

Zeitschrift
für
Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

40. Jahrgang.

Mit in den Text gedruckten Figuren und fünfzehn lithographirten Tafeln.



Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1895.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.		Seite
Additionslogarithmen für complexe Grössen. Von Prof. Mehmke	15	
Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. Von N. v. Szüts	113	
Die Transformation der quadratischen Formen. Von Th. Vahlen	127	
Conforme Abbildungen, welche von der ζ -Function vermittelt werden. Von Prof. Kluyver	129	
Ein neuer Satz über die Determinanten einer Matrix. Von W. Ahrens	177	
Beiträge zur Integralrechnung. Von Prof. Netto	180	
Kurze Ableitung der Bedingungen, dass zwei algebraische Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben. Von Prof. Lüroth	247	
Zur Transformation eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen. Von Dr. E. Schultz	302	
Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen. Von Prof. Netto	375	

Zahlentheorie.

Ueber die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl N mit Hilfe der Primzahlen, welche kleiner als \sqrt{N} sind. Von Dr. Vollprecht	118	
Combinatorischer Beweis des Wilson'schen Satzes. Von Dr. Ad. Schmidt	124	
Ueber einen zahlentheoretischen Satz von Legendre. Von O. Schlömilch	125	
Ueber eine Verallgemeinerung der Euler'schen φ -Function. Von Th. Vahlen	126	
Ueber einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert. Von W. Ahrens	245	

Synthetische und analytische Geometrie.

Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurve. Von Prof. Sturm	1	
Das Verhalten der Steiner'schen, Cayley'schen und anderer covarianter Curven in singulären Punkten der Grundcurve. Von Dr. Wölffing	31	
Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik. Von Prof. Schur	48	
Zur Perspective des Kreises. Von O. Schlömilch	56	
Construction der Krümmungsmittelpunkte von Kegelschnitten. Von Prof. Kinkelin	58	
Constructionen der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten und Construction des neunten Punktes zu acht Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung. Von Dr. Beyel	99	
Beweis eines Satzes von Steiner über die Krümmungskreise der Ellipse. Von B. Sporer	123	
Ueber einige besondere Curven des dritten Grades und solche der dritten Klasse. Von B. Sporer	159	

	Seite
Metrische Strahlencongruenzen bei einer cubischen Raumcurve. Von Dr. Krüger	193
Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven. Von Prof. Mehmke	211
Zwei Aufgaben aus der Perspective. Von Dr. Beyel	255
Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tan- genten und Normalen bestimmt sind. Von Dr. Wiman	296
Der dem Pythagorischen Lehrsätze entsprechende Satz der Sphärik. Von Dr. Velten	312
Die Schraubenflächen constanter mittlerer Krümmung. Von Dr. Heckhoff	313
Construction der Focalcurve aus sechs gegebenen Punkten. Von Prof. R. Müller	337
Ueber eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppel- punkten. Von Dr. Thieme	362
Ueber die conforme Abbildung der Lemniscatenfläche. Von F. Schilling	370
Bemerkungen über doppelt-centrische Vierecke. Von Dr. Beyel	372
Kinematik und Mechanik.	
Ueber die Wendepole einer kinematischen Kette. Von Prof. Wittenbauer	91
Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. Von Prof. Wittenbauer	151
Ueber die mechanische Erzeugung der orthogonalen Projectionen ebener Curven. Von Dr. Delaunay	242
Ueber eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Mechanismen. Von Prof. Müller	257
Die Beschleunigungspole der kinematischen Kette. Von Prof. Wittenbauer	279
Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte eines Kegelschnitts und einer Curve dritten Grades. Von B. Sporer	381
Physik.	
Der Bunsenbrenner. Von Prof. Dr. Kurz	60
Homocentrische Brechung des Lichts durch das Prisma. Von Prof. Dr. Burmester	65
Zur Wärmeleitung in der Erde. Von Prof. Kurz	185
Erwärmung des Wassers durch Zusammendrücken. Von Prof. Kurz	187
Abkühlung von Drähten durch Zug. Von Prof. Kurz	188
Nachtrag zur barometrischen Höhenmessungsformel. Von Prof. Kurz	190
Wärmecapacitäten. Von Prof. Kurz	251
Gemisch von Flüssigkeit und Dampf. Von Prof. Kurz	253
Homocentrische Brechung des Lichts durch die Linse. Von Prof. Dr. Burmester	321
Zur homocentrischen Brechung des Lichts im Prisma. Von Dr. Wilsing	353
Preisaufgaben.	
Preisaufgaben der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft der Wissenschaften. Für die Jahre 1895, 1896, 1897 und 1898.	190

I.

Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurve.

Von

Prof. R. STURM

in Breslau.

1. Die Gradzahlen der mit der cubischen Raumcurve verbundenen Oerter der Normalebene, rectificirenden Ebenen, Hauptnormalen, Binormalen u. s. w. findet man leicht mit Hilfe folgender allgemeiner Sätze:

1. Die Geraden, welche entsprechende Punkte zweier eindeutig auf einander bezogener Curven n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung verbinden, erzeugen eine Regelfläche $(n + n_1)^{\text{ten}}$ Grades.

Denn in einem Ebenenbüschel entsteht durch die Ebenen, welche entsprechende Punkte enthalten, eine Correspondenz $[n_1, n]$, deren Coincidenzen die Geraden der Regelfläche enthalten, welche die Achse des Büschels schneiden.

Der Grad der Regelfläche vermindert sich um α , wenn α -mal entsprechende Punkte zusammenfallen.

2. Bei zwei Curven n^{ter} Ordnung, bzw. n_1^{ter} Klasse, welche sich in derselben Ebene befinden und in eindeutiger Beziehung der Punkte und Tangenten stehen, fällt $(n + n_1)$ -mal ein Punkt der ersten auf die entsprechende Tangente der zweiten.

Die Correspondenz nämlich in einem beliebigen Strahlenbüschel der Ebene, in der zwei Strahlen einander entsprechen, von denen der eine nach einem Punkte der ersten Curve, der andere nach dem Schnitte der Tangente desselben mit der entsprechenden Tangente der zweiten Curve geht, ist, wenn n' die Klasse der ersten ist, $[n' + n_1, n]$. Zu den Coincidenzen gehören die im Büschel befindlichen Tangenten der ersten Curve, die übrigen führen zu Incidenzen entsprechender Punkte und Tangenten.

Ueberträgt man diesen Satz auf die Kegel, welche aus einem beliebigen Punkte die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung und die Geraden einer Regelfläche n_1^{ten} Grades projiciren, so hat man:

3. Wenn die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf die Erzeugenden einer Regelfläche n_1^{ten} Grades — im besonderen Falle auf die Tangenten einer Curve n_1^{ten} Ranges (n_1^{ter} Klasse, wenn sie eben ist) — bezogen sind, so umhüllen die Verbindungsebenen

entsprechender Punkte und Tangenten einen Torsus $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Klasse.

Ebenso ist dual, wenn die Schmiegungebenen einer Curve n^{ter} Klasse eindeutig auf die Erzeugenden einer Regelfläche n_1^{ten} Grades bezogen sind, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Curve $(n + n_1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Daraus ergibt sich:

4. Wenn die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf die Schmiegungebenen einer Curve n_1^{ter} Klasse eindeutig bezogen sind, so incidiren $(n + n_1)$ -mal entsprechende Elemente.

Zum Beweise benutzt man das Erzeugniss der Schnittpunkte der Tangenten der ersten und der entsprechenden Schmiegungebenen der zweiten Curve und eine Correspondenz in einem Ebenenbüschel.

2. Die Tangentenfläche der cubischen Raumcurve \mathfrak{R}^3 schneidet in die unendlich ferne Ebene \mathfrak{E} eine Curve \mathfrak{C}_3^4 vierter Ordnung dritter Klasse ein. Ihre acht Schnitte mit der absoluten Curve \mathfrak{R}^2 (dem unendlich fernen imaginären Kugelkreise) lehren, dass es acht Punkte auf \mathfrak{R}^3 giebt, deren Tangenten die \mathfrak{R}^2 treffen und bei denen sich Normalebene und rectificirende Ebenen — in eine die \mathfrak{R}^2 berührende Ebene — vereinigen.

Unter den Schmiegungebenen der \mathfrak{R}^3 zeichnen sich die sechs aus, welche \mathfrak{R}^2 berühren; ihre 15 Schnittstrahlen sind die Focalstrahlen, die zehn Diagonalen (Verbindungslinien von Gegenecken) des durch die gebildeten Sechsecks die Achsen der cubischen Raumcurve.*

Jede von diesen sechs Schmiegungebenen vereinigt sich mit der zugehörigen rectificirenden Ebene, und ihr Krümmungsmittelpunkt, das heisst ihr Schnitt mit den beiden Normalebeneu in den ihr gelegenen Tangenten, ist ihr Berührungspunkt mit \mathfrak{R}^2 .

3. Ist \mathfrak{C}_4^3 die Polarcurve von \mathfrak{C}_3^4 in Bezug auf \mathfrak{R}^2 , so erhalten wir, die entsprechenden Punkte von \mathfrak{R}^3 und \mathfrak{C}_4^3 verbindend:

Die Binormalen der cubischen Raumcurve erzeugen eine Regelfläche sechsten Grades, von welcher drei Erzeugende in \mathfrak{E} fallen, die Binormalen der unendlich fernen Punkte A, B, C von \mathfrak{R}^3 .

