_\lambda^2, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} A_\lambda^6 &= -24(bc)(cd)(db)b_\lambda^2 c_\lambda^2 d_\lambda^2, & B_\lambda^6 &= 24(cd)(da)(ac)c_\lambda^2 d_\lambda^2 a_\lambda^2, \\ C_\lambda^6 &= -24(da)(ab)(bd)d_\lambda^2 a_\lambda^2 b_\lambda^2, & D_\lambda^6 &= 24(ab)(bc)(ca)c_\lambda^2 b_\lambda^2 a_\lambda^2; \\ M_\lambda^2 &= 6(bc)(cd)(db)[(cd)^2 b_\lambda^2 + (db)^2 c_\lambda^2 + (bc)^2 d_\lambda^2], \\ N_\lambda^2 &= -6(cd)(da)(ac)[(da)^2 c_\lambda^2 + (ac)^2 d_\lambda^2 + (cd)^2 a_\lambda^2], \\ R_\lambda^2 &= 6(da)(ab)(bd)[(ab)^2 d_\lambda^2 + (bd)^2 a_\lambda^2 + (da)^2 b_\lambda^2], \\ S_\lambda^2 &= -6(ab)(bc)(ca)[(bc)^2 a_\lambda^2 + (ca)^2 b_\lambda^2 + (ab)^2 c_\lambda^2]. \end{aligned}$$

Le sole prime quattro di queste forme sono già state considerate dall'ARMENANTE, e, salvo il fattore -24 , da lui denotate coi medesimi simboli: esse sono i combinanti sestici delle forme $f_i(\lambda)$ prese a tre a tre, mentre le M_λ^2 , N_λ^2 , R_λ^2 , S_λ^2 ne sono i combinanti quadratici (*).

Sono poi da notare le seguenti identità, di cui la prima è accennata anche nel n.º 4 del lavoro dell'ARMENANTE:

$$\begin{aligned} a_\mu^4 A_\lambda^6 + b_\mu^4 B_\lambda^6 + c_\mu^4 C_\lambda^6 + d_\mu^4 D_\lambda^6 &= (\mu\lambda)^3 w_\mu w_\lambda^3, \\ a_\mu^4 M_\lambda^2 + b_\mu^4 N_\lambda^2 + c_\mu^4 R_\lambda^2 + d_\mu^4 S_\lambda^2 &= (\mu\lambda) w_\mu^3 w_\lambda. \end{aligned}$$

Da ultimo si ha

$$\begin{aligned} V_\lambda^6 &= 4[(ad)_1 p_{23} + (bd)_1 p_{34} + (cd)_1 p_{12} + (bc)_1 p_{14} + (ca)_1 p_{24} + (ab)_1 p_{34}], \\ P_\lambda^2 &= 8[(ad)_3 p_{23} + (bd)_3 p_{34} + (cd)_3 p_{12} + (bc)_3 p_{14} + (ca)_3 p_{24} + (ab)_3 p_{34}], \end{aligned}$$

dove, come d'uso, gli indici stanno a denotare le spinte. I coefficienti delle p_{ik} nelle forme V_λ^6 e P_λ^2 sono rispettivamente i combinanti sestici e quadratici (i *covarianti elementari*, secondo la denominazione del sig. GORDAN) delle f_i prese a due a due e furono considerati dall'ARMENANTE al n.º 3 del loc. cit.

Nei paragrafi seguenti assegnerò il significato geometrico di tutte le funzioni generatrici dirette ed indirette, come pure di tutti i combinanti elementari e di molte loro spinte.

(*) Cfr. SALMON, *Leçons d'Algèbre Supérieure*, 2.^a ediz. francese, 1890, pag. 392 e seg.

§ 2.

Il sistema completo della forma w_λ^4 . — Identità fondamentali.

8. Chiameremo i e j i due invarianti, $h = h_\lambda^4$ l'hessiano, e $t = t_\lambda^6$ il covariante sestico di w_λ^4 . I significati geometrici di queste forme, nonchè delle polari di w_λ^4 , sono stabiliti nella prima parte della Memoria dell'ARMENANTE, e sono i seguenti.

È noto (*) che la curva possiede quattro piani stazionari, i cui punti di contatto, per brevità, chiameremo pure stazionari; che inoltre essa ammette una semplice infinità di rette trisecanti, che sono generatrici di uno stesso iperboloide H (l'unico che contenga la curva), e di cui quattro tangenti a C_4 . Sappiamo inoltre (**) che le tre corde principali concorrono in uno stesso punto 0.

Orbene, le equazioni

$$w_\lambda^4 = 0, \quad h_\lambda^4 = 0, \quad 3i h_\lambda^4 - 2j w_\lambda^4 = 0, \quad t_\lambda^6 = 0$$

rappresentano ordinatamente i punti stazionari, i punti di contatto ed i punti di secamento delle trisecanti tangenti, ed i punti d'appoggio delle corde principali. Le prime tre quaterne di punti appartengono pertanto all'involuzione sizigetica determinata sulla curva da w_λ^4 ed avente per punti doppi i punti $t_\lambda^6 = 0$.

L'equazione

$$0 = G' = w_\lambda w_\mu w_\nu w_\rho$$

rappresenta la condizione perchè i quattro punti λ, μ, ν, ρ della curva siano in uno stesso piano.

L'annullarsi di j esprime la condizione perchè C_4 abbia un punto doppio; il contemporaneo annullarsi di i e j dà la condizione perchè C_4 abbia una cuspid. L'annullarsi del solo invariante i caratterizza una classe particolare di curve chiamate *equianarmoniche* per una ragione ovvia, e di cui si sono occupati il sig. BERTINI (loc. cit.) ed altri.

È già stato osservato dall'ARMENANTE che si ha identicamente

$$(aw)^4 = 0, \quad (bw)^4 = 0, \quad (cw)^4 = 0, \quad (dw)^4 = 0,$$

(*) CREMONA, loc. cit., Annali di Matem., tom. 4.

(**) BERTINI, loc. cit., n.º 11.

e quindi

$$(\alpha w)^4 = 0,$$

ossia che ogni piano dello spazio taglia la curva in un gruppo di punti che è apolare al gruppo dei punti stazionari. Si riconosce poi facilmente che l'equazione del punto 0 è

$$(\alpha h)^4 = 0,$$

e che le sue coordinate sono quindi

$$(ah)^4, \quad (bh)^4, \quad (ch)^4, \quad (dh)^4.$$

Pertanto i piani passanti per 0 tagliano C_4 in gruppi di punti che sono apolari a ciascun gruppo dell'involuzione sizigetica. In altri termini:

L'involuzione (di 2.^a specie) conjugata all'involuzione sizigetica è determinata sulla curva dai piani passanti per 0.

9. Tra le forme di cui ora si è parlato, i combinanti elementari e le loro mutue spinte sussistono molte identità (ben inteso, non tutte fra loro indipendenti), che sono della massima importanza per lo studio della curva: le più utili per noi si trovano fra le seguenti:

$$5(Ww)^4 W_\lambda^2 + 4(Qw)^2 w_\lambda^2 = 0, \tag{I}$$

$$5(Ww)^2 W_\lambda^4 w_\lambda^2 - Q_\lambda^2 w_\lambda^4 = 0, \tag{II}$$

$$30(Wh)^4 W_\lambda^2 - 6(Qh)^2 h_\lambda^2 - 5iQ_\lambda^2 = 0, \tag{III}$$

$$15(Wh)^2 W_\lambda^4 h_\lambda^2 + 5(Qw)^2 w_\lambda^2 \cdot w_\lambda^4 + 2Q_\lambda^2 h_\lambda^4 = 0, \tag{IV}$$

$$15(Ww)^4 (Ww')^2 w_\lambda'^2 + 12(Qh)^2 h_\lambda^2 + 4iQ_\lambda^2 = 0, \tag{V}$$

$$15(Ww)^4 (Wh)^2 h_\lambda^2 + 2i(Qw)^2 w_\lambda^2 + 4jQ_\lambda^2 = 0, \tag{VI}$$

$$5(Wt)^4 W_\lambda^2 t_\lambda^2 - (Qt)^2 t_\lambda^4 = 0, \tag{VII}$$

$$25(WW')^4 W_\lambda^2 W_\lambda'^2 - 10(WQ)^2 W_\lambda^4 - 4\overline{Q_\lambda^2} = 0, \tag{VIII}$$

$$5(WW')^4 (Ww)^2 (W'w)^2 - (WQ)^2 (Ww)^4 = 0, \tag{IX}$$

$$15(WW')^4 (Wh)^2 (W'h)^2 - 18(WQ)^2 (Wh)^4 + 2i(QQ)^2 = 0, \tag{X}$$

$$25(WW')^2 (Ww)^4 (W'w')^4 - 60(WW')^4 (Wh)^2 (W'h)^2 - 8(WQ)^2 (Wh)^4 = 0, \tag{XI}$$

$$75(WW')^2 (Ww)^4 (W'h)^4 - 15i(WQ)^2 (Ww)^4 + 4j(QQ)^2 = 0, \tag{XII}$$

$$300(WW')^2(Wh)^4(W'h)^4 - 90i(WQ)^2(W'h)^4 + 5j(WQ)^2(Ww)^4 + 6i^2(QQ')^2 = 0, \quad (\text{XIII})$$

$$5(Vw)^3 V_\lambda^3 w_\lambda + (Pw)P_\lambda w_\lambda^3 = 0, \quad (\text{XIV})$$

$$25(VV')^4 V_\lambda^2 V_\lambda'^2 - 5(VP)^2 V_\lambda^4 - \overline{P_\lambda^2} = 0, \quad (\text{XV})$$

$$75(VV')^2(Vw)^4(V'w)^4 - 225(VV')^4(V'h)^2(V'h)^2 - 25i(VV')^6 + 15(VP)^2(V'h)^4 + i(PP')^2 = 0, \quad (\text{XVI})$$

$$5(WV)^6 + (PQ)^2 = 0, \quad (\text{XVII})$$

$$(\alpha w)^4 = 0, \quad (\text{XVIII})$$

$$(\omega w)^4 = 0, \quad (\text{XIX})$$

$$(Vt)^6 = 0. \quad (\text{XX})$$

Le (I), (II), (VIII) e (XV), come vedremo, sono casi particolari di relazioni generali dovute al sig. STEPHANOS.

Se, come faremo talvolta, poniamo

$$H_\lambda^8 = (WW')^2 W_\lambda^4 W_\lambda'^4, \quad J_\lambda^4 = (WW')^4 W_\lambda^2 W_\lambda'^2, \quad K_\lambda^4 = (WQ)^2 W_\lambda^4, \\ A = (WW')^6, \quad B = (QQ')^2,$$

le identità (VIII), ..., (XIII) prendono rispettivamente la forma:

$$25J_\lambda^4 - 10K_\lambda^4 - 4\overline{Q_\lambda^2} = 0, \quad (\text{VIII}')$$

$$5(Jw)^4 - (Kw)^4 = 0, \quad (\text{IX}')$$

$$15(Jh)^4 - 18(Kh)^4 + 2iB = 0, \quad (\text{X}')$$

$$175(Hw)^4(Hw')^4 - 120(Jh)^4 - 56(Kh)^4 + 35iA = 0, \quad (\text{XI}')$$

$$525(Hw)^4(Hh)^4 - 375i(Jw)^4 + 105jA + 28jB = 0, \quad (\text{XII}')$$

$$2100(Hh)^4(Hh')^4 + 1200j(Jw)^4 - 600i(Jh)^4 + 35j(Kw)^4 - 630i(Kh)^4 + 70i^2A + 42i^2B = 0. \quad (\text{XIII}')$$

Terminiamo facendo notare le seguenti relazioni, di cui faremo uso molte volte, e che si possono far discendere sia dalla formola di GORDAN, sia da alcune formole generali dovute al prof. D'OVIDIO (*).

(*) D'OVIDIO, *Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie* (Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino, vol. 14, 25 maggio 1879).

$$\begin{aligned}
 (ww')^2 w_x^2 w_y'^2 &= h_x^2 h_y^2 + \frac{1}{3} i (xy)^2, \\
 (wh)^2 w_x^2 h_y^2 &= (wh)^2 w_y^2 h_x^2 = \frac{1}{6} i w_x^2 w_y^2 + \frac{1}{3} j (xy)^2, \\
 (hh')^2 h_x^2 h_y'^2 &= \frac{1}{3} j w_x^2 w_y^2 - \frac{1}{6} i h_x^2 h_y^2 + \frac{1}{18} i^2 (xy)^2, \\
 (wh) w_x w_y^2 h_x^3 &= t_x^4 t_y^2 - \frac{1}{6} i (xy) w_x^3 w_y, \\
 (wh) w_x^3 h_x h_y^2 &= t_x^4 t_y^2 + \frac{1}{6} i (xy) w_x^3 w_y.
 \end{aligned}
 \tag{A}$$

§ 3.

Primi risultati intorno alle principali forme di punti.

10. È facile riconoscere che se in W_λ^6 e Q_λ^2 alle x_i si sostituiscono le coordinate del punto 0, si ottiene rispettivamente t_λ^6 e zero. Di qui deriva una conseguenza importante. Indichiamo per un istante con y_1, y_2, y_3, y_4 le coordinate di 0, e chiamiamo δ l'operazione definita come segue:

$$\delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} y_3 + \frac{\partial}{\partial x_4} y_4.$$

È chiaro che tale operazione è della stessa natura di quella considerata dal CLEBSCH (*) nella sua classica *Theorie der bin. alg. Formen* (§ 36), laonde possiamo dire:

« Data una superficie qualunque d'ordine n avente in 0 un punto multiplo secondo r , e rappresentata dall'equazione

$$\Phi = 0,$$

« per avere l'equazione del cono d'ordine r ad essa tangente in 0 basta applicare $n - r$ volte alla forma Φ l'operazione δ secondo la regola data dal CLEBSCH al loc. cit., ritenendo che si ha:

$$\delta W_\lambda^6 = t_\lambda^6, \quad \delta Q_\lambda^2 = 0. \quad \text{»}$$

11. Denotando con A'_1, A'_2, \dots ciò che diventano i determinanti A_1, A_2, \dots ,

(*) Circa il processo δ (di ARONHOLD) v. l. pure GORDAN. *Invariantentheori*, Bd. 2, § 5.

quando in essi si facciano le sostituzioni $x_i = f_i(\rho)$, si trova:

$$\begin{aligned} A'_1 &= -a_4\rho - a_5 & A'_2 &= a_4\rho^2 - a_6 & A'_3 &= a_5\rho^2 + a_6\rho \\ A'_4 &= -a_4\rho^3 - a_7 & A'_5 &= -a_5\rho^3 + a_7\rho & A'_6 &= -a_6\rho^3 - a_7\rho^2 \\ A'_7 &= a_4\rho^4 - a_8 & A'_8 &= a_5\rho^4 + a_8\rho & A'_9 &= a_6\rho^4 - a_8\rho^2 \\ & & A'_{10} &= a_7\rho^4 + a_8\rho^3. \end{aligned}$$

Colle medesime sostituzioni

$$\begin{aligned} W_\lambda^6 &\text{ diventa } -(\lambda\rho)^3 w_\lambda^3 w_\rho, \\ Q_\lambda^2 &\text{ " } -(\lambda\rho) w_\lambda w_\rho^3, \\ G'_1 &\text{ " } (\rho\lambda)(\rho\mu)(\rho\nu) w_\lambda w_\mu w_\nu w_\rho, \\ \Gamma'_1 &\text{ " } -2(\lambda\rho)^3 w_\mu^3 w_\rho - 2(\mu\rho)^3 w_\lambda^3 w_\rho + (\lambda\mu)^2(\mu\rho) w_\lambda w_\rho^3 \\ &\quad + (\lambda\mu)^2(\lambda\rho) w_\mu w_\rho^3. \end{aligned}$$

Pertanto:

L'equazione $W_\lambda^6 = 0$ rappresenta il piano osculatore a C_4 nel punto λ .

L'equazione $Q_\lambda^2 = 0$ rappresenta il piano passante per il punto λ e per i punti di contatto dei tre piani osculatori uscenti da λ ().*

L'equazione $G'_1 = 0$ rappresenta il piano determinato dai tre punti λ, μ, ν della curva.

Il significato geometrico di Γ'_1 è meno semplice e trovasi nel § 5.

L'equazione

$$0 = B = (QQ')^2$$

*rappresenta il cono quadrico, avente il vertice nel punto 0, ed involupato dai piani $Q_\lambda^2 = 0$ (**): esso ha per triedro conjugato il triedro formato dalle corde principali.*

Uguagliando a zero il discriminante di G'_1 , preso rispetto a ν , risulta che, dati λ e μ , l'equazione

$$\begin{aligned} & (WW')^2 W_\lambda^4 W_\mu^4 + \frac{1}{2}(\lambda\mu)^4 (WW')^6 + \frac{1}{100}(\lambda\mu)^4 (QQ')^2 \\ & - 2(\lambda\mu)^2 (WW')^4 W_\lambda^2 W_\mu^2 - \frac{1}{5}(\lambda\mu)^2 (WQ)^2 W_\lambda^2 W_\mu^2 \\ & + \frac{3}{50}(\lambda\mu)^2 Q_\lambda^2 \cdot Q_\mu^2 - \frac{1}{5}W_\lambda^2 W_\mu^4 \cdot Q_\lambda^2 - \frac{1}{5}W_\lambda^4 W_\mu^2 \cdot Q_\mu^2 = 0 \end{aligned}$$

rappresenta l'insieme dei due piani tangenti a C_4 condotti per la corda $\lambda\mu$.

(*) Per il teorema geometrico vedi CREMONA, loc. cit., pag. 96.

(**) Il teorema geometrico è dovuto al sig. CREMONA (loc. cit., pag. 98). — Un'altra dimostrazione sintetica è stata data dal sig. STAHL (CRELLE, Bd. 101, pag. 90). — Vedi pure ROHN, loc. cit., Erster Theil, pag. 220, e WIRTINGER, loc. cit.

In particolare per $\mu = \lambda$ si ha che, dato λ , l'equazione

$$5H_{\lambda}^6 - 2W_{\lambda}^6 \cdot Q_{\lambda}^2 = 0$$

rappresenta l'insieme dei due piani bitangenti a C_4 condotti per la tangente del punto λ .

Date invece le coordinate x_i di un punto qualunque dello spazio, gli otto valori di λ che soddisfanno l'equazione precedente forniscono i punti di contatto dei quattro piani bitangenti a C_4 e passanti per il punto considerato.

Se in particolare si assume il punto 0, le sue coordinate annullano Q_0^2 , epperò i punti cercati sono quelli il cui corrispondente iperboloide $H_{\lambda}^6 = 0$ passa per 0. Si trova così che i punti di contatto dei piani bitangenti condotti da 0 corrispondono alle otto radici dell'equazione

$$i^2 w^2 + 6ih^2 - 12jwh = 0.$$

Essa definisce due gruppi dell'involuzione sizigetica, che incontreremo nuovamente nel n.º 31, e il cui discriminante, a meno di un fattore numerico, coincide con quello di w .

12. Se in $(Wt)^6$ si fa $x_i = f_i(\rho)$, si trova

$$- \frac{1}{4} (jw\rho^4 - ih\rho^4).$$

Adunque l'equazione

$$(Wt)^6 = 0$$

rappresenta il piano contenente l'unico gruppo dell'involuzione sizigetica i cui quattro punti siano in un piano, gruppo che, com'è noto (*), gode anche della proprietà che le sue prime polari sono apolari al gruppo dei punti stazionari.

Come vedremo fra poco, il piano precedente è il piano polare di 0 non soltanto rispetto alla quadrica passante per C_4 (come risulta dalla mia Nota sopra citata), ma rispetto a molte altre quadriche non meno notevoli.

Col sig. ROHN chiameremo *principale* il tetraedro formato dal detto piano e dalle facce del triedro delle corde principali (**).

(*) Vedi la mia Nota *Sull'involuzione cubica* (Rendic. d. R. Accad. d. Scienze fis. e mat. di Napoli, 11 aprile 1891).

(**) Nella rappresentazione, di cui fa sempre uso il sig. ROHN nel lavoro ricordato, il tetraedro di riferimento è il tetraedro principale. Anche il sig. GERBALDI nei due ultimi capitoli del lavoro sulla superficie di STEINER, di cui diremo in appresso, ha tratto profitto di questo medesimo tetraedro, assumendolo pure come fondamentale.

13. Da quanto si è detto in principio del n.º 11, facendo le spinte opportune, risulta ancora che, ponendo $x_i = f_i(\rho)$,

$$H_\lambda^8 \quad \text{diventa} \quad \frac{1}{5} (\lambda \rho)^4 \left[-\frac{1}{2} w_\rho^4 \cdot w_\lambda^4 + 2 (\lambda \rho)^2 h_\lambda^2 h_\rho^2 - \frac{1}{12} (\lambda \rho)^4 i \right],$$

$$J_\lambda^4 \quad \text{"} \quad \frac{1}{25} (\lambda \rho)^2 [w_\rho^4 \cdot w_\rho^2 w_\lambda^2 - 3 (\lambda \rho)^2 h_\rho^4],$$

$$K_\lambda^4 \quad \text{"} \quad -\frac{1}{10} (\lambda \rho)^2 [3 w_\rho^4 \cdot w_\rho^2 w_\lambda^2 + (\lambda \rho)^2 h_\rho^4],$$

$$(KQ)^2 K_\lambda^2 \quad \text{"} \quad -\frac{1}{10} (\lambda \rho) \overline{w_\rho^4} \cdot w_\rho^3 w_\lambda,$$

$$(KQ)^2 (KQ')^2 \quad \text{"} \quad -\frac{1}{20} \overline{w_\rho^4},$$

$$(Jt)^4 t_\lambda^2 \quad \text{"} \quad \frac{1}{25} [w_\rho^4 \cdot (wt)^2 w_\rho^2 t_\rho^2 t_\lambda^2 - 3 h_\rho^4 \cdot t_\rho^4 t_\lambda^2],$$

$$(Kt)^4 t_\lambda^2 \quad \text{"} \quad -\frac{1}{10} [3 w_\rho^4 \cdot (wt)^2 w_\rho^2 t_\rho^2 t_\lambda^2 + h_\rho^4 \cdot t_\rho^4 t_\lambda^2].$$

Di qui e da qualche altra considerazione, che ometto per abbreviare, risulta:

L'equazione

$$0 = H_\lambda^8 = (WW')^2 W_\lambda^4 W_\lambda'^4$$

rappresenta ∞^1 quadriche, ognuna delle quali contiene la tangente in λ alla curva, ha in λ un contatto quadripunto con questa, e la taglia ulteriormente in quattro punti ρ : la corrispondenza fra i punti λ e ρ è simmetrica e di 4.º grado, ecc. Ciascuna delle due equazioni

$$J_\lambda^4 = 0, \quad K_\lambda^4 = 0$$

rappresenta ∞^1 quadriche tangenti alla curva nel punto λ , passanti per 0 ed aventi in esso per piano tangente comune quello rappresentato dall'equazione

$$(Qt)^2 t_\lambda^4 = 0 \quad [\text{vedi la (VII)}].$$

Ciascuna delle equazioni

$$0 = (Kt)^4 t_\lambda^2 = (WQ)^2 (Wt)^4 t_\lambda^2, \quad 0 = (Jt)^4 t_\lambda^2 = (WW')^4 (Wt)^2 (W't)^2 t_\lambda^2$$

rappresenta ∞^1 quadriche circoscritte al tetraedro principale, ed aventi in 0 come piano tangente comune il piano $Q_\lambda^2 = 0$.

L'equazione

$$0 = (KQ)^2 K_\lambda^2 = (WQ)^2 (WQ')^2 W_\lambda^2$$

rappresenta ∞^4 superficie del 3.^o ordine, aventi un punto doppio in 0: una qualunque di esse tocca C_4 in ciascuno dei quattro punti stazionari, passa per il punto λ , e taglia ulteriormente C_4 nei punti di contatto dei piani osculatori uscenti da λ .

Il cono quadrico tangente in 0 ad una di queste superficie ha una equazione, che, per la (VIII)', si può scrivere nelle forme seguenti:

$$0 = (tQ)^2 (tQ')^2 t_\lambda^2 \equiv 5(Jt)^4 t_\lambda^2 - 2(Kt)^4 t_\lambda^2:$$

tutti questi coni hanno per triedro conjugato comune quello formato dalle corde principali.

Ponendo $x_i = f_i(\rho)$, il secondo membro dell'equazione precedente diventa, salvo un fattore numerico,

$$2w_\rho^4 \cdot (wt)^2 w_\rho^2 t_\rho^2 t_\lambda^2 - h_\rho^4 \cdot t_\rho^4 t_\lambda^2,$$

e se di questa espressione si fa la seconda spinta sopra $-(\lambda\rho)w_\lambda w_\rho^3$ (che, come sappiamo, è ciò che diventa Q_λ^2 colle medesime sostituzioni), facendo uso di alcune formole date dal CLEBSCH nel § 42 della *Theorie* ecc., nonchè dell'identità di CAYLEY, si trova t_ρ^6 .

E si ha la proprietà:

L'equazione

$$0 = (tQ)^2 (tQ')^2 (tQ'')^2 \equiv 5(Jt)^4 (Qt)^2 - 2(Kt)^4 (Qt)^2$$

rappresenta l'insieme delle tre facce del triedro formato dalle corde principali.

14. Prima di proseguire cerchiamo in quali punti la C_4 è tagliata da una qualunque delle quadriche rappresentate dall'una o dall'altra delle equazioni

$$(WW')^4 W_\lambda^2 W_\mu'^2 = 0, \quad (WW')^2 W_\lambda^4 W_\mu'^4 = 0,$$

essendo λ e μ due parametri arbitrari. A tal fine osserviamo che per lo sviluppo di GORDAN si ha:

$$(WW')^4 W_\lambda^2 W_\mu'^2 = J_\lambda^2 J_\mu^2 + \frac{1}{3} (\lambda\mu)^2 A,$$

$$(WW')^2 W_\lambda^4 W_\mu'^4 = H_\lambda^4 H_\mu^4 + \frac{12}{7} (\lambda\mu)^2 J_\lambda^2 J_\mu^2 + \frac{1}{5} (\lambda\mu)^4 A.$$

Ora, dovendo nei primi membri fare le sostituzioni $x_i = f_i(\rho)$, potremo invece eseguirle nelle spinte H , J ed A , ed applicare poscia l'operazione di polare. Si è già trovato ciò che diventano H e J con tali sostituzioni, ed è facile trovare che la quarta polare del primo risultato e la seconda polare

del secondo rispetto a μ sono

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{525}(\lambda\mu)^4\overline{w_\rho^2} - \frac{1}{60}(\mu\rho)^4w_\lambda^4 \cdot w_\rho^4 - \frac{1}{60}(\lambda\rho)^4w_\mu^4 \cdot w_\rho^4 - \frac{1}{60}i(\lambda\rho)^4(\mu\rho)^4 \\ & + \frac{1}{5}(\lambda\rho)^4(\mu\rho)^2h_\mu^2h_\rho^2 + \frac{1}{5}(\mu\rho)^4(\lambda\rho)^2h_\lambda^2h_\rho^2 - \frac{1}{15}(\lambda\rho)^2(\mu\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2w_\mu^2 \\ & + \frac{2}{105}(\lambda\mu)^2(\mu\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2w_\rho^2 + \frac{2}{105}(\lambda\mu)^2(\lambda\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\mu^2w_\rho^2 - \frac{4}{35}(\lambda\rho)^2(\mu\rho)^2(\lambda\mu)^2h_\rho^4, \\ & \frac{1}{50}(\mu\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2w_\rho^2 + \frac{1}{50}(\lambda\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\mu^2w_\rho^2 - \frac{3}{25}(\lambda\rho)^2(\mu\rho)^2h_\rho^4 - \frac{1}{75}(\lambda\mu)^2\overline{w_\rho^2}. \end{aligned}$$

Si trova poi subito che colle dette sostituzioni A diventa

$$-\frac{1}{20}\overline{w_\rho^2},$$

laonde si conclude:

Se nelle forme

$$(WW')^4W_\lambda^2W_\mu'^2, \quad (WV')^2W_\lambda^4W_\mu'^4$$

si fanno le sostituzioni $x_i = f_i(\rho)$, si ottiene rispettivamente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{50}(\mu\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2w_\rho^2 + \frac{1}{50}(\lambda\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\mu^2w_\rho^2 - \frac{3}{25}(\lambda\rho)^2(\mu\rho)^2h_\rho^4 - \frac{3}{100}(\lambda\mu)^2\overline{w_\rho^2}, \\ & -\frac{11}{300}(\lambda\mu)^4\overline{w_\rho^2} - \frac{1}{60}(\mu\rho)^4w_\lambda^4 \cdot w_\rho^4 - \frac{1}{60}(\lambda\rho)^4w_\mu^4 \cdot w_\rho^4 - \frac{1}{60}i(\lambda\rho)^4(\mu\rho)^4 \\ & + \frac{1}{5}(\lambda\rho)^4(\mu\rho)^2h_\mu^2h_\rho^2 + \frac{1}{5}(\mu\rho)^4(\lambda\rho)^2h_\lambda^2h_\rho^2 - \frac{1}{15}(\lambda\rho)^2(\mu\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2w_\mu^2 \\ & - \frac{8}{25}(\lambda\rho)^2(\mu\rho)^2(\lambda\mu)^2h_\rho^4 + \frac{4}{75}(\lambda\mu)^2(\mu\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2w_\rho^2 + \frac{4}{75}(\lambda\mu)^2(\lambda\rho)^2w_\rho^4 \cdot w_\mu^2w_\rho^2. \end{aligned}$$

15. Dalle formole ora trovate discendono parecchie conseguenze, di cui, per ora, noteremo le seguenti. Ponendo $x_i = f_i(\rho)$

$$\begin{aligned} (VW')^4(WQ)^2W_\lambda'^2 & \text{diventa } \frac{3}{100}(\lambda\rho)\overline{w_\rho^2} \cdot w_\lambda w_\rho^3, \\ (VW')^4(WQ)^2(W'Q)^2 & \text{ " } \frac{3}{200}\overline{w_\rho^4}, \\ (VW')^4(VW'')^2(V'W'')^2W_\lambda''^2 & \text{ " } -\frac{1}{250}(\lambda\rho)\overline{w_\rho^2} \cdot w_\lambda w_\rho^3, \\ (VW')^4(VW'')^2(V'W'')^2(W''Q)^2 & \text{ " } -\frac{1}{500}\overline{w_\rho^4}, \\ (VW')^4(VW''''')^4(WW''')^2(W'W''')^2 & \text{ " } \frac{11}{10000}\overline{w_\rho^4}. \end{aligned}$$

Ed allora seguono facilmente le proprietà:

Ciascuna delle equazioni

$$0 = (WW')^4 (WQ)^2 W_\lambda'^2 = (JQ)^2 J_\lambda^2 + \frac{1}{3} A Q_\lambda^2,$$

$$0 = (WW')^4 (WW'')^2 (W'W'')^2 W_\lambda''^2 = (JW)^4 W_\lambda^2$$

rappresenta ∞^1 superficie cubiche tangenti a C_4 in ciascuno dei quattro punti stazionari, passanti per il punto λ e per i punti di contatto dei piani osculatori uscenti da λ , e passanti inoltre per il punto 0 ed aventi quivi per piano tangente comune quello rappresentato da $Q_\lambda^2 = 0$.

Ciascuna delle equazioni

$$0 = (WW')^4 (WQ)^2 (W'Q)^2 = (JQ)^2 (JQ')^2 + \frac{1}{3} AB,$$

$$0 = (WW')^4 (WW')^2 (W'W'')^2 (W''Q)^2 = (JK)^4,$$

$$0 = (WW')^4 (W''W''')^4 (WW''')^2 (W'W''')^2 = (JJ')^4 + \frac{1}{3} A^2$$

rappresenta una superficie del 4.^o ordine, che ha con C_4 un contatto quadri-punto in ciascuno dei quattro punti stazionari, ed ha inoltre un punto doppio in 0, e quivi come cono tangente quello rappresentato dall'equazione

$$0 = B = (QQ')^2.$$

Anche l'equazione

$$0 = (KQ)^2 (KQ')^2 = (WQ)^2 (W'Q')^2 (W'Q'')$$

rappresenta una superficie del 4.^o ordine avente con C_4 un contatto quadri-punto in ciascuno dei punti stazionari; essa ha in 0 un punto triplo, ed il cono ivi tangente si spezza nelle tre facce del triedro formato dalle corde principali.

Si hanno inoltre i due seguenti risultati, di cui specialmente il primo è molto notevole per la sua semplicità:

La (unica) superficie S di STEINER, su cui la C_4 è una linea assintotica (), è rappresentata dall'equazione*

$$0 = S = 5(WQ)^2 (W'Q')^2 (W'Q'')^2 + \overline{(QQ')^2}.$$

(*) Circa il legame esistente fra la superficie di STEINER e le quartiche gobbe di 2.^a specie, vedansi i citati lavori dei sig.¹ CREMONA, BERTINI, ARMENANTE, BELTRAMI, STUDY, JOLLES, STAHL e ROHN; inoltre: CLEBSCH, *Ueber die STEINER'sche Fläche* (Giornale di

L'equazione complessiva dei quattro piani stazionari di C_4 è

$$0 = D = -256(WQ)^2(WQ')^2(WQ'')^2 + 144(\overline{WW'})^2 \\ - \frac{1024}{25}(\overline{QQ'})^2 - \frac{384}{5}(WW')^6(QQ')^2.$$

Che l'equazione $S = 0$ rappresenti effettivamente la detta superficie di STEINER, risulterà al § 7 per una via che ci condurrà ad altre conseguenze interessanti.

In uno studio analitico diretto sulla superficie di STEINER (*) anche il sig. GERBALDI ha dato le equazioni delle due ultime e di altre forme geometriche, ma, naturalmente, le sue equazioni sono composte con elementi affatto differenti dai nostri, e relativi alle quattro forme ternarie quadratiche che servono alla rappresentazione della superficie. Delle forme precedenti S e D , e di altre ad esse collegate, mi occuperò di nuovo nel paragrafo seguente, dove verrà anche stabilito il nesso fra le espressioni del sig. GERBALDI e le mie.

§ 4.

Il fascio $A + kB = 0$ ed altre quadriche notevoli.

La superficie di Steiner. — La rete dei coni quadrici aventi per triedro conjugato comune quello formato dalle corde principali.

16. Se nel secondo membro dell'equazione

$$0 = A + kB = (WW')^6 + k(QQ')^2$$

poniamo $x_i = f_i(\rho)$, otteniamo

$$-\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2}k\right)\overline{w_\rho^4},$$

e si conclude:

L'equazione $A + kB = 0$ rappresenta un fascio di quadriche tangenti

CRELLE, Bd. 67); CREMONA, *Rappresentazione della superficie di STEINER e delle superficie gobbe di terzo ordine in un piano* (Rend. del R. Istituto Lombardo, vol. 4, 1867), e la Memoria del sig. GERBALDI che citerò fra poco, e nella quale trovansi pure molte notizie bibliografiche.

(*) GERBALDI, *La superficie di STEINER studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche* (Torino, 1881).

a C_4 in ciascuno dei punti stazionari ed aventi come tetraedro conjugato comune il tetraedro principale.

Oltre al cono $(QQ')^2 = 0$ di cui già si è parlato, appartengono a questo fascio parecchie quadriche aventi un significato geometrico assai notevole.

Per $k = -\frac{1}{10}$ si ha l'iperboloide (unico) H passante per la curva (*).

Per $k = \frac{2}{5}$ si ha la quadrica E involupata dai piani che tagliano C_4 in punti formanti un gruppo equianarmonico. Essa è inscritta nella sviluppabile osculatrice di C_4 , ed è il luogo delle rette da cui si possono condurre tre piani osculatori a C_4 (**).

Per $k = -\frac{8}{5}$ si ottiene la quadrica M a cui sono tangenti tutti i piani bitangenti di C_4 : essa contiene le tangenti a C_4 ne' suoi punti stazionari (***)

Per $k = -\frac{4}{15}$ si trova la quadrica T contenente le quattro coniche singolari della superficie di STEINER (****).

Dalla ispezione delle formole date dal sig. GERBALDI nel lavoro citato, non è difficile concludere che, volendo che la forma da lui chiamata T (Capo II, n.º 14) coincida anche nei fattori numerici con quella da noi ugualmente significata, si deve porre:

$$T = \frac{27}{5} [15(WW')^6 - 4(QQ')^2].$$

Inoltre chiamiamo ancora S e D le forme trovate alla fine del paragrafo

(*) L'equazione simbolica di H trovasi pure, ma sotto forma del tutto diversa e meno espressiva, nel n.º 7 della Memoria dell'ARMENANTE.

(**) Il teorema geometrico è dovuto al prof. CREMONA (loc. cit., Annali di Matem., tom. 4, pag. 88). — Un'altra dimostrazione sintetica del teorema, che i piani osculatori di C_4 toccano una quadrica (e di parecchi altri), trovasi nel lavoro citato del sig. STAHL (Giornale di CRELLE, Bd. 101).

(***) Il teorema geometrico è dovuto al sig. CREMONA (loc. cit., §§ 14 e 20).

(****) È noto (KUMMER, Monatsb. d. Berliner Akad., 1863, e Giornale di CRELLE, Bd. 64; CREMONA, Giornale di CRELLE, Bd. 63) che la superficie di STEINER ammette quattro piani doppi, di cui cioè ciascuno la tocca in tutti i punti di una conica (conica singolare). A pag. 327 del lavoro ora citato il sig. CREMONA ha dimostrato che le quattro coniche singolari giacciono sopra una stessa quadrica, ed in un lavoro successivo (Rend. d. R. Istituto Lombardo, 1867) ha dimostrato inoltre che i piani doppi della superficie di STEINER sono i piani stazionari di tutte le quartiche assintotiche della medesima. Vedi anche GERBALDI, loc. cit., Capi II e III.

precedente, e conserviamo, per ora, ai simboli Y , U , V e W (da non confondersi coi nostri V e W) i significati loro attribuiti dal sig. GERBALDI. Si riconosce allora facilmente che il determinante (13)' che trovasi nel Capo II del lavoro di questo Autore equivale a

$$- \frac{243}{4} D.$$

D'altra parte il sig. GERBALDI dimostra che lo stesso determinante equivale a

$$- \frac{1}{3} (2Y + W),$$

quindi risulta l'identità

$$D = \frac{4}{729} (2Y + W).$$

Inoltre l'Autore al principio dello stesso Capo ha trovato le identità

$$Y = 2U + \frac{1}{3} T^2, \quad V = \frac{1}{3} T^2 - U, \quad W = 4U + 2T^2,$$

da cui segue

$$2Y + W = \frac{8}{3} (3U + T^2),$$

quindi si ha pure

$$D = \frac{32}{729} \left(U + \frac{1}{3} T^2 \right).$$

Introducendo S , si ha poi infine

$$D = \frac{16}{729} T^2 - \frac{256}{5} S,$$

e queste sono le relazioni che legano le espressioni del sig. GERBALDI colle mie.

Notiamo infine che *il discriminante del fascio* $A + kB = 0$ è

$$\frac{3}{16} (i^3 - 6j^2) k^3 + \frac{9}{20} \left(\frac{11}{8} i^3 + 3j^2 \right) k^2 + \frac{27}{50} (i^3 - j^2) k + \frac{3}{125} (2i^3 + 3j^2),$$

espressione che si riduce a $\frac{3}{8} i^3$ per la quadrica E , ed a $\frac{9}{64} j^2$ per la quadrica H .

17. Altre quadriche notevoli ci danno il modo di interpretare geometricamente alcuni altri covarianti.

È noto (*) che la sviluppabile osculatrice di C_4 è del 6.º ordine ed ammette una linea doppia D_6 pure del 6.º ordine, la quale giace sopra una quadrica Σ : questa ha per equazione

$$\begin{aligned} 0 &= 80j(WW')^6 + 32j(QQ')^2 - 75i(WQ)^2(Ww)^4 \\ &= 16j(5A + 2B) - 75i(Kw)^4, \end{aligned}$$

e taglia C_4 nei punti forniti dall'equazione

$$10w(3ih - 2jw) = 0,$$

cioè nei punti stazionari e nei punti di secamento delle tangenti trisecanti. Ciò è d'accordo con quanto ha dimostrato il prof. CREMONA (loc. cit., Annali di Matem., tom. 4, pag. 93): i primi punti sono semplici, e gli altri cuspidali per D_6 .

È pur noto che i piani osculatori della curva D_6 toccano una medesima quadrica: questa quadrica ha l'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= 20j(WW')^6 + 8j(QQ')^2 - 25i(WQ)^2(Ww)^4 \\ &= 4j(5A + 2B) - 25i(Kw)^4, \end{aligned}$$

e taglia quindi C_4 nei punti dati da

$$w(2ih - w) = 0.$$

Lo spigolo di regresso (chiamato H dal sig. CREMONA ed B_6 dal sig. ROHN) della sviluppabile dei piani bitangenti a C_4 è situato sopra una quadrica Λ , la cui equazione è

$$\begin{aligned} 0 &= 5i(WW')^6 + 7i(QQ')^2 - 75(WQ)^2(Wh)^4 \\ &= i(5A + 7B) - 75(Kh)^4. \end{aligned}$$

Se nel secondo membro poniamo $x_i = f_i(\rho)$, risulta $\overline{h\rho^4}$, il che è d'accordo coll'osservazione fatta dal sig. CREMONA a pag. 99 del loc. cit., e completata

(*) I teoremi a cui qui si allude sono tutti dovuti al sig. CREMONA (loc. cit., Annali di Matem., tom. 4, § 11 e seg.). — Vedansi inoltre le Memorie di ARMENANTE e del sig. STAHL, ed i §§ VIII e IX della prima parte del lavoro del sig. ROHN, dove si trovano le equazioni delle quadriche che qui vengono considerate, come pure di quella che nel numero precedente si denotò con M , riferite però al tetraedro principale. — L'equazione di Σ fu determinata anche dal sig. BRAMBILLA (Rendic. d. R. Accad. d. Scienze fis. e matem. di Napoli, 14 Novembre 1885), ma nella speciale rappresentazione dovuta al sig. BERTINI.

dal sig. ROHN a pag. 242 della prima parte: i punti h di contatto delle tangenti trisecanti sono punti cuspidali per R_6 , ed anzi hanno qui per tangenti cuspidali le rette che toccano C_4 .

Ricordiamo infine che la sviluppabile osculatrice della curva D_6 possiede una linea doppia F_4 del 4.° ordine e di 2.^a specie; questa giace adunque sopra una quadrica N , la quale ha per equazione

$$\begin{aligned} 0 &= 80j^2(WW')^6 + (32j^2 - 15i^3)(QQ')^2 - 100ij(WQ)^2(Ww)^4 \\ &\quad + 150i^2(WQ)^2(Wh)^4 \\ &= 80j^2A + (32j^2 - 15i^3)B - 100ij(Kw)^4 + 150i^2(Kh)^4. \end{aligned}$$

Essa taglia quindi C_4 nei punti rappresentati da

$$-4j^2w^2 - 3i^2h^2 + 8ijwh = 0.$$

18. Facendo le sostituzioni $x_i = f_i(\rho)$ si trova che

$$\begin{aligned} (WQ)^2(Ww)^4 &\text{ diventa } -\frac{2}{5}wh, \\ (WQ)^2(Wh)^4 &\text{ " } -\frac{1}{20}(iw^2 + 2h^2). \end{aligned}$$

Pertanto le due equazioni

$$(WQ)^2(Ww)^4 = 0, \quad (WQ)^2(Wh)^4 = 0$$

rappresentano due coni quadrici di vertice 0, rispetto ai quali il triedro delle corde principali è un triedro conjugato comune; il primo taglia C_4 nei punti stazionari e nei punti di contatto delle tangenti trisecanti, il secondo nei due gruppi

$$h + \sqrt{-\frac{i}{2}}w = 0, \quad h - \sqrt{-\frac{i}{2}}w = 0$$

dell'involuzione sizigetica.

Al fascio determinato da questi due coni manifestamente non appartiene il cono $(QQ')^2 = 0$, epperò

La rete dei coni quadrici di vertice 0, di cui il triedro delle corde principali è un triedro conjugato comune, può venire rappresentata dall'equazione

$$\alpha_1(QQ')^2 + \alpha_2(WQ)^2(Ww)^4 + \alpha_3(WQ)^2(Wh)^4 = 0,$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono parametri variabili.

Dalle formole precedenti risulta altresì l'interessante teorema, che, malgrado la sua semplicità, non sembra ancor noto:

Dato un gruppo qualsivoglia

$$\lambda w + h = 0$$

dell'involuzione sizigetica, nella rete dei coni quadrici aventi il vertice in 0, e di cui il triedro delle corde principali è un triedro conjugato comune, esiste un cono che tocca la curva C_4 in ciascuno dei quattro punti del gruppo considerato.

Dato λ , un tal cono è rappresentato dall'equazione

$$(2\lambda^2 - i)(QQ')^2 + 5\lambda(WQ)^2(Ww)^4 + 10(WQ)^2(Wh)^4 = 0,$$

da cui risulta che tutti i coni così ottenuti formano un sistema ∞^1 di indice due.

L'involuppo di questi coni è evidentemente il cono che dal punto 0 proietta la curva C_4 , e che pertanto è rappresentato dall'equazione

$$8i(\overline{QQ'})^2 + 25(\overline{WQ})^2(\overline{Ww})^4 - 80(QQ')^2 \cdot (WQ)^2(Wh)^4 = 0.$$

Dalle cose precedenti seguono pure nuove costruzioni dell'involuzione sizigetica, quando si parta da uno qualunque de' suoi gruppi, per esempio da quello costituito dai punti stazionari: i coni quadrici del fascio avente per basi le quattro rette che da 0 proiettano i punti del gruppo danno ad uno ad uno i gruppi dell'involuzione (*).

19. Le formole trovate nel n.º 14 ci permettono di determinare alcuni coni notevoli della rete testè considerata. Osserviamo intanto che, in virtù di quelle formole, la quadrica

$$(WW')^2(Ww)^4W_\lambda'^4 = 0$$

taglia C_4 nei punti ρ forniti dall'equazione

$$\frac{1}{25}(\lambda\rho)^2 \left[-\frac{1}{3}i(\lambda\rho)^2 w_\rho^4 + 2w_\rho^4 \cdot h_\lambda^2 h_\rho^2 - 8w_\rho^2 w_\lambda^2 \cdot h_\rho^4 \right] = 0,$$

e che la quadrica

$$(WW')^2(Wh)^4W_\lambda'^4 = 0$$

taglia invece C_4 nei punti ρ dati dall'equazione

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{100}w_\rho^4 \cdot h_\lambda^4 + \frac{1}{100}w_\lambda^4 \cdot w_\rho^4 \cdot h_\rho^4 + \frac{11}{300}j(\lambda\rho)^4 w_\rho^4 - \frac{1}{20}i(\lambda\rho)^4 h_\rho^4 \\ & - \frac{3}{25}(\lambda\rho)^2 h_\rho^4 \cdot h_\lambda^2 h_\rho^2 - \frac{1}{50}i(\lambda\rho)^2 w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2 w_\rho^2 = 0 (**). \end{aligned}$$

(*) Cfr. BERTINI, loc. cit., n.º 13-17.

(**) Qui occorre far capo alle identità (A), con cui si chiude il § 2.

Le quadriche rappresentate sì dalla prima che dalla seconda equazione passano per il punto 0: le prime hanno in esso come piano tangente quello rappresentato dall'equazione

$$0 = (Ww)^4 (Wt)^2 t_\lambda^4 \equiv (Qt)^2 (tw)^2 t_\lambda^2 w_\lambda^2 \equiv (Qw)^2 (tw)^2 t_\lambda^4,$$

le altre il piano

$$\begin{aligned} 0 &= (Wh)^4 (Wt)^2 t_\lambda^4 = \frac{1}{6} i (Qt)^2 t_\lambda^4 - \frac{2}{5} (Qt)^2 (th)^2 t_\lambda^2 h_\lambda^2 \\ &= \frac{1}{6} i (Qt)^2 t_\lambda^4 + \frac{1}{5} (Qh)^2 (th)^2 t_\lambda^4. \end{aligned}$$

Ciò posto, l'equazione

$$(WW')^4 (Wh)^2 (W'h)^2 = 0$$

rappresenta un cono della rete già studiata; esso taglia C_4 nei punti dati da

$$\frac{1}{150} (iw^2 - 18h^2) = 0,$$

ossia nei due gruppi

$$\sqrt{\frac{i}{2}} w + 3h = 0, \quad \sqrt{\frac{i}{2}} w - 3h = 0$$

dell'involuzione sizigetica. Tutto ciò è confermato dalla (X).

Anche le equazioni

$$(WW')^2 (Ww)^4 (W'h)^4 = 0,$$

$$(WW')^2 (Ww)^4 (W'w')^4 = 0,$$

$$(WW')^2 (Wh)^4 (W'h')^4 = 0$$

rappresentano tre coni di quella medesima rete: essi tagliano rispettivamente C_4 nei punti

$$\frac{2}{75} w(jw - 3ih) = 0,$$

$$- \frac{8}{25} h^2 = 0,$$

$$- \frac{1}{600} (3i^2 w^2 + 18ih^2 - 4jwh) = 0.$$

Di qui segue che di questi tre coni il primo deve appartenere al fascio de-

terminato dai due coni

$$(QQ')^2 = 0, \quad (WQ)^2 (Ww)^4 = 0,$$

ed il secondo al fascio determinato dai due coni

$$(WQ)^2 (Wh)^4 = 0, \quad (WW')^4 (Wh)^2 (W'h)^2 = 0.$$

Ciò è confermato dalle identità (XII) e (XI); la (XIII) conferma poi che il terzo cono appartiene alla rete suddetta.

20. Facendo $x_i = f_i(\rho)$

$$(Ww)^4 W_\lambda^2 \text{ diventa } \frac{4}{5} (\rho\lambda) h_\lambda h_\rho^3,$$

$$(Wh)^4 W_\lambda^2 \quad " \quad - \frac{1}{5} \left[t_\lambda^2 t_\rho^4 + \frac{2}{3} (\lambda\rho) i w_\lambda w_\rho^3 \right],$$

$$(Qh)^2 h_\lambda^2 \quad " \quad - t_\lambda^2 t_\rho^4 + \frac{1}{6} (\lambda\rho) i w_\lambda w_\rho^3.$$

Adunque l'equazione

$$(Ww)^4 W_\lambda^2 = 0$$

rappresenta un piano secante C_λ nel punto λ e nei tre punti costituenti la prima polare di λ rispetto al gruppo dei punti di contatto delle tangenti triseccanti. Questo piano passa per 0, ed al variare di λ involuppa il cono quadrico

$$(W'W')^2 (Ww)^4 (W'w')^4 = 0,$$

di cui si è parlato nel numero precedente.

Anche i due ultimi covarianti sopra scritti rappresentano piani passanti per 0: al variare di λ , il primo involuppa il cono

$$(WW')^2 (Wh)^4 (W'h)^4 = 0,$$

ed il secondo il cono

$$0 = (hh')^2 (Qh)^2 (Q'h)^2 \equiv i^2 (QQ')^2 + 6j (Qw)^2 (Q'w)^2 - 3i (Qh)^2 (Q'h)^2,$$

come risulta dalla terza delle (A).

Alcuni coni della rete fin qui considerata si ripresenteranno nel § 7, quando troveremo il cono circoscritto da 0 ad una quadrica qualunque del fascio $A + kB = 0$.

§ 5.

**Le osculanti di C_4 . — Forme di piani.
L'involuzione biquadratica determinata sopra C_4
da un punto qualunque dello spazio.**

21. Coi sig.ⁱ JOLLES e STAHL diremo *prima osculante* di C_4 nel suo punto μ , od anche brevemente *cubica* (μ), la curva del 3.^o ordine, di cui le coordinate del punto corrente λ sono rappresentate come funzioni del parametro λ nel modo seguente:

$$x_i = \frac{1}{4} \left(\mu_1 \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_1} + \mu_2 \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_2} \right),$$

ossia simbolicamente:

$$x_1 = a_\mu a_\lambda^3, \quad x_2 = b_\mu b_\lambda^3, \quad x_3 = c_\mu c_\lambda^3, \quad x_4 = d_\mu d_\lambda^3.$$

Come risulta senz'altro dalla definizione, la prima osculante di C_4 nel punto μ è, in generale, una cubica gobba, avente in comune con C_4 il punto μ , ed inoltre la tangente ed il piano osculatore relativi. Solo quando μ sia uno dei punti stazionari, la cubica (μ) è contenuta interamente nel corrispondente piano stazionario di C_4 . Le proprietà più notevoli di queste osculanti scaturiscono dal seguente teorema:

Le prime osculanti di C_4 in due suoi punti qualunque λ e μ hanno un piano osculatore comune; e precisamente: il piano che oscula la cubica (λ) nel suo punto μ è altresì il piano che oscula la cubica (μ) nel punto λ di questa. L'equazione di questo piano è

$$0 = \Gamma_1 = 4 \left[W_\lambda^3 W_\mu^3 + \frac{2}{5} (\lambda \mu)^2 Q_\lambda Q_\mu \right],$$

e dalla sua simmetria risulta la verità del teorema ora enunciato.

Prendiamo ora a considerare la forma G_3 , ossia α_λ^4 , che è l'unico combinante elementare il quale contenga, oltre alle variabili λ , soltanto le coordinate di piano. Dato λ , questa forma, uguagliata a zero, rappresenta il punto λ di C_4 , e date invece le u_i , rappresenta i quattro punti λ comuni a C_4 ed al piano (u_1, u_2, u_3, u_4) : la (XVIII) è la traduzione analitica di questa proprietà.

Ciò posto, è chiaro che, dato μ e facendo variare λ , l'equazione

$$\alpha_\mu \alpha_\lambda^3 = 0$$

rappresenta tutti i punti λ della cubica (μ) ; mentre, se teniamo fisso λ e facciamo variare μ , la stessa equazione rappresenta tutti i punti della tangente a C_4 nel punto λ . Da ciò risulta che la cubica (μ) ha un punto comune con ciascuna delle tangenti di C_4 , e precisamente quel punto che, pensato sulla tangente, ha il parametro μ . Ognuna delle prime osculanti è così riferita *prospettivamente* al sistema delle tangenti di C_4 , nel senso del sig. STUDY.

Le tangenti di C_4 determinano sulle diverse prime osculanti altrettante punteggiate projective. Le tangenti a due cubiche (μ) e (ν) in due punti corrispondenti (cioè aventi lo stesso parametro λ) giacciono in un medesimo piano osculatore a C_4 (nel punto di parametro λ), quindi si tagliano, ed i punti d'incontro generano una conica (*), che chiameremo la *seconda osculante mista* dei due punti μ, ν , od anche *conica* (μ, ν) , mentre chiameremo $P(\mu, \nu)$ il suo piano.

Pertanto due cubiche (μ) e (ν) non solo hanno in comune un piano osculatore, cioè il piano $P(\mu, \nu)$, ma in esso hanno pure la stessa conica della rispettiva sviluppabile osculatrice, cioè la conica (μ, ν) .

Le coordinate di un punto λ di questa sono espresse da

$$x_i = \frac{1}{4 \cdot 3} \left\{ \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda_1^2} \mu_1 \nu_1 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} (\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial \lambda_2^2} \mu_2 \nu_2 \right\},$$

ossia simbolicamente da

$$x_1 = a_\mu a_\nu a_\lambda^2, \quad x_2 = b_\mu b_\nu b_\lambda^2, \quad x_3 = c_\mu c_\nu c_\lambda^2, \quad x_4 = d_\mu d_\nu d_\lambda^2,$$

laonde l'equazione di esso punto è

$$a_\mu a_\nu a_\lambda^2 = 0.$$

Se $\nu = \mu$, si ottiene la *seconda osculante (pura)* di C_4 nel punto μ , che chiameremo *conica* (μ, μ) : essa giace nel piano osculatore di C_4 nel punto μ , piano che diremo $P(\mu, \mu)$, ed ha in comune con C_4 il punto μ e la relativa tangente.

22. La forma α_λ^4 ha due invarianti ι ed η , e per notissime proprietà risulta:

Uguagliando a zero i due invarianti ι ed η , rispettivamente quadratico e cubico, si ottengono le equazioni tangenziali della quadrica già chiamata E, e della superficie S di STEINER.

(*) Vedi STUDY, loc. cit., pag. 8.

Se ora in luogo delle u_i si sostituiscono le coordinate $\Phi_i(\rho)$ del piano osculatore a C_4 nel punto ρ , i coefficienti α_i di $\alpha\lambda^4$ assumono i valori seguenti (*):

$$\begin{aligned}\alpha'_0 &= a_4\rho^3 + 3a_5\rho^2 + 3a_6\rho + a_7, \\ \alpha'_1 &= -3a_4\rho^4 - 8a_5\rho^3 - 6a_6\rho^2 + a_8, \\ \alpha'_2 &= 3a_4\rho^5 + 6a_5\rho^4 - 6a_7\rho^2 - 3a_8\rho, \\ \alpha'_3 &= -a_4\rho^6 + 6a_6\rho^4 + 8a_7\rho^3 + 3a_8\rho^2, \\ \alpha'_4 &= -a_5\rho^6 - 3a_6\rho^5 - 3a_7\rho^4 - a_8\rho^3.\end{aligned}$$

Colle medesime sostituzioni, $\alpha\lambda^4$ diventa $(\lambda\rho)^3 w\lambda w\rho^3$, e questa forma, biquadratica in λ , ha i suoi due invarianti identicamente nulli. Ciò fornisce il teorema seguente, di cui la prima parte fu soltanto enunciata nel n.° 16:

I piani osculatori a C_4 toccano tanto la quadrica E , quanto la superficie di STEINER.

Terminiamo queste prime cose osservando che l'equazione tangenziale di una quadrica qualunque del fascio $A + kB = 0$ è la seguente:

$$\begin{aligned}& -\frac{9}{2} \overline{(h\alpha)^4} k^3 \\ & + \left\{ -\frac{18}{5} \overline{(h\alpha)^4}^2 - \frac{9}{8} i^2 + \frac{9}{2} i(h\chi)^4 + 9j(w\chi)^4 \right\} k^2 \\ & + \left\{ \frac{126}{25} \overline{(h\alpha)^4}^2 - \frac{21}{10} i^2 + \frac{27}{5} i(l\chi)^4 - \frac{36}{5} j(w\chi)^4 \right\} k \\ & - \frac{144}{125} \overline{(h\alpha)^4}^2 - \frac{12}{25} i^2 - \frac{72}{25} i(h\chi)^4 + \frac{36}{25} j(w\chi)^4 = 0,\end{aligned}$$

essendosi chiamato $\chi = \chi\lambda^4$ l'hessiano di $\alpha\lambda^4$.

23. La nota teoria analitica delle cubiche gobbe (***) ci dà modo di dedurre alcune proprietà delle osculanti, e di dare l'interpretazione geometrica di parecchi covarianti. Altri teoremi si possono stabilire osservando che, per

(*) Si noti che per questo non è necessario eseguire un nuovo calcolo: invero, dopo aver posto $x_i = f_i(\lambda)$ in $W\rho^6$ (vedi n.° 11), basterà cercare i coefficienti delle diverse potenze di λ .

(**) Vedansi specialmente i lavori dei sig.¹ D'OVIDIO (*Studio sulle cubiche gobbe, ecc.*, Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino, Serie II, tom. 32, 1879), e PITTARELLI (*La cubica gobba, ecc.*, Giornale di Matem., tom. 17, pag. 260, 1879). La polare $\alpha_\mu \alpha_\lambda^3$ è nel nostro caso la forma chiamata p_λ^3 dal sig. D'OVIDIO.

le proprietà del n.º 21, e del resto per la stessa definizione analitica delle prime osculanti, queste rientrano come caso particolare nei sistemi di cubiche gobbe già studiati dal sig. GERBALDI (*). Nel nostro caso le forme cubiche da cui parte questo Autore sono le prime polari di a_λ^4 , b_λ^4 , c_λ^4 , d_λ^4 , ed il teorema fondamentale esposto in principio del n.º 21 mostra che il secondo sistema di cubiche da lui trovato a pag. 21 coincide col primitivo.

La quantità, che dal prof. D'OVIDIO viene indicata con Δ (loc. cit., pag. 6), nel nostro caso diventa w_λ^4 , salvo un fattore numerico, e ciò conferma quanto già si era osservato, che le prime osculanti dei punti stazionari, ed esse sole, sono curve piane. Inoltre, formando il discriminante di $\alpha_\mu \alpha_\lambda^3$ (D'OVIDIO, loc. cit., pag. 19; PITTARELLI, loc. cit., pag. 265), si trova:

L'equazione

$$2\eta \alpha_\lambda^4 - 3\iota \chi_\lambda^4 = 0$$

rappresenta, in coordinate di piani, la sviluppabile osculatrice della cubica (λ).

Questa sviluppabile tocca la sviluppabile osculatrice di C_4 lungo la tangente a questa nel punto λ .

Il discriminante del primo membro dell'equazione precedente, salvo un fattore numerico, è

$$(\iota^3 - 6\eta^2)\eta^6:$$

il primo fattore è il discriminante della forma α_λ^4 , ed uguagliato a zero rappresenta la sviluppabile osculatrice di C_4 ; l'altro fattore dà la superficie di STEINER. Epperò si ha il teorema (**):

I piani osculatori delle prime osculanti di C_4 , ossia i piani $P(\mu, \nu)$ delle seconde osculanti, involuppano la superficie di STEINER.

Uguagliando a zero l'hessiano di $\alpha_\mu \alpha_\lambda^3$, abbiamo

$$0 = (\alpha\beta)^2 \alpha_\lambda \alpha_\mu \beta_\lambda \beta_\mu = \chi_\lambda^2 \chi_\mu^2 - \frac{1}{6} \iota (\lambda\mu)^2,$$

e questa equazione (D'OVIDIO, loc. cit., pag. 18; PITTARELLI, loc. cit., pag. 277) rappresenta, in coordinate di piani, la conica (λ, μ).

La simmetria dell'equazione conferma quanto si è osservato verso la fine del n.º 21.

(*) GERBALDI, *Sui sistemi di cubiche gobbe*, ecc. (Mem. d. R. Accad. d. Scienze di Torino, Serie II, tom. 32, 1880).

(**) Questo teorema è dovuto al prof. BELTRAMI (*Ricerche di geometria analitica*, Mem. dell'Accad. di Bologna, 1879, pag. 62 e seg.) — Vedi pure STUDY, loc. cit., pag. 9; JOLLES, loc. cit., § 7; ROHN, loc. cit., pag. 225-226.

Se in particolare si pone $\mu = \lambda$, si ottiene il teorema:

L'hessiano χ_λ^4 , uguagliato a zero, rappresenta in coordinate di piani la seconda osculante del punto λ di C_4 .

Osserviamo che l'equazione $\chi_\lambda^4 = 0$ è anche ciò che risulta eliminando μ dalle equazioni

$$\alpha_1 \alpha_\mu \alpha_\lambda^2 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_\mu \alpha_\lambda^2 = 0,$$

le quali esprimono le condizioni perchè, dato μ , la forma $\alpha_\mu \alpha_\lambda^3$ abbia una radice doppia. Si ha pertanto (*):

La seconda osculante del punto λ è l'involuppo delle tangenti alle prime osculanti nel loro punto di parametro λ ,

teorema che si potrebbe dimostrare facilmente anche colla pura geometria, come conseguenza della proprietà fondamentale del n.º 21. Esso si può enunciare anche dicendo che *la tangente in μ alla cubica (λ) è pure la tangente in λ alla conica (μ, μ).*

24. La proprietà precedente si può generalizzare come segue. Consideriamo l'equazione

$$\alpha_\rho \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu = 0,$$

la quale (**), dati ρ, λ, μ e ν , rappresenta il punto comune all'asse $\lambda\mu$ (intersezione dei piani osculatori nei punti λ e μ) ed al piano osculatore in ν della cubica (ρ). Se un piano (u_1, u_2, u_3, u_4) deve contenere il detto asse, l'equazione precedente dovrà essere verificata per qualunque valore di ν , cioè si avrà

$$\alpha_\rho \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_1 = 0, \quad \alpha_\rho \alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_2 = 0,$$

da cui, eliminando ρ , si ottiene

$$(\alpha\beta)^2 \alpha_\lambda \alpha_\mu \beta_\lambda \beta_\mu = 0.$$

Ricordando ciò che si è trovato nel numero precedente, si conclude (***)

Se in tutte le prime osculanti di C_4 si considerano i piani osculatori nei punti λ e μ , le rette (assi delle relative sviluppabili) comuni a queste coppie di piani involuppano la conica (λ, μ).

Anche questo teorema si potrebbe dimostrare geometricamente senza difficoltà.

(*) Cfr. GERBALDI, loc. cit., pag. 32. La nostra forma χ_λ^4 è ciò che diventa la \mathfrak{S}_λ^4 di questo Autore, moltiplicata per 2.

(**) D' OVIDIO, loc. cit., pag. 15; PITTARELLI, loc. cit., pag. 266.

(***) Cfr. GERBALDI, loc. cit., pag. 30.

In ciascuna delle prime osculanti possiamo altresì considerare la corda che unisce i punti λ e μ ; volendo cercare il luogo generato da queste corde (*), osserviamo che le equazioni

$$\alpha_\rho \alpha_\lambda^3 = 0, \quad \alpha_\rho \alpha_\mu^3 = 0$$

rappresentano rispettivamente il punto λ ed il punto μ della cubica (ρ) ; l'inviluppo di un piano passante per la corda $\lambda\mu$ è quindi

$$0 = (\alpha\beta)\alpha_\lambda^3\beta_\mu^3 = \frac{1}{2}(\alpha\beta)(\alpha_\lambda^3\beta_\mu^3 - \alpha_\mu^3\beta_\lambda^3) \\ \equiv 6\chi_\lambda^2\chi_\mu^2 + (\lambda\mu)^2\iota.$$

Laonde il luogo delle corde $\lambda\mu$ delle prime osculanti è una quadrica.

Siccome (n.º 21) la tangente a C_4 nel punto λ ha in comune con una prima osculante qualunque il punto che su questa ha il parametro λ , così le tangenti a C_4 nei due punti λ e μ si trovano fra le generatrici del secondo sistema della quadrica suddetta, la quale pertanto, in generale, non degenera in una conica.

Cerchiamo infine quale sia il luogo delle corde $\lambda\mu$ delle seconde osculanti pure. I punti λ e μ della conica (ρ, ρ) hanno per equazioni

$$\alpha_\rho^2 \alpha_\lambda^2 = 0, \quad \alpha_\rho^2 \alpha_\mu^2 = 0,$$

da cui, eliminando ρ , si ha

$$\frac{\overline{\chi_\lambda^2 \chi_\mu^2}}{\chi_\lambda^2 \chi_\mu^2} + \frac{2}{3} \iota (\lambda\mu)^2 \chi_\lambda^2 \chi_\mu^2 + \frac{1}{9} \iota (\lambda\mu)^4 - \chi_\lambda^4 \cdot \chi_\mu^4 = 0.$$

Dopo facili trasformazioni, applicando la terza delle identità (A), ed omettendo il fattore $(\lambda\mu)^2$, l'equazione precedente acquista la forma:

$$\iota^2 (\lambda\mu)^2 - 8\eta \alpha_\lambda^2 \alpha_\mu^2 + 12\iota \chi_\lambda^2 \chi_\mu^2 = 0,$$

laonde si conclude che il luogo cercato è una superficie di 4.ª classe.

Per $\mu = \lambda$, si ottiene

$$3\iota \chi_\lambda^4 - 2\eta \alpha_\lambda^4 = 0,$$

la quale rappresenta la sviluppabile osculatrice della cubica (λ) : ciò dà sotto altra forma il teorema enunciato alla fine del n.º 23.

25. La sviluppabile bitangente di C_4 è manifestamente invilupata da tutte le superficie che si ottengono scrivendo le condizioni perchè le due cu-

(*) Cfr. GERBALDI, loc. cit., pag. 30

biche $\alpha_1 \alpha_\lambda^3$, $\alpha_2 \alpha_\lambda^3$ abbiano due radici comuni (cfr. GERBALDI, loc. cit., pag. 25). Assumendo queste condizioni nella prima delle due forme considerate dal sig. GERBALDI, si ha (*) l'equazione

$$(\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 \alpha_i \beta_\lambda \gamma_\lambda \delta_\lambda \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \delta_2 - (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 \alpha_\lambda \beta_\lambda \gamma_\lambda \delta_\lambda \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \delta_2 + \frac{1}{12} \iota \chi_\lambda^4 = 0,$$

che si può scrivere altresì come segue:

$$6 (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\beta\gamma) (\alpha\delta) \alpha_\lambda \beta_\lambda \gamma_\lambda \delta_\lambda + \iota \chi_\lambda^4 = 0.$$

Ma per la prima delle (A) abbiamo facilmente:

$$(\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\beta\gamma) (\alpha\delta) \alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i = \frac{1}{3} \eta \alpha_\lambda^4 - \frac{1}{2} \iota \chi_\lambda^4,$$

quindi l'equazione precedente diventa:

$$\eta \alpha_\lambda^4 - \iota \chi_\lambda^4 = 0.$$

Il primo membro gode di proprietà molto notevoli, come ho mostrato nella Nota sopra ricordata.

Se scriviamo le condizioni precedenti nella seconda forma loro assegnata dal sig. GERBALDI, si trova:

$$\begin{aligned} & (\alpha\beta)^2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_\lambda \beta_\lambda \gamma_\lambda^3 \gamma_2 \eta \lambda_1 - (\alpha\beta)^2 \alpha_2 \beta_2 \alpha_\lambda \beta_\lambda \gamma_\lambda^3 \gamma_1 \eta \lambda_2 \\ & + (\alpha\beta)^2 \alpha_1 \beta_2 \alpha_\lambda \beta_\lambda \gamma_\lambda^3 \gamma_2 \eta \lambda_2 - (\alpha\beta)^2 \alpha_1 \beta_2 \alpha_\lambda \beta_\lambda \gamma_\lambda^3 \gamma_1 \eta \lambda_1 = 0, \end{aligned}$$

la quale, scambiando α con β nell'ultimo termine, e poi raccogliendo opportunamente, diventa:

$$\eta \cdot (\alpha\beta)^2 (\alpha\gamma) \alpha_\lambda \beta_\lambda^2 \gamma_\lambda^3 = 0,$$

ossia:

$$\eta \cdot \tau_\lambda^6 = 0,$$

avendo indicato con τ_λ^6 il covariante sestico di α_λ^4 . Ora il primo fattore è estraneo alla presente questione, poichè $\eta = 0$ rappresenta la superficie di STEINER, ed otteniamo così il teorema:

La sviluppabile formata dai piani bitangenti a C_4 è involupata da tutte le superficie di 4.^a classe rappresentate, al variare di λ , dall'equazione

$$\eta \alpha_\lambda^4 - \iota \chi_\lambda^4 = 0,$$

(*) Quanto a ciò che diventano nel nostro caso le forme che qui intervengono, veggasi la mia Nota II *Intorno alla rappresentazione*, ecc (Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tom. 5, 1891, pag. 41).

e da tutte le superficie di 3.^a classe rappresentate da

$$\tau_{\lambda}^6 = 0.$$

In tal modo abbiamo trovato il significato geometrico di tutte le forme componenti il sistema completo di α_{λ}^4 .