Verbinden wir die Punkte von \mathfrak{R}^3 mit den Tangenten von \mathfrak{C}_4^3 , so ergibt sich:

Die Normalebeneu der cubischen Raumcurve umhüllen einen Torsus siebenter Klasse, welcher \mathfrak{E} zur dreifachen Berührungsebene hat; denn sie ist Normalebene für A, B, C .

Verbindet man aber die Tangenten von \mathfrak{R}^3 mit den entsprechenden Punkten von \mathfrak{C}_4^3 , so hat man:

* H. Krüger, „Die Focaleigenschaften der cubischen Raumcurve“, Dissertation. Breslau 1885. — Bekanntlich werden auch die Schnittlinien der Schmiegungebenen Achsen genannt.

Die rectificirenden Ebenen von \mathfrak{R}^3 umhüllen einen Torsus ebenfalls siebenter Klasse, zu dem aber \mathfrak{C} nicht gehört.*

Der Schnitt dieser rectificirenden Fläche mit \mathfrak{C} ist eine Curve siebenter Klasse \mathfrak{C}_7 ; polarisiren wir sie in Bezug auf \mathfrak{R}^2 in die Curve siebenter Ordnung \mathfrak{C}' und verbinden wiederum die entsprechenden Punkte von \mathfrak{R}^3 und \mathfrak{C}' , so erhalten wir:

Die Hauptnormalen der cubischen Raumcurve erzeugen eine Regelfläche zehnten Grades.

Sie ist auch das Erzeugniss der Schnittlinien entsprechender Ebenen des Torsus dritter Klasse der Schmiegungebenen und des Torsus siebenter Klasse der Normalebene von \mathfrak{R}^3 .

Ebenso sind die Binormalen Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden Torsen siebenter Klasse der Normalebene und der rectificirenden Ebenen; aber achtmal vereinigen sich entsprechende Ebenen, daher sinkt der Grad der Regelfläche der Binormalen von 14 auf 6 herab.

Die Fläche der Hauptnormalen hat drei in \mathfrak{C} gelegene Erzeugenden, die Hauptnormalen von A, B, C .

4. Der Torsus der Normalebene kann keine stationäre Ebene haben und ein ebener Schnitt von ihm keine Wendetangente. Dieser Schnitt ist vom Geschlechte 0 und hat eine dreifache Tangente im Unendlichen; daraus ergibt sich, mit Hilfe der Plücker'schen Formeln, dass er zwölf weitere Doppeltangenten hat und seine Ordnung 12 ist.

Die Krümmungsachsen der cubischen Raumcurve erzeugen eine abwickelbare Fläche zwölfter Ordnung siebenter Klasse.

Schneiden wir entsprechende Schmiegungebenen und Krümmungsachsen, so ergibt sich:

Die Krümmungs-Mittelpunkte der cubischen Raumcurve erzeugen eine Curve 15. Ordnung.

Die Krümmungsachsen verbinden die Punkte dieser Curve mit den entsprechenden von \mathfrak{C}_4^3 . Die Reduction der Ordnung ihrer Fläche von $15 + 3$ auf 12 beruht darauf, dass sechsmal — bei den \mathfrak{R}^2 berührenden Schmiegungebenen — entsprechende Punkte zusammenfallen.

Andererseits verbinden die Hauptnormalen entsprechende Punkte der \mathfrak{R}^3 und dieser Curve 15. Ordnung; die Reduction um 8 geschieht wegen der Punkte von \mathfrak{R}^3 , bei denen die Normalebene mit der rectificirenden Ebene und infolge dessen der Krümmungs-Mittelpunkt mit dem Punkte von \mathfrak{R}^3 sich vereinigt, zu dem er gehört.

5. Wenn A', A'' die beiderseitigen Nachbarpunkte des unendlich fernen Punktes A der \mathfrak{R}^3 sind, so ist \mathfrak{C} die zu A gehörige Normalebene, die von

* Dieser Satz und der über die Binormalen findet sich schon bei Krüger.

A', A'' schneiden beide die \mathcal{C} in der Wendetangente α von \mathcal{C}_4^3 , welche dem gemeinsamen Punkte A der Tangenten $AA', A''A$ von \mathcal{R}^3 — der ein Rückkehrpunkt von \mathcal{C}_4^3 ist — entspricht. Daher wird sie Rückkehr-
Erzeugende der abwickelbaren Fläche der Normalebenen und dreipunktig
berührende Tangente der Rückkehrcurve dieser Fläche. Die drei Geraden
 α, β, γ , den unendlich fernen Punkten A, B, C von \mathcal{R}^3 zugehörig, je
dreifach gerechnet — weil \mathcal{C} die zugehörige Berührungsebene ist — ver-
vollständigen \mathcal{C}_4^3 zum Schnitte zwölfter Ordnung.

Ein ebener Schnitt des Normalebenen-Torsus ist siebenter Klasse
zwölfter Ordnung, hat eine dreifache und zwölf doppelte Tangenten, also
15 Rückkehrpunkte, von denen drei von den eben erwähnten Rückkehr-
Erzeugenden herrühren. Die zwölf übrigen lehren:

Die Rückkehrcurve des Normalebenen-Torsus oder die
Curve der Mittelpunkte der vierpunktig berührenden Kugeln
(Schmiegunskugeln) ist zwölfter Ordnung (zwölften Ranges
siebenter Klasse).

Wirkliche Doppelpunkte kann sie nicht besitzen; daher haben wir,
wenn h die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte und s die der Rückkehrpunkte
dieser Curve ist, $2h + 3s = 12 \cdot 11 - 12 = 120$, und wegen des Geschlechts 0:
 $h + s = 55$, also: $h = 45, s = 10$. Die letztere Zahl liefert den Satz:

Die cubische Raumcurve besitzt zehn Kugeln, welche
sie fünfpunktig berühren.

6. Auch zwei auf einander folgende rectificirende Ebenen können nicht
zusammenfallen. Daraus schliessen wir:

Die rectificirende Fläche der cubischen Raumcurve ist
zwölfter Ordnung.

In jeder Ebene giebt es 15 Gerade, durch welche zwei rectificirende
Ebenen gehen.

Die Rückkehrcurve dieser Fläche ist 15. Ordnung und
hat 16 Rückkehrpunkte.

Es giebt also 16 Punkte, durch welche vier auf einander
folgende rectificirende Ebenen von \mathcal{R}^3 gehen.

Weil die rectificirende Ebene Grenzlage der Halbirungsebene des einen
Flächenwinkels zweier benachbarter Schmiegungebenen ist, so ist jeder
Punkt in ihr Mittelpunkt einer Kugel, welche beide Schmiegungebenen
berührt.

Folglich sind die 16 Punkte Mittelpunkte von Kugeln,
welche je fünf auf einander folgende Schmiegungebenen
tangiren.

Die Krümmungsachsen verbinden entsprechende Punkte der Curve
15. Ordnung der Krümmungs-Mittelpunkte und der Curve zwölfter Ordnung
der Mittelpunkte der Schmiegunskugeln und erzeugen eine Fläche zwölfter
Ordnung, also:

Der Krümmungs-Mittelpunkt fällt 15-mal mit dem zugehörigen Schmiegunngskugel-Mittelpunkte zusammen.

Von den unendlich fernen Punkten der Curve der Krümmungs-Mittelpunkte fallen sechs in die Punkte, in denen \mathfrak{R}^2 von Schmiegunngsebenen der \mathfrak{R}^3 berührt wird; die neun übrigen fallen zu je dreien in die Schnitte der Geraden α, β, γ , der Krümmungsachsen von A, B, C , mit den Schmiegunngsebenen α, β, γ dieser Punkte; denn für jeden dieser drei Punkte der \mathfrak{R}^3 und seine beiden Nachbarpunkte ist der Krümmungs-Mittelpunkt unendlich fern.

Die zwölf Schnitte aber der Curve der Mittelpunkte der Schmiegunngskugeln mit \mathfrak{E} fallen zu je vier in die diesen Wendetangenten α, β, γ von \mathfrak{C}_4^3 zugehörigen Wendepunkte, denn durch jeden der Punkte A, B, C gehen vier unendlich nahe Schmiegunngskugeln, sämmtlich mit unendlich fernem Mittelpunkte, in ihrem Berührungspunkte aber mit \mathfrak{C}_4^3 wird die Wendetangente, als Krümmungsachse der \mathfrak{R}^3 , von der nächstfolgenden Normalenebene geschnitten.

Der Krümmungskreis eines der Punkte A, B, C besteht aus dessen Tangente und der unendlich fernen Geraden der Schmiegunngsebene, die Schmiegunngskugel aus dieser Schmiegunngsebene und der unendlich fernen Ebene.

7. Die Kreise auf den Flächen eines Büschels zweiter Ordnung bilden eine Congruenz von Kreisen, von der durch jeden Punkt sechs gehen.

Die Ebenen dieser ∞^2 Kreise berühren alle die Cayley'sche Curve dritter Klasse des Netzes von Kegelschnitten in \mathfrak{E} , das durch den \mathfrak{R}^2 und den vom Flächenbüschel eingeschnittenen Kegelschnittbüschel constituirt wird. Folglich umhüllen die Ebenen derjenigen von diesen Kreisen, die durch einen Punkt O der Grundcurve \mathfrak{R}^4 des Büschels gehen, einen Kegel dritter Klasse. Und auf dem Erzeugnisse dieser Kreise ist \mathfrak{R}^4 dreifach.