La presenza del fattore estraneo η si spiega osservando che le vere condizioni necessarie e *sufficienti* perchè due cubiche f e φ abbiano due radici comuni, sono espresse (adottando i simboli del § 61 della *Theorie*, ecc. di CLEBSCH) dall'identico annullarsi del covariante (*)

$$\Theta^2 - \Delta \nabla - \frac{1}{3} J \mathfrak{D}, \quad (1)$$

che è di *secondo* grado nei coefficienti di ciascuna delle due forme. Invece il covariante

$$p(f\nabla - \varphi\Theta) - \pi(\varphi\Delta - f\Theta) \quad (2)$$

è di *terzo* grado negli stessi coefficienti, e per conseguenza il suo identico annullarsi si può ritenere che rappresenti effettivamente quelle condizioni (ed è in ciò che consiste la seconda forma data alle medesime dal sig. GERBALDI) soltanto nel caso di due forme date in modo affatto generale. Se, per esempio, φ fosse il covariante cubico di f , i covarianti lineari p e π sarebbero identicamente nulli, quindi sarebbe nullo (2), ma non (1), cioè le seconde condizioni sarebbero soddisfatte, senza che perciò le forme stesse avessero due radici comuni.

Malgrado ciò (e lo stesso si può dire in ogni caso analogo), è appena necessario rilevare il vantaggio che si può trarre, colle debite cautele, anche dalla forma (2): il teorema precedente ne è una chiara prova.

26. Consideriamo la cubica (μ) e cerchiamo se alcuno de' suoi piani osculatori possa essere tangente alla sviluppabile osculatrice di C_4 , cioè possa contenere la tangente a C_4 in un suo punto λ . A tal fine ricordiamo che (n.º 21) questa tangente deve nel tempo stesso tagliare la cubica nel punto λ di questa: basta quindi cercare se fra i punti λ della cubica (μ) ve ne sia alcuno il cui piano osculatore contenga il punto λ di C_4 , ossia basta eseguire

(*) Questo è stato dimostrato in modo assai semplice dal sig. GERBALDI in una Nota stampata alla fine del vol. 17 del Giornale di Matem. (1879), pag. 376; ma il medesimo risultato trovasi già, come conseguenza di ricerche molto più generali, nella Memoria del GORDAN: *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen* (Math. Ann. Bd. 3, 1870, pag. 383).

in Γ' , le sostituzioni $x_i = f_i(\lambda)$. Ciò facendo si trova $(\lambda\mu)^3 w\lambda^4$, e pertanto si conclude che il piano osculatore in λ alla cubica (μ) passa per la tangente λ di C_4 in due soli casi: quando λ coincide con μ (cosa evidente); oppure quando λ è uno dei quattro punti stazionari.

Questa proprietà, combinata coll'altra, che il piano osculatore in λ a C_4 contiene le tangenti a tutte le prime osculanti nel loro rispettivo punto λ , dà il teorema (*):

Tutte le prime osculanti osculano ciascuno dei quattro piani stazionari, e precisamente sopra le tangenti a C_4 contenute nei medesimi.

Quanto alle seconde osculanti, ricordiamo che (n.º 23) l'equazione, in coordinate di piani, della conica (λ, μ) è

$$\chi\lambda^2 \chi\mu^2 - \frac{1}{6} \iota(\lambda\mu)^2 = 0.$$

Ora se in $\chi\lambda^4$ poniamo $u_i = \Phi_i(\rho)$ si trova

$$- \frac{1}{8} (\lambda\rho)^4 \overline{w\rho^4},$$

epperò colle stesse sostituzioni il primo membro dell'equazione precedente diventa

$$- \frac{1}{8} (\lambda\rho)^2 (\mu\rho)^2 \overline{w\rho^4},$$

da cui il teorema (**):

Tutte le coniche (λ, μ) sono tangenti a ciascuno dei quattro piani stazionari.

Notiamo poi che (***) le seconde osculanti pure giacciono sulla superficie di STEINER.

27. Date le tre cubiche (λ) , (μ) , (ν) , sappiamo (n.º 21) che le loro superficie sviluppabili hanno a due a due in comune una conica; e si riconosce facilmente che queste tre coniche (μ, ν) , (ν, λ) , (λ, μ) hanno in comune una stessa tangente, da cui sono toccate nei punti aventi rispettivamente per parametri λ , μ , ν .

(*) BELTRAMI, loc. cit., pag. 62; STUDY, loc. cit., pag. 6.

(**) Questa proprietà è enunciata, per le seconde osculanti pure, dal sig. STUDY (loc. cit., pag. 9).

(***) ARMEVANTE, loc. cit., n.º 11; BELTRAMI, loc. cit., pag. 63; STUDY, loc. cit., pag. 9.

Se ora consideriamo quattro cubiche (λ) , (μ) , (ν) , (ρ) , i sei piani osculatori che esse hanno a due a due in comune passano per uno stesso punto M avente per equazione (*)

$$\alpha_\lambda \alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\rho = 0,$$

e, per ciò che si è sopra osservato, costituiscono le facce di uno stesso angolo quadrispigolo completo (**). Dato il punto M , i gruppi di punti λ , μ , ν , ρ che nel modo ora esposto conducono ad esso sono in numero semplicemente infinito e, come risulta dall'equazione precedente, *formano un'involuzione di 4.º grado, a cui appartiene anche la forma w_λ^4 dei punti stazionari* [per la (XVIII)].

La relazione che ha luogo fra due punti λ e μ appartenenti ad uno stesso gruppo di tale involuzione è

$$0 = \Gamma' = 4 \left[W_\lambda^3 W_\mu^3 + \frac{2}{5} (\lambda\mu)^2 Q_\lambda Q_\mu \right],$$

dove in luogo delle x_i si siano poste le coordinate del punto M . Per tal guisa ogni punto M dello spazio determina su C_4 un'involuzione biquadratica a cui appartiene w_λ^4 , e reciprocamente; al punto 0 corrisponde l'involuzione sizigetica individuata da w_λ^4 (***) .

28. È noto (****) che un fascio di forme biquadratiche possiede due *covarianti elementari*, l'uno di 6.º e l'altro di 2.º grado nelle variabili, conosciuti i quali il fascio resta completamente determinato: essi sono, salvo fattori numerici, la prima e la terza spinta di due forme qualunque del fascio stesso. Ora se si confronta l'ultima equazione del numero precedente colla (1) a pag. 68 della Memoria del sig. STEPHANOS, oppure colla (IV) a pag. 298 del libro del sig. GORDAN, si riconosce che per l'involuzione biquadratica trovata nel numero precedente i due covarianti elementari sono precisamente W_λ^6 e Q_λ^2 . Si è già trovato che un gruppo dell'involuzione è w_λ^4 : ora dimostreremo

(*) D' OVIDIO, loc. cit., pag. 15; PITTARELLI, loc. cit., pag. 266.

(**) STUDY, loc. cit., pag. 8.

(***) Queste involuzioni su C_4 furono indicate per la prima volta dal sig. STUDY nella Nota più volte citata. Veggasi inoltre STAHL, *Ueber die Fundamentalinvolutionen auf rationalen Curven* (Giornale di CRELLE, Bd. 104, 1889). Il caso particolare dell'involuzione sizigetica (determinata dal punto 0) è dovuto, come già si è osservato, al sig. BERTINI.

(****) GORDAN, loc. cit., Math. Ann., Bd. 3, e *Invariantentheorie*, Bd. 2, pag. 295 e seg.; STEPHANOS, *Mémoire sur les faisceaux*, etc. (Mém. prés. par divers savants, etc., Paris, tom. 27, 1881).

che, quando l'invariante i non sia nullo, un altro gruppo è dato da

$$5(Ww)^3 W_\lambda^3 w_\lambda + 2(Qw) Q_\lambda w_\lambda^3. \quad (1)$$

Basterà, a tal fine, trovare la prima e la terza spinta di questa forma con w_λ^4 . Ora abbiamo

$$\begin{aligned} [(Ww)^3 W_\lambda^3 w_\lambda, w_\lambda^4]_1 &= \frac{3}{4} (Ww)^3 (Ww') W_\lambda^2 w_\lambda w_\lambda'^3 + \frac{1}{4} (Ww)^3 (w w') W_\lambda^3 w_\lambda'^3 \\ &= \frac{3}{8} (Ww)^2 W_\lambda^2 w_\lambda'^2 [(Ww)^2 w_\lambda'^2 + (Ww')^2 w_\lambda^2 - (w w')^2 W_\lambda^2] \\ &\quad + \frac{1}{8} (w w') W_\lambda^3 [(Ww)^3 w_\lambda'^3 - (Ww')^3 w_\lambda^3] \\ &= \frac{3}{4} (Ww)^4 W_\lambda^2 \cdot w_\lambda^4 - \frac{3}{2} (Wh)^2 W_\lambda^4 h_\lambda^2 - \frac{1}{4} i W_\lambda^6. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} [(Qw) Q_\lambda w_\lambda^3, w_\lambda^4]_1 &= \frac{3}{4} (w w') (Qw) Q_\lambda w_\lambda^2 w_\lambda'^3 + \frac{1}{4} (Qw) (Qw') w_\lambda^3 w_\lambda'^3 \\ &= \frac{1}{4} (Qw)^2 w_\lambda^2 \cdot w_\lambda^4 - \frac{1}{2} Q_\lambda^2 h_\lambda^4. \end{aligned}$$

Laonde la prima spinta di (1) su w_λ^4 è

$$\frac{15}{4} (Ww)^4 W_\lambda^2 \cdot w_\lambda^4 - \frac{15}{2} (Wh)^2 W_\lambda^4 h_\lambda^2 - Q_\lambda^2 h_\lambda^4 + \frac{1}{2} (Qw)^2 w_\lambda^2 \cdot w_\lambda^4 - \frac{5}{4} i W_\lambda^6,$$

e questa, in virtù delle identità (I) e (IV), si riduce a

$$- \frac{5}{4} i W_\lambda^6.$$

In secondo luogo abbiamo

$$\begin{aligned} [(Ww)^3 W_\lambda^3 w_\lambda, w_\lambda^4]_3 &= \frac{3}{4} (Ww)^3 (Ww')^2 (w w') W_\lambda w'_\lambda + \frac{1}{4} (Ww)^3 (Ww')^2 w_\lambda w'_\lambda \\ &= - \frac{1}{2} (Wh)^4 W_\lambda^2 + \frac{1}{4} (Ww)^4 (Ww')^2 w_\lambda'^2, \end{aligned}$$

ossia, per le (III) e (V),

$$= - \frac{3}{10} (Qh)^2 h_\lambda^2 - \frac{3}{20} i Q_\lambda^2.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} [(Qw) Q_\lambda w_\lambda^3, w_\lambda^4]_3 &= \frac{3}{4} (w w')^2 (Qw) (Qw') w_\lambda w'_\lambda + \frac{1}{4} (w w')^2 (Qw) Q_\lambda w'_\lambda \\ &= \frac{3}{4} (w w')^2 (Qw)^2 w_\lambda'^2 - \frac{1}{2} i Q_\lambda^2 = \frac{3}{4} (Qh)^2 h_\lambda^2 - \frac{1}{4} i Q_\lambda^2. \end{aligned}$$

Pertanto la terza spinta di (1) su $w\lambda^4$ è

$$-\frac{5}{4}iQ_1^2.$$

Abbiamo dunque il teorema:

L'involuzione biquadratica determinata dalle due forme (1) e $w\lambda^4$, a meno di coefficienti costanti, ha in generale per covarianti elementari i due combinanti elementari W_1^6 e Q_1^2 , cioè coincide coll'involuzione sopra considerata.

Dalle formole generali che si trovano a pag. 28 ed a pag. 68 della Memoria del sig. STEPHANOS seguono allora le (I), (II) e (VIII).

Si vede subito che le equazioni

$$(Ww)^3W\lambda^3w = 0, \quad (Qw)Q_1w^3 = 0,$$

dato λ , rappresentano i piani polari del punto λ di C_4 rispetto alle quadriche

$$(WW')^6 = 0, \quad (QQ')^2 = 0,$$

e date le coordinate x_i di un punto qualunque dello spazio, rappresentano i punti λ in cui la quartica è tagliata rispettivamente dai piani polari di quel punto rispetto alle medesime superficie.

Di qui, rammentando (n.° 16) l'equazione della quadrica E , risulta:

La forma (1), uguagliata a zero, fornisce i punti in cui la quartica è tagliata dal piano polare del punto (x_1, x_2, x_3, x_4) rispetto alla quadrica E .

Questa è l'unica quaterna piana appartenente, in generale, all'involuzione determinata dal punto stesso.

Con ciò resta anche dimostrata l'asserzione fatta dal sig. STUDY al n.° 10, loc. cit.

§ 6.

Forme di rette. — La funzione $\omega\lambda^4$.

29. Ponendo $p_{ik} = F_{ik}(\rho)$, si trova che le B_1, B_2, \dots assumono i valori seguenti:

$$\begin{aligned} B'_1 &= a_4\rho^2 + 2a_5\rho + a_6, & B'_6 &= -2a_4\rho^3 + 4a_6\rho^3 - 2a_8\rho, \\ B'_2 &= -2a_4\rho^3 - 3a_5\rho^2 + a_7, & B'_7 &= -2a_5\rho^5 - 3a_6\rho^4 + a_8\rho^2, \\ B'_3 &= a_4\rho^4 - 3a_6\rho^2 - 2a_7\rho, & B'_8 &= a_4\rho^6 + 4a_7\rho^3 + 3a_8\rho^2, \\ B'_4 &= a_5\rho^4 + 2a_6\rho^3 + a_7\rho^2, & B'_9 &= a_5\rho^6 - 3a_7\rho^4 - 2a_8\rho^3, \\ B'_5 &= 3a_4\rho^4 + 4a_5\rho^3 + a_8, & B'_{10} &= a_6\rho^6 + 2a_7\rho^5 + a_8\rho^4. \end{aligned}$$

Per conseguenza V_λ^6 e P_λ^2 diventano rispettivamente

$$(\lambda\rho)^4 w_\lambda^2 w_\rho^2, \quad -(\lambda\rho)^2 w_\rho^4.$$

L'equazione $V_\lambda^6 = 0$ rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la tangente a C_4 nel punto λ .

L'equazione $P_\lambda^2 = 0$ rappresenta il complesso lineare determinato dal sistema nullo relativo alla cubica (λ) : questo complesso taglia la sviluppabile osculatrice di C_4 nelle tangenti situate nei piani stazionari, ed in due tangenti infinitamente vicine alla tangente di C_4 nel punto λ (*).

Più generalmente, l'equazione $P_\lambda P_\mu = 0$ rappresenta un complesso lineare contenente le tangenti a C_4 nei quattro punti stazionari, ed inoltre le tangenti nei due punti λ e μ .

Pertanto le quattro tangenti nei punti stazionari giacciono in un complesso lineare con due tangenti qualunque di C_4 , quindi sono generatrici di uno stesso iperboloide (**), che è poi quello già denotato con M , e di cui si è data l'equazione al n.º 16.

Se inoltre poniamo un apice ad indicare ciò che diventano le polari quando si faccia $p_{ik} = F_{ik}(\rho)$, abbiamo:

$$(V_\lambda^4 V_\mu^2)' = \frac{1}{3} (\lambda\rho)^4 w_\rho^2 w_\mu^2 + \frac{2}{3} (\lambda\rho)^2 (\mu\rho)^2 w_\lambda^2 w_\rho^2 - \frac{4}{15} (\lambda\rho)^2 (\lambda\mu)^2 w_\rho^4,$$

$$(V_\lambda^3 V_\mu^3)' = \frac{1}{2} (\lambda\rho)^3 (\mu\rho) w_\rho^2 w_\mu^2 + \frac{1}{2} (\lambda\rho) (\mu\rho)^3 w_\lambda^2 w_\rho^2 - \frac{3}{10} (\lambda\rho) (\mu\rho) (\lambda\mu)^2 w_\rho^4,$$

$$(V_\lambda^2 V_\mu^2 V_\nu^2)' = \frac{1}{3} (\rho\mu)^2 (\rho\nu)^2 w_\lambda^2 w_\rho^2 + \frac{1}{3} (\rho\nu)^2 (\rho\lambda)^2 w_\mu^2 w_\rho^2 + \frac{1}{3} (\rho\lambda)^2 (\rho\mu)^2 w_\rho^2 w_\nu^2 \\ - \frac{2}{15} w_\rho^4 [(\mu\nu)^2 (\lambda\rho)^2 + (\nu\lambda)^2 (\mu\rho)^2 + (\lambda\mu)^2 (\nu\rho)^2],$$

$$(P_\lambda P_\mu)' = -(\lambda\rho) (\mu\rho) w_\rho^4.$$

Di qui si deduce che, colle stesse sostituzioni, Γ'_2 diventa

$$4(\rho\mu)^2 (\rho\nu)^2 w_\lambda^2 w_\rho^2 + 4(\rho\nu)^2 (\rho\lambda)^2 w_\mu^2 w_\rho^2 + 4(\rho\lambda)^2 (\rho\mu)^2 w_\nu^2 w_\rho^2 \\ - [(\mu\nu)^2 (\lambda\rho)^2 + (\nu\lambda)^2 (\mu\rho)^2 + (\lambda\mu)^2 (\nu\rho)^2] w_\rho^4,$$

e G'_2 diventa

$$(\lambda\rho)^2 (\mu\rho)^2 w_\lambda w_\mu w_\rho^2.$$

Di qui segue tosto il significato geometrico di G'_2 : esso, uguagliato a zero

(*) L'ultima parte è enunciata dal sig. STUDY (loc. cit., n.º 5).

(**) CREMONA, loc. cit., Annali di Matem., tom. 4, pag. 92.

rappresenta il complesso lineare speciale, avente per asse la retta che unisce i punti λ e μ di C_4 (*).

Si trova pure:

L'equazione

$$60 V_\lambda^2 V_\rho^2 V_\mu^2 - 3(\lambda\mu)^2 P_\rho^2 - 3(\rho\mu)^2 P_\lambda^2 + 7(\lambda\rho)^2 P_\mu^2 = 0$$

rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la retta che unisce i punti λ e ρ della cubica (μ) .

In particolare, per $\rho = \lambda$,

L'equazione

$$10 V_\lambda^4 V_\mu^2 - (\lambda\mu)^2 P_\lambda^2 = 0$$

rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la tangente alla cubica (μ) nel suo punto λ .

Infine abbiamo:

L'equazione

$$20 V_\mu^2 V_\lambda^2 V_\rho^2 - (\lambda\nu)(\rho\nu) P_\mu^2 - (\mu\lambda)(\mu\rho) P_\lambda^2 - (\mu\nu)^2 P_\rho^2 = 0$$

rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la retta che unisce i punti λ e ρ della conica (μ, ν) .

Ponendo in particolare $\rho = \lambda$, si ha il significato geometrico della funzione generatrice Γ'_2 :

L'equazione

$$0 = \frac{5}{3} \Gamma'_2 = 20 V_\lambda^2 V_\mu^2 V_\nu^2 - (\mu\nu)^2 P_\lambda^2 - (\nu\lambda)^2 P_\mu^2 - (\lambda\mu)^2 P_\nu^2$$

rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la tangente comune alle tre coniche (μ, ν) , (ν, λ) , (λ, μ) .

La simmetria dell'ultima equazione conferma quanto si è osservato al principio del n.º 27.

30. Dal significato dell'equazione $P_\lambda P_\mu = 0$ (esposto nel numero precedente) risulta in particolare che l'equazione

$$(P_\nu) P_\lambda w_\lambda^3 = 0$$

(*) Di qui risulta, come nel paragrafo precedente, che V_λ^6 e P_λ^2 sono i due covarianti elementari di un'involuzione biquadratica di punti segnata sopra C_4 : essa non è altro che quella determinata da un piano ruotante intorno ad una retta qualunque dello spazio, di cui si suppongano sostituite le coordinate in V_λ^6 e P_λ^2 . L'identità (XV) è allora una conseguenza della formola (2) che trovasi a pag. 68 della Memoria del sig. STEPHANOS.

rappresenta il complesso lineare determinato dalle quattro tangenti nei punti stazionari, e dalle tangenti condotte nel punto λ e nel punto in cui il piano osculatore in λ taglia di nuovo la quartica.

Una retta qualunque dello spazio appartiene a quattro di questi ultimi complessi, ed i quattro punti λ corrispondenti giacciono in uno stesso piano passante per O , la cui equazione, come è facile verificare, è

$$(PQ)^2 = 0.$$

Risulta di qui tosto il significato geometrico di questa equazione, sia quando in P si considerino date le coordinate di una retta, sia quando in Q si considerino date le coordinate di un punto: noi l'omettiamo per brevità, e facciamo solo osservare che dal medesimo, chiamando Σ il sistema dei complessi lineari passanti per le tangenti a C_4 nei punti stazionari, risulta la proprietà:

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ i punti in cui C_4 viene tagliata da un piano qualunque passante per il punto O , e siano $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ i punti di secamento dei piani osculatori nei primi punti: allora i quattro complessi lineari di Σ che vengono determinati dalle coppie di tangenti in $\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \lambda_3, \mu_3; \lambda_4, \mu_4$ appartengono ad un medesimo fascio.

31. Si trova senza difficoltà che, se nelle p_{ik} contenute in V_i^6 e P_λ^2 al posto delle y_i si sostituiscono le coordinate (vedi n.º 8) del punto O , si ottiene rispettivamente

$$(Wh)^2 W_\lambda^4 h_\lambda^2 - \frac{1}{5} h_\lambda^4 Q_\lambda^2, \quad (1)$$

$$- 5(Wh)^4 W_\lambda^2 + \frac{2}{3} i Q_\lambda^2. \quad (2)$$

Adunque queste due forme, uguagliate a zero, rappresentano rispettivamente il piano che da O proietta la tangente a C_4 nel punto λ , ed il piano focale di O rispetto al complesso lineare $P_\lambda^2 = 0$, ossia rispetto alla cubica (λ) .

Mercè la (IV) si può eliminare il simbolo W dalla (1), la quale diventa

$$- \frac{1}{3} (Qw)^2 w_\lambda^2 \cdot w_\lambda^4 - \frac{1}{3} Q_\lambda^2 \cdot h_\lambda^4. \quad (1')$$

Dei due piani precedenti, il primo taglia la quartica nei punti ρ forniti dall'equazione

$$0 = \frac{1}{3} (\lambda\rho) (w_\lambda w_\rho^3 h_\rho^4 - w_\lambda^4 h_\rho^3) = \frac{1}{3} (\lambda\rho)^2 t_\rho^2 t_\lambda^4 (*);$$

(*) CLEBSCH, *Theorie*, ecc., pag. 144.

il secondo nei punti ρ forniti dall'equazione

$$t_\rho^4 t_\lambda^2 = 0.$$

Di qui risultano i due seguenti teoremi che non credo noti:

Il piano, che da 0 proietta la tangente nel punto λ alla quartica, taglia questa ulteriormente nei due punti costituenti il gruppo polare di 2.^o ordine di λ rispetto al covariante t .

Il piano focale di 0 rispetto al complesso lineare determinato dalla prima osculante del punto λ taglia la quartica nei punti costituenti il gruppo polare di 4.^o ordine di λ rispetto al covariante t .

I piani focali di 0 rispetto ai diversi complessi $P_i^2 = 0$ inviluppano il cono quadrico avente l'equazione

$$\frac{4}{9} i^2 (Q Q')^2 + 25 (W W')^2 (W h)^4 (W' h')^4 - \frac{20}{3} i (W Q)^2 (W h)^4 = 0,$$

la quale, per la (XIII), si può scrivere anche nella forma:

$$2 i^2 (Q Q')^2 + 15 j (W Q)^2 (W w)^4 - 30 i (W Q)^2 (W h)^4 = 0.$$

Il cono quadrico inviluppato dai piani focali di 0 rispetto ai complessi lineari $P_i^2 = 0$ appartiene alla rete studiata nel § 4, e tocca i due piani osculatori negli estremi di ciascuna corda principale, lungo le rette in cui essi sono tagliati dal piano contenente le altre due corde.

Questo cono taglia poi C_4 nei punti dati da

$$i^2 w^2 + 6 i h^2 - 12 j w h = 0,$$

cioè (n.º 11) nei punti di contatto dei piani bitangenti a C_4 e passanti per 0.

32. Ricordando il significato geometrico (n.º 29) dell'equazione

$$0 = 5 G'_2 = 5 V_\lambda^3 V_\mu^3 + (\lambda \mu)^2 P_\lambda P_\mu,$$

per ottenere l'equazione del piano che da 0 proietta la corda $\lambda \mu$, basterà nel secondo membro sostituire le coordinate del punto 0 alle y_i che entrano nelle p_{ik} . A questo scopo notiamo che la prima polare della forma (2) e la terza polare della forma (1) del numero precedente rispetto a μ sono

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} i Q_\lambda Q_\mu - 5 (W h)^4 W_\lambda W_\mu, \\ & \frac{1}{2} (W h)^2 W_\lambda^3 W_\mu h_\mu^2 + \frac{1}{2} (W h)^2 W_\lambda W_\mu^3 h_\lambda^2 - \frac{3}{10} (\lambda \mu)^2 (W h)^4 W_\lambda W_\mu \\ & - \frac{1}{10} Q_\mu^2 h_\lambda^3 h_\mu - \frac{1}{10} Q_\lambda^2 h_\lambda h_\mu^3 + \frac{3}{50} (\lambda \mu)^2 (Q h)^2 h_\lambda h_\mu. \end{aligned}$$

Laonde con alcune facili trasformazioni e applicando la (III), l'equazione del piano suddetto risulta

$$5(W h)^2 W_\lambda^2 W_\mu^2 h_\lambda h_\mu - (\lambda \mu)^2 (Q h)^2 h_\lambda h_\mu - Q_\lambda Q_\mu \cdot h_\lambda^2 h_\mu^2 = 0.$$

Volendo eliminare il simbolo W , basta osservare che la terza polare di (1) rispetto a μ è

$$\begin{aligned} -\frac{2}{15} (\lambda \mu)^2 (Q h)^2 h_\lambda h_\mu - \frac{1}{45} i (\lambda \mu)^2 Q_\lambda Q_\mu - \frac{1}{3} Q_\lambda Q_\mu \cdot h_\lambda^2 h_\mu^2 \\ - \frac{1}{3} (Q w)^2 w_\lambda w_\mu \cdot w_\lambda^2 w_\mu^2. \end{aligned}$$

L'equazione del piano considerato diviene così

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} \left\{ (\lambda \mu)^2 (Q h)^2 h_\lambda h_\mu + \frac{1}{6} i (\lambda \mu)^2 Q_\lambda Q_\mu + Q_\lambda Q_\mu \cdot h_\lambda^2 h_\mu^2 \right. \\ \left. + (Q w)^2 w_\lambda w_\mu \cdot w_\lambda^2 w_\mu^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Se, per trovare i punti comuni al piano ed alla quartica, poniamo nel primo membro $x_i = f_i(\rho)$, risulta

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \{ 2(\lambda \mu)^2 t_\rho^4 t_\lambda t_\mu + (\mu \rho) w_\lambda w_\rho^3 h_\lambda^2 h_\mu^2 - (\lambda \rho) w_\lambda^2 w_\mu^2 h_\mu h_\rho^3 \\ + (\lambda \rho) w_\mu w_\rho^3 h_\lambda^2 h_\mu^2 - (\mu \rho) w_\lambda^2 w_\mu^2 h_\rho^3 h_\lambda \}. \end{aligned}$$

Ora dall'identità (CLEBSCH, *Theorie*, ecc., pag. 144)

$$w_x^4 h_y^4 - w_y^4 h_x^4 = 4(xy) t_x^3 t_y^3$$

segue

$$w_x^2 w_z^2 h_x h_y^2 - w_x w_y^3 h_x^2 h_z^2 = (xy) t_x^2 t_y^2 t_z^2 + 2(zy) t_x^3 t_y^2 t_z,$$

epperò, dopo alcuni passaggi, l'espressione precedente diviene

$$-\frac{5}{3} (\lambda \rho) (\mu \rho) t_\lambda^2 t_\mu^2 t_\rho^2 + \frac{5}{3} t_\rho^2 t_\lambda t_\mu [(\lambda \mu)^2 t_\rho^2 - (\mu \rho)^2 t_\lambda^2 - (\lambda \rho)^2 t_\mu^2],$$

ossia

$$-5(\lambda \rho) (\mu \rho) t_\lambda^2 t_\mu^2 t_\rho^2.$$

Si ha così il seguente teorema, notevole per la sua semplicità:

Il piano che da 0 proietta la corda $\lambda \mu$ taglia ulteriormente C_4 nei punti ρ forniti dall'equazione $t_\lambda^2 t_\mu^2 t_\rho^2 = 0$.

33. Chiuderò questo paragrafo, dicendo delle principali proprietà della funzione ω_λ^4 . L'equazione

$$\omega_\lambda^4 = 0,$$

dato λ e data una retta di coordinate p_{ik} , rappresenta il piano passante per la retta e per il punto λ di C_4 ; dato λ e dato un punto di coordinate x_i , essa rappresenta invece il complesso lineare speciale avente per asse la retta che unisce quel punto col punto λ di C_4 ; ecc. In modo affatto analogo si interpretano le polari.

In particolare l'equazione

$$(\omega h)^4 = 0,$$

data una retta di coordinate p_{ik} , rappresenta il piano che proietta la retta dal punto O , e dato un punto di coordinate x_i , rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la retta che unisce O col punto dato.

Chiamando i_ω ed j_ω i due invarianti di $\omega\lambda^4$ si ha tosto:

Data una retta di coordinate p_{ik} , l'equazioni

$$i_\omega = 0, \quad j_\omega = 0$$

rappresentano rispettivamente l'insieme dei due piani passanti per la retta e tangenti alla quadrica E , e l'insieme dei tre piani passanti per la retta e tangenti alla superficie di STEINER.

Se nella $\omega\lambda^4$ in luogo delle x_i poniamo le coordinate $f_i(\mu)$ di un altro punto μ della quartica, otteniamo

$$-(\lambda\mu)G'_2 \quad \text{ossia} \quad -(\lambda\mu) \left[V_\lambda^3 V_\mu^3 + \frac{1}{5} (\lambda\mu)^2 P_\lambda P_\mu \right].$$

In particolare, se si fa $\lambda_1 : \lambda_2 = h_2 : -h_1$, risulta:

L'equazione

$$(Vh)^3 V_\lambda^3 h_\lambda + \frac{1}{5} (Ph) P_\lambda h_\lambda^3 = 0,$$

data una retta di coordinate p_{ik} , rappresenta i quattro punti comuni a C_4 ed al piano che da O proietta la retta data; dato invece il punto λ di C_4 , rappresenta il complesso lineare speciale avente per asse la retta che unisce il punto stesso con O .

Se infine in $\omega\lambda^4$ in luogo delle p_{ik} si sostituiscono le coordinate $F_{ik}(\mu)$ della tangente in μ alla C_4 , si ottiene

$$(\lambda\mu)^2 \left[W_\lambda^2 W_\mu^4 - \frac{1}{5} (\lambda\mu)^2 Q_\mu^2 \right],$$

ossia G'_1 , dove si sia posto $\nu = \mu$. Se si pone $\lambda_1 : \lambda_2 = h_2 : -h_1$, si ritrova la forma (1) del n.° 31.

§ 7.

Il complesso tetraedrale, ed alcuni notevoli complessi Battaglini
contenenti tutte le tangenti di C_4 .

Il sistema degl'iperboloidi contenenti le tangenti alla quartica
nei punti dei gruppi dell'involuzione sizigetica.

34. Ponendo un apice per denotare ciò che diventano le forme scritte
fra le parentesi quando in esse al posto delle p_{ik} si sostituiscono le coordinate
della tangente in ρ a C_4 , e ricordando le polari trovate nel n.º 29, risulta:

$$[(VP)^2 V_\lambda^4]' = -\frac{1}{15} (\lambda\rho)^4 \overline{w_\rho^2},$$

e quindi

$$[(VP)^2 (Vw)^4]' = -\frac{1}{15} \overline{w_\rho^3}, \quad [(VP)^2 (Vh)^4]' = -\frac{1}{15} \overline{w_\rho^2} \cdot h_\rho^4.$$

Inoltre si ha

$$[(VV')^4 V_\lambda^2 V_\lambda'^2]' = \frac{2}{75} (\lambda\rho)^4 \overline{w_\rho^2},$$

epperò

$$[(VV')^4 (Vw)^2 (V'w)^2]' = \frac{2}{75} \overline{w_\rho^3}, \quad [(VV')^4 (Vh)^2 (V'h)^2]' = \frac{2}{75} \overline{w_\rho^2} h_\rho^4,$$

$$[(VV')^4 (Vt)^2 (V't)^2 t^2]' = \frac{2}{75} \overline{w_\rho^2} \cdot t^2 t_\rho^4.$$

Infine

$$[(VV')^2 V_\lambda^4 V_\lambda'^4]' = \frac{1}{9} (\lambda\rho)^6 \left[(\lambda\rho)^2 h_\rho^4 - \frac{4}{5} w_\rho^4 \cdot w_\lambda^2 w_\rho^2 \right],$$

da cui collo sviluppo di GORDAN risulta

$$\begin{aligned} [(VV')^2 V_\lambda^4 V_\mu'^4]' &= \frac{1}{9} (\lambda\rho)^2 (\mu\rho)^2 \left[(\lambda\rho)^2 (\mu\rho)^2 h_\rho^4 - \frac{2}{5} (\lambda\rho)^2 w_\mu^2 w_\rho^2 \cdot w_\rho^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{5} (\mu\rho)^2 w_\lambda^2 w_\rho^2 \cdot w_\rho^4 + \frac{16}{25} (\lambda\mu)^2 \overline{w_\rho^2} \right]. \end{aligned}$$

Di qui abbiamo

$$[(VV')^2 (Vw)^4 (V'w')^4]' = \frac{7}{75} w^2 h,$$

$$[(VV')^2 (Vh)^4 (V'h)^4]' = \frac{1}{9} h^3 + \frac{16}{675} j w^3 - \frac{2}{75} i w^2 h,$$

$$[(VV')^2 (Vw)^4 (V'h)^4]' = \frac{1}{15} w h^2 + \frac{1}{225} i w^3.$$

Notiamo poi che

$$[(VV')^6]' = 0, \quad [(PP')^2]' = 0,$$

da cui risulta:

L'equazione

$$(VV')^6 + k(PP')^2 = 0$$

al variare di k rappresenta un fascio di complessi di 2.^o grado contenenti tutte le tangenti della quartica. — Questi complessi hanno tutti il medesimo cono di vertice 0, e precisamente quello che si è trovato (n.° 32) essere involupato dai piani focali di 0 rispetto alle diverse prime osculanti.

35. Premesso questo, ricordiamo che (ARMENANTE, loc. cit., n.° 3) le coordinate del punto corrente ρ della tangente alla quartica in z sono espresse da

$$x_1 = a_\rho a_z^3, \quad x_2 = b_\rho b_z^3, \quad x_3 = c_\rho c_z^3, \quad x_4 = d_\rho d_z^3.$$

Sostituendo queste polari alle x_i contenute in W_λ^6 e Q_λ^2 , otteniamo

$$(\lambda z)^2 \left[\frac{1}{4} (z\rho) w_\lambda^4 - (\lambda\rho) w_\lambda^3 w_z \right], \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} (z\rho) w_\lambda^2 w_z^2 - (\lambda\rho) w_\lambda w_z^3, \quad (2)$$

da cui risulta che, colle medesime sostituzioni, $(WW')^6$ e $(QQ')^2$ diventano

$$\frac{1}{10} (z\rho)^2 h_z^4 - \frac{1}{20} w_z^4 \cdot w_z^2 w_\rho^2, \quad \frac{1}{16} (z\rho)^2 h_z^4 - \frac{1}{2} w_z^4 \cdot w_z^2 w_\rho^2, \quad (3)$$

o, sott'altra forma,

$$\frac{3}{40} (z\rho)^2 h_z^4 - \frac{1}{20} \frac{w_z^4}{w_\rho w_z^3}, \quad - \frac{3}{16} (z\rho)^2 h_z^4 - \frac{1}{2} \frac{w_z^4}{w_\rho w_z^3}. \quad (4)$$

Dalle ultime espressioni derivano alcune conseguenze interessanti, di cui diremo nei numeri seguenti: per ora le applicheremo a cercare i punti in cui la tangente in z taglia la superficie di STEINER ed i piani stazionari.

Occorre dunque (vedi il n.° 15) cercare ciò che diventa la forma $(WQ)^2(WQ')^2(WQ'')^2$ colle dette sostituzioni: per abbreviare, darò soltanto pochi cenni dei calcoli occorrenti.

Chiamo per un istante α_λ^6 e β_λ^2 le due forme binarie (1) e (2), e pongo inoltre

$$\gamma_\lambda^6 = (\lambda z)^2 w_\lambda^4, \quad \delta_\lambda^6 = (\lambda z)^2 (\lambda\rho) w_\lambda^3 w_z, \quad \mu_\lambda^2 = w_\lambda^2 w_z^2, \quad \nu_\lambda^2 = (\lambda\rho) w_\lambda w_z^3,$$

per il che sarà

$$\alpha\lambda^6 = \frac{1}{4} (z\rho)\gamma\lambda^6 - \delta\lambda^6, \quad \beta\lambda^2 = \frac{3}{4} (z\rho)\mu\lambda^2 - \nu\lambda^2,$$

e la questione è ridotta a cercare l'espressione di

$$(\alpha\beta)^2(\alpha\beta')^2(\alpha\beta'')^2.$$

Ora in primo luogo abbiamo immediatamente

$$(\alpha\beta)^2\alpha\lambda^4 = \frac{3}{16} (z\rho)^2(\gamma\mu)^2\gamma\lambda^4 - \frac{3}{4} (z\rho)(\delta\mu)^2\delta\lambda^4 - \frac{1}{4} (z\rho)(\gamma\nu)^2\gamma\lambda^4 + (\delta\nu)^2\delta\lambda^4.$$

Ma

$$(\gamma\mu)^2\gamma\lambda^4 = \frac{1}{15} w\lambda^4 \cdot w_z^4 + \frac{4}{15} i(\lambda z)^4 + \frac{6}{5} (\lambda z)^2 h\lambda^2 h_z^2,$$

$$\begin{aligned} (\delta\mu)^2\delta\lambda^4 &= \frac{1}{15} (\lambda\rho)w_z^4 \cdot w_\lambda^3 w_x + \frac{2}{15} (\lambda z)w_z^4 \cdot w_\lambda^3 w_\rho + \frac{4}{5} (\lambda\rho)(\lambda z)^2 h_z^3 h_\lambda \\ &\quad - \frac{1}{10} (\rho z)(\lambda z)^2 h\lambda^2 h_z^2 - \frac{1}{20} (\rho z)(\lambda z)^4 i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma\nu)^2\gamma\lambda^4 &= -\frac{1}{3} (\rho z)w\lambda^4 \cdot w_z^4 + \frac{4}{15} (\rho\lambda)w_z^4 \cdot w_\lambda^3 w_x - (\rho z)(\lambda z)^2 h\lambda^2 h_z^2 \\ &\quad + \frac{2}{5} (\lambda z)^2 (\rho\lambda) h_z^3 h_\lambda - \frac{1}{6} (\rho z)(\lambda z)^4 i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta\nu)^2\delta\lambda^4 &= \frac{1}{10} (\rho z)^2 w\lambda^4 \cdot w_z^4 - \frac{4}{15} (\lambda z)^2 w_z^4 \cdot w_\lambda^2 w_\rho^2 - \frac{1}{30} (\rho\lambda)^2 w_z^4 \cdot w_\lambda^2 w_x^2 \\ &\quad + \frac{1}{20} (\lambda z)^2 (\rho\lambda)^2 h_z^4 + \frac{2}{5} (\lambda z)^2 (\rho z)^2 h\lambda^2 h_z^2 - \frac{3}{20} (\lambda z)^4 h_\rho^2 h_z^2 + \frac{1}{24} (\lambda z)^4 (\rho z)^2 i. \end{aligned}$$

Quindi

$$\left. \begin{aligned} (\alpha\beta)^2\alpha\lambda^4 &= \frac{7}{80} (z\rho)^2 w\lambda^4 \cdot w_z^4 - \frac{9}{40} (\lambda z)^2 w_z^4 \cdot w_\lambda^2 w_\rho^2 - \frac{3}{40} (\rho\lambda)^2 w_z^4 \cdot w_\lambda^2 w_x^2 \\ &\quad - \frac{1}{5} (\lambda z)^2 (\rho\lambda)^2 h_z^4 + \frac{1}{10} (\lambda z)^4 h_z^2 h_\rho^2 + \frac{1}{20} (z\rho)^2 (\lambda z)^2 h\lambda^2 h_z^2 + \frac{1}{80} (\lambda z)^4 (\rho z)^2 i. \end{aligned} \right\} (5)$$

Da questa si ricava

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^2(\alpha\beta')^2\alpha\lambda^2 &= -\frac{9}{320} (z\rho)^3 w_z^4 \cdot h\lambda^2 h_z^2 + \frac{11}{320} (z\rho)(\rho\lambda)^2 w_z^4 h_z^4 \\ &\quad + \frac{1}{64} (z\rho)(\lambda z)^2 w_z^4 \cdot h_\rho^2 h_z^2 + \frac{1}{80} (z\rho)^3 w_\lambda^2 w_z^2 \cdot h_z^4 - \frac{1}{20} (z\rho)(\lambda z)^2 w_\rho^2 w_z^2 \cdot h_z^4 \\ &\quad + \frac{9}{320} (z\rho) w_z^4 \cdot w_\lambda^2 w_\rho^2 + \frac{3}{64} (z\rho)w_z^4 \cdot w_\lambda^2 w_z^2 \cdot w_\rho^2 w_x^2 + \frac{1}{10} (\rho\lambda)w_z^4 \cdot w_\lambda w_x^3 \cdot w_\rho^2 w_x^2 \\ &\quad - \frac{1}{480} i(z\rho)^3 (\lambda z)^2 w_z^4 - \frac{1}{40} (z\rho)^2 (\lambda z)^2 t_\rho t_x^5, \end{aligned}$$

e di qui la formola cercata:

$$(\alpha\beta)^2(\alpha\beta')^2(\alpha\beta'')^2 = \frac{59}{7680}(z\rho)^4 i \overline{w_z^4}^2 - \frac{1}{20} \overline{w_z^4}^3 \cdot w_\rho^4 + \frac{1}{320}(z\rho)^4 \overline{h_z^4}^2 \\ + \frac{3}{40}(z\rho)^2 \overline{w_z^4}^2 \cdot h_\rho^2 h_z^2 + \frac{3}{80}(z\rho)^2 w_z^4 \cdot w_\rho^2 w_z^2 \cdot h_z^4 + \frac{11}{320}(z\rho)^3 w_z^4 \cdot t_\rho t_z^5.$$

Il secondo membro pertanto, uguagliato a zero, fornisce i punti ρ in cui la tangente a C_4 nel punto z taglia la superficie di 4.^o ordine

$$(WQ)^2 (WQ')^2 (WQ'')^2 = 0.$$

Ricordando allora (n.^o 15) l'equazione della superficie di STEINER, segue che i punti ρ in cui la tangente a C_4 nel punto z taglia la superficie di STEINER sono dati da

$$\frac{5}{64}(z\rho)^3 \left[\frac{1}{4}(z\rho) \overline{h_z^4}^2 - \frac{1}{24}(z\rho) i \overline{w_z^4}^2 - w_z^4 \cdot t_\rho t_z^5 \right] = 0.$$

Da questa equazione si rileva che le tangenti di C_4 osculano la superficie nel loro punto di contatto, cioè che C_4 è una linea assintotica della superficie di STEINER (*).

Ricordando (n.^o 15) l'equazione $D = 0$, risulta altresì che i punti ρ , in cui i quattro piani stazionari della quartica sono tagliati dalla tangente alla medesima nel punto z , sono dati da

$$\overline{w_z^4}^3 \cdot w_\rho^4 = 0.$$

Di qui segue che le tangenti della quartica tagliano i quattro piani stazionari in gruppi di punti aventi un rapporto anarmonico costante, eguale a quello dei punti stazionari.

In altri termini: *Le tangenti della quartica appartengono ad un complesso tetraedrale (o di REYE), il cui tetraedro fondamentale è costituito dai piani stazionari: l'invariante assoluto del complesso non è altro che l'invariante assoluto della forma w_λ^4 (**).*

(*) Vedi CLEBSCH, *Ueber die STEINER'sche Fläche* (Giornale di CRELLE, Bd. 67); CREMONA (Rendic. d. R. Istituto Lombardo, 1867); BELTRAMI, loc. cit., § 11.

(**) Queste proprietà si trovano enunciate a pag. 9 della Nota del sig. STUDY. — Circa il medesimo complesso veggansi inoltre JOLLES, loc. cit., e STAHL loc. cit., Giornale di CRELLE, Bd. 101. — Il sig. LORIA (*Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n - 1$ dimensioni*, Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tom. 2, 1888, n.^o 5) ha

Dalle cose che precedono risulta inoltre che lo stesso complesso è formato dagli assi di tutte le cubiche (λ), e che ad esso appartengono quindi tutte le cubiche gobbe tracciate sulla sviluppabile osculatrice di C_4 , e tutte le coniche (λ, μ).

Il complesso precedente ha per equazione

$$40(VV')^6 - (PP')^2 = 0.$$

36. Dalle (4) del numero precedente segue (vedi n.° 16) che la tangente a C_4 in un suo punto qualunque z tocca la quadrica E (*) nel punto il cui parametro ρ si ricava dall'equazione

$$w_z^3 w_\rho = 0,$$

cioè, per quanto si è ultimamente dimostrato, nel punto costituente il gruppo polare di 1.° ordine del polo z rispetto alla quaterna di punti, in cui la tangente considerata secca i piani stazionari.

Ciò dimostra che la quadrica E e la sviluppabile osculatrice di C_4 si toccano lungo una curva razionale del 6.° ordine: il punto corrente di questa curva ha le coordinate espresse dalle formole

$$x_1 = (aw)\alpha_\lambda^3 w_\lambda^3, \quad x_2 = (bw)b_\lambda^3 w_\lambda^3, \quad x_3 = (cw)c_\lambda^3 w_\lambda^3, \quad x_4 = (dw)d_\lambda^3 w_\lambda^3,$$

cioè ha per equazione

$$(\alpha w)\alpha_\lambda^3 w_\lambda^3 = 0.$$

37. Dalle (3) del n.° 35 segue che la tangente in z alla quartica taglia la quadrica

$$0 = \alpha A + \beta B = \alpha(WW')^6 + \beta(QQ')^2$$

nei punti ρ dati dall'equazione

$$\left(\frac{1}{10}\alpha + \frac{1}{16}\beta\right)(z\rho)^2 h_z^4 - \left(\frac{1}{20}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)w_z^4 \cdot w_\rho^2 w_z^2 = 0 (**).$$

esteso il teorema ad una curva razionale d'ordine n di un S_{n-1} , assumendo come spazi fondamentali per la rappresentazione analitica gli spazi stazionari della curva. — Si noti come dalle due ultime equazioni seguano di nuovo talune proprietà delle prime osculanti, che nel paragrafo precedente vennero dedotte per altra via.

(*) Vedi ROHN, loc. cit., alla fine del § V.

(**) Si noti di passaggio che, per $\alpha = -10$, $\beta = 1$, il primo membro si riduce a $(z\rho)^2 h_z^4$, il che conferma (vedi n.° 16) che l'equazione $-10A + B = 0$ rappresenta l'iperboloide passante per C_4 .

Ponendo per semplicità

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \alpha + \frac{1}{16} \beta &= c_1, & \frac{1}{20} \alpha + \frac{1}{2} \beta &= c_2; \\ \frac{1}{10} \alpha_1 + \frac{1}{16} \beta_1 &= \gamma_1, & \frac{1}{20} \alpha_1 + \frac{1}{2} \beta_1 &= \gamma_2, \end{aligned}$$

le coppie di punti, in cui la detta tangente di C_4 taglia le quadriche (α, β) , (α_1, β_1) dello stesso fascio, si ottengono uguagliando a zero le due forme

$$\begin{aligned} M_\rho^2 &= c_1(z\rho)^2 h_z^4 - c_2 w_z^4 \cdot w_z^2 w_\rho^2, \\ N_\rho^2 &= \gamma_1(z\rho)^2 h_z^4 - \gamma_2 w_z^4 \cdot w_z^2 w_\rho^2. \end{aligned}$$

Ora, ponendo

$$L_\rho^4 = M_\rho^2 N_\rho^2,$$

e chiamando i_L e j_L i due invarianti di questa forma biquadratica, si ha (*)

$$i_L = \frac{1}{6} (3D\Delta + T^2), \quad j_L = \frac{1}{36} (9D\Delta - T^2) T,$$

dove si è posto

$$D = (MM')^2, \quad \Delta = (NN')^2, \quad T = (MN)^2.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{aligned} D &= (c_2^2 - 2c_1 c_2) \overline{w_z^4} h_z^4, & \Delta &= (\gamma_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2) \overline{w_z^4} h_z^4, \\ T &= (c_2 \gamma_2 - c_1 \gamma_2 - c_2 \gamma_1) \overline{w_z^4} h_z^4, \end{aligned}$$

eperò si deduce l'interessante proprietà:

Una coppia assegnata qualunque di quadriche del fascio $\alpha A + \beta B = 0$ è tagliata dalle tangenti di C_4 in gruppi di punti aventi un rapporto anarmonico costante.

Il caso più notevole si ha quando le due coppie di punti si separano fra loro armonicamente, cioè quando è $T = 0$. Ponendo

$$\frac{\alpha}{\beta} = \rho, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \rho_1,$$

questa condizione prende la forma

$$4\rho\rho_1 + 15(\rho + \rho_1) - 100 = 0, \tag{1}$$

(*) PITTARELLI, *Intorno ad un problema di eliminazione nella teoria analitica della cubica gobba* (Giornale di Matem., vol. 17, pag. 250 e 253).

Annali di Matematica, tomo XX.

e definisce quindi un'involuzione, i cui elementi doppi hanno per parametri -10 e $\frac{5}{2}$. Si ha dunque il teorema:

Le quadriche del fascio $\rho A + B = 0$ sono a due a due conjugate in una stessa involuzione, essendo due quadriche conjugate qualunque tagliate armonicamente da tutte le tangenti della quartica.

In altri termini: *Le tangenti della quartica appartengono a tutti i complessi quadratici di BATTAGLINI (*), che vengono determinati da due quadriche qualunque fra loro conjugate nella detta involuzione. Le quadriche doppie di questa sono quella (H) che contiene C_4 , e quella (E) che è involupata dai piani secanti C_4 equianarmonicamente.*

38. Ho anche determinato l'equazione del complesso di BATTAGLINI individuato da due quadriche qualunque del fascio suddetto. A tale scopo osservo che per l'*Uebertragungsprincip* di CLEBSCH, se si denotano con a_x^2 e b_x^2 le forme quaternarie che, uguagliate a zero, danno le equazioni di due quadriche, l'equazione di quel complesso è

$$(abuv)^2 = 0,$$

essendo u e v le coordinate di due piani che determinano una retta variabile del complesso. Di qui, facendo uso inoltre dell'identità (XVI), segue:

Il complesso di BATTAGLINI, determinato dalle due quadriche

$$A + hB = 0, \quad A + kB = 0$$

del nostro fascio, è rappresentato dall'equazione

$$hkX + (h+k)Y + Z = 0, \quad (2)$$

avendo posto

$$X = \frac{3}{4} i(VV')^6 - \frac{3}{10} i(PP')^2 + \frac{135}{2} (VV')^4(Vh)^2(V'h)^2 - 18(VP)^2(Vh)^4,$$

$$Y = \frac{6}{5} i(VV')^6 + \frac{27}{100} i(PP')^2 - \frac{63}{4} (VV')^4(Vh)^2(V'h)^2 + \frac{9}{20} (VP)^2(Vh)^4,$$

$$Z = \frac{48}{25} i(VV')^6 + \frac{33}{250} i(PP')^2 + \frac{9}{5} (VV')^4(Vh)^2(V'h)^2 + \frac{63}{25} (VP)^2(Vh)^4.$$

(*) È noto che così vengono chiamati i complessi di 2.º grado (studiati, per la prima volta, dal prof. BATTAGLINI fino dal 1866), la cui equazione contiene i soli quadrati delle coordinate plückeriane della retta. Il sig. ASCHIERI ha poi trovato (*Sopra un complesso di 2.º grado*, Giornale di Matem., vol. 8, 1870, pag. 35 e 229) che un tale complesso si può considerare, in infiniti modi, come l'insieme delle rette che tagliano due quadriche in coppie di punti separate fra loro armonicamente.

Sullo stesso complesso veggasi poi specialmente il bel lavoro del sig. SEGRE *Su una trasformazione irrazionale dello spazio*, ecc. (Giornale di Matem., vol. 21).

Dal n.° 34 risulta che questo complesso contiene le rette che toccano C_4 nei punti forniti dall'equazione

$$\left[3hk - \frac{9}{20}(h+k) - \frac{3}{25}\right]w^2h = 0,$$

ossia: *Tutti i complessi rappresentati dall'equazione (2) contengono le tangenti alla quartica ne' suoi punti stazionari, e le tangenti trisecanti.*

Il primo fattore dell'ultima equazione coincide, salvo un fattore numerico, col primo membro della (1), epperò:

Le coppie di quadriche conjugate nell'involuzione (1) sono le sole del fascio $A + kB = 0$, il cui corrispondente complesso di BATTAGLINI contenga tutte le tangenti di C_4 .

39. Ponendo $h = k$ nella (2) del numero precedente, risulta che l'equazione, in coordinate di rette, della quadrica $A + kB = 0$ è

$$k^2X + 2kY + Z = 0.$$

Volendo l'equazione del cono circoscritto dal punto 0 alla quadrica precedente, basta sostituire le coordinate di 0 alle y_i che entrano nelle p_{ik} contenute nel primo membro dell'ultima equazione. Ora, ricordando (n.° 31) ciò che con tali sostituzioni diventano V_λ^2 e P_λ^2 , ed applicando le identità del § 2, si trova che $(VV)^2$ diventa

$$-\frac{1}{45}i^2(QQ)^2 - \frac{1}{6}j(WQ)^2(Ww)^4 + \frac{1}{3}i(WQ)^2(Wh)^4,$$

e che $(PP')^2$ diventa $\frac{5}{2}$ di questa medesima espressione (cfr. n.° 34); mentre $(VP)^2(Vh)^4$ diventa

$$\left(-\frac{1}{45}i^3 + \frac{1}{15}j^2\right)(QQ)^2 - \frac{1}{12}ij(WQ)^2(Ww)^4 + \frac{1}{6}i^2(WQ)^2(Wh)^4,$$

e $(VV)^4(Vh)^2(V'h)^2$ diventa $\frac{4}{15}$ di questa stessa espressione. Di conseguenza le X, Y, Z del numero precedente diventano rispettivamente zero,

$$\left(\frac{1}{24}i^3 - \frac{1}{4}j^2\right)(QQ)^2,$$

$$\left(\frac{1}{5}j^2 - \frac{7}{60}i^3\right)(QQ)^2 - \frac{5}{8}ij(WQ)^2(Ww)^4 + \frac{5}{4}i^2(WQ)^2(Wh)^4.$$

Il primo risultato era da prevedersi, poichè per $k = \infty$ l'equazione $A + kB = 0$ fornisce il cono $B = 0$ avente il vertice in 0.

I coni di cui si tratta appartengono pertanto alla rete studiata nel § 4.

Da ultimo osservo, che fra i complessi di BATTAGLINI rappresentati dall'equazione (2), ve ne è uno solo appartenente al fascio

$$(VV')^6 + \rho(PP')^2 = 0, \quad (3)$$

a cui appartiene il complesso tetraedrale trovato al n.º 35: esso ha l'equazione

$$50(VV')^6 + 3(PP')^2 = 0,$$

la quale rappresenta, in coordinate di rette, la quadrica *E*.

Per tal modo viene completamente determinato il significato geometrico del fascio (3).

40. Terminerò osservando come dalla formola (5) del n.º 35 e dalla penultima equazione del n.º 18 si possa dedurre il teorema seguente (*), che, quantunque non si connetta colle cose esposte in questo paragrafo, pure non mi sembra privo d'interesse:

Le tangenti a C_4 nei quattro punti di un gruppo qualunque dell'involuzione sizigetica giacciono sopra un iperboloide.

Sia

$$\lambda w + h = 0$$

un gruppo qualunque dell'involuzione: ricordando la penultima equazione del n.º 18, nonchè l'equazione dell'iperboloide passante per la quartica, risulta che il fascio d'iperboloidi tangenti a C_4 nei punti del gruppo considerato ha per equazione

$$(2\lambda^2 - i)B + 5\lambda(WQ)^2(Ww)^4 + 10(WQ)^2(Wh)^4 + \sigma(10A - B) = 0,$$

denotando con σ il parametro variabile. Ora dalla (5) del n.º 35 segue facilmente:

$$(\alpha\beta)^2(\alpha w)^4 = \frac{1}{120}i(z\rho)^2 w_z^4 - \frac{1}{5}h_z^4 \cdot w_\rho^2 w_z^2 - \frac{1}{5}w_z^4 \cdot h_z^2 h_\rho^2,$$

$$(\alpha\beta)^2(\alpha h)^4 = \frac{1}{240}j(z\rho)^2 w_z^4 + \frac{1}{240}i(z\rho)^2 h_z^4 - \frac{1}{10}h_z^4 \cdot h_z^2 h_\rho^2$$

$$- \frac{1}{20}i w_z^4 \cdot w_z^2 w_\rho^2.$$

Con queste formole si trovano tosto i punti ρ in cui una quadrica qua-

(*) STUDY, loc. cit., n.º 5.

lunque del fascio suddetto viene tagliata dalla tangente a C_4 nel punto z . Supponendo poi che z sia uno qualunque dei quattro punti costituenti il gruppo considerato, nell'equazione così ottenuta potremo sostituire

$$h_z^4 = -\lambda w_z^4, \quad h_z^2 h_\rho^2 = -\lambda w_z^2 w_\rho^2.$$

Sopprimendo allora il fattore $w_z^4 \cdot w_z^2 w_\rho^2$, l'equazione che dà i punti ρ diventa

$$(-6\lambda^3 + 2j + 3i\lambda - 45\sigma\lambda)(z\rho)^2 = 0.$$

Assumendo quindi per σ il valore

$$\sigma = \frac{-6\lambda^3 + 2j + 3i\lambda}{45\lambda},$$

si ha nel fascio una quadrica, la quale contiene le quattro tangenti nei punti considerati.

Il teorema è così dimostrato; inoltre segue che l'equazione dell'iperboloide corrispondente al gruppo

$$\lambda w + h = 0$$

è

$$(96B - 60A)\lambda^3 + 225(Kw)^4\lambda^2 + [450(Kh)^4 + 30iA - 48iB]\lambda + 20jA - 2jB = 0.$$

I detti iperboloidi formano dunque un sistema di indice 3.

Pavia, 26 aprile 1892.

Poco dopo la presentazione di questa Memoria alla Direzione degli *Annali*, è comparso nel 1.° fascicolo del Bd. 40 dei *Mathem. Annalen* un esteso e notevole lavoro del sig. STAHL, avente per titolo *Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven*. Nel § 17 l'Autore considera brevemente anche la C_4 , e verso la fine del n.° 1, a pag. 48, trova che i gruppi di punti di C_4 situati sulle sue trisecanti sono le prime polari di una forma biquadratica a_λ^4 , avente lo stesso hessiano di quella che rappresenta i punti di contatto dei piani stazionari. Questa proprietà trovasi già dimostrata, partendo da altro punto di vista, nel n.° 4 della mia Nota *Sull'involuzione cubica* (Rend. della R. Accad. d. Scienze fis. e mat. di Napoli, 11 aprile 1891), dove è inoltre assegnato il significato geometrico della forma stessa a_λ^4 .

Agosto 1892.

ERRATA.

CORRIGE.

Pag. 102, linea 7 della nota: ∞^1 ∞^2

- » 104 » 17-18 si sopprimano le parole « e delle forme puramente.....
 dei piani stazionari ».
- » 112 » 11 λ λ^2
- » 115 » 13, 14, 23 dopo la parola « combinanti » si aggiunga « elementari ».
- » 117 » 13 si sopprimano le parole « le forme di cui ora si è parlato ».
- » 146 » ultima dopo le parole « Di qui » si aggiunga « e dal modo stesso
 di formazione ».

Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni.

(Di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

Un corso di matematiche superiori *sulla teoria delle sostituzioni*, da me dettato nell'anno scolastico 1891-92 nella Università di Pavia, mi ha dato occasione di completare gli studi che comincio a pubblicare con questo lavoro, il quale sarà seguito da altri lavori miei e dei miei discepoli. Con i quali altri lavori noi ci proporremo di mostrare tutto il vantaggio che si può trarre dall'idea fondamentale sviluppata qui applicandola massimamente allo studio di certe configurazioni note e di altre nuove.

Le caratteristiche di genere 3 furono studiate da WEBER, e quelle di genere 4 e di genere qualunque furono l'oggetto delle ricerche di NOETHER, di FROBENIUS e di altri.

È noto, dopo i lavori di CLEBSCH, il legame che esiste fra le caratteristiche e i sistemi di curve di contatto, per modo che lo studio della configurazione delle caratteristiche, o altrimenti lo studio del gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche diventa lo studio della configurazione dei diversi sistemi di curve di contatto, e in particolare, se si tratti di sole caratteristiche dispari, delle tangenti doppie della curva di 4.^o ordine (genere 3) o dei piani tritangenti della sestica storta (genere 4).

Siccome poi mediante le caratteristiche dispari si possono formare anche le pari, così una prima rappresentazione geometrica di tutte le caratteristiche ci verrebbe data dall'assieme di queste tangenti doppie, o di questi piani tritangenti.

Ma queste configurazioni sono troppo complicate, perchè noi le potessimo utilmente prendere per fondamento dei nostri studi.

Nelle ricerche di HESSE sulle curve di 4.^o ordine, le 28 tangenti doppie vengono a corrispondere alle 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali nello spazio. Il prof. KLEIN nelle sue lezioni a Göttingen si giovò di quest'ultima rappresentazione geometrica per ricavare alcune proprietà fondamentali delle caratteristiche di genere 3; io ho cercato di completare quest'idea ricavandone molti altri vantaggi fra cui la risoluzione di un problema già trattato in maniera completamente diversa dallo stesso prof. KLEIN (Math. Ann., Bd. 11), cioè un mezzo per assegnare le caratteristiche alle tangenti doppie di quella curva di 4.^o ordine a tangenti doppie reali studiata da PLÜCKER.

Ma la parte principale di questo lavoro è l'estensione di tale rappresentazione geometrica alle caratteristiche di genere 4 per le quali però ci manca qualcosa di analogo agli studi di HESSE; ma però per stabilire la rappresentazione non ci occorre altro che fondarci su di un teorema di NOETHER relativo all'esistenza di certi sistemi di dieci caratteristiche pari dotate di certe proprietà fondamentali.

Allora immaginando 10 punti nello spazio, nell'assieme dei 120 piani che li congiungono a tre a tre, noi possiamo avere il complesso di tutte le caratteristiche dispari, e abbiamo una figura che può considerarsi come la diretta estensione di quella figura che risulta dalle ricerche di HESSE.

Ciò fa supporre (e lo noto qui di passaggio, caso mai quest'idea possa venire utilmente raccolta da qualche geometra), che per la sestica storta di genere 4 si debba poter fare, introducendo lo spazio a 4 dimensioni, qualcosa di analogo a quello fatto da HESSE per la quartica piana; solo che mentre nella rappresentazione di HESSE si prende per fondamentale un solo sistema di contatto con caratteristica pari, per la sestica invece dovrebbero comparire come fondamentali 10 sistemi di contatto con caratteristica pari.

Prendendo come fondamento delle ricerche questa rappresentazione geometrica semplicissima ne risultano in modo facile tutti i teoremi già trovati da WEBER e NOETHER, e possiamo poi passare a considerare i sistemi completi di caratteristiche dispari che pel genere 3 corrispondono ai cosiddetti sistemi di ARONHOLD, e pel genere 4 sono i sistemi studiati da NOETHER.

Nella nostra rappresentazione i primi possono dar luogo solo a due figure diverse, mentre i secondi, come noi dimostriamo, danno luogo a 13 figure.

L'introduzione di questi sistemi ci porta a rappresentare geometricamente *tutte* le sostituzioni del gruppo di monodromia, mentre colla sola considerazione delle 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali, o dei 120 piani che congiungono a tre a tre 10 punti; si poteva rappresentare

solo quel sottogruppo di sostituzioni che lasciano inalterato l'assieme delle caratteristiche pari fondamentali.

Tenendo ora presenti gli studi di GEISER (Math. Ann., Bd. 1) sulla relazione fra le 27 rette della superficie di 3.^o ordine, e le 28 tangenti doppie della quartica piana si può anche passare a studiare il gruppo delle 27 rette della superficie cubica (JORDAN, pag. 317).

Di questo noi daremo qui solo un cenno in un capitolo finale; ci torneremo poi sopra di proposito in un prossimo lavoro.

Cogli stessi principii si potrebbe allora passare a studiare nello spazio a quattro dimensioni una configurazione di 119 piani analoga a quella delle 27 rette della superficie cubica nello spazio ordinario e una configurazione di 64 piani nel medesimo spazio analoga a sua volta a quella nota delle 16 rette della superficie di 4.^o ordine a conica doppia studiata da CLEBSCH. Ma ciò lo riserbiamo per un'altra occasione.

§ 1. Preliminari. — Teorema d'inversione.

In questo paragrafo non faremo che ricordare alcune nozioni generali per riordinarle secondo il punto di vista che ci occorrerà in seguito.

Si abbiano due gruppi di punti corresiduali su di una forma fondamentale di genere p :

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 \dots & x_r \\ a_1 & a_2 \dots & a_r. \end{array}$$

La condizione necessaria e sufficiente per la loro corresidualità è data dal teorema di ABEL ed è:

$$\int_{a_1}^{\omega_1} + \int_{a_2}^{\omega_2} + \dots + \int_{a_r}^{\omega_r} \equiv 0 \quad (\text{mod. periodi}),$$

dove l'integrando è quello di un integrale abeliano di 1.^a specie, e la corrispondenza fra i punti a e i punti x può stabilirsi in un modo arbitrario.

Con questo teorema può ricercarsi (*) quando è che una somma di integrali:

$$\int_{a_1}^{\omega_1} + \int_{a_2}^{\omega_2} + \dots + \int_{a_r}^{\omega_r},$$

(*) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 60.

Annali di Matematica, tomo XX.

Viene ora la domanda se questa corrispondenza è reciproca, cioè ad ogni punto del parallelepipedo corrisponde sempre un sistema di punti x . In altri termini si domanda se assegnati valori arbitrarii alle w , si possa sempre trovare un gruppo di punti x in modo che le relazioni precedenti sieno soddisfatte.

Il teorema d'inversione di WEIERSTRASS risponde a questa domanda, e dice che ad ogni punto w corrisponde un gruppo di punti x , ed uno solo.

Ciò torna a dire che: le funzioni razionali simmetriche dei p punti, sono funzioni monodrome delle w . Sotto questa forma il teorema era stato enunciato da JACOBI pel caso iperellittico, e la dimostrazione di JACOBI si fonda sulla teoria delle funzioni \wp (*).

Immaginiamo ora le w dipendenti solo da $p-1$ punti. Allora esisterà fra le p w una unica relazione che corrisponderà ad una varietà immersa nello spazio a $2p$ dimensioni; per modo che mentre il punto w si muove su questa varietà, esisterà sempre il gruppo corrispondente di $p-1$ punti, e se il punto w sta fuori di questa varietà, non esisterà il gruppo di $p-1$ punti. Consideriamo il parallelepipedo iniziale, cioè quello di cui uno dei vertici sia il punto zero; e congiungiamo in esso il punto zero con tutti gli altri vertici, e troviamo i punti medii di queste diagonali. Se $P_1 P_2 \dots P_p$ sono le coordinate di un vertice, dove le P sono combinazioni lineari con coefficienti interi dei periodi di w , allora:

$$\frac{1}{2} P_1, \quad \frac{1}{2} P_2, \dots, \quad \frac{1}{2} P_p,$$

saranno le coordinate di tali punti medii.

Ora dalla teoria delle \wp risulta che tal punto medio sta su quella varietà di cui si è parlato avanti, sempre che il vertice (P) corrisponde ad un periodo dispari (**), cioè semprechè posto:

$$P_i = m_1 \omega_{i1} + m_2 \omega_{i2} + \dots + m_p \omega_{ip} + \\ + n_1 \omega_{ip+1} + n_2 \omega_{ip+2} + \dots + n_p \omega_{ip},$$

si abbia:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + \dots + m_p n_p$$

eguale ad un numero dispari.

(*) Per la dimostrazione di WEIERSTRASS si può riscontrare: WEIERSTRASS, Crelle, B.J. 52. — BURKHARDT, Math. Annalen, Bd. 32, pag. 429 e seg.

(**) CLEBSCH, *Géométrie*, III, pag. 238 e seg. (ediz. francese).

§ 2. Curve di contatto; tangenti doppie; funzioni e forme radicali.

Limitiamoci al caso del genere 3; allora la forma fondamentale è una curva piana generale di 4.^o ordine C_4 .

Chiameremo *curva di contatto* alla C_4 ogni curva che in ogni punto in cui tagli C_4 la tocchi.

Con un computo di costanti si può far vedere che una curva di ordine n di contatto alla C_4 esiste sempre (*).

Noi vogliamo ora studiare coi principii precedenti quante ve ne sono e quali proprietà hanno.

Sieno C'_n C_n due curve di contatto di ordine n , di cui una esiste sempre; sieno:

$$a_1 \quad a_2 \dots a_{2n},$$

i punti di contatto della prima, e

$$x_1 \quad x_2 \dots x_{2n},$$

quelli della seconda.

I punti a ciascuno contato due volte, formano un gruppo corresiduale ai punti x , ciascuno anche contato due volte; onde pel teorema di ABEL si ha che:

$$2 \left(\int_{a_1}^{x_1} + \dots + \int_{a_{2n}}^{x_{2n}} \right) dw_i \equiv 0 \quad (\text{mod. periodi}).$$

Deve cioè il primo membro essere eguale ad un periodo di w_i , cioè a

$$P_i = m_1 \omega_{i_1} + m_2 \omega_{i_2} + m_3 \omega_{i_3} + \\ + n_1 \omega_{i_4} + n_2 \omega_{i_5} + n_3 \omega_{i_6}.$$

Quindi si ha:

$$\int_{a_1}^{x_1} + \dots + \int_{a_{2n}}^{x_{2n}} \equiv \frac{P_i}{2} \quad (\text{mod. periodi}).$$

Ora qualunque sia il periodo P_i , essendo $2n > p$ per $n > 1$ e $p = 3$, si ha pel teorema d'inversione, che il sistema dei $2n$ punti x esisterà sempre, e sarà $2n - 3$ volte infinito.