Lassen wir auf einer Geraden l einem Punkte X die sechs Punkte X' entsprechen, in denen l von den Ebenen der sechs durch O gehenden Kreise auf der Fläche des Büschels durch X geschnitten wird, so gehen umgekehrt durch jeden X' die Ebenen von drei durch O gehenden Kreisen auf Flächen des Büschels und es entsprechen dem X' die sechs Punkte X , in welchen diese Flächen die l schneiden. Aus den zwölf Coincidenzen dieser Correspondenz [6,6] folgt:

Die Kreise auf den Flächen eines F^2 -Büschels, welche durch einen Punkt O der Grundcurve \mathfrak{R}^4 gehen, erzeugen eine Fläche zwölfter Ordnung.

Der Schnitt dieser Fläche mit jeder Fläche des Büschels besteht aus der dreifachen Grundcurve und den sechs auf der letzteren Fläche gelegenen Kreisen durch O , der unendlich ferne Schnitt aber aus \mathfrak{R}^2 , dreifach gerechnet, und den sechs Geraden der drei Paraboide des Büschels; denn jede von ihnen

setzt mit der durch O gehenden Geraden der anderen Schaar einen Kreis zusammen.

Der Punkt O ist auf ihr neunfach, denn die drei weiteren Schnitte einer durch ihn gehenden Geraden rühren von den Kreisen her, die sich in den drei Berührungsebenen befinden, welche von der Geraden an den Kegel dritter Klasse gehen.

Wenn O einer von den unendlich fernen Punkten von \mathfrak{R}^4 ist, so zerfällt die Fläche in diejenigen drei Regelschaaren der Paraboloiden, zu denen die drei durch O gehenden von den sechs Geraden nicht gehören, und in die Ebene \mathfrak{E} , sechsfach gerechnet, da auf jeder F^2 der unendlich ferne Schnitt zu allen sechs Kreisschaaren gehört.

8. Lassen wir \mathfrak{R}^4 in eine cubische Raumcurve und eine Sehne derselben zerfallen, so haben wir:

Eine cubische Raumcurve \mathfrak{R}^3 führt zu einem Complex von Kreisen, denjenigen nämlich, welche durch die drei Schnitte der verschiedenen Ebenen gehen. Jeder von ihnen ist mit \mathfrak{R}^3 durch eine Fläche zweiten Grades verbunden.

Alle Flächen zweiten Grades, welche durch \mathfrak{R}^3 und die Tangente dieser Curve im Punkte P gehen, berühren in P die Schmiegungeebene π , so dass jeder Strahl des Büschels (P, π) auf einer dieser Flächen liegt. So zeigt sich, wie die in Geradenpaare zerfallenden Krümmungskreise der Punkte A, B, C mit \mathfrak{R}^3 durch Flächen zweiten Grades verbunden sind.

Die durch einen Punkt O gehenden Kreise unseres Complexes erzeugen eine Fläche zwölfter Ordnung.

Auf derselben sind \mathfrak{R}^3 , \mathfrak{R}^2 und die Sehne o von \mathfrak{R}^3 durch O dreifach, die unendlich fernen Sehnen der \mathfrak{R}^3 und die drei weiteren Geraden der durch \mathfrak{R}^3 und O gehenden Paraboloiden, welche mit \mathfrak{E} oder O incidiren, einfach, der Punkt O endlich neunfach.

Die Ebenen dieser Kreise umhüllen einen Kegel dritter Klasse.

Weil die Curve dritter Klasse in \mathfrak{E} , nach welcher dieser Kegel geht, von neun Schmiegungeebenen der \mathfrak{R}^3 tangirt wird, so gehen von den Flächen zweiten Grades, die durch \mathfrak{R}^3 und die verschiedenen Krümmungskreise gelegt sind, neun durch jeden Punkt.

Diese Flächen rufen zwischen den Punktreihen auf \mathfrak{R}^3 und auf einer beliebigen Geraden eine Correspondenz [9,2] hervor. Sie hat auf \mathfrak{R}^3 $2 \cdot 9(2-1) = 18$ und auf der Geraden $2 \cdot 2(9-1) = 32$ Verzweigungspunkte.*

Von den genannten Flächen berühren 18 eine Gerade und ihre Enveloppe ist 32. Ordnung.

* In Bezug auf höhere Correspondenzen vergleiche mein Buch: „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie Theil I“ (Leipzig 1892) S. 16 ff.

9. Ein allgemeines F^2 -Netz führt ebenfalls zu einem Complexe von Kreisen; jede Ebene schneidet eine Fläche des Netzes in einem Kreise.

Die Kreise dieses Complexes in den Ebenen eines Büschels erzeugen eine Fläche fünfter Ordnung, auf der die Achse dreifach ist.

Auf jeder Geraden ℓ entsteht nämlich durch die Schnitte mit einer Ebene des Büschels und mit der Fläche des Netzes, welche die Ebene in einem Kreise schneidet, eine Correspondenz [3,2]; denn durch einen Punkt von ℓ wird aus dem Netze ein Büschel ausgeschieden, dessen in \mathfrak{C} gelegene Umhüllungscurve der Kreisschnitt-Ebenen von drei Ebenen des Büschels berührt wird. Die fünf Coincidenzen führen zur Behauptung.

Die Ebenen derjenigen Kreise unseres Complexes, welche eine gegebene Gerade ℓ treffen, umhüllen eine Fläche fünfter Klasse, für welche alle Ebenen durch ℓ doppelt sind.

Wenn ℓ durch einen Grundpunkt des Netzes geht, oder in dem uns besonders interessirenden Falle, wo alle Flächen des Netzes durch eine \mathfrak{C}^3 gehen, wenn ℓ diese Curve trifft, sondert sich von der Fläche ein Bündel ab. Geschieht es zweimal, so bleibt nur eine Fläche dritter Klasse, offenbar die unendlich ferne Curve dritter Klasse, die zu dem Büschel aus dem Netze gehört, auf dessen Flächen sich die fraglichen Kreise befinden.

Ein Punkt O scheidet aus dem Netze einen Büschel aus. Die Ebenen der zwölf Kreise, welche durch O gehen und ℓ treffen, berühren sowohl den Kegel dritter Klasse, der zu dem Büschel und dem auf seiner Grundcurve gelegenen Punkte O gehört, als auch die Fläche fünfter Klasse, welche zum Netze und zur Geraden ℓ gehört. Es bleiben also noch drei weitere gemeinsame Ebenen.

10. Verbundene Kreisschnitt- oder cyklische Ebenen einer Fläche zweiten Grades F^2 seien solche, die zur nämlichen Achse der Fläche parallel sind. Ihre unendlich fernen Geraden \mathfrak{f} , \mathfrak{f}' bilden ein Geradenpaar des Büschels ($F^2 \mathfrak{C}$, \mathfrak{R}^2); die bei den Flächen unseres Netzes sich ergebenden \mathfrak{f} , \mathfrak{f}' bilden daher die Geradenpaare des Gebüsches von Kegelschnitten, das durch \mathfrak{R}^2 und das aus dem Flächennetze ausgeschnittene Kegelschnittnetz constituirt wird. Folglich sind je zwei zusammengehörige \mathfrak{f} , \mathfrak{f}' in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt, welche sich auf dies Gebüsch stützt. Grundtangente dieser Schaar sind die Berührungsschnen, mit \mathfrak{R}^2 , der vier zum Netze gehörigen Rotationsflächen.

Die unendlich fernen Geraden \mathfrak{f} , \mathfrak{f}' verbundener cyklischer Ebenen der Flächen eines F^2 -Netzes entsprechen sich in einer involutorischen quadratischen Verwandtschaft. Ihr Hauptdreiseit ist das Polardreiseit der Kegelschnittschaar.

Jeder Seite \mathfrak{j} dieses Dreiseits als \mathfrak{f} entsprechen als \mathfrak{f}' alle Strahlen durch die Gegenecke \mathfrak{S} . Daraus folgt, dass in jeder Ebene durch \mathfrak{j} nicht blos

ein Kreis liegt, sondern ∞^1 , auf verschiedenen Flächen des Netzes befindlich, deren verbundene cyklische Ebenen durch die verschiedenen Strahlen des Büschels (\mathcal{E} , \mathcal{E}) gehen.

Die Flächen bilden auch einen Büschel, dessen Grundcurve durch die beiden Punkte \mathcal{R}^2 geht; die Strahlenbüschel um diese Punkte und der um \mathcal{E} setzen die zu diesem Flächenbüschel gehörige Curve dritter Klasse zusammen.

Bei einem F^2 -Netz giebt es drei ausgezeichnete Stellungen von Ebenen, welche nicht bloß eine Fläche, sondern sämtliche Flächen eines Büschels des Netzes in Kreisen schneiden.

Alle diese Ebenen tangiren die zu einer Geraden l gehörigen Fläche fünfter Klasse, und die drei durch O gehenden sind die am Schlusse von Nr. 9 erwähnten; zu jener Fläche aber und zum Kegel dritter Klasse gehören sie wegen verschiedener Kreise.

11. Wenn nun alle Flächen des Netzes eine cubische Raumcurve \mathcal{R}^3 gemeinsam haben, so gehen die ausgezeichneten Ebenen nach den unendlich fernen Sehnen derselben. Jede von ihnen ist cyklische Ebene für einen Büschel von Paraboloiden im Netze; die ausgeschnittenen Kreise aber bestehen aus der Sehne und einer Geraden der anderen Schaar.