Vi saranno dunque tanti sistemi di $2n$ punti corrispondenti a curve di

(*) CLEBSCH, *Géométrie*, III, pag. 230 nota.

contatto (ciascun sistema $2n - 3$ volte infinito), quante sono le quantità $\frac{P_i}{2}$ fra loro incongruenti, cioè $2^2p = 2^6 = 64$.

Pel caso $n = 1$, cioè quando vogliamo considerare le tangenti doppie della curva di 4.° ordine, $2n$ è minore di p , ed è eguale propriamente a $p - 1$, e quindi non possiamo applicare il teorema d'inversione. Ma in questo caso ci è utile l'osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente, cioè che se il periodo P_i è dispari, allora esiste il sistema corrispondente di punti x , onde si ha che vi sono tante tangenti doppie quanti sono i periodi P_i dispari fra loro incongruenti, cioè 28.

Per $p = 4$ la forma fondamentale è una sestica storta e colle stesse considerazioni si giunge a far vedere che vi sono 120 piani tritangenti, mentre vi sono 256 sistemi di superficie di contatto S_n ciascuno $6n - 4$ volte infinito.

Sieno ora C_n C'_n i primi membri delle equazioni delle due curve di contatto. Allora:

$$\sqrt{\frac{C_n}{C'_n}},$$

sarà una funzione bidroma sulla superficie di RIEMANN, ed avrà per punti zero *semplici* i punti x , e per punti d'infinito *semplici* i punti a e solo essi; quindi sarà una funzione *non diramata*. La chiameremo una *funzione radicale* (*), mentre chiameremo $\sqrt{C_n}$ una *forma radicale* nel senso di KLEIN (**).

La periodicità della funzione radicale ha una relazione coi numeri interi m, n costituenti il periodo P_i .

Propriamente è facile trovare che percorrendo i $2p$ tagli canonici della superficie di RIEMANN, la funzione detta acquista rispettivamente i fattori

$$(-1)^{n_1}, (-1)^{n_2}, (-1)^{n_3}, (-1)^{m_1}, (-1)^{m_2}, (-1)^{m_3} (***)$$

Queste funzioni sono formate col quoziente di due forme radicali corrispondenti a due curve di contatto. Possiamo formare, nel caso di n dispari, una funzione mediante un'unica forma radicale, e un'altra forma fissa.

Costruiamo (n dispari)

$$\frac{\sqrt{C_n} \Omega(xy)}{\Gamma_{\frac{n-1}{2}}}$$

(*) Vedi il § 2 della Memoria: *Sulle funzioni sigma pari*, ecc. Annali di Matematica tom. 18.

(**) KLEIN, Math. Annalen, Bd. 36, pag. 30-32-49.

(***) Idem, pag. 33.

dove $\Gamma_{\frac{n-1}{2}}$ è una forma intera di grado $\frac{n-1}{2}$, e $\Omega(xy)$ è la forma introdotta da KLEIN.

Questa espressione è di grado zero in x e quindi è una *funzione* sulla superficie di RIEMANN.

Si fa vedere che la periodicità di tale funzione sulla superficie di RIEMANN è la seguente.

Percorrendo i tagli canonici essa acquista rispettivamente i fattori (*)

$$\begin{aligned} & (-1)^{h_1} e^{\sum \alpha_1} \left(w_a^{xy} + \frac{\omega_{\alpha_1}}{2} \right) \\ & \dots \dots \dots \\ & (-1)^{g_1} e^{\sum \sigma_{p+1}} \left(w_a^{xy} + \frac{\omega_{\sigma_{p+1}}}{2} \right) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Se considero due forme radicali $\sqrt{C_n} \sqrt{C'_n}$ e le divido fra loro, si ha che la periodicità della funzione che ne risulta sarà il quoziente delle periodicità delle due altre funzioni

$$\frac{\sqrt{C_n} \Omega(xy)}{\Gamma_{\frac{n-1}{2}}} \quad \frac{\sqrt{C'_n} \Omega(xy)}{\Gamma_{\frac{n-1}{2}}},$$

e quindi sarà:

$$(-1)^{h_1-h'_1}, \quad (-1)^{h_2-h'_2}, \quad (-1)^{h_3-h'_3}, \quad (-1)^{g_1-g'_1}, \quad (-1)^{g_2-g'_2}, \quad (-1)^{g_3-g'_3},$$

e paragonando colla periodicità ottenuta avanti si ha che i numeri

$$h_1 - h'_1, \dots, \quad g_1 - g'_1, \dots,$$

saranno congruenti (mod. 2) coi numeri

$$n_1, \dots, \quad m_1, \dots$$

Di qui si ricava che per due curve di contatto dello stesso sistema, l'assieme dei numeri h, g non muta (presi mod. 2) perchè la differenza dei numeri corrispondenti deve corrispondere alla periodicità della funzione che è il quoziente delle due forme radicali corrispondenti, e tal funzione, poichè le curve di contatto appartengono allo stesso sistema, è, come si sa, una funzione razionale e quindi la sua periodicità è zero.

(*) KLEIN, Opera citata, pag. 34.

Consideriamo una curva di contatto C_n . Ad essa e a tutte quelle del suo sistema (e solo ad esse) appartengono i numeri m, n ; mutando il sistema muta il complesso di questi numeri.

Noi allora possiamo assumere questi numeri come rappresentanti il sistema cui appartiene C_n , e il complesso di questi numeri m, n lo chiamiamo la *caratteristica* del sistema.

Però osserviamo che il valore di questi numeri (mod. 2) dipende dalla scelta della curva C'_n che ha per punti di contatto i punti a . Quindi variando questa curva varia la caratteristica, almenochè non potessimo scegliere per la curva C'_n una tal curva di contatto che sia geometricamente distinta da tutte le altre. Ciò avviene nel caso di n pari, in cui possiamo considerare l'insieme di $\frac{n}{2}$ rette del piano ciascuna contata due volte. Tale insieme forma una curva di contatto degenerata, e distinta geometricamente da tutte le altre. Analogamente anche i numeri g, h possono assumersi come caratteristica del sistema, perchè abbiamo fatto vedere che essi non mutano facendo variare nel proprio sistema la curva di contatto.

Allora per le curve di contatto di ordine pari noi assumeremo come caratteristica l'insieme dei numeri (m, n) , prendendo per fondamentale la curva di contatto degenerata, e per quelle di ordine dispari noi assumeremo come caratteristica l'insieme dei numeri (g, h) . In ambo i casi allora queste caratteristiche figurano come caratteristiche assolute.

La caratteristica (gh) per la sua natura non potrebbe adattarsi a curve di contatto di ordine pari, mentre la caratteristica (mn) potrebbe anche adattarsi a curve di contatto di ordine dispari perdendo però il suo carattere *assoluto*. Seguendo il KLEIN, le caratteristiche (mn) si chiamano *elementari*, e le (gh) *prime*.

§ 3. Monodromia della superficie di Riemann.

Gruppo delle curve di contatto di ordine pari e dispari.

Gruppo delle caratteristiche.

Immaginiamo che i coefficienti della curva di 4.^o ordine descrivano nel piano complesso delle curve chiuse, cioè alteriamo i coefficienti e facciamoli poi tornare ai loro valori primitivi. Allora la curva di 4.^o ordine torna in sè stessa, e quindi considerando la superficie di RIEMANN corrispondente, questa torna in sè stessa, e tornano in loro stessi dopo aver subito una certa per-

mutazione fra loro tutti i punti di diramazione. Il sistema dei tagli canonici dell'antica superficie di RIEMANN torna in un sistema di tagli canonici della nuova, per modo che con questo mutamento i periodi ω degli integrali abeliani si alterano con sostituzioni lineari; i nuovi periodi cioè risultano combinazioni lineari con coefficienti interi degli antichi.

Si sa che nel caso della forma generale abeliana, da un sistema di tagli canonici si può passare a qualunque altro per monodromia, cioè per opportuni cammini rientranti fatti percorrere ai coefficienti di C_4 , cioè in questo senso, tutti i sistemi di tagli canonici possono considerarsi fra loro come equivalenti (*).

Questa trasformazione in sè stessa della superficie di RIEMANN si suol chiamare trasformazione di monodromia, per la seguente ragione. Facendo percorrere ai coefficienti di C_4 tutti i cammini chiusi possibili si ha evidentemente un gruppo di sostituzioni fra i punti di diramazione della superficie di RIEMANN corrispondente. Ora una funzione dei punti di diramazione appartenente a tal gruppo, cioè che resta inalterata per le sostituzioni di questo gruppo, è una funzione *monodroma* dei coefficienti di C_4 , e perciò tal gruppo si chiama gruppo di monodromia (**). L'ordine del gruppo è $36 \cdot 8!$

Esaminiamo ora come si comportano per monodromia le curve di contatto. Dobbiamo distinguere anche qui i due casi di curve di contatto di ordine pari e di ordine dispari.

Per una sostituzione di monodromia un sistema di curve di contatto va in un altro; quindi si ha una permutazione dei sistemi di curve di contatto.

Tutte queste permutazioni formano un gruppo. Noi vogliamo studiare questi gruppi e per far ciò siamo condotti a studiare la trasformazione per monodromia delle caratteristiche assolute corrispondenti ai singoli sistemi di curve di contatto. Una trasformazione di monodromia corrisponde ad una sostituzione lineare dei periodi. Sia tale sostituzione

$$\omega'_{i1} = a_1 \omega_{i1} + b_1 \omega_{i2} + c_1 \omega_{i3} + d_1 \omega_{i4} + e_1 \omega_{i5} + f_1 \omega_{i6}$$

$$\omega'_{i2} = a_2 \omega_{i1} + \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Perchè questa possa rappresentare una sostituzione di monodromia (sosti-

(*) KLEIN, Opera citata, pag. 47.

(**) JORDAN, *Subst.*, pag. 277.

tuzione abeliana come la chiama il JORDAN), è noto che fra i coefficienti debbono sussistere delle relazioni identiche (*).

Con queste trasformazioni dei periodi ω , si possono avere le formole di trasformazione delle caratteristiche (**).

Per le *caratteristiche elementari* si hanno le formole:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &\equiv a_1 m'_1 + a_2 m'_2 + a_3 m'_3 + a_4 n'_1 + a_5 n'_2 + a_6 n'_3 \\ m_2 &\equiv b_1 m'_1 + \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \pmod{2}. \quad (I)$$

E per le *caratteristiche prime* si hanno invece le formole:

$$\left. \begin{aligned} g_1 &\equiv a_1 g'_1 + a_2 g'_2 + a_3 g'_3 + a_4 h'_1 + a_5 h'_2 + a_6 h'_3 + \\ &\qquad\qquad\qquad (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6) \\ g_2 &\equiv \dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \pmod{2}. \quad (II)$$

Esaminiamo a parte i gruppi formati colle sostituzioni della 1.^a o della 2.^a specie.

Essendo omogenee le formole della prima trasformazione, si ha che dalla caratteristica (0) io passo sempre alla caratteristica (0), cioè per tutto le sostituzioni di monodromia vi è una caratteristica elementare che resta inalterata. Inoltre badando alle relazioni che debbono sussistere fra i coefficienti a, b, c, \dots si trova che tali relazioni non danno alcuna altra limitazione, in modo che per una sostituzione (I) da un sistema di numeri (m, n) posso passare a qualunque altro meno il sistema $(0, 0)$. Cioè il gruppo delle sostituzioni (I) è transitivo fra tutte le caratteristiche elementari, meno però per la caratteristica zero che non viene spostata da nessuna sostituzione.

Inoltre se abbiamo due caratteristiche

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix},$$

si può formare la espressione

$$I \equiv \Sigma(m_i N_i - n_i M_i) \pmod{2},$$

(*) HERMITE, Comptes Rendus, tom. 40. — JORDAN, *Subst.*, pag. 171. — BURKHARDT, Math. Ann., Bd. 35, pag. 203.

(**) KLEIN, Math. Ann., Bd. 36, pag. 36.

Annali di Matematica, tomo XX.

e questa colla sostituzione (I) diventa esattamente

$$\Sigma(m'_i N'_i - n'_i M'_i) \pmod{2},$$

cioè resta inalterata; cioè esiste un invariante formato con due caratteristiche elementari, mentre non ne esiste uno formato con una sola caratteristica.

Da questi risultati si può passare ora senz'altro a considerazioni analoghe sulle curve di contatto di ordine pari. Geometricamente è chiaro che fra i sistemi di curve di contatto di ordine pari ne esiste uno (quello formato coll'assieme di $\frac{n}{2}$ rette del piano ciascuna contata due volte) che non si altera con qualunque sostituzione di monodromia. Se noi allora a questo sistema diamo la caratteristica zero (come appunto abbiamo fatto avanti per ottenere caratteristiche assolute) noi ci accordiamo col fatto analitico che per le sostituzioni di monodromia la caratteristica elementare zero resta inalterata.

Allora siccome per le trasformazioni di monodromia rimane fisso sia quel tale sistema preso per base e sia la caratteristica che vi corrisponde, così quando la caratteristica (mn) è diventata $(m'n')$ noi possiamo concludere che il sistema di curve cui apparteneva (mn) è diventato il sistema cui apparteneva $(m'n')$. Ma abbiamo detto che il gruppo delle caratteristiche elementari è transitivo, cioè da ogni (mn) [meno (00)] posso passare ad ogni $(m'n')$, dunque per monodromia posso passare da ogni sistema di curve di contatto di ordine *pari* (meno il sistema di curve degenerate) in ogni altro sistema.

Stabilito però il passaggio da un sistema ad un altro resta limitata la permutazione di tutti gli altri sistemi, perchè colle caratteristiche di due sistemi si può formare, come si è visto avanti, un invariante e quindi stabilito il passaggio di un sistema, resta limitato il passaggio degli altri dalla condizione che la espressione I avanti considerata resti inalterata.

Passiamo ora alle *caratteristiche prime*.

Dalle formole di trasformazione risulta, poichè esse non sono più omogenee, che dalla caratteristica (0) si potrà passare ad un'altra caratteristica non necessariamente zero.

Inoltre con una sola caratteristica si può formare un'espressione invariante cioè:

$$J \equiv g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 \pmod{2},$$

come è facile verificare, giovandosi delle sostituzioni generatrici di KRAZER (*);

(*) Annali, vol. 12.

onde allora viene la necessità di distinguere le caratteristiche prime in pari e dispari secondochè è pari o dispari il corrispondente invariante J .

Infine da ogni caratteristica pari si può passare ad ogni altra pari, e da ogni dispari ad ogni altra dispari.

Il gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche prime è dunque transitivo rispetto alle sole caratteristiche pari fra loro e dispari fra loro. Le pari sono 36 e le dispari 28. Passando ora a considerare le curve di contatto di ordine dispari si ha dunque che colle sostituzioni di monodromia non si può passare da ogni sistema ad ogni altro, ma tutti i 64 sistemi si dividono in due classi, e si possono permutare fra loro solo i sistemi di una stessa classe.

Questa scissione dei 64 sistemi di curve di contatto di ordine dispari in due classi corrisponde ad una proprietà geometrica di tali sistemi, cioè che fra i 64 sistemi di curve di contatto di ordine dispari ve ne sono 28 godenti di una proprietà geometrica di cui non godono gli altri. In primo luogo noi possiamo considerare una tangente doppia insieme con un complesso di rette contate due volte; allora si ha una curva di contatto che colle sostituzioni di monodromia non può evidentemente che mutarsi in una della stessa natura, e poichè di queste non se ne possono formare che 28 (corrispondenti alle 28 tangenti doppie), esistono 28 sistemi che possono trasformarsi fra loro ma non con alcuno dei 36 rimanenti; ognuno dei 28 sistemi resta dunque coordinato con una delle 28 tangenti doppie.

Si può poi dimostrare che per i punti di contatto di una curva di uno di tali sistemi e per i due punti di contatto della tangente doppia corrispondente si può far passare una curva di ordine $\frac{n+1}{2}$ (CLEBSCH.)

Evidentemente i due gruppi, quello delle sostituzioni fra i sistemi di curve di contatto di ordine pari, e quello per le curve di contatto di ordine dispari, sono fra loro *isomorfi ad un grado*, perchè ad ogni sostituzione dell'uno corrisponde una sostituzione dell'altro, e al prodotto di due sostituzioni di un gruppo corrisponde il prodotto delle sostituzioni corrispondenti dell'altro. Consideriamo ora l'assieme di due curve di contatto. Evidentemente si ha una nuova curva di contatto il cui ordine è quanto la somma degli ordini delle due curve date.

Ora supponendo le due curve ambedue di ordine pari o dispari, vogliamo ricercare la caratteristica che competerà alla curva di contatto che è l'assieme delle due.

Tenendo presente la definizione di caratteristica è facile vedere che in qualunque caso per trovare la caratteristica risultante basterà sommare i numeri corrispondenti alle due curve date. Intanto se si tratti di due curve di ordine dispari, il loro assieme sarà di ordine pari, quindi la somma delle due caratteristiche prime deve essere una caratteristica elementare.

Ricordando che siccome i numeri che figurano nelle caratteristiche sono presi mod. 2, così fare la loro somma o la loro differenza è la stessa cosa, si ricava che il risultato ultimamente ottenuto è d'accordo con un'osservazione fatta nel paragrafo precedente.

Inoltre deve allora evidentemente accadere che per le trasformazioni di monodromia, la somma di due caratteristiche prime deve trasformarsi colle stesse formole con cui si muta una caratteristica elementare, e ciò si può infatti facilmente verificare tenendo presenti le formole indicate sul principio di questo paragrafo.

Così se sommiamo tre caratteristiche prime si ha di nuovo una caratteristica prima, e in generale la somma di un numero pari di caratteristiche prime dà una caratteristica elementare, e la somma di un numero dispari di esse dà una caratteristica prima. Ciò è in corrispondenza col fatto che un numero dispari o pari di curve di ordine dispari, dà una curva di ordine dispari o pari.

In certo modo allora le caratteristiche prime funzionano come le generatrici di tutte le altre caratteristiche.

Dalle cose dette risulta che la somma di due caratteristiche prime non ha una parità o disparità fissa colle sostituzioni di monodromia, perchè si comporta come una caratteristica elementare; mentre che la somma di tre caratteristiche prime ha sempre una parità o disparità fissa.

Infine è chiaro che accanto ai gruppi delle sostituzioni fra le curve di contatto c'è da considerare ancora il gruppo delle tangenti doppie. Per monodromia le 28 caratteristiche dispari si permutano fra loro, e perciò si permutano fra loro le 28 tangenti doppie cui, come sappiamo, (§ 2) competono appunto caratteristiche dispari. Il gruppo delle 28 tangenti doppie è transitivo come risulta dalle cose precedenti.

Ora passeremo a considerare due generazioni della curva di 4.^o ordine, e quindi le due figure corrispondenti chiamate figura di GEISER e figura di HESSE, e i gruppi di sostituzioni corrispondenti a queste figure.

§ 4. Figure di Geiser e di Hesse.

È noto che il GEISER e l'HESSÉ hanno studiata la curva piana di 4.^o ordine in relazione colla superficie di 3.^o ordine e colla rete di quadriche.

Riassumeremo ora queste relazioni e cominciamo dalla figura di GEISER (Math. Ann., Bd. 1).

Se da un punto meniamo il cono tangente ad una superficie cubica S_3 , abbiamo un cono di 6.^o ordine, e se il punto sta su S_3 abbiamo invece un cono di 4.^o ordine e il piano tangente ad S_3 in quel punto contato due volte. Tagliamo questo cono con un piano, e abbiamo una curva di 4.^o ordine generale C_4 .

Ogni curva di S_3 tocca il cono di proiezione e quindi si proietta in una curva di contatto a C_4 ; onde le sezioni piane di S_3 diventano curve di 3.^o ordine di contatto a C_4 ; si ha così un sistema di cubiche di contatto. Il piano tangente ad S_3 nel centro di proiezione taglia il piano di C_4 in una tangente doppia che chiameremo tangente doppia fondamentale.

Ogni piano passante per una delle 27 rette di S_3 e pel centro di proiezione taglia ancora il piano di C_4 in una tangente doppia di C_4 e così si hanno tutte le 28 tangenti doppie di C_4 .

La polare del centro di proiezione rispetto a S_3 è una quadrica S_2 ; l'intersezione di S_3 con S_2 è una sestica storta C_6 passante pel centro di proiezione e che è la curva di contatto di S_3 col cono circoscritto.

La C_4 sarà la proiezione di C_6 dal centro di proiezione il qual punto è un punto doppio per C_6 . Le due tangenti in tal punto doppio sono le congiungenti il centro di proiezione coi due punti di contatto di una tangente doppia di C_4 .

Le trisecanti di C_6 sono:

- 1.^o Ogni retta passante pel punto doppio e per un altro punto di C_6 .
- 2.^o Ogni generatrice rettilinea della quadrica S_2 .

I tre punti d'incontro della trisecante con C_6 corrispondono per C_4 ai tre punti in cui una retta passante per uno dei punti di contatto della tangente doppia fondamentale taglia la C_4 .

Come si vede tutta questa figura è correlata ad una tangente doppia di C_4 che figura come fondamentale; ad essa è correlata ancora un sistema di cubiche di contatto; quello ottenuto colle sezioni piane di S_3 . Onde vi sono

28 figure di GEISER corrispondenti alle 28 tangenti doppie. Per le sostituzioni di monodromia queste 28 figure di GEISER si permutano le une colle altre mentre la curva C_4 resta inalterata. Per quelle sostituzioni di monodromia che lasciano inalterata una tangente doppia la figura di GEISER corrispondente resta inalterata; però le 27 rette della superficie si scambiano fra loro; cioè *il sottogruppo che lascia inalterata una caratteristica dispari corrisponde al gruppo delle 27 rette della superficie di 3.° ordine.*

Passiamo ora alla figura di HESSE.

Consideriamo una rete di quadriche; i vertici delle quadriche che degenerano in coni formano una sestica storta C_6 non situata su di una quadrica; interpretando i corrispondenti parametri della rete come le coordinate di un punto del piano, si ha una curva piana generale di 4.° ordine C_4 . Ad ogni punto di C_6 corrisponde dunque un punto di C_4 .

Gli ∞^3 gruppi di 6 punti segati su C_6 da un piano dello spazio corrispondono su C_4 a 6 punti di contatto di una cubica, onde anche qui si ha un sistema fondamentale di cubiche di contatto; ai 12 punti in cui una quadrica taglia C_6 corrispondono i 12 punti in cui una cubica taglia C_4 , e alle quadriche della rete corrispondono le polari di un punto rispetto alla C_4 , mentre i coni della rete corrispondono alle polari di un punto di C_4 rispetto a C_4 .

Ai quattro punti d'incontro di una retta con C_4 corrispondono i quattro vertici dei quattro coni di un fascio di quadriche compreso nella rete, e questi quattro punti sono definiti da questa proprietà che il piano polare fisso di uno di essi rispetto a tutte le superficie del fascio è il piano degli altri tre punti.

Per ogni punto di C_6 passano tre trisecanti, e si può stabilire una corrispondenza simmetrica (3, 3), senza coincidenze fra i punti di C_6 (*).

Ai due punti di contatto di una tangente doppia di C_4 corrispondono due punti di C_6 che sono i vertici dei due coni compresi in un fascio di quadriche in cui i quattro coni si riuniscono a due a due.

Le congiungenti a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche incontrano in due punti la sestica; si dimostra che tali due punti sono i punti corrispondenti ai due punti di contatto di una tangente doppia. Ne ricaviamo dunque che alle tangenti doppie di C_4 corrispondono le rette che congiungono a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche. In questa rappresentazione quindi non c'è alcuna tangente doppia che

(*) Vedi Memoria IV: *Sopra le funzioni sigma pari*, ecc. Annali di Mat., tom. 18, 1890.

figura in modo distinto dalle altre e c'è solo un sistema di cubiche di contatto che figura come sistema base della rappresentazione e si può far vedere che è uno di quei 36 sistemi corrispondenti alle 36 caratteristiche pari. Vi sono quindi 36 figure di HESSE.

Colle sostituzioni di monodromia che lasciano inalterato il sistema fondamentale di cubiche, cioè la caratteristica pari corrispondente, la figura di HESSE rimane la stessa, ma poichè le tangenti doppie si permutano fra loro, così si permutano fra loro gli otto punti fondamentali della rete in tutti i modi possibili, perchè da una tangente doppia noi possiamo passare a qualunque altra. Si permutano fra loro anche tutte le altre 35 caratteristiche pari.

Potendo scegliere come fondamentale una qualunque delle 36 caratteristiche pari, si ha che l'ordine del sottogruppo che lascia inalterata una caratteristica pari sarà l'ordine del gruppo totale diviso per 36 cioè 8!, onde si ricava che permutando fra loro gli otto punti fondamentali in tutti i modi possibili si ha il sottogruppo che lascia inalterata una caratteristica pari, cioè *tale sottogruppo è isomorfo col gruppo simmetrico di otto elementi.*

Tale sottogruppo è semplicemente transitivo fra le 28 caratteristiche dispari, perchè permutando fra loro gli otto punti io posso fare andare una caratteristica dispari in un'altra qualunque, ma non posso poi fare lo stesso per un'altra caratteristica dispari, perchè il trasporto di un punto in un altro porta con sè il trasporto di tutte le rette che fanno capo in quel punto e quindi non posso più stabilire arbitrariamente il passaggio di un'altra caratteristica presa ad arbitrio.

Le figure di GEISER e di HESSE ci fanno conoscere in un molto facile la struttura del gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche prime. Risulta infatti che tal gruppo, a differenza di quello delle caratteristiche elementari, non è transitivo in tutti gli elementi, ma tali elementi si scindono in due classi di 28 e 36 elementi, e fra gli elementi di ciascuna classe esiste la transitività.

Questa transitività però in un certo senso è doppia; cioè noi possiamo disporre arbitrariamente del passaggio di una caratteristica pari ad una pari, e nello stesso tempo di una dispari ad una dispari, ed esiste sempre la sostituzione che effettua contemporaneamente questi due passaggi arbitrariamente stabiliti.

Ciò lo possiamo ricavare dalla figura di HESSE.

Sieno infatti a, a' due caratteristiche pari, e b, b' due dispari; noi vogliamo far vedere che esiste una sostituzione che muta a in a' mentre muta b in b' .

Costruiamo le due figure di HESSE aventi per basi le caratteristiche a, a' . Esistono sostituzioni che mutano la prima figura nella seconda. Sia s una di

queste. Questa s muti b in b'' . Allora esiste ancora una sostituzione s' che lascia inalterata a' e che muta b'' in b' . Quindi ss' muta a in a' e b in b' . D'altra parte la figura di GEISER ci mostra che nel solo assieme delle caratteristiche dispari esiste anche una doppia transitività.

In altri termini il gruppo totale è fatto in maniera che noi anzichè disporre del passaggio di una dispari ad una dispari e contemporaneamente di una pari ad una pari, possiamo disporre del passaggio solo di *due* dispari.

Infatti abbiamo visto che il sottogruppo delle sostituzioni che lasciano inalterata una caratteristica dispari corrisponde al gruppo delle 27 rette della superficie cubica. Ora tale gruppo è semplicemente transitivo (*), onde sarà transitivo il sottogruppo di cui si parla; ma abbiamo già disposto di un elemento che abbiamo lasciato inalterato (la base della figura di GEISER), dunque il gruppo totale è doppiamente transitivo.

Se noi da tutte le sostituzioni del gruppo totale cancelliamo gli elementi che rappresentano le caratteristiche pari, abbiamo il gruppo delle caratteristiche dispari o delle tangenti doppie, e quindi ricaviamo che tal gruppo è anche doppiamente transitivo in senso assoluto. Se il gruppo totale è doppiamente transitivo in rapporto alle 28 caratteristiche dispari e alle 36 pari, il suo ordine deve essere divisibile per $28 \cdot 36$ ciò che infatti si trova.

E così, se è doppiamente transitivo in rapporto solo alle 28 dispari, il suo ordine deve essere divisibile per $28 \cdot 27$ ciò che anche si verifica.

Ora viene la domanda se esiste anche la doppia transitività rispetto alle sole 36 pari. L'ordine del gruppo è divisibile per $36 \cdot 35$. In uno dei capitoli seguenti studiando più addentro la figura di HESSE e la rappresentazione geometrica delle caratteristiche, troveremo che tale doppia transitività esiste infatti perchè tutte le caratteristiche pari possono essere rappresentate da certe terne di rette che possono per monodromia trasformarsi le une nelle altre. (Vedi § 7 in fine.)

§ 5. Introduzione alla rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3.

La figura di HESSE considerata nel paragrafo precedente ci dà il mezzo di rappresentare geometricamente le caratteristiche; infatti ivi abbiamo trovato che le tangenti doppie corrispondono alle 28 congiungenti a due a due gli otto punti fondamentali della rete di quadriche.

(*) JORDAN, *Subst.*, pag. 316.

Ora sappiamo che alle tangenti doppie corrispondono caratteristiche prime dispari, dunque nel complesso delle 28 rette che congiungono a due a due otto punti fondamentali abbiamo una rappresentazione geometrica delle caratteristiche dispari (*).

Allora noi possiamo fare astrazione da tutta la figura di HESSE, e considerare solo questa configurazione immaginando fissa una caratteristica pari presa come base (che è quella corrispondente a quel sistema di cubiche di contatto che funziona come base nella figura di HESSE) e tenendo presente che la configurazione deve considerarsi come rientrante in sè stessa con una sostituzione di monodromia che lasci inalterata quella caratteristica pari, e quindi una parte della configurazione formante una certa figura qualunque, deve ritenersi equivalente cioè trasformabile in un'altra figura simile qualunque.

Allora con semplici considerazioni di leggi combinatorie noi dedurremo tutte le proprietà degli aggruppamenti di caratteristiche, e poi passeremo al caso delle caratteristiche di genere 4.

§ 6. Coppie di tangenti doppie.

Incominciamo coll'esaminare le coppie di due caratteristiche dispari. È evidente che non esistono altri tipi che i due tipi I, II rappresentati dalla fig. 1.^a.

Per il principio dell'equivalenza fra tutte le figure simili si ricava che tutte le figure come I sono fra loro equivalenti, e così tutte le figure come II. Intanto per quello che si è osservato nel § 4 una coppia di caratteristiche prime non ha una parità o disparità fissa, quindi noi senz'altro non potremmo dire se la coppia I dà o no una caratteristica pari o dispari.

Però noi sappiamo che nella rappresentazione geometrica introdotta nel paragrafo precedente dietro lo studio della figura di HESSE, comparisce come fondamentale una certa caratteristica pari, e d'altra parte è chiaro che le coppie di caratteristiche prime acquistano una parità o disparità fissa quando ad esse si aggiunge costantemente una caratteristica fissa. Quindi possiamo asserire che il tipo I e II darà luogo ad una caratteristica di carattere definito se noi intendiamo sempre aggiunta la caratteristica fondamentale della rappresentazione. Ci resta allora a vedere quale dei due tipi dà luogo ad una ca-

(*) KLEIN, Lezioni a Göttingen, 1888-89.

Annali di Matematica, tomo XX.

ratteristica pari e quale ad una dispari. Per l'equivalenza fra tutte le figure del tipo I o II, e tutte le caratteristiche pari o dispari, possiamo dire che tutte le caratteristiche dispari debbono essere esaurite da uno dei due tipi e tutte le pari dall'altro. Quindi adesso non resta che effettuare un calcolo numerico e vedere quante figure del tipo I vi sono nella configurazione completa e quante del tipo II. Allora fra i due numeri che otterremo ricercheremo quello divisibile per 28 (e vi dovrà essere) e ad esso corrisponderà il tipo che dà luogo a caratteristiche dispari. L'altro tipo dà naturalmente caratteristiche pari.

Però facciamo un'osservazione. Formando così tutte le coppie di caratteristiche dispari diverse e aggiungendo ogni volta la caratteristica pari fondamentale, io potrò ottenere tutte le caratteristiche pari, meno una che è quella scelta per fondamentale; perchè per ottenere quella con questo procedimento occorrerebbe che la somma delle due dispari fosse zero, il che non è possibile quando si tratti della somma di due caratteristiche diverse. Quindi le caratteristiche pari che potrò ottenere saranno 35 e non 36.

Ora del tipo I ve ne sono evidentemente $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 28 \cdot 6$ e del tipo II ve ne sono $\frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 35 \cdot 6$; dunque ne concludiamo che il tipo I rappresenta caratteristiche dispari, e ciascuna di esse 6 volte, e II rappresenta caratteristica pari e ciascuna anche 6 volte.

Se per caratteristica pari fondamentale prendiamo la caratteristica (0) ne ricaviamo di qui un teorema noto, che cioè ogni caratteristica pari o dispari di genere 3 può in 6 modi diversi essere rappresentata come somma di due caratteristiche dispari (*).

§ 7. Terne di tangenti doppie.

Tutte le possibili terne di caratteristiche dispari sono rappresentate dalle cinque figure della fig. 2.^a. Il numero di tali terne è rispettivamente

$$56; 28 \cdot 30; 35 \cdot 48; 28 \cdot 15; 35 \cdot 8.$$

Ora ci proponiamo di ricercare quali di questi tipi sono tali che la somma delle caratteristiche dispari da esse rappresentate dia una caratteristica dispari

(*) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 18.

o pari (*). Anche qui possiamo servirci del principio di equivalenza e ritenere intanto che tutte le figure simili danno tutte o una caratteristica pari o una dispari.

Possiamo procedere in due modi e possiamo giovarci di questi teoremi noti sulle caratteristiche (**):

1. Ogni caratteristica pari si può scomporre in 56 modi nella somma di tre caratteristiche dispari.

2. Ogni caratteristica dispari si può scomporre in 45 modi nella somma di tre caratteristiche dispari diverse.

Di qui si ha che debbono esistere $35 \cdot 56$ terne di caratteristiche dispari, la cui somma è pari, ed esistono $45 \cdot 28$ terne la cui somma è dispari.

Procederemo prima con un metodo basato essenzialmente sui principii sviluppati avanti e senza giovarci di questi teoremi; e poi indicheremo un metodo seguito dal prof. KLEIN nelle sue lezioni e basato essenzialmente sulla conoscenza dei teoremi enunciati sopra.

Incominciamo col proporci il problema: Noi sappiamo che le due rette indicate dal tipo I della fig. 1.^a insieme colla caratteristica fondamentale rappresentano una caratteristica dispari. Quale caratteristica dispari rappresentano?

È chiaro che chiamando $a b c$ queste tre caratteristiche dispari (la somma e le due date) due di esse insieme colla caratteristica fondamentale debbono dare la terza, cioè due di esse qualunque debbono formare sempre una figura come I (fig. 1.^a) e quindi non possono che formare un triangolo, cioè il tipo I (fig. 2.^a) rappresenta la caratteristica pari fondamentale.

Si potrebbe obiettare che essendo questo ragionamento basato sul fatto che a due a due le tre rette debbono avere un punto comune, c'è anche il tipo V che soddisfa alla stessa condizione essendo esso composto di tre rette passanti per un medesimo punto.

Però se una delle figure del tipo V rappresenta la caratteristica fondamentale, per il solito principio di equivalenza tutte la debbono rappresentare, e allora considerando due figure del tipo V differenti solo per una retta, dovendo la somma delle tre rette di ciascuna figura rappresentare la stessa caratteristica, la terza retta dell'una dovrà essere la stessa della terza retta dell'altra, e quindi si cade nell'assurdo.

Siccome dunque si possono formare solo 56 triangoli si conchiude che

(*) KLEIN, Lezioni a Göttingen, 1889.

(**) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 23.

la caratteristica pari fondamentale può in 56 modi (e non più) rappresentarsi come somma di tre caratteristiche dispari diverse, e poichè esiste l'equivalenza fra tutte le caratteristiche pari, e potendo noi prendere a fondamento della rappresentazione una qualunque caratteristica pari, così possiamo dire che ogni caratteristica pari può in 56 modi rappresentarsi come somma di tre dispari. Ritroviamo così il teorema che abbiamo enunciato sopra.

Ciò posto è facile riconoscere che carattere hanno tutte le altre terne della fig. 2.^a

In effetti pel tipo II osserviamo (vedi fig. 3.^a) che la somma di a b dà la caratteristica dispari d più la caratteristica fondamentale, in virtù di quello che adesso abbiamo dimostrato. Ma $d + c$ dà ancora la caratteristica fondamentale più la caratteristica dispari e , dunque in tutto

$$a + b + c = e + 2F = e,$$

chiamando F la caratteristica fondamentale.

Quindi il tipo II dà una caratteristica dispari.

Analogamente troviamo che il tipo III dà luogo ad una caratteristica pari perchè (fig. 4.^a) dà:

$$d + c + F$$

che, come sappiamo dal capitolo precedente, è pari. Così il tipo V è anche pari perchè (fig. 5.^a) è

$$d + c + F.$$

In quanto al tipo IV noi possiamo subito dedurre che esso corrisponde a caratteristica dispari nel seguente modo: Avendo già dimostrato che ogni caratteristica pari si scompone in 56 modi in tre dispari, si ha che debbono esistere $56 \cdot 36$ terne di caratteristiche dispari che danno luogo a caratteristica pari.

Ora noi abbiamo già trovato che le terne dei tipi I III V danno pari, e il loro numero è

$$56 + 56 \cdot 30 + 56 \cdot 5 = 56 \cdot 36,$$

dunque questi tipi esauriscono già tutte le terne pari, e quindi il tipo IV non può essere che una terna dispari. Non è difficile esaminare qual'è la caratteristica dispari che essa rappresenta.

Infatti se questa avesse un vertice in uno dei 6 punti 1, 2, 3, 4, 5, 6 e fosse per es. la retta (67) (fig. 6.^a), allora sommando le due rette (56), (67)

si avrebbe la retta (57) + F e quindi le tre rette (12) (34) (57) formanti un tipo come IV dovrebbero dare per somma F pari, contro ciò che si è dimostrato.

Se ancora la retta somma avesse due vertici di comune colle tre rette (12) (34) (56) e fosse per es. (46) allora (fig. 6.^a) l'assieme delle tre rette (34) (46) (65) darebbe la retta (35) e la somma di (12) (35) dovrebbe dare zero; ora ciò è impossibile perchè la somma di due caratteristiche diverse non può essere zero.

Dunque la somma delle tre rette non può che essere la retta (78).

Esponiamo ora il metodo tenuto da KLEIN nelle sue lezioni a Göttingen.

Teniamo conto del numero delle terne di ciascun tipo esistenti nella configurazione generale e ricordiamo che il numero di tutte le terne dispari deve essere $7 \cdot 180$.

Indichiamo con $\alpha \beta \gamma \delta \varepsilon$ dei numeri che sono o 0 o 1, e allora deve sussistere

$$56\alpha + 7 \cdot 120\beta + 7 \cdot 240\gamma + 7 \cdot 60\delta + 7 \cdot 40\varepsilon = 7 \cdot 180,$$

cioè

$$2\alpha + 30\beta + 60\gamma + 15\delta + 10\varepsilon = 45.$$

Questa relazione ha la sola soluzione

$$\alpha = \gamma = \varepsilon = 0,$$

e quindi le terne dispari sono la II e IV come abbiamo trovato direttamente.

Adesso vogliamo far vedere che tutte le terne comprese in un tipo possono dare *tutte* le caratteristiche pari o dispari corrispondenti, salvo quelle del primo tipo che non danno che un'unica caratteristica pari (la fondamentale).

In altri termini consideriamo per es. le terne II.

Io dico che ogni caratteristica dispari può essere rappresentata da una terna II e ciascuna naturalmente lo stesso numero di volte, in virtù del principio di equivalenza. Così una caratteristica pari (salvo la fondamentale) può essere rappresentata da una terna III e ciascuna lo stesso numero di volte, e così di seguito.

La prima asserzione è evidente perchè data una caratteristica dispari qualunque, basta prendere altri due punti fra i 6 rimanenti e congiungerli fra loro e ciascuno con uno degli estremi della caratteristica data. Questo procedimento lo posso effettuare in $2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 30$ modi diversi, dunque esistono altrettante terne II aventi tutte la medesima somma.

In quanto alla seconda asserzione che cioè ogni caratteristica pari possa sempre rappresentarsi con una terna III, noi ci ricordiamo ciò che facemmo vedere riguardo alle coppie, che cioè ogni caratteristica pari (meno la fondamentale) si può sempre rappresentare con una coppia del tipo II (fig. 1.^a) più F . Allora sia data una tale coppia corrispondente ad una data caratteristica pari.

Assumiamo un altro punto qualunque e congiungiamolo cogli estremi di una delle rette. Queste due congiungenti insieme coll'altra retta daranno una terna III (fig. 2.^a) la cui somma evidentemente è la caratteristica data. Così si dimostrerebbe per tutte le altre figure.

Di qui risulta che il numero delle terne di ciascun tipo (meno il primo) comprese nella configurazione generale deve essere rispettivamente un multiplo di 28 o di 35 secondochè si considera una terna dispari o pari. E ciò infatti si verifica. Ed inoltre tal numero diviso rispettivamente per 28 o 35 dà il numero delle volte in cui una data caratteristica possa essere rappresentata mediante terne del tipo che si considera. Si ha quindi che una caratteristica dispari può essere rappresentata 30 volte con una terna II, e 15 volte con una terna IV; e una caratteristica pari può essere rappresentata 48 volte con una terna del tipo III e 8 volte con una terna V.

Dalle cose ora dette risulta la dimostrazione di ciò che abbiamo asserito in un capitolo precedente, cioè che il gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche prime è anche doppiamente transitivo rispetto al complesso delle caratteristiche pari. Infatti poichè esiste sempre una sostituzione che scambia fra loro in tutti i modi possibili gli otto punti fondamentali (§ 4) io potrò passare da una terna ad un'altra qualunque terna simile; ma le terne di un medesimo tipo possono rappresentare tutte le 35 caratteristiche pari, dunque lasciando fissa la caratteristica pari fondamentale si può passare da una caratteristica pari ad un'altra qualunque.

Dunque il sottogruppo che lascia fissa una qualunque caratteristica pari è semplicemente transitivo nelle caratteristiche pari, e quindi il gruppo totale è doppiamente transitivo in rapporto alle 36 caratteristiche pari.

§ 8. Aggruppamenti che danno o lo zero assoluto o la caratteristica pari fondamentale.

Se sommiamo una caratteristica con sè stessa abbiamo lo zero assoluto, cioè una caratteristica zero che resta sempre inalterata per tutte le sostituzioni del gruppo.

Vogliamo allora ricercare quali sono quelli aggruppamenti di rette che danno nel loro complesso lo zero assoluto, intendendo però che in tali aggruppamenti non vogliamo considerare quelli in cui comparisce una retta contata più volte.

Possiamo prima di tutto far vedere che il numero delle rette di tali aggruppamenti deve essere pari. Giacchè se tolgo via una delle rette, le altre debbono essere tali che sommate danno per somma quella che ho tolto via, e ciò indipendentemente da una qualunque trasformazione, cioè debbono dare per somma una caratteristica dispari e che è sempre dispari qualunque trasformazione si faccia.

Di qui si ha che la somma di tutte le rimanenti rette deve essere una caratteristica *prima* perchè possa avere una parità o disparità fissa; ma una caratteristica prima non può essere data che dalla somma di un numero dispari di altre caratteristiche prime, dunque il numero di tutte le rimanenti rette deve essere dispari, e quindi tutto l'aggruppamento deve risultare di un numero pari di rette.

In quanto agli aggruppamenti di due rette che danno lo zero assoluto è chiaro che non ne esistono almenochè non si voglia considerare una retta contata due volte.

Per gli aggruppamenti di quattro rette noi possiamo procedere così: Tre delle rette debbono dare per somma la quarta, dunque consideriamo le terne dispari e aggiungiamovi la retta che rappresenta proprio la somma della terna. Così si vede che non si hanno che due soli tipi di *quaterne-zero* possibili, e sono quelle rappresentate dalla fig. 7.^a. Fissata una delle rette, le altre tre possono essere disposte in $\left(\frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}\right) = 45$ modi diversi. Cioè si hanno 45 quaterne di rette aventi tutte una medesima retta comune, o anche 45 terne che con una data retta costituiscono una quaterna-zero. Queste 45 terne corrispondono nella configurazione delle 27 rette della superficie di 3.^o ordine ai 45 triangoli di STEINER (vedi § 27).

Vogliamo ora ricercare quali sono gli aggruppamenti la cui somma dà la caratteristica pari fondamentale. Si può far vedere anche qui, analogamente, che tali aggruppamenti debbono essere formati di un numero dispari di rette. Infatti dovendo la somma di tutte le rette essere eguale alla caratteristica pari, dovrà tale somma essere una caratteristica *prima*, che conserva cioè una *parità* fissa per qualunque trasformazione, e quindi per lo stesso principio invocato sopra, deve risultare di un numero dispari di rette.

In quanto alla terna che dà la caratteristica fondamentale sappiamo già che è quella del tipo I della fig. 2.^a.

Possiamo ricercare gli aggruppamenti di cinque rette. E per ciò fare possiamo procedere così: Dividiamo le cinque rette in $2 + 3$, e allora la terna che abbiamo staccata deve equivalere alla coppia più la caratteristica fondamentale. Quindi evidentemente se la terna è pari anche la coppia deve essere pari, e se la terna è dispari, anche dispari deve essere la coppia. Onde non resta che unire le coppie pari o dispari colle terne pari o dispari che danno la stessa somma. Così operando si vede che non si hanno altre figure che quelle rappresentate dalla fig. 8.^a.

§ 9. Aggruppamenti di sei coppie di rette che danno la stessa somma.

Noi abbiamo visto nel § 6 che ogni caratteristica (salvo la fondamentale) può in sei modi diversi rappresentarsi come somma di due caratteristiche dispari diverse e della fondamentale. Si hanno dunque 6 coppie di rette, e noi vogliamo ricercare ora quali figure possono formare tali 6 coppie di rette, secondochè la caratteristica somma è pari o dispari (*).

Tali sistemi sono stati considerati da WEBER nell'Opera più volte citata e poi dal NOETHER.

Immaginiamo prima che la caratteristica somma debba essere dispari e sia rappresentata dalla retta (1 2) (fig. 9.^a). Allora tutte le coppie insieme con (1 2) debbono dare un triangolo, quindi assumendo un altro punto qualunque fra i sei rimasti, e congiungendolo con 1, 2 si hanno in tutto sei coppie di rette formanti il sistema richiesto.

Passiamo ora al caso in cui la somma debba essere una caratteristica pari.

Sia (1 3) (2 4) una delle coppie (fig. 10.^a); allora se costruisco le altre coppie di lati opposti del quadrangolo 1 2 3 4, evidentemente ho coppie che danno la stessa somma delle date, perchè insieme alle date costituiscono una quaterna-zero. Inoltre se costruisco ancora le tre coppie di lati opposti del quadrangolo 5 6 7 8 formato cogli altri quattro punti rimanenti, ho anche coppie che danno la stessa somma della data perchè colla data costituiscono anche una quaterna-zero.

(*) KLEIN, Lezioni, 1889.

Abbiamo dunque nelle sei coppie di lati opposti dei due quadrangoli 1 2 3 4, 5 6 7 8 le sei coppie richieste.

Tenendo ora presenti queste figure noi possiamo passare a dimostrare in modo facile e intuitivo tutti i teoremi dimostrati da WEBER per altra via (*). Chiamiamo *gruppo* il complesso delle sei coppie e *indice* del gruppo la somma fissa delle due rette di una sua coppia.

Teorema 1.° — In ogni gruppo, tre rette, di cui due non formanti mai una coppia, dànno sempre una somma pari.

Infatti se si tratti di un gruppo dispari (fig. 9.^a) allora si vede che tali tre rette formeranno certamente una terna come III e V (fig. 2.^a), e quindi poichè sappiamo che tali terne sono pari, per questo caso il teorema è dimostrato.

Se poi si tratti di un gruppo pari (fig. 10.^a) allora tali terne possono essere come I III V della fig. 2.^a e quindi anche in questo caso il teorema è dimostrato.

Teorema 2.° — Reciprocamente, se tre caratteristiche dispari hanno una somma pari, si possono formare dei gruppi contenenti quelle caratteristiche in modo che mai due di esse formino una coppia del gruppo.

Risulta dalla semplice considerazione delle figure.

Teorema 3.° — Due gruppi hanno o sei caratteristiche comuni di cui due non formano mai una coppia in nessuno dei due gruppi, ovvero quattro caratteristiche comuni formanti a due a due coppie in ciascuno dei gruppi.

Consideriamo infatti due gruppi dispari e tali che la somma dei loro indici più la caratteristica fondamentale sia dispari, cioè, geometricamente, che i loro indici formino una figura come I (fig. 7.^a). Sia 1 il punto comune ai due indici, e 2, 3, i punti non comuni. Allora il gruppo di indice (1 2) sarà formato congiungendo 1, 2 con 3 4 5 6 7 8, e il gruppo di indice (1 3) sarà formato congiungendo 1, 3 cogli stessi punti. Si hanno due figure che hanno di comune le rette

$$(2\ 3) \quad (1\ 4) \quad (1\ 5) \quad (1\ 6) \quad (1\ 7) \quad (1\ 8),$$

cioè sei rette comuni di cui due qualunque non formano mai una coppia in alcuno dei due gruppi.

(*) WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 22 e seg.
Annali di Matematica, tomo XX.

Si considerino invece ancora due gruppi dispari, ma cogli indici (1 2), (3 4). Allora i gruppi hanno evidentemente di comune le rette (1 3) (1 4) (2 3) (2 4) formanti un quadrilatero, e mentre (1 3) (2 3) e (1 4) (2 4) formano coppie nel gruppo di indice (1 2); (1 3) (1 4) e (2 3) (2 4) formano analogamente coppie nel gruppo di indice (3 4).

Analogamente ora si potrebbero considerare due gruppi pari, ovvero uno pari e uno dispari, e si troverebbero analoghi risultati.

§ 10. Passaggio dagli aggruppamenti di rette ad aggruppamenti di punti.

Dalle cose dette risulta che una caratteristica pari o dispari può essere rappresentata da un assieme di rette della configurazione totale; però, assegnato il numero delle rette e la figura che debbono formare, una stessa caratteristica potrà essere rappresentata in più maniere.

È interessante ora far vedere come possiamo passare a rappresentare le caratteristiche non più mediante le rette ma mediante i punti della configurazione.

Una retta che congiunga due degli otto punti rappresenta una caratteristica dispari (1 2); dunque possiamo dire che una coppia di punti rappresenta una caratteristica dispari.

Inoltre prendiamo gli altri sei punti e congiungiamoli a coppie con tre rette; allora si hanno tre rette la cui somma, come si sa, è dispari, ed è propria (1 2); dunque possiamo dire che anche gli altri sei punti rappresentano la medesima caratteristica dispari; in altri termini una scissione degli otto punti in $2 + 6$ corrisponde ad una sola caratteristica dispari. È chiaro che in tal maniera ogni caratteristica dispari non verrà rappresentata che in un sol modo.

Se ora separo gli otto punti in $4 + 4$, e considero due rette che congiungono a 2 a 2 quattro dei punti, cioè o i quattro della prima o i quattro della seconda categoria, ottengo, come si sa, nella somma di tali rette e della caratteristica fondamentale sempre la stessa caratteristica pari. Posso dunque dire che la scissione degli otto punti in $4 + 4$ corrisponde ad una determinata caratteristica pari, ed è chiaro d'altra parte che in tal maniera una delle 35 caratteristiche pari (meno la fondamentale) non potrà essere rappresentata che in un sol modo.

Ci resta a vedere come potrà rappresentarsi lo zero assoluto e la caratteristica fondamentale.

Consideriamo due rette che hanno di comune un vertice. Allora si hanno tre punti di cui uno è contato due volte. L'assieme di tali due rette è, come sappiamo, la caratteristica dispari rappresentata dalla retta che congiunge gli altri due punti, più la caratteristica fondamentale. Possiamo dunque dire che un punto contato due volte corrisponde alla caratteristica fondamentale.

Inoltre consideriamo un triangolo; si hanno tre punti ciascuno contato due volte, e d'altra parte sappiamo che un triangolo corrisponde alla caratteristica fondamentale. Dunque anche tre punti (e così cinque o sette) ciascuno contato due volte, corrispondono alla caratteristica fondamentale.

In quanto allo zero assoluto esso è dato dal doppio di una caratteristica, e quindi in generale da un numero pari di punti ciascuno contato due volte.

Però può essere rappresentato anche diversamente e cioè dal complesso degli otto punti; infatti da quello che si è detto risulta che, se per es. due punti rappresentano una caratteristica dispari, gli altri sei rappresentano la stessa caratteristica dispari, e quindi l'assieme di tutti gli otto punti rappresenta il doppio di quella caratteristica e perciò lo zero assoluto.

Prima di passare oltre vogliamo notare un'analogia che ci è fra questa nuova rappresentazione delle caratteristiche e la costruzione delle funzioni \mathfrak{S} nel caso iperellittico.

Nel caso iperellittico di genere 3 si ha una forma fondamentale con otto punti di diramazione, cioè o una forma binaria di 8.° grado, ovvero una conica doppia con otto punti di diramazione (*).

Ora si sa dalla teoria di KLEIN (**) che la separazione delle otto radici in $2 + 6$ corrisponde ad una \mathfrak{S} di caratteristica dispari, e la separazione in $4 + 4$ corrisponde ad un \mathfrak{S} di caratteristica pari, e la separazione in $8 + 0$ corrisponde a quella speciale \mathfrak{S} pari che si presenta nel caso iperellittico di genere 3, e che restando fissa per tutte le sostituzioni di monodromia, deve considerarsi come avente per caratteristica lo zero assoluto.

Come si vede dunque basta immaginare che gli otto punti fondamentali della nostra configurazione corrispondano agli otto punti di diramazione della forma iperellittica perchè si stabilisca l'analogia di cui parlavamo.

(*) KLEIN, *Ueber Verlauf der Abelsc.*, etc. Math. Ann., Bd. 11.

(**) KLEIN, Math. Ann., Bd. 27-32. — PASCAL, *Sulle funzioni iperellittiche di genere 3*, ecc. Annali di Matem., tom. 17.

§ 11. Sistemi completi di ARONHOLD.

Esistono certi sistemi di sette caratteristiche dispari tali che per mezzo di esse possono esprimersi tutte le altre caratteristiche. Tali sistemi pel genere 3 furono considerati da ARONHOLD partendo da un punto di vista diverso (*), CLEBSCH (**), WEBER (***), FROBENIUS, e poi da NOETHER (****), e FROBENIUS (*****) sono state estese queste considerazioni al genere p qualunque.

Noi adesso ci proponiamo di trovare quali figure costituiscono questi cosiddetti sistemi completi di ARONHOLD e poi di dimostrare su di essi tutti i teoremi dimostrati da WEBER per via completamente diversa.

Definiamo un sistema di ARONHOLD come un assieme di sette caratteristiche dispari, tali che tre di esse danno sempre una somma pari.

Allora dobbiamo costruire sette rette tali che tre di esse non danno mai una terna come le figure II IV (fig. 2.^a). È facile vedere che non si possono costruire altre figure dotate di questa proprietà che le due della fig. 11.^a. Siccome a ciascuna di queste due figure non potrebbe aggiungersi un'altra retta in modo che l'assieme delle otto rette conservi la medesima proprietà, si ricava che non esistono otto caratteristiche dispari tali che le terne formate con esse sieno tutte pari.

La somma di tutte le sette rette del 1.^o tipo dà evidentemente la caratteristica fondamentale; e la somma delle sette del 2.^o tipo dà la caratteristica pari corrispondente alla scissione (5 6 7 8) (1 2 3 4) (fig. 11.^a).

Del 1.^o tipo ne esistono 8, e del 2.^o 280; quindi in tutto vi sono $288 = 36 \cdot 8$ sistemi di ARONHOLD.

Passeremo ora a dimostrare su questi sistemi i teoremi di WEBER.

In primo luogo mediante alcune delle sette rette di uno di questi sistemi si possono esprimere tutte le caratteristiche pari e dispari (*****). Infatti considerando cinque delle sette rette del 1.^o tipo si hanno evidentemente tutte le altre 21 caratteristiche dispari cioè tutte le altre rette che congiungono a

(*) Monatsb. Berl. Akad., pag. 499, 1864.

(**) CLEBSCH, Math. Ann. III, Bd. 59.

(***) WEBER, *Abelsch. Funct.*

(****) NOETHER, Math. Ann., pag. 14-16.

(*****) FROBENIUS, Crelle, tom. 89. Anche altri si sono occupati di queste ricerche. Vedi per es. STAHL, Crelle, tom. 88.

(*****) WEBER, pag. 26.

due a due i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Considerando per es. le cinque rette (1 2) (1 3) (1 4) (1 5) (1 6), la loro somma è la retta (7 8), e così di seguito.

Così anche pel 2.^o tipo; se si considerano le cinque rette (4 5) (4 6) (4 7) (4 8) (1 2) si ha per somma (4 3); invece le altre cinque rette (4 5) (4 6) (4 7) (1 2) (2 3) danno (2 8) e le altre cinque (4 5) (4 6) (1 2) (2 3) (1 3) danno (5 6).

Tre rette poi danno *tutte* le caratteristiche pari, perchè per es. le rette (1 2) (1 3) (1 4) (1.^o tipo) danno il gruppo di quattro punti (1 2 3 4) e quindi la caratteristica pari corrispondente, e poichè in questa maniera si possono avere tutti i gruppi di quattro punti, così si possono avere tutte le caratteristiche pari.

Dimostriamo ora il seguente teorema di WEBER:

« Si aggiunga ad un sistema di ARONHOLD un'altra caratteristica qualunque pari o dispari; allora questa da sola e sommata con ciascun gruppo di sei caratteristiche del sistema dà luogo ad otto caratteristiche di cui sono sempre cinque pari e tre dispari (*) ».

Infatti aggiungiamo per es. al 1.^o tipo della fig. 11.^a la caratteristica dispari (2 3). Poichè la somma di tutte le sette caratteristiche dà luogo alla caratteristica fondamentale, così sei di esse danno l'ultima più la fondamentale, e quindi sarà lo stesso sommare (2 3) con ciascuna delle altre sette e aggiungere ancora ogni volta la caratteristica F .

Ora evidentemente

$$(2\ 3), \quad (2\ 3) + (1\ 2) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 3) + F$$

sono dispari, e

$$(2\ 3) + (1\ 4) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 5) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 6) + F, \\ (2\ 3) + (1\ 7) + F, \quad (2\ 3) + (1\ 8) + F$$

sono pari.

« Quattro date caratteristiche dispari tali che la somma di tre di esse è sempre pari, appartengono a due sistemi di ARONHOLD (**). »

Per dimostrare questo teorema formiamo tutti i gruppi di quattro rette non contenenti alcuna terna dispari. Bisognerà aggiungere alle configurazioni I III V (fig. 2.^a) un'altra retta in modo che essa con due qualunque di quelle che ci sono, formi sempre una terna degli stessi tipi.

(*) WEBER, pag. 29.

(**) WEBER, pag. 31.

Si possono formare solo quattro gruppi con tale proprietà, e sono quelli rappresentati dalle linee nere della fig. 12.^a. Ora si vede subito che ciascuno di quei gruppi fa parte di due sistemi di ARONHOLD rappresentati nella stessa fig. 12.^a dalle linee nere insieme alle linee tratteggiate o alle linee punteggiate.

Con ciò il teorema resta dimostrato.

« Sei caratteristiche di un sistema di ARONHOLD compariscono sempre in uno di quei gruppi di dodici rette in maniera che due di esse non formano mai coppia (*) » (vedi § 9).

Evidentemente le sei rette (1 2) (1 3) (1 4) (1 5) (1 6) (1 7) del sistema di ARONHOLD rappresentato dalle linee nere e tratteggiate della fig. 13.^a, appartengono al gruppo dispari che ha per indice (1 8).

Lo stesso diciamo per la fig. 14.^a. Nella prima parte di questa figura si vedono le sei rette segnate in nero appartenenti al sistema di ARONHOLD formato colle rette nere e tratteggiate, e che nello stesso tempo appartengono al gruppo pari di indice (1 2 3 4). Nella seconda parte della stessa figura anzichè un gruppo pari si ha un gruppo dispari.

« Tre caratteristiche di un sistema completo appartengono sempre ad un unico gruppo di dodici rette in cui non comparisce nessun'altra retta del sistema completo (**). »

Infatti consideriamo (fig. 11.^a; prima parte) le tre rette (1 2) (1 3) (1 4). Esse appartengono ad una figura come la 10.^a nella quale non entrano nessuna delle altre rette (1 5) (1 6) (1 7) (1 8).

Consideriamo inoltre (fig. 11.^a; seconda parte) le rette (1 2) (1 3) (2 3). Esse appartengono ad una figura come la 10.^a e ad una sola [cioè quella di indice (1 2 3 4)], in modo che delle altre rette (4 5) (4 6) (4 7) (4 8) non ce n'è nessuna appartenente alla stessa fig. 10.^a.

Consideriamo invece (1 2) (1 3) (4 5). Possiamo formare una figura come la 9.^a, prendendo per indice (1 5) e tal figura conterrà le tre rette e nessuna altra di quelle segnate nella fig. 11.^a, seconda parte.

Consideriamo ancora (1 2) (4 5) (4 6); allora si può costruire il gruppo pari (3 4 5 6) (1 2 7 8) che contiene tali rette e nessun'altra. E infine le tre rette (4 5) (4 6) (4 7) appartengono esse sole al gruppo dispari di indice (4 8).

In tutti questi casi si vede che la caratteristica del gruppo cioè la somma delle due rette di una delle sei coppie è data dalla somma delle altre quattro

(*) WEBER, pag. 32.

(**) WEBER, pag. 33.

rette del sistema di ARONHOLD a cui appartengono le tre rette che si considerano.

Si possono aggiungere anche i seguenti teoremi che ci occorreranno poi in seguito:

« Esistono 72 sistemi di ARONHOLD che posseggono una retta data; ne esistono sedici che posseggono due rette date; ne esistono cinque che posseggono una data terna pari; ne esistono due finalmente che posseggono una quaterna data in cui le terne sieno tutte pari. »

§ 12. Proprietà delle terne di caratteristiche dispari.

In un paragrafo precedente abbiamo considerato tutte le terne di rette, e abbiamo con due metodi esaminato se esse sono dispari o pari.

Ora ci è utile mostrare una proprietà fondamentale di quelle terne in rapporto alla loro parità o disparità.

Una terna è pari quando è formata di tali tre rette che due di esse qualunque individuano sempre la terza, e ciò o in senso assoluto, oppure in rapporto ad una determinata scissione degli otto punti in $4 + 4$. Nel primo caso la terna corrisponde alla caratteristica pari fondamentale, e nel secondo la terna equivale alla caratteristica pari corrispondente a quella scissione. Una terna è dispari quando essa individua un'altra retta, e l'assieme delle quattro rette è tale che tre di esse individuano sempre nel medesimo modo la quarta.

Consideriamo il tipo I (fig. 2.^a). Quel tipo è simmetrico rispetto alle sue tre rette, e due rette individuano la terza; effettivamente sappiamo che esso corrisponde alla caratteristica fondamentale *p*ari.

Consideriamo il tipo III riprodotto nella fig. 15.^a. Si vede che stabilita come fissa la scissione degli otto punti in (1 2 3 4) (5 6 7 8), due delle rette individuano sempre la terza, perchè se son date per es. (5 1) (5 2), la terza retta sarà la congiungente degli unici due altri punti del gruppo (1 2 3 4); e così se son date (1 5) (3 4) la terza retta sarà la congiungente del punto assunto nel 2.^o gruppo (5 6 7 8) coll'unico altro punto del 1.^o gruppo.

Così evidentemente il tipo V riprodotto nella fig. 16.^a individua la scissione degli otto punti in due classi ed è tale che due rette individuano la terza.

In quanto ai tipi dispari II IV (fig. 2.^a) essi evidentemente individuano sempre una quarta retta che con esse forma una figura come le due della fig. 7.^a e in cui le quattro rette figurano sempre simmetricamente.

§ 13. Caratteristiche di genere 2.

Dovendo nei paragrafi seguenti estendere queste considerazioni geometriche al caso di genere 4, non è inutile vedere come si può stabilire anche una rappresentazione geometrica per le sedici caratteristiche di genere 2 e ricavarne tutte le note proprietà degli aggruppamenti di tali caratteristiche.

Immaginiamo sei punti dello spazio 1, 2, 3, 4, 5, 6 ad ognuno dei quali facciamo corrispondere una delle sei caratteristiche dispari di genere 2.

Per effettuare la rappresentazione geometrica possiamo tener presenti le considerazioni svolte nel § 10 e far corrispondere ciascuno di tali punti a ciascuna delle sei radici della forma iperellittica di genere 2.

Allora sapendo che ogni \wp dispari corrisponde a ciascuna delle scissioni di tali radici in $1 + 5$, ed ogni \wp pari corrisponde alla scissione in $3 + 3$ (*), ne ricaviamo che ogni gruppo di tre punti lo possiamo far corrispondere ad una caratteristica pari, e alla stessa caratteristica pari corrisponderà il gruppo dei tre punti rimanenti.

Allora ne risulta che la somma di tutti i sei punti, cioè di tutte le sei caratteristiche dispari, sarà il doppio di una caratteristica pari e quindi lo zero assoluto (**).

Fra le scomposizioni dei sei punti in $3 + 3$ ve ne sarà una che corrisponderà alla caratteristica pari zero, e che quindi è da considerarsi come fondamentale. Sia, per fissare le idee, quella corrispondente alla scissione (1 3 5) (2 4 6). Allora possiamo dimostrare che « ogni caratteristica può scomporsi in un sol modo in due caratteristiche dispari ».

Infatti la caratteristica dispari (1) sarà eguale a (3) + (5) perchè per ipotesi

$$(1) + (3) + (5) = (0).$$

Si abbia inoltre la caratteristica pari (1 4 6) (2 3 5). Essa è eguale a (1) + (2) perchè

$$(1) + (2) + (1\ 4\ 6) = (1) + (2) + (1) + (4) + (6) = (2) + (4) + (6) = (0).$$

Evidentemente la somma di due caratteristiche dispari è dispari o pari secondo che le due caratteristiche appartengono o no allo stesso gruppo fondamentale.

(*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 27.

(**) KRAUSE, *Trasf. hyp. Funct.*, pag. 16.

« Ogni caratteristica può sempre scomporsi in tre modi nella somma di due pari. »

Infatti la caratteristica dispari (1) può scriversi

$$(1) = (1\ 2\ 5) + (1\ 2\ 3)$$

$$(1) = (1\ 4\ 5) + (1\ 4\ 3)$$

$$(1) = (1\ 6\ 5) + (1\ 6\ 3).$$

D'altra parte la caratteristica pari (1 4 6) (2 3 5) può scriversi

$$(1\ 4\ 6) = (1\ 4\ 3) + (1\ 6\ 5)$$

$$(1\ 4\ 6) = (1\ 4\ 5) + (1\ 6\ 3)$$

$$(1\ 4\ 6) = (1\ 4\ 6) + (1\ 3\ 5).$$

« Ogni caratteristica può sempre in quattro modi scomporsi in una pari e una dispari. »

La caratteristica dispari (1) può scomporsi in

$$(1) = (2\ 3\ 5) + (2)$$

$$(1) = (4\ 3\ 5) + (4)$$

$$(1) = (6\ 3\ 5) + (6)$$

$$(1) = (2\ 4\ 6) + (1).$$

La caratteristica pari (1 4 6) può scomporsi in

$$(1\ 4\ 6) = (5\ 4\ 6) + (3)$$

$$(1\ 4\ 6) = (3\ 4\ 6) + (5)$$

$$(1\ 4\ 6) = (3\ 4\ 5) + (6)$$

$$(1\ 4\ 6) = (3\ 5\ 6) + (4).$$

§ 14. Caratteristiche di genere 4.

Fondamenti per la rappresentazione geometrica.

Coppie di caratteristiche dispari.

Scegliamo nello spazio dieci punti fondamentali. Questi congiunti a tre a tre danno 120 piani, che possiamo far corrispondere alle 120 caratteristiche dispari di genere 4.

La forma fondamentale di genere 4 è una sestica storta, che ha, come

Annali di Matematica, tomo XX.

26

si sa, 120 piani tritangenti corrispondenti alle 120 caratteristiche dispari. Se la sestica degenera in una forma iperellittica allora si ha una cubica doppia con dieci punti di diramazione e i piani tritangenti diventano i piani che congiungono a tre a tre questi dieci punti; la configurazione dei piani tritangenti diventa cioè precisamente quella che noi assumiamo come fondamentale per la nostra rappresentazione.

Tutto ciò è precisamente analogo a ciò che è stato considerato pel genere 3 nel § 10.

Tutte le caratteristiche dispari sono rappresentate in questa maniera dai gruppi di tre punti; vediamo come dobbiamo rappresentare tutte le caratteristiche pari.

Sappiamo che nel caso iperellittico i punti di diramazione presi a uno a uno oppure a cinque a cinque corrispondono a tutte le 136 caratteristiche pari (*).

Quindi analogamente a ciò che abbiamo osservato per $p = 3$ (§ 10) noi ciascuno degli otto punti lo faremo corrispondere ad una caratteristica pari, e ciascun gruppo di cinque punti anche ad un'altra caratteristica pari.

Però possiamo fondare su di una base rigorosa tutta quella rappresentazione ed ecco in che maniera.

Il NOETHER nei suoi lavori sulle caratteristiche di genere 4(**) ha trovato che esistono $2 \cdot 51 \cdot 128$ sistemi di dieci caratteristiche pari tali che sommati a tre a tre, o a cinque a cinque danno le altre caratteristiche dispari e pari. Quindi se noi facciamo corrispondere i dieci punti fondamentali alle caratteristiche pari di uno di questi sistemi, abbiamo precisamente la configurazione che avevano costruita avanti fondandoci su ragioni di analogia. E ne ricaviamo dappiù, cioè che la caratteristica dispari rappresentata da un gruppo di tre punti non è altro che precisamente *la somma* delle tre caratteristiche pari rappresentate dai tre punti; e così anche per un gruppo di cinque. Intanto evidentemente la somma di tutte le dieci caratteristiche pari corrispondenti ai dieci punti è zero assoluto perchè è il doppio di una caratteristica pari corrispondente ad una scissione dei dieci punti in due gruppi di cinque. Un numero pari di punti dà una caratteristica di parità o disparità non definita perchè la somma di un numero pari di caratteristiche *prime* dà una caratteristica *elementare* (§ 3). Una coppia di piani (corrispondendo a due ca-

(*) KLEIN, Math. Ann., Bd. 32.

(**) NOETHER, Math. Ann., Bd. 14, pag. 279.

ratteristiche *prime* dispari, ovvero a sei caratteristiche *prime* pari) avrà anche una parità o disparità non definita. Invece una terna di piani avrà parità e disparità fissa, cioè inalterabile per le trasformazioni di monodromia.

Formiamo ora tutte le possibili coppie di piani.

Evidentemente esse saranno di tre tipi diversi, e saranno quelle rappresentate dalla fig. 17.^a.

Con i principii stabiliti avanti si ha che il tipo I equivale alla somma delle caratteristiche rappresentate dai due punti (3), (4); il tipo II equivale alla somma delle caratteristiche dei quattro punti (2) (3) (4) (5); e finalmente il tipo III equivale alla somma dei sei punti (1) (2) (3) (4) (5) (6) o, ciò che è lo stesso, degli altri quattro punti rimanenti cioè (7) (8) (9) (10).

Di coppie del tipo I ne esistono 28 · 45, del tipo II 28 · 135 e del tipo III 28 · 75.

§ 15. Terne di piani.

Tutte le possibili terne di piani sono dei dodici tipi rappresentati dalla fig. 18.^a.

Per riconoscere facilmente la loro parità o disparità, scindiamo ogni piano nella somma dei tre vertici, e allora se otteniamo un gruppo di tre punti, la terna corrispondente sarà dispari; se otteniamo un gruppo di uno o cinque punti la terna sarà pari.

Così troviamo che

I è pari ed è la caratteristica rappresentata dal gruppo di punti				1
II è pari	"	"	"	1 2 4 5 6
III è dispari	"	"	"	1 2 5
IV è dispari	"	"	"	8 9 10
V è pari	"	"	"	1 2 3 4 5
VI è dispari	"	"	"	4 5 6
VII è pari	"	"	"	3 4 5 6 7
VIII è dispari	"	"	"	4 5 6
IX è dispari	"	"	"	1 9 10
X è pari	"	"	"	5
XI è pari	"	"	"	10
XII è pari	"	"	"	2 4 5 6 7.

Il numero di tutte le possibili terne dei diversi tipi è

per I	70 · 12	per VII	70 · 360
per II	70 · 540	per VIII	70 · 360
per III	70 · 216	per IX	70 · 540
per IV	70 · 180	per X	70 · 108
per V	70 · 36	per XI	70 · 40
per VI	70 · 540	per XII	70 · 1080.

In tutto fanno

$$70 \cdot 4012 = \frac{120 \cdot 119 \cdot 118}{2 \cdot 3},$$

Si sa che ogni caratteristica di genere 4 può in 28 modi scindersi nella somma di due caratteristiche dispari. Onde se α è una caratteristica pari, e δ una dispari, $\alpha + \delta$ potrà in 28 modi scindersi in due dispari $\delta' + \delta''$, onde α potrà in $\frac{28 \cdot 120}{3} = 28 \cdot 40$ modi scindersi in tre dispari; onde vi debbono essere $28 \cdot 40 \cdot 136$ terne che danno caratteristica pari.

Infatti facendo la somma dei numeri corrispondenti alle terne I II V VII X XI XII si trova

$$70(12 + 540 + 36 + 360 + 108 + 40 + 1080) = 70 \cdot 2176 = 28 \cdot 40 \cdot 136.$$

Vediamo ora come sussiste perfettamente qui una proprietà delle figure delle terne in relazione alla parità o disparità, la cui analoga abbiamo riconosciuta esistere nel caso del genere 3 (vedi § 12).

Possiamo dimostrare i seguenti teoremi:

« Se una terna è tale che in rapporto ad una determinata scissione dei dieci punti in $1 + 9$ ovvero in $5 + 5$, due piani individuano sempre il terzo, e l'assieme dei tre piani individua la scissione, cioè occupa tutti i punti almeno di uno dei due gruppi, allora la terna rappresenta una caratteristica pari, e propriamente quella determinata dalla scissione dei dieci punti. »

« Tutte le altre terne di piani non soddisfacenti a questa condizione sono dispari, ed esse debbono tutte individuare un quarto piano che sarà da reputarsi la loro somma. » Andiamo ad esaminare separatamente le diverse terne.

Nella terna I (fig. 18.^a) fissata la scissione in $1 + 9$ e propriamente separato il punto 1 dagli altri nove, si vede che in rapporto a tale scissione due piani individuano sempre il terzo.

Nella terna II fatta la scissione (1 2 4 5 6) (3 7 8 9 10), dati i due piani (1 5 6) (1 3 4), il terzo piano sarà univocamente determinato come quello dei tre punti 1 (punto d'incontro dei due primi) 3 [punto non appartenente al gruppo (1 2 4 5 6)] e 2 (rimanente punto del gruppo).

E così, se fossero dati (1 2 3) (1 3 4), non resterebbe che congiungere gli altri due punti 5, 6 del gruppo, col punto 1 (che è il solo appartenente al gruppo e che è comune ai due piani già dati).

Nello stesso modo si può ragionare per tutte le altre terne. Nella fig. 18.^a abbiamo segnati con un cerchietto quei punti che costituiscono un gruppo.

Aggiungendo ora alle terne dispari il quarto piano che è la loro somma, si ha un assieme di quattro piani la cui somma è lo zero assoluto. Di tali quaterne di piani ve ne sono solo di quattro tipi diversi che sono quelli rappresentati dalla fig. 19.^a.

§ 16. Aggruppamenti di 28 coppie di piani che danno la medesima somma.

Una coppia di piani non dà una caratteristica di parità o disparità assoluta, perchè dà una caratteristica *elementare*, ma se noi fissiamo una determinata caratteristica pari che chiameremo fondamentale, allora la somma delle tre avrà una parità o disparità indipendente da una trasformazione di monodromia.

È facile vedere che esistono 28 coppie di piani che danno sempre la medesima somma. Questa proprietà è nota e di essa noi ci siamo già serviti incidentalmente; ma noi la possiamo dimostrare qui diversamente. Evidentemente le coppie di piani sono in numero di $28 \cdot 255$. Ora è chiaro che con una coppia di piani diversi e colla caratteristica pari fondamentale non si potrà mai avere tale caratteristica fondamentale, e d'altra parte si debbono potere avere tutte le altre 255 caratteristiche e ciascuna lo stesso numero di volte, quindi possiamo concludere che ogni caratteristica risulterà 28 volte.

Vogliamo ora studiare l'assieme di queste 28 coppie di piani che danno la medesima somma.

Distinguiamo naturalmente i due casi in cui questa somma è una caratteristica dispari o pari; e inoltre dobbiamo fissare la caratteristica pari che assumiamo per fondamentale, come abbiamo detto sopra. Scegliamo allora quella rappresentata dal punto 1.

Il piano che deve rappresentare la somma potrà allora essere o un piano di cui uno dei vertici è 1, o un piano di cui nessun vertice è 1; quindi sia o il piano (1 2 3) o il piano (2 3 4).

Nel primo caso i due piani della somma insieme con (1 2 3) debbono dare per somma il punto 1; quindi tenendo presenti le terne della fig. 18.^a, e scegliendo quelle che danno per somma un punto situato su di uno dei piani, si vede che non vi sono altri tipi che I e X che soddisfino a queste condizioni. Quindi il gruppo delle 28 coppie di piani è rappresentato in succinto dalla fig. 20.^a dove (1 2 3) è il piano somma, e le coppie di piani sono

$$(1\ 2\ 4), \quad (1\ 3\ 4),$$

ovvero

$$(2\ 5\ 6), \quad (3\ 5\ 6),$$

e tutte le coppie analoghe che si ottengono lasciando fissi i punti 1, 2, 3, e facendo variare i punti 4, 5, 6.

Si hanno così appunto

$$7 + \frac{7 \cdot 6}{2} = 28$$

coppie.

Nel secondo caso poi i soli tipi possibili di terne sono X, XI (fig. 18.^a); e quindi il gruppo delle 28 coppie è rappresentato dalla fig. 21.^a. Lasciando fissi i punti 1, 2, 3, 4, e facendo variare gli altri fra i rimanenti sei punti si hanno in tutto

$$6 \cdot 3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 28$$

coppie.

Consideriamo ora il caso in cui la somma è una caratteristica pari, rappresentata o da un punto (eccetto il fondamentale) o da un gruppo di cinque punti.

Tale somma sia in primo luogo rappresentata dal punto 2. Allora dobbiamo scegliere due piani la cui somma sia la somma delle due caratteristiche 1, 2. Dalla fig. 17.^a risulta che non esistono altri tipi siffatti di coppie che il tipo I. Onde risulta la fig. 22.^a dove lasciando fissi i punti 1, 2, e facendo variare gli altri si hanno in tutto $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ coppie.

Sia infine la somma rappresentata da un gruppo di cinque punti (1 2 3 4 5).

Dobbiamo disegnare due piani che diano per somma i quattro punti 2, 3, 4, 5 ovvero, ciò che è lo stesso, 1, 6, 7, 8, 9, 10.

Dalla fig. 17.^a risulta che tali coppie non possono essere che o del tipo II o del tipo III.

La fig. 23.^a le rappresenta schematicamente tutte. Si hanno tre coppie come (1 2 3) (1 4 5), 15 coppie come (2 3 6) (4 5 6) e 10 come (1 6 7) (8 9 10). In tutto 28.

Dovremmo ora passare a studiare le stesse configurazioni quando si assuma per fondamentale un gruppo di cinque punti anzichè un punto solo.

Ma ci dispensiamo dal fare quest'altra ricerca (che del resto non offrirebbe alcuna difficoltà) perchè in seguito non ci occorrerà, e d'altra parte, essendo completamente arbitraria una caratteristica d'un sistema completo di NOETHER, si vede che colla nostra supposizione non si viene ad introdurre alcuna particolarità nella quistione.

§ 17. Teoremi sui gruppi di 28 coppie di caratteristiche dispari.

I gruppi di 28 coppie caratteristiche dispari considerati nel paragrafo precedente sono stati considerati da NOETHER (*), e su di essi si possono dimostrare teoremi analoghi a quelli dimostrati da WEBER per $p = 3$ e da noi ripetuti e dimostrati coi nostri principii nel § 9.

Noi vogliamo far vedere come si possono dimostrare i teoremi di cui si parla partendo dalla considerazione delle figure.

Chiamiamo *indice* del gruppo la somma costante dei due piani della coppia e della caratteristica fondamentale.

Teorema. — Due gruppi di 28 coppie o hanno 28 piani comuni di cui due non formano mai una coppia in nessuno dei gruppi, ovvero hanno 24 piani comuni accoppiati a due a due in ciascuno dei gruppi.

Consideriamo due gruppi dispari, per es. l'uno che abbia per indice il piano (1 2 3) e l'altro che abbia per indice (1 3 4) (vedi fig. 20.^a). La somma dei due indici e della caratteristica fondamentale è dispari. Congiungendo due dei punti 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10 col punto 3 si hanno piani che appartengono ad ambedue i gruppi, e così si hanno $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ piani comuni. Inoltre il piano (1 2 4) appartiene ad ambo i gruppi, e infine gli altri sei piani che

(*) Math. Ann., Bd. 14.

si hanno congiungendo 2, 4, con uno dei punti 5, 6, 7, 8, 9, 10 sono anche comuni. In tutto si hanno dunque 28 piani comuni, di cui due non formano mai coppia.

Consideriamo invece i due gruppi (vedi fig. 21.^a) di indici (2 3 4), (2 5 6). La somma di questi due indici e della caratteristica fondamentale 1 è pari.

I piani (2 4 5) (2 4 6) (2 3 5) (2 3 6) sono comuni come anche i piani (1 3 5) (1 4 5) (1 3 6) (1 4 6) che formano coi precedenti coppia in ciascuno dei due gruppi. Sono anche comuni i quattro piani che congiungono a tre a tre i punti 7, 8, 9, 10 e i piani (5 6 7) (5 6 8) (5 6 9) (5 6 10) (3 4 7) (3 4 8) (3 4 9) (3 4 10) e infine i piani (1 2 7) (1 2 8) (1 2 9) (1 2 10). In tutto 24 piani comuni accoppiati in ciascuno dei due gruppi.

§ 18. Sistemi completi di caratteristiche.

Della ricerca dei sistemi completi di caratteristiche si sono occupati vari Autori. Pel caso $p = 3$ abbiamo visto che si possono costruire i sistemi completi di ARONHOLD, e ne abbiamo studiato le figure e le proprietà.

Lo STAHL seguendo certi teoremi di RIEMANN trovò dei sistemi completi di $2p + 1$ caratteristiche di genere p (*).

In seguito il FROBENIUS trovò la forma generale dei sistemi completi (**). Il NOETHER nei lavori più volte citati (Math. Ann., Bd. 14, 16) si occupò dei sistemi completi. Egli dimostrò che esistono pel genere 4, 136 · 96 sistemi di dieci caratteristiche pari tali che a cinque a cinque danno tutte le altre caratteristiche pari, e a tre a tre tutte le dispari. Il NOETHER dimostrò inoltre che un tale sistema è determinato da cinque delle sue caratteristiche, e che le condizioni perchè la forma di genere 4 diventi iperellittica sono rappresentate dall'annullarsi delle funzioni \wp corrispondenti alle dieci caratteristiche di uno di tali sistemi.

Di queste condizioni si erano occupati anche WEIERSTRASS ed altri (**).

Non è inutile riportare qui togliendolo dal lavoro citato di PRINGSHEIM un sistema di dieci caratteristiche pari aventi le proprietà dette. Esso è

(*) Crelle, tom. 88.

(**) Crelle, tom. 89.

(***) KONISBERGER, Crelle, tom. 64. — PRINGSHEIM, Math. Ann., Bd. 12, pag. 449.

$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{array}$$

Dai sistemi di dieci caratteristiche pari, il NOETHER ricava la definizione di certi altri sistemi di otto caratteristiche dispari nel seguente modo:

Assumiamo due sue caratteristiche q, q' ; e aggiungiamole a tutte le altre otto; formiamo allora otto caratteristiche dispari che formeranno un sistema completo.

Da ogni sistema di dieci pari si possono dunque formare $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ sistemi di otto dispari, e quindi esisteranno $136 \cdot 96 \cdot 45$ sistemi di otto dispari.

Questi sistemi hanno la proprietà che a tre a tre o sette a sette danno le caratteristiche pari, e a cinque a cinque danno tutte le altre caratteristiche dispari.

La somma di tutte le otto caratteristiche dispari è $q + q'$.

Queste proprietà insieme a molte altre ci risulteranno subito quando avremo ottenuta la rappresentazione geometrica di questi sistemi, ciò che passiamo ora a ricercare.

Dalla stessa definizione dei sistemi di otto, si ricava che considerando il sistema di dieci pari rappresentato dai dieci punti, un sistema di otto è quello formato cogli otto piani che congiungono due punti con ciascuno degli altri otto.

Però il sistema di dieci rappresentato dai dieci punti è uno fra i $136 \cdot 96$ possibili; quindi bisogna andare a considerare tutte le altre configurazioni dei sistemi di dieci e ricavarne ogni volta i 45 sistemi di otto.

Allora gli otto piani avranno configurazione diversa da quella ora ottenuta, e noi faremo vedere che si possono avere in tutto tredici configurazioni diverse. Nel caso $p = 3$ è bene rammentare che le configurazioni diverse che potevano avere i sistemi completi di ARONHOLD erano solo due.

Per la formazione dei sistemi di otto compariscono come fondamentali le due caratteristiche pari q, q' .

Ora tale coppia di caratteristiche pari può prendersi in $\frac{136 \cdot 135}{2} = 255 \cdot 36$ modi diversi, e dividendo il numero di tutti i sistemi di otto per tal numero, si ha che per ogni coppia q, q' esistono 64 sistemi corrispondenti. Allora noi faremo sulla rappresentazione delle due caratteristiche q, q' tutte le ipotesi possibili, cioè che sieno ambedue rappresentate da un punto, oppure che una

sia rappresentata da un punto e l'altra da un gruppo di cinque punti, ovvero che sieno ambedue rappresentate da gruppi di cinque punti, e cercheremo di trovare ogni volta le 64 figure corrispondenti.

Ma prima ci occorre di esporre una facile considerazione per poter passare da un sistema di dieci ad un altro analogo. Si abbia il sistema rappresentato dai dieci punti, godente delle proprietà note.

Allora se noi in luogo delle sei caratteristiche

$$(3) (4) (5) (6) (7) (8),$$

poniamo rispettivamente le altre

$$(4\ 5\ 6\ 7\ 8) (5\ 6\ 7\ 8\ 3) (6\ 7\ 8\ 3\ 4) (7\ 8\ 3\ 4\ 5) (8\ 3\ 4\ 5\ 6) (3\ 4\ 5\ 6\ 7), (A)$$

abbiamo un sistema di dieci caratteristiche pari, la cui somma è zero, e che a tre a tre danno caratteristiche dispari, e a cinque a cinque danno pari.

Infatti i due punti 1, 2 insieme col gruppo (4 5 6 7 8) danno il piano (3 9 10). Il punto 1 con due gruppi

$$(4\ 5\ 6\ 7\ 8) (5\ 6\ 7\ 8\ 3),$$

dà il piano (1 3 4), e i tre gruppi

$$(4\ 5\ 6\ 7\ 8) (5\ 6\ 7\ 8\ 3) (6\ 7\ 8\ 3\ 4),$$

danno il piano (6 7 8).

Inoltre il punto 1 con i quattro primi dei gruppi (A) segnati sopra dà il gruppo pari (1 3 4 5 6); e così i due punti 1, 2 con i tre primi dei gruppi (A) danno (1 2 6 7 8) e i tre punti 1, 2, 9 con i due primi dei gruppi (A) danno (1 2 9 3 4); i quattro punti 1, 2, 9, 10 col primo gruppo (A) dà (3), e finalmente i cinque gruppi (A) danno il gruppo pari (3 4 5 6 7).

Resta così dimostrato che le sei caratteristiche (A) insieme con i quattro punti 1, 2, 9, 10 formano un sistema completo di NOETHER.

§ 19. Caso in cui le caratteristiche q, q' sono rappresentate da due punti.

In tal caso abbiamo già ottenuta una delle 64 figure possibili; dobbiamo cercare di ottenere le altre.

È facile verificare che le dieci caratteristiche pari

$$(1) (2) (3\ 4\ 5\ 1\ 2) (3\ 5\ 6\ 1\ 2) (3\ 4\ 6\ 1\ 2) (4\ 5\ 6\ 1\ 2) \\ (7\ 8\ 9\ 1\ 2) (7\ 9\ 1\ 2\ 10) (7\ 8\ 1\ 2\ 10) (8\ 9\ 1\ 2\ 10),$$

costituiscono un sistema di NOETHER, perchè la loro somma è zero, e a tre a tre dànno una somma dispari, mentre a cinque a cinque dànno una somma pari.

Allora ricavando, nel modo indicato, da tal sistema un sistema di otto caratteristiche dispari, si ha la fig. 25.^a dove gli otto piani sono le otto facce dei due tetraedri.

Fissati i due punti 1, 2, di tali figure se ne possono formare 35.

Inoltre le dieci caratteristiche pari

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6) \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 7) \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 8) \\ (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 9) \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 10),$$

formano un sistema di NOETHER perchè tal sistema si può ricavare da quello dei dieci punti applicando il metodo del paragrafo precedente ai punti 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Da tal sistema di NOETHER si ricava dunque un altro sistema di otto dispari ed è quello rappresentato dalla fig. 26.^a Restando fissi i punti 1, 2, di tali figure se ne possono formare 28. Dunque si son costruiti gli $1 + 35 + 28 = 64$ sistemi completi corrispondenti alla coppia q, q' rappresentata da due punti.

§ 20. Caso in cui la caratteristica q è rappresentata da un punto, e la q' è rappresentata da un gruppo di cinque punti.

Prima di tutto osserviamo che possiamo sempre supporre che q non faccia parte del gruppo di cinque punti; perchè se ne fa parte noi possiamo considerare il gruppo coniugato (quello degli altri cinque punti rimanenti) il quale rappresenterà la stessa q' , e di cui allora evidentemente q non fa più parte.

Applichiamo allora alle tre figure trovate nel paragrafo precedente la trasformazione indicata alla fine del § 18 assumendo per punti fissi 1, 8, 9, 10 e trasformando

$$\begin{array}{ll} \text{il punto (2) nel gruppo (3 4 5 6 7)} & \\ \text{” (3) ” (4 5 6 7 2)} & \\ \text{” (4) ” (5 6 7 2 3)} & \\ \text{” (5) ” (6 7 2 3 4)} & \\ \text{” (6) ” (7 2 3 4 5)} & \\ \text{” (7) ” (2 3 4 5 6).} & \end{array}$$

Allora gli otto piani della fig. 24.^a diventano

$$\begin{array}{cccc} (2\ 7\ 6) & (2\ 7\ 3) & (2\ 7\ 4) & (2\ 7\ 5) \\ (1\ 7\ 10) & (1\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10) & (1\ 7\ 9), \end{array}$$

e si ha un sistema completo rappresentato dalla fig. 27.^a

Di tali configurazioni, lasciando fisse q, q' cioè il punto (1) e il gruppo (3 4 5 6 7), ve ne sono $5 \cdot 4 = 20$.

Applicando la medesima trasformazione agli otto piani della fig. 25.^a si hanno gli altri otto piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (1\ 2\ 5) & (1\ 2\ 6) \\ (1\ 2\ 7) & (2\ 9\ 10) & (2\ 8\ 10) & (2\ 8\ 9), \end{array}$$

che formano la fig. 28.^a, e cogli stessi q, q' di tali figure ve ne sono quattro fra loro diverse.

Finalmente applicando la stessa trasformazione alla fig. 26.^a si hanno gli otto piani:

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (2\ 6\ 7) & (2\ 5\ 7) \\ (2\ 5\ 6) & (3\ 4\ 8) & (3\ 4\ 9) & (3\ 4\ 10), \end{array}$$

che costituiti danno la fig. 29.^a.

Di tali ultime figure se ne possono formare 40; onde evidentemente sono esaurite tutte le possibilità perchè abbiamo trovato $20 + 4 + 40 = 64$ figure diverse, e sappiamo che per una determinata coppia q, q' non se ne possono formare dippiù.

§ 21. Caso in cui amendue le caratteristiche q, q' sono rappresentate da gruppi di cinque punti.

C'è da distinguere due casi inquantochè c'è da tener conto della posizione reciproca dei due gruppi di cinque punti, i quali possono avere o quattro punti comuni, o tre punti comuni.

La supposizione che i due gruppi abbiano due punti comuni, o un punto solo comune è la stessa rispettivamente di quella per la quale i due gruppi hanno tre o quattro punti comuni. Perchè basterà considerare in luogo dei due gruppi dati, uno solo di essi insieme al coniugato dell'altro, e se i dati aveano due punti comuni, questi nuovi gruppi avranno invece tre punti comuni.

Quindi dobbiamo considerare solo i due casi indicati. Operiamo la trasformazione del § 18 lasciando fissi i punti 7, 8, 9, 10 e trasformando

- (1) in (2 3 4 5 6)
- (2) in (3 4 5 6 1)
- (3) in (4 5 6 1 2)
- (4) in (5 6 1 2 3)
- (5) in (6 1 2 3 4)
- (6) in (1 2 3 4 5),

e applichamola agli otto piani della fig. 24.^a.

Si hanno gli otto piani

- (1 2 6) (1 2 3) (1 2 4) (1 2 5) .
- (7 8 9) (7 9 10) (8 9 10) (7 8 10),

che costituiscono la fig. 30.^a, mentre q q' saranno allora rappresentate dai gruppi (2 3 4 5 6) (3 4 5 6 1) che hanno quattro punti comuni.

Fissati i due gruppi, di tali figure ve ne è sola una possibile.

Però si noti che la caratteristica (2 3 4 5 6) può anche indicarsi con (1 7 8 9 10) e l'altra (1 3 4 5 6) con (2 7 8 9 10), e quindi allora si può costruire un'altra figura simile scambiando il gruppo 7, 8, 9, 10 col gruppo 3, 4, 5, 6. In tutto si hanno quindi *due* figure.

Applichiamo ora la stessa trasformazione alla fig. 26.^a; si hanno gli otto piani

- (4 5 6) (3 5 6) (1 2 6) (1 2 5)
- (3 4 7) (3 4 8) (3 4 9) (3 4 10),

che danno la fig. 31.^a. Di tali figure se ne possono formare sei e anche qui, come sopra, per lo scambio del gruppo 7 8 9 10 col gruppo 3 4 5 6 si hanno altre sei figure simili; in tutto dodici.

Trasformiamo ora la figura simile alla 25.^a ma di cui i piani sieno

- (3 4 5) (3 4 7) (4 7 5) (3 5 7)
- (6 8 9) (6 8 10) (6 9 10) (8 9 10).

Si hanno allora i piani

- (1 2 6) (3 4 7) (4 5 7) (3 5 7)
- (6 7 10) (6 7 9) (6 7 8) (8 9 10),

che danno la fig. 32.^a di cui se ne possono formare sedici diverse, e altre sedici pel solito scambio di cui abbiamo parlato sopra. In tutto 32 figure.

E finalmente consideriamo l'altra figura simile alla 25.^a e di cui i piani sieno

$$\begin{array}{cccc} (3\ 4\ 7) & (3\ 4\ 8) & (4\ 7\ 8) & (3\ 7\ 8) \\ (5\ 6\ 9) & (5\ 6\ 10) & (6\ 9\ 10) & (5\ 9\ 10). \end{array}$$

Colla trasformazione si hanno i piani

$$\begin{array}{cccc} (3\ 4\ 7) & (3\ 4\ 8) & (4\ 9\ 10) & (3\ 9\ 10) \\ (5\ 6\ 9) & (5\ 6\ 10) & (6\ 7\ 8) & (5\ 7\ 8). \end{array}$$

e si ha la fig. 33.^a di cui se ne possono formare 18; se scambiamo i due gruppi 7 8 9 10 con 3 4 5 6 non si hanno figure diverse dalle prime.

Poichè ora

$$2 + 12 + 32 + 18 = 64,$$

così abbiamo raggiunte le 64 figure che dovevamo ritrovare pel caso in cui q , q' sieno rispettivamente rappresentate da

$$(3\ 4\ 5\ 6\ 1), \quad (2\ 3\ 4\ 5\ 6).$$

Passiamo ora al caso in cui le due caratteristiche q , q' sieno rappresentate da due gruppi di cinque punti che abbiano due punti comuni.

Per far questo operiamo sulle fig. 27.^a, 28.^a, 29.^a la seguente trasformazione. Mutiamo

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{in } (3\ 4\ 5\ 8\ 9) \\ (3) & \text{in } (4\ 5\ 8\ 9\ 1) \\ (4) & \text{in } (5\ 8\ 9\ 1\ 3) \\ (5) & \text{in } (8\ 9\ 1\ 3\ 4) \\ (8) & \text{in } (9\ 1\ 3\ 4\ 5) \\ (9) & \text{in } (1\ 3\ 4\ 5\ 8). \end{array}$$

Allora q , q' saranno rappresentate da

$$(3\ 4\ 5\ 8\ 9), \quad (1\ 6\ 7\ 8\ 9).$$

Gli otto piani della fig. 27.^a diventano

$$\begin{array}{cccc} (2\ 7\ 6) & (3\ 6\ 10) & (4\ 6\ 10) & (5\ 6\ 10) \\ (1\ 2\ 6) & (1\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10) & (1\ 7\ 9), \end{array}$$

rappresentati dalla fig. 34.^a.

. Di tali figure ve ne sono sei e altre sei se si tien conto della permutabilità dei punti 3, 4, 5 coi punti 1, 6, 7 stante la simmetria in tali punti delle due caratteristiche fondamentali q, q' .

Inoltre considerando i gruppi coniugati rispettivamente dei gruppi (16789) (34589) si hanno i gruppi (345210) (167210) il che mostra che si possono costruire altre $6 + 6 = 12$ figure simili scambiando solo il gruppo 8, 9, col gruppo 2, 10. In tutto quindi 24 figure.

Trasformando ora la fig. 29.^a si hanno gli otto piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 2\ 3) & (1\ 2\ 4) & (2\ 6\ 7) & (5\ 6\ 10) \\ (5\ 7\ 10) & (1\ 5\ 9) & (1\ 5\ 8) & (3\ 4\ 10), \end{array}$$

che costituiscono la fig. 35.^a.

Di esse ve ne sono in tutto $2 \cdot 18 = 36$.

Finalmente una figura simile alla 28.^a avrà i piani

$$\begin{array}{cccc} (1\ 3\ 8) & (1\ 4\ 8) & (1\ 5\ 8) & (1\ 6\ 8) \\ (1\ 7\ 8) & (8\ 9\ 10) & (2\ 8\ 10) & (2\ 8\ 9), \end{array}$$

e questi trasformati danno

$$\begin{array}{cccc} (4\ 5\ 9) & (3\ 5\ 9) & (3\ 4\ 9) & (1\ 8\ 6) \\ (1\ 8\ 7) & (8\ 9\ 10) & (6\ 7\ 8) & (2\ 8\ 9), \end{array}$$

cioè la fig. 36.^a di cui se ne possono formare quattro tenendo conto delle solite osservazioni.

In tutto abbiamo

$$24 + 36 + 4 = 64$$

figure.

Raccogliendo i risultati ottenuti si ha che « esistono tredici figure diverse (dalla fig. 24.^a alla 36.^a) rappresentanti tutti i sistemi completi di otto caratteristiche dispari ».

§ 22. Teoremi sui sistemi completi di caratteristiche dispari.

Sui sistemi completi il NOETHER dimostra i seguenti teoremi:

1. Vi sono $8 \cdot 36 \cdot 136$ sistemi completi contenenti una data caratteristica dispari.
2. Vi sono $2 \cdot 16 \cdot 72$ sistemi completi contenenti due date caratteristiche.

3. Vi sono $6 \cdot 36$ sistemi contenenti tre date caratteristiche dispari la cui somma sia pari.
4. Vi sono $2 \cdot 16$ sistemi contenenti quattro date caratteristiche e tali che a tre a tre dànno somme pari.
5. Vi sono sei sistemi contenenti cinque date caratteristiche e tali che a tre a tre dànno somme pari.
6. Vi sono due sistemi contenenti sei caratteristiche date tali che a tre a tre dànno somme pari.
7. Otto caratteristiche dispari tali che a tre a tre dànno somme pari definiscono un sistema completo.
8. Più di otto caratteristiche dispari tali che a tre a tre dànno somme pari, non esistono.
9. Otto caratteristiche a_r tali che, scelta una q pari, le somme $q + a_r + a_s$ sono tutte dispari definiscono un sistema completo di cui q è una delle caratteristiche pari basi.
10. Otto caratteristiche dispari a_r tali che, scelta un'altra caratteristica pari o dispari qualunque g , le somme

$$g + a_r + a_s + a_t,$$

sono dispari, formano un sistema completo corrispondente a due caratteristiche basi q, q' tali che

$$q + q' = g.$$

A queste proprietà poi dobbiamo aggiungere le proprietà fondamentali dei sistemi completi e che noi abbiamo già enunciate, cioè che le otto caratteristiche di un sistema completo a tre a tre, o a sette a sette dànno sempre caratteristiche pari, e a uno a uno o a cinque a cinque dànno caratteristiche dispari, e che la somma di tutte otto è $q + q'$. Per ottenere da un sistema completo tutte le caratteristiche pari e dispari bisogna considerare insieme alle otto caratteristiche del sistema anche una delle caratteristiche basi, per es. q . Allora *tutte* le dispari son date da:

$$\left. \begin{array}{l} q + a_r + a_s \\ q + a_r + a_s + a_t + a_x + a_v + a_w \\ a_r \\ a_r + a_s + a_t + a_x + a_v \end{array} \right\}$$

e tutte le pari son date invece da:

$$\left. \begin{aligned} & a_r + a_s + a_t \\ & a_r + a_s + a_t + a_x + a_v + a_w + a_u \\ & q \\ & q + a_r + a_s + a_t + a_x + a_v + a_w + a_u + a_x \\ & q + a_r + a_s + a_t + a_x. \end{aligned} \right\}$$

Tutti i teoremi citati sopra possono risultare dalla semplice considerazione delle figure.

Per esempio dimostriamo il teorema 3.^o. Immaginiamo tre piani passanti per una retta. Essi formano, come si sa, una terna pari. Vediamo quanti sistemi completi possono contenere questa terna.

Si ha che:

della fig.	24. ^a	ne esiste	1	contenente tale terna
"	25. ^a	"	nessuno	" "
"	26. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$	" "
"	27. ^a	"	$2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 4 = 50$	" "
"	28. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$	" "
"	29. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$	" "
"	30. ^a	"	5	" "
"	31. ^a	"	$5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 30$	" "
"	32. ^a	"	$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$	" "
"	33. ^a	"	nessuno	" "
"	34. ^a	"	60	" "
"	35. ^a	"	nessuno	" "
"	36. ^a	"	nessuno	" "

In tutto quindi ne esistono

$$1 + 10 + 50 + 20 + 20 + 5 + 30 + 20 + 60 = 216 = 6 \cdot 36,$$

e con ciò resta dimostrato il teorema 3.^o con un metodo diverso di quello seguito dal NOETHER.

Così anche potrebbero dimostrarsi tutti gli altri; ma a noi ci importa massimamente far vedere come si possono dimostrare i teoremi 7, 8, 9, 10 che sono importanti perchè fissano le condizioni sufficienti per costituire un sistema completo.

Per far questo ci occorre far vedere prima come si possono rappresentare, mediante le permutazioni dei sistemi completi, tutte le sostituzioni del gruppo delle caratteristiche.

§ 23. Rappresentazione completa del gruppo delle caratteristiche di genere 3 e 4.

Dalle cose sviluppate sinora risulta che pel genere 3, assunta come fondamentale una caratteristica pari, la configurazione di tutte le altre caratteristiche è isomorfa a quella delle 28 rette che congiungono a due a due otto punti, insieme ai 35 doppi tetraedri che congiungono gli stessi punti a quattro a quattro.

Il che in altre parole significa che il sottogruppo di monodromia formato con quelle sostituzioni che lasciano inalterata la caratteristica pari fondamentale, è isomorfo al gruppo degli otto punti, cioè ogni sostituzione di quel sottogruppo corrisponde ad una permutazione degli otto punti fra loro.

Quindi se ne può dedurre, come già sappiamo, che quel sottogruppo ha per ordine 8!

Ma se noi vogliamo rappresentare *tutte* le sostituzioni del gruppo, dobbiamo mutare anche la caratteristica pari fondamentale, e allora si hanno due sistemi di otto punti tali che il passaggio dall'uno all'altro potrà rappresentare una sostituzione qualunque.

Allora un sistema completo di ARONHOLD di uno degli aggruppamenti di otto punti, diventerà necessariamente un sistema di ARONHOLD dell'altro aggruppamento. La ragione per la quale per una sostituzione di monodromia, un sistema deve trasformarsi in un altro la potremmo trovare per $p = 3$ nelle conosciute proprietà dei sistemi completi, che cioè (vedi § 11) essi sono i soli sistemi di sette rette tali che a tre a tre danno caratteristiche pari.

Ma noi, in vista anche della estensione che ne dobbiamo fare al caso $p = 4$, vogliamo dimostrarlo diversamente, in modo che dalla nostra dimostrazione si possa poi dedurre anche come corollario la proprietà fondamentale enunciata.

Incominciamo col ricordare [ciò che risulta da una semplice enumerazione delle figure (vedi fig. 11.^a)] che esistono $8 \cdot 36$ sistemi completi, e che le sostituzioni di monodromia sono $8! \cdot 36$. Ora se noi trasformiamo un sistema completo in un altro, cioè stabiliamo una sostituzione che trasformi le sette rette dall'un sistema nelle sette rette dell'altro (e questa corrispondenza può farsi in $7!$ modi diversi) allora evidentemente la sostituzione è completamente definita perchè tutte le altre caratteristiche componendosi mediante le sette del sistema, la loro trasformazione è individuata.

Ora lasciando fisso il primo sistema e facendo variare il secondo fra tutti gli $8 \cdot 36$ possibili, si hanno così in tutto $7! \cdot 8 \cdot 36 = 8! \cdot 36$ sostituzioni fra loro diverse, e quindi tutte le sostituzioni di monodromia che sono proprio in tal numero. Ne risulta che una sostituzione di monodromia muterà sempre un sistema completo in un altro, altrimenti esisterebbero più che $8! \cdot 36$ sostituzioni. Quindi i sistemi completi acquistano un'altra importanza speciale nel senso che essi possono riuscire a rappresentare *tutte* le sostituzioni del gruppo di monodromia.

Così, per es. sappiamo (§ 11) che esistono $2 + 30 + 40 = 72$ sistemi completi aventi una data retta fissa. E quindi se ne deduce che

« Esistono $6! \cdot 72$ sostituzioni che lasciano inalterata una data caratteristica dispari. » Questo numero corrisponde all'ordine del gruppo delle 27 rette della superficie di 3.^o ordine (*).

E analogamente, dai teoremi del § 11 ricaviamo ancora:

« Esistono $16 \cdot 5!$ sostituzioni che lasciano inalterate due date rette, cioè due date caratteristiche dispari. » Questo numero corrisponde all'ordine del gruppo delle 16 rette della superficie di 4.^o ordine a conica doppia (**).

« Esistono $5 \cdot 4!$ sostituzioni che lasciano inalterate tre rette formanti una terna pari, cioè tre caratteristiche dispari la cui somma sia pari. » Questo numero corrisponde all'ordine del gruppo delle dieci rette della superficie di 5.^o ordine a quintica doppia studiata da CAPORALI e DEL RE.

« Esistono $2 \cdot 3!$ sostituzioni che lasciano inalterate quattro rette formanti quattro terne pari. »

(*) JORDAN, *Subst.*, pag. 317.

(**) JORDAN, *id.*, pag. 309.

Possiamo anche dedurre come corollario ciò che abbiamo già conosciuto per altra via cioè che un sistema di sette rette tali che a tre a tre danno una somma pari individuano un sistema completo. Infatti consideriamo in primo luogo le tre terne pari di rette (I, III, V della fig. 2.^a). Evidentemente esiste sempre un sistema completo contenente una qualunque di quelle terne. Allora esistendo sempre una sostituzione che muti tutte le rette di un sistema completo in tutte quelle di un altro, esisterà sempre una sostituzione che muti la terna I e la terna III nella terna V.

Se consideriamo il dato assieme di sette rette, si può allora far vedere che esisterà sempre una sostituzione che lo muti in un sistema di ARONHOLD, e quindi sarà esso stesso (per le cose dette avanti) un sistema di ARONHOLD.

Infatti se tre rette di esso formano una figura come I o III (fig. 2.^a) si possono con una trasformazione ridurre ad un tipo V. Allora l'assieme di sette rette diventerà un altro assieme di sette rette godente sempre della proprietà supposta [perchè quella proprietà non si altera per qualunque sostituzione del gruppo di monodromia (§ 3)] e tale che tre rette formino il tipo V (fig. 2.^a). Aggiungiamo ora a queste tre una quarta retta. Queste quattro rette saranno tali che conterranno sempre solo terne pari, mentre le tre prime di esse passano per un punto. Sieno (1 2) (1 3) (1 4) queste tre rette passanti per un punto; allora la quarta potrà essere o (5 6) o (1 5) cioè la quaterna può essere solo di uno dei due tipi della fig. 37.^a. Ora il primo è una quaterna contenuta evidentemente in un sistema completo (il secondo della fig. 11.^a), e quindi esiste una trasformazione che lo riduce al secondo il quale evidentemente appartiene ad un sistema completo. Allora tutte le altre rette del supposto sistema si ridurranno ad altre rette che con le quattro passanti per un punto costituiscono sempre terne pari. Quindi considerando una quinta di queste rette, essa si ridurrà o a (6 7) o a (1 6) (fig. 38.^a). Il primo caso si può al solito ridurre al secondo, e allora ci riduciamo sempre a cinque rette passanti per un punto e a due rette che colle prime danno sempre terne pari. Ora se una di queste altre è la retta (7 8), l'altra non può esistere perchè in qualunque modo si ponga darebbe sempre luogo ad una terna dispari. Quindi le due rette rimanenti non possono che essere (1 7) (1 8), e quindi si ha un complesso di sette rette passanti per un punto, e quindi formanti un sistema completo. Con ciò il nostro teorema resta dimostrato.

Evidentemente poi risulta anche quest'altro; che non si possono costruire *più di sette rette* godenti della proprietà che a tre a tre danno terne pari. Perchè se ciò fosse possibile io posso sempre con un assieme di trasformazioni

nel modo indicato sopra, ridurre sette delle rette a sette rette passanti per un punto, e allora le altre in qualunque modo sieno situate daranno luogo sempre a terne dispari come si vede facilmente.

Tutte queste considerazioni sulla rappresentazione del gruppo delle caratteristiche di genere 3 siano in grado di estenderle subito pel genere 4.

Avendo scelto come fondamento della rappresentazione un sistema di NOETHER di dieci caratteristiche pari, il sottogruppo formato di quelle sostituzioni che scambiano fra loro queste dieci caratteristiche pari, è rappresentabile coll'assieme delle permutazioni fra i dieci punti.

Passando da un sistema di NOETHER ad un altro qualunque dei $136 \cdot 96$ esistenti, si hanno in tutto $136 \cdot 96 \cdot 10!$ sostituzioni fra loro diverse; ma le sostituzioni di monodromia sono in tal numero, dunque in tal maniera si hanno tutte le sostituzioni di monodromia.

In tal maniera conoscendo le configurazioni di tutti i sistemi completi di dieci caratteristiche pari, si possono rappresentare *tutte* le sostituzioni. Ma noi possiamo utilmente sostituire ai sistemi completi di caratteristiche pari, quelli di caratteristiche dispari, di cui abbiamo trovate avanti tutte le possibili configurazioni.

E ciò è tanto più conveniente inquantochè i sistemi completi di caratteristiche pari, contenendo parecchie caratteristiche pari rappresentate da cinque punti danno luogo ad una configurazione più complicata.

Allora possiamo dire che tutte le sostituzioni di monodromia sono rappresentate dalla permutazione di un sistema completo di caratteristiche dispari in un altro qualunque, accompagnata da una permutazione degli otto piani fra loro.

Però si noti che siccome effettivamente il sistema di otto caratteristiche dispari non può dare *tutte* le caratteristiche, se non si fissa una delle sue caratteristiche basi q o q' , così nel far corrispondere un sistema di otto ad un altro di otto, bisogna anche fissare la corrispondenza di una delle caratteristiche basi q o q' .

Siccome i sistemi di otto sono $255 \cdot 36 \cdot 64$ si hanno così tutte le $255 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 2 \cdot 8!$ sostituzioni di monodromia.

Troviamo quante sostituzioni esistono che lasciano fissa una data caratteristica dispari. Basta trovare quanti sistemi completi vi sono che hanno un dato piano fisso. Dal § 22 sappiamo che tal numero è $8 \cdot 36 \cdot 136$, onde moltiplicando tal numero per $2 \cdot 7!$ si ha il numero richiesto delle sostituzioni.

Come conseguenza delle cose dette risulta che se si hanno due assieme

dello stesso numero di piani, e un solo di essi forma una configurazione appartenente ad un sistema completo mentre l'altro no, allora non esisterà nessuna sostituzione che muti il primo assieme nel secondo, perchè per una sostituzione qualunque i sistemi completi si permutano fra loro.

§ 24. Dimostrazione di alcuni teoremi sui sistemi completi.

Siamo ora in grado di esporre la dimostrazione dei teoremi 7, 8, 9, 10 del § 22.

Dimostriamo che otto piani tali che contengono tutte terne pari (cioè dei tipi I, II, V, VII, X, XI, XII fig. 18.^a) formano necessariamente una delle 13 figure dei sistemi completi.

Per dimostrar ciò faremo vedere che con una sostituzione di monodromia si potrà sempre trasformare il sistema degli otto piani in un sistema di otto piani passanti per due punti fissi, cioè in un sistema completo, e quindi per i principii stabiliti nel paragrafo precedente se ne deduce che il sistema primitivo era anche un sistema completo.

Consideriamo una terna del sistema dato. Tali terne saranno dei tipi I, II, V, VII, X, XI, XII, e poichè si verifica subito che queste compariscono sempre in un sistema completo, cioè che esiste sempre un sistema completo contenente una di quelle terne (*), così si deduce che con un'opportuna sostituzione si potrà sempre ridurre quella terna ad una del tipo V, cioè a tre piani passanti per due punti. Allora tutti gli altri piani si trasformano in altri in modo però che resti inalterata la proprietà che l'assieme possenga solo terne pari.

Consideriamo ora un altro piano insieme con i tre ridotti al tipo unico indicato. Si vede che non sono possibili che solo le tre figure (a) (b) (c) della fig. 40.^a.

Ora tali quaterne esistono in sistemi completi, e propriamente

(a) esiste nella fig. 27.^a o 30.^a ecc.;

(b) esiste nella fig. 26.^a o 28.^a ecc.;

(c) esiste nella fig. 24.^a o 26.^a ecc.

(*) Si noti per es. che le terne XI esistono solo nelle fig. 32.^a e 35.^a; nella prima di tali figure ne esistono tre sole cioè quelle formate coi due piani (1 2 6) (8 9 10) e con uno degli altri tre (3 7 4), (7 4 5), (7 5 3), mentre nella seconda ne esistono due e sono (3 4 10) (2 6 7) (1 8 5), (3 4 10) (2 6 7) (1 9 5).

Dunque possiamo sempre con una sostituzione ridurci al tipo (c) cioè a quattro piani passanti per due punti.

Vediamo come può allora essere disposto un altro dei piani.

Evidentemente un quinto piano lo posso disporre in tre altre maniere in modo che si verifichi sempre la proprietà di non esservi che terne pari, e cioè

(a') Quattro piani passanti per due punti e un quinto piano avente nessun punto comune con questi.

(b') Quattro piani passanti per due punti e un quinto avente un vertice in uno di questi due punti.

(c') Cinque piani passanti per due punti.

Ora tali configurazioni esistono in sistemi completi, cioè per es.

(a') esiste in fig. 27.^a;

(b') esiste in fig. 27.^a;

(c') esiste in fig. 24.^a.

Quindi ci possiamo ridurre, al solito, solo al tipo (c').

Un sesto piano può riunirsi ai cinque di (c') al solito in tre sole maniere cioè

(a'') non avente alcun vertice comune coi piani di (c');

(b'') avente un vertice in uno dei due punti comuni dei piani di (c');

(c'') avente due vertici nei due punti comuni.

È facile ora verificare che non esiste alcun sistema completo contenente una figura come (a''), però si può far vedere che se adesso alla figura (a'') voglio aggiungere un altro piano dotato delle medesime proprietà non lo posso più fare, perchè in primo luogo sono esauriti tutti i dieci punti, e quindi quest'altro piano non può che avere tutti i suoi vertici comuni con piani della figura a''; intanto questo settimo piano dovendo formare sempre terne pari coi cinque piani passanti per due punti, può o non avere con essi nessun vertice di comune o passare per uno dei due vertici comuni, o per amendue. Ma nel primo caso sarebbe lo stesso del sesto piano di (a''), e negli altri casi dovendo poi avere due o un vertice comune con tale sesto piano darebbe sempre luogo ad una terna dispari, come è facile verificare. Dunque la figura (a'') resta esclusa, e poichè (b'') esiste in un sistema completo per es. nella fig. 26.^a, così possiamo sempre ridurci a sei piani passanti per due punti.

Aggiungendo un altro piano, questo può aggiungersi in due modi, cioè in modo che nel complesso formino o:

(b'') Sei piani passanti per due punti, e uno avente un vertice in uno di tali due punti.

(c'') Sette piani passanti per due punti.

Poichè (b'') è contenuto in un sistema completo e propriamente per es. nella fig. 26.^a, così con una sostituzione possiamo ridurci a (c''). Allora finalmente l'ottavo piano non può che passare per i due punti comuni, perchè in qualunque altra maniera darebbe luogo a terne dispari.

Dunque il sistema dato essendo trasformabile in un sistema completo e propriamente nella fig. 25.^a, è esso stesso un sistema completo.

Evidentemente ora si può osservare che se il sistema dato fosse stato composto di nove piani, allora otto di essi possono trasformarsi in otto piani passanti per due punti, e il nono dovrebbe trasformarsi in un altro che coi primi dà sempre terne pari. Ma ad otto piani siffatti non può aggiungersi un nono piano con questa condizione, dunque non esistono nove piani colla proprietà detta.

In tal maniera resta dimostrato anche il teorema 8.^o.

Dimostriamo ora il teorema 9.^o.

Supponiamo che otto piani a_1, a_2, \dots, a_8 sieno tali che $q + a_r + a_s$ sia sempre dispari, dove q è una caratteristica pari. Questa q pari sia una di quelle rappresentate da un punto solo, per es. dal punto 1. Prendiamo allora due dei piani del sistema dato, e facilmente si vede che essi possono rispetto al punto 1 avere solo le seguenti figure

- | | | |
|-----|---------|----------|
| (a) | (1 2 3) | (1 2 4) |
| (b) | (2 3 4) | (2 3 5) |
| (c) | (1 2 3) | (2 4 5) |
| (d) | (2 3 4) | (5 6 7). |

Ora figure come quelle formate da questi due piani insieme al punto $1 \equiv q$ esistono in sistemi completi, cioè la seconda esiste nella fig. 25.^a e 26.^a, la terza esiste in 26.^a o 27.^a, e la quarta esiste in 25.^a, e quindi adoperando una trasformazione come quelle di sopra io posso trasformare tali sistemi completi in uno come la fig. 24.^a, e allora le figure (b) (c) (d) vengono tutte a trasformarsi nella figura (a).

Consideriamo ora insieme ad (a) un altro piano dotato delle stesse proprietà. Esso potrà essere solo o (1 2 5) ovvero (2 5 6).

Nel secondo caso si hanno tre piani che con 1 formano una figura che esiste nella fig. 27.^a o 28.^a, e quindi con una trasformazione il secondo caso può ridursi al primo, che è una figura risultante di tre piani passanti per due punti di cui uno è il punto 1. Aggiungiamo ora ancora un altro piano. Questo o passa per gli stessi due punti o pel punto 2 solamente, senza avere altri vertici comuni coi piani già esistenti. Tale seconda figura esiste nella fig. 28.^a e quindi sempre ci riduciamo alla fig. 24.^a, e così di seguito finchè siamo giunti a cinque piani passanti per due punti 1, 2 e ad un altro piano (2 8 9) che è l'ultima configurazione di questa specie esistente nei sistemi completi e che esiste propriamente nella fig. 28.^a. Quindi infine al solito modo ci riduciamo a sei piani passanti per due punti di cui uno è $1 \equiv q$.

Volendo aggiungere gli altri due piani, se uno di essi è (2 9 10) non se ne può costruire un altro in modo da conservare inalterata la proprietà stabilita, e se invece uno di essi è (1 2 9) l'altro non può essere che (1 2 10), e così ci siamo ridotti a otto piani passanti per due punti di cui uno è q , e con ciò resta dimostrato il teorema.

§ 25. Determinazione delle caratteristiche corrispondenti alle tangenti doppie della curva di quart'ordine.

Nel volume 11 dei Math. Ann. il KLEIN si propone di determinare le caratteristiche delle tangenti doppie di quella curva di quart'ordine di PLUCKER che ha tutte le tangenti doppie reali, e la cui forma è, come sappiamo, l'assieme di quattro ovali esterne l'una all'altra (vedi figura nel lavoro citato di KLEIN). Messa l'equazione della quartica sotto la forma

$$\lambda D' D'' D''' D^{IV} - \Omega^2 = 0,$$

dove le D sono quattro convenienti tangenti doppie e Ω è la conica che passa per i punti di contatto di esse, facendo convergere λ a zero si ha come caso limite una conica doppia che rappresenta la curva di quart'ordine ridotta iperellittica. Su questa conica vi sono otto punti di diramazione, le cui congiungenti a due a due rappresentano le tangenti doppie.

Il KLEIN considerando direttamente gli integrali abeliani determina le caratteristiche di queste congiungenti, e basta evidentemente limitarsi a questa

sola determinazione perchè poi col principio di continuità si può passare alle tangenti doppie della quartica primitiva.

Ora la determinazione delle caratteristiche pel caso iperellittico si può fare immediatamente paragonando la figura che noi otteniamo cogli otto punti di diramazione colla figura da noi presa per fondamento nelle ricerche precedenti e che ha anche otto punti fondamentali. Per assegnare quindi le caratteristiche basta scegliere arbitrariamente sette rette formanti una configurazione di un sistema completo, cioè una delle due figure 11.^e e assegnare a tali rette le caratteristiche di un sistema completo per es. (*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La somma di queste sette caratteristiche è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Assegnando (fig. 41.^a) queste caratteristiche alle sette rette partenti da uno degli otto punti per es. da 1, e ritrovando poi le caratteristiche di tutte le altre rette (ij) colla formola

$$(ij) = (1i) + (1j) + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si viene a trovare la stessa figura trovata da KLEIN nel lavoro citato.

§ 26. Determinazione delle caratteristiche dei 120 piani tritangenti della sestica.

Una considerazione analoga possiamo fare pel caso della sestica storta di genere 4.

Prima di tutto ricordiamo che possiamo immaginare anche una sestica con cinque rami reali come la quartica di PLUCKER ha quattro rami reali.

Infatti da un lavoro di HILBERT (**) risulta che il numero dei rami reali

(*) Vedi WEBER, *Abelsch. Funct.*, pag. 183.

(**) *Math. Ann.*, Bd. 38, pag. 122 (1891). In questi ultimi tempi è uscita una interessante Nota di KLEIN in cui generalizza alle curve di genere qualunque i risultati, sulla realtà delle tangenti doppie della quartica, ottenuti da ZEUTHEN nel 7.^{mo} vol. dei *Math. Ann.* Vedi: *Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Functionen.* Göttinger Nachrichten, n.° 9, 1892.

di una curva storta irriducibile di n^{mo} ordine è al più $\frac{1}{4}(n-2)^2 + 1$ ovvero $\frac{1}{4}(n-1)(n+3) + 1$ secondochè n è pari o dispari, ed esistono effettivamente nei due casi curve aventi tanti rami reali. Onde si ha che esisterà una setica con cinque ovali. Se la forma diventa iperellittica si ha una cubica doppia con dieci punti di diramazione, e i 120 piani tritangenti diventano i piani congiungenti a tre a tre questi dieci punti. Per determinare quindi le caratteristiche dei diversi piani tritangenti nel caso iperellittico basta assegnare ai dieci punti le caratteristiche di un sistema completo di NOETHER (vedi § 18) e allora la caratteristica di un piano sarà la somma delle tre caratteristiche dei vertici.

§ 27. Gruppo delle 27 rette della superficie di terz'ordine.

Vogliamo far vedere come mediante le considerazioni precedenti si può studiare il gruppo e la configurazione delle 27 rette della superficie cubica (*).

Teniamo presente la figura di GEISER (§ 4) nella quale le 27 rette corrispondono a 27 tangenti doppie della quartica. Ogni sezione piana della superficie cubica corrisponde ad una cubica di contatto della quartica e propriamente ad una cubica del sistema di contatto coniugato alla 28.^a tangente doppia, cioè tale che per i sei punti di contatto di essa cubica e per i due punti di contatto della 28.^a tangente doppia passa una conica.

Allora volendo studiare il gruppo delle 27 rette dobbiamo studiare il sottogruppo di monodromia che lascia inalterata una caratteristica dispari, e le sostituzioni di questo sottogruppo le possiamo rappresentare tutte mediante le considerazioni svolte nel § 23.

Prima di tutto possiamo ricercare quanti sono i sistemi completi contenenti una data retta fissa. Si trova che sono 72 (§ 23), onde ne deduciamo che il gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette ha per ordine $6! \cdot 72$. Inoltre consideriamo tre tangenti doppie formanti una cubica di contatto del sistema coniugato alla 28.^a tangente doppia; in altri termini consideriamo tre tangenti doppie che insieme colla tangente doppia fissa formino una quaterna zero (§ 8). Allora per la figura di GEISER si ha che il piano nello spazio a

(*) JORDAN, pag. 316.

tre dimensioni che corrisponderà a questa cubica di contatto degenerata in tre rette, dovrà passare per tre rette della superficie cubica; cioè le 27 rette della superficie cubica a tre a tre stanno in piani; e poichè di quaterne zero aventi una retta fissa ve ne sono 45 (vedi § 8), così esistono 45 triangoli formati dalle 27 rette (triangoli di STEINER) (*).

In questa maniera le 27 rette di S_3 sono rappresentate colle 27 rette che congiungono a due a due otto punti fissi, quando si esclude una delle congiungenti.

Vediamo in questa figura schematica come saranno rappresentate le coppie di rette che sulla superficie di terz'ordine si vengono ad incontrare o no.

Evidentemente due rette si taglieranno o no secondochè nella figura schematica saranno rappresentate da due rette che insieme alla retta fissa, formino o no, tre lati di una quaterna zero.

Quindi se (1 2) è la retta fissa (fig. 42.^a) per segnare due rette che rappresentino due che non si taglino dobbiamo segnare due rette che insieme con (1 2) non individuano una quarta retta; quindi possiamo segnare le coppie dei seguenti tipi:

I	(1 8) (2 8)
II	(1 3) (1 4)
III	(7 6) (6 5)
IV	(1 3) (5 6).

Vediamo quante di queste coppie possiamo segnare. Ve ne sono

$$6 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} + 6 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 216 = 27 \cdot 8,$$

cioè esistono $27 \cdot 8$ coppie di rette che non si tagliano (**).

Vediamo come si possono raggruppare queste coppie.

Congiungiamo i sei punti 3, 4, 5, 6, 7, 8 coi punti 1, 2. Abbiamo sei coppie del tipo I; queste sei coppie evidentemente sono tali che prese due di esse, le due rette di una tagliano le due rette dell'altra, cioè considerando per es. le due coppie (1 3) (2 3); (1 4) (2 4), è evidente che le due rette (1 3) (2 4) e le due rette (1 4) (2 3) rappresentano coppie che rispettivamente si tagliano.

(*) JORDAN, loc. cit. — STEINER, Crelle, 53.

(**) JORDAN, pag. 319.

Inoltre nessun'altra coppia si trova in tale condizione rispetto ad una delle sei coppie considerate; abbiamo così trovate sei coppie che si trovano fra loro in una relazione speciale, e tale relazione non può evidentemente venire alterata dalle sostituzioni del gruppo; quindi ne possiamo dedurre che tutte le $27 \cdot 8$ coppie si riuniscono a sei a sei in $\frac{27 \cdot 8}{6} = 36$ bisestuple (bise-
stuple di SCHLÄFLI).

Vediamo ogni retta quante altre ne incontra; basta verificare la cosa per una retta speciale perchè poi in virtù della transitività del gruppo lo stesso succederà per tutte le altre. Ora per es. (fig. 43.^a) la retta (1 3) incontra le rette

(2 4) (2 5) (2 6) (2 7) (2 8) (3 4) (3 5) (3 6) (3 7) (3 8),

perchè con ciascuna di queste rette può sempre formar parte di una quaterna zero.

Evidentemente con qualunque altra retta, la retta (1 3) formerebbe sempre una coppia di uno dei tipi della fig. 42.^a, e quindi possiamo concludere che ogni retta incontra dieci altre rette fra le 27 e si ritrova il teorema di STEINER.

Immaginiamo due triangoli di STEINER non aventi nessun lato comune. Essi saranno per es. rappresentati dalle rette (fig. 44.^a)

(1 3) (3 4) (2 4)
(1 5) (5 6) (2 6).

Allora ogni lato del primo triangolo incontra un lato del secondo; cioè evidentemente

(1 3) incontra (2 6)
(3 4) " (6 5)
(2 4) " (1 5),

e le rette (3 6) (7 8) (4 5) evidentemente formano un nuovo triangolo che con i due primi è combinato in modo che i lati corrispondenti dei tre triangoli si incontrano a due a due formando altri tre triangoli

(1 3) (2 6) (3 6)
(3 4) (6 5) (7 8)
(2 4) (1 5) (4 5).

Di queste terne di triangoli (formanti ciò che si chiama un triedro di STEINER)

ve ne sono tante quanto è il terzo del numero delle coppie di triangoli non aventi alcun lato comune. Ora se (1 3) (3 4) (4 2) è uno dei triangoli, un altro non avente con esso alcun lato comune o è del tipo

$$(1\ 5)\ (5\ 6)\ (6\ 2),$$

di cui ve ne sono $2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$ diversi o del tipo

$$(3\ 5)\ (4\ 6)\ (7\ 8),$$

di cui ve ne sono $2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$, o del tipo finalmente

$$(2\ 3)\ (3\ 5)\ (5\ 1),$$

di cui ve ne sono $4 \cdot 2 = 8$.

In tutto vi saranno $\frac{32 \cdot 45}{2}$ coppie di triangoli non aventi alcun lato comune, e quindi $\frac{45 \cdot 32}{2 \cdot 3}$ triedri di STEINER.

Nella Memoria seguente, che è già compiuta, esplicheremo largamente i concetti appena accennati in questo capitolo finale e ce ne serviremo per lo studio delle configurazioni.

Milano, Pavia, $\frac{\text{agosto } 1891}{\text{aprile } 1892}$.

Fig. 1^a

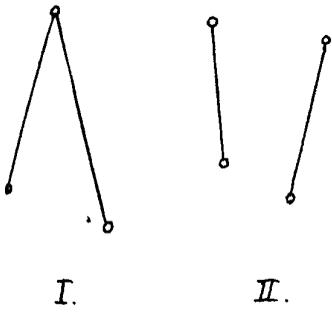


Fig. 3^a

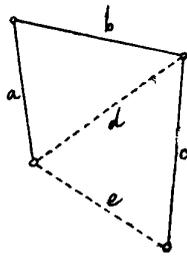


Fig. 4^a

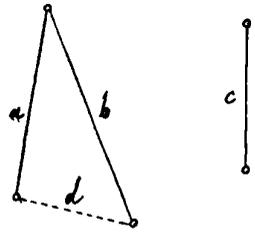


Fig. 2^a

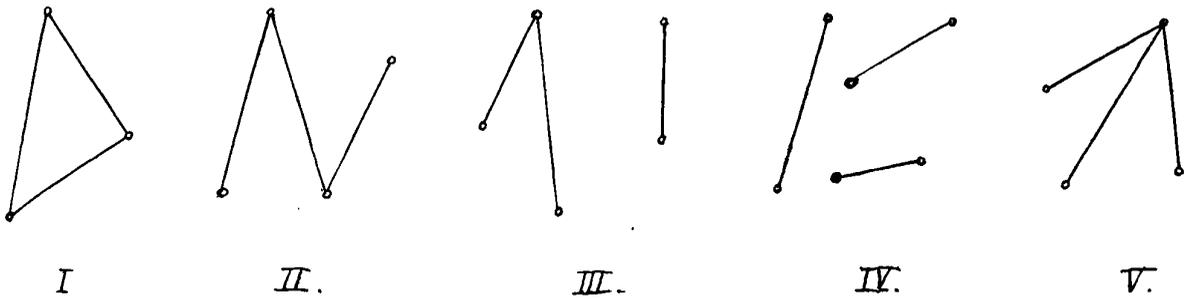


Fig. 5^a

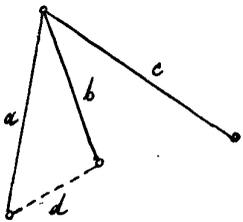


Fig. 6^a

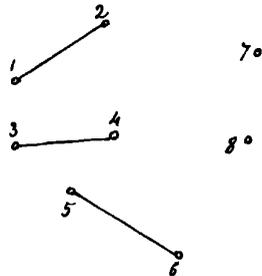


Fig. 7^a

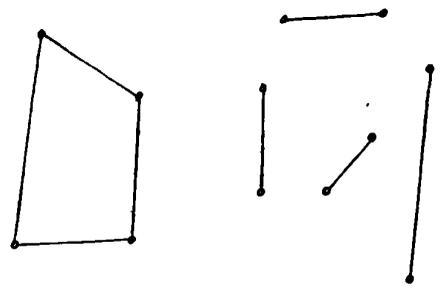


Fig. 8^a

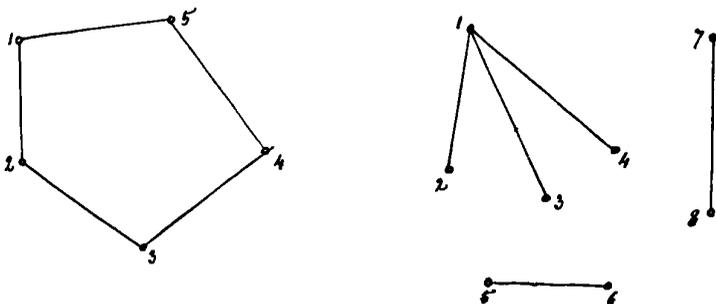


Fig. 9^a

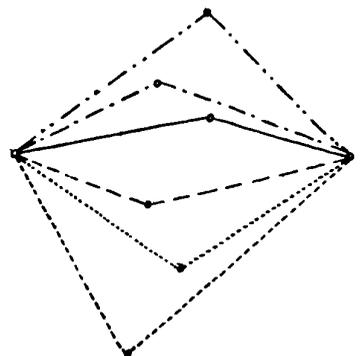


Fig. 10^a

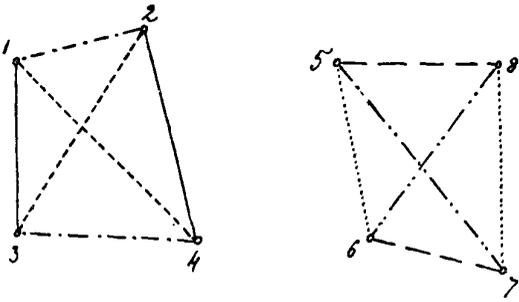


Fig. 11^a

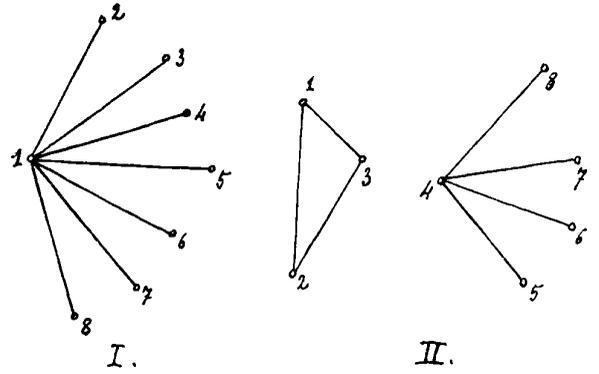


Fig. 12^a

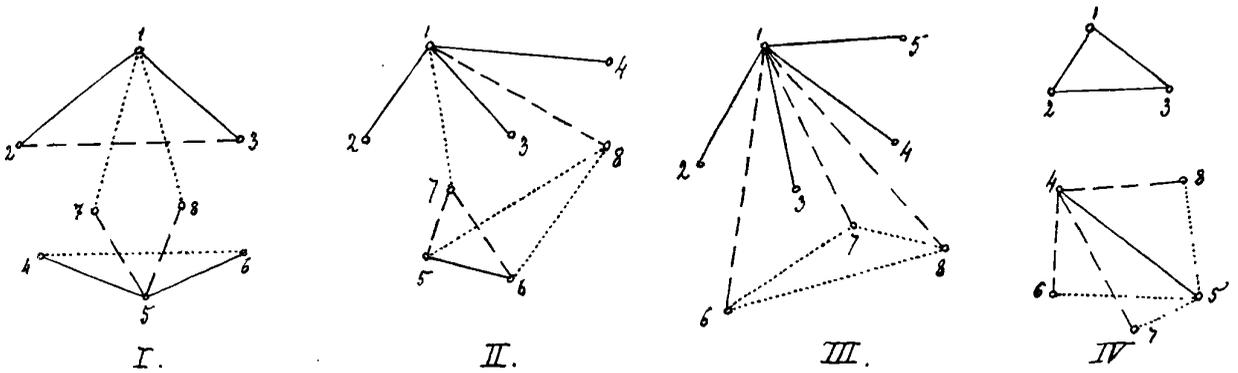


Fig. 13^a

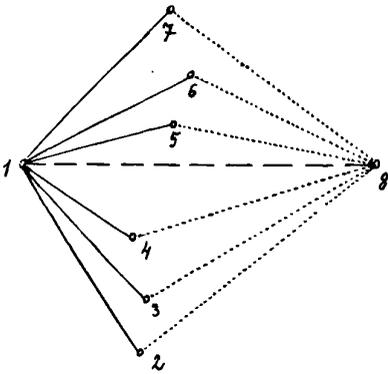


Fig. 14^a

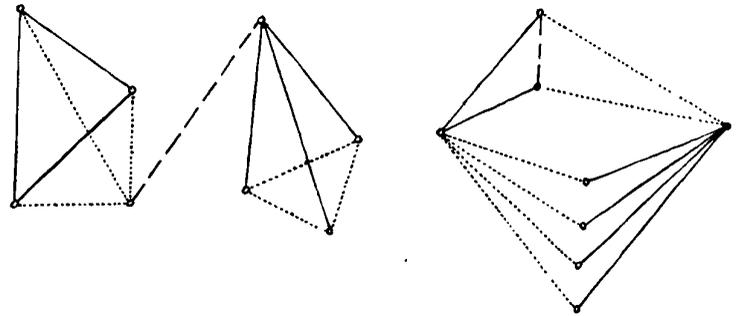


Fig. 15^a

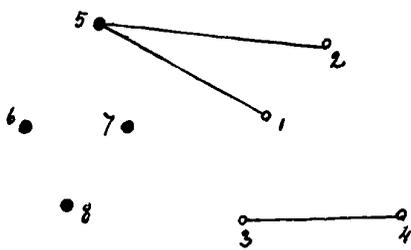


Fig. 16^a

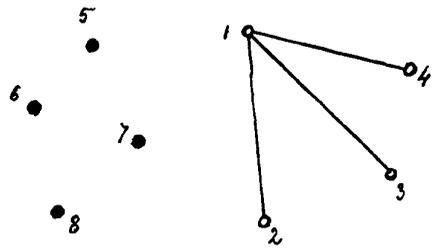


Fig. 17^a

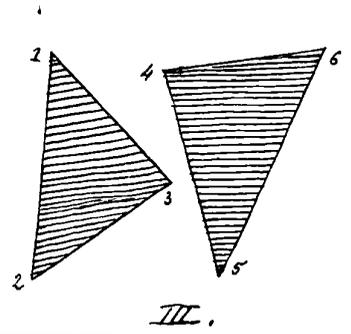
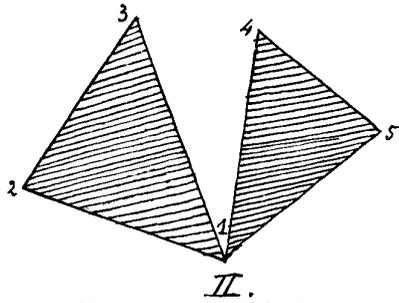
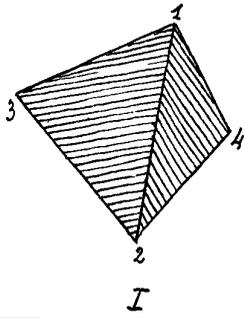


Fig. 18^a

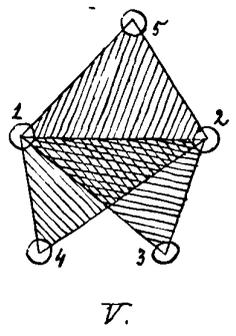
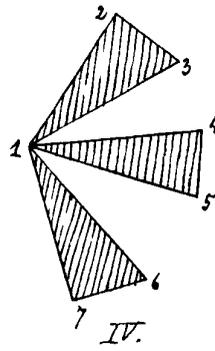
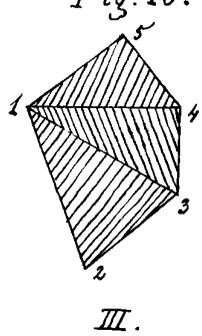
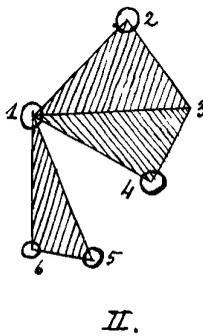
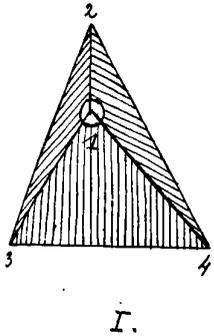