Die Kreise aus dem zu \mathcal{R}^3 gehörigen Complexe, welche eine Gerade l treffen, befinden sich in den Tangentialebenen einer Fläche fünfter Klasse. Diese Fläche ist nur vierter Klasse, wenn l sich auf \mathcal{R}^3 stützt.

Die Krümmungskreise einer cubischen Raumcurve \mathcal{R}^3 erzeugen eine Fläche 15. Ordnung, auf welcher \mathcal{R}^3 sowie \mathcal{R}^2 dreifach sind.

Ihr unendlich ferner Schnitt besteht aus \mathcal{R}^2 und den unendlich fernen Geraden der Schmiegungebenen von A , B , C und je den beiden Nachbarpunkten auf \mathcal{R}^3 .

12. Die Kugeln, welche durch einen Kreis K des Complexes gelegt sind, treffen \mathcal{R}^3 noch in den Tripeln einer cubischen Involution, deren Ebenen also einen Büschel bilden. Unter diesen Ebenen befindet sich \mathcal{E} , wegen des Ebenenpaares im Kugelbüschel. Also sind die Ebenen der Tripel der Involution parallel. Diese Involution ändert sich nicht, wenn die Ebene von K durch parallele Ebenen ersetzt wird. Die einen und die anderen parallelen Ebenen sind verbundene cyklische Ebenen einer und derselben F^2 durch \mathcal{R}^3 .

Wenn K ein Krümmungskreis der \mathcal{R}^3 ist, der zum Punkte P gehört, so haben wir in der zugeordneten Involution das Tripel $PQ'Q''$, wo Q' , Q'' die beiden weiteren Schnitte von \mathcal{R}^3 mit der Schmiegungekugel von P sind. Die unendlich fernen Geraden der Ebenen $PQ'Q''$ umhüllen die Curve sechster Klasse, welche in der obigen Verwandtschaft der \mathfrak{k} und \mathfrak{k}' der

Curve \mathcal{C}_3^4 , in der \mathcal{E} den Torsus der Schmiegungebenen schneidet, entspricht.

Für jeden der drei Punkte A, B, C als P sind die beiden anderen Q', Q'' . Also hat der von den Ebenen $PQ'Q''$ erzeugte Torsus die \mathcal{E} zur dreifachen Ebene und ist neunter Klasse.

Mithin ist jeder Punkt von \mathcal{R}^3 einmal P und achtmal Q' oder Q'' .

Durch jeden Punkt der cubischen Raumcurve gehen acht Kugeln, welche sie an anderer Stelle vierpunktig berühren.

Und wir haben auf \mathcal{R}^3 eine Correspondenz [8,2], in der sich der Berührungspunkt einer Schmiegungekugel und einer der beiden weiteren Schnitte entsprechen.

Die zehn Coincidenzen dieser Correspondenz sind die Berührungspunkte der fünfpunktig berührenden Kugeln.

Zwischen den Punkten Q', Q'' besteht eine involutorische Correspondenz [8]. Mit der durch einen Ebenenbüschel eingeschnittenen cubischen Involution — einer involutorischen Correspondenz [2] — hat sie 2.8 Paare entsprechender Punkte gemeinsam.

Die Schnittsehnen $Q'Q''$ der Schmiegungekugeln der \mathcal{R}^3 erzeugen eine Regelfläche 16. Grades, auf welcher die Curve achtfach ist.

Der Torsus der Ebenen $PQ'Q''$ ist, wie wir fanden, neunter Klasse; diese Ebenen verbinden die Punkte P von \mathcal{R}^3 mit den entsprechenden Erzeugenden $Q'Q''$ der Regelfläche. Die Erniedrigung um 10 erfolgt durch die Sehnen $Q'Q''$, welche durch die zugehörigen P gehen, das sind die Sehnen, welche die Berührungspunkte der fünfpunktig tangirenden Kugeln je mit dem sechsten Schnitte verbinden.

13. Durch jeden Punkt von \mathcal{R}^3 gehen vier auf einander folgende Schmiegungekugeln und acht, welche anderwärts berühren.

Folglich gehen durch jeden Punkt zwölf Schmiegungekugeln.

Deshalb entsteht zwischen der Punktreihe auf \mathcal{R}^3 und auf einer Geraden l eine Correspondenz [12,2], in der sich ein Punkt von \mathcal{R}^3 und die beiden Schnitte seiner Schmiegungekugel mit l entsprechen. Sie hat auf l $2 \cdot 2(12 - 1) = 44$ Verzweigungspunkte. Zu ihnen gehört der unendlich ferne Punkt von l und zwar $3(4 - 1)$ -fach, indem durch ihn dreimal vier benachbarte Schmiegungekugeln gehen, ferner die 20 Schnitte der l mit fünfpunktig beruhenden Kugeln; die 15 übrigen sind die Schnitte der Geraden l mit der Enveloppe der Schmiegungekugeln, oder, was dasselbe ist, mit der Fläche der Krümmungskreise, deren Ordnung 15 so von neuem gefunden ist.

Die $2 \cdot 12(2 - 1) = 24$ Verzweigungspunkte auf \mathcal{R}^3 aber lehren, dass jede Gerade von 24 Schmiegungekugeln berührt wird.

14. Auf der cubischen Raumcurve wird durch alle Kugeln des Raumes eine Involution sechsten Grades vierter Stufe eingeschnitten, die Kugeln eines Gebüsches, eines Netzes, eines Büschels schneiden Involutionen sechsten Grades dritter, zweiter, erster Stufe ein.

Für solche höhere Involutionen gilt folgender Satz:

In einer Involution J_n^k n^{ten} Grades k^{ter} Stufe ($k < n$) auf einem rationalen Träger giebt es $(k+1)(n-k)$ Gruppen mit einem $(k+1)$ -fachen Elemente und $(t+1)(k-t+1)(n-k)(n-k-1)$ Gruppen mit einem $(t+1)$ -fachen und einem $(k-t+1)$ -fachen Elemente, wofern $t < k$ und $\geq \frac{k}{2}$.

Ist k gerade, so giebt es $\frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right)^2 (n-k)(n-k-1)$ Gruppen mit zwei $\left(\frac{k}{2} + 1 \right)$ -fachen Elementen.*

Es ist wegen der zahlreichen Anwendungen vielleicht besser, wenn ich für diesen weniger bekannten Satz einen Beweis mittheile.

Der erste Theil unseres Satzes über die Anzahl der Gruppen mit einem $(k+1)$ -fachen Elemente ist richtig für $k=1$, denn eine Involution J_n^1 hat bekanntlich $2(n-1)$ Gruppen mit einem Doppelemente.

Nehmen wir an, er sei richtig für $k-1$, so wollen wir zeigen, dass er dann auch richtig ist für k . Aus J_n^k scheidet ein Element X eine Involution J_{n-1}^{k-1} aus; das heisst, die $n-1$ übrigen Elemente aller Gruppen von J_n^k , welche das Element X enthalten, bilden die Gruppen einer J_{n-1}^{k-1} . Diese hat nach der Annahme $k\{n-1-(k-1)\} = k(n-k)$ Gruppen mit einem k -fachen Elemente; so werden jedem X $k(n-k)$ Elemente X_1 zugeordnet. Umgekehrt, wie allgemein eine Gruppe von J_n^k durch k Elemente bestimmt ist, so auch durch ein Element X_1 , das ein k -faches einer Gruppe sein soll; die $n-k$ übrigen Elemente dieser Gruppe sind die entsprechenden X . Somit haben wir eine Correspondenz $[n-k, k(n-k)]$ zwischen X und X_1 ; sie hat, weil der Träger rational ist, $(k+1)(n-k)$ Coincidenzen; das sind $(k+1)$ -fache Elemente von Gruppen von J_n^k .

$k-t$ Elemente scheidet aus J_n^k eine Involution J_{n-k+t}^t aus, das heisst, die $n-k+t$ übrigen Elemente aller Gruppen von J_n^k , welche jene Elemente gemeinsam haben, bilden die Gruppen einer J_{n-k+t}^t . Insbesondere scheidet also auch ein Element X als $(k-t)$ -faches Element einer Gruppe eine solche Involution aus. Diese besitzt dann nach dem eben erhaltenen Resultate $(t+1)(n-k+t-t) = (t+1)(n-k)$ Gruppen mit einem $(t+1)$ -fachen Elemente; jede von ihnen hat $n-k-1$ weitere Elemente; diese $(t+1)(n-k)(n-k-1)$ Elemente ordnen wir als X_1 dem

* Vergl. Guccia: „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo“ Bd. 7 S. 55-57, wo die Literatur ausführlich besprochen ist.

Oder, die Kugelbüschel durch die Krümmungskreise von \mathfrak{R}^3 bilden ein doppelt unendliches System von Kugeln, von denen zwölf durch zwei gegebene Punkte gehen.

Durch zwei Punkte der \mathfrak{R}^3 gehen $12 - 2 \cdot 3 = 6$ Kugeln, welche sie anderwärts osculiren; insbesondere wird \mathfrak{R}^3 in jedem Punkte von sechs anderswo osculirenden Kugeln berührt.

Durch drei Punkte oder durch einen Kreis gehen zehn Kugeln, welche \mathfrak{R}^3 berühren.