Fig. 18^a (segue)

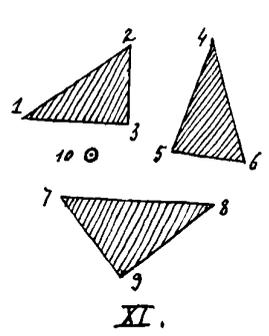
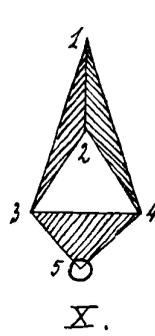
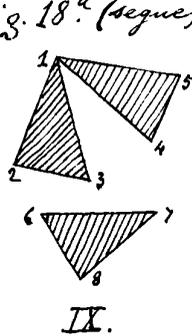
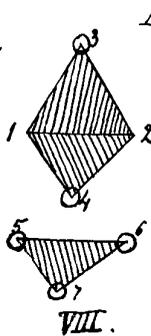
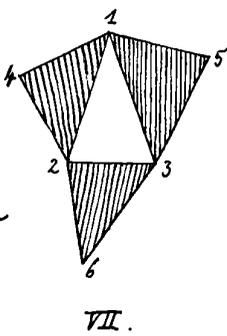
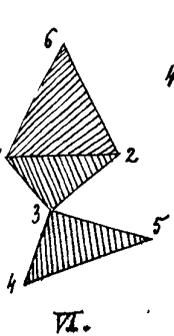


Fig. 18^a (segue)

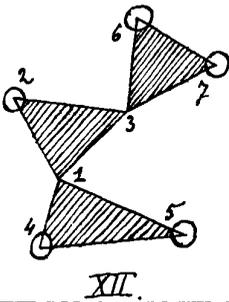


Fig. 19^a

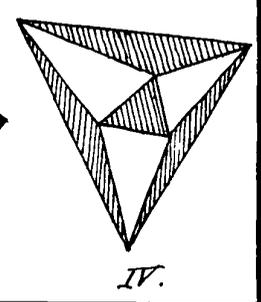
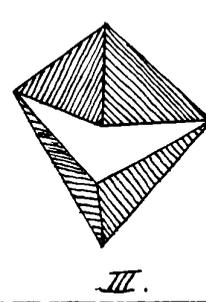
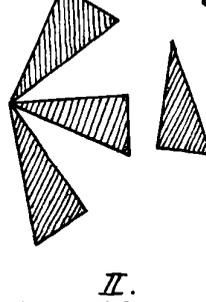
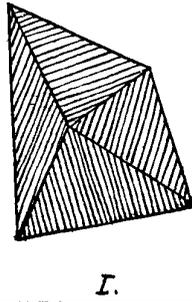


Fig. 20^a

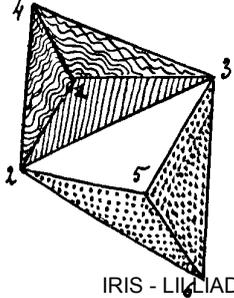


Fig. 21^a

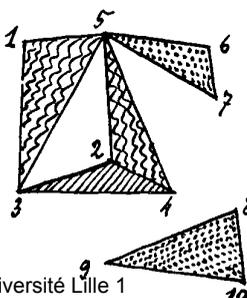


Fig. 22^a

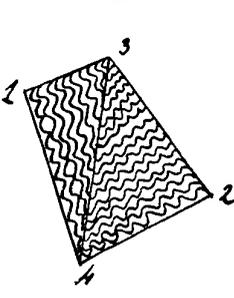
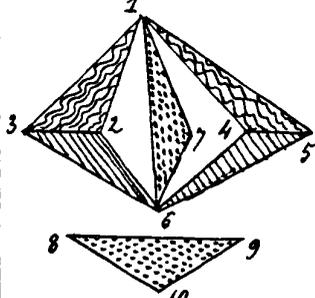


Fig. 23^a



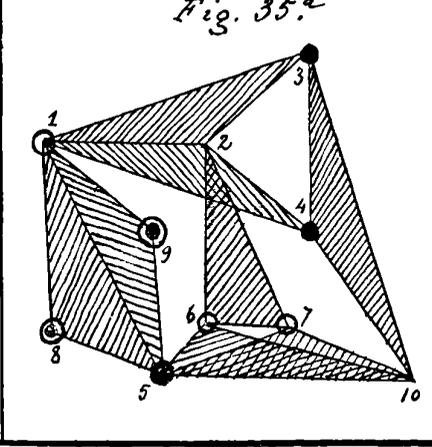
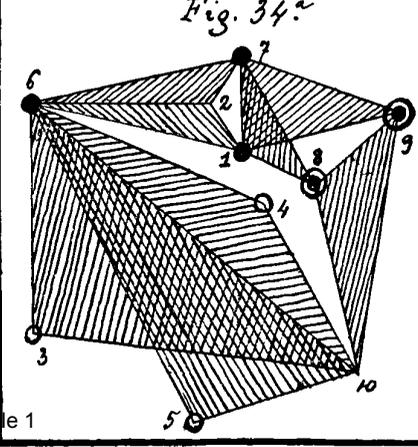
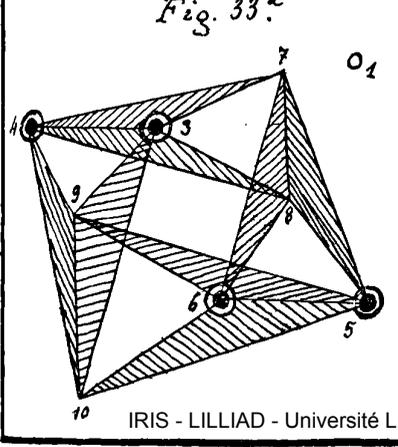
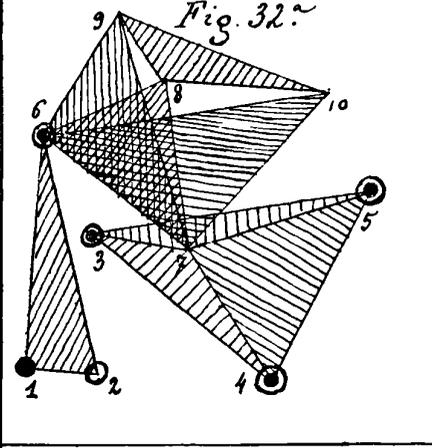
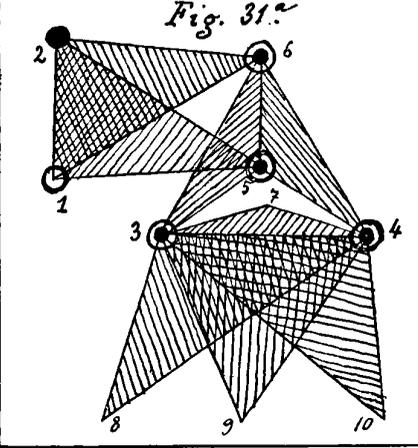
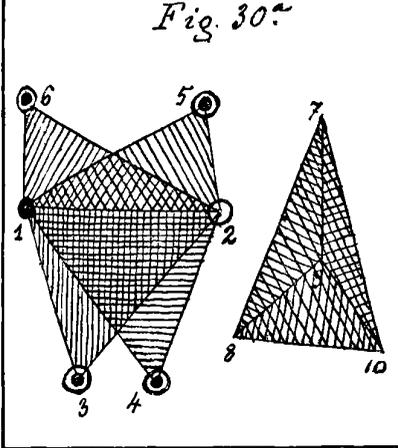
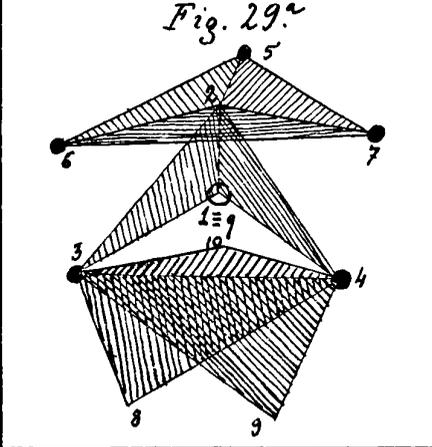
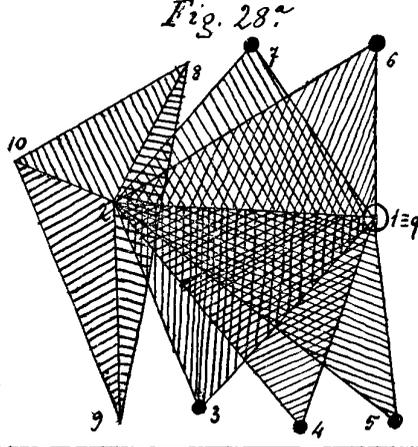
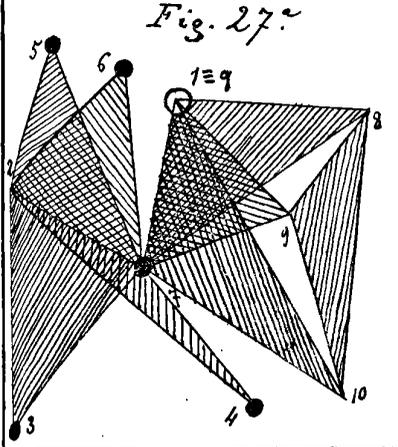
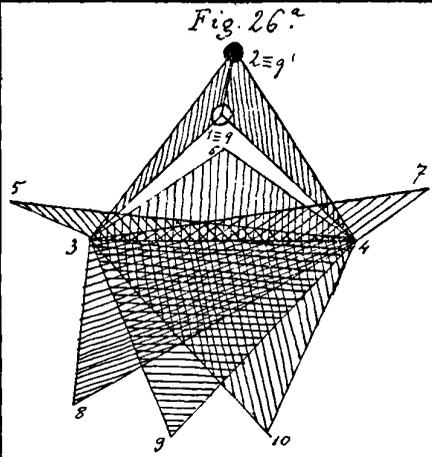
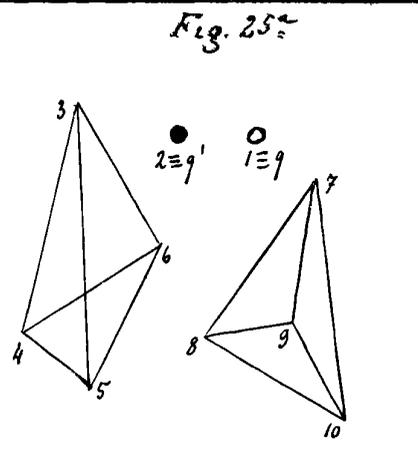
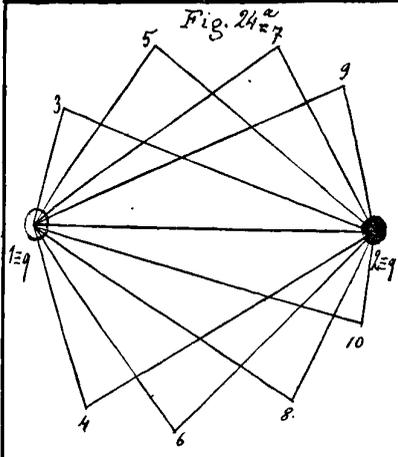


Fig. 36^a

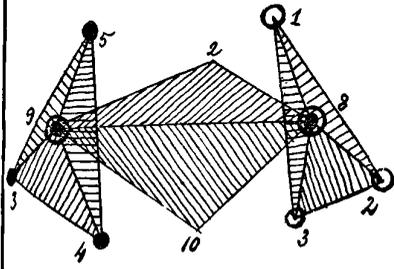


Fig. 37^a

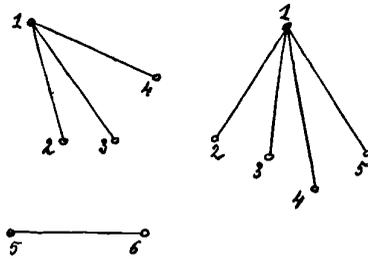


Fig. 38^a

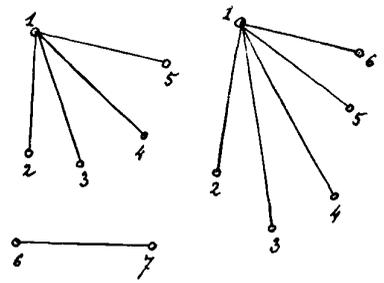


Fig. 40^a

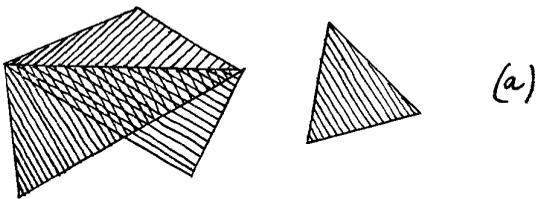


Fig. 39^a

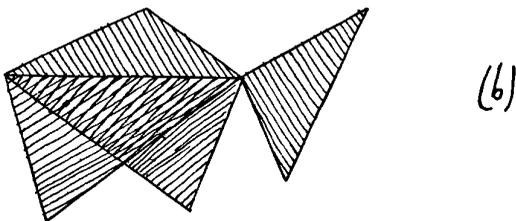
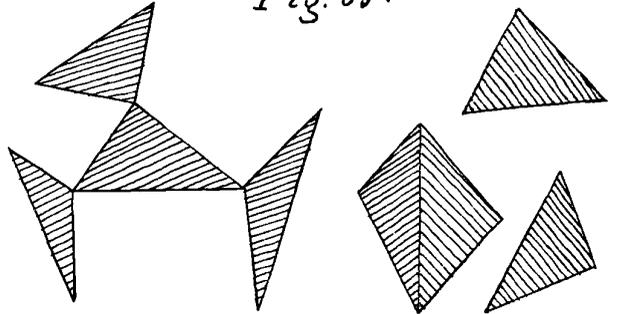


Fig. 41^a

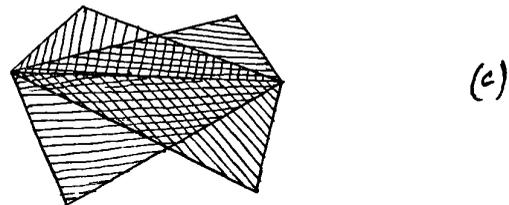
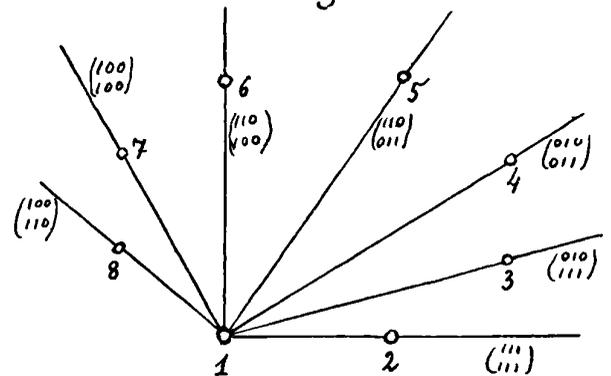


Fig. 42^a

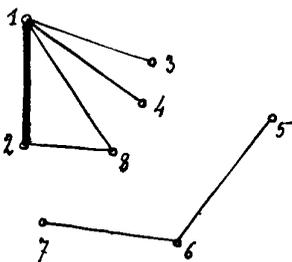


Fig. 43^a

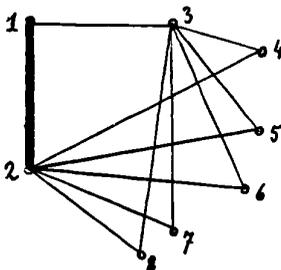
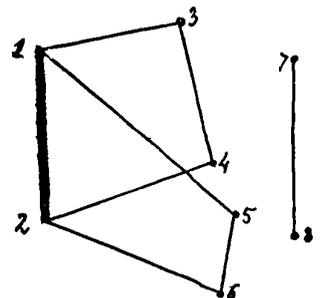


Fig. 44^a



Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie ∞^1 giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione.

(Di FEDERICO AMODEO, a Napoli.)

Questa teoria è la naturale estensione della nota teoria delle serie lineari di gruppi di punti esistenti sopra una curva algebrica.

Se sopra una varietà algebrica ∞^1 , di genere qualunque, esiste una serie semplicemente infinita di gruppi di m punti (*) ciascuno, tali che ogni punto della varietà appartenga ad uno ed uno solo di questi gruppi, e che la varietà costituita dagli ∞^1 gruppi sia riferibile (bi)univocamente ai punti di una curva algebrica di genere $\pi > 0$, questa serie si dice *serie irrazionale involutoria* dell'ordine m , e di genere π ; qui la indicheremo col simbolo $g^1_{m,\pi}$ (**).

Ciò che era noto intorno a queste serie fu esposto dal chiar. prof. SEGRE nelle sue lezioni dell'anno accademico 1890-91 sulla « Introduzione alla geometria su di una varietà algebrica ∞^1 » che io per sua cortesia ebbi l'opportunità di ascoltare.

Egli mostrò che la formola del sig. ZEUTHEN, sui punti di diramazione di due curve algebriche che sono in corrispondenza (m, m') fra loro (***), fa conoscere immediatamente che *il numero dei punti doppi* (punti di diramazione) *di una $g^1_{m,\pi}$ esistente sopra una varietà algebrica ∞^1 di genere p è:*

$$y = 2(p - 1) - 2m(\pi - 1). \quad (1)$$

(*) Estendiamo, come di solito, alla parola *punto* il significato di elemento semplice o generatore della varietà.

(**) Serberemo il simbolo g_r^n per le serie lineari (di genere zero) di ordine n , e di dimensione r .

(***) Math. Ann., Bd. 3.

Poi espose una importante formola del sig. SCHUBERT la quale (nell'ipotesi che la varietà algebrica sia una curva di ordine n e di genere p di uno spazio S_r , e che il gruppo generico di m punti della serie irrazionale individui un S_k , e che sia z il numero dei gruppi di $k + 1$ punti di uno stesso gruppo della serie irrazionale che appartengono ad un S_{k-1} invece che ad un S_k) fa conoscere il numero dei punti doppi della serie irrazionale in funzione dell'ordine e del genere della varietà algebrica, dei numeri k e z , e dell'ordine della varietà degli S_k .

Dalle due formole eliminando il numero y ricavò l'altra non meno importante formola

$$\frac{m-1}{k} n - p = \frac{m(m-1)}{k(k+1)} \nu - m\pi + m - 1 + \frac{z}{\binom{m-2}{k-1}}, \quad (2)$$

che lega il genere p e l'ordine n della varietà algebrica, su cui giace la serie irrazionale, coll'ordine m e col genere π della serie, coi numeri k e z , e coll'ordine ν della varietà ∞^1 di S_k individuata da tutti i gruppi della serie (*).

Da questa formola egli fece discendere, per il caso particolare di $k = r$, pel quale bisogna supporre $\nu = 0$, il seguente teorema, che è tuttora il più importante che per ora si conosca sulle serie irrazionali involutorie:

Allorquando sopra una varietà algebrica di genere p esiste una serie irrazionale involutoria di grado m e di genere π , il numero dei gruppi di $r + 1$ elementi, comuni a questa serie ed a una serie lineare g^n della varietà è in generale

$$z = \binom{m-2}{r-1} \left(\frac{m-1}{r} n - p + m\pi - m + 1 \right). \quad (3)$$

In particolare si ha:

Il numero delle coppie comuni ad una serie irrazionale involutoria ∞^1 di ordine m e di genere π , e a una serie lineare di ordine n anche essa ∞^1 , esistenti sopra una varietà algebrica ∞^1 di genere p è:

$$z = (m-1)(n-1) + m\pi - p. \quad (4)$$

Quest'ultima formola è stata anche ritrovata in altro modo dal sig. CASTEL-

(*) Vedi per queste formole la nota del sig. SEGRE, *Sulle varietà algebriche composte di una serie ∞^1 di spazii* (Rend. Acc. Lincei, serie 4.^a, vol. 3₂, pag. 149-153) e l'altra, *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (Id., pag. 3-6) nella quale esse sono trovate per un caso particolare.

NUOVO in una sua recente pubblicazione (*); nella quale ha fatto conoscere una notevole ma parziale estensione alle serie irrazionali involutorie del teorema di RIEMANN e ROCH che riguarda le serie lineari speciali; ed inoltre ha dato un bel teorema sulla disposizione che hanno i punti doppi di una $g^1_{m,\pi}$ esistente sopra una curva algebrica.

Scopo di questa Nota è di aggiungere ai teoremi suddetti alcune osservazioni intorno alla esistenza delle serie irrazionali involutorie sopra determinate varietà algebriche semplicemente infinite, che potrebbero valere ad agevolare la ricerca della determinazione e costruzione di tutte le serie irrazionali involutorie esistenti sopra una varietà di dato genere; e di mostrare la soluzione di un lato della questione riguardante il numero delle coppie comuni a due serie irrazionali involutorie esistenti sopra una varietà algebrica ∞^1 .

§ 1. Sulla esistenza delle serie irrazionali involutorie ∞^1 .

1. Se una serie irrazionale involutoria $\infty^1 g^1_{m,\pi}$ di ordine m e di genere $\pi > 0$ esiste sopra una varietà algebrica semplicemente infinita di genere p , essa determina su questa varietà una corrispondenza simmetrica di indice $m-1$; la quale, se la varietà algebrica è di moduli generali, può essere solamente una *corrispondenza generale* (*Werthigkeit-Correspondenz*) con *valenza* positiva o negativa, e se la varietà algebrica è di moduli particolari, può anche essere una *corrispondenza singolare* (**).

2. Limitiamoci per ora al caso che la corrispondenza sia generale ed indichiamone con γ la valenza. Applicando la formola di CAYLEY-BRILL-HURWITZ (***) , che dà il numero delle coincidenze di una corrispondenza di dati

(*) *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rend. Acc. Lincei, Serie 4.^a, vol. 7^o, 1891).

(**) GR. HURWITZ, *Ueber Algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprinzip*, § 2 (Math. Ann., Bd. 28, pag. 561-585, 1887). Traduco in *valenza* il motto *Werthigkeit*, che fu dapprima usato dal BRILL (nelle corrispondenze che vennero considerate dal CAYLEY e da lui) per indicare quanti fra i punti, che corrispondono ad un dato punto X , coincidono con esso; eppoi fu esteso in senso più generale dall' HURWITZ anche alle altre corrispondenze che possono esistere sopra gli enti algebrici generali nel loro genere. Tutte queste corrispondenze che l' HURWITZ chiama *Werthigkeit-Correspondenzen*, qui le chiamerò *corrispondenze generali*.

(***) *Il principio di corrispondenza esteso alle curve di genere p* fu dapprima enunciato dal CAYLEY (per quelle corrispondenze che sono determinate sulla curva mediante un sistema semplice di curve, o di un sistema formato di più sistemi semplici o multipli di

indici e di data valenza, il numero delle coincidenze di questa corrispondenza dovrebbe essere

$$2(m-1) + 2p\gamma.$$

Ma queste coincidenze, che sono precisamente i punti doppi della serie $g^1_{m,\pi}$, sono, per la formola (1),

$$2(m-1) + 2(p-m\pi),$$

dunque deve essere

$$p\gamma = p - m\pi,$$

cioè deve essere

$$1 - \frac{m\pi}{p},$$

un numero intero (positivo, negativo o nullo).

Evidentemente intero e positivo non può essere se $\pi > 0$: tenendo presente il modo come sono generate le corrispondenze con valenza positiva (cfr. HURWITZ, loc. cit., § 8) si ha il seguente teorema:

Sulle curve algebriche di genere p (di moduli generali o particolari) di uno S_r non esistono serie irrazionali involutorie semplicemente infinite, che possono essere segate da un sistema ∞^1 non lineare di varietà di dimensione $r-1$.

curve) nei Comptes Rendus, tom. 62, pag. 586-590, 1866 (*Note sur la correspondance de deux points sur une courbe*), nei Proceeding of the London Math. Soc., tom. 1, 1866 (*On the correspondance of Two Points on a Curve*), e nei Phil. Trans. of the r. Soc. of London, vol. 158₁, pag. 145-172, 1868 (*Second Memoir on the Curves which satisfy given conditions*); e fu dimostrato da lui algebricamente nelle due ultime Note solo per un caso particolare, cioè pel caso in cui la curva del sistema individuata dal punto avesse in quello un punto k -uplo, e confermato mediante numerose ricerche sulla classe, punti di flesso, tangenti doppie, punti sestatici delle curve, sul numero delle coniche di un sistema non lineare che toccano una curva data e sugli inviluppi. Questo principio fu poi dimostrato per le corrispondenze a valenza positiva per la prima volta algebricamente dal sig. BRILL nei Math. Ann., Bd. 6, pag. 33-65 (*Ueber Entsprechen von Punktsystem auf einer Curve*) e dallo stesso con forma più geometrica nei Math. Ann., Bd. 7, pag. 607; poi dal LINDEMANN, nel Journal di Crelle, vol. 84, pag. 301-304, per mezzo degli integrali abeliani in una lettera ad HERMITE; dal sig. SCHUBERT nel *Calcul ahzählenden Geometrie*, § 18 mediante la geometria enumerativa; dal sig. BOBEK nei Sitz. ber. der Wiener Akad., vol. 93; ed ultimamente dal sig. ZEUTHEN nei Math. Ann., Bd. 40, pag. 99-124, il quale ha pur considerato le corrispondenze con valenza negativa. Quegli che ha però dimostrato il principio nella sua massima generalità, per tutte le corrispondenze che si possono avere sopra un ente algebrico di moduli generali o particolari è il sig. HURWITZ (cfr. loc. cit.) che è ricorso per lo scopo alla funzione \mathfrak{S} dell'ente algebrico.

3. Può però il numero $1 - \frac{m\pi}{p}$ essere intero negativo o nullo, poichè l'essere $\frac{m\pi}{p} = 1, 2, 3, \dots$ non è in contraddizione con l'altra condizione di esistenza delle serie irrazionali

$$p > m\pi - m,$$

che si ottiene osservando che il numero y dei punti di diramazione di una serie irrazionale non può essere negativo.

Tenendo presente queste due condizioni, e ricordando che sulle varietà algebriche di moduli generali non possono esistere altre corrispondenze diverse da quelle qui considerate, possiamo concludere che:

Se sopra una varietà algebrica di genere p di moduli generali, esistono serie irrazionali involutorie di genere 1, queste debbono avere l'ordine eguale a kp ($k = 1, 2, 3, \dots$); e se esistono sopra la varietà serie irrazionali involutorie di genere $\pi > 1$, queste debbono avere l'ordine eguale a $\frac{p}{\pi}$ ().*

Ed in particolare,

Sulle varietà algebriche di moduli generali il cui genere è un numero primo non possono esistere altre serie irrazionali involutorie oltre quelle di genere 1.

4. I teoremi precedenti stabiliscono che le serie irrazionali involutorie che esistono sopra le varietà algebriche di moduli generali danno luogo esclusivamente a corrispondenze generali con valenza negativa, la quale è $= -1$, se il genere della serie è > 1 , e può essere in valore assoluto anche maggiore di 1 per le serie di genere 1. E questo ci permette di concludere un teorema importante per la ricerca e la costruzione effettiva delle serie esistenti sopra una varietà di dato genere, e che già trova riscontro nella costruzione delle *involuzioni fondamentali* (le tre serie $g^1_{2,1}$) delle curve ellittiche; esso è, per il teorema del § 9 della Memoria di HURWITZ, il seguente:

Le serie irrazionali involutorie esistenti sopra le curve algebriche di genere p di uno S_r di moduli generali devono essere costruibili in infiniti modi mediante due sistemi ∞^1 di varietà di dimensione $r - 1$.

5. Se si toglie la restrizione che la varietà algebrica sia di moduli generali, rimane solo la condizione

$$p > m(\pi - 1),$$

(*) È già noto che: *Sulle curve algebriche razionali non esistono serie ∞^1 irrazionali involutorie.*

e quindi si hanno i teoremi seguenti, che quantunque facili a dedursi, non è male avere sott'occhio:

Sopra le curve algebriche singolari di generi 1 o 2, non possono esistere serie irrazionali involutorie ∞^1 di genere > 1 ().*

Sopra le curve algebriche singolari di genere 3, oltre le serie ∞^1 irrazionali involutorie di genere 1 non può esservi che la serie $g^1_{2,2}$.

Sopra le curve algebriche singolari di genere 4, non esistono serie irrazionali involutorie ∞^1 di genere > 2 , e del genere 2 possono esservi solamente le serie $g^1_{2,2}$, $g^1_{3,2}$.

Sopra le curve algebriche singolari di genere 5, non possono esservi serie ∞^1 irrazionali involutorie di genere > 3 ; del genere 2 possono esservi solamente le serie $g^1_{2,2}$, $g^1_{3,2}$, $g^1_{4,2}$; e del genere 3 solamente la $g^1_{2,3}$.

Ecc. ecc.

6. Nei numeri precedenti abbiamo assegnato un limite superiore del genere delle serie irrazionali involutorie che possono esistere sulle varietà algebriche di dato genere e di moduli singolari; un limite inferiore del genere delle stesse serie esistenti sopra varietà singolari può aversi dal seguente diverso concetto.

Perchè nella formola (3) il numero z sia positivo o nullo deve aversi

$$p \leq \frac{m-1}{r}(n-r) + m\pi;$$

da ciò si deduce che se

$$p > \frac{m-1}{r}(n-r) + m\pi,$$

ogni gruppo della serie irrazionale involutoria $g^1_{m,\pi}$ deve contenere un gruppo di $r+1$ punti della serie lineare g^r_n , perchè è assurdo che si possa avere $z < 0$. Nella supposizione che sia $n=m=2$, $r=1$, si ha il seguente teorema:

Sopra le curve iperellittiche di genere p non può esistere una serie involutoria irrazionale ∞^1 di ordine 2 e di genere $\pi < \frac{p-1}{2}$;

altrimenti la g^1_2 e la $g^1_{2,\pi}$ coinciderebbero.

Come caso particolare dell'inverso di questo teorema, quando $\pi=0$, si ritrova il noto teorema:

Sopra le curve di genere > 1 non possono esistere due serie lineari ∞^1 di coppie di punti.

(*) È facile vedere sulle curve ellittiche generali o singolari la esistenza di altre serie (oltre le $g^1_{2,1}$) di genere 1 e di ordine > 2 .

Se invece si pone $n = m = 3$, $r = 1$, si ha quest'altro teorema:

Sopra le curve *trigonali* (*) (curve singolari che contengono una g^1_3 senza essere iperellittiche) di genere p non può esistere una serie involutoria irrazionale ∞^1 di ordine 3, e di genere $\pi < \frac{p-4}{3}$;

dal cui inverso, per $\pi = 0$, si ha il noto teorema:

Sopra le curve di genere > 4 non possono esistere due serie lineari di terne di punti (¹*).

E più in generale:

Sopra le curve singolari nel loro genere, che hanno come serie minima una g^1_k , non può esistere una serie irrazionale involutoria ∞^1 di ordine k , e di genere $\pi < \frac{p - (k-1)^2}{k}$.

§ 2. Sulle coppie comuni a due serie irrazionali involutorie ∞^1 .

7. Sopra una varietà algebrica $\infty^1 C_p$ di genere p si supponga che esistano due serie irrazionali involutorie ∞^1 , $g^1_{m,\pi}$, $g^1_{m',\pi'}$, la prima di ordine m e di genere π , la seconda di ordine m' , e di genere π' , e tali che i loro gruppi generici non abbiano due punti comuni; siano inoltre Γ_π , $\Gamma_{\pi'}$ due varietà algebriche, e per fissare le idee due involuppi piani, rispettivamente di genere π , π' , le cui rette possano riferirsi univocamente ai gruppi delle serie $g^1_{m,\pi}$, $g^1_{m',\pi'}$ (***)). Se consideriamo come omologhe due rette di questi involuppi che corrispondono a due gruppi delle serie che hanno in comune un punto della varietà C_p fra le rette dei due involuppi resta stabilita una corrispondenza (m', m) (****).

(*) Il sig. KÜPPER chiama *trigonali* quelle curve che contengono un'unica g^1_3 speciale [Prag. Abh. (7) III]; ed il sig. BOBEK invece chiama *Dreischaaicurven* quelle che contengono almeno una g^1_3 speciale (Sitz. ber. der Wiener Akad., vol. 98, pag. 142-173).

(**) Cfr. le Noti su citate dei sig.¹ KÜPPER e BOBEK.

(***) Ognuno dei due involuppi deve avere non solo lo stesso genere della serie cui si riferisce, ma deve avere anche gli stessi moduli di quella.

(****) Nell'ipotesi in cui i due involuppi Γ_π , $\Gamma_{\pi'}$ appartengano allo stesso piano, i punti d'intersezione delle rette omologhe di questa corrispondenza determineranno nel piano una curva C' , riferita univocamente alla curva C_p , quindi anche di genere p , sulla quale i due involuppi determineranno due serie ∞^1 di gruppi di punti, che sono le immagini delle due serie date su C_p . Quindi si ha il teorema:

Se una varietà ∞^1 di genere p contiene due serie irrazionali involutorie ∞^1 , $g^1_{m,\pi}$,

Stabiliamo ora fra le rette dell'involuppo Γ_π una corrispondenza in cui si considerino come omologhe due rette che corrispondono ad una medesima retta dell'involuppo Γ_π . Questa corrispondenza sarà simmetrica, e siccome ad ogni retta di Γ_π corrispondono $m(m' - 1)$ rette distinte da essa, oltre alla retta stessa contata m volte, essa ha per indice $m(m' - 1)$.

Vedremo più innanzi che, nel caso che una delle due serie sia razionale o che esse siano entrambi razionali, questa corrispondenza si comporta per la ricerca che stiam per fare come una corrispondenza generale di valenza positiva m . Per tal motivo, e per la gran difficoltà della questione generale, ci limiteremo per ora al caso (e vedremo che questo avviene) che la corrispondenza suddetta sia appunto una corrispondenza con valenza positiva m , anche quando le due serie siano entrambe irrazionali. In tal caso il numero delle coincidenze della corrispondenza è

$$2m(m' - 1) + 2m\pi.$$

Una coincidenza in questa corrispondenza può avvenire o perchè la retta di Γ_π corrisponde ad una retta di $\Gamma_{\pi'}$ immagine di un gruppo di diramazione della serie $g^{1_{m',\pi'}}$ o perchè corrisponde ad un gruppo della serie $g^{1_{m,\pi}}$ che contiene una coppia di punti di un gruppo della serie $g^{1_{m,\pi}}$. Quindi se indichiamo con y' il numero dei punti di diramazione della serie $g^{1_{m',\pi'}}$, e con z il numero delle coppie comuni alle due serie $g^{1_{m,\pi}}$, $g^{1_{m',\pi'}}$, si ha la relazione

$$2m(m' - 1) + 2m\pi = y' + 2z.$$

Sostituendo ad y' il valore dato dalla formola (1)

$$y' = 2(p - 1) - 2m'(\pi' - 1),$$

si deduce che

$$z = (m - 1)(m' - 1) + m\pi + m'\pi' - p. \quad (5)$$

$g^{1_{m',\pi'}}$, essa può riferirsi univocamente ad una curva piana C'_p generata da due involuppi piani di generi π , π' , riferiti fra loro in corrispondenza (m', m) , e sulla quale i detti involuppi determinano le due serie $g^{1_{m,\pi}}$, $g^{1_{m',\pi'}}$.

Qualora poi i gruppi della prima serie $g^{1_{m,\pi}}$ si riferissero agli S_i di una varietà di $\infty^1 S_i$ di genere π , ed i gruppi della serie $g^{1_{m',\pi'}}$ ad una varietà di $\infty^1 S_{r-i}$ di genere π' , appartenenti entrambi ad uno spazio S_r ($r > 2$), si avrebbe il teorema seguente più generale:

Se una varietà ∞^1 di genere p contiene due serie irrazionali involutorie ∞^1 , $g^{1_{m,\pi}}$, $g^{1_{m',\pi'}}$, essa può riferirsi univocamente ai punti di una curva C'_p di uno spazio S_r (di dimensione sufficientemente elevata) generata dalle intersezioni degli elementi corrispondenti di due varietà, l'una di $\infty^1 S_i$ di genere π , l'altra di $\infty^1 S_{r-i}$ di genere π' , in corrispondenza (m', m) fra loro, e sulla quale queste varietà segano due serie corrispondenti alle serie $g^{1_{m,\pi}}$, $g^{1_{m',\pi'}}$.

Se la serie $g^1_{m,\pi}$ si suppone di genere zero (*), si ritrova come caso particolare la formola (4), la quale essendo vera sempre dà una prova di quanto abbiamo affermato sopra.

Infine che il caso a cui ci siamo limitati esista effettivamente, si può vedere da ciò; che se supponiamo che C sia una curva semplice, intersezione completa di due superficie rigate l'una $\Gamma_{\pi^{m'}}$ di genere π e di ordine m' , l'altra Γ_{π^m} di genere π' e di ordine m , le generatrici della prima segano sulla C una $g^1_{m,\pi}$, e quella della seconda una $g^1_{m',\pi'}$, che in generale non avranno coppie comuni, e che soddisfano alla (5). Poichè un teorema del sig. NOETHER (**), ci fa conoscere che fra il genere p , e l'ordine mm' della curva $C_p^{mm'}$ e i generi e gli ordini delle rigate vi è la relazione

$$2p - 2 = mm'(m + m' - 4) - 2(\delta m' + \delta' m),$$

se con δ, δ' si indicano gli ordini delle curve doppie di $\Gamma_{\pi^m}, \Gamma_{\pi^{m'}}$. Sostituendo a δ, δ' i loro valori in funzione dell'ordine e del genere, si trova precisamente

$$p = (m - 1)(m' - 1) + m\pi + m'\pi'.$$

Napoli, giugno 1892.

(*) Supponendo inoltre anche $\pi = 0$, si ritrova la formola di RIEMANN riguardante le funzioni razionali esistenti sull'ente algebrico di genere p (*Theorie der Abel'schen Funktionen*; Journal di Crelle, Bd. 54, oppure *Gesammelte Werke*).

(**) Cfr. Math. Ann., Bd. 8.

Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane.

(Pubblicate da C. SEGRE, a Torino.)

Fra gli scritti postumi di Ettore Caporali che furon messi alla luce nel volume delle sue *Memorie di Geometria* (Napoli, Pellerano, 1888) vi sono dei frammenti (pag. 344 e seguenti) *sulla teoria delle curve piane del quarto ordine* il cui studio può essere aiutato da alcune notizie che il Caporali stesso mi aveva dato delle sue ricerche in due lettere dell'estate 1885. Era mia intenzione, appena comparve il detto volume, di pubblicare quelle notizie in un lavoro in cui avrei trattato delle quartiche piane appunto nell'ordine d'idee del Caporali e tenendo anche conto di alcune importanti e un po' più antiche ricerche del sig. REYE le quali seguono pure un analogo indirizzo. Ma essendo sempre stato distratto dall'eseguire questo disegno, pubblico ora, con la speranza d'invogliare ed aiutare altri a compiere un tal lavoro, le due lettere del Caporali, od almeno quelle parti di esse che presentano un interesse scientifico, accompagnandole solo con brevi commenti (*).

La 1.^a lettera, datata da *Torre del Greco 11 agosto 1885* dice:

... « Ella mi domandò una volta di certe ricerche sulle curve del 4.^o ordine che io avevo intraprese (**). Ci tenevo assai a quelle povere ricerche, ma sono da 8 o 9 mesi interrotte affatto. Eccone il concetto.

« Siano dati un sistema lineare S di coniche, di k dimensioni, e, in questo, un sistema quadratico Σ di $k - 1$ dimensioni. Fra le coniche di S e i sistemi lineari di $k - 1$ dimensioni (pure di S) si può stabilire la polarità rispetto a Σ . Preso un punto P qualunque del piano, per esso passa un sistema ∞^{k-1} di coniche di S , al quale corrisponde per reciprocità ri-

(*) Il sig. WIRTINGER nelle sue *Untersuchungen über Abel'sche Functionen vom Geschlechte 3* comparse ora nei *Math. Annalen* (tom. 40, pag. 261) si riferisce ripetutamente ai frammenti del Caporali sulle quartiche piane ed adopera per lo studio di queste delle considerazioni iperspaziali identiche in sostanza a quelle che accennerò qui appresso.

(**) Di queste ricerche egli m'aveva parlato brevemente a Torino un anno avanti.

« rispetto a Σ una conica C (di S). Così ad ogni punto P è congiunta una
 « conica C . Il luogo dei punti pei quali passano le coniche congiunte è una
 « curva del 4.^o ordine f . Si hanno così varie generazioni della curva generale
 « del 4.^o ordine, nelle quali si possono far rientrare molte di quelle conosciute,
 « per es. quella per fasci proiettivi di coniche. La generazione suindicata si può
 « enunciare più semplicemente in certi casi. Così, per $k = 2$ la f non è altro
 « che l'involuppo del sistema Σ . Per $k = 3$ il sistema Σ contiene due serie ∞^1
 « di fasci di coniche; e la f è simultaneamente il luogo dei punti base dei
 « fasci delle due serie: due fasci della stessa serie sono proiettivi e la generano.

« Tutte le ricerche conosciute intorno alla curva biquadratica rientrano
 « in quest'ordine d'idee e vi pigliano sistema. Così, quando la curva si può
 « rappresentare mediante la somma di $k + 1$ biquadrati (ossia possiede ∞^{4-k}
 « coniche apolari) fra le infinite generazioni suddette ve n'è una nella quale
 « la conica congiunta ad un punto è la sua conica polare rispetto alla f stessa.
 « Io ho studiato particolarmente il caso di $k = 3$, nel quale la f possiede una
 « schiera di coniche apolari e il covariante S si riduce a quattro rette. Vi
 « sono bellissime proprietà. Per es. la curva è generata da due serie ∞^1 di
 « quadrangoli, i cui lati segano f armonicamente e i cui vertici descrivono
 « la hessiana di f .

« Se inoltre l'invariante cubico di f si annulla, allora la curva diviene
 « interessantissima. I suoi flessi si dividono in due gruppi di 12 punti cia-
 « scuno e ogni gruppo è formato dai vertici di quattro trilateri sizigetici. È
 « la curva della quale accennai l'esistenza due anni fa in una breve Nota e
 « della quale ho poi trovate altre interessanti proprietà.

« Ma, come le ho detto, ho da molto tempo interrotto. Inutile dire che
 « mi giovavo moltissimo delle considerazioni sugli spazi di 3, 4, 5 dimensioni
 « riferiti proiettivamente ai sistemi lineari di coniche. Avevo anche pensato
 « un po' allo studio analogo dei sistemi quadratici di quadriche, per dedurne
 « una classificazione proiettiva delle superficie del 4.^o ordine . . . »

Quanto allo studio qui accennato dei sistemi quadratici di quadriche, e delle superficie del 4.^o ordine in relazione con essi, esso era già stato avviato (cosa che pare non fosse nota al CAPORALI) dal sig. REYE, specialmente nella Memoria, datata dal 1876, *Ueber die reciproke Verwandtschaft von F^2 -Systemen und Φ^2 -Gewebe und die quadratischen F^2 -Systeme achter Stufe* (Journal für Math., tom. 82, pag. 173); lavoro ricco di considerazioni nuove e feconde, da collocarsi, insieme con altri precedenti dello stesso Autore, fra i moderni

lavori di geometria proiettiva a più dimensioni: elementi o punti delle varietà di cui esso tratta essendo le quadriche (dello spazio ordinario).

Appunto in considerazioni della stessa natura si trova la ragione dei principali fatti noti relativi alle quartiche piane, e di quelli annunziati dal CAPORALI. Invero poichè essi si riferiscono quasi sempre a relazioni tra una quartica e delle coniche (in particolare delle coppie di rette), è naturale di ricorrere per studiarli a quella superficie omaloide normale del 4.^o ordine F^4_2 dello spazio a cinque dimensioni S_5 che è rappresentata sul piano π dalle ∞^5 coniche di questo (*). Indicando con x_1, x_2, x_3 le coordinate di punti in π , e con X_{ik} (ove $i, k = 1, 2, 3$ e $X_{ik} = X_{ki}$) le sei coordinate in S_5 , la F^4_2 si può intendere riferita al piano π mediante le formole: $X_{ik} = x_i x_k$. Ciò posto l'equazione di una quartica $f(x) \equiv a^4 x = 0$ di π si potrà scrivere (in infiniti modi) come un'equazione quadratica tra le X ; e quindi la quartica f avrà per immagine su F^4_2 una curva C^3 intersezione di questa superficie con una varietà quadratica M^2_4 , e quindi con ∞^6 , poichè F^4_2 sta su $\infty^5 M^2_4$. La polarità rispetto ad una qualunque di quelle ∞^6 varietà quadratiche dà subito origine a quella relazione fra punti di π e coniche *congiunte* (rispetto ad un sistema quadratico Σ) di cui parla il CAPORALI, e da cui trae un modo di generazione della quartica f . Se poi quella polarità *degenera*, pel fatto che la M^2_4 abbia un punto, o retta, o piano, doppio, la generazione si semplifica: corrispondentemente al fatto che il sistema quadratico Σ di coniche si riduce ad uno giacente in un sistema lineare S di 4, 3, 2 dimensioni, rappresentato dagli iperpiani passanti pel punto, retta o piano doppio della M^2_4 . Nell'ultimo caso, gli ∞^1 iperpiani tangenti a questa varietà quadratica lungo i suoi ∞^1 spazi S_3 generatori toccano C^3 nelle quaterne di punti d'incontro di F^4_2 con questi S_3 ; e quindi hanno per immagini su π delle coniche quadritangenti ad f : si ottiene cioè la generazione della quartica come involuppo di una ∞^1 quadratica di coniche. Nel secondo caso invece la M^2_4 contiene *due* schiere di ∞^1 spazi S_3 generatori analoghe a quelle delle generatrici di una quadrica ordinaria (sezione della M^2_4 con un S_3 che non incontri la retta doppia); ed in corrispondenza si avranno su f due schiere di ∞^1 quaterne di punti, sì che due quaterne qualunque di schiere diverse stanno sempre in una stessa conica (sono *residue*): donde la generazione della quartica mediante fasci proiettivi di coniche, ecc.

(*) VERONESE, *La superficie omaloide normale ecc.*, Mem. Acc. Lincei (3) XIX, 1884; SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano ecc.*, Atti Acc. Torino, XX, 1885.

Tra le $\infty^6 M^2_4$ passanti per la C^3 ve n'è sempre una distinta da tutte le altre, la quale analiticamente è data dall'equazione $a^2_x a^2_y = 0$, quando vi si ponga $x_i x_k = y_i y_k = X_{ik}$, e geometricamente è caratterizzata dall'essere apolare ed armonica (come luogo) a tutte le varietà di 2.^a classe iscritte nella Φ^4_2 che è involuppo degl'iperpiani tangenti a F^4_2 lungo coniche: o, come si dice più brevemente, dall'essere *apolare alla Φ^4_2* (*). La polarità rispetto ad essa si rispecchia sul piano π nella corrispondenza di polarità — fra curve di 2.^o ordine e curve di 2.^a classe, ed in particolare fra punti e coniche — rispetto alla quartica f , che vien determinata dall'equazione $a^2_x a^2_y = 0$. Ad una conica apolare rispetto alla quartica corrisponde un punto doppio per la M^2_4 ; e così questa acquista una retta doppia, se la quartica ammette una schiera di coniche apolari; ecc., ecc.

Avendo io comunicato al CAPORALI, forse con qualche maggior sviluppo, questo modo con cui vedevo le cose da lui enunciate, — metodo che non è del resto se non un'applicazione particolare di un procedimento molto generale, utile per lo studio di enti svariatisimi, — egli mi rispose in un'altra lettera da *Torre del Greco, 13 settembre 1885* quanto segue.

« . . . Ciò che Ella mi scrive intorno ai miei studi sulle curve del 4.^o ordine è interessante e dimostra che Ella ha immediatamente penetrato lo spirito di quelle ricerche. Per quanto poco avanzate, esse hanno una storia complicata e in relazione con diverse cause estranee alla scienza che m'impediscono da tre anni di attendere allo studio con quella regolarità e quella perseveranza che sole permettono di cavarne buoni frutti.

« Tre o quattro anni fa, studiando le memorie algebriche intorno alle curve piane del 3.^o ordine, mi accorsi per caso che il combinante $N = (a\alpha u) a^2_x a^2_x$ (dove $a^3_x = 0$, $\alpha^3_x = 0$ sono le equazioni d'una cubica e della sua hessiana) rappresenta, nelle variabili x , una curva del 4.^o ordine che ha per flessi i 12 vertici dei trilateri appartenenti al fascio $a^3_x + \lambda \alpha^3_x = 0$. L'esistenza di una rete (i parametri essendo le u) di curve del 4.^o ordine con 12 flessi in comune riusciva per me nuova ed è senza dubbio interessante, non è vero? Dimodochè mi posi ad esaminare meglio quella curva e riconobbi che gli altri 12 flessi formavano una configurazione perfettamente analoga dando luogo ad un secondo fascio sizigetico. Pel momento la cosa rimase lì: ma più tardi riportai di nuovo la mia attenzione su quel

(*) Per tal modo le ∞^{14} quartiche del piano π sono rappresentate *unicamente* dalle ∞^{14} varietà M^2_4 di S_5 apolari a Φ^4_2 .

« fatto nuovo e notevole, che vi siano due fasci sizigetici i quali danno lo stesso combinante N . E, mentre al principio m'ero servito d'equazioni canoniche, volli intraprendere i calcoli simbolici necessari a dimostrare quella proprietà e a dedurre dall'uno dei due fasci l'altro. Feci all'Accademia la comunicazione provvisoria *Sopra una certa curva del 4.^o ordine* (*) e mi posi al lavoro. Mi trastullai per un pezzo in laboriose calcolazioni (del resto interessanti), ma ad un certo punto fui deviato momentaneamente dagli studi ed ogni cosa rimase ed è rimasta interrotta.

« L'anno scorso, senza riprendere i calcoli, tornai sulle considerazioni geometriche e m'accorsi che la curva possedeva una schiera di coniche apolari, senza però essere la più generale di questa specie. Queste curve, è facile vederlo, possono studiarsi con successo nel piano rappresentativo della superficie romana di STEINER. Fu allora che la ricerca cominciò ad allargarsi sino a che gradatamente ha preso l'aspetto attuale. Nelle vacanze dell'anno scorso cominciai dunque a giovarmi delle considerazioni sugli spazi di più dimensioni, colle quali ho antica familiarità. Rifecei le proprietà delle tangenti doppie, specialmente per le curve dotate di punti singolari: lavoro piuttosto minuto. Iniziai anche lo studio dei flessi colla ricerca dei sistemi di coniche biosculatrici [è chiaro che le coniche di un sistema riescono biosculatrici al loro inviluppo, quando sono rappresentate dai punti d'una curva le cui tangenti incontrano F^4_2 (**)]. Dovetti però presto sospendere per malattie di famiglia e non ho più ripreso.

« Quando Ella pubblicò la sua memoria sulla geometria delle coniche, vidi immediatamente il partito che si poteva trarre dall'uso sistematico di quel modo di rappresentazione e che mi è confermato dalla sua... lettera: non ripresi però, nè potrò subito riprendere le ricerche, benchè precisamente ora, avendo acquistata tutta la loro generalità, siano nello stadio più interessante. Lo farò però a novembre, almeno spero.

(***) « Per cambiare discorso, le parlerò d'un'altra mia piccola Nota incompiuta che potrà pure interessarla. È notissimo nello spazio ordinario il

(*) Rendic. Acc. Napoli, dicembre 1882.

(**) Ciò non è pienamente esatto. Quando la tangente in un punto alla curva rappresentante di un sistema di coniche incontra F^4_2 , la conica corrispondente a quel punto ha due contatti quadripunti coll'inviluppo...

(***) Quanto segue non riguarda più le quartiche piane, ma lo riporto qui ugualmente perchè parmi possa pure interessare: trattandosi di una questione importantissima, che, con quel grado di generalità, non si trova nel volume di memorie del CAPORALI, nè di altri è stata finora risolta.

« problema di determinare le singolarità ordinarie d'una curva intersezione
 « parziale di due superficie quando si conoscano quelle della residuale inter-
 « sezione: e l'altro susseguente di trovare le intersezioni di tre superficie
 « assorbite da una curva comune. Le notissime soluzioni che se ne leggono
 « in SALMON e in CREMONA si estendono facilmente in certi casi allo spazio
 « di n dimensioni: quando cioè si tratta della intersezione parziale di più va-
 « rietà di $n - 1$ dimensioni, definite mediante altrettante equazioni generali
 « nel loro grado. Il VERONESE ha trattato il caso più ovvio in cui questa in-
 « tersezione è una curva. Ma quando le varietà che si segano hanno meno
 « di $n - 1$ dimensioni e sono esse stesse intersezioni parziali, il metodo di
 « SALMON non si può più seguire. Si hanno i primi esempi di questa difficoltà
 « nello spazio di 4 dimensioni in questi due problemi: 1.° Quando la curva
 « comune ad una varietà e ad una superficie si spezza in due parti, date le
 « singolarità dell'una trovare quelle dell'altra. 2.° Trovare i punti d'interse-
 « zione di due superficie assorbite da una curva comune.

« Ora io sono pervenuto ad una formola generalissima la quale, quando
 « sia dato un numero qualunque di varietà ad un numero qualunque di di-
 « mensioni, fornisce le singolarità fondamentali della varietà ad esse comune,
 « se è semplice; ovvero le relazioni fra le singolarità delle due parti, se essa
 « si spezza. Le comunicherei addirittura questa formola, che può essere utile
 « pel gran numero di casi che abbraccia, se qui in campagna avessi le mie
 « note o se la memoria mi aiutasse. Essa è complicata, perchè non solo con-
 « tiene gli ordini e le serie di ranghi delle diverse varietà (le quali possono
 « anche possedere singolarità superiori) ma altri numeri il cui significato offre
 « molto interesse. Una varietà può essere contenuta in un'altra *in diversi*
 « modi, ognuno dei quali è caratterizzato dai valori di certi numeri, valori
 « che bisogna conoscere per poter risolvere parecchi problemi. Per darle un
 « esempio, nello spazio ordinario, quando si dice che una curva giace sopra
 « una superficie dotata di curva doppia, bisogna dare il numero dei punti che
 « la curva ha in comune colla curva doppia della superficie, numero che,
 « entro certi limiti, può variare per la stessa curva e la stessa superficie.
 « Ciò posto, Ella comprenderà facilmente come per una superficie, anche ge-
 « nerale, d'uno spazio di più di 3 dimensioni, ci sia un numero analogo,
 « poichè essa si proietta nello spazio ordinario in una superficie con curva
 « doppia. La cosa naturalmente si complica per le altre varietà e la fatica
 « maggiore l'ho fatta per stabilire questi concetti. »

Torino, agosto 1892.

Delle funzioni regolari in un'area connessa qualsivoglia a distanza finita.

(Di GIULIO ASCOLI, a Milano.)

1. **D**irò regolare una funzione $f(x, y)$ dei punti di un'area piana connessa ad uno strato A posta a distanza finita, quando la superficie A possa dividersi in un numero limitato di pezzi B_t ($t = 1, 2, \dots, m; m \geq 1$), in ciascuno dei quali la $f(x, y)$ si comporti in una delle quattro note maniere (*). Ad una tale funzione si accennerà col simbolo (I, II, III, IV). Suppongo poi tra loro sconnesse due aree B_σ e B_τ ($\sigma \geq \tau$), nelle quali la data funzione è della stessa specie, laddove l'ente A cade nel primo quadrante e la $f(x, y)$ non raggiunge dei valori nulli o negativi. Mediante una scelta opportuna degli assi si può soddisfare alle due ultime condizioni.

Consideriamo ora il modo di comportarsi della funzione data da ambo le parti del ramo primitivo e non decrescente $L - \varepsilon$ (**), essendo L un elemento che separa le due aree B_σ e B_τ ($\sigma \geq \tau$), mentre non si può assegnare un ramo primitivo, di cui l'ente L sia una parte, il quale appartenga in pari tempo alle due linee C_{B_σ} e C_{B_τ} . Con la notazione $L - \varepsilon$ indico, come al solito, la linea L , quando si trascuri ad ognuno dei suoi estremi un tratto piccolo quanto si vuole. L'ente L potrà anche essere un tratto di retta parallelo ad uno dei due assi, come è manifesto; però in seguito si accennerà in modo speciale a questo fatto.

È subito visto che la linea L non limiterà due aree in ognuna delle quali la funzione studiata è di specie pari od impari, mentre per ogni punto h

(*) Vedi tutta la mia Memoria inserita nel volume precedente di questi Annali.

(**) Vedi il § 1 del n.º 5 della stessa Memoria.

dell'ente $L - 0$ esce una linea $f(x, y) = C$, la quale, considerata nelle vicinanze del punto h e da ambo le parti, si proietta semplicemente sopra uno degli assi coordinati. Ciò si verifica, perchè nell'ipotesi opposta la linea $f(x, y) = C$ uscente dall'elemento h sarebbe da una parte e dall'altra della curva $L - \varepsilon$ ognora crescente oppure decrescente all'aumentare della ascissa, laddove ogni elemento $f(x, y) = C$ si proietta in modo semplice sopra uno degli assi ed in questo caso quindi anche sull'altro; la $f(x, y)$ sarebbe di conseguenza della stessa specie in B_ε ed in B_τ , la qualcosa è contraria all'ipotesi.

Se di più si ammette che la funzione $f(x, y)$ sia crescente dal primo al secondo estremo della linea L , daremo origine al quadro in appresso I), di cui il significato è palese, purchè si abbiano presenti le osservazioni che seguono.

Con la notazione $+L$ indicherò un ramo primitivo ognora crescente con l'ascissa, laddove il simbolo $-L$ accenna pure ad un elemento primitivo, il quale però decresce all'aumentare della variabile x .

Il segno $+L^{(+)}$ dirà che lungo l'ente $+L$ è fissata una successione continua di valori ognora crescenti insieme all'ascissa x ed analogo significato va attribuito alla notazione $-L^{(+)}$. Con la scrittura II, $+L^{(+)}$, I accenno poi al fatto che alla destra dell'ente $+L^{(+)}$, percorso in guisa, che la funzione $f(x, y)$ aumenti, la espressione stessa $f(x, y)$ è di prima specie e di seconda alla sinistra. Ed ora parmi facile l'intelligenza del quadro in discorso.

$$\begin{array}{l} \text{I)} \quad \quad \quad 1) \text{ II, } +L^{(+)}, \text{ I}; \quad \quad 2) \text{ I, } +L^{(+)}, \text{ II}; \\ \quad \quad \quad \quad 3) \text{ I, } +L^{(+)}, \text{ IV}; \quad \quad 4) \text{ IV, } +L^{(+)}, \text{ I.} \end{array}$$

Chiamo B_ε quella parte dell'area A in cui la $f(x, y)$ è di una sola specie e che giace alla destra dell'elemento $+L$, percorso in guisa, che l'ascissa cresca. L'ente B_τ cada invece alla sinistra del ramo primitivo $+L$.

Nella figura 1) la funzione $f(x, y)$ è di seconda specie in B_τ e di prima in B_ε , e da ogni punto dell'arco $L - 0$ esce una linea $f(x, y) = C$, che ha ivi un massimo rispetto all'asse X , sopra il quale si proietta semplicemente. Nel disegno successivo l'insieme $f(x, y)$ che passa per un elemento della curva $L - \varepsilon$ ha in quest'ultimo un minimo relativamente alla retta $y = 0$, su cui si specchia in maniera univoca. Se poi la $f(x, y)$ è di prima specie in B_τ e di quarta in B_ε , da ogni punto della curva $L - \varepsilon$ esce una linea $f(x, y) = C$, la quale ha un massimo rispetto alla retta $x = 0$, sulla quale si proietta in modo semplice, mentre si verifica l'opposto, se la $f(x, y)$ è di quarta specie in B_τ e di prima in B_ε .

La funzione contemplata non può essere di terza specie da una parte dell'ente $L - 0$, perchè essa è crescente lungo $+L$; il quadro I è dunque completo nella ipotesi che la linea $f(x, y) = C$ si progetti in modo semplice sopra uno degli assi nelle vicinanze del punto in cui interseca l'ente L .

Se l'elemento L fosse un tratto parallelo all'asse Y non potrebbero verificarsi che gli eventi 1) e 2), e gli altri due soltanto quando l'intervallo fosse parallelo alla retta $y = 0$.

Sia ora la funzione $f(x, y)$ decrescente lungo il ramo $+L$, laddove ogni linea $f(x, y)$, la quale contiene un punto dell'elemento $L - 0$ ha un'immagine semplice sopra uno degli assi coordinati. In tale ipotesi daremo origine al quadro:

$$\begin{array}{ll} \text{II)} & \begin{array}{ll} 1) \text{ III, } +L^{(-)}, \text{ II;} & 2) \text{ II, } +L^{(-)}, \text{ III;} \\ 3) \text{ IV, } +L^{(-)}, \text{ III,} & 4) \text{ III, } +L^{(-)}, \text{ IV.} \end{array} \end{array}$$

Nelle figure 1) e 2) l'elemento L potrà venir sostituito da un intervallo di retta parallelo all'asse X , all'altro nelle ultime due.

È superfluo poi l'avvertire che nella figura 1) la $f(x, y)$ è di seconda specie alla destra dell'ente $+L^{(-)}$ percorso in guisa, che la funzione data cresca lungo il medesimo.

Quando si supponga la $f(x, y)$ costante lungo $+L$, la qual cosa si esprimerà con la notazione $+\overline{L}$, avremo lo specchio:

$$\text{III)} \quad \begin{array}{ll} 1) \text{ II, } +\overline{L}, \text{ IV;} & 2) \text{ IV, } +\overline{L}, \text{ II.} \end{array}$$

È chiaro che in questo quadro l'ente $+L$ non può ridursi ad un tratto parallelo ad uno degli assi coordinati. Nella prima figura dello stesso specchio ogni punto della linea $L - 0$ è un minimo della espressione $f(x, y)$; nella seconda un massimo. Si suppone che nel disegno 1) la $f(x, y)$ sia di quarta specie alla destra dell'ente L percorso in guisa che l'ascissa cresca.

2. Sia adesso la linea L sempre decrescente e la funzione $f(x, y)$ cresca lungo la medesima all'aumentare dell'ascissa. In tale ipotesi le cose stanno come lo indica la tabella:

$$\begin{array}{ll} \text{IV)} & \begin{array}{ll} 1) \text{ I, } -L^{(+)}, \text{ IV;} & 2) \text{ IV, } -L^{(+)}, \text{ I;} \\ 3) \text{ IV, } -L^{(+)}, \text{ III,} & 4) \text{ III, } -L^{(+)}, \text{ IV.} \end{array} \end{array}$$

Nei due primi disegni il ramo L potrebbe venir surrogato da un segmento parallelo all'asse X , negli altri da un tratto normale a quest'ultimo.

Quando poi la $f(x, y)$ decresce lungo $-L$ aumentando l'ascissa, avremo le figure dello specchio:

$$\begin{array}{ll} \text{V)} & \begin{array}{ll} {}^1) \text{ II, } -L^{(-)}, \text{ I;} & {}^2) \text{ I, } -L^{(-)}, \text{ II;} \\ {}^3) \text{ III, } -L^{(-)}, \text{ II;} & {}^4) \text{ II, } -L^{(-)}, \text{ III.} \end{array} \end{array}$$

Nel caso che la funzione contemplata fosse costante nell'ente $-L$, andrebbero considerati i due disegni che seguono, nel primo dei quali la $f(x, y)$ è di prima specie in B_r . È chiaro quindi che nella figura 1) la nostra funzione avrà un minimo in ogni punto dell'arco $L - 0$, laddove nell'altra essa avrà un massimo,

$$\text{VI)} \quad \begin{array}{ll} {}^1) \text{ I, } -\bar{L}, \text{ III;} & \text{III, } -\bar{L}, \text{ I.} \end{array}$$

Osservando con attenzione le tabelle I), II), IV), V) e la figura in appresso, troveremo una regola assai semplice per compendiare i risultati ottenuti

$$\begin{array}{ccc} - +, & + Y, & + + \\ - X, & 0, & + X \\ - -, & - Y, & + -. \end{array}$$

Se io percorro il verso positivo dell'asse Y , ho alla destra il primo quadrante ed alla sinistra il secondo, ed analoghe osservazioni si possono fare rispetto alle altre direzioni degli assi.

Ciò premesso, se il ramo L separa un'area in cui la f è di prima specie da un'altra nella quale è di seconda e se la prima è alla sua destra, quando si percorra in guisa, che la $f(x, y)$ aumenti, per ogni punto della linea $L - \varepsilon$ esce una varietà $f(x, y) = C$, la quale si proietta semplicemente sull'asse X ed ha in esso un massimo ossia accenna al verso positivo dell'asse Y (*) [I), 1); V), 1)].

Nel caso contemplato diremo che la $f(x, y)$ si comporta in modo naturale dalle due bande della linea $L - 0$.

Se all'incontro il ramo L limitasse un elemento in cui la $f(x, y)$ è di prima specie da un altro nel quale è di seconda, e se il primo si trovasse alla sinistra della varietà L percorsa in guisa, che la funzione $f(x, y)$ cresca, per ogni punto della linea $L - \varepsilon$ uscirebbe un insieme della forma $f(x, y) = C$, che si specchia in maniera semplice sulla retta $y = 0$ ed ha in esso un minimo, accenna cioè al verso negativo dell'asse Y [I), 2); V), 2)].

(*) Mi sia concesso l'uso di questa frase, il cui significato è palese.

In tale ipotesi diremo che la funzione contemplata *si contiene in modo non naturale dalle due parti dell'ente L .*

Se poi osserviamo con attenzione le coppie di disegni

$$[(II), 1); V), 3)] - [(II), 2); V), 4)]; \quad [(II), 3); IV), 4)] - [(II), 4); IV), 3)]; \\ [(I), 3); IV), 1)] - [(I), 4); IV), 2)],$$

avvertiremo tosto la verità della proposizione:

Ogni qualvolta la funzione studiata si comporta nel modo naturale dalle due parti dell'elemento $L - 0$ guardato nel verso in cui la $f(x, y)$ cresce, la linea $f(x, y) = \text{cost.}$ si proietta nelle vicinanze del punto in cui incontra l'arco L semplicemente sulla normale a quell'asse che divide i quadranti analoghi ed accenna a quel verso di quest'ultimo rispetto al quale si ha la disposizione naturale. Se poi la $f(x, y)$ si contiene in modo non spontaneo dalle due bande dell'ente $L - 0$, l'elemento $f(x, y) = C$ ha un'immagine semplice sull'asse or ora indicato ed accenna a quel verso dell'altro, che è contrario alla maniera spontanea.

In ciascuno dei quadri I), II), IV), V) l'elemento primitivo L potrebbe esser sostituito da un ramo semplice, il quale però non conterrebbe che un numero limitato (≥ 0) di tratti paralleli ad uno degli assi soltanto. Così, ad esempio, nei due primi disegni dello specchio I) l'ente L potrebbe esser dotato di uno o più segmenti paralleli all'asse Y ma non all'altro, laddove negli altri due i tratti in discorso dovrebbero essere paralleli alla retta $y = 0$.

3. Consideriamo ora il caso che nei pressi di un punto dell'elemento $L - 0$ la linea $f(x, y) = C$ non si proietti semplicemente sopra veruno dei due assi coordinati. In tale ipotesi daremo origine al quadro:

$$I,) \quad \begin{array}{ll} 1) II, + L^{(+)}, IV; & 2) IV, + L^{(+)}, II; \\ 3) IV, + L^{(-)}, II; & 4) II, + L^{(-)}, IV; \\ 5) I, - L^{(+)}, III; & 6) III, - L^{(+)}, I; \\ 7) III, - L^{(-)}, I; & 8) I, - L^{(-)}, III. \end{array}$$

In questo caso non può tenersi parola nè di massimo nè di minimo rispetto ad uno degli assi coordinati, perchè la linea $f(x, y) = C$ non si proietta semplicemente sopra veruna delle due rette $xy = 0$ nelle vicinanze del punto in cui incontra il ramo $L - 0$. Facendo attenzione all'ultimo specchio possiamo quindi enunciare la proposizione:

L'ente $f(x, y) = C$ accenna ognora nei pressi del punto in cui incontra la linea L a quel verso di quest'ultima lungo il quale la funzione $f(x, y)$ cresce, se quest'ultima è disposta nel modo naturale rispetto all'elemento L , in caso opposto indica il verso contrario.

Suppongo adesso che lungo il ramo $+L$ la $f(x, y)$ non sia ognora crescente o decrescente all'aumentare dall'ascissa oppure sempre costante. In altre parole, ammetto che il tratto L si possa dividere in un numero limitato di parti m_1, m_2, \dots, m_p ($p > 1$), procedendo sopra L in guisa, che l'ascissa cresca, per modo, che in due successive la $f(x, y)$ non si comporti nella stessa maniera.

Nella nuova ipotesi la $f(x, y)$ non potrà essere che di seconda specie da una parte dell'ente $+L$ e di quarta dall'altra dando così origine allo specchio:

$$\text{II}_1) \quad 1) \text{ II, } +L, \text{ IV}; \quad 2) \text{ IV, } +L, \text{ II,}$$

nel quale il simbolo $+L$ accenna al fatto che la funzione contemplata non si comporta sempre nella stessa guisa lungo l'arco L , laddove la $f(x, y)$ è di specie quarta in B_c nel primo disegno e di seconda nell'altro. Circa poi alla maniera di contenersi della funzione $f(x, y)$ dalle due parti dell'ente L giova rammentare l'ultima proposizione aggiungendovi le osservazioni che seguono.

Intorno ad un tratto $q (\geq 0)$ di minimo della $f(x, y)$ considerata nella sua dipendenza dalla curva $L - 0$ esiste nell'ipotesi del disegno [II₁), 1)] una varietà di linee chiuse, che tendono all'intervallo q , lungo ciascuna delle quali la $f(x, y)$ si mantiene costante. L'ente q può quindi considerarsi come un minimo anche per la funzione $f(x, y)$ considerata nella sua dipendenza dai punti dell'area A . Se poi sempre nella ipotesi del disegno [II₁), 1)] l'intervallo q fosse un massimo della nostra funzione considerata semplicemente lungo $L - 0$, ogni punto del tratto $q - 0$ sarebbe un minimo per la funzione data, nè la linea $f(x, y) = C$ si comporterebbe nel modo detto poco fa nei pressi del segmento q , tenderebbe bensì con una sua parte al medesimo, la quale però è formata da due tratti sconnessi tra loro.

Analogamente, guardando il disegno [II₁), 2)], avvertiremo tosto che, se il tratto $q (\geq 0)$ è un massimo per la $f(x, y)$ nella sua dipendenza dalla curva $L - 0$, sarà altresì tale per la funzione data ed esisterà un insieme di linee chiuse, che si riducono all'ente q , lungo ciascuna delle quali la $f(x, y)$ non muta di valore. Se all'incontro, stando ognora lo stesso disegno, il tratto $q (\geq 0)$

è un minimo della $f(x, y)$ rispetto al tratto $L - 0$, ogni punto dell'ente $q - 0$ è un massimo della $f(x, y)$.

Quando l'elemento L sia decrescente, si dovrà contemplare il quadro:

$$\text{III}_1) \quad {}^1) I, -L, \text{III}; \quad {}^2) \text{III}, -L, I,$$

circa al quale vanno fatte delle osservazioni analoghe a quelle relative allo specchio II_1).

Possiamo quindi enunciare i due teoremi:

Un tratto $q (\cong 0)$ di minimo della $f(x, y)$ nella sua dipendenza dall'arco $+L - 0$ è pure tale per la funzione data, se quest'ultima si contiene in modo naturale dalle due bande dell'ente $+L$ guardato nel verso in cui cresce l'ascissa, ed una asserzione analoga si faccia di un massimo, essendo però inverso il modo di comportarsi della $f(x, y)$ dalle due parti dell'ente $+L$.

Il secondo teorema è conforme al precedente, quando in esso si muti l'elemento $+L$ nell'altro $-L$.

4. Studiato il modo di contenersi della funzione $f(x, y)$ dalle due parti della linea $L - 0$, la quale appartenga in pari tempo alle due curve C_{B_σ} e C_{B_τ} ($\sigma \geq \tau$), vediamo adesso come essa si comporti ai suoi estremi. Potranno darsi due eventi, il termine contemplato, che dirò c , dell'ente L è soltanto l'estremo di due rami primitivi delle linee C_{B_σ} e C_{B_τ} , i quali considerati insieme non formano al certo un elemento primitivo, oppure tal fatto non ha luogo. Se mi muovo nella prima ipotesi lungo L verso c in guisa che l'ascissa cresca, ho dall'una parte, e precisamente alla destra, l'area B_σ e dall'altra l'elemento B_τ , mentre lo stesso avviene se continuo il mio cammino dopo il punto c nella curva C_{B_σ} . Chiamo poi per semplicità l una parte connessa del ramo L dotata di un termine in c e con l_1 un altro tratto primitivo connesso delle due curve C_{B_σ} e C_{B_τ} che è unito al primo solamente mediante il punto c . È chiaro che si può ammettere che lungo il segmento l verso c la funzione $f(x, y)$ sia ognora crescente o decrescente oppure costante, e la stessa cosa si dica dell'ente l_1 .

Ora, se io posso tracciare pel punto O dell'area $A - 0$ due rami primitivi, che insieme ad un terzo non uscente dal medesimo mi limitino una parte semplicemente connessa B dell'elemento A , e se la $f(x, y)$ non raggiunge in B dei valori più grandi che in O , diremo che la funzione data ha un massimo parziale in O rispetto alla superficie B . Analogamente si definisce il *minimo parziale*.

Ciò premesso, se gli enti l ed l_1 sono crescenti andando verso c , daremo origine alla tabella (*):

- | | |
|--|---|
| 1) II, $\overline{+l_1^{(+)}, I, +l^{(+)}}$, II; | 2) IV, $\overline{+l_1^{(+)}, I, +l^{(+)}}$, IV; |
| 3) I, $\overline{+l_1^{(+)}, II, +l^{(+)}}$, I; | 4) IV, $\overline{+l_1^{(+)}, II, +l^{(+)}}$, IV; |
| 5) I, $\overline{+l_1^{(+)}, IV, +l^{(+)}}$, I; | 6) II, $\overline{+l_1^{(+)}, IV, +l^{(+)}}$, II; |
| 7) III, $\overline{+l_1^{(-)}, II, +l^{(-)}}$, III; | 8) IV, $\overline{+l_1^{(-)}, II, +l^{(-)}}$, IV; |
| 9) II, $\overline{+l_1^{(-)}, III, +l^{(-)}}$, II; | 10) IV, $\overline{+l_1^{(-)}, III, +l^{(-)}}$, IV; |
| 11) II, $\overline{+l_1^{(-)}, IV, +l^{(-)}}$, II; | 12) III, $\overline{+l_1^{(-)}, IV, +l^{(-)}}$, III; |
| 13) IV, $\overline{+l_1^{(+)}, II, +l^{(-)}}$, IV; | 14) II, $\overline{+l_1^{(+)}, IV, +l^{(-)}}$, II. |

Ed alle due ultime figure si potrebbero aggiungere quelle che si ottengono scambiando gli enti $+l_1^{(+)}$, $+l^{(-)}$ per ordine negli altri $+l_1^{(-)}$, $+l^{(+)}$.

In ognuno dei primi sei disegni l'ente c è un massimo parziale rispetto ad un'area di semplice connessione limitata in parte dalle curve l ed l_1 e sita nel terzo quadrante di c , nelle sei successive all'incontro un minimo.

Allo specchio ora contemplato vanno aggiunti altri tre, i quali nascono supponendo che i due rami l ed l_1 cadano successivamente ed in pari tempo nel quarto, primo e secondo quadrante. Questi quattro quadri si indicheranno per ordine con le notazioni I_3 , I_4 , I_1 , I_2 .

Giova contemplare anche la tabella che segue, quando i due elementi l ed l_1 non cadono in uno stesso quadrante.

- | | |
|--|--|
| 1) II, $\overline{+l^{(+)}}^c$, I, $\overline{-l_1^{(-)}}$, II; | 2) I, $\overline{+l^{(+)}}^c$, II, $\overline{-l_1^{(-)}}$, I; |
| 3) IV, $\overline{+l^{(+)}}^c$, I, $\overline{-l_1^{(+)}}$, IV; | 4) I, $\overline{+l^{(+)}}^c$, IV, $\overline{-l_1^{(+)}}$, I; |
| 5) IV, $\overline{+l^{(-)}}^c$, III, $\overline{-l_1^{(+)}}$, IV; | 6) III, $\overline{+l^{(-)}}^c$, IV, $\overline{-l_1^{(+)}}$, III; |
| 7) III, $\overline{+l^{(-)}}^c$, II, $\overline{-l_1^{(-)}}$, III; | 8) II, $\overline{+l^{(-)}}^c$, III, $\overline{-l_1^{(-)}}$, II. |

Se si osserva che i numeri 1, 2, 3, 4 danno luogo alle sei combinazioni 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4, avvertiremo tosto che si possono formare altre cinque tavole analoghe alla precedente, che torna acconcio indicare col

(*) Il significato di questa tabella e delle successive mi sembra chiaro, quando si osservi che con le notazioni $\overline{\quad}$, $\overline{\quad}^c$, $\overline{\quad}^c$, $\overline{\quad}^c$ accenno per ordine ai quattro quadranti.

simbolo $I_{3,4}$. Di conseguenza, alle altre si accennerà coi segni $I_{1,2}$, $I_{1,3}$, $I_{1,4}$, $I_{2,3}$, $I_{2,4}$, dalle quali però vanno tolti i quadri $I_{1,3}$, $I_{2,4}$, poichè in essi gli elementi l ed l_1 formano un solo ramo primitivo, il che va per ipotesi escluso.

Per le ricerche precedenti possiamo quindi enunciare il teorema (*):

La funzione contemplata non ammette un massimo od un minimo relativo in un punto dell'area $A - 0$, nel quale si incontrano soltanto due rami primitivi della curva $\frac{1}{2}(\Sigma C_{B_s} - C_A)$, che non formano un ramo semplice. Può all'incontro essere dotata in esso di un massimo o di un minimo parziale.

In alcune delle figure di ciascuno dei quadri $I_{1,2}$, $I_{1,4}$, $I_{2,3}$, $I_{3,4}$ uno soltanto degli enti l ed l_1 potrebbe cadere sull'asse Y oppure sull'altro. Così, ad esempio, nella figura 1) dello specchio $I_{3,4}$ soltanto una delle linee l_1 ed l a piacere potrebbe ridursi ad un intervallo della retta $x = 0$, ed in allora si otterrebbe un caso limite di una delle figure del disegno I, oppure dell'altro I_3 per ordine.

Contempliamo ora il caso che la $f(x, y)$ sia costante lungo uno soltanto degli elementi l ed l_1 , chè per le nostre ipotesi circa alla medesima non può esser tale in amendue. Stando in tal modo le cose, i due enti l ed l_1 cadranno di necessità in uno stesso quadrante, poichè, se ciò non avesse luogo, ossia se uno degli elementi l fosse in un quadrante e l'altro nel contiguo la $f(x, y)$ dovrebbe essere della stessa specie da una banda e dall'altra della curva $l + l_1$. Infatti, se fosse, ad esempio $\overline{+l} \Big|_c^c, \Big|_c^c \overline{-l_1^{(-)}}$, la $f(x, y)$ non potrebbe essere nè di prima nè di terza specie nelle vicinanze del punto c in quanto non muta nell'arco $+l$ sito nel terzo quadrante, non sarebbe poi di quarta perchè la $f(x, y)$ decresce lungo $-l_1$ al crescere della variabile x . Adunque, vicino al punto c dovrebbe essere solamente di seconda, la qual cosa contrasta con la ipotesi che in due aree contigue B_c e B_r la $f(x, y)$ sia di specie diversa.

Supposto quindi che le curve l ed l_1 cadano nel terzo quadrante, si dovrà contemplare il quadro:

- | | |
|--|--|
| 1) II, $\overline{+l_1^{(+)}, IV, +\bar{l}} \Big _c^c$, II; | 2) II, $\overline{+\bar{l}_1, IV, +l^{(+)}} \Big _c^c$, II; |
| 3) IV, $\overline{+l_1^{(+)}, II, +\bar{l}} \Big _c^c$, IV; | 4) IV, $\overline{+\bar{l}_1, II, +l^{(+)}} \Big _c^c$, IV; |
| 5) IV, $\overline{+l_1^{(-)}, II, +\bar{l}} \Big _c^c$, IV; | 6) IV, $\overline{+\bar{l}_1, II, +l^{(-)}} \Big _c^c$, IV; |
| 7) II, $\overline{+l_1^{(-)}, IV, +\bar{l}} \Big _c^c$, II; | 8) II, $\overline{+\bar{l}_1, IV, +l^{(-)}} \Big _c^c$, II. |

(*) Vedi l'ultimo paragrafo della precedente Memoria.

Se indico questo quadro con la notazione S_3 , sarà conveniente accennare a quelli che si riferiscono nello stesso modo agli altri tre quadranti coi simboli S_1, S_2, S_4 girando da sinistra a destra.

Per ultimo, osservo che nessuno dei due elementi l ed l_1 del quadro S_t ($t = 1, 2, 3, 4$) può ridursi ad un tratto parallelo ad uno degli assi. Quanto al ramo in cui la $f(x, y)$ è costante la cosa è manifesta, circa all'altro giova rammentare che la funzione contemplata non è dalle sue due parti di specie contigue.

5. Consideriamo ora un punto O dell'area $A = 0$, nel quale concorrono più di due rami primitivi della curva $\frac{1}{2}(\Sigma C_{B_\sigma} - C_A) \equiv D$. Se contemplo uno di questi ultimi avverto subito che la $f(x, y)$ si comporta in maniera diversa dalle sue due bande, perchè non si possono assegnare per ipotesi due aree tra loro sconnesse B_σ e B_τ ($\sigma \geq \tau$) per modo, che la $f(x, y)$ si contenga egualmente in entrambe.

A portare un po' di luce circa il modo di comportarsi della funzione $f(x, y)$ intorno all'elemento O giovano le figure seguenti, nelle quali secondo la fatta convenzione la linea l_1 è alla sinistra dell'ente l .

$$\begin{array}{lll}
 1) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ I, } + l^{(+)}}_O & 2) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ II, } + l^{(+)}}_O & 3) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ IV, } + l^{(+)}}_O \\
 4) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ II, } + l^{(-)}}_O & 5) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ III, } + l^{(-)}}_O & 6) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ IV, } + l^{(-)}}_O \\
 7) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ II, } + l^{(-)}}_O & 8) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ IV, } + l^{(-)}}_O & 9) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ II, } + l^{(+)}}_O \\
 10) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ IV, } + l^{(+)}}_O & 11) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ II, } + \bar{l}}_O & 12) \underbrace{+ l_1^{(+)}, \text{ IV, } + \bar{l}}_O \\
 13) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ II, } + \bar{l}}_O & 14) \underbrace{+ l_1^{(-)}, \text{ IV, } + \bar{l}}_O & 15) \underbrace{+ \bar{l}_1, \text{ II, } + l^{(+)}}_O \\
 16) \underbrace{+ \bar{l}_1, \text{ IV, } + l^{(+)}}_O & 17) \underbrace{+ \bar{l}_1, \text{ II, } + l^{(-)}}_O & 18) \underbrace{+ \bar{l}_1, \text{ IV, } + l^{(-)}}_O
 \end{array}$$

Nei disegni 1), 2) e 3) del quadro precedente abbiamo un minimo della funzione $f(x, y)$ in O considerata nella sua dipendenza dai punti di un'area elementare limitata in parte dagli enti l ed l_1 e da un'altra linea che cade nel primo quadrante dell'elemento O . Nelle tre figure successive all'incontro si ha un massimo. Nei disegni 1), 5), 7); 10), ad esempio, il ramo l_1 potrebbe cadere sull'asse Y , laddove l'altro l potrebbe adagiarsi sulla retta $y = 0$.

Al quadro ora contemplato sono da aggiungere altri tre, i quali nascono nella ipotesi che i nostri due rami cadano per ordine nel secondo, terzo e quarto quadrante. Ed è manifesto che in taluni dei disegni di questi quadri amendue gli enti l ed l_1 potrebbero cadere sull'asse X od Y uno soltanto ed anche nessuno dei due.

6. Giovandosi degli specchi di cui è parola nel paragrafo precedente risulta facile lo studio del modo di comportarsi della funzione data nei pressi di un punto O della linea $D \equiv \frac{1}{2} (\sum_s C_{B_s} - C_A)$, nel quale concorrono m (> 2) rami primitivi.

Suppongo prima che in O non cada un massimo o minimo parziale nè uno relativo della funzione $f(x, y)$ e che dal medesimo non esca un ramo in cui la $f(x, y)$ si mantenga costante od un tratto rettilineo parallelo ad uno degli assi. Nella fatta ipotesi avverto subito che nell'interno del primo quadrante del punto O e nelle sue immediate vicinanze si possono verificare soltanto i quattro casi

- 1) II, IV, II, IV, ..., IV; 2) II, IV, ..., II; 3) IV, II, IV, ..., II;
 4) IV, II, ..., IV,

quando si faccia astrazione dalle due aree B , in una delle quali penetra la parallela all'asse Y , mentre nell'altra si interna la parallela alla retta $y = 0$ uscente dall'elemento O .

Il primo evento ed il terzo si verificano quando da O esce un numero impari (≥ 3) di rami primitivi siti *entro* il primo quadrante, gli altri se il numero degli elementi i quali hanno un estremo in O è pari. E se esso è eguale a due, la $f(x, y)$ è in un'area elementare sita nel primo quadrante del punto O di specie II o IV. Analogamente si dica della seconda, terza e quarta regione rispetto alle specie I, III; II, IV; I, III per ordine.

Se due rami successivi l ed l_1 della curva D uscenti dal punto O cadono entro due quadranti distinti e contigui, la $f(x, y)$ potrà essere in un'area elementare limitata in parte dagli enti l ed l_1 di cui il contorno in O forma un angolo minore di 180° di due specie soltanto, perchè essa non ha per dato in O alcun minimo o massimo parziale o relativo. Così, ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} & \underline{+l^{(+)}, I}, \quad \overline{I, -l^{(-)}}; \quad \underline{+l^{(+)}, II}, \quad \overline{II, -l^{(-)}}; \quad \underline{+l^{(-)}, III}, \quad \overline{III, -l^{(+)}}; \\ & \quad \quad \quad \underline{+l^{(-)}, IV}, \quad \overline{IV, -l^{(+)}}. \end{aligned}$$

Se i due elementi successivi l ed l_1 cadessero *entro* due quadranti opposti, poniamo nel primo e terzo, e se l'area B limitata in parte dai medesimi non avesse alcun punto entro la quarta regione dell'ente O ed ad esso vicinissimo, la funzione $f(x, y)$ non potrebbe avere un minimo in O nella sua dipendenza dalla curva $l + l_1$, essendo in pari tempo di quarta specie in B . Ciò si verifica, perchè nel caso opposto la funzione contemplata avrebbe un minimo parziale in O . Così pure, la $f(x, y)$ non potrebbe avere un massimo in O rispetto all'ente $l + l_1$, essendo di quarta specie in un'area B terminata in parte ad esso ente, la quale non contiene vicino ad O dei punti siti entro il secondo quadrante di quest'ultimo. Analoghe riflessioni vanno fatte nella ipotesi che i due elementi l ed l_1 appartengano alla seconda e quarta regione dell'elemento O . Tolte queste restrinzioni la $f(x, y)$ potrebbe contenersi comunque nell'ente B , per quanto è possibile, ammesso che quest'ultimo sia limitato in parte dalla curva $l + l_1$ sita *entro* due regioni opposte.

Se poi l'angolo in O formato dalle linee l ed l_1 considerate come appartenenti al contorno C_B fosse maggiore di 180° gioverebbe rammentare le osservazioni dell'ultimo paragrafo della Memoria precedente.

Poniamo adesso che intorno al punto O cadano dei massimi e minimi parziali rispetto ad alcune aree B convergenti in esso, ma non un minimo o massimo relativo, nè un ramo in cui la $f(x, y)$ si mantiene costante. Ciò premesso, è evidente che un minimo parziale della $f(x, y)$ non può essere contiguo ad un massimo pure parziale. I casi poi che si possono offrire in questa ricerca, sono oltre ogni dire svariati, come tosto si avverte, e d'altra parte riesce assai facile l'addurre quanti esempi si vogliono. Io accennerò soltanto al seguente che si deduce tosto dai nostri quadri

$$\underbrace{|I, II, IV, III, II|}_O^m; \quad \underbrace{II, I, II|}_O^m; \quad \overline{II, I|}_M^o; \quad \overline{\overline{I, II, I}}_M^o.$$

Nel caso contemplato dal punto O escono quattro rami di linea $f(x, y) = \text{cost.}$, due nel primo quadrante (IV, II), uno nel terzo (II) ed uno nel quarto (I).

La funzione $f(x, y)$ potrà esser dotata anche di un massimo o minimo relativo in O , come nei due esempi che seguono

$$\underbrace{|\overline{III}, \overline{IV}|}_O^o, \overline{\overline{I}}|_M^o, \overline{\overline{II}}; \quad \underbrace{|I, II|}_O^o, \overline{\overline{III}}|_M^o, \overline{\overline{IV}}.$$

Tanto nella ipotesi del massimo relativo che in quella del minimo si può assegnare una varietà di linee chiuse, la quale circonda il punto O e tende al medesimo.

Nelle vicinanze dell'elemento O , quando in quest'ultimo cada un massimo o minimo relativo, la funzione $f(x, y)$ è al certo di seconda e quarta specie oppure di prima e terza.

Infatti, se consideriamo una linea $f(x, y) = C$, racchiudente il punto O , avvertiremo tosto che essa contiene al certo una parte $C^{(1)}$ analoga all'altra $C_A^{(1)}$ ed una seconda $C^{(2)}$ conforme all'elemento $C_A^{(2)}$ oppure due enti della forma $C^{(2)}$ e $C^{(4)}$ (*). Stando la prima ipotesi io posso torre dalla linea $C^{(1)}$ un tratto connesso p_σ che cade per intero entro una delle aree B_σ ed altrettanto si dica dell'elemento q_τ rispetto alla linea $C^{(2)}$. I tratti p_σ e q_τ appartengono per ordine ad una funzione di prima e terza specie o viceversa, secondo che il punto O è un minimo od un massimo. In maniera analoga si direbbe delle linee $C^{(2)}$ e $C^{(4)}$.

È chiaro che dal punto O potrebbero uscire anche dei rami in ciascuno dei quali la $f(x, y)$ non muta di valore, ecco due esempi

$$\underbrace{|\text{IV, II, I}|}_o; \quad \underbrace{|\text{I, III}|}_o; \quad \overline{\overline{\text{III, IV, III}}}_m^o; \quad \overline{\overline{\text{III, IV}}}_m^o.$$

Nel primo quadrante fra l'elemento IV e l'ente II vi è un ramo primitivo lungo il quale $f(x, y) = \text{cost.}$, nè un fatto simile ha luogo altrove. Ogni punto interno al ramo indicato è un minimo relativo della nostra funzione. Dall'ente O poi escono altre due linee $f(x, y) = C$ (I, III).

Il secondo esempio è:

$$\underbrace{|\text{II, IV}|}_o; \quad \overline{\overline{\text{IV, I}}}_o^m; \quad \overline{\overline{\text{I, II}}}_m^o; \quad \overline{\overline{\text{II}}}_m^o.$$

Nel primo quadrante tra gli enti II e IV havvi un ramo primitivo in cui $f(x, y) = \text{cost.}$, ogni punto interno del quale è un massimo della nostra funzione, mentre è altresì tale l'elemento O . Il modo di comportarsi delle linee $f(x, y) = \text{cost.}$ nei pressi di quest'ultimo è manifesto.

(*) Vedi la Memoria che precede, N. VI, pag. 1.

ENRICO BETTI.

Il giorno 16 dello scorso mese di Agosto furono rese in Pisa solenni onoranze funebri ad uno degli uomini che per le sue eminenti qualità intellettuali e morali maggiormente onorarono l'Italia nella seconda metà di questo secolo, ad **Enrico Betti**.

Conobbi personalmente il **Betti** nelle ferie Pasquali dell'anno 1858, allorquando convenuti in Genova coll'ottimo GENOCCHI nella casa ospitale di PLACIDO TARDY, iniziammo le trattative col TORTOLINI per la pubblicazione di questi *Annali*.

Già il TORTOLINI con giusto presentimento del risveglio in quel momento degli studi matematici in Italia aveva pubblicato otto volumi dei suoi *Annali di matematica e di fisica*; ed era stato grandemente aiutato nella impresa da geometri italiani e specialmente dai su nominati.

In questi volumi si trovano quelle memorie del **Betti** *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* (Vol. 3.^o), *Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche* (Vol. 4.^o), *Sopra la teorica delle sostituzioni* (Vol. 6.^o), nelle quali egli, pel primo, penetrando negli alti ed astrusi concepimenti di GALOIS sulla teoria delle equazioni algebriche, pose in luce la esattezza delle asserzioni contenute nella celebre lettera a CHÉVALIER, iniziando così il movimento in quelle ricerche alle quali oggi ancora è dedicata l'attività di eminenti geometri.

Divenuto collaboratore principale di questi *Annali* il **Betti** vi pubblicò dapprima varie memorie relative alla teorica delle forme, ed una monografia sulle funzioni ellittiche (Anno 1860), nella quale l'importante teoria è esposta con originalità di metodo.

Dal 1862 in poi la sua attività scientifica può dirsi tutta rivolta agli ardui problemi della fisica matematica, ed anche in questo campo la sua acuta intelligenza, le profonde sue cognizioni nell'analisi matematica, si rivelarono ben presto nei risultati da lui ottenuti. Oltre venti memorie sue sopra questa disciplina sono contenute in questi *Annali*, nel *Nuovo Cimento*, nelle *Memorie* della Società Italiana dei Quaranta, nei *Rendiconti* della R. Accademia dei Lincei. Infine a questo periodo della sua vita devesi quel suo libro sul *Potenziale*, tradotto in Germania e tanto apprezzato dai cultori di questi studi.

Il **Betti** non ebbe lunga esistenza, essendo nato nei pressi di Pistoja, il 29 ottobre 1823. Egli fu insegnante esimio e caldo amico dei suoi discepoli. A lui principalmente spetta l'onore di avere, colla sua parola e col suo esempio, fondata quella Scuola matematica dell'Università di Pisa dalla quale sono usciti in molta parte i giovani valorosi che hanno mantenuto e mantengono alto il nome italiano negli studi matematici. È a questi giovani geometri che io, rammentando la cospicua partecipazione del **Betti** nell'iniziare la pubblicazione di questi *Annali* e nel collaborarvi, raccomando il loro avvenire.

Ottobre 1892,

F. BRIOSCHI,

Sopra due curve invariantive di una quartica piana.

(Di EDGARDO CIANI, a Pisa.)

Mi propongo in questa Nota la ricerca delle caratteristiche pluckeriane di due importanti curve invariantive di una quartica piana, cioè di quelle che sono oggetto principale di una Memoria di CLEBSCH (*) e che ivi sono contrassegnate col nome di covariante S e di contravariante ψ . Questa ricerca dà luogo a rilevare una inesattezza che si trova in quella Memoria e precisamente al § 5 alla fine del quale l'Autore conclude che il contravariante ψ (inviluppo dei triangoli polohessiani) non è altro che l'inviluppo delle rette che segano armonicamente la curva.

In un caso particolarissimo il CAPORALI (**) enuncia senz'altro che i due inviluppi suddetti sono distinti. L'impossibilità della loro coincidenza, in generale, non è mai stata avvertita, per quanto io mi sappia, anzi qualche autore (***) parlando dei risultati di CLEBSCH riporta, fra gli altri, anche la coincidenza sopra ricordata.

1. Sia:

$$\begin{aligned}
 f_4 = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \dots = & a_{1111}x_1^4 + a_{2222}x_2^4 + a_{3333}x_3^4 + \\
 & + 4a_{1112}x_1^3x_2 + 4a_{1222}x_1x_2^3 + 4a_{1113}x_1^3x_3 + 4a_{1333}x_1x_3^3 + \\
 & + 4a_{2223}x_2^3x_3 + 4a_{2333}x_2x_3^3 + 6a_{1122}x_1^2x_2^2 + \\
 & + 6a_{1133}x_1^2x_3^2 + 6a_{2233}x_2^2x_3^2 + 12a_{1123}x_1^2x_2x_3 + \\
 & + 12a_{1223}x_1x_2^2x_3 + 6a_{1233}x_1x_2x_3^2 = 0,
 \end{aligned}$$

(*) CLEBSCH, *Ueber Curven vierter Ordnung*. (Crelle, Bd. 59.)

(**) CAPORALI, *Volume delle memorie*, pag. 348, n.º 39.

(***) MAISANO, *Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica*. (Giornale di Battaglini, vol. 19.)

l'equazione della curva fondamentale. Un punto y individua le 3 curve polari:

$$a_y a_x^3 = 0; \quad a_y^2 a_x^2 = 0; \quad a_y^3 a_x = 0.$$

L'Hessiana e la Cayleyana della cubica polare si chiamano la polohessiana e la polocayleyana del punto. Onde le loro equazioni saranno rispettivamente:

$$(abc)^2 a_x b_x c_x a_y b_y c_y = 0, \tag{1}$$

$$(abc)(abu)(acu)(bcu)a_y b_y c_y = 0 \quad (*), \tag{2}$$

la (1) è simmetrica in x e y quindi:

(a) « Se la polohessiana di P passa per Q , viceversa la polohessiana di Q passa per P (**). »

Per $x = y$ la (1) diviene l'equazione dell'hessiana della curva fondamentale, ossia:

(b) « L'hessiana della curva fondamentale può riguardarsi come il luogo di un punto per cui passa la propria polohessiana (**). »

Esiste un luogo ∞^1 di punti le cui polohessiane sono triangoli. Questo covariante, contrassegnato con S da CLEBSCH appunto perchè può ottenersi annullando l'invariante S di una cubica polare, è il seguente:

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd)a_x b_x c_x d_x = 0.$$

Se P è un punto di S e ABC il triangolo polohessiano di P , la conica polare di A rispetto alla cubica polare di P è costituita dal lato BC contato due volte cioè:

(c) « S è anche il luogo dei punti la cui conica polare mista si riduce a una retta contata due volte (***). »

(d) « S è pure il luogo dei vertici dei triangoli polohessiani (***). »

(e) « Se P è un vertice del triangolo polohessiano di Q , viceversa Q è un vertice del triangolo polohessiano di P (***). »

L'applicazione dei teoremi a , b , c , d , e ricorre nel seguito così di sovente che ho creduto necessario citarli esplicitamente una volta per sempre.

2. Mentre i vertici di un triangolo polohessiano variabile descrivono il covariante S i lati involuppano un'altra curva contravariante di f_4 che è appunto la ψ di CLEBSCH. Per convincersi ch'essa non può coincidere con l'in-

(*) Questa forma mista per $y = \text{cost.}$ e u variabile rappresenta la G_7 di CAPORALI (*Volume delle sue memorie*, pag. 344, n.° 11, 12.)

(**) CAPORALI, loc. cit., pag. 345, 346, n.° 17, 26. — CLEBSCH, loc. cit. § 3.

(***) CLEBSCH, loc. cit., § 4.

viluppo armonico di f_4 seguiamo passo, passo la dimostrazione che ne dà l'Autore ai §§ 4 e 5 della sua Memoria.

Consideriamo la conica polare mista di due punti y e z ed esprimiamo le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè questa si riduca a una retta $u_x = 0$ contata due volte.

Queste condizioni sono evidentemente le sei seguenti:

$$\sum_{m,n} a_{ikmn} (y_m z_n + y_n z_m) = u_m u_n; \quad m \left\{ \begin{matrix} 1, 2, \dots, 6. \\ n \end{matrix} \right.$$

I punti y e z apparterranno a S costituendone una coppia di punti corrispondenti, cioè tali che l'uno è situato in un vertice del triangolo polohessiano dell'altro. La retta u descriverà l'inviluppo ψ . Risolvendo le 6 equazioni precedenti rispetto alle sei quantità $y_m z_n + y_n z_m$ che vi compariscono linearmente avremo:

$$D(y_m z_n + y_n z_m) = \sum_{i,k} A_{mnik} u_i u_k, \quad (1)$$

dove D è il determinante dei coefficienti cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1112} & a_{1113} & a_{1123} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2212} & a_{2213} & a_{2223} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3312} & a_{3313} & a_{3323} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1212} & a_{1213} & a_{1223} \\ a_{1311} & a_{1322} & a_{1333} & a_{1312} & a_{1313} & a_{1323} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2312} & a_{2313} & a_{2323} \end{vmatrix} = D,$$

e A_{mnik} è l'elemento reciproco di a_{mnik} .

Ora fra le sei quantità $y_m z_n + y_n z_m$ passa sempre la relazione identica:

$$\begin{vmatrix} y_1 z_1 + y_1 z_1 & y_1 z_2 + y_2 z_1 & y_1 z_3 + y_3 z_1 \\ y_1 z_2 + y_2 z_1 & y_2 z_2 + y_2 z_2 & y_2 z_3 + y_3 z_2 \\ y_1 z_3 + y_3 z_1 & y_2 z_3 + y_3 z_2 & y_3 z_3 + y_3 z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

sostituendo dunque in questa i valori trovati otterremo:

$$\psi = \begin{vmatrix} \sum_{i,k} A_{11ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{12ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{13ik} u_i u_k \\ \sum_{i,k} A_{12ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{22ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{23ik} u_i u_k \\ \sum_{i,k} A_{13ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{23ik} u_i u_k & \sum_{i,k} A_{33ik} u_i u_k \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i k i' k' i'' k''} \begin{vmatrix} A_{11ik} & A_{12ik} & A_{13ik} \\ A_{21ik} & A_{22ik} & A_{23ik} \\ A_{31ik} & A_{32ik} & A_{33ik} \end{vmatrix} u_i u_k u_{i'} u_{k'} u_{i''} u_{k''} = 0.$$

A questo punto il CLEBSCH applica il seguente teorema sui determinanti: « Un minore A d'ordine p del determinante reciproco Δ è uguale al prodotto del complementare di A (nel determinante primitivo D) per la $(p - 1)^{\text{esima}}$ potenza di D » onde ne conclude che da tutto il primo membro dell'equazione di ψ si stacca un fattore D^2 . Questa conclusione non è esatta giacchè non è vero che il determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} A_{ik_{11}} & A_{i'k'_{12}} & A_{i''k''_{13}} \\ A_{ik_{21}} & A_{i'k'_{22}} & A_{i''k''_{23}} \\ A_{ik_{31}} & A_{i'k'_{32}} & A_{i''k''_{33}} \end{vmatrix},$$

sia sempre un minore di Δ per qualunque combinazione degli indici i, k, i', k', i'', k'' . Perchè questo accada non basta che gli elementi di una stessa colonna di δ appartengano alla medesima colonna di Δ ma bisogna che altrettanto accada per le linee e ciò avviene solamente quando le tre coppie $ik, i'k', i''k''$ hanno almeno un indice comune. In caso contrario δ qualunque composto con elementi di Δ non è un minore di Δ . (Così per es. per $i = k = 1; i' = k' = 2; i'' = k'' = 3$.) Dunque il fattore D^2 non è comune a tutti i determinanti δ e non si stacca dal primo membro dell'equazione di ψ . Cadono quindi le considerazioni ulteriori che si fondavano sopra questo distacco.

3. Anche col seguente calcolo semplicissimo si può direttamente dimostrare che l'inviluppo ψ non è quello armonico. Infatti, costruiamo la conica polare mista dei due vertici $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ del triangolo fondamentale. Essa è

$$f_{12} = \sum_{i,k} a_{12ik} x_i x_k = 0.$$

Prendiamo questi due vertici in due punti corrispondenti di S e quindi tali che la loro seconda polare mista sia una retta contata due volte e su questa retta r prendiamo il terzo vertice del triangolo fondamentale e il punto unità. Dovremo avere identicamente

$$f_{12} \equiv r^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 = 0,$$

e quindi $a_{1223} = a_{1231} = a_{1233} = 0; a_{1112} = a_{1222} = -a_{1122} = \alpha$. Così r è una

tangente di ψ . Ora i quattro punti d'incontro di r con f_4 sono dati dalla binaria:

$$x_2^4 \{a_{1111} + a_{2222} + 2\alpha\} + 4x_2 x_3^3 \{a_{2223} + a_{1113}\} + \\ + 6x_2^2 x_3^2 \{a_{2333} + a_{1333}\} + a_{3333} x_3^4 = 0.$$

Se la coincidenza voluta da CLEBSCH fosse giusta fra i coefficienti di questa binaria dovrebbe passare la relazione armonica $i = 0$, mentre essi sono indipendenti.

4. Per studiare le relazioni che hanno luogo fra le curve S e ψ di cui per ora non abbiamo dato che la definizione è necessario premettere qualche considerazione sulle possibili forme e posizioni dei triangoli polohessiani. Per brevità chiameremo polo di un tal triangolo il punto della curva $S = 0$ di cui il suddetto triangolo rappresenta la polohessiana. La Steineriana di f_4 possiede 24 cuspidi. CLEBSCH dimostra che la $S = 0$ incontra la Steineriana appunto nelle sue 24 cuspidi. È facile determinare anche dove la $S = 0$ incontra l'hessiana. Infatti se P è una cuspide della Steineriana, la sua cubica polare ha una cuspide nel punto P' dell'hessiana che corrisponde a P (*). P' è cuspide per la cubica polare di P e la tangente in P' è conica polare mista di P e P' . Cioè: $S = 0$ taglia l'hessiana nelle 24 cuspidi delle cubiche polari cuspidate. Vi sono dunque 24 triangoli polohessiani ognuno dei quali possiede due lati riuniti; i loro poli sono le cuspidi della Steineriana. Viceversa se un triangolo ha due vertici riuniti, il suo polo è una cuspide della Steineriana perchè la cubica polare di questo polo ha per hessiana due rette di cui una contata due volte. È utile per tutto quel che segue (§§ 6, 7, 8) esaminare con esattezza questo caso dando alla equazione di f_4 una forma conveniente. Perciò situeremo il vertice $(1, 0, 0)$ del triangolo fondamentale in una cuspide della Steineriana, il vertice $(0, 0, 1)$ nella cuspide della cubica polare di $(1, 0, 0)$ prendendo il lato $x_1 = 0$ per tangente cuspidale di questa cubica, il terzo vertice $(0, 1, 0)$ nel punto comune a questa tangente e alla tangente di flesso della cubica suddetta e finalmente il punto unità nel flesso medesimo.

Allora l'equazione della cubica polare di $(1, 0, 0)$ sarà:

$$(x_1 - x_2)^3 - 3x_1^2(x_1 - x_3) = 0.$$

(*) CREMONA, *Curve piane*, pag. 98.

Ma calcolandola dall'equazione generale di f_4 si trova:

$$\begin{aligned} & a_{1111}x_1^3 + a_{1222}x_2^3 + a_{1333}x_3^3 + 3a_{1112}x_1^2x_2 + 3a_{1122}x_1x_2^2 + \\ & + 3a_{1113}x_1^2x_3 + 3a_{1133}x_1x_3^2 + 3a_{1223}x_2^2x_3 + 3a_{1233}x_2x_3^2 + \\ & + 6a_{1123}x_1x_2x_3 = 0, \end{aligned}$$

dovremo dunque avere:

$$\begin{aligned} & a_{1111} = a_{1112} = a_{2221} = 1; \\ & a_{1122} = a_{1113} = -1; \quad a_{3331} = a_{3311} = a_{3312} = a_{3112} = 0, \end{aligned}$$

chiamando per brevità con a, b, c, d, e i coefficienti rimanenti di f_4 sarà quindi:

$$\begin{aligned} f_4 = & 2x_1^4 + 4x_1^3x_2 - 4x_1^3x_3 + 4x_1x_2^3 - 6x_1^2x_2^2 + \\ & + ax_2^4 + 4bx_2^3x_3 + 6cx_2^2x_3^2 + 4dx_2x_3^3 + ex_3^4 = 0. \end{aligned}$$

La polohessiana di $(1, 0, 0)$ è $(x_1 - x_2)x_1^2 = 0$; la seconda polare mista di $(1, 0, 0)$ e di $(0, 0, 1)$ è la $x_1 = 0$; quella di $(1, 0, 0)$ e di $(0, 1, 0)$ è $x_1 - x_2 = 0$.

Annullando l'invariante S di una qualunque cubica polare otterremo l'equazione del covariante S di f_4 . Si trova così:

$$\begin{aligned} S = & x_1^2 \{ (bx_2 + cx_3)^2 - (x_1 + ax_2 + bx_3)(cx_2 + dx_3) \} + \\ & + \{ (bx_2 + cx_3)(dx_2 + ex_3) - (cx_2 + dx_3)^2 \} \{ 2x_1 + x_2 - x_3 \} (x_2 - x_1) - (x_1 - x_2)^2 \} - \\ & - \{ (x_1 + ax_2 + bx_3)(dx_2 + ex_3) - (bx_2 + cx_3)(cx_2 + dx_3) \} (x_1 - x_2)x_1 + \\ & + (x_2 - x_1)^2 (dx_2 + ex_3)x_1 = 0. \end{aligned}$$

In queste equazioni è facile rilevare che:

« *La retta che unisce la cuspide e il flesso di una stessa cubica polare cuspidata è una tangente comune di S e ψ .* »

5. È necessario ora dimostrare il seguente teorema:

« *Una retta r la quale contata due volte costituisca la conica polare mista di due punti M ed N è sempre lato comune a due triangoli polohessiani e a non più di due.* »

Intanto è evidente che r appartiene ai triangoli polohessiani di M e di N , quindi basta dimostrare che M ed N sono sempre distinti e che r non può costituire la seconda polare mista di un'altra coppia di punti P e Q . Che i punti M ed N non possano essere riuniti è evidente perchè se lo fossero ogni punto di r sarebbe doppio per una conica polare pura e quindi r farebbe

parte della Steineriana che in generale non si spezza. Supponiamo allora che la retta r oltre esser conica polare mista per la coppia M, N lo sia anche per la coppia P, Q . Se il triangolo fondamentale ha la stessa posizione del § 3 [$M \equiv (1, 0, 0)$, $N \equiv (0, 1, 0)$; $r \equiv x_1 - x_2$] e se y e z sono le coordinate di P e Q , la conica polare mista di M, N è:

$$r^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 = 0,$$

quella di P, Q è:

$$\begin{aligned} & x_1^2 \{ a_{1111} y_1 z_1 - y_2 z_2 + a_{1133} y_3 z_3 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + a_{1113} (y_1 z_3 + y_3 z_1) \} + \\ & + x_2^2 \{ -y_1 z_1 + a_{2222} y_2 z_2 + a_{2233} y_3 z_3 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + a_{2223} (y_2 z_3 + y_3 z_2) \} + \\ & + x_3^2 \{ a_{3311} y_1 z_1 + a_{3322} y_2 z_2 + a_{3333} y_3 z_3 + a_{3323} (y_2 z_3 + y_3 z_2) + a_{3313} (y_3 z_1 + y_1 z_3) \} + \\ & + 2x_1 x_2 \{ y_1 z_1 + y_2 z_2 - (y_1 z_2 + y_2 z_1) \} + 2x_1 x_3 \{ a_{1314} y_1 z_1 + a_{1333} y_3 z_3 + \\ & + a_{1313} (y_1 z_3 + y_3 z_1) \} + 2x_2 x_3 \{ a_{2322} y_2 z_2 + a_{2333} y_3 z_3 + a_{2323} (y_2 z_3 + y_3 z_2) \} = 0. \end{aligned}$$

Se anche questa deve ridursi alla

$$r^2 \equiv (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Abbiamo le condizioni:

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0, \quad A_{11} = A_{22} = -A_{12},$$

chiamando con A_{ik} i coefficienti della precedente equazione. Queste condizioni portano evidentemente che i punti y e z siano coniugati rispetto alle cinque coniche:

$$\left. \begin{aligned} A_{13} &= a_{1311} x_1^2 + 2a_{1133} x_1 x_3 + a_{1333} x_3^2 = 0 \\ A_{11} + A_{12} &= (a_{1111} + 1)x_1^2 + 2a_{1113} x_1 x_3 + a_{1133} x_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{23} &= a_{2322} x_2^2 + 2a_{2333} x_2 x_3 + a_{2333} x_3^2 = 0 \\ A_{22} + A_{12} &= (a_{2222} + 1)x_2^2 + 2a_{2223} x_2 x_3 + a_{2223} x_3^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$A_{33} = a_{3311} x_1^2 + a_{3322} x_2^2 + a_{3333} x_3^2 + 2a_{3323} x_2 x_3 + 2a_{3313} x_1 x_3 = 0, \quad (3)$$

delle quali le prime quattro sono quattro coppie di rette. Bisognerebbe dunque cercare i raggi doppi dell'involuzione (1), quelli dell'involuzione (2): essi formano un quadrilatero completo di cui M ed N sono una coppia di vertici opposti: dovremo dunque esprimere analiticamente la condizione che una (e quindi l'altra) delle due rimanenti coppie di vertici opposti fossero coniugati

rispetto alla conica (3) ed otterremo allora una relazione fra i coefficienti di f_4 che la particolarizzerebbe.

Se le due coppie MN , PQ potessero avere un punto comune basterebbe porre nelle formule precedenti $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = 0$ e si otterrebbero le condizioni:

$$a_{3311}^2 - a_{3331} a_{1113} = 0 \quad (a_{1111} + 1) a_{3313} - a_{3311} a_{1113} = 0,$$

le quali ancora particolarizzerebbero la curva. Però la dimostrazione fatta non è applicabile al caso in cui uno dei punti M o N possa trovarsi sulla retta r e noi vogliamo anche in questo caso escludere la possibilità che r possa costituire la conica polare mista di altri due punti P , Q . Se M si trova sopra r , la cubica polare di N ha una cuspide in M , r ne è la tangente cuspidale, N è una cuspide della Steineriana. Allora facendo uso dell'equazione del § 4 costruiamo la conica polare mista di due punti qualunque y , z

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{yz} = & x_1^2 \{ (2y_1 + y_2 - y_3)z_1 + (y_1 - y_2)z_2 - y_1 z_3 \} + \\ & + x_2^2 \{ z_1(y_2 - y_1) + z_2(y_1 + ay_2 + by_3) + z_3(\bar{b}y_2 + cy_3) \} + \\ & + x_3^2 \{ z_2(cy_2 + dy_3) + z_3(dy_2 + ey_3) \} + 2x_1x_2(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) - \\ & - 2x_1x_3y_1z_1 + 2x_2x_3\{ z_2(\bar{b}y_2 + cy_3) + z_3(cy_2 + dy_3) \} = 0. \end{aligned}$$

In questo caso è dunque:

$$\begin{aligned} M & \equiv (1, 0, 0), & N & \equiv (0, 0, 1); \\ P & \equiv (y_1, y_2, y_3), & Q & \equiv (z_1, z_2, z_3) \quad r \equiv x_1 = 0, \end{aligned}$$

se deve essere

$$f^{(2)}_{yz} \equiv r^2 \equiv x_1^2 = 0,$$

si hanno le condizioni:

$$A_{22} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0,$$

ove A_{ik} sono i coefficienti di $f^{(2)}_{yz}$. Si vede allora facilmente che i soli sistemi capaci di soddisfarle, che non particolarizzino la f_4 , sono $(y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0)$; $(z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 1)$ cioè i punti P e Q non possono essere distinti dai punti M ed N .

6. Ciò premesso siano P e Q due punti corrispondenti del covariante S , cioè tali che il triangolo polohessiano di uno abbia un vertice nell'altro e quindi la loro conica polare mista sia ridotta a una retta r contata due volte la quale incontri la S nei quattro punti A , B , C , D .

È necessario ora occuparsi delle possibili coincidenze che possono avvenire fra i quattro punti A, B, C, D . Il triangolo polohessiano di P ha un vertice in Q e due in r , analogamente quello di Q : dunque A, B, C, D sono i quattro rimanenti vertici delle polohessiane di P e di Q .

Sia QCD la polohessiana di P e PAB quella di Q . Intanto P e Q saranno sempre distinti altrimenti (come abbiamo già osservato al principio del § 5), r appartiene alla Steineriana. Relativamente alle coincidenze possibili fra A, B, C, D bisogna distinguere il caso in cui vengano a sovrapporsi due che appartengano l'uno al triangolo polohessiano PAB , e l'altro al triangolo polohessiano QCD , ovvero due che appartengano al medesimo triangolo polohessiano.

Se A e B sono coincidenti, la polohessiana di Q ha due lati sovrapposti, Q è una cuspidale della Steineriana (§ 4), A è cuspidale della cubica polare di Q e poichè r ha in A due punti riuniti a comune con S , r è la retta che unisce la cuspidale e il flesso della cubica polare di Q (§ 4), ma allora dalle formole dello stesso paragrafo si ricava che essa incontra la S in altri due punti distinti. Dunque se A e B sono riuniti, C e D sono distinti. Contemporaneamente si viene ad escludere che dei quattro punti A, B, C, D tre, o tutti e quattro possano essere coincidenti in uno solo.

Sieno ora riuniti A con C e B con D . Poichè A è vertice per i triangoli polohessiani di P e di Q ne viene che il triangolo polohessiano di A ha due vertici in P e Q [§ 1 (e)]; per la stessa ragione il triangolo polohessiano di B ha due vertici in P e Q ; cioè PQ è lato comune ai triangoli polohessiani di A e B . Segue che B è il terzo vertice del triangolo polohessiano di A , perchè se fosse un altro punto E ; la retta PQ contata due volte sarebbe la conica polare mista di A e di E e quindi il triangolo polohessiano di E avrebbe due vertici sopra PQ e PQ sarebbe lato comune a tre triangoli polohessiani il che è impossibile (§ 5). Dunque PBQ è il triangolo polohessiano di A e per la stessa ragione PQA quello di B . Ne viene che PQ è la seconda polare mista di A e B e incontra S in due punti riuniti in P e in altri due riuniti in Q . Analogamente si vede che le rette PA, AQ, PB, BQ sono le seconde polari miste delle coppie BQ, BP, AQ, AP e ognuna incontra la S in due punti coincidenti. Cioè per ognuno dei punti A, B, P, Q escono tre rette incontranti (ciascuna) nel loro punto comune la S in due punti coincidenti; dunque A, B, P, Q sono quattro punti doppi per S la quale quindi dovrebbe spezzarsi in due coniche il che in generale non avviene. È quindi impossibile la coincidenza simultanea di A con C e B con D .

(a) Possiamo quindi concludere che dei quattro punti A, B, C, D due al massimo possono essere coincidenti e quando ciò avviene gli altri due sono sempre distinti.

7. Una prima conseguenza di questo teorema è che il covariante S non ha punti doppi. Infatti, ammettiamo che S abbia un punto doppio P . Tutte le rette uscenti da P incontrano la S fuori di P in due punti, e fra queste, sei sono tangenti di ψ perchè vedremo che la classe di ψ è 6 (§ 8). Sia r una retta uscente da P e tangente di ψ cioè lato comune a due triangoli polohessiani di cui i vertici opposti a r staranno fuori di r , giacchè se uno di essi stesse sopra r , questa sarebbe tangente cuspidale di una cubica polare cuspidata e sopra tali rette non esistono certo punti doppi di S come si può verificare sull'equazione del § 4. Sieno dunque B e C questi due vertici opposti e siano A e D gli altri due punti in cui la r incontra la S fuori di P . P sarà vertice comune a due triangoli polohessiani, perchè se rappresentasse due vertici riuniti di uno stesso triangolo polohessiano esso sarebbe cuspidale di una cubica polare e ricadremmo in un caso già considerato (§ 4). Sia quindi PCD il triangolo polohessiano di B , APB quello di C , le rette PB, PC sono tangenti di ψ e poichè P è doppio per S ciascuna di esse incontra ulteriormente S in un punto F e in un punto E distinti da B, C, P [§ 6 (a)]. Essendo PCD il triangolo polohessiano di B , la PC rappresenta la seconda polare mista di B e D cioè il triangolo polohessiano di D deve avere un lato sopra PC e un vertice in B . I rimanenti vertici di questo triangolo situati sopra PC dovranno essere uno P perchè ivi la PC incontra la S in due punti coincidenti, l'altro non può essere C altrimenti esso conterebbe due volte nelle intersezioni di PC con S , dunque sarà E cioè:

PBE è il triangolo polohessiano di D

e analogamente:

PCF	"	"	"	A
PCD	"	"	"	B
PBE	"	"	"	$A,$

dunque [§ 1 (e)] il triangolo polohessiano di P deve aver vertici in A, B, C, D il che è impossibile perchè due di questi punti non possono coincidere [§ 6 (a)]. Quindi S non ha punti doppi.

Ecco dunque le sue caratteristiche pluckeriane:

ordine = 4; classe = 12; punti doppi = cuspidi = 0;
flessi = 24; bitangenti = 28.

8. Cerchiamo ora la classe di ψ , cioè vediamo quanti lati di triangoli polohessiani passano per un qualunque punto P . Tutte le polohessiane passanti per P sono polohessiane di punti che appartengono alla polohessiana di P [§ 1 (a)]. Ma quest'ultima è del 3.° ordine e incontra la S in dodici punti. Vi sono dunque dodici punti i cui triangoli polohessiani passano per P . P non appartiene ad S , dunque P non è vertice per nessuno di essi, cioè due qualunque tangenti di ψ passanti per S non appartengono a uno stesso triangolo polohessiano. Ognuna di queste tangenti deve appartenere a due e a non più di due (§ 5) e cioè ai triangoli polohessiani di quei punti di cui essa rappresenta la seconda polare mista. Per ogni punto di ψ debbono passare cinque tangenti a ψ contando quella nel punto e ciò non ostante nessuna di esse può appartenere a più di due triangoli polohessiani (§ 5). Possiamo dunque concluderne:

(a) « *L'involuppo dei triangoli polohessiani è una curva della sesta classe contata due volte.* »

(b) « *La polohessiana di un qualunque punto P taglia il covariante S in sei coppie di punti corrispondenti tali che quelli di una stessa coppia hanno per seconda polare mista una tangente di ψ passante per P .* »

(c) « *Se P appartiene a ψ queste sei coppie si riducono a cinque di cui una è costituita da due punti di contatto fra S e la polohessiana di P ; la seconda polare mista di questi due punti è la tangente di ψ in P .* »

9. La tangente cuspidale di una cubica polare cuspidata rappresenta due lati coincidenti del triangolo polohessiano della corrispondente cuspidale della Steineriana, si può dunque dire che per ogni punto di questa retta passano due tangenti infinitamente vicine di ψ , ossia che essa appartiene alla curva ψ riguardata come luogo.

Fanno parte quindi di ψ considerata come luogo di punti le 24 tangenti cuspidali delle cubiche polari cuspidate. Sia Ω la curva-luogo rimanente. Si vede subito che le 24 rette suddette sono tangenti a Ω , giacchè se r è una di esse, C la cuspidale che contiene e C' la cuspidale corrispondente della Steineriana, r è seconda polare mista di C e C' e quindi oltre rappresentare due lati coincidenti del triangolo polohessiano di C' appartiene anche al triangolo polohessiano di C e quindi deve pure riguardarsi come il lato comune ai triangoli polohessiani di C e di C' . Onde sotto questo aspetto è una tangente di Ω .

Ogni tangente di ψ , o di Ω appartiene a due triangoli polohessiani e a non più (§ 5). Dunque nè ψ (o Ω) posseggono bitangenti, o tangenti stazionarie. La classe di Ω è uguale a quella di ψ .

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

« *Il contravariante ψ riguardato come luogo è costituito da una curva di 30° ordine e di 6.ª classe e da 24 tangenti semplici di questa curva, le quali non sono altro che le 24 tangenti cuspidali delle cubiche polari cuspidate.* »

Mentre dunque da ψ riguardato come luogo non si distaccano nè bitangenti, nè tangenti stazionarie perchè non ne possiede, si distaccano però 24 rette, cioè quelle sopra descritte.

10. L'equazione di ψ può trovarsi riflettendo che di esso si può dare questa definizione [§ 8 (c)]:

« *Il contravariante ψ è il luogo di un punto la cui polohessiana tocca il covariante S .* »

Basterà dunque esprimere la condizione di contatto fra le due curve

$$(abc)^2 a_y b_y c_y a_x b_x c_x = 0$$

$$(abc)(abd)(acd)(bcd) a_x b_x c_x d_x = 0.$$

La curva che ne risulta dovrà essere costituita da Ω contato due volte perchè Ω come involuppo è contato due volte [§ 8 (a)] e dalle 24 tangenti cuspidali contate ognuna una volta perchè esse entrano già due volte in Ω . La condizione di contatto è di 84° ordine nelle y dunque l'ordine di Ω è $\frac{84 - 24}{2} = 30$ come abbiamo già trovato (§ 9).

Sono per conseguenza trovate le caratteristiche pluckeriane di ψ ; classe = 6; ordine = 30; punti doppi = 396; cuspidi = 72; bitangenti = flessi = 0 (*).

(*) L'involuppo ψ è doppio come involuppo di triangoli polohessiani è semplice come involuppo delle rette che sono seconde polari miste di coppie di punti. Riguardandole sotto questo secondo aspetto il CAPORALI ritrova la classe di ψ per mezzo di una proprietà del covariante G_r relativa a una retta r (Jacobiana delle coniche polari dei punti di r) e del controvariante K_r formato con le rette che insieme ad r costituiscono la conica polare mista di coppie di punti corrispondenti di G_r . (CAPORALI, loc. cit., n.º 11, 23, 24, 30).

Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3.^o ordine, e sui gruppi ad esso isomorfi.

(*Memoria II di ERNESTO PASCAL, a Pavia.*)

Lo studio delle configurazioni fra enti geometrici, si riduce naturalmente allo studio del modo con cui è formato il gruppo delle sostituzioni fra quelli enti, sostituzioni, s'intende, compatibili colle relazioni inalterabili cui debbono soddisfare quelli elementi.

La configurazione delle 27 rette di S_3 è stata studiata con metodi geometrici da varii Autori e in varii sensi, e d'altra parte è anche stato studiato il gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette, la sua risolubilità, ecc.

Così STURM e AFFOLTER hanno principalmente studiato gli assiemi gobbi e i poligoni chiusi storti che si possono formare con quelle rette, CREMONA ha studiato gli assiemi di nove piani (enneaedri) che si possono formare coi 45 piani tritangenti, BERTINI ha studiato tutti i poliedri i cui piani non si incontrino in rette della superficie (*), e d'altra parte CLEBSCH, JORDAN, KLEIN, BURKHARDT hanno studiato la formazione del gruppo delle sostituzioni, hanno studiato la risolubilità dell'equazione corrispondente mediante funzioni iperelittiche di 1.^o ordine, ecc. (**).

(*) STURM, *Fläch. 3.^{er} Ord.*, pag. 46 e segg. *Math. Ann.*, Bd. 23, pag. 289. — AFFOLTER, *Grunert's Archiv*, Bd. 56, pag. 113. — SCHROETER, *Crelle*, tom. 62, pag. 265. — CREMONA, *Rendiconti Istituto Lomb.*, serie III, vol. 3, 1870, pag. 209. *Crelle*, tom. 68. — BERTINI, *Annali di Matematica*, tom. 12.

(**) CLEBSCH, *Abhand. der Gött. Societät*, Bd. 14 (1868-69). — JORDAN, *Substitutions*, pag. 316-368. — SYLVESTER, *Proc. London Math. Soc.*, Bd. 2, pag. 155. — KLEIN, *Journal de Liouville*, serie IV, tom. 4, pag. 169 (1887). — BURKHARDT, *Göttinger Nachrichten*, 27 Januar 1892.

In un lavoro da poco tempo da me pubblicato in questo stesso Giornale (*), io ho sviluppato i fondamenti di un metodo assai singolare col quale posso studiare contemporaneamente il gruppo di sostituzioni e la configurazione, e posso così emanciparmi completamente, per lo studio della configurazione, dai metodi geometrici adoperati dagli Autori sunnominati. In questo lavoro e negli altri che seguiranno a questo, io mi propongo di sviluppare in tutta la sua estensione il metodo di cui parlo.

E sarà opportuno indicare qui per sommi capi lo schema generale di tutto il lavoro.

Il gruppo fra le 27 rette ha una relazione semplicissima con un sottogruppo di quello delle caratteristiche di genere 3 studiato nella citata Memoria precedente.

Propriamente, se considero il sottogruppo che lascia inalterata una determinata caratteristica dispari, e nelle sostituzioni di esso sopprimo tutte le caratteristiche pari, ottengo un gruppo di sostituzioni che corrisponde esattamente a quello delle 27 rette.

Se poi dopo avere studiato questo gruppo studiamo di esso il sottogruppo che lascia inalterata una delle 27 rette, cioè un'altra caratteristica dispari, possiamo ottenere, con un procedimento assai analogo, il gruppo e la configurazione delle 16 rette della superficie di 4.^o ordine a conica doppia studiata da CLEBSCH e altri.

Se infine di quest'ultimo gruppo consideriamo ancora il sottogruppo che lascia inalterata una delle 16 rette abbiamo la configurazione delle 10 rette della superficie di 5.^o ordine a quintica doppia studiata da CAPORALI e DEL RE.

Torniamo intanto al gruppo primitivo. Colle 27 rette si sa che si possono formare 45 piani tritangenti alla superficie, 36 bisestuple gobbe, 216 quintuple gobbe di 2.^a specie, 120 coppie di triedri coniugati, ecc. ecc.

I gruppi delle sostituzioni fra i 45 piani, le 36 bisestuple, ecc. sono naturalmente isomorfi con quello delle 27 rette.

Per lo studio della configurazione dunque io posso propormi di prendere o come elementi fondamentali nelle sostituzioni, le rette, e allora potrò ottenere tutti i risultati di STURM e AFFOLTER citati avanti; oppure potrò prendere come elementi fondamentali i piani e allora avrò i citati risultati di BERTINI e altri ancora; oppure le coppie di triedri coniugati e allora potrò avere per es. fra gli altri i risultati di CREMONA sugli enneaedri. E così di seguito.

(*) *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche, ecc.*

Poi si potrà passare alle 16 rette di S_4 . Con queste si sa che si possono formare 40 piani tritangenti, e lo studio del gruppo delle sostituzioni, prendendo per elementi fondamentali i piani, ci potrà dare i risultati ottenuti da BERZOLARI in un suo lavoro (*) in cui ha seguito l'indirizzo tracciato da BERTINI nel lavoro sulle 27 rette.

Come si vede, la via così tracciata, è ampia ed è lunga; e noi ci proponiamo qui di cominciarla a percorrere, avendo cura di sorvolare, il più rapidamente che si potrà, sui punti già calcolati da altri Autori, e fermanoci specialmente sui risultati nuovi che troveremo.

In questo lavoro io mi occupo esclusivamente del gruppo quando prendo per enti fondamentali i piani. Nei lavori seguenti assumerò per elementi successivamente gli altri che ho enumerati sopra e otterrò una serie di altri risultati nuovi.

§ 1. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso un piano tritangente.

Cominciamo col ricordare per sommi capi quali sono i principii fondamentali del metodo sviluppato nella Memoria precedente.

Consideriamo 8 punti congiunti fra loro a due a due con 28 rette. Queste 28 rette possono farsi corrispondere univocamente alle 28 caratteristiche dispari di genere 3, in maniera che 4 rette formanti un quadrilatero coi vertici in 4 degli 8 punti, ovvero 4 rette non incontrantesi a due a due in *nessuno* degli 8 punti, corrispondano rispettivamente a 4 caratteristiche dispari la cui somma sia lo zero assoluto. La somma delle caratteristiche corrispondenti a 3 rette formanti un qualunque triangolo coi vertici in tre degli 8 punti, è sempre costante ed è propriamente una caratteristica pari che, per ragioni che è inutile ora ricordare, abbiamo chiamata la caratteristica pari fondamentale della rappresentazione.

Le sostituzioni che lasciano fissa questa caratteristica pari (e che quindi mutano un triangolo in un triangolo) corrispondono semplicemente alle 8! permutazioni degli 8 punti fra loro. Una sostituzione invece del gruppo generale è sempre quella che muta 4 rette qualunque formanti una figura di quelle due specie indicate sopra, in altre quattro formanti una figura delle

(*) Annali di Matematica, tom. 13.

stesse specie. Abbiamo poi anche visto in che modo, mediante le bisestuple, si può più precisamente rappresentare una sostituzione qualunque.

Se fra le 28 rette ne escludiamo una, per es. la retta (1 2), le altre 27 possono farsi corrispondere alle 27 rette di S_3 . Le sostituzioni fra esse sono quelle del gruppo generale (sopprimendo, s'intende, le caratteristiche pari), ma che lasciano inalterata quella determinata retta esclusa, ovvero la caratteristica corrispondente. Esse dunque debbono essere sostituzioni tali da mutare 3 rette formanti con quella fissa un quadrilatero di una delle due specie indicate, in 3 altre rette godenti della stessa proprietà. Di tali terne di rette se ne possono formare 45, e ciascuna di esse corrisponderà ad uno dei 45 piani tritangenti di S_3 .

Vogliamo ora prima di tutto esaminare come è formato il gruppo di quelle sostituzioni che lasciano fisso uno dei 45 piani tritangenti. Se l'ordine del gruppo totale è $72 \cdot 6!$, quello di tal sottogruppo sarà $\frac{72 \cdot 6!}{45} = 2 \cdot 4! 4!$

Sia fisso il piano delle 3 rette (vedi fig. I) (1 3) (3 4) (4 2).

Immaginiamo prima che le 3 rette del piano debbano restar fisse, ciascuna in sè; e poi faremo permutare le 3 rette fra loro in $3!$ modi.

Le altre 24 rette si scindono in $8 + 8 + 8$ e ciascuna di queste classi di 8 rette è coordinata con una delle 3 rette del piano. In effetti ciascuna delle 3 rette fisse è incontrata, oltre che dalle due del piano, da altre 8 rette, e le 8 rette corrispondenti ad una del piano sono tutte diverse da quelle corrispondenti ad un'altra del medesimo piano. Questi tre sistemi sono rappresentati dalle tre figure (a) (b) (c) (fig. I).

Se ciascuna delle rette del piano resta fissa, allora questi sistemi restano tre sistemi separati, cioè da una retta di uno non si potrà mai passare, colle sostituzioni, alle rette dell'altro. Ma se le 3 rette del piano si permutano fra loro lasciando fisso il piano, allora evidentemente i tre sistemi si permutano fra loro. Il gruppo dunque, presi per elementi le rette, è *imprimitivo* con tre sistemi *d'imprimitività*, ed è *transitivo* in tutte le 24 rette.

È facile poi vedere che gli altri 44 piani si scindono in $32 + 12$; i primi sono quei piani che non hanno rette comuni col dato, e nella nostra rappresentazione sarebbero formati con 3 rette di ciascuno dei tre sistemi (a) (b) (c), per es. (1 5) (5 6) (6 2). I secondi sono i piani che contengono una delle 3 rette del piano dato, e nella nostra rappresentazione sono formati con tale retta unita a due altre appartenenti al *medesimo* sistema, per es. (1 5) (5 4) (4 2). Il gruppo, presi per elementi i piani, è transitivo nei 32 e nei 12 separatamente.

Supponiamo che ciascuno dei sistemi d'imprimitività resti fisso, e esaminiamo quali sono allora le sostituzioni fra le 8 rette di un sistema. Dividendo l'ordine trovato sopra, per $3!$ si ha che l'ordine del gruppo, quando i tre sistemi sono fissi dovrà essere $8 \cdot 4!$ È facile ora vedere che se tutte le singole rette di un sistema per es. (a) sono fisse, allora resteranno fisse anche tutte le singole altre rette, cioè non c'è altra sostituzione che la *unità* che lasci fissi i sistemi, e fisse le rette di *uno solo* dei sistemi. E quindi allora fra le rette di un sistema vi debbono essere $8 \cdot 4!$ sostituzioni diverse. Effettivamente se sono fisse (1 5) (1 7) (1 8) (4 6) del sistema (a), sarà fissa la retta (2 6) del sistema (c) che è l'unica contenuta nel sistema (c) e che incontra contemporaneamente tutte le quattro nominate rette del sistema (a). E così si dimostrerebbe per tutte le altre.

Chiamando dunque Γ il gruppo simmetrico fra i tre sistemi (a) (b) (c) e chiamando G il gruppo di ordine $8 \cdot 4!$ fra le 8 rette di un sistema per es. (a), si ha che il gruppo richiesto, che lascia fisso un piano, è formato con

$$F = (\Gamma, G).$$

Stabilita la sostituzione fra le 8 rette di un sistema (sostituzione di G) e quella dei tre sistemi fra loro, resta stabilita univocamente la sostituzione totale.

Possiamo passare ad esaminare come son formate le sostituzioni di G . Le 8 rette di un sistema per es. (a) si riuniscono a due a due formanti 4 coppie di rette concorrenti. Queste 4 coppie si potranno permutare fra loro in $4!$ modi, e le 2 rette di una coppia si potranno scambiare fra loro. Però è facile vedere che questi scambi nelle 4 coppie non sono tutti fra loro indipendenti, ma solo tre di essi sono indipendenti. Cioè immaginiamo che tutti i sistemi sono fissi, e che sieno anche fisse le 4 coppie:

$$\begin{aligned} (1\ 5) \quad (5\ 4) \\ (1\ 7) \quad (7\ 4) \\ (1\ 8) \quad (8\ 4) \\ (1\ 6) \quad (6\ 4), \end{aligned}$$

del sistema (a), e vediamo che se si lasciano fisse rispettivamente le 2 rette di ciascuna delle tre prime coppie, allora non si potrà fare lo scambio fra le 2 rette dell'ultima coppia; giacchè le 2 rette (1 6), (4 6) rispetto per es. alle tre rette (1 5) (1 7) (1 8) hanno una conformazione diversa, nel senso che se a queste tre si aggiunge (1 6) allora l'unica retta (oltre le tre del piano) che

incontri tutte quattro le dette rette è una retta del sistema (b) [la (2 3)], e se invece si aggiunge (4 6), allora l'unica retta godente della proprietà analoga è una del sistema (c) [la (2 6)]. Restando dunque fissi i sistemi, e le rette (1 5) (1 7) (1 8) è chiaro che non potranno scambiarsi fra loro le rette (1 6) (4 6).

In generale si può far vedere che se restano fisse le 4 coppie di cui si parla, le trasposizioni fra le 2 rette di una coppia, sono possibili solo in un numero pari di esse, cioè le sostituzioni dell'ultimo sottogruppo che lascia fissi i sistemi, e lascia fisse le 4 coppie di un sistema, sono tutte sostituzioni pari, e sono in numero di $8 = 2^3$, perchè abbiamo visto che si può disporre della trasposizione in 3 coppie, restando quella nella quarta, determinata. Moltiplicando 8 per $4!$ si ha poi appunto esattamente l'ordine di G già noto.

Chiamando ora g il gruppo simmetrico fra quattro elementi, [le 4 coppie nel sistema (a) o (b) o (c)], e chiamando $s_1 s'_1, s_2 s'_2, s_3 s'_3, s_4 s'_4$ le 8 rette di un sistema riunite a coppie, e infine chiamando γ il gruppo delle 8 sostituzioni:

$$\gamma = [1, (s_1 s'_1)(s_2 s'_2), (s_1 s'_1)(s_3 s'_3), (s_1 s'_1)(s_4 s'_4), (s_2 s'_2)(s_3 s'_3), (s_2 s'_2)(s_4 s'_4), (s_3 s'_3)(s_4 s'_4), (s_1 s'_1)(s_2 s'_2), (s_3 s'_3)(s_4 s'_4)],$$

possiamo infine dire che il gruppo che lascia fisso un piano tritangente è formato con

$$F = (\Gamma, g, \gamma).$$

§ 2. Sottogruppo di sostituzioni

che lasciano fisso il complesso di due piani passanti per una retta.

Il gruppo studiato nel paragrafo precedente è transitivo nei 12 piani che hanno col dato una retta comune, quindi l'ordine del sottogruppo che lascia fisso anche uno di questi 12 piani sarà $\frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{12} = 4 \cdot 4!$. Tale è l'ordine, se deve restar fisso ciascuno dei due piani passanti per una retta; ma se vogliamo che solo il complesso dei due piani resti fisso, potendo poi essi permutarsi fra loro, allora l'ordine si moltiplica per 2 e diventa $8 \cdot 4!$.

Per trovare come sono formate le sostituzioni di questo gruppo possiamo, seguendo i principii del paragrafo precedente, costruire i sistemi d'imprimitività relativi al primo piano, e quelli relativi al secondo. I primi sistemi si sovrappongono parzialmente coi secondi, e allora, possiamo trovare le rette

comuni rispettivamente ai primi sistemi e ai secondi, e queste, per un noto principio della teoria delle sostituzioni, formeranno i nuovi sistemi d'imprimitività.

Sieno per es. i due piani fissi (1 3 4 2) (1 5 4 2) fig. II.

Intanto allora evidentemente l'asse dei due piani dovendo restar fisso, si ha che il sistema di rette corrispondente a quest'asse (cioè l'assieme delle coppie di rette giacenti nel medesimo piano coll'asse) resterà fisso. Si ha un sistema composto di 6 rette [sistema (a)] che non potranno che solo permutarsi fra loro. Gli altri sistemi poi si sovrappongono in maniera da dar luogo a 4 nuovi sistemi d'imprimitività rappresentati rispettivamente dalle figure (b) (c) (d) (e).

Ora dobbiamo esaminare in che modo possiamo ordinare le sostituzioni del gruppo; e vediamo prima quali sono le permutazioni possibili fra i quattro sistemi (b) (c) (d) (e).