Liegen die drei Punkte selbst auf \mathfrak{R}^3 , so ergeben sich $10 - 3 \cdot 2 = 4$ Kugeln, welche anderwärts berühren. In jedem Punkte wird \mathfrak{R}^3 von vier Kugeln osculirt, welche sie noch an einer anderen Stelle berühren.

So erhalten wir auf \mathfrak{R}^3 eine Correspondenz [6,4], in deren entsprechenden Punkten dieselbe Kugel drei-, bezw. zweipunktig berührt. Die zehn Coincidenzen sind die Stellen fünfpunktiger Berührung.

Es giebt neun Kugeln, welche \mathfrak{R}^3 an zwei verschiedenen Stellen osculiren.

Oder, es giebt neun Paare von Krümmungskreisen der \mathfrak{R}^3 , welche sich zweimal schneiden und infolge dessen auf derselben Fläche zweiten Grades durch \mathfrak{R}^3 liegen.

Es giebt 16 Schmiegunungskugeln der \mathfrak{R}^3 , welche sie noch an anderer Stelle berühren, offenbar in den Coincidenzpunkten der Correspondenz [8] der Punkte Q' , Q'' .

In einem Gebüsche befinden sich (insbesondere durch einen gegebenen Punkt gehen) 36 Kugeln, welche \mathfrak{R}^3 an einer Stelle drei-, an einer anderen zweipunktig berühren.

In einem Netze befinden sich (durch zwei Punkte gehen) 24 Kugeln, welche \mathfrak{R}^3 zweimal berühren.*

16. Jede Involution J^2_n auf rationalem Träger hat $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ neutrale Paare, die nicht bloß zu einer Gruppe, sondern zu ∞^1 Gruppen der J^2_n gehören, welche in ihr eine J^1_n bilden; so viele Paare, als an eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung von einem Punkte O Doppelsecanten kommen; denn die Ebenen des Bündels O erzeugen auf ihr eine J^2_n .

* Mehrere von diesen Sätzen, sowie auch die Sätze über die Ordnung der Curven der Krümmungs-Mittelpunkte, der Mittelpunkte der Schmiegunungskugeln und der Fläche der Krümmungskreise sind analytisch für die cubische Hyperbel in einer kürzlich erschienenen Dissertation: „Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren“ (Strassburg 1894) von E. Timerding bewiesen worden. Nicht richtig ist dort der Satz über die Zahl der fünfpunktig berührenden Kugeln. — Selbständig und gleichzeitig mit mir hat mehrere von den Sätzen dieser Abhandlung auch ein Zuhörer von mir, Herr J. Sobotka, gefunden. Die cubische Raumcurve war Gegenstand der Seminarübungen im vergangenen Winterhalbjahre.

Die J_6^2 , welche auf \mathfrak{R}^3 durch die Kugeln entsteht, die durch zwei gegebene Punkte O' , O'' gehen, hat daher zehn solche Paare. Unter ihnen befinden sich die drei Paare AB , AC , BC , weil diese auf allen in Ebenenpaare zerfallenden Kugeln des Netzes liegen. Die sieben übrigen Paare müssen je auf allen Kugeln eines (aus eigentlichen Kugeln bestehenden) Büschels des Netzes liegen.

Durch zwei Punkte O' , O'' gehen sieben Kreise, welche \mathfrak{R}^3 zweimal treffen.

Alle Kreise durch O' , O'' , welche \mathfrak{R}^3 treffen, bilden eine Fläche neunter Ordnung, auf welcher diese sieben Kreise doppelt, die \mathfrak{R}^3 einfach, \mathfrak{R}^2 und die Gerade $O'O''$ dreifach, die Punkte O' , O'' aber sechsfach sind.

17. Die Ebenen, welche auf den Sehnen von \mathfrak{R}^3 je in der Mitte senkrecht stehen, umhüllen eine Fläche vierter Klasse, für welche \mathfrak{C} dreifache Berührungsebene ist.

Denn die Sehnen, welche auf den Ebenen eines Büschels senkrecht stehen, erzeugen eine Regelfläche vierten Grades mit einer unendlich fernen Leitgeraden. Ihre Mitten erzeugen eine cubische Raumcurve, als conjugirte Punkte zu den Punkten dieser Geraden. Daher fällt viermal ein Punkt dieser Curve auf die entsprechende Ebene des Büschels.

18. Der Ort der Fusspunkte der aus einem Punkte O auf die Sehnen der \mathfrak{R}^3 gefällten Lothe ist eine Fläche fünfter Ordnung, auf welcher die \mathfrak{R}^3 doppelt ist.

In der That, die Ebenen ξ , welche in den verschiedenen Punkten X einer Geraden l auf OX senkrecht stehen, umhüllen einen parabolischen Cylinder, und die Strahlenbüschel (X, ξ) erzeugen daher eine Congruenz $[2,1]$. Diese hat mit der Congruenz $[1,3]$ der Sehnen von \mathfrak{R}^3 $2.1 + 1.3 = 5$ Strahlen gemeinsam, so dass fünf Fusspunkte auf l fallen.

Die Fläche muss elf Gerade, welche alle die Doppelcurve \mathfrak{R}^3 zweimal treffen, und 55 Kegelschnitte enthalten.* Auf elf Sehnen muss also der Fusspunkt unbestimmt sein. Zu ihnen gehören die drei unendlich fernen Sehnen; die acht anderen sind in den aus O senkrecht zu ihnen geführten Ebenen gelegen und sämmtlich imaginär. Die Sehnen nämlich von \mathfrak{R}^3 , welche \mathfrak{R}^2 treffen, erzeugen eine Regelfläche achten Grades. Ein ebener Schnitt derselben und der Kegel, welcher aus O die Tangenten von \mathfrak{R}^2 projicirt, stehen in eindeutiger Beziehung. Es fällt also zehnmal ein Punkt des Schnittes auf die entsprechende Berührungsebene des Kegels; zwei von diesen Punkten sind die auf \mathfrak{R}^2 gelegenen Punkte des Schnittes; durch die acht übrigen gehen die acht Sehnen.

Die 55 Kegelschnitte liegen auf den Flächen zweiten Grades durch \mathfrak{R}^3 und je zwei von diesen elf Geraden. Sie zerfallen daher in drei Arten,

* Clebsch, Math. Annalen Bd. 1 S. 284; Sturm, ebenda Bd. 4 S. 273.

je nachdem unter den zwei Geraden zwei, eine oder keine von den unendlich fernen Sehnen enthalten ist. Die drei der ersten Art sind die Fusspunkts-Curven von O in Bezug auf die drei Cylinder durch \mathfrak{R}^3 , von den 3.8 der zweiten Art, die sämmtlich imaginär sind, wollen wir absehen; es bleiben die 28 der dritten Art, unter denen vier reell sind.

Das sind Fusspunkts-Curven in Bezug auf die Sehnen-Regelschaaren von durch \mathfrak{R}^3 gehenden allgemeinen Flächen F^2 .

Im Allgemeinen ist die Fusspunkts-Curve in Bezug auf eine Regelschaar eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art.

Sie kann aber in speciellen Fällen ein Kegelschnitt werden, und zwar sind diese Fusspunkts-Curven die Kreise des Hyperboloids.

In vier Punkten wird ein Kegelschnitt von F^2 von der Fusspunkts-Curve eines beliebigen Punktes in Bezug auf die eine Regelschaar getroffen; also umhüllen die Ebenen, welche auf der Geraden einer Regelschaar in den Punkten, in denen sie einen Kegelschnitt der Fläche treffen, senkrecht stehen, einen Torsus vierter Klasse (zweiter Art). Handelt es sich aber um einen Kreis, so sinkt, weil derselbe durch zwei von den vier allen Fusspunkts-Curven gemeinsamen unendlich fernen Punkten (den Schnitten $F^2 \mathfrak{R}^2$) geht, die Klasse des Torsus auf 2 herab; er wird ein Kegel zweiten Grades, und die Spitze desselben hat den Kreis zur Fusspunkts-Curve. Durchläuft letzterer seine Schaar, so durchwandert die Spitze eine Gerade, welche auf den Ebenen der verbundenen Schaar normal ist; denn alle diese Kegel berühren die beiden Ebenen, welche durch die zu diesen Ebenen parallelen Geraden der Regelschaar gehen und \mathfrak{R}^2 tangiren.

Somit haben wir auf unserer Fusspunkts-Fläche 28 Kreise, darunter vier reelle.

II.

Additionslogarithmen für complexe Grössen.

Von

R. MEHMKE

in Stuttgart.

Je mehr man in der Physik und auf anderen Gebieten die Theorie der Functionen complexer Veränderlichen anwenden wird, um so stärker wird sich das Bedürfniss nach Erleichterung des numerischen Rechnens mit complexen Grössen fühlbar machen. Diese Ueberzeugung hegend, habe ich einige der Hilfsmittel, die sich beim Rechnen mit reellen Grössen seit langer Zeit bewährt haben, durch Einführung complexer Grössen zu verallgemeinern gesucht. So hatte ich für die Münchener mathematische Ausstellung eine Rechentafel im Entwurf gezeichnet*, welche in diesem Sinne eine Verallgemeinerung des logarithmischen Rechenschreibers darstellte. Hier lege ich den Rechnern einen dreistelligen Auszug aus einer Tafel der „Additionslogarithmen für complexe Grössen“ vor, die mit fünf oder auch nur vier Stellen gedruckt sich meines Erachtens beim Rechnen mit complexen Grössen nicht weniger nützlich erweisen würde, als Leonelli's Logarithmen beim gewöhnlichen Rechnen.**

Die einfachste, mit Hilfe dieser Tafel bequemer und schneller als auf die gewöhnliche Art zu lösende Aufgabe lautet: Gegeben die Logarithmen der Moduln und die Amplituden zweier complexen Zahlen, gesucht der Logarithmus des Moduln und die Amplitude der Summe jener complexen

* Siehe den Nachtrag zum Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegeben von W. Dyck, München 1893, S. 21 Nr. 44 d.