Dalla considerazione delle figure si vede subito che il sistema (b) insieme al sistema (c) formano il secondo sistema della figura precedente, cioè quella che dà la divisione in sistemi corrispondente al piano (1 3 4 2); e così i due sistemi (d) (e) danno il terzo sistema della figura precedente. Inoltre se si stabilisse analogamente la divisione in sistemi corrispondenti al piano (1 5 4 2) si troverebbe che i sistemi (b) (e) verrebbero ad unirsi e formare un sistema solo, e così i sistemi (c) (d).

Di qui ne ricaviamo che se i due piani debbono restar fissi ciascuno in sè, allora le permutazioni fra gli elementi *b c d e* dovranno essere tali che restino inalterate le funzioni:

$$\begin{aligned} \varphi(b + c, d + e) \\ \varphi(b + e, c + d), \end{aligned}$$

dove φ sia il simbolo di una funzione simmetrica dei due argomenti; e se poi, come vogliamo, è solo il complesso dei due piani che debba restar fisso, allora le sostituzioni dovranno essere quelle corrispondenti alla funzione

$$\varphi(b + c, d + e) + \varphi(b + e, c + d).$$

Chiamiamo Γ' il gruppo di sostituzioni fra questi 4 elementi *b, c, d, e*. Evidentemente allora esso è transitivo, e inoltre se uno degli elementi, per es. *b* resta fisso, allora i due altri elementi *c, e* potranno solo permutarsi fra loro mentre *d* deve restar fisso. Quindi l'ordine di Γ' è $4 \cdot 2 = 8$.

Tali 8 sostituzioni sono:

$$\Gamma' = [1, (ce), (bd), (bd)(ce), (bc)(ed), (cdeb), (be)(dc), (cbcd)].$$

Se poi ciascuno dei due piani fondamentali deve restar fisso in sè, allora le sostituzioni di Γ' sono solo quattro e sono tutte le sostituzioni *pari* comprese fra quelle di sopra.

Immaginiamo ora che tutti i sistemi debbano restar fissi.

Allora si ha un sottogruppo di ordine $\frac{8 \cdot 4!}{8} = 4!$. Io dico che allora, per stabilire una sostituzione, basterà stabilire una permutazione qualunque delle 4 rette di un sistema, restando allora univocamente determinata la permutazione di tutte le rimanenti rette.

Effettivamente si può far vedere che esiste una corrispondenza univoca fra le rette di un sistema e quelle di un altro, e inoltre fra le coppie di rette di un sistema, e le 6 rette del primo sistema (*a*); quindi allora ne concludiamo che se restano fisse le 4 rette di un sistema (*b*) (*c*) (*d*) (*e*), resteranno fisse tutte le rette, cioè fra le 4 rette debbono esserci 4! sostituzioni diverse, e quindi tutte le possibili permutazioni.

Il gruppo dunque che lascia fissi i sistemi è isomorfo col gruppo g (vedi paragrafo precedente) simmetrico di 4 elementi.

Perciò chiamando F' il gruppo totale richiesto si ha che esso potrà esprimersi con

$$F' = (\Gamma', g).$$

Resta a far vedere qual'è la corrispondenza di cui si è parlato. Se i sistemi sono fissi, allora sarà fissa la retta (1 3) e quindi per es. se (3 6) del sistema (*d*) diventa (3 8), allora (2 6) del sistema (*e*) diventerà (2 8), perchè le 3 rette (1 3) (3 6) (2 6) formano un piano come anche (1 3) (3 8) (2 8). La corrispondenza è propriamente quella data dal seguente quadro:

sistemi	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
	56	78	36	26
	58	67	38	28
	57	86	37	27
	23	14	25	35

In quanto poi alle 6 rette, si vede che esse si riuniscono in 3 coppie tali che

ciascuna coppia risulta di rette che stanno in un medesimo piano colla retta (24). Ognuna di queste coppie corrisponde alle tre scissioni in $2 + 2$ che si possono effettuare delle 4 rette di un sistema per es. (*d*).

Propriamente:

la coppia 17 — 74 corrisponde alla scissione 36 — 38; 37 — 25
 „ 18 — 84 „ „ 36 — 37; 38 — 25
 „ 16 — 64 „ „ 36 — 25; 37 — 38,

nel senso che le rette 17 — 74 sono le sole fra le sei che colla coppia 36 — 38 ovvero con 37 — 25 formano terne *pari*, tutte le altre formando terne *dispari* (vedi Mem. precedente, citata).

Stabilita così la permutazione fra le 3 coppie del sistema (*a*) resta a vedere quando si permutano o no le 2 rette di una stessa coppia. Ora è facile vedere che le 2 rette per es. (17) — (74) di una coppia si comportano diversamente rispetto a (36) o (38) che rispetto a (37) o (25) nel senso che le terne

$$24 - 17 - 36$$

$$24 - 17 - 38,$$

sono *dispari* mentre le terne

$$24 - 47 - 36$$

$$24 - 47 - 38,$$

sono *pari*; e viceversa si ottiene prendendo (37) o (25).

Inoltre se invece di prendere (36) o (38) prendiamo le rette corrispondenti negli altri sistemi, abbiamo una relazione analoga pel sistema (*b*) ma una relazione reciproca per gli altri due sistemi (*c*) (*e*).

Di qui ricaviamo che le 2 rette di una coppia di (*a*) si invertono fra loro: 1.^o quando si invertono fra loro le 2 coppie della scissione dei quattro elementi di un sistema (*b*) (*c*) (*d*) (*e*) in $2 + 2$; 2.^o quando la coppia di sistemi (*b*) (*d*) si inverte colla coppia (*c*) (*e*), cioè quando si operano le quattro ultime sostituzioni di Γ' .

Osserviamo infine che ognuna delle 4 rette

$$(13), (34), (15), (54),$$

dei due piani fondamentali, è coordinata rispettivamente alle coppie di sistemi

$$d + e, \quad b + c, \quad b + e, \quad c + d,$$

per modo che esse si permuteranno secondochè vengono a scambiarsi fra loro queste coppie.

Riassumendo, abbiamo: il gruppo F' non è transitivo in tutte le 22 rette restanti, ma le scinde in $6 + 16$, essendoci la transitività in ciascuno di questi due gruppi. I 43 piani restanti si scindono in $3 + 16 + 24$.

I primi tre passano tutti per la retta fissa (2 4); i secondi 16 passano a quattro a quattro per le altre 4 rette dei due piani fissi, e quindi c'è la transitività fra tutti questi 16, con quattro sistemi d'imprimitività. Gli ultimi 24 non hanno nessuna retta comune coi due piani.

Uno dei 16 è formato con una retta di un sistema insieme ad una retta di un altro accoppiando però i 4 sistemi solo in 4 modi:

$$d + e, \quad b + c, \quad b + e, \quad c + d.$$

Uno dei 24 ultimi piani è formato con una del sistema (a) e con due altre rette di due degli altri sistemi, accoppiando però questi ultimi solo nei due modi rimanenti.

$$b + d, \quad c + e.$$

Si può notare che: *il sottogruppo che lascia fisse le 5 rette di due piani concorrenti è isomorfo col gruppo simmetrico di quattro elementi.*

§ 3. Sottogruppo di sostituzioni

che lasciano fisso il complesso di due piani non aventi rette comuni.

Gruppo del triedro di 3.^a specie.

Per trovare le sostituzioni di questo sottogruppo adopereremo lo stesso metodo del paragrafo precedente, vedremo cioè in che modo si sovrappongono i sistemi d'imprimitività relativi al primo piano e relativi al secondo. L'ordine del gruppo sarà $2 \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{32} = 2 \cdot 3! \cdot 3!$

Sieno (1 3 4 2) (1 5 6 2) i due piani fondamentali (fig. III). Operando la sovrapposizione dei primi sistemi coi secondi, si ottengono 3 rette (3 6) (4 5) (7 8) formanti un sistema a sè e non permutabile cogli altri, e poi altri sei sistemi d'imprimitività permutabili fra loro, ciascuno composto di 3 rette. Sono essi rappresentati dalle figure (a) (b) (c) (d) (e) (f). Questa separazione di 3 rette formanti un piano, da tutte le altre rimanenti, corrisponde al fatto noto che due piani non aventi rette comuni individuano un terzo piano, e le 9 rette

dei tre piani formano in una maniera sola altri tre piani diversi dai primi, formanti un triedro che si chiama *conjugato* al primo, e nel complesso dei sei piani si ha una cosiddetta *coppia di triedri coniugati*.

In questo paragrafo quindi noi possiamo studiare contemporaneamente varii gruppi, cioè:

1) Quello che lascia fissi ciascuno dei tre piani del triedro. Esso avrà per ordine $3! 3!$.

2) Quello che lascia fisso solo il complesso dei due piani dati. Esso ha per ordine $2 \cdot 3! 3!$.

3) Quello che lascia fisso il complesso dei tre piani del triedro. Esso ha per ordine $3! 3! 3!$.

4) E finalmente quello che lascia fisso il complesso dei due triedri coniugati, potendo scambiare un triedro nell'altro, cioè un piano dell'uno in un piano dell'altro, e allora per conseguenza *tutti* i piani del primo in tutti quelli dell'altro. Esso ha per ordine $2 \cdot 3! 3! 3!$.

Il primo è sottogruppo di tutti i seguenti, e mediante esso poi potremo facilmente costruire gli altri.

Troviamo prima il gruppo fra i sei sistemi; considerando come si riuniscono i sistemi a due a due per costituire quelli relativi solo a ciascuno dei tre piani del triedro, si ha, analogamente come nel paragrafo precedente, che tale gruppo Γ'' sarà quello corrispondente alle tre funzioni:

$$\varphi(a + e, b + f, c + d)$$

$$\varphi(a + f, b + d, c + e)$$

$$\varphi(a + d, b + e, c + f).$$

Per il gruppo 2) il Γ'' corrispondente è poi quello delle due funzioni rappresentate dalla somma delle due prime di queste, e dalla terza; e per 3) il Γ'' corrispondente è quello della funzione unica rappresentata dalla somma di tutte tre le φ di sopra.

È facile vedere che il gruppo Γ'' è di ordine $3!$, perchè intanto esso è transitivo nei sei elementi, e d'altra parte, se uno di questi elementi è fisso, sono tutti fissi.

Per completare questa ricerca possiamo far vedere quale sarà il Γ'' nel caso del gruppo 4) di sopra.

Il triedro coniugato al dato è quello dei tre piani:

$$(1\ 5\ 4\ 2), \quad (1\ 3\ 6\ 2), \quad [(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)].$$

Rispetto a questi, i sei sistemi si accoppiano diversamente che prima, cioè è facile vedere, che si accoppiano rispettivamente in

$$(c + d, a + f, b + e)$$

$$(c + f, a + e, b + d)$$

$$(c + e, a + d, b + f).$$

Quindi il gruppo Γ'' corrispondente deve anche trasformare quella prima scissione in questa seconda; esso si riduce al gruppo della funzione

$$\varphi(a + b + c) + \varphi(d + e + f),$$

di ordine $2 \cdot 3! \cdot 3!$. Tal gruppo è imprimitivo con due sistemi d'imprimitività, ciascuno di tre elementi.

Tornando ora al gruppo 1) e al corrispondente Γ'' si ha che il suo sottogruppo che lascia fissi i sistemi, sarà di ordine $\frac{3! \cdot 3!}{3!} = 3!$. Ora noi faremo anche qui vedere che queste $3!$ sostituzioni non sono che le permutazioni possibili fra i tre elementi di un medesimo sistema, e quindi, chiamando F'' il gruppo 1) e g' il gruppo simmetrico di tre elementi si ha la formola

$$F' = (\Gamma'', g').$$

L'asserzione di sopra si dimostra subito facendo vedere che si può stabilire anche qui una corrispondenza univoca fra le rette di un sistema e quelle di ogni altro, in modo che se sono fisse quelle di un sistema sono fisse tutte, e quindi tutte le $3!$ sostituzioni rimanenti debbono operare permutazioni diverse fra i tre elementi di uno stesso sistema, e perciò non possono corrispondere ad altro che alle $3!$ sostituzioni possibili fra i tre elementi.

Si vede subito che se (1 7) diventa (1 8) allora (essendo fisse le rette dei piani dati, perchè sono fissi i sei sistemi) (2 8) deve diventare (2 7) perchè il piano (1 7 8 2) deve diventare (1 8 7 2), e così di seguito.

Propriamente la corrispondenza sarà espressa dal seguente quadro:

sistemi	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
	28	67	47	17	38	58
	27	68	48	18	37	57
	35	14	16	46	25	23

Per stabilire questa corrispondenza si può anche osservare più facilmente che ogni retta di un sistema forma sempre colle due di un altro ad essa *non* corrispondenti, e solo con queste, una terna pari.

Il gruppo F'' è transitivo nelle rimanenti 18 rette non appartenenti al triedro. In quanto poi agli altri 42 piani esso li scinde in:

- 3 piani che sono i coniugati del triedro
- 9 piani contenenti una retta del piano (1 3 4 2)
- 9 piani " " " (1 5 6 2)
- 9 piani " " " [(2 6) (4 5) (7 8)]
- 12 piani non contenenti nessuna delle rette del triedro.

Uno dei 9 piani contiene una retta di un sistema a, b, c , e una di un sistema d, e, f ; invece uno dei 12 piani contiene 3 rette, una di a , una di b e una di c ovvero una di d una di e e una di f .

Si può notare che *il sottogruppo che lascia fisse le singole 9 rette di una coppia di triedri coniugati, è isomorfo col gruppo simmetrico di tre elementi.*

§ 4. Triedri di varie specie.

Il prof. BERTINI si è occupato in un lavoro già citato, di classificare tutti i diversi aggruppamenti di piani non aventi a due a due nessuna retta della superficie in comune (poliedri). Esistono, come si sa, tre specie di triedri; vediamo come possiamo ritrovare questo coi principii stabiliti avanti.

Se consideriamo una coppia di piani non aventi rette comuni [per es. (1 3 4 2) (1 5 6 2)], dallo studio fatto sopra del gruppo di sostituzioni che lasciano fissi quei due piani, si ha che tutti gli altri piani non aventi con quei due, rette comuni si scindono in $1 + 9 + 12$, e in ciascuna di queste classi ci è separatamente la transitività, senza però poter passare da un piano di una classe ad uno di un'altra. Ne vengono dunque tre specie di triedri distinti, che sono rispettivamente quelli chiamati da BERTINI, di 3.^a, di 2.^a, di 1.^a specie.

Di 3.^a specie ve ne sono $\frac{32 \cdot 45}{2 \cdot 3} = 240$, di 2.^a ve ne sono $\frac{32 \cdot 45 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 2160$,
e di 1.^a ve ne sono $\frac{32 \cdot 45 \cdot 12}{2 \cdot 3} = 2880$.

Le figure IV, V, VI rappresentano tre triedri rispettivamente di 1.^a 2.^a 3.^a specie.

Possiamo qui fare alcune considerazioni generali sui triedri.

Sappiamo, e del resto lo vediamo dai risultati ora citati del § 3, che, dati due piani non aventi rette comuni, è individuato un terzo piano che si chiama coniugato ai due primi; i tre piani formano un triedro di 3.^a specie. Possiamo subito cominciare a vedere con quante figure diverse possono rappresentarsi le 9 rette di un triedro di 3.^a specie. Basta immaginare tutte le possibili figure di coppie di piani; se ne ottengono allora solo tre che sono quelle rappresentate dalle tre parti della fig. VII.

In ognuna di quelle figure è facile riconoscere che con quelle 9 rette si possono formare due triedri di 3.^a specie; per es. colla prima di quelle figure si possono formare i piani

$$(1\ 3\ 4\ 2) \quad (1\ 5\ 6\ 2) \quad [(3\ 6)(4\ 5)(7\ 8)],$$

ovvero gli altri tre

$$(1\ 3\ 6\ 2) \quad (1\ 5\ 4\ 2) \quad [(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)].$$

Dunque ogni triedro di 3.^a specie ne ha uno coniugato, come si sa.

Di figure del 1.^o tipo se ne possono formare 90, del 2.^o tipo se ne possono formare 20, e del terzo 10 come è facile calcolare. Si hanno dunque in tutto appunto le 120 coppie di triedri coniugati.

Potremmo dimostrare qui in un modo molto facile, cioè colla semplice considerazione delle figure disegnate, tutti i teoremi noti sui triedri di 3.^a specie; cioè per es. che una terna gobba di rette individua una coppia di triedri; che due piani aventi una retta comune appartengono a quattro diverse coppie di triedri, ecc. ecc. Ma per ora tralasciamo di far questo.

Considerando le tre figure IV, V, VI si può vedere subito che la differenza caratteristica fra i tre triedri, è, come si sa, che il 1.^o non ha nessun piano coniugato (piano formato con una retta di ciascuno dei tre piani del triedro), il 2.^o ne ha uno e il 3.^o ne ha tre (BERTINI).

Definiamo come *complementare* un triedro ottenuto da un dato costruendo i piani coniugati alle coppie di piani contenute nel triedro dato. Evidentemente il *complementare* di un triedro di 3.^a è sè stesso. Costruiamo poi il complementare di un triedro di 2.^a e propriamente di quello dato per es. dalla fig. V. Si vede subito che risulta precisamente il terzo tipo della fig. VII, e

quindi ne ricaviamo: che il complementare di un triedro di 2.^a specie è un triedro di 3.^a specie. Paragonando poi le due figure si vede anche che: il complementare e il dato hanno tre rette di comune formanti un piano; sono le tre rette (3 4) (5 6) (7 8). Si stabilisce dunque una corrispondenza fra un triedro di 2.^a e uno di 3.^a (BERTINI, pag. 22).

Analogamente se andiamo a costruire il complementare di un triedro di 1.^a specie per es. di quello della fig. IV, troviamo la fig. VIII, che è un triedro anche di 1.^a specie, non possedendo nessun piano coniugato; se di questo troviamo daccapo il complementare abbiamo la fig. IX che rappresenta anche un triedro di 1.^a specie, e se di questo torniamo a prendere il complementare si ha il triedro da cui siamo partiti. Si hanno tre triedri di 1.^a specie che esauriscono (come si vede dalle figure) tutte le 27 rette (BERTINI, pag. 24).

§ 5. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un triedro di 1.^a specie.

Nel § 2 studiando il gruppo che lascia fisso il complesso di due piani che non si incontrano, siamo in fondo riusciti a studiare il gruppo che lascia fisso un triedro di 3.^a specie. Ora vogliamo fare lo stesso per un triedro di 1.^a e 2.^a specie, per poi poter passare a considerare tutte le diverse specie di tetraedri.

Incominceremo col servirci dell'ultimo teorema del paragrafo precedente; lasciando fisso il triedro dato (fig. IV) resteranno fissi, ciascuno in sè, gli altri due triedri consecutivamente complementari, rappresentati dalle fig. VIII, IX. Dunque le restanti 18 rette si scindono in $9 + 9$, e in ciascuna di queste classi ci sarà la transitività.

Studiando le tre figure disegnate si riconosce facilmente questo fatto singolare, che cioè ogni retta del primo si può univocamente far corrispondere ad una retta del secondo e a una del terzo, in modo che le tre rette formino poi un piano. Così per es. la retta (1 3) corrisponderà alla retta (2 7) di fig. VIII e (3 7) di fig. IX e solo a queste. Basterà quindi semplicemente studiare in che maniera si possono permutare fra loro le 9 rette del primo triedro, perchè allora necessariamente si permuteranno analogamente le corrispondenti rette del 2.^o triedro fra loro, e quelle del 3.^o fra loro. Da questo punto di vista la considerazione di queste sostituzioni diventa assai semplice, e basterà solo fissare in un quadro la corrispondenza indicata. Essa è, come si scorge dalle

figure, la seguente:

1.° triedro	2.° triedro	3.° triedro
13	27	37
34	76	58
24	16	46
15	53	32
56	47	38
26	68	81
17	78	82
75	36	48
52	54	41

Ricaviamo intanto questo risultato:

« Se le 9 rette del 1.° triedro restano fisse allora resteranno fisse tutte le rette. »

Le 9 rette di un triedro di 1.^a specie (sei solo di esse sono indipendenti) possono cioè servire a rappresentare una sostituzione qualunque fra le 27 rette nella stessa maniera con cui nella Memoria precedente abbiamo fatto vedere che i sistemi di ARONHOLD (corrispondenti alle sestuple) possono individuare una sostituzione. In altri termini, come altra volta abbiamo fatto vedere che una sostituzione del gruppo delle 27 rette si può rappresentare assegnando arbitrariamente il passaggio delle 6 rette di una sestupla alle 6 rette di un'altra (*), così ora potremmo dire che essa può anche rappresentarsi diversamente, fissando cioè il passaggio fra 6 rette indipendenti di un triedro

(*) *Rappresentaz. geometrica*, ecc. Annali di Matem., tom. 20, § 23.

di 1.^a specie alle 6 analoghe di un altro qualunque triedro di 1.^a specie. Cioè una sostituzione qualunque può considerarsi come il risultato della combinazione di una sostituzione che lascia fissa la sestupla, permutando fra loro le sue sei rette (e di tali sostituzioni ve ne sono 6!) con una sostituzione che muta una sestupla in un'altra qualunque fra le 72. Si hanno quindi in tutto $72 \cdot 6!$ sostituzioni. Ora invece ritroviamo che la medesima sostituzione può ritenersi come il risultato della combinazione di una che lascia fisso un triedro di 1.^a specie (troveremo ora che ve ne sono 18) con un'altra di natura diversa che muta quel triedro in un altro simile. Si ottengono allora $2880 \cdot 18$ sostituzioni diverse e questo numero coincide con quello di sopra.

Rispetto ai triedri di 2.^a o di 3.^a specie non si potrebbe avere qualcosa di analogo.

Resta ora ad esaminare come si possono permutare fra loro le 9 rette della fig. IV, cioè qual'è il gruppo fra queste 9 rette. Da una di esse potrà passare ad un'altra qualunque, e quindi l'ordine sarà divisibile per 9. Se poi una delle rette resta fissa per es. la retta (1 3), allora le due rette (2 5) (2 6) che sono le sole degli altri piani che incontrano (1 3) possono solo permutarsi fra loro; e se queste ultime sono anche fisse, allora saranno fisse (5 6) e (5 7) e quindi poi saranno fisse tutte le altre. L'ordine è quindi $9 \cdot 2 = 18$, e le sostituzioni possiamo dire che sono quelle appartenenti alla funzione

$$\begin{aligned} & \varphi [(1\ 3) + (2\ 6), (2\ 4) + (1\ 5), (3\ 4) + (5\ 6)] \\ & + \varphi [(2\ 6) + (1\ 7), (1\ 5) + (5\ 7), (5\ 6) + (2\ 5)] \\ & + \varphi [(1\ 7) + (2\ 4), (5\ 7) + (3\ 4), (2\ 5) + (1\ 3)], \end{aligned}$$

dove φ sia il simbolo di una funzione simmetrica. Si capisce subito la formazione di questa funzione; sono accoppiate le rette di un piano con quelle di un altro piano, in modo che ogni coppia risulti di rette concorrenti, e ogni termine φ corrisponde ad una delle tre coppie di piani; si può dire anche diversamente, che, cioè, ogni termine φ corrisponde ad uno dei tre piani della fig. VIII.

Resta ora a vedere come si distribuiscono i piani rimanenti rispetto a quelli di un triedro di 1.^a specie, e consideriamo solo i piani che non passano per nessuna delle 9 rette del triedro dato. Basta allora considerare tutti i piani che possono formarsi colle rette delle due fig. VIII, IX.

Si vede subito che ogni retta della fig. IX forma un piano con una coppia di rette della fig. VIII e con una sola; così per es. la retta (2 3) forma un

piano colle due rette (3 6) (6 1); quindi abbiamo 9 piani evidentemente trasformabili gli uni negli altri, perchè fra le 9 rette della fig. IX ci è la transitività semplice. Oltre poi i piani dei due triedri VIII, IX non esistono altri piani non passanti per una retta del triedro dato.

Quindi ne concludiamo: i piani rimanenti sono 15 e si scindono in $3 + 3 + 9$; ognuno degli ultimi 9 è coordinato con una delle 9 rette della fig. IX, e quindi, per la corrispondenza univoca stabilita fra le rette di IV e di IX, ognuno di tali piani è coordinato con una delle rette del triedro dato; quindi gli ultimi 9 piani si dividono in $3 + 3 + 3$ corrispondentemente alle tre facce di questo.

Possiamo stabilire anche questi teoremi:

1.° Non esistono piani aventi *una sola* retta comune col triedro complementare di uno di 1.^a specie, e contemporaneamente nessuna retta comune col dato.

2.° Esistono solo 3 piani che non hanno alcuna retta comune nè col triedro dato di 1.^a specie, nè col suo complementare.

3.° Esistono 9 piani che non hanno nessuna retta comune col triedro dato e ne hanno due col complementare.

§ 6. Gruppo di sostituzioni per un triedro di 2.^a specie.

Il triedro complementare ad uno di 2.^a specie, è, come sappiamo, un triedro di 3.^a specie avente tre rette comuni col dato.

Il gruppo dunque che lascia fisso il triedro della fig. V, scinde le altre 18 rette nelle 6 della fig. X e nelle 12 della fig. XI.

Le sostituzioni lasceranno evidentemente inalterato l'unico piano coniugato [(3 4) (5 6) (7 8)] del triedro dato, e quindi scambieranno fra loro queste tre rette. Le altre tre rette della fig. V si possono distinguere in $3 + 3$ in modo che le prime tre rappresentano una terna gobba [le tre rette partenti dal punto 1, (1 3) (1 5) (1 7)] e le altre tre un'altra terna gobba le cui rette incontrano tutte quelle della prima [le tre rette partenti dal punto 2, (2 4) (2 6) (2 8)]. Ad una coppia di rette di una terna corrispondono due rette della fig. XI, per es. alla coppia (1 3) (1 5) corrispondono le due rette (3 5) (2 7) che sono le sole fra tutte le 12 le quali incontrino contemporaneamente quelle due. È chiaro che se una retta di una terna si muta in una dell'altra, le

due terne si invertono completamente, cioè fra le 6 rette delle due terne si hanno due sistemi d'imprimitività, e corrispondentemente le 12 rette di XI si scindono in $6 + 6$ in due sistemi d'imprimitività, che sono distinti colle rette piene o tratteggiate. Possiamo dire poi che ognuna di queste due setuple si divide in tre coppie corrispondenti univocamente alle tre coppie di rette di una terna, o, ciò che è lo stesso, alle rette della terna stessa (considerando ogni volta anzichè la coppia di rette, la terza retta esclusa da quella coppia).

Possiamo riunire in un quadro questa corrispondenza, e allora abbiamo che secondochè si permutano le sei rette di V si permuteranno corrispondentemente le sei coppie di XI.

13	23 — 57
15	25 — 37
17	27 — 35
24	14 — 68
26	16 — 48
28	18 — 46

Se sono fisse le rette di V resteranno fisse le coppie, ma potranno ancora permutarsi fra loro le due rette di una coppia. Però notiamo che permutando o no le due rette di una delle coppie, bisogna fare lo stesso in tutte le altre coppie, perchè si riconosce subito che, paragonando due coppie fra loro, una retta dell'una incontra una sola retta dell'altra. Resta ora a fissare che relazione c'è fra le sei rette di V e le altre sei di X. Una coppia formata colla retta di una terna e con una dell'altra corrisponde ad una sola retta di X, così per es. alla coppia (1 3) (2 6) corrisponde l'unica retta (3 6) che incontra quelle due. Quindi possiamo fissare questo altro quadro per stabilire il movimento delle sei rette di X.

13 — 26	36
13 — 28	38
15 — 24	54
15 — 28	58
17 — 24	74
17 — 26	76

In quanto poi alle due terne di V esse si possono muovere con $6 \cdot 2$ sostituzioni, perchè una delle 6 rette può occupare il posto di ogni altra, e se una, per es. (1 3), è fissa, allora sono fisse le due terne, e le altre rette di quella terna possono solo permutarsi fra loro, restando allora determinate le altre dell'altra terna. Siccome poi si possono scambiare ancora gli elementi delle 6 coppie di XI , così si hanno in tutto $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ sostituzioni.

Si può notare questo fatto singolare, che se si vogliono lasciar fisse le singole rette di un triedro di 3.^a specie (§ 3), allora si conserva ancora una arbitrarietà come $3!$, cioè esistono $3!$ sostituzioni che lasciano fisse le singole rette di un triedro di 3.^a specie, mentre esistono $2!$ sostituzioni che lasciano fisse le singole rette di un triedro di 2.^a specie, e esiste $1!$ sostituzione che lascia fisse le singole rette di un triedro di 1.^a specie (§ 5).

Anche qui possiamo passare ad esaminare come si scindono in classi di transitività tutti i piani che non hanno rette comuni col triedro. Si vede che colle 6 rette di X si possono formare due piani, con quelle sole di XI non si può formare alcun piano, e infine ogni retta di X forma piano con due coppie di rette di XI , per es. la retta (3 6) forma piano con (2 3) (1 6) e con (4 8) (5 7) e solo con queste. Si hanno dunque soli 14 piani non aventi rette comuni col triedro; questi 14 piani si scindono in $2 + 12$. Quei 12 piani si riuniscono in coppie, e ogni coppia corrisponde ad una delle sei rette di X . Quindi, essendoci la transitività fra le sei rette di X , ci sarà la transitività fra le sei coppie; siccome poi lo scambio dei due piani di una coppia corrisponde (come si vede da uno dei quadri segnati sopra) allo scambio fra loro delle due rette di una delle sei coppie in cui si scindono le 12 rette della fig. XI , così tale scambio è possibile, e quindi si ricava che fra tutti i 12 piani ci è la transitività semplice.

§ 7. Tetraedri di quattro specie.

Se a ciascuno dei triedri considerati sopra, aggiungiamo un altro piano esterno, abbiamo un tetraedro. In questa maniera possiamo venire a fare qui l'analisi e la distinzione di tutti i tetraedri, e giungeremo agli stessi risultati ottenuti da BERTINI con metodo diverso.

Cominciando da un triedro di 3.^a specie, noi abbiamo visto (§ 3) che i piani esterni sono 12 e formano tutti una classe di elementi congiunti fra loro transitivamente. Aggiungendo allora uno di tali piani per es. (1 7 5 2) si ha un tetraedro; dunque possiamo dire che *esiste una sola specie di tetraedri contenenti un triedro di 3.^a specie*. Esso è rappresentato dalla fig. XII, e corrisponde a quel tetraedro da BERTINI classificato per 2.^o (*). Considerando la fig. XII si può subito ricavare che gli altri 3 triedri contenuti in questo tetraedro sono di 1.^a specie. Il numero di tali tetraedri sarà $240 \cdot 12 = 72 \cdot 40$.

Passiamo ora ai tetraedri contenenti un triedro di 2.^a specie. Abbiamo visto (§ 6) che rispetto ad un triedro di 2.^a, gli altri piani si scindono in $12 + 2$. Quindi aggiungendo uno dei primi o uno dei secondi piani dobbiamo avere due tetraedri di natura diversa.

Otteniamo le due fig. XIII, XIV, considerando le quali si riconosce subito che il primo ha 2 triedri di 2.^a specie e 2 di 1.^a specie, e il secondo ha tutti i quattro triedri di 2.^a specie.

Corrispondono rispettivamente a quelli classificati come 3.^o e 4.^o da BERTINI. Ve ne saranno rispettivamente $\frac{2160 \cdot 12}{2} = 81 \cdot 160$ e $\frac{2160 \cdot 2}{4} = 1080$.

Finalmente vediamo quanti tetraedri nuovi si possono formare partendo da un triedro di 1.^a specie. In tal caso, abbiamo visto che i piani esterni si scindono in $3 + 3 + 9$. Se aggiungiamo uno dei primi tre piani, cioè uno dei piani del triedro complementare (fig. VIII) abbiamo evidentemente un tetraedro contenente un triedro di 3.^a e quindi non può essere che quello già ottenuto sopra. Se aggiungiamo uno dei nove piani per es. (vedi fig. IV, VIII, IX) (1 6 8 2) è facile riconoscere che si ha un tetraedro contenente un triedro di 2.^a specie, e quindi uno di quelli già ottenuto; se finalmente aggiungiamo uno dei 3 piani del triedro della fig. IX, per es. (1 8 3 2) abbiamo il tetraedro rappresentato dalla fig. XV, e che, come facilmente si riconosce, ha tutti i

(*) Vedi la tabella in fine del citato lavoro di BERTINI.

4 triedri di 1.^a specie. Di essi ve ne saranno $\frac{2880 \cdot 3}{4} = 2160 = 54 \cdot 40$. Seguendo il BERTINI distingueremo i tetraedri delle fig. XII, XIII, XIV, XV rispettivamente come tetraedri di 2.^a, 3.^a, 4.^a, 1.^a specie.

Con ciò resta compiuta tutta la classificazione dei tetraedri, e passeremo ora a considerare i gruppi di sostituzioni che lasciano fisso ciascuno di essi.

§ 8. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 1.^a specie.

Dalle cose dette avanti risulta che un tetraedro di 1.^a specie si compone di tre piani come IV, e di un piano di IX, e ricordando che il triedro complementare di IX è proprio IV, possiamo dire che esso si compone di un piano di un triedro di 1.^a specie (IX) e di tre piani del triedro complementare a questo. Allora evidentemente si viene a scoprire una certa relazione fra le quattro facce del tetraedro, cioè ognuna viene ad avere la sua opposta sebbene, considerando che tutti i triedri contenuti in questo tetraedro sono di 1.^a specie, parrebbe a prima vista che rispetto ad una faccia tutte le altre comparissero simmetricamente.

Giacchè se nel triedro IX consideriamo la coppia di piani non contenente il piano scelto, questa coppia avrà il suo piano coniugato nel triedro IV, e tal piano dunque sarà corrispondente a quello scelto del triedro IX. Lo stesso può vedersi anche considerando i gruppi di sostituzioni. Teniamo presente la formazione del gruppo di sostituzioni di un triedro di 1.^a specie (§ 5). Se in esso lasciamo ancora fisso il piano (1 8 3 2) (quarto piano del tetraedro), allora dalla tabella stabilita nel § 5 risulta che resterà fisso anche il piano (1 5 6 2) del triedro. Dunque i quattro piani del tetraedro di 1.^a specie non potranno permutarsi fra loro in 4! modi, ma stabilito il passaggio di uno di essi in un altro, resta stabilito il passaggio di un altro dei quattro piani, e che potremo chiamare *opposto* al primo.

Per trovare dunque il gruppo che lascia fisso il tetraedro di 1.^a specie possiamo esaminare prima qual'è quel sottogruppo del gruppo del triedro di 1.^a studiato nel § 5, che lascia fisso uno dei piani, per es. (1 5 6 2). Dalle considerazioni svolte nel § 5 risulta che tal sottogruppo è quello corrispondente alle *due* funzioni

$$\varphi[(13) + (26), (24) + (15), (34) + (56)] + \varphi[(26) + (17), (15) + (57), (56) + (25)] \\ \varphi[(17) + (24), (57) + (34), (25) + (13)],$$

oppure più semplicemente alle due altre funzioni

$$\varphi [(1\ 7) + (2\ 4), (5\ 7) + (3\ 4), (2\ 5) + (1\ 3)]$$

$$\varphi [(1\ 3) + (1\ 7), (3\ 4) + (2\ 5), (2\ 4) + (5\ 7)],$$

dove φ al solito è il simbolo di una funzione simmetrica degli argomenti. Evidentemente l'ordine del gruppo sarà eguale a 6 perchè se (1 3) resta fisso allora restano fisse tutte le altre 6 rette. Stabilita poi una sostituzione fra le sei rette dei due piani (1 3 4 2) (1 7 5 2), resta determinata la sostituzione fra le tre rette del piano (1 5 6 2) perchè le tre rette di questo piano corrispondono alle coppie di rette

$$(1\ 3) (1\ 7), \quad (3\ 4) (2\ 5), \quad (2\ 4) (5\ 7),$$

e indi poi colla corrispondenza stabilita nel § 5 resta determinata la sostituzione delle altre rette fra loro.

Possiamo dunque dire che in un tetraedro di 1.^a specie, se uno dei piani resta fisso, allora restano solo possibili sei sostituzioni. Quindi, essendo poi evidentemente i singoli piani fra loro equivalenti, possiamo asserire che il gruppo del tetraedro di 1.^a specie possiede $6 \cdot 4 = 24$ sostituzioni.

Esaminando più addentro la fig. XV rappresentante un tetraedro di 1.^a specie, ne ricaviamo qualche altro risultato sulle relazioni reciproche dei quattro piani fra loro. Formando le sei coppie che risultano con quei quattro piani, e costruendo i piani coniugati di ciascuna di queste coppie, si ricava che per quattro di queste coppie i piani coniugati sono tutti diversi fra loro, e non hanno rette in comune, ma per le due coppie:

$$(1\ 3\ 4\ 2) (1\ 7\ 5\ 2)$$

$$(1\ 5\ 6\ 2) (1\ 8\ 3\ 2),$$

cioè per le coppie di piani che abbiamo già chiamati *opposti*, i piani coniugati sono coincidenti e cioè il piano:

$$(3\ 5) (6\ 8) (7\ 4),$$

il quale non ha rette comuni cogli altri quattro corrispondenti alle 4 coppie. Quindi intanto possiamo ricavare: « che le 15 rette esterne ad un tetraedro di 1.^a specie, formano un pentaedro ».

È chiaro poi che restando fisso, per le sostituzioni, il tetraedro, resterà fisso il piano (3 5) (6 8) (7 4) e quindi: « ad ogni tetraedro di 1.^a specie è

coordinato un unico piano esterno ». Resta inoltre fisso l'altro tetraedro dei 4 piani corrispondenti alle 4 coppie, e che sono:

$$(1\ 6\ 7\ 2), \quad [(3\ 6)(4\ 5)(7\ 8)], \quad (1\ 4\ 8\ 2), \quad [(3\ 7)(8\ 5)(4\ 6)],$$

e si può verificare che tutti i triedri contenuti in questo nuovo tetraedro sono tutti anche di 1.^a specie, e quindi possiamo dire: « che ad ogni tetraedro di 1.^a ne corrisponde un altro tutto esterno ad esso della stessa specie, e ai due corrisponde un unico piano esterno ».

Dalle cose dette risulta che le 15 rette esterne ad un tetraedro di 1.^a si scindono in 12 + 3; le prime 12 sono rappresentate dalla fig. XV. Possiamo osservare che rispetto alle tre rette del piano fisso, le 12 rette di XV e le 12 di XVI si scindono in 3 sistemi di 4 rette ciascuno. Ognuno di questi sistemi risulta di quelle rette che incontrano una delle tre (3 5) (6 8) (7 4) del piano fisso. Tali sistemi sono rispettivamente:

Piano fisso	1. ^o tetraedro	2. ^o tetraedro
35	13, 15, 23, 25	48, 46, 67, 87
68	26, 18, 57, 34	16, 28, 54, 37
47	24, 17, 38, 56	14, 27, 36, 58

Ora si può subito vedere che ogni retta di uno qualunque dei tetraedri forma un piano e uno solo con due rette dell'altro tetraedro e che in questa tabella non compariscono nella sua medesima orizzontale, così per es. (1 3) forma un piano con (3 7) (2 7), e viceversa (4 8) forma un piano con (1 8) (2 4).

Con questa osservazione si vede subito che tutte le sostituzioni fra le 12 rette del tetraedro sono quelle corrispondenti alla funzione

$$\begin{aligned} & \varphi [(1\ 8) + (2\ 4), (5\ 7) + (3\ 8), (2\ 6) + (1\ 7), (3\ 4) + (5\ 6)] + \\ & + \varphi [(2\ 5) + (5\ 6), (1\ 3) + (3\ 8), (1\ 5) + (2\ 4), (2\ 3) + (1\ 7)] + \\ & + \varphi [(2\ 3) + (3\ 4), (1\ 5) + (5\ 7), (1\ 3) + (6\ 2), (2\ 5) + (8\ 1)]. \end{aligned}$$

Tali sostituzioni sono precisamente in numero di 24 quante sappiamo che debbono essere. Ognuna poi delle 12 coppie qui segnate corrisponde ad *una*

delle 12 rette del 2.^o tetraedro; e ogni termine φ corrisponde ad una delle tre rette del piano fisso; resta così determinato il movimento di tutte le rette.

Si può ora vedere come si distingueranno fra loro i piani esterni rispetto al tetraedro dato. I piani esterni al tetraedro sono prima di tutto i quattro piani del tetraedro della fig. XVI, e poi i 6 piani passanti per una retta del piano (3 5) (4 7) (6 8) e per due rette dello stesso tetraedro, e infine il piano (3 5) (4 7) (6 8). In tutto 11 piani divisi in 3 categorie di $1 + 4 + 6$.

§ 9. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 2.^a specie.

Il tetraedro di 2.^a specie, come sappiamo, si forma aggiungendo ad un triedro di 3.^a specie un altro piano (§ 7) in modo che questo colle tre coppie di piani del 1.^o triedro dia luogo sempre a triedri di 1.^a specie. Allora si intende subito che i quattro piani non figurano nello stesso modo, ma quest'ultimo aggiunto figura in maniera completamente diversa da tutti gli altri; per le sostituzioni dunque che lasciano fisso il tetraedro di 2.^a specie, tal piano non può che restar fisso, e non permutarsi con gli altri. Onde intanto ne ricaviamo il risultato: « che il gruppo del tetraedro di 2.^a specie è un sottogruppo di quello del triedro di 3.^a specie (§ 3) ».

Propriamente è quel sottogruppo che scambia fra loro solo le tre rette (1 7) (2 5) (5 7) le quali nella tabella del § 3 appartengono rispettivamente ai sistemi d e f , e a linee diverse.

Tenendo presente allora la formazione del gruppo altrove studiato (§ 3) si ricava che i sistemi d e f potranno solo permutarsi fra loro, e così i sistemi a b c . Perciò le 15 rimanenti rette si scindono in $9 + 6$, e sono rappresentate rispettivamente dalle linee nere e tratteggiate della fig. XVII, che si può subito costruire tenendo presente la fig. III.

Per potere facilmente orizzontarci nella formazione di questo gruppo, anzichè ricavarlo da quello del § 3, facciamo delle considerazioni a parte, e esaminiamo la disposizione di tutte le 9 e 6 rette rispetto alle tre rette del piano fisso (1 7 5 2).

Troviamo che le 9 rette nere di XVII si dividono in 3 classi tali che le 3 rette di ciascuna classe incontrano una delle 3 rette del piano, e così anche le sei rette tratteggiate si scindono in 3 classi di 2 rette ciascuna, e infine anche le 9 rette del triedro di 3.^a specie di XII si dividono analogamente in 3 classi.

La corrispondenza di cui si parla è data dal seguente quadro:

Piano fisso	Rette tratteggiate	Rette nere di XVII	Rette di XII
17	23	74	24
	73	76	26
		28	78
57	38	68	34
	46	27	15
		48	36
52	58	53	13
	18	16	56
		14	54

Si vede da questo quadro che le 3 rette comprese in una classe formano una terna gobba, e inoltre le tre di una classe delle prime 9 rette si corrispondono una ad una alle tre della classe corrispondente delle altre 9 rette, perchè per es. la retta (7 4) incontra solo la retta (2 4) fra le altre tre (2 4) (2 6) (7 8). Noi nel quadro abbiamo disposto sulla stessa orizzontale le corrispondenti. Inoltre le due rette di una coppia della 2.^a colonna sono sempre due rette concorrenti, e d'altra parte nessuna di esse incontra una delle 6 comprese nella medesima linea, ma nella 3.^a e 4.^a colonna.

Si vede inoltre che le 9 rette della 3.^a colonna formano una figura come il primo tipo di fig. VII, e quindi quelle 9 rette formano una coppia di triedri coniugati. Infine nella 4.^a colonna le prime rette di ciascuna classe si corrispondono fra loro come quelle che vengono a costituire una delle facce del tetraedro dato, e così le seconde e le terze. E quindi si avrà un'analogia corrispondenza fra le varie classi della 3.^a colonna. Ne ricaviamo che restando fisso il tetraedro resta fisso un altro triedro di 3.^a specie tutto esterno ad esso e naturalmente anche il coniugato di questo, ovvero « ad ogni tetraedro di 2.^a specie corrispondono due triedri di 3.^a specie esterni, e fra loro coniugati ».

Ciascuna delle tre rette di una classe dell'ultima colonna appartiene ad

uno dei tre piani di XII, e quindi permutandosi quelle tre rette fra loro, ciò corrisponderà alla permutazione fra loro dei tre piani di XII, e quindi alla analoga permutazione delle rette delle altre classi.

Il gruppo dunque ce lo possiamo figurare come una permutazione fra le tre rette del piano fisso, accompagnata da una permutazione qualunque fra le tre rette di una classe (il che porterà permutazione analoga fra le rette di qualunque altra classe). Resta allora stabilita la permutazione fra le due rette di una coppia della 2.^a colonna, perchè è facile vedere che per es. la retta (2 3) incontra le tre della 2.^a classe della 4.^a colonna, e non quelle della 3.^a classe, e viceversa (7 3) incontra quelle della 3.^a e non quelle della 2.^a. Quindi se la 2.^a si permuta colla 3.^a e solo allora, le due rette (2 3) (7 3) si scambiano fra loro.

Si hanno quindi in tutto $3! 3!$ sostituzioni.

Si può esaminare infine come si distribuiscono fra loro i piani esterni. Ve ne sono, come risulta dalle cose di sopra, tre formanti un triedro di 3.^a specie, e tre altri formanti il triedro coniugato; formano due classi fra loro separate; e poi ve ne sono altri due formati colle 6 rette tratteggiate, cioè:

$$[(3\ 7)\ (4\ 6)\ (5\ 8)], \quad (1\ 8\ 3\ 2).$$

In tutto vi sono 8 piani esterni divisi in tre classi cioè $2 + 3 + 3$. Si può osservare che non esiste altra sostituzione che l'unità che lasci fisse tutte le singole rette del tetraedro di 2.^a specie.

§ 10. Gruppo del tetraedro di 3.^a specie.

Questo tetraedro ha due triedri di 1.^a specie e due di 2.^a specie. Quindi i suoi quattro piani non potranno permutarsi fra loro in qualunque modo, cioè ogni piano ha un altro solo (che diremo suo *opposto*) con cui può permutarsi, e le due coppie di piani opposti non possono però permutarsi fra loro, come succedeva nel tetraedro di 1.^a specie (§ 8). Nella fig. XIII i piani opposti sono:

$$(1\ 8\ 5\ 2) \quad (1\ 3\ 4\ 2) \\ (1\ 5\ 6\ 2) \quad (1\ 7\ 8\ 2),$$

di cui i due primi si oppongono ai due triedri di 2.^a specie, e i due ultimi si oppongono ai due triedri di 1.^a specie.

Il piano coniugato ai due primi è $[(8\ 4)(7\ 6)(3\ 5)]$ cioè è un piano tutto esterno al tetraedro, mentre il coniugato agli altri due è $[(5\ 8)(3\ 4)(7\ 6)]$ cioè possiede due rette del tetraedro dato, e una retta di quest'ultimo piano. Questi due piani debbono dunque restar fissi isolatamente; resterà fissa la retta $(6\ 7)$ che è il loro asse comune.

Dunque: « il gruppo del tetraedro di 3.^a è un sottogruppo di quello studiato nel § 2, che lascia fissi due piani concorrenti ».

Fra le 12 rimanenti rette si vede che ve ne sono quattro sole che incontrano la $(6\ 7)$, e sono quelle segnate in nero nella fig. XVIII, e poi fra le rimanenti ve ne sono 2 sole che si incontrano fra loro e con $(3\ 5)$ e 2 altre che si incontrano fra loro e con $(4\ 8)$.

Dalle rimanenti 8 si staccano quindi queste altre 4, potendo $(3\ 5)$ scambiarsi con $(4\ 8)$. E restano poi finalmente le ultime 4. Dunque possiamo dire che le 12 rette si separano in 3 sistemi, in modo che non esiste la transitività fra le rette di un sistema in quelle di un altro. Questi sistemi sono rappresentati dalla fig. XVIII. Si vede subito che si possono formare in una sol maniera quattro piani le cui rette appartengono a ciascuno dei tre sistemi, il che verrà a stabilire una corrispondenza univoca fra le rette dei sistemi, per modo che stabilita la sostituzione per es. fra le 4 rette segnate in nero nella fig. XVIII, resta stabilito il movimento di tutte le altre. Tale corrispondenza è:

1.° sistema	2.° sistema	3.° sistema
16	63	32
27	74	41
38	57	46
45	68	37

Le quattro rette del primo sistema formano due coppie di rette concorrenti, e le rette di una coppia non incontrano quelle dell'altra. È facile vedere che fra quelle quattro rette non ci possono essere più che 4 sostituzioni, perchè se una di esse per es. $(1\ 6)$ è fissa, allora resterà naturalmente fissa $(2\ 7)$ che con essa forma coppia, e inoltre restando fisse $(6\ 3)$ $(3\ 2)$ e, osservando che la prima di queste due incontra $(4\ 5)$ e non $(3\ 8)$, mentre vice-

versa la (3 2) incontra (3 8) e non (4 5), si ha che resteranno fisse anche (3 8) (4 5). Propriamente il gruppo fra le 4 rette del 1.^o sistema (e così in corrispondenza per gli altri sistemi), essendo *transitivo* e avendo 4 sostituzioni, è il noto gruppo *quadruplo* di 4 elementi (KLEIN lo chiama *vierergruppe*). Dunque: « il gruppo del tetraedro di 3.^a specie è isomorfo col gruppo quadruplo di 4 elementi ».

Stabilita la sostituzione fra le quattro rette del 1.^o sistema, resta stabilita quella fra tutte le 15 rette esterne come risulta dalle osservazioni fatte sopra, e poi resta anche stabilita quella fra le 12 rette del tetraedro perchè si può facilmente osservare sulle figure che ogni singola retta di XIII si può far corrispondere a due rette di XVIII in maniera che con questa venga a costituire un piano; così per es. la retta (1 3) appartiene al piano (1 3 7 2) di cui le altre rette sono in XVIII, e la retta (1 7) appartiene analogamente al piano (1 7 3 2).

I piani esterni al tetraedro sono (come risulta anche dall'analisi fatta):

1) Il piano fisso (6 7) (3 5) (4 8).

2) Due piani passanti per (6 7) e quindi fissi nel loro assieme, cioè (6 7) (4 5) (3 8), (1 6 7 2).

3) Due piani passanti rispettivamente per (35), (48) e sono (35)(68)(47), (4 8) (5 7) (3 6).

4) Quattro piani formati prendendo una retta di ciascuno dei tre sistemi. Essi sono quelli corrispondenti alle quattro linee del quadretto segnato sopra.

In tutto 9 piani esterni divisi in 4 classi.

Si può osservare che i quattro ultimi piani non hanno rette comuni, e formano un tetraedro che si riconosce subito di 1.^a specie, perchè contiene tutti triedri di 1.^a specie. Infatti tenendo presente la tabella di sopra si ha che il piano coniugato dei piani rappresentati dalle due prime linee è

$$(6\ 7)\ (5\ 8)\ (3\ 4),$$

e questo stesso è anche il piano coniugato dei piani delle ultime due linee. Ora nessuna di queste rette comparendo nel tetraedro stesso si ricava che esso ha tutti i triedri di 1.^a specie.

Onde:

« Ad un tetraedro di 3.^a specie corrisponde un altro di 1.^a specie tutto esterno ad esso. Le tre rette esterne ad ambedue i tetraedri formano a loro

volta un piano (6 7) (3 5) (4 8); onde il tetraedro di 3.^a è compreso in un enneaedro. »

Con tutte le osservazioni già fatte non sarebbe difficile dedurre altri teoremi sulle relazioni reciproche fra i due tetraedri così costruiti.

§ 11. Gruppo del tetraedro di 4.^a specie e del pentaedro *principale*.

Nel tetraedro di 4.^a specie (fig. XIV) tutti i quattro triedri sono di 2.^a specie. Consideriamo allora i piani coniugati di ciascun triedro.

Si hanno i quattro piani:

$$(3\ 4)\ (5\ 6)\ (7\ 8)$$

$$(1\ 7\ 4\ 2)$$

$$(1\ 3\ 6\ 2)$$

$$(1\ 5\ 8\ 2),$$

i quali non hanno rette comuni, e formano anche tutti triedri di 2.^a specie, possiamo dunque enunciare questo risultato notevole:

« I quattro piani coniugati dei 4 triedri contenuti in un tetraedro di 4.^a specie, formano un tetraedro della medesima specie. »

Teniamo presente come abbiamo formata la fig. XIV. L'abbiamo formata aggiungendo alla V uno dei due piani di X. Le rette esterne sono dunque ancora le altre tre di X e le 12 di XI. Ora riconosciamo subito che le prime tre stanno rispetto al tetraedro in posizione completamente diversa che le altre.

Esse sono (6 7) (3 8) (5 4), formano un piano, e ciascuna di esse, per es. (6 7) incontra due coppie di rette (1 7) (6 2), (3 4) (5 8) del tetraedro XIV, colle quali forma due piani; queste quattro rette appartengono ciascuna a ciascuno dei quattro piani, e quindi possiamo dire che ogni retta fra quelle tre corrisponde ad una delle tre scissioni dei 4 piani in 2 + 2.

Le 12 rette di XI si riuniscono in 6 coppie le quali a loro volta si riuniscono a due a due correlate alle tre rette del piano fisso; in altri termini delle 12 rette ve ne sono 4 che incontrano (3 8), 4 che incontrano (6 7), e le ultime 4 che incontrano (5 4).

Questo fa vedere che fra queste 12 rette c'è la transitività semplice, e esse formano tre sistemi d'imprimitività, rappresentati rispettivamente dalla

fig. XIX. Se restano fissi questi sistemi, restano fisse le tre rette del piano fondamentale, e quindi, per l'osservazione fatta sopra, fra le quattro facce $a b c d$ del tetraedro saranno solo possibili le quattro sostituzioni:

$$1, \quad (ab)(cd), \quad (ac)(bd), \quad (ad)(bc).$$

Anche le 12 rette di XIV si distribuiscono in 3 sistemi d'imprimitività ciascuno coordinato con una delle tre rette del piano fondamentale, e quindi si ha la corrispondenza fra le due serie di sistemi. Questa corrispondenza è espressa dal seguente quadro:

Piano fondamentale	Rette di XIV	Rette di XIX
38	13, 28, 47, 56	23, 18, 57, 46
67	34, 17, 58, 26	27, 16, 35, 48
45	24, 87, 36, 15	25, 14, 37, 68

Le tre rette del piano fondamentale possono permutarsi in $3!$ modi. Sieno esse fisse, allora i tre sistemi resteranno separati.

Fra le rette del primo sistema della seconda colonna possono farsi, come abbiamo detto, solo quattro sostituzioni corrispondenti ad altrettante sostituzioni fra i quattro piani del tetraedro dato; e se quelle quattro rette son fisse, saranno fisse le quattro facce, e quindi ogni singola retta del 2.º e 3.º sistema contenuto nella seconda colonna. Si può ora esaminare la relazione che ci è fra le rette di un sistema della seconda colonna, e quelle di un sistema della terza colonna. Ogni retta della seconda colonna non incontra nessuna di quelle dell'altra colonna e della sua medesima linea, mentre incontra due sole delle quattro situate in linee diverse. Propriamente le due rette (1 3) (4 7) incontrano (2 7) (3 5) mentre le altre due (8 6) (1 5) incontrano le medesime due rette.

In altri termini restando fisse tutte le rette della 2.^a colonna, si potranno ancora permutare fra loro (2 7) con (3 5) e (1 6) con (4 8) cioè operare fra le quattro rette (2 7) (1 6) (3 5) (4 8) quattro sostituzioni:

$$1, \quad [(2 7) (3 5)], \quad [(1 6) (4 8)], \quad [(2 7) (3 5)] [(1 6) (4 8)].$$

Se poi queste rette sono fisse allora restan fisse tutte le altre, perchè in

quelle per es. della prima linea, colla considerazione di sopra si vede che dovrebbe restar fissa la coppia (2 3)(5 7), ma (2 7) incontra (5 7) senza incontrare (2 3) dunque, (5 7) deve restar fisso; e così tutte le altre rette. Onde ricaviamo che l'ordine del gruppo è $3! 4 \cdot 4$.

Se al tetraedro aggiungiamo il piano fisso chiamato da noi fondamentale, allora si ha un pentaedro in cui tutti i triedri sono di 2.^a specie, e che non ha altri piani esterni, si ha cioè il *pentaedro principale* (CREMONA, BERTINI).

Il gruppo del pentaedro principale avrà per ordine $5 \cdot 3! 4 \cdot 4$ perchè se lasciamo fisso uno dei cinque piani dobbiamo ricadere nel gruppo precedente; l'ordine di tal gruppo è il terzo dell'ordine del gruppo che lascia fissa una bisestupla, che è quella formata colle 12 rette esterne.

Rispetto al tetraedro di 4.^a specie i piani esterni sono di due categorie, cioè o il piano (3 8)(6 7)(4 5), oppure i sei piani passanti per una di queste tre rette e per due rette di XIX. Fra questi ultimi c'è la transitività come risulta dalle considerazioni sopra svolte.

§ 12. Pentaedri di varie specie.

Vediamo ora quante specie di pentaedri si possono formare aggiungendo un altro piano a ciascuno dei tetraedri considerati sopra. In quanto ai pentaedri ricavati dal tetraedro di 1.^a specie noi possiamo osservare che qualunque piano aggiungiamo al tetraedro di 1.^a specie, si viene a formare sempre almeno un triedro di 2.^a o di 3.^a specie; non esisteranno cioè pentaedri in cui tutti i triedri sono di 1.^a specie; ciò si può riconoscere subito tenendo presenti le considerazioni svolte nel § 8. Onde allora un pentaedro ricavato da un tetraedro di 1.^a specie, potrà anche certamente ricavarci da un tetraedro di 2.^a 3.^a o 4.^a specie; quindi noi possiamo limitarci a considerare solo questi ultimi.

In quanto al tetraedro di 2.^a specie abbiamo già visto (§ 9) che i piani esterni si riuniscono in 3 categorie distinte.

Per piani rappresentanti queste tre categorie possiamo scegliere rispettivamente

I — (1 8 3 2)

II — (1 4 8 2)

III — (1 6 8 2),

che insieme con i piani della fig. XII danno luogo a tre pentaedri. Sulla figura si può riconoscere che il primo di essi contiene:

1 triedro di 3. ^a specie	3 tetraedri di 1. ^a specie
9 triedri di 1. ^a " "	2 " 2. ^a "

il secondo contiene:

2 triedri di 3. ^a specie	1 tetraedro di 1. ^a specie
8 " 1. ^a " "	4 tetraedri di 2. ^a "

e il terzo:

1 triedro di 3. ^a specie	2 tetraedri di 2. ^a specie
3 triedri di 2. ^a " "	3 " 3. ^a "
6 " 1. ^a " "	

Ricordando dunque il numero dei tetraedri XII si ricava subito che i numeri rispettivi di questi pentaedri sono:

$$\frac{72 \cdot 40 \cdot 2}{2} = 2880$$

$$\frac{72 \cdot 40 \cdot 3}{2} = 4320$$

$$\frac{72 \cdot 40 \cdot 3}{4} = 2160.$$

Essi corrispondono rispettivamente a quelli classificati da BERTINI nella tabella inserita in fine del suo lavoro in 1.^o 2.^o 3.^o posto. Noi li chiameremo rispettivamente pentaedri I II III.

Nel § 10 abbiamo visto che rispetto ad un tetraedro di 3.^a specie i piani esterni si riuniscono in 4 categorie; però possiamo osservare che aggiungendo il piano (3 5) (6 7) (4 8) della prima categoria veniamo ad ottenere un pentaedro contenente già un triedro di 3.^a specie (quello dei piani (1 3 4 2), (1 8 5 2), [(3 5) (6 7) (4 8)]), e quindi contenente certamente un tetraedro di 2.^a specie che è l'unica specie di tetraedri contenenti triedri di 3.^a specie. Perciò otteniamo un pentaedro di quelli già considerati sopra.

Aggiungiamo allora i piani delle altre tre categorie, e propriamente pos-

siamo scegliere i piani

IV — (1 6 3 2)	della categoria 4. ^a
V — [(3 6) (4 8) (5 7)]	" 3. ^a
VI — (1 6 7 2)	" 2. ^a

Abbiamo allora rispettivamente pentaedri contenenti

6 triedri di 1. ^a specie	1 tetraedro di 1. ^a specie
4 " 2. ^a "	4 tetraedri di 3. ^a "
5 " 1. ^a "	5 " 3. ^a "
5 " 2. ^a "	
4 " 1. ^a "	4 " 3. ^a "
6 " 2. ^a "	1 tetraedro di 4. ^a "

e quindi i loro numeri sono rispettivamente

$$\frac{81 \cdot 160 \cdot 4}{4} = 12960$$

$$\frac{81 \cdot 160 \cdot 2}{5} = 5184$$

$$\frac{81 \cdot 160 \cdot 2}{4} = 6480,$$

e corrispondono esattamente a quelli classificati da BERTINI in 4.^o 5.^o 6.^o posto.

Finalmente rispetto ad un tetraedro di 4.^a i piani esterni sappiamo (§ 11) che si riuniscono in 2 categorie; ma aggiungendo uno dei 6 piani della seconda categoria, per es (2 3 8 1) si viene a formare certamente almeno un triedro di 1.^a specie (per es. quello dei tre piani (1 3 4 2) (1 5 6 2) (1 8 3 2) fig. XIV) e quindi il pentaedro che si forma deve essere uno di quelli già ottenuti precedentemente.

Resta allora ad aggiungere solo il piano

$$\text{VII} - (3 8) (6 7) (4 5),$$

e, come abbiamo già osservato, si ha allora il *pentaedro principale*. Esso contiene:

$$10 \text{ triedri di } 2.^{a} \text{ specie} \quad | \quad 5 \text{ tetraedri di } 4.^{a} \text{ specie},}}$$

e quindi ve ne sono

$$\frac{1080}{5} = 216.$$

Esso corrisponde al VII di BERTINI ed è disegnato nella fig. XX.

§ 13. Alcuni teoremi sui pentaedri. — Poliedri principali.

Si sa che le 12 rette restanti da un pentaedro principale formano una doppia sestupla; esse sono rappresentate dalla fig. XIX; noi ora ci proponiamo qui di fare ricerche analoghe relative agli altri pentaedri, cioè di studiare la configurazione delle 12 rette esterne ad uno dei sei altri pentaedri già classificati nel paragrafo precedente. E cominciando dal pentaedro I, si ha che le 12 rette esterne sono:

$$(4\ 6)(3\ 7)(5\ 8); \quad (1\ 4)(1\ 6)(3\ 5)(2\ 7)(8\ 6)(4\ 8)(7\ 6)(2\ 8)(4\ 7).$$

Andando ad esaminare le relazioni reciproche che hanno queste rette fra loro riconosciamo subito questo, che cioè ognuna di esse ne incontra cinque altre, e propriamente una delle 9 della seconda categoria incontra una delle prime tre, e due coppie di rette concorrenti comprese nella stessa seconda categoria; mentre che una delle prime tre incontra le altre due, e tre altre della seconda categoria formanti poi una terna gobba. Così per es. (1 4) incontra (4 6) e poi le coppie (2 8)(4 8), (2 7)(4 7), mentre (4 6) incontra (3 7)(5 8) e poi la terna gobba (1 4)(1 6)(3 5). Questo ci fa vedere che le prime tre si comportano in maniera completamente diversa che le altre, ed è perciò che noi le abbiamo separate dalle altre nove. Quelle tre prime formano un piano, e le altre nove si scindono in 3 + 3 + 3, ognuna di queste classi coordinata ad una delle tre rette del piano.

Possiamo propriamente distribuire le altre nove nella seguente tabella

$$\begin{array}{ccc} (1\ 4) & (1\ 6) & (3\ 5) \\ (8\ 6) & (4\ 8) & (2\ 7) \\ (7\ 6) & (4\ 7) & (2\ 8), \end{array}$$

in maniera che, come si vede, le tre rette di una orizzontale formano una terna gobba, e corrispondono ad una medesima retta del piano (4 6)(3 7)(5 8); le tre rette di una colonna formano anche una terna gobba, e le tre rette di

una diagonale (intendendo per tre rette di una diagonale quelle non situate a due a due nè sulla medesima orizzontale nè verticale), formano un piano, e quindi si hanno 6 piani; e perciò intanto ne concludiamo che esistono solo 7 piani completamente esterni al pentaedro I. Si riconosce subito che quelle 9 rette formano una coppia di triedri coniugati; i tre piani di uno dei triedri col piano esterno formano un tetraedro di 2.^a specie (§ 9). Di tali tetraedri ve ne saranno due secondochè si considera uno dei triedri di 3.^a specie o il suo coniugato. Dunque possiamo conchiudere:

« Ad un pentaedro I corrispondono esternamente due tetraedri di 2.^a specie. »

Tenendo presente che nel pentaedro I esiste un triedro di 3.^a specie, e che in luogo di questo possiamo considerare il suo coniugato, e allora otteniamo un altro pentaedro I, possiamo completare il risultato precedente dicendo:

« Ad una coppia di pentaedri I coniugati corrisponde esternamente una coppia di tetraedri II coniugati. »

Effettivamente si sa che il numero dei pentaedri I e tetraedri II è il medesimo cioè 2880.

Ricaviamo anche allora naturalmente che:

« Un pentaedro I esiste in due enneaedri, e non esiste in nessun altro poliedro principale al disotto dell'enneaedro. » (*) (BERTINI.)

Passiamo ora al pentaedro II.

Le rette esterne sono:

(2 3) (3 5) (3 7) (3 8) (7 4) (7 6) (4 6) (1 8) (1 6) (6 8),

e si riconosce che con queste non possono formarsi che solo i quattro piani

(2 3 8 1) (2 7 6 1) (3 5 · 7 4 · 6 8) (3 7 · 5 8 · 4 6).

Questi quattro piani non hanno rette comuni, e si può verificare che tutti i triedri con essi formati sono di 1.^a specie, dunque essi formano un tetraedro di 1.^a specie. Dunque:

« Ad ogni pentaedro II corrisponde esternamente un tetraedro I ed effettivamente i loro numeri coincidono cioè esistono 2160 di quei pentaedri e di quei tetraedri. »

(*) Si sa che cosa si intende per poliedro principale; s'intende quello non contenuto in altro con un numero maggiore di facce, cioè quello *esternamente* al quale non esistono altri piani.

Si ha ancora che:

« Ogni pentaedro II esiste in un solo poliedro principale che è l'enneaedro, ed esiste *in un solo* enneaedro. »
risultato già trovato dal BERTINI.

Passando ora al pentaedro III troveremo una relazione singolare fra i pentaedri III e i pentaedri II.

Le rette esterne a III sono, come si riconosce subito, le stesse di prima, meno che, in luogo di (1 6) (8 6) vi sono (1 4) (8 4), cioè, osservando poi che tutte le altre rette stanno costruite simmetricamente rispetto ai punti (4) (6), possiamo dire che scambiando i due punti (4) (6) si otterranno le rette esterne al pentaedro III da quelle corrispondenti al pentaedro II. Di qui ne ricaviamo che colle medesime rette di un pentaedro II si può costruire un pentaedro III, e quindi si viene a stabilire una corrispondenza fra i pentaedri delle due specie. Badando poi ai numeri di essi pentaedri, cioè che di III ve ne sono 4320 mentre di II ve ne sono 2160 si viene a conchiudere che ad ogni pentaedro II ne corrisponderanno *due* di III. Nè può venire il dubbio che colle medesime rette di un pentaedro II se ne possano formare degli altri, perchè abbiamo già visto che il complemento di uno di essi è un tetraedro I e uno solo, non potendo formare colle 12 rette di uno dei 2160 tetraedri I altri piani che le facce stesse del tetraedro, e quindi esisteranno certamente 2160 assieme *diversi* di 15 rette ognuno corrispondente ad un unico pentaedro II.

Adesso ci si presenta il problema: Qual'è l'altro pentaedro III coniugato al medesimo II?

Se noi in III permutiamo i punti (4) (6), abbiamo, come risulta dalle cose di sopra dette, un pentaedro III coniugato a II. Esso è quello dei cinque piani:

$$(1\ 3\ 6\ 2)(1\ 5\ 4\ 2)(3\ 4 \cdot 5\ 6 \cdot 7\ 8)(1\ 7\ 5\ 2)(1\ 4\ 8\ 2). \quad (a')$$

Se prendiamo il triedro coniugato a quello di 3.^a specie formato con i primi tre piani, abbiamo:

$$(1\ 3\ 4\ 2)(1\ 5\ 6\ 2)(3\ 6 \cdot 4\ 5 \cdot 7\ 8)(1\ 7\ 5\ 2)(1\ 4\ 8\ 2), \quad (a)$$

che formano precisamente il pentaedro II.

Onde ricaviamo:

« Se nel pentaedro II prendiamo il triedro coniugato di uno dei due triedri di 3.^a specie in esso contenuti, abbiamo un pentaedro III corrispondente al II. Naturalmente se quello che abbiamo fatto per un triedro di

« 3.^a specie, lo facciamo per l'altro triedro di 3.^a specie, abbiamo l'altro pentaedro III. »

Quindi al medesimo (a) oltre (a') corrisponderà anche [l'altro triedro di 3.^a specie di (a) è quello del 3.^o 4.^o 5.^o piano]:

$$(1\ 3\ 4\ 2)(1\ 5\ 6\ 2)(1\ 7\ 8\ 2)(1\ 4\ 5\ 2)(3\ 6 \cdot 4\ 8 \cdot 7\ 5). \quad (a'')$$

E si riconosce che « i due pentaedri (a') (a'') corrispondenti al medesimo (a) non hanno piani comuni ».

Naturalmente, come avanti, anche qui possiamo dire:

« Ogni pentaedro III è compreso in un solo poliedro principale che è l'enneaedro e esiste in un solo enneaedro. »

Le 12 rette esterne ad un pentaedro IV sono:

$$\begin{array}{ccc} (3\ 5) & (7\ 6) & (4\ 8) \\ (1\ 4) & (4\ 7) & (7\ 2) \\ (3\ 7) & (4\ 5) & (6\ 8) \\ (5\ 7) & (3\ 8) & (4\ 6), \end{array}$$

le quali formano i quattro piani corrispondenti a ciascuna di queste linee, e poi formano anche i due piani (3 5)(4 7)(6 8), (7 6)(3 8)(4 5) e con quelle rette non si possono formare altri piani che questi sei.

I quattro primi piani formano un tetraedro III, quindi:

« Ad ognuno dei 12960 pentaedri IV corrisponde uno dei tetraedri di 3.^a specie. »

Se al pentaedro uniamo i quattro primi piani, abbiamo un enneaedro, e se invece uniamo il piano (3 5)(4 7)(6 8) allora non possiamo poi che aggiungere il piano (5 7)(3 8)(4 6) ovvero (7 6)(3 8)(4 5) e nessun altro e quindi si ha un ettaedro principale, mentre che se uniamo (7 6)(3 8)(4 5) possiamo aggiungere [oltre (5 7)(3 8)(4 6)] anche (1 4 7 2). Quindi si hanno 3 ettaedri principali a cui appartiene il pentaedro IV (BERTINI).

Pel pentaedro V si vede analogamente che colle rette esterne si possono formare solo i cinque piani

$$\begin{array}{c} 1\ 6 \cdot 6\ 7 \cdot 7\ 2 \\ 1\ 4 \cdot 4\ 7 \cdot 7\ 2 \\ 3\ 5 \cdot 4\ 7 \cdot 6\ 8 \\ 6\ 8 \cdot 3\ 7 \cdot 4\ 5 \\ 3\ 8 \cdot 4\ 5 \cdot 7\ 6. \end{array}$$

Ognuno di questi piani ha una retta comune col precedente e una col seguente, mentre l'ultimo ha una retta comune col primo. Essi formano un pentaedro di quelli che in seguito chiameremo *circolari chiusi*. Quindi:

« Ad ogni pentaedro V corrisponde esternamente un pentaedro circolare « chiuso. »

È chiaro allora che fra quei cinque non se ne possono scegliere *più che due* non aventi fra loro rette comuni, e inoltre di tali coppie ve ne saranno cinque. Dunque:

« Un pentaedro V appartiene solo a cinque ettaedri principali e non ad « altri poliedri principali. »

Finalmente le rette esterne ad un pentaedro VI sono:

$$(2\ 3)(1\ 4)$$

$$(6\ 8)(4\ 7)(3\ 5)(4\ 5)(3\ 7)$$

$$(5\ 7)(3\ 8)(4\ 6)(3\ 6)(4\ 8),$$

e si vede che esse non formano altro che due piani passanti per (6 8) e due altri passanti per (5 7) e non aventi coi primi alcuna retta comune. Tali due coppie di piani sono:

$$(6\ 8 \cdot 4\ 7 \cdot 3\ 5)(6\ 8 \cdot 4\ 5 \cdot 3\ 7)$$

$$(5\ 7 \cdot 3\ 8 \cdot 4\ 6)(5\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 4\ 8),$$

mentre le due prime rette non appartengono a nessun piano formato solo con rette esterne. Evidentemente dunque non potrà aggiungersi che un piano della prima coppia e uno della seconda, e ciò potrà farsi in quattro modi diversi. Dunque:

« Un pentaedro VI appartiene a 4 ettaedri principali, e a nessun altro « poliedro principale. »

Raccogliendo tutti i risultati dell'analisi fatta si può anche dedurre che non esistono altri poliedri principali che gli enneaedri, gli ettaedri, e i pentaedri, come fu già dimostrato dal prof. BERTINI.

Come si vede, in questo paragrafo e nei precedenti, insieme a molti risultati nuovi concernenti principalmente la formazione di varii sottogruppi di sostituzioni fra le 27 rette, abbiamo ritrovato una gran parte dei risultati trovati già da BERTINI per una via più faticosa; del resto anche egli avrebbe

potuto procedere con minore difficoltà se avesse voluto abbandonare il metodo puramente stereometrico.

I risultati nuovi da noi trovati sono poi un necessario complemento a quelli del BERTINI, i quali riguardano solo le proprietà configurative.

Nei paragrafi seguenti considereremo aggruppamenti finora non studiati.

§ 14. Poliedri circolari aperti e chiusi. — Tetraedri circolari.

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiati i poliedri formati con piani non aventi a due a due rette (della superficie) in comune. Ora vogliamo iniziare un altro genere di ricerche nuove, cioè lo studio dei poliedri le cui facce si immaginano seguirsi con un certo ordine, e ognuna ha una retta comune colla precedente, e un'altra (diversa dalla prima) comune colla seguente, e nessuna altra retta in comune con altre facce dello stesso poliedro.

Tale poliedro, a causa di questo ordinamento circolare con cui pensiamo distribuite le facce, lo chiameremo un *poliedro circolare*; se poi l'ultima faccia ha una retta comune colla prima, lo diremo *chiuso*, altrimenti *aperto*.

Possiamo dire che lo studio di tali poliedri sta allo studio di quelli altri studiati da BERTINI, e considerati nei paragrafi precedenti, allo stesso modo che le ricerche di STURM e AFFOLTER (citate nel principio di questo lavoro) sui poligoni storti che si possono formare colle 27 rette, stanno a quelle precedenti di STURM sugli assieme gobbi di rette.

Potrebbe crederci a prima vista che questa ricerca coincide con quella dei poligoni storti o multilateri, perchè si può osservare che ogni multilatero individua un poliedro chiuso che si ottiene facendo passare i piani per i lati consecutivi. Però è facile vedere che la nostra ricerca è di altra natura. Giacchè il poliedro chiuso individuato da un multilatero non sarà sempre di quelli che noi consideriamo, potendo qualche volta le terze rette di ciascuna faccia non essere tutte diverse fra loro e quindi non aversi propriamente un poliedro circolare nel senso nostro.

D'altra parte un poliedro circolare chiuso non sempre individua un multilatero nel senso noto, perchè il poligono formato cogli spigoli può essere tale che alcune coppie di spigoli *non consecutivi* non sieno coppie gobbe, ciò che invece si richiede per i multilateri.

Le due ricerche sono dunque di genere diverso.

Cominciando dai diedri, troviamo che di essi evidentemente ne esiste una

specie sola, perchè abbiamo già visto nel § 1 che il gruppo che lascia fisso un piano, è transitivo in tutti quelli altri 12 piani che col dato hanno una retta comune. Di tali diedri ve ne saranno $\frac{45 \cdot 12}{2} = 270$.

Passiamo ora ai triedri circolari. Rispetto al complesso di due piani aventi una retta comune, gli altri piani passanti per rette di tal diedro, si distribuiscono (vedi § 2) in $3 + 16$ di cui i primi passano per l'asse comune del diedro, e gli altri passano a 4 a 4 per una delle altre 4 rette del diedro stesso.

Fra questi 16 piani vi è la transitività, e aggiungendo uno di essi si ha dunque un *triedro circolare aperto*.

Risulta che esistono $45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$ di tali triedri, di *una specie sola*; e inoltre non esistono triedri circolari chiusi.

Sieno:

$$A \equiv (1\ 5\ 4\ 2)$$

$$B \equiv (1\ 3\ 4\ 2)$$

$$C \equiv (1\ 3\ 7\ 2),$$

i tre piani del triedro.

Il gruppo di sostituzioni che lascia fisso questo triedro, evidentemente lascerà fisso il piano intermedio *B* (che chiameremo *base*) mentre potrà scambiare fra loro i piani *A*, *C*. L'ordine di tal gruppo lo possiamo ricavare da quello considerato nel § 2.

Se in questo vogliamo che il piano *C* (che è uno dei 16 di cui si è parlato) resti fisso, allora resterà fisso *A* e l'ordine sarà $\frac{8 \cdot 4!}{16}$; e facendo poi che *A*, *C* si permutino fra loro si ha infine per l'ordine del gruppo del triedro circolare il numero $4!$.

Tal gruppo evidentemente lascia fisso anche il piano coniugato ai due piani *A*, *C*; esso è un sottogruppo di quello del § 3 che lascia fisso un triedro di 3.^a specie.

Questo piano coniugato *C'* è $(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$ ed ha una retta comune colla base *B*, la quale è dunque uno dei tre piani coniugati del triedro *ACC'*.

Le 18 rette esterne a questa figura di quattro piani, si distribuiscono a 6 a 6 correlate a ciascuna delle tre rette del piano base, formando rispettivamente gli altri tre piani passanti per ciascuna di queste rette.

Le sostituzioni che lasciano fissa questa figura nel suo complesso, formano un gruppo transitivo nelle 18 rette esterne con tre sistemi d'imprimitività; se poi è solo la figura dei tre piani *A B C* che deve restar fissa, allora le rette

esterne sono $18 + 2$, cioè 18 di prima, e le altre due del piano C' . Queste evidentemente si separano dalle altre, mentre delle 18 se ne staccano 6 altre formanti il sistema correlato al piano C ovvero, ciò che è lo stesso, alla retta (34). Le 20 esterne si separano dunque in $2 + 6 + 12$.

Esaminiamo i piani passanti per rette della figura [che non sieno però quelle già comuni a due piani della figura per es. (13)(42)].

Tali piani sono:

1. Due piani aventi una retta di A e una di C .
2. Tre piani aventi solo una retta di B .
3. 16 piani passanti solo per una retta di A o di C .

Queste tre categorie sono corrispondenti alle tre categorie di rette stabilite sopra, cioè i due primi piani passano ciascuno per una delle due prime rette; [sono gli altri due piani coniugati al triedro ACC' (oltre B)]; i secondi piani son formati colle 6 rette riunite a due a due, e gli ultimi passano ciascuno per una coppia delle 12 ultime rette.

Se dunque vogliamo formare un tetraedro circolare chiuso, non c'è che aggiungere uno dei due primi piani, e si ha:

« Esistono $\frac{45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 45 \cdot 8 \cdot 3$ tetraedri circolari chiusi, ed essi sono

« tutti di una medesima specie, ed esistono sempre in una coppia di triedri « coniugati. »

Ciò ci fa vedere che lo studio dei tetraedri circolari avrà molti punti di contatto con quello delle coppie di triedri coniugati. Gli altri due piani che insieme col tetraedro completano i sei piani della coppia di triedri, hanno una retta di comune e saranno i piani coniugati delle coppie di facce opposte del tetraedro circolare.

Ora il numero delle coppie di piani aventi una retta comune è, come abbiamo visto poco fa, 270, mentre il numero dei tetraedri circolari è $4 \cdot 270$, dunque:

« Ad ogni coppia di piani concorrenti corrispondono 4 tetraedri circolari « chiusi. »

Ci proponiamo ora di esaminare la configurazione reciproca di questi quattro tetraedri.

Uno dei due tetraedri trovati sopra, contenenti il triedro ABC è quello dei quattro piani:

$$\begin{aligned} A &\equiv (1\ 5\ 4\ 2) & B &\equiv (1\ 3\ 4\ 2) \\ C &\equiv (1\ 3\ 7\ 2) & D &\equiv (1\ 5\ 7\ 2), \end{aligned}$$

e ad esso corrisponde la coppia di piani

$$(34 \cdot 57 \cdot 68), \quad (54 \cdot 37 \cdot 68),$$

passanti per la retta (68).

I 4 piani $A B C D$ passano ciascuno per una delle quattro rette (34) (57) (54) (37) di questa coppia; facciamo passare per queste rette gli altri tre piani, e si hanno allora 12 piani che dovranno poi potersi distribuire in una sol maniera in altri 3 tetraedri circolari.

Essi saranno quelli compresi nella seguente tabella, dove per simmetria abbiamo ripetuti i piani del tetraedro dato.

$$\begin{array}{llll} A \equiv (1542) & B \equiv (1342) & C \equiv (1372) & D \equiv (1572) \\ A' \equiv (1452) & B' \equiv (1432) & C' \equiv (1732) & D' \equiv (1752) \\ A'' \equiv (54 \cdot 36 \cdot 78) & B'' \equiv (34 \cdot 56 \cdot 78) & C'' \equiv (37 \cdot 56 \cdot 48) & D'' \equiv (57 \cdot 36 \cdot 48) \\ A''' \equiv (54 \cdot 38 \cdot 76) & B''' \equiv (34 \cdot 67 \cdot 58) & C''' \equiv (37 \cdot 58 \cdot 46) & D''' \equiv (57 \cdot 38 \cdot 46). \end{array}$$

Si vede da questa tabella che due piani che non stanno nè nella stessa orizzontale nè nella stessa colonna, non hanno rette comuni. Possiamo anche dire:

« I quattro tetraedri circolari corrispondenti ad un medesimo diedro, sono « formati in modo che un piano di uno incontra uno e uno solo piano di un « altro. »

Consideriamo tre piani, di cui due non stieno nè nella stessa verticale, per es. $A B' C''$. Si vede che questi formano un triedro di 1.ª specie (§ 4). Quindi se noi formiamo il tetraedro (nel senso del § 7) formato con 4 piani che nel quadro precedente formano una diagonale, abbiamo un tetraedro di cui tutti i triedri sono di 1.ª specie; dunque:

« Ogni tetraedro circolare ne individua tre altri esterni; coi sedici piani « dei 4 tetraedri circolari (corrispondenti ad uno stesso diedro), si possono « formare 8 tetraedri ordinarii di 1.ª specie (vedi § 7-8). »

Consideriamo le tre coppie di piani formate con un piano di uno dei 4 tetraedri circolari, e coi tre piani ad esso *non* corrispondenti di un altro, per es. le tre coppie

$$AB', \quad AC', \quad AD',$$

e prendiamo i coniugati di queste tre coppie. Si ottengono i tre piani

$$(1352), \quad (35 \cdot 47 \cdot 68), \quad (1472),$$

che formano un triedro circolare aperto; dunque:

« I coniugati delle 3 coppie di piani formate con un piano di uno dei tetraedri, e coi *non* corrispondenti di un altro formano un triedro circolare aperto. »

Invece i coniugati delle 3 coppie

$$AC', \quad AC'', \quad AC''',$$

si vede subito che sono i tre rimanenti piani (oltre i due del diedro) passanti per (6 8), cioè:

« I coniugati delle tre coppie di piani formate con un piano e coi tre piani degli altri tre tetraedri, corrispondenti alla sua faccia opposta, sono sempre i medesimi tre piani passanti per una medesima retta. »

Infine possiamo notare anche gli altri teoremi che si dimostrano facilmente:

« Esistono tre tetraedri circolari chiusi aventi una data coppia di facce opposte. »

« In ogni coppia di triedri coniugati esistono nove diversi tetraedri circolari chiusi. »

§ 15. Tetraedri circolari aperti e pentaedri chiusi.

Se ad un triedro circolare aperto aggiungiamo uno dei 16 piani della 3.^a categoria di cui si è parlato nel paragrafo precedente, abbiamo un tetraedro circolare aperto. Al solito modo possiamo dire che di tali tetraedri ve ne sono $45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8$ e sono tutti fra loro equivalenti, cioè ve n'è *una sola* specie.

Uno di essi sia quello dei quattro piani

$$A \equiv (1\ 5\ 4\ 2) \quad B \equiv (1\ 3\ 4\ 2) \quad C = (1\ 3\ 7\ 2) \quad D \equiv (1\ 4\ 7\ 2).$$

Esaminando la relazione reciproca che hanno i due piani estremi, si scorge che le rette di questi piani (meno quelle due colle quali essi sono congiunti ai piani medii) formano una coppia gobba e una coppia di rette concorrenti. La coppia gobba è quella delle due rette

$$(1\ 5) \quad (4\ 7),$$

e l'altra coppia è

$$(5\ 4) \quad (1\ 4).$$

Queste due ultime individuano un piano $E \equiv (1\ 4\ 5\ 2)$ che non ha altre rette comuni coi piani precedenti, quindi:

« Ad ogni tetraedro circolare aperto è correlato un unico piano che con esso forma un pentaedro circolare chiuso. Esistono quindi $\frac{45 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8}{5} = 27 \cdot 128$ pentaedri circolari chiusi. »

Possiamo anche aggiungere:

« I pentaedri circolari chiusi sono di una specie sola. »

Possiamo ora ricercare alcune proprietà di questi pentaedri.

Ogni piano ne ha evidentemente due opposti coi quali non ha rette comuni; si possono formare colle cinque facce, cinque coppie di piani non aventi rette comuni. Consideriamo i piani coniugati di queste cinque coppie. Otteniamo i piani

$$\begin{aligned} A' &\equiv (1\ 5\ 3\ 2) & B' &\equiv (3\ 4 \cdot 5\ 7 \cdot 6\ 8) & C' &\equiv (1\ 7\ 3\ 2) \\ D' &\equiv (3\ 5 \cdot 7\ 4 \cdot 6\ 8) & E' &\equiv (1\ 7\ 5\ 2), \end{aligned}$$

e si riconosce subito che questi cinque piani formano un nuovo pentaedro circolare in cui i piani si succedono nell'ordine $A' C' E' B' D'$. Dunque:

« Ad ogni pentaedro chiuso è coniugato un nuovo pentaedro simile che si ottiene da quello prendendo i piani coniugati delle coppie di facce opposte. I due pentaedri hanno relazione reciproca, cioè dal secondo collo stesso processo si tornerebbe al primo. »

Si può osservare una relazione singolare che esiste fra i due pentaedri. Gli spigoli del primo sono:

$$(4\ 2)(1\ 3)(7\ 2)(1\ 4)(5\ 4),$$

e le rette libere (cioè quelle appartenenti ad una faccia sola) di esso, sono invece

$$(1\ 5)(3\ 4)(3\ 7)(4\ 7)(2\ 5),$$

mentre pel secondo si hanno rispettivamente le rette

$$(2\ 3)(1\ 7)(5\ 7)(6\ 8)(3\ 5)$$

$$(1\ 5)(3\ 7)(2\ 5)(5\ 7)(4\ 7),$$

cioè:

« I due pentaedri hanno le medesime rette libere, e spigoli diversi. Essi in complesso vengono ad occupare 15 rette diverse. »

Possiamo facilmente esaminare che cosa formano le 12 rette restanti. Esse sono:

$$18 \cdot 28 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 67$$

$$16 \cdot 26 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 87,$$

e, come si vede, formano una doppia sestupla, dunque:

« Le 12 rette esterne ad una coppia di pentaedri chiusi coniugati formano una doppia sestupla gobba; o anche, le 15 rette che servono a formare una coppia di pentaedri circolari coniugati, possono anche formare sei pentaedri *principali* ordinari. » (§ 11) (*)

Si potrebbe ora continuare nello stesso modo e considerare le relazioni che dovranno esistere fra gli uni e gli altri, ma preferiamo passar oltre.

Vogliamo solo notare:

« Due piani non aventi rette comuni, appartengono, come facce opposte, a 48 pentaedri chiusi diversi. »

§ 16. Pentaedri circolari aperti. — Esaedri circolari chiusi.

Dei poliedri aperti o chiusi considerati sinora ne esistevano sempre una specie unica, ma dai pentaedri aperti in poi le specie si incominciano a differenziare.

Per formare dal tetraedro aperto del paragrafo precedente, i pentaedri aperti, dobbiamo esaminare i piani passanti per le rette estreme che sono (1 5) (4 7) (5 4) (1 4).

Ora poichè evidentemente i piani estremi A, D entrano simmetricamente nella formazione del tetraedro aperto e possono quindi permutarsi fra loro (permutando anche B, C) così basterà considerare solo i piani passanti per le rette appartenenti ad uno di essi per es. D , cioè i piani passanti per (1 4) (4 7).

Tali piani sono [escludendo (1 4 5 2) e quelli altri che passano per rette già comprese in A, B, C]:

$$(1\ 4\ 6\ 2) \quad (1\ 4\ 8\ 2)$$

$$(4\ 7 \cdot 3\ 6 \cdot 5\ 8) \quad (4\ 7 \cdot 3\ 8 \cdot 5\ 6)$$

$$(4\ 7 \cdot 3\ 5 \cdot 6\ 8).$$

(*) Ricordando la proprietà nota che, colle 15 rette esterne ad una bisestupla, si possono formare 6 pentaedri *principali* (CREMONA, BERTINI).

Io dico che essi costituiscono tre categorie distinte. Prima di tutto è chiaro che per le sostituzioni che lasciano fisso il tetraedro aperto dato, la coppia gobba (1 5 · 4 7) non può che tornare in sè stessa e così l'altra coppia non gobba di rette estreme (1 4 · 4 5). Quindi i piani passanti per (1 4) dovranno costituire una categoria diversa rispetto a quelli passanti per (4 7). D'altra parte poichè nella formazione dei piani $A B C D$ non entrano i punti (6) (8) così è chiaro che per lo scambio di questi due punti il tetraedro rimane inalterato, quindi esiste una sostituzione che lascia fisso il tetraedro e che inverte fra loro i due piani di ciascuna delle due prime categorie sopra segnate, e perciò certamente tali due piani saranno fra loro equivalenti.

Resta a far vedere che l'ultimo piano (4 7 · 3 5 · 6 8) costituisce una categoria a sè e non è equivalente ad uno dei due della seconda categoria. Ciò si può vedere assai facilmente, giovandoci dei principii fondamentali. Se il tetraedro aperto deve restar fisso e debbono restar fissi i piani estremi, allora per l'osservazione fatta sopra, dovendo restar fisse in sè le coppie di rette (1 5 · 4 7) (1 4 · 4 5) resteranno addirittura fisse singolarmente queste rette, e quindi anche (4 2), onde resterà fisso il triangolo (1 4 2) e quindi le sostituzioni possibili sono allora solo alcune di quelle che lasciano fissa la caratteristica pari base della rappresentazione (*) che è proprio la somma delle tre caratteristiche dispari corrispondenti ai tre lati del triangolo; ma d'altra parte le sostituzioni che lasciano inalterata la caratteristica pari fondamentale, sono, come sappiamo (**), quelle corrispondenti alle permutazioni degli otto punti fondamentali fra loro, quindi ne possiamo dedurre che le sostituzioni del gruppo totale che lasciano fisso il tetraedro aperto, mentre lasciano fissi anche i piani estremi, sono solo quelle tali permutazioni fra gli otto punti compatibili colla inalterabilità del complesso della figura. E quindi i due piani (4 7 · 3 6 · 5 8) (4 7 · 3 5 · 6 8) non sono equivalenti perchè [dovendo la retta (4 7) restar fissa] dal primo si passerebbe al secondo colle permutazioni di 5 con 6 ovvero di 3 con 8 ovvero colla permutazione circolare (3 6 8 5), e queste non sono permutazioni compatibili colla stabilità del resto della figura. Quindi vi sono cinque piani, divisi in tre categorie, passanti per le rette estreme di D e non per altre rette del tetraedro; così ve ne saranno cinque altre passanti per le rette estreme di A ; in tutto dunque 10 piani divisi in tre categorie di $4 + 4 + 2$.

L'aggiunzione di uno di questi piani dà luogo ad un pentaedro circolare

(*) Vedi Memoria precedente, §§ 8, 23.

(**) Memoria precedente, § 4.

aperto; quindi *vi sono 3 specie di pentaedri circolari aperti*. Ricerchiamo le proprietà caratteristiche di ciascuna di queste specie.

Segniamo qui i piani componenti i pentaedri delle varie specie:

$A \equiv (1542)$ $B \equiv (1342)$ $C \equiv (1372)$ $D \equiv (1472)$ $E_1 \equiv (1462)$ 1.^a specie

$E_2 \equiv (47 \cdot 36 \cdot 58)$ 2.^a specie

$E_3 \equiv (47 \cdot 35 \cdot 68)$ 3.^a specie

ed esistono rispettivamente

1 3 5 · 1 2 8 · 2

1 3 5 · 1 2 8 · 2

1 3 5 · 1 2 8

pentaedri di ciascuna delle tre specie.

Nella prima specie i piani estremi sono riuniti agli altri mediante le due rette (4 2) (1 4) formanti una coppia gobba di rette, mentre nella seconda e terza specie gli spigoli estremi sono (4 2) (4 7) formanti una coppia di rette concorrenti. Ciò costituisce una prima differenza fra la prima e le altre due specie.

Inoltre sopprimiamo successivamente uno dei due piani estremi; restano due tetraedri aperti che, come sappiamo (§ 15), individuano ciascuno un piano con cui formano pentaedri chiusi. Tali due piani complementari sono rispettivamente:

nel 1.^o caso: (1 4 5 2), (1 6 4 2)

nel 2.^o caso: (1 4 5 2), (3 4 · 5 8 · 6 7)

nel 3.^o caso: (1 4 5 2), (3 4 · 6 8 · 5 7),

e, come si vede, nel 1.^o caso i due piani aggiunti e i due tolti formano un tetraedro circolare, e nel 2.^o e 3.^o caso formano invece una coppia di diedri staccati.

Fin qui però il 2.^o e 3.^o caso non ci hanno presentato proprietà diverse; ma prendiamo nel 2.^o e 3.^o caso i piani coniugati della coppia di piani estremi, e della coppia di piani ora trovata.

Nel 2.^o caso si hanno i due piani

(1 7 5 2), (1 8 3 2),

e nel 3.^o caso si hanno i piani

(1 7 3 2), (1 7 3 2),

cioè nel 2.^o caso si hanno due piani distinti e nel 3.^o si hanno due piani coincidenti.

Possiamo aggiungere un'altra notevole diversità geometrica fra i tre casi.

Il primo, terzo, e quinto piano sono sempre tre piani senza rette comuni. Ora nel 1.^o e 2.^o caso essi formano un triedro di 1.^a specie, mentre nel 3.^o formano un triedro di 2.^a specie.

Da un pentaedro circolare aperto vediamo come si possono formare degli esaedri circolari chiusi.

Il primo evidentemente non può che chiudersi solo col piano

$$F \equiv (1\ 5\ 6\ 2),$$

mentre il secondo può chiudersi con due piani

$$F_1 \equiv (1\ 5\ 8\ 2), \quad F_2 \equiv (5\ 4 \cdot 3\ 6 \cdot 7\ 8),$$

e il terzo coll'unico piano

$$F' \equiv (1\ 5\ 3\ 2),$$

perchè l'altro piano (5 4 · 6 8 · 3 7) con cui anche si chiude il pentaedro aperto ha però la retta (3 7) già posseduta da un altro dei piani, e quindi non si avrebbe un vero esaedro circolare chiuso, ma un esaedro spezzato in due tetraedri chiusi.

Si può ora vedere che l'esaedro formato coll'aggiunzione dei piani F_1 , F_2 è della stessa natura di quello formato coll'aggiunzione di F perchè si può far vedere che quei due esaedri contengono ambedue un pentaedro aperto di 1.^a specie, da cui come risulta da quest'analisi non deriva che una sola specie di esaedri. Effettivamente i pentaedri $BCDE_2F_1$ ovvero CDE_2F_2A sono di 1.^a specie avendo gli spigoli estremi (1 3 · 5 8) (7 2 · 5 4) formanti coppie gobbe. Si ha dunque:

« Esistono solo due specie di esaedri circolari chiusi e sono rappresentati « da $ABCDE_1F$, $ABCDE_3F'$. »

Esaminando questi piani si trova che il primo, delle tre coppie di spigoli opposti, ne ha due non gobbe e una gobba; e il secondo ha tutte tre le coppie di spigoli opposti non gobbe. Ciò costituisce una proprietà geometrica caratteristica dei due casi.

Possiamo anche aggiungere:

« Non esistono esaedri chiusi in cui le tre coppie di spigoli opposti sono « tutte gobbe. »

E ancora:

« Esistono 135 · 128 esaedri circolari chiusi di 1.^a specie, e 45 · 64 esaedri circolari chiusi di 2.^a specie. »
 considerando che un esaedro di 1.^a, per le cose dette, contiene due pentaedri aperti di 1.^a, e uno esaedro di 2.^a, contiene invece 6 pentaedri aperti di 3.^a specie.

Possiamo subito dimostrare una proprietà dei due esaedri.

Consideriamo nell'uno e nell'altro le due terne di piani *non consecutivi*; si hanno tre piani senza rette, e che, come si riconosce subito, nel 1.^o caso formano sempre un triedro di 1.^a specie, e nel secondo formano sempre un triedro di 2.^a. Dunque:

« Le due specie di esaedri circolari chiusi sono distinte dalla proprietà caratteristica che il primo si può immaginare come il complesso di due convenienti triedri di 1.^a specie coi piani dell'uno intercalati fra i piani dell'altro, e il secondo invece si può immaginare come un'analogha disposizione di due triedri di 2.^a specie. »

Con i piani di un esaedro si possono formare sei tetraedri circolari aperti, sopprimendo ogni volta una coppia di piani consecutivi. Ognuno di questi sei tetraedri, individua, come sappiamo, un piano, e si hanno quindi in generale sei piani. Esaminiamo questi sei piani nei due casi.

Nel primo caso essi sono:

$$\begin{array}{cc} (1\ 4\ 5\ 2) & (1\ 7\ 4\ 2) \\ (1\ 6\ 4\ 2) & (1\ 4\ 3\ 2) \\ (3\ 7 \cdot 5\ 6 \cdot 4\ 8) & (3\ 7 \cdot 5\ 6\ 4\ 8), \end{array}$$

dove si son posti sulla stessa linea quelli che corrispondono a tetraedri aventi i medesimi piani estremi. Si vede intanto che i due dell'ultima linea coincidono, e quindi:

« Fra le tre coppie di tetraedri contenuti nell'esaedro di 1.^a specie, e aventi gli stessi piani estremi, ve n'è una i cui tetraedri sono chiusi da un medesimo piano. »

Gli altri quattro piani formano, come si vede, due diedri staccati e non hanno nessuna retta comune con quel piano unico.

Facendo la considerazione analoga per l'esaedro di 2.^a specie si hanno i 6 piani

$$\begin{array}{cc} (1\ 4\ 5\ 2), & (1\ 4\ 5\ 2) \\ (3\ 4 \cdot 6\ 8 \cdot 5\ 7), & (3\ 4 \cdot 6\ 8 \cdot 5\ 7) \\ (1\ 7\ 3\ 2), & (1\ 7\ 3\ 2), \end{array}$$

cioè si hanno tre coppie di piani coincidenti, e il triedro formato con questi tre piani, è, come si vede, di 3.^a specie, onde:

« Le tre coppie di tetraedri circolari aperti contenuti nell'esaedro chiuso « di 2.^a specie, risultano di tetraedri che sono chiusi dal medesimo piano, e « i tre piani che così si ottengono formano un triedro di 3.^a specie. »

§ 17. Gruppi di sostituzioni per i pentaedri circolari aperti.

Vogliamo ricercare i gruppi di sostituzioni rispettivamente per i pentaedri delle tre specie. Per quello di 1.^a specie osserviamo che tali sostituzioni dovranno lasciare fissa la retta (3 7) del piano medio *C*, e al massimo permutare fra loro le altre due rette (3 4) (4 7) dei piani *B*, *D*. Quindi in ogni caso tali sostituzioni lasceranno fisso il triangolo (3 4 7) e quindi, per un principio già invocato (§ 16), esse corrisponderanno solo a permutazioni fra alcuni degli otto punti fondamentali. Il punto (4) deve restar fisso dovendo restar fissa la retta (3 7) e il triangolo (4 3 7). I due punti 3, 7 possono scambiarsi fra loro, scambiandosi allora però anche fra loro i punti 1, 2 perchè il piano *B* si scambia col piano *D*, e dovendo poi *A* scambiarsi con *E*₁, si permuteranno i punti 5, 6. Dunque il gruppo del pentaedro di 1.^a specie contiene solo due sostituzioni che sono rappresentate da

$$[1, (1\ 2)(3\ 7)(5\ 6)].$$

Passando al pentaedro di 2.^a specie osserviamo che l'assieme delle tre rette (3 4) (3 7) (1 4) deve restar fisso, e così l'assieme dei quattro spigoli che sono:

$$(4\ 2) (1\ 3) (7\ 2) (4\ 7),$$

e propriamente le sostituzioni del gruppo debbono tutte, o lasciare le suddette rette inalterate, o trasformare rispettivamente

$$3\ 4 \cdot 3\ 7 \cdot 1\ 4 \cdot 4\ 2 \cdot 1\ 3 \cdot 7\ 2 \cdot 4\ 7$$

in

$$1\ 4 \cdot 3\ 7 \cdot 3\ 4 \cdot 4\ 7 \cdot 7\ 2 \cdot 1\ 3 \cdot 4\ 2.$$

Una tale sostituzione lascerà certamente inalterata la retta (1 7) che colle prime tre di quelle forma un quadrilatero-zero.

Per stabilire una tale sostituzione possiamo servirci della rappresentazione mediante i sistemi completi di ARONHOLD di cui abbiamo estesamente discorso

nella Memoria precedente (*), e costruire uno dei *due* sistemi completi contenenti la quaterna $12 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 13$, per es. il sistema completo

$$12 \cdot 17 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 18,$$

e trasformarlo in uno dei *due* contenenti la quaterna $12 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 27$, per es. in

$$12 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 27 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 38.$$

La corrispondenza riguardo alle prime quattro rette non è arbitraria; quella delle altre deve stabilirsi colla condizione che si verifichino le trasformazioni stabilite sopra, ovvero, più generalmente, che il pentaedro resti fisso. Dovendo il piano A diventare il piano E_2 , deve (15) trasformarsi univocamente in (36), e dovendo poi (36) di E_2 diventare una retta di A si vede subito che (16) deve diventare (35) e non (38), e quindi la sostituzione resta tutta definita. L'altro sistema completo in cui potrebbe trasformarsi il primo è:

$$12 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 27 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 48,$$

ma allora la retta (15) dovrebbe diventare una delle ultime tre di questa linea, e ciò contrasta colle inalterabilità del pentaedro. Quindi:

« Anche il gruppo del pentaedro di 2.^a specie possiede due sole sostituzioni che sono, l'unità e quella rappresentata da

$$\left. \begin{array}{l} (17 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 18) \\ (17 \cdot 34 \cdot 27 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 38) \end{array} \right\};$$

« questa seconda inverte l'ordine dei piani nel pentaedro. »

Pel pentaedro di 3.^a specie gli spigoli sono rispettivamente gli stessi di prima, e possiamo sino ad un certo punto fare considerazioni perfettamente analoghe. Solo che le tre ultime rette $15 \cdot 16 \cdot 18$ del primo sistema completo non le dobbiamo più mutare in $36 \cdot 35 \cdot 38$ rispettivamente, ma dovendo (15) di A trasformarsi o in (35) o in (68) di E_3 , si vede che non resta altra possibilità che trasformarlo unicamente in (35). In quanto poi alla corrispondenza fra le altre due rette $16 \cdot 18$ con $36 \cdot 38$ è facile convincersi che essa è arbitraria perchè il pentaedro di 3.^a specie $ABCDE_3$ non si altera per lo scambio di 6 con 8. Quindi:

« Il gruppo del pentaedro di 3.^a specie possiede 4 sostituzioni di cui la prima è l'unità, la seconda è corrispondente allo scambio dei punti rappre-

(*) Vedi § 23.

« sentativi (6), (8), e queste non spostano i piani del pentaedro; le altre due « sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 17 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 18 \\ 17 \cdot 34 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 38 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 17 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 18 \\ 17 \cdot 34 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 38 \cdot 36 \end{pmatrix},$$

« e queste invertono l'ordine dei piani. »

§ 18. Esaedri circolari aperti.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che i tre pentaedri aperti sono simmetrici sia a destra che a sinistra, cioè che esistono sempre sostituzioni che scambiano la parte destra colla parte sinistra. Per passare allora agli esaedri, noi possiamo continuare ad aggiungere il sesto piano da una parte sola per es. a destra. Per le rette libere dell'ultimo piano a destra (piani *E*) noi dobbiamo far passare altri piani che non abbiano altre rette in comune con tutto il pentaedro.

Tali piani sono:

pel 1.º pentaedro:

$$F_1 \equiv (46 \cdot 38 \cdot 57)$$

$$F_2 \equiv (46 \cdot 35 \cdot 78)$$

$$F_3 \equiv (1762)$$

$$F_4 \equiv (1862)$$

pel 2.º pentaedro:

$$F_5 \equiv (1632) \quad F'_5 \equiv (1852)$$

$$F_6 \equiv (36 \cdot 57 \cdot 48)$$

pel 3.º pentaedro:

$$F'_7 \equiv (53 \cdot 46 \cdot 78)$$

$$F''_7 \equiv (53 \cdot 48 \cdot 76)$$

$$F'_8 \equiv (1682)$$

$$F''_8 \equiv (1862).$$

Pel 1.º e 2.º pentaedro non essendoci alcuna sostituzione (oltre 1) che lasci inalterati i piani *E* (v. § 17) si ha che i piani *F* ci si presentano come *non equivalenti* fra loro, e quindi danno luogo ad altrettante specie distinte di esaedri.

Per i quattro piani poi relativi al 3.^o pentaedro, si vede che essi si riuniscono in 2 coppie, un elemento di una coppia ricavandosi dall'altro permutando i punti (6) e (8), la qual permutazione, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, non altera i piani del pentaedro. Ora però possiamo far vedere che gli esaedri veramente distinti sono quelli che si hanno aggiungendo solo i primi sei piani F . Un esaedro aperto contiene evidentemente due pentaedri aperti che potremo chiamare pentaedro a destra e a sinistra.

Ora coi piani $F_5', F_8', (F_8'')$ si verifica subito che il secondo pentaedro, contenendo gli spigoli estremi formanti una coppia gobba, è un pentaedro di 1.^a specie, e quindi gli esaedri corrispondenti saranno certamente compresi fra i primi quattro che si ottengono sopra.

Inoltre si può analogamente verificare che il pentaedro a destra degli esaedri ottenuti coi piani $F_7', (F_7'')$ è di 2.^a specie, e quindi quelli esaedri non sono diversi da alcuni dei precedenti; onde infine possiamo dire:

« Esistono sei diverse specie di esaedri aperti, e sono rispettivamente « rappresentate dagli esaedri:

- $ABCDE_1F_1$
- $ABCDE_1F_2$
- $ABCDE_1F_3$
- $ABCDE_1F_4$
- $ABCDE_2F_5$
- $ABCDE_2F_6.$ »

Esaminando poi la coppia di pentaedri contenuta in ciascuno di questi esaedri si può aggiungere:

- « L' esaedro di 1.^a specie ha 2 pentaedri di 1.^a specie
- « " 2.^a " 2 " 1.^a " »
- « " 3.^a " 1 pentaedro di 1.^a " e uno di 3.^a specie
- « " 4.^a " 1 " 1.^a " " 2.^a " »
- « " 5.^a " 1 " 2.^a " " 3.^a " »
- « " 6.^a " 2 pentaedri di 2.^a " »

Si vede dunque che, a cominciare dagli esaedri, comincia a verificarsi questo fatto nuovo, che le due braccia (diciamo così) del poliedro non sono più equivalenti, cioè permutabili fra loro.

Possiamo anche dire:

« Non esistono esaedri aperti in cui i due pentaedri sieno ambedue di 3.^a specie. »

Dal quadro precedente si vede che, salvo i due primi, tutti gli altri esaedri si possono fra loro differenziare per rispetto ai pentaedri in essi contenuti.

Potrebbe venire qui il dubbio che i due primi fossero lo stesso, che cioè pur non esistendo una sostituzione che muti ordinatamente i piani $ABCDE_1F_1$ in $ABCDE_1F_2$, esista invece una sostituzione che muti i primi piani ordinatamente in F_2E_1DCBA . Noi faremo ora vedere che ciò non è; e allora ci risulterà anche una proprietà che differenzia le due prime specie.

Lo spigolo medio di ciascuno dei due esaedri è sempre (27), e le rette libere dei piani estremi sono rispettivamente

$$15 \cdot 54; \quad 38 \cdot 57$$

$$15 \cdot 54; \quad 35 \cdot 78.$$

La retta (27) nel primo caso incontra solo $15 \cdot 57$ che a loro volta si incontrano; e nel secondo invece la medesima retta incontra $15 \cdot 78$ che non si incontrano più. Dunque:

« L'esaedro di 1.^a si differenzia dall'esaedro di 2.^a perchè in esso lo spigolo medio insieme a due rette libere dei piani estremi forma un piano, e nel secondo invece il medesimo spigolo incontra una coppia gobba di rette libere dei piani estremi. »

§ 19. Poliedri circolari *principali*.

Massimo ordine dei poliedri circolari.

Per i poliedri circolari *aperti* possiamo proporci il problema analogo a quello proposto dal prof. BERTINI per i poliedri ordinari, e da noi anche trattato nel § 13; cioè possiamo chiedere se esistono e quali sono, poliedri circolari aperti (oltre quelli di ordine (*) massimo) che non sieno più contenuti in altri di ordine maggiore, cioè tali che qualunque altra faccia ad essi si aggiunga, questa, oltre lo spigolo che ha comune colla faccia precedente, venga a contenere sempre una retta appartenente già al poliedro primitivo.

Adoperando anche qui la denominazione di BERTINI, un tale poliedro circolare lo chiameremo *principale*.

(*) Per *ordine* di un poliedro intendiamo, al solito, il numero delle sue facce.

Noi ci proponiamo di esaminare quali sono, cioè di quali ordini possono essi essere, e contemporaneamente giungeremo a scoprire qualcosa riguardo al massimo ordine dei poliedri circolari aperti e chiusi. Giacchè è chiaro che un poliedro circolare aperto di ordine n contiene in tutto $2n + 1$ rette della superficie cubica, e un poliedro chiuso contiene invece $2n$ rette; quindi poichè in tutto le rette sono 27 parrebbe a prima vista che si potessero costruire poliedri aperti sino all'ordine 13, e poliedri chiusi sino anche all'ordine 13. Noi invece troveremo che di tali ordini non esistono nè poliedri aperti, nè chiusi, e che l'ultimo ordine che si può raggiungere è il 12.^{mo}.

Cominciamo coll'esaminare partitamente i sei esaedri aperti del § 18.

Le rette esterne al 1.^o di essi sono:

$$16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 58 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 78,$$

colle quali si possono formare solo i sei piani

$$(1632) \equiv I$$

$$(1652) \equiv II$$

$$(1682) \equiv III$$

$$(1782) \equiv IV$$

$$(1852) \equiv V$$

$$(35 \cdot 48 \cdot 67) \equiv VI.$$

Dobbiamo esaminare come questi piani possono aggiungersi a destra o a sinistra dell'esaedro di 1.^a specie in maniera da formare poliedri aperti di ordine superiore.

E prima di tutto osserviamo che l'esaedro di cui si parla è simmetrico rispetto alle sue due estremità, come anche l'esaedro di 2.^a specie e quello di 6.^a, come risulta dal paragrafo precedente. E quindi per tali esaedri basterà fare la considerazione solo per un braccio, dovendo accadere pel braccio opposto la cosa analoga a quella che si troverà accadere da una parte. Ciò servirà ad abbreviare la nostra ricerca.

Consideriamo dunque il braccio a destra, e allora i soli piani che si possono riunire ad F_1 sono:

$$(1832) \equiv a$$

$$(1752) \equiv b$$

$$(57 \cdot 48 \cdot 36) \equiv c,$$

e ci resta da esaminare in quanti modi ad uno di questi piani possiamo far succedere una catena di piani scelti successivamente fra i sei segnati sopra.

Ora questo lavoro lo possiamo fare con un metodo grafico nella seguente maniera.

Segniamo sei punti ognuno dei quali stia a rappresentare uno dei sei piani di sopra (vedi fig. XXI), e uniamo con rette quei punti che rappresentano piani aventi rette comuni.

Sul medesimo disegno poi poniamo altri tre punti che rappresentino i piani a , b , c , e analogamente riuniamo questi punti con quelli dei precedenti rappresentanti piani con cui a , b , c hanno rispettivamente rette comuni.

Allora sulla figura che ne risulta dobbiamo rintracciare tutti i cammini continui partenti da a , b , c , e non passanti mai per punti che sulla figura stieno congiunti con altri pei quali già precedentemente si è passati. Così per es. (fig. XXI) il cammino a I III IV è uno da considerarsi, ma l'altro a I III II non è da considerarsi perchè il punto II sulla figura è già congiunto con I, e la successione di piani rappresentata da quel cammino conterrebbe i tre piani I II III passanti tutti per la medesima retta (1 6) cosa che non può accadere in un poliedro circolare.

In tal maniera si trova che i cammini possibili sono:

a I III IV	b V	c VI
a I II	b II I	c I II V
a V II III IV	b II III	c I III IV
	b IV III I	

e possiamo concludere che al di là dei piani estremi corrispondenti a ciascuno di tali cammini, non esistono altri da potere aggiungere. Ognuno di questi cammini dunque corrisponderà ad un poliedro circolare aperto *principale* cui appartiene l'esaedro dato. Onde (tenendo presente l'osservazione fatta riguardo alla simmetria dei due bracci):

« Un esaedro circolare aperto di 1.^a specie è contenuto (come esaedro di « termine) in quattro ottaedri principali, in sei ennaedri principali, in otto decaedri principali, e finalmente in due soli endecaedri principali. »

In tal maniera veniamo anche a scoprire l'esistenza degli ottaedri principali che adesso potremmo anche costruire.

Non ci resta ora che rifare un lavoro perfettamente analogo per gli altri cinque esaedri,

Per quello di 2.^a specie, le rette esterne sono:

$$16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 36 \cdot 38 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 67 \cdot 68,$$

e i piani che possono formarsi con queste rette sono:

$$(1632) \equiv I \quad (1652) \equiv II \quad (1682) \equiv III$$

$$(1752) \equiv IV \quad (1832) \equiv V \quad (1852) \equiv VI \quad (57 \cdot 36 \cdot 48) \equiv VII,$$

mentre i piani da potersi aggiungere direttamente ad F_2 sono:

$$(1782) \equiv a \quad (35 \cdot 48 \cdot 67) \equiv b,$$

e cogli stessi principii di avanti costruiamo la fig. XXII, dalla quale ricaviamo i cammini possibili:

$$a \text{ III I V VI} \quad b \text{ VII IV II III}$$

$$a \text{ III I VII} \quad b \text{ VII IV VI V}$$

$$a \text{ III II VI V} \quad b \text{ VII I III}$$

$$a \text{ IV II I V} \quad b \text{ VII I II VI}$$

$$a \text{ IV VI V I} \quad b \text{ VII I V VI}$$

$$a \text{ IV VII I V},$$

e quindi:

« L'esaedro circolare aperto di 2.^a specie appartiene (come esaedro di « termine) a quattro decaedri principali, e a 18 endecaedri principali. »

Per gli altri tre esaedri seguenti non si può fare la ricerca solamente dal lato sinistro, come abbiamo fatto ora, e poi raddoppiare i risultati, ma bisogna farla separatamente da ambo i lati, perchè, come abbiamo osservato, quelli esaedri non sono simmetrici dalle due parti.

Le rette esterne al nostro esaedro di 3.^a specie sono:

$$16 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 38 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 68 \cdot 78,$$

e i piani formati con queste rette sono:

$$(1632) \equiv I \quad (1652) \equiv II \quad (1682) \equiv III \quad (1832) \equiv IV$$

$$(1852) \equiv V \quad (48 \cdot 57 \cdot 36) \equiv VI,$$

mentre al solito i piani dalla parte destra possono essere solo

$$(1752) \equiv a \quad (1782) \equiv b \quad (67 \cdot 48 \cdot 35) \equiv c,$$

e da sinistra

$$(1532) \equiv a' \quad (1582) \equiv b' \quad (45 \cdot 63 \cdot 78) \equiv c',$$

e si hanno rispettivamente le successioni:

a	VI I III	b	III I IV V	c	VI I IV V
a	VI I IV	b	III I VI	c	VI I III
a	V IV I III	b	III II V IV	c	VI I II V
a	II I IV				
a	II III				
a'	I III	b'	III I IV V	c'	I IV V
a'	I II V	b'	III I VI	c'	I II V
a'	I VI	b'	III II	c'	I III
a'	IV V II III	b'	V II I VI	c'	VI
		b'	V IV I VI		

« L'esaedro di 3.^a specie appartiene (come esaedro di termine) ad un solo « ottaedro principale, a 5 enneaedri, a 9 decaedri, e a 9 endecaedri tutti « principali. »

Le rette esterne al nostro esaedro di 4.^a specie sono:

$$16 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 38 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 67 \cdot 78,$$

e i piani con queste formati sono:

$$(1632) \equiv I \quad (1652) \equiv II \quad (1752) \equiv III \quad (1782) \equiv IV \\ (48 \cdot 57 \cdot 36) \equiv V \quad (48 \cdot 35 \cdot 67) \equiv VI,$$

mentre i piani a destra e a sinistra sono:

$$(1832) \equiv a \quad (1852) \equiv b \quad (1682) \equiv c \\ (1532) \equiv a' \quad (1582) \equiv b' \quad (45 \cdot 67 \cdot 38) \equiv c' \quad (45 \cdot 63 \cdot 78) \equiv d',$$

e si può formare la fig. XXIV, da cui si ricavano le successioni:

a	I II III IV	b	II I V IV	c	I V III
a	I V III IV	b	III IV	c	I V VI
a	I V VI	b	III V I	c	II III V VI
		b	III V VI	c	IV III V VI

a' I II III IV	b' IV III II I	c' VI V I II	d' I II III
a' I V III IV	b' IV III V I	c' VI V III II	d' V III
a' VI V III II	b' IV III V VI	c' VI V III IV	d' V VI
a' VI V III IV			d' IV III II

« L'esaedro di 4.^a specie appartiene a 3 enneaedri, 7 decaedri, e 15 en-
« decaedri principali. »

Per l'esaedro di 5.^a specie le rette e i piani esterni sono rispettivamente:

$$17 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 46 \cdot 48 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 78$$

$$(1752) \equiv I \quad (1762) \equiv II \quad (1782) \equiv III \quad (1862) \equiv IV$$

$$(35 \cdot 46 \cdot 78) \equiv V \quad (35 \cdot 48 \cdot 67) \equiv VI \quad (38 \cdot 46 \cdot 57) \equiv VII,$$

mentre i piani a destra e sinistra sono:

$$(1852) \equiv a \quad (1682) \equiv b \quad (1832) \equiv c$$

$$(1562) \equiv a' \quad (45 \cdot 67 \cdot 38) \equiv b'$$

e si costruisce al solito la fig. XXV, da cui ricaviamo le successioni:

a I III V VI	b III I VII	c VII I II VI
a I VII V VI	b III V VII	c VII I III
a I II VI V	b III II VI	c VII V III II
a I II IV	b III V VI	c VII V VI II
	b IV II VI V VII	c IV II VI V
	b IV II I VII V	c IV II III V
		c IV II I
a' IV	b' II IV	
a' II VI V VII	b' II I	
a' II I VII V	b' II III V	
a' II III V VII	b' VI V III I	
	b' VII V III	
	b' VII I III	

« L'esaedro di 5.^a specie appartiene ad 1 ottaedro, 2 enneaedri, 10 de-
« caedri, 12 endecaedri, 2 dodecaedri tutti principali. »

Incontriamo dunque qui per la prima volta i dodecaedri aperti; essi si ottengono aggiungendo convenientemente una rete di piani da quel braccio dell'esaedro di 5.^a specie, da cui sta il pentaedro di 3.^a specie. Si vede che le due rette esterne a quei due *dodecaedri* sono rispettivamente:

$$\begin{array}{cc} 25, & 56 \\ 48, & 56, \end{array}$$

cioè formano in ambo i casi una coppia di rette concorrenti; ma è anche facile vedere che non si può chiudere con un piano, passante per una di queste rette, nessuno di quei dodecaedri aperti, e quindi non si può con essi formare un poliedro chiuso di 13 facce.

Passando finalmente all'esaedro di 6.^a specie (che è simmetrico nei due suoi bracci, e quindi basterà considerare solo un lato per es. il destro), si ha che le rette e i piani esterni sono:

$$\begin{array}{ccccccc} 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 35 \cdot 38 \cdot 46 \cdot 56 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 78 \\ (1762) \equiv I & (1782) \equiv II & (1652) \equiv III & (1682) \equiv IV \\ (1832) \equiv V & (1862) \equiv VI & (35 \cdot 46 \cdot 78) \equiv VII, \end{array}$$

mentre i piani a destra sono:

$$(1752) \equiv a \quad (57 \cdot 46 \cdot 38) \equiv b \quad (48 \cdot 35 \cdot 67) \equiv c.$$

Si costruisce la fig. XXVI nel solito modo, e se ne ricava:

a I VI V	b V VI I II	c I VI V
a I VI IV	b V VI IV III	c I VI IV III
a II IV VI V	b VII II I VI	c I II IV III
a II VII	b VII II IV VI	c VII II IV III
a III IV VI V	b VII II IV III	c VII II IV VI V.

« L'esaedro di 6.^a specie appartiene a 2 enneaedri, 6 decaedri, 20 en-decaedri, 2 dodecaedri, tutti principali. »

Anche qui, come si vede, compariscono i dodecaedri. Le rette esterne ad uno di essi sono qui 25 · 56 formanti anche una coppia di rette concorrenti. E anche qui si può verificare che se si vuol chiudere con un piano uno dei due dodecaedri, non si può trovare un piano che non abbia contem-

poraneamente rette in comune con altri piani del poliedro; e quindi neanche qui possono formarsi poliedri chiusi di 13.^{mo} ordine.

In quanto poi ai dodecaedri chiusi non è difficile vedere che essi effettivamente esistono; così per es. abbiamo trovato che il nostro esaedro di 1.^a specie appartiene all'endecaedro principale ottenuto aggiungendo ad esso a destra successivamente i piani:

(1 8 3 2) (1 8 5 2) (1 6 5 2) (1 6 8 2) (1 7 8 2),

e questo endecaedro può chiudersi col piano (5 4 · 7 8 · 3 6) in maniera da formare un dodecaedro chiuso.

Possiamo dunque concludere:

« Esistono poliedri aperti e chiusi sino all'ordine 12, e non oltre. Esistono poliedri circolari aperti principali di soli cinque ordini, cioè dagli ottaedri sino ai dodecaedri.

« Le due rette lasciate libere da un dodecaedro aperto, formano sempre una coppia di rette concorrenti.

« Gli esaedri delle prime quattro specie non sono contenuti (come esaedri *terminali*) in nessun dodecaedro principale; quelli delle altre due specie vi sono invece contenuti.

« Solamente gli esaedri di 1.^a 3.^a 5.^a specie sono contenuti (come esaedri *terminali*) in ottaedri principali. »

E colle tavole stabilite sopra avremmo anche il mezzo di ricavare una gran quantità di altri teoremi; come per es.:

« Gli esaedri di 3.^a e 5.^a specie sono contenuti (sempre come esaedri di *termine*) in un solo ottaedro principale che si ottiene da essi aggiungendovi successivamente due piani dalla parte da cui essi contengono i pentaedri rispettivamente di 1.^a e di 2.^a specie, e non dalla parte opposta.

« Un dodecaedro (principale) aperto termina sempre con pentaedri di 2.^a specie, e mai con pentaedri di 1.^a o 3.^a specie. »

E così altri ancora che per brevità tralasciamo.

Prima di por termine a questo capitolo dobbiamo avvertire espressamente una cosa che del resto risulta evidente dopo tutta l'analisi precedentemente fatta; ed è che ogni volta in cui ci è accaduto di scrivere delle frasi come queste: *il tal esaedro appartiene al tal poliedro principale*, abbiamo sempre inteso dire che ci appartiene come *esaedro terminale*, cioè che quel tal poliedro principale in uno degli estremi termina con quell'esaedro.

§ 20. Considerazioni sul metodo adoperato in queste ricerche.

Lo scopo essenziale che ci siamo proposti in questi lavori sulla configurazione delle 27 rette di S_3 , e in altri sulla configurazione delle 28 tangenti doppie di C_4 (Lincci-Rendiconti, 1892-93) è stato di studiare aggruppamenti finora affatto o poco considerati, e di studiarli in relazione ai gruppi e sottogruppi di sostituzioni che a loro corrispondono. Però non è male dire qualche parola sul metodo col quale abbiamo abitualmente proceduto nella ricerca. Esso è, si può dire, un metodo *grafico*, e che appunto per questa sua qualità è capace di rappresentarci in modo più intuitivo le proprietà di configurazione. Ma si ingannerebbe chi credesse che si tratti di un metodo sostanzialmente diverso da quello che risulta dalla conosciuta notazione di HESSE e ARONHOLD per le tangenti doppie della C_4 (*) e dalla notazione di SCHLAEFLI per le rette di S_3 (**).

Nella nostra maniera in fondo non si fa che ridurre sotto forma grafica queste medesime notazioni, il che qualche volta è un non lieve vantaggio. Ciò risulta senz'altro dagli stessi principii che abbiamo adoperato nella Memoria precedente, dove abbiamo appunto applicati gli studii di HESSE e ARONHOLD sulle tangenti doppie di C_4 , alle caratteristiche di genere 3 che erano state studiate da WEBER, ma adoperando la notazione solita che si usa per le caratteristiche di genere qualunque.

In quanto alla notazione di SCHLAEFLI essa notoriamente è la seguente. Indichiamo con

$$\begin{array}{cccccc} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8, \end{array}$$

le rette di una bisestupla di S_3 e con c_{ik} la retta che incontra $a_i b_k$, $a_k b_i$. Ora facciamo le seguenti modificazioni: in luogo di a poniamo il numero 1, e in luogo di b il numero 2, e sopprimiamo il simbolo c , e alteriamo poi leggermente la scrittura.

Si vede che allora possiamo rappresentare le 27 rette con

$$\begin{array}{l} (1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 8) \\ (2\ 3)(2\ 4)(2\ 5)(2\ 6)(2\ 7)(2\ 8) \\ (i\ k) \quad (i, k = 3, 4, \dots 8). \end{array}$$

(*) Vedi per es. SALMON, *Higher plane curves* tradotto da FIEDLER, Cap. VI.

(**) Vedi per es. CREMONA, *Crelle*, tom. 68, pag. 76 e seg.

Ciò ci mostra subito che se consideriamo otto punti, e li congiungiamo a due a due con 28 rette, e sopprimiamo la retta (1 2), le altre 27 possono rappresentare, opportunamente interpretate, le 27 rette di S_3 , e così si ricade appunto nella figura fondamentale che noi abbiamo sempre adoperata. Per noi questi 8 punti sono gli 8 punti basi di una rete di quadriche; nella notazione di SCHLAEFLI invece i 6 punti 3, 4, ... 8 sono 6 punti della rappresentazione piana di S_3 .

Milano, estate del 1892.

I N D I C E.

- § 1. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso un piano tritangente.
- § 2. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso il complesso di due piani passanti per una retta.
- § 3. Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso il complesso di due piani non aventi rette comuni. — Gruppo del triedro di 3.^a specie.
- § 4. Triedri di varie specie.
- § 5. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un triedro di 1.^a specie.
- § 6. Gruppo di sostituzioni per un triedro di 2.^a specie.
- § 7. Tetraedri di quattro specie.
- § 8. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 1.^a specie.
- § 9. Gruppo di sostituzioni che lasciano fisso un tetraedro di 2.^a specie.
- § 10. Gruppo del tetraedro di 3.^a specie.
- § 11. Gruppo del tetraedro di 4.^a specie e del pentaedro *principale*.
- § 12. Pentaedri di varie specie.
- § 13. Alcuni teoremi sui pentaedri. — Poliedri principali.
- § 14. Poliedri circolari aperti e chiusi. — Tetraedri circolari.
- § 15. Tetraedri circolari aperti e pentaedri chiusi.
- § 16. Pentaedri circolari aperti. — Esaedri circolari chiusi.
- § 17. Gruppi di sostituzioni per i pentaedri circolari aperti.
- § 18. Esaedri circolari aperti.
- § 19. Poliedri circolari *principali*. — Massimo ordine dei poliedri circolari.
- § 20. Considerazioni sul metodo adoperato in queste ricerche.

FINE DEL TOMO XX.^o (SERIE II.^a).

Fig. I.

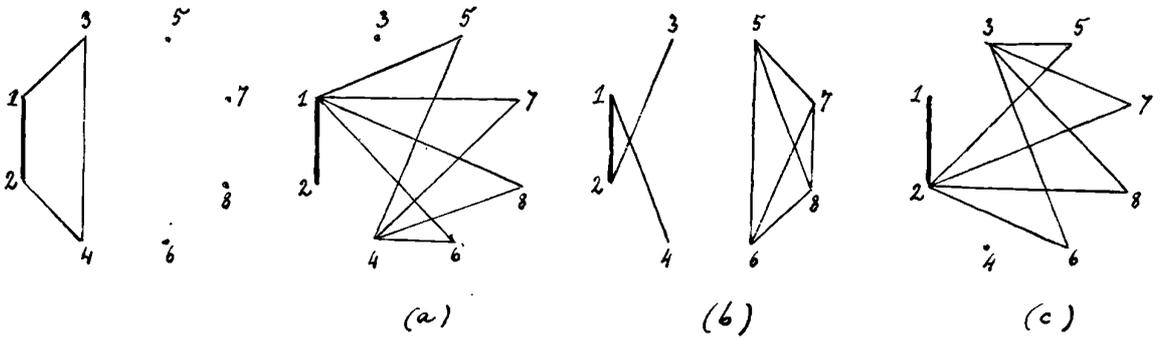


Fig. II.

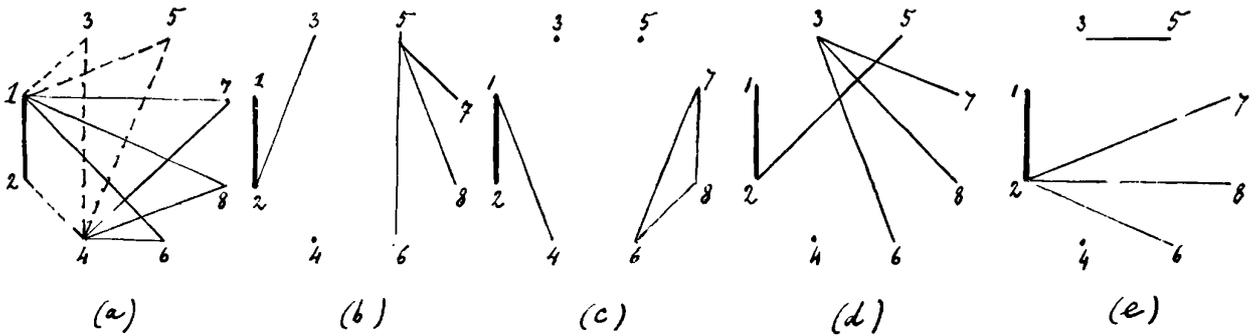


Fig. III.

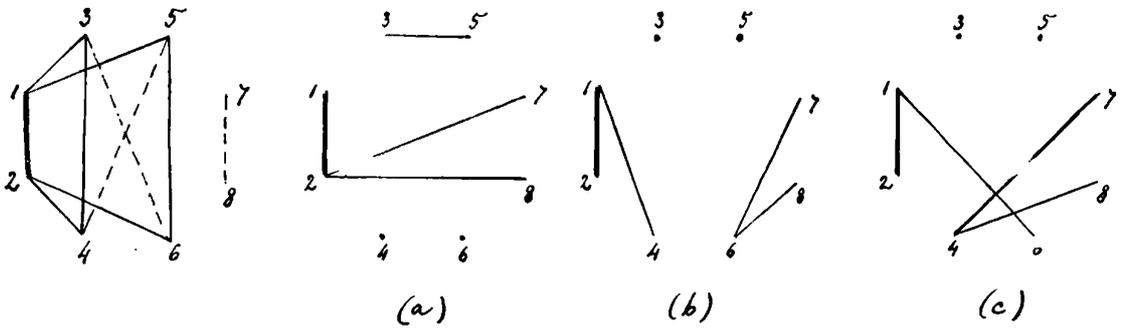


Fig. III (sequito)

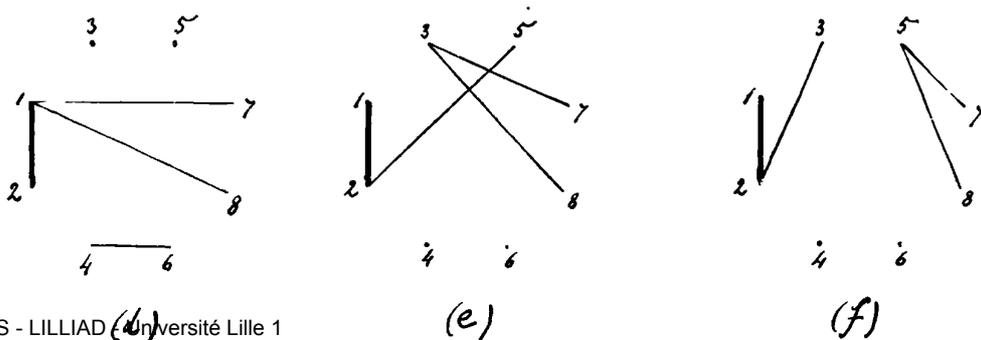
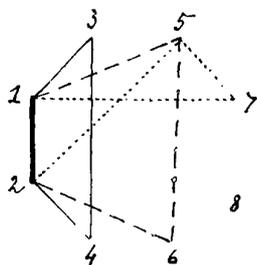
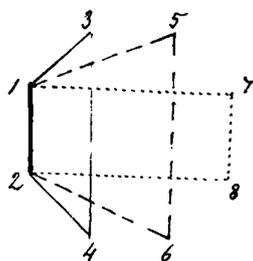


Fig. IV.



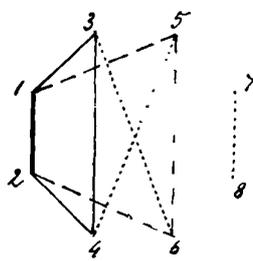
Triedro di 1.^a specie.

Fig. V.



Triedro di 2.^a specie.

Fig. VI.



Triedro di 3.^a specie.

Fig. VII.

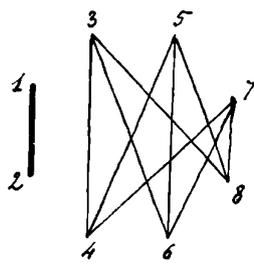
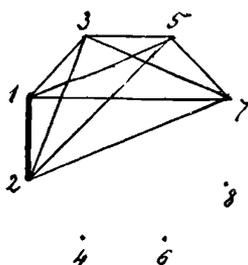
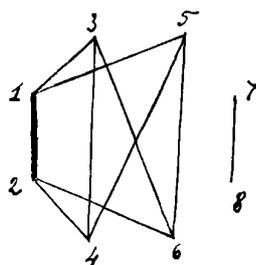


Fig. VIII.

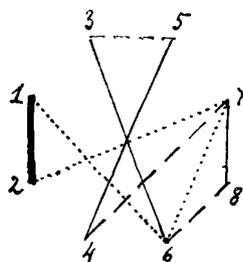


Fig. IX.

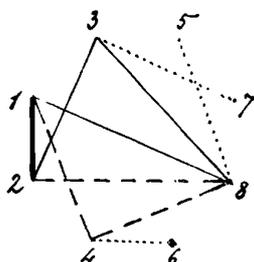


Fig. X.

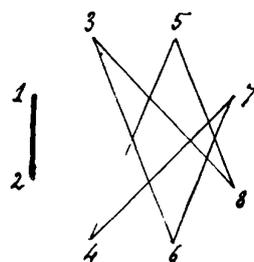


Fig. XI.

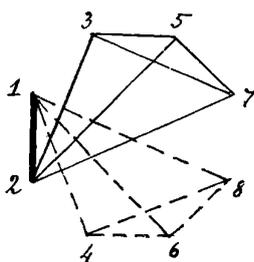


Fig. XII.

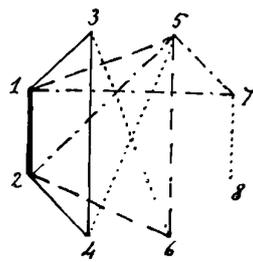
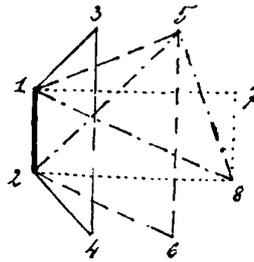


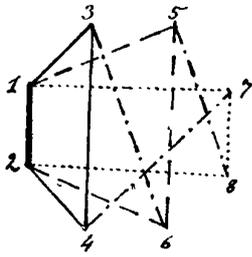
Fig. XIII.



Tetraedro di 2.^a specie.

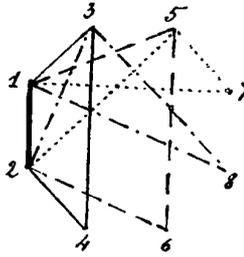
Tetraedro di 3.^a specie.

Fig. XIV.



Tetraedro di 4.^a specie.

Fig. XV.



Tetraedro di 1.^a specie.

Fig. XVI.

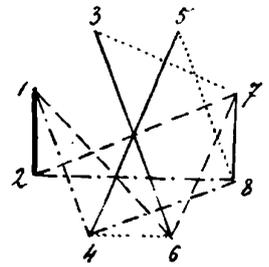


Fig. XVII

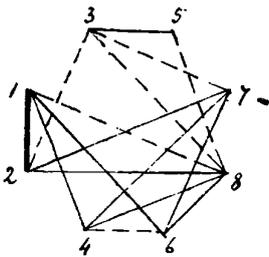


Fig. XVIII.

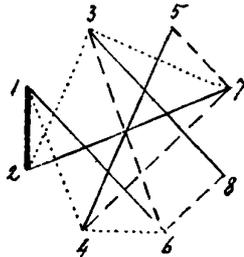


Fig. XIX.

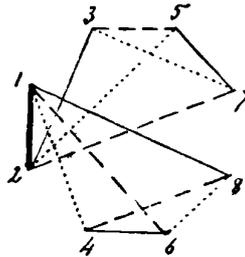


Fig. XX

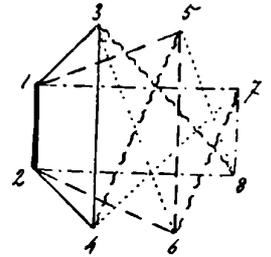


Fig. XXI.

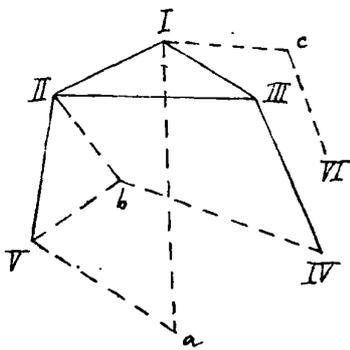


Fig. XXII.

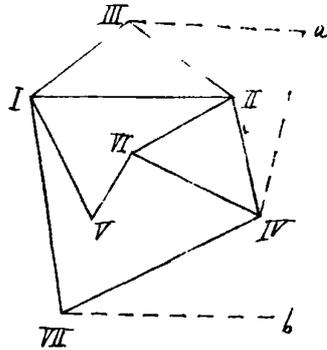


Fig. XXIII.

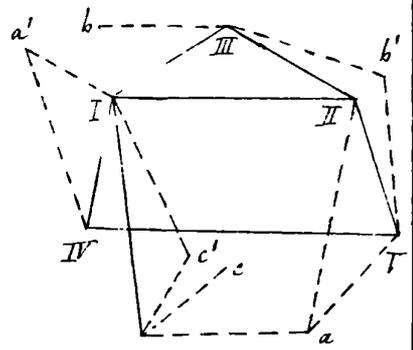


Fig. XXIV

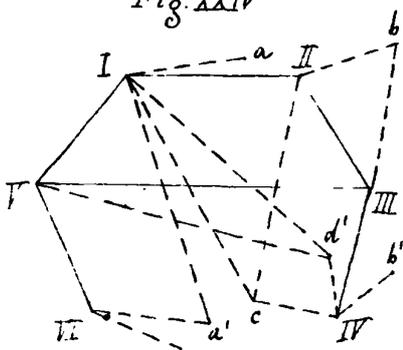


Fig. XXV.

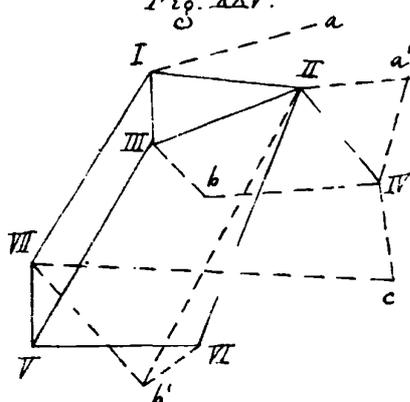


Fig. XXVI.