** Die Additionslogarithmen für reelle Grössen werden mitunter nach Gauss benannt, welcher zwar eine fünfstellige Tafel derselben 1812 in Zach's „Monatlicher Correspondenz“ veröffentlicht, aber dort ausdrücklich auf Leonelli als ihren geistigen Urheber zurückgewiesen hat (vergl. Gauss' Werke 3. Bd. S. 244). In der Vorrede zu Houël's fünfstelligen Logarithmentafeln ist angegeben, dass Leonelli seinen Gedanken zuerst in dem 1803 in Bordeaux erschienenen „Supplément logarithmique“ entwickelt habe.

Zahlen. Von weitergehenden Anwendungen mache ich eine solche auf die Berechnung der Wurzeln beliebiger algebraischer Gleichungen mit complexen Coefficienten namhaft, welche die bekannte Methode von Gauss, reelle trinomische Gleichungen aufzulösen, als besonderen Fall in sich enthält. Ich werde diese Methode zusammen mit anderen in einem späteren Aufsatze mittheilen.

Die Einführung der gewöhnlichen Additionslogarithmen wird Vielen bisher als ein vereinzelter Kunstgriff erschienen sein. Sie lässt sich aber, wie ich schon an anderer Stelle gezeigt habe*, aus einem höheren Gesichtspunkte betrachten. Sei nämlich

$$z = f(x, y)$$

irgend eine reelle homogene Function n^{ten} Grades der beiden reellen Veränderlichen x und y , so ist

$$z = f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \cdot y^n,$$

oder, wenn man

$$\log f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = v$$

setzt,

$$\log z = v + n \log y.$$

Dabei lässt sich v als Function von

$$u = \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

ansehen. Eine numerische Tafel dieser Function ermöglicht offenbar in einfachster Weise die Bestimmung des Werthes von $\log z$, der zu einem gegebenen Werthepaare $\log x$, $\log y$ gehört. Man hat

$$f(x, y) = x + y$$

zu nehmen, um Leonelli's Fall zu erhalten, in welchem es üblich ist, A statt u und B statt v zu schreiben. Die Beziehung zwischen u und v lässt sich allgemein durch

$$10^v = f(10^u, 1)$$

ausdrücken.

Der Uebergang zu complexen Veränderlichen ist leicht. Mit Rücksicht auf die Einrichtung unserer Logarithmentafeln werde ich bei der Darstellung einer beliebigen complexen Zahl durch

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

die Amplitude φ nicht in Theilen des Halbmessers, sondern in Graden ausdrücken, und zwar nach sogenannter neuer Theilung.**

* A. a. O. S. 20 Nr. 44 c.

** An guten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für die centesimale Theilung des Quadranten ist kein Mangel. Es giebt deren vier- und fünfstellige von F. G. Gauss, Gravelius u. A., sechsstellige von Jordan, achtstellige vom französischen „Service géographique de l'armée“. Daher liegt für den reinen Mathematiker nicht der mindeste Grund vor, sich noch länger mit der sexagesimalen Theilung abzumühen.

Bezeichnet man die gemeinen Logarithmen der Moduln der (jetzt als complex betrachteten) Grössen x , y , z beziehentlich mit ξ , η , ζ , ihre Amplituden mit ξ' , η' , ζ' , so ist

$$x = 10^\xi (\cos \xi' + i \sin \xi')$$

und ähnliche Ausdrücke gelten für y und z . Setzt man dieselben in die Gleichung

$$z = f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \cdot y^n$$

ein, so kann die entstehende Gleichung in folgende beiden zerlegt werden:

$$\zeta = v + n\eta,$$

$$\zeta' \equiv v' + n\eta' \pmod{400},$$

wobei

$$10^v (\cos v' + i \sin v') = f[10^u (\cos u' + i \sin u'), 1]$$

und

$$u = \xi - \eta, \quad u' \equiv \xi' - \eta' \pmod{400}$$

ist. Man hat jetzt, um nach diesen Formeln zu gegebenen Werthen von ξ , ξ' , η , η' diejenigen von ζ und ζ' finden zu können, eine Doppeltafel nöthig, deren erster Theil v , deren zweiter v' , jedesmal als Function der beiden reellen Veränderlichen u und u' liefert.

Beschränken wir uns von jetzt an auf den Fall

$$f(x, y) = x + y.$$

Wir wollen in demselben beziehentlich die Zeichen A , A , B , B^* statt u , u' , v , v' anwenden, so dass wir die fundamentale Gleichung erhalten:

$$1) \quad 10^B (\cos B + i \sin B) = 10^A (\cos A + i \sin A) + 1,$$

welcher man auch die Gestalt

$$e^{i n 10 \cdot B + i \frac{200}{\pi} \cdot B} = e^{i n 10 \cdot A + i \frac{200}{\pi} \cdot A} + 1$$

geben kann. Auf den Seiten 23—30 findet man eine dreistellige Tafel der B und eine solche der B , für welche die zusammenfassende Bezeichnung „Additionslogarithmen für complexe Grössen“ gestattet sein möge, trotzdem die zweite Tafel nicht Logarithmen, sondern Winkel enthält.**

Entsprechend den zwei unabhängigen Veränderlichen A und A haben die Tafeln zwei Eingänge; die Anordnung ist so getroffen, dass A von Reihe zu Reihe, A von Spalte zu Spalte sich ändert. Hinter einigen Zahlen

* Es wird zwar der Buchstabe B schon als Zeichen einer anderen Function gebraucht, ein Missverständniss ist aber hier, wo B immer mit A , A und B zusammen vorkommt, kaum zu befürchten.

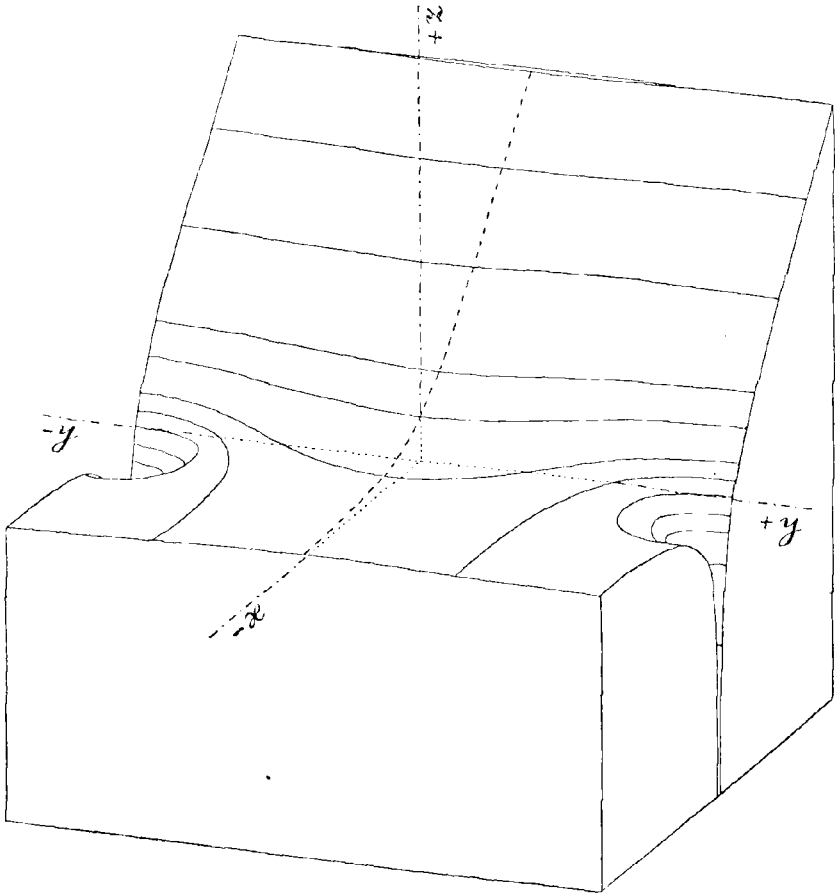
** Wenn hier nicht in erster Linie die Bedürfnisse des Zahlenrechnens berücksichtigt werden müssten, so wäre es natürlich einfacher, als „Additionslogarithmus“ im weiteren Sinne die durch

$$e^w = e^* + 1$$

definierte Function w der complexen Veränderlichen z zu bezeichnen.

der Tafeln bemerkt man einen Strich; derselbe bedeutet, dass die letzte von Null verschiedene Ziffer der betreffenden Zahlen eine durch Erhöhung aus 4 entstandene 5 ist.

Behufs geometrischer Veranschaulichung der Functionen B und \bar{B} betrachtet man am einfachsten A und \bar{A} als Abscisse und Ordinate, B bzw. \bar{B} als Höhe eines veränderlichen Raumpunktes. Die beiden sich ergebenden

Fig. 1. B -Fläche.

Flächen sind in den Figuren 1 und 2 mit Hilfe einer Anzahl von waagrechten Schnitten parallel-perspectivisch dargestellt.

Es sollen jetzt einige der wichtigsten Eigenschaften der in Rede stehenden Functionen bzw. der zugehörigen Flächen abgeleitet werden. Zunächst sieht man, dass B eine eindeutige, \bar{B} dagegen eine unendlich vieldeutige Function ist, indem zu jedem Werthe von B ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von $\pm 400^\circ$ hinzugefügt werden darf; dass ferner B und \bar{B} periodische Functionen von A mit der Periode 400° sind. Daher

kann man sich bei A und B von vornherein auf die Werthe zwischen -200° und $+200^{\circ}$ beschränken. Wird auf beiden Seiten von Gleichung 1) $-i$ an Stelle von $+i$ gesetzt, so kommt

$$10^B(\cos B - i \sin B) = 10^A(\cos A - i \sin A) + 1,$$

oder

$$10^B[\cos(-B) + i \sin(-B)] = 10^A[\cos(-A) + i \sin(-A)] + 1,$$

woraus hervorgeht, dass B eine gerade, B eine ungerade Function von A ist. Das heisst geometrisch:

Die B -Fläche ist symmetrisch zur xz -Ebene, die B -Fläche symmetrisch zur x -Achse. Zugleich ist klar, dass wegen dieser Eigenschaft die Tafeln bloß von $A = 0^{\circ}$ bis $A = 200^{\circ}$ zu gehen brauchen.

Setzt man $A' = -A$ und bezeichnet, bei unverändertem A , die zugehörigen Werthe von B und B mit B' und B' , so ist wegen Gleichung 1)

$$10^{B'}(\cos B' + i \sin B') = 10^{-A}(\cos A + i \sin A) + 1,$$

oder nach Vertauschung von i mit $-i$:

$$10^{B'}[\cos(-B') + i \sin(-B')] = 10^{-A}(\cos A - i \sin A) + 1.$$

Durch Multiplication mit

$$10^A(\cos A + i \sin A)$$

und Benützung von Gleichung 1) erhält man hieraus

$$\begin{aligned} 10^{B'+A}[\cos(A-B') + i \sin(A-B')] &= 1 + 10^A(\cos A + i \sin A) \\ &= 10^B(\cos B + i \sin B). \end{aligned}$$

Daher ist

$$B' + A = B,$$

$$A - B' \equiv B \pmod{400}$$

oder:

2)

$$\begin{cases} B' = B - A = B + A', \\ B' \equiv A - B \pmod{400}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die leicht als geometrische Eigenschaften der B - und B -Fläche gedeutet werden könnten, deren erste auch bei den gewöhnlichen Additionslogarithmen wohlbekannt ist, zeigen uns, dass man bei dem Argument A sich entweder auf negative oder auf positive Werthe beschränken dürfte, wodurch am Umfang der Tafeln um die Hälfte gespart würde. Für manche Anwendungen ist es jedoch bequemer, die vollständigen Tafeln zur Verfügung zu haben.

Lässt man in Gleichung 1) A von Null an fortwährend abnehmen, so nähert sich, welches auch der Werth von A sein mag, die rechte Seite unaufhörlich der Eins, folglich nähern sich B und der zwischen -200° und $+200^{\circ}$ liegende Werth von B gleichzeitig der Null. Die B - und B -Fläche haben somit beide die xy -Ebene zur Asymptotenebene; die Annäherung findet in der $-x$ -Richtung statt. In Verbindung mit Gleichung 2) ergibt sich aus dem eben Gefundenen, dass, wenn A über alle Grenzen hinauswächst, B und A , wie auch B und A einander immer näher kommen. Daher ist die Halbiringsebene des zwischen der $+x$ - und $+z$ -Achse enthaltenen Winkels der xy - und yz -Ebene gleichfalls eine Asymptotenebene

der B -Fläche, und die Halbierungsebene der zwischen den gleichnamigen Theilen der y - und z -Achse enthaltenen Scheitelwinkel der xy - und xz -Ebene eine Asymptotenebene der B -Fläche. — Für $A = 0$ erhält man aus Gleichung 1)

$$10^B (\cos B + i \sin B) = 10^A + 1.$$

Da die rechte Seite stets positiv ist, so wird

$$B \equiv 0 \pmod{400}$$

und

$$10^B = 10^A + 1.$$

Letztere Gleichung zeigt, dass man es in diesem Falle mit den gewöhnlichen Additionslogarithmen zu thun hat.

Ist $A = 200^0$, so ergibt sich

$$10^B (\cos B + i \sin B) = -10^A + 1.$$

Hat man nun $A < 0$ bzw. $A > 0$, so wird die rechte Seite positiv bzw. negativ, also $B \equiv 0$ bzw. $B \equiv 200 \pmod{400}$. Wenn dagegen $A = 0$ ist, so verschwindet die rechte Seite der letzten Gleichung und man erhält $B = -\infty$, während B ganz unbestimmt wird. Letzterem Umstande entspricht es, dass die B -Fläche unendlich viele zur z -Achse parallele Kanten hat, welche durch die Punkte $x (= A) = 0$, $y (= A) \equiv 200^0 \pmod{400}$ gehen. Uebrigens stehen in diesem Falle ($A = 200^0$) die Grössen B zu I. Zech's „Subtractionslogarithmen“, welche man in Hülssé's Sammlung mathematischer Tafeln findet, in einfacher Beziehung. Diese geben nämlich zum Argumente $u = \log t$ den Werth

$$v = \log \frac{t}{t-1},$$

so dass

$$10^{u-v} = 10^u - 1$$

ist. Man hat aber zum Beispiel für $A > 0$, $A = 200^0$:

$$10^B = 10^A - 1,$$

weshalb die zu gleichen Argumenten $A = u$ gehörigen Werthe B und v durch die Gleichung

$$B = u - v \quad \text{oder} \quad v = A - B$$

verknüpft sind.

Setzt man in Gleichung 1) $A = 0$, so kommt

$$10^B (\cos B + i \sin B) = 1 + \cos A + i \sin A,$$

woraus

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

also

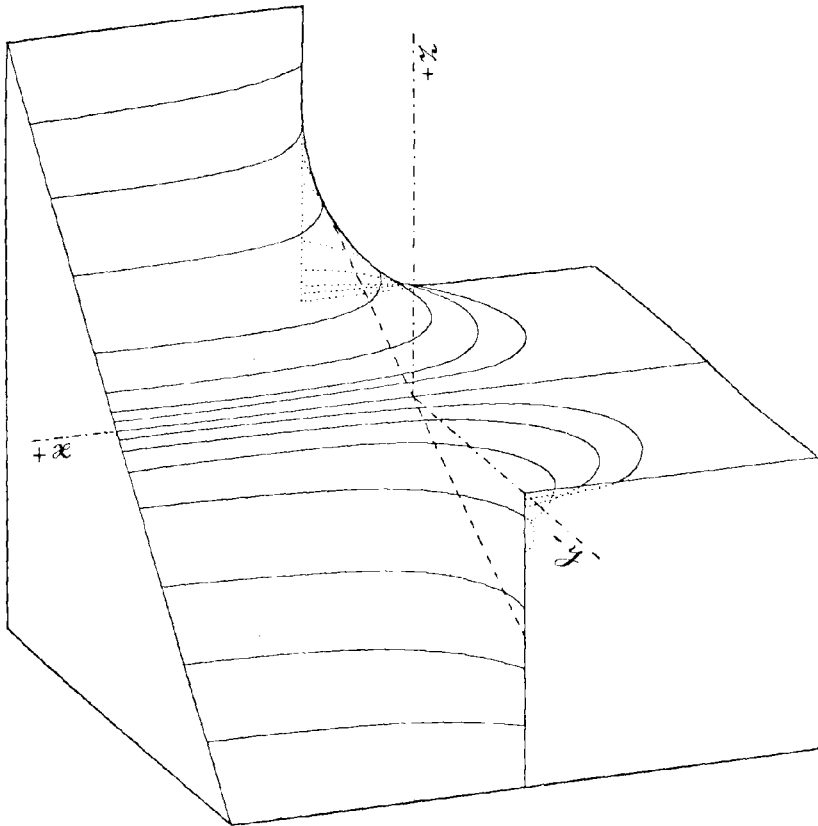
$$B \equiv \frac{A}{2} \pmod{200}$$

folgt. Zu dieser Gleichung gehören unendlich viele, einander in gleichen Abständen folgende, parallele Geraden — eine davon (siehe Fig. 2) geht durch den Ursprung und halbirt die Winkel zwischen den gleichnamigen Theilen der y - und z -Achse —, nach welchen (abgesehen von den bereits

erwähnten Kanten) die B-Fläche von der yz -Ebene geschnitten wird. Wenn man, den Werth $A = 0$ festhaltend und von $B = 0$ ausgehend, A von 0° bis 200° wachsen lässt, so nähert sich B dem Grenzwerthe 100° , welcher denn auch in der Tafel der B unter $A = 0$, $A = 200^\circ$ aufgeführt ist.

Was die Eingangs erwähnte Aufgabe betrifft, den Logarithmus des Moduls r und die Amplitude φ der Summe zweier complexen Zahlen zu be-

Fig. 2. B-Fläche.



stimmen, wenn von letzteren die Logarithmen der Moduln r_1 und r_2 sowie die Amplituden φ_1 und φ_2 gegeben sind, so ergibt sich aus dem Früheren, dass deren Lösung in den Formeln enthalten ist:

$$\begin{aligned} A &= \log r_1 - \log r_2, & A &= \varphi_1 - \varphi_2, \\ \log r &= B + \log r_2, & \varphi &= B + \varphi_2. \end{aligned}$$

An einem Zahlenbeispiele möge noch diese Auflösung mit der gewöhnlichen verglichen werden. Sei

$$\begin{aligned} \log r_1 &= 0.62532, & \varphi_1 &= 59.637^\circ, \\ \log r_2 &= 0.99260, & \varphi_2 &= 48.626^\circ. \end{aligned}$$

1. Berechnung von $\log r$ und φ mittelst fünfstelliger Additionslogarithmen für complexe Grössen.

$\log r_1 = 0.62532$	$\varphi_1 = 59,637^\circ$
$\log r_2 = 0.99260$	$\varphi_2 = 48,626^\circ$
$B = 0.15374$	$B = 3,302^\circ$
$A = 9.63272 - 10$	$A = 11,011^\circ$
$\log r = \underline{1.14634}$	$\varphi = \underline{51,928^\circ}$

2. Berechnung von $\log r$ und φ auf gewöhnliche Weise.

$\varphi_1 = 59,637^\circ$	$\varphi_2 = 48,626^\circ$
$\log \cos \varphi_1 = 9.77261 - 10$	$\log \cos \varphi_2 = 9.85866 - 10$
$\log r_1 = 0.62532$	$\log r_2 = 0.99260$
$\log \sin \varphi_1 = 9.90615 - 10$	$\log \sin \varphi_2 = 9.83990 - 10$
$\log r_1 \cos \varphi_1 = 0.39793$	$\log r_2 \cos \varphi_2 = 0.85126$
$\log r_2 \sin \varphi_1 = 0.53147$	$\log r_2 \sin \varphi_2 = 0.83250$
$r_1 \cos \varphi_1 = 2,4999$	$r_1 \sin \varphi_1 = 6,7999$
$r_2 \cos \varphi_2 = 7,1000$	$r_2 \sin \varphi_2 = 3,3999$
$r \cos \varphi = 9,5999$	$r \sin \varphi = 10,1998$
$\log r \sin \varphi = 1.00859$	
$E \log \frac{\cos}{\sin} \varphi = 0.13775$	
$\log r \cos \varphi = 0.98227$	
$\log \operatorname{tg} \varphi = 0.02632$	
$\varphi = \underline{51,928^\circ}$	
$\log r = \underline{1.14634}$	

Bei der alten Methode ist eine zwölfmalige, bei der neuen bloß eine zweimalige Benützung einer Tafel nöthig, und wenn es auch im letzteren Falle sich um Tafeln mit zwei Eingängen handelt, bei welchen die Interpolation doppelt so viel Zeit in Anspruch nimmt, als bei Tafeln mit einem Eingange, so ist doch der Gewinn ein überraschend grosser.

I. Tafel der B.

A	A = 0°	10°	20°	30°	40°	50°
8.0	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003
8.1	0.005	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004
8.2	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005
8.3	0.009	0.008	0.008	0.008	0.007	0.006
8.4	0.011	0.011	0.010	0.010	0.009	0.008
8.5	0.014	0.013	0.013	0.012	0.011	0.010
8.6	0.017	0.017	0.016	0.015	0.014	0.012
8.7	0.021	0.021	0.020	0.019	0.017	0.015
8.8	0.027	0.026	0.025	0.024	0.022	0.019
8.9	0.033	0.033	0.032	0.030	0.027	0.024
9.0	0.041	0.041	0.040	0.037	0.034	0.031
9.1	0.051	0.051	0.049	0.047	0.043	0.038
9.2	0.064	0.063	0.061	0.058	0.054	0.048
9.3	0.079	0.078	0.076	0.072	0.067	0.061
9.4	0.097	0.096	0.094	0.090	0.084	0.076
9.5	0.119	0.118	0.115	0.111	0.104	0.095
9.6	0.146	0.144	0.141	0.136	0.128	0.118
9.7	0.176	0.175	0.172	0.166	0.157	0.146
9.8	0.212	0.211	0.207	0.201	0.192	0.180
9.9	0.254	0.253	0.249	0.242	0.232	0.220
0.0	0.301	0.300	0.296	0.289	0.279	0.267
0.1	0.354	0.353	0.349	0.342	0.332	0.320
0.2	0.412	0.411	0.407	0.401	0.392	0.380
0.3	0.476	0.475	0.472	0.466	0.457	0.446
0.4	0.546	0.544	0.541	0.536	0.528	0.518
0.5	0.619	0.618	0.615	0.611	0.604	0.595
0.6	0.697	0.696	0.694	0.690	0.684	0.676
0.7	0.779	0.778	0.776	0.772	0.767	0.761
0.8	0.864	0.863	0.861	0.858	0.854	0.848
0.9	0.951	0.951	0.949	0.947	0.943	0.938
1.0	1.041	1.041	1.040	1.037	1.034	1.031
1.1	1.133	1.133	1.132	1.130	1.127	1.124
1.2	1.227	1.226	1.225	1.224	1.222	1.219
1.3	1.321	1.321	1.320	1.319	1.317	1.315
1.4	1.417	1.417	1.416	1.415	1.414	1.412
1.5	1.514	1.513	1.513	1.512	1.511	1.510
1.6	1.611	1.611	1.610	1.610	1.609	1.608
1.7	1.709	1.708	1.708	1.708	1.707	1.706
1.8	1.807	1.807	1.807	1.806	1.806	1.805
1.9	1.905	1.905	1.905	1.905	1.904	1.904
2.0	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.003

Tafel der B (Fortsetzung).

A	$A = 50^{\circ}$	60°	70°	80°	90°	100°
8 0	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
8.1	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000
8.2	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000
8.3	0.006	0.005	0.004	0.003	0.001	0.000
8.4	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002	0.000
8.5	0.010	0.008	0.006	0.004	0.002	0.000
8.6	0.012	0.010	0.008	0.006	0.003	0.000
8.7	0.015	0.013	0.010	0.007	0.004	0.001
8.8	0.019	0.016	0.013	0.009	0.005	0.001
8.9	0.024	0.021	0.016	0.012	0.007	0.001
9.0	0.031	0.026	0.021	0.015	0.009	0.002
9.1	0.038	0.033	0.027	0.019	0.012	0.003
9.2	0.048	0.042	0.034	0.025	0.016	0.005
9.3	0.061	0.053	0.043	0.033	0.021	0.008
9.4	0.076	0.067	0.055	0.043	0.029	0.013
9.5	0.095	0.084	0.071	0.056	0.039	0.021
9.6	0.118	0.106	0.091	0.074	0.054	0.032
9.7	0.146	0.132	0.116	0.097	0.074	0.049
9.8	0.180	0.165	0.147	0.126	0.101	0.073
9.9	0.220	0.205	0.186	0.163	0.137	0.106
0.0	0.267	0.251	0.232	0.209	0.182	0.151
0.1	0.320	0.305	0.286	0.263	0.237	0.206
0.2	0.380	0.365	0.347	0.326	0.301	0.273
0.3	0.446	0.432	0.416	0.397	0.374	0.349
0.4	0.518	0.506	0.491	0.474	0.454	0.432
0.5	0.595	0.584	0.571	0.556	0.539	0.521
0.6	0.676	0.666	0.655	0.643	0.629	0.613
0.7	0.761	0.753	0.743	0.733	0.721	0.708
0.8	0.848	0.842	0.834	0.825	0.816	0.805
0.9	0.938	0.933	0.927	0.919	0.912	0.903
1.0	1.031	1.026	1.021	1.015	1.009	1.002
1.1	1.124	1.121	1.116	1.112	1.107	1.101
1.2	1.219	1.216	1.213	1.209	1.205	1.201
1.3	1.315	1.313	1.310	1.307	1.304	1.301
1.4	1.412	1.410	1.408	1.406	1.403	1.400
1.5	1.510	1.508	1.506	1.504	1.502	1.500
1.6	1.608	1.606	1.605	1.603	1.602	1.600
1.7	1.706	1.705	1.704	1.703	1.701	1.700
1.8	1.805	1.804	1.803	1.802	1.801	1.800
1.9	1.904	1.903	1.903	1.902	1.901	1.900
2.0	2.003	2.003	2.002	2.001	2.001	2.000

Tafel der B^* (Fortsetzung).

A	$A = 100^0$	110^0	120^0	130^0	140^0	150^0
8.0	0.000	9.999	9.999	9.998	9.997	9.997
8.1	0.000	9.999	9.998	9.998	9.997	9.996
8.2	0.000	9.999	9.998	9.997	9.996	9.995
8.3	0.000	9.999	9.997	9.996	9.995	9.994
8.4	0.000	9.998	9.997	9.995	9.994	9.992
8.5	0.000	9.998	9.996	9.994	9.992	9.990
8.6	0.000	9.998	9.995	9.992	9.990	9.988
8.7	0.001	9.997	9.994	9.990	9.987	9.985
8.8	0.001	9.997	9.992	9.988	9.984	9.981
8.9	0.001	9.996	9.991	9.985	9.980	9.976
9.0	0.002	9.995	9.988	9.982	9.975	9.969
9.1	0.003	9.995	9.986	9.977	9.969	9.962
9.2	0.005	9.995	9.984	9.973	9.962	9.952
9.3	0.008	9.995	9.981	9.967	9.953	9.940
9.4	0.013	9.997	9.979	9.961	9.943	9.925
9.5	0.021	0.000	9.978	9.955	9.931	9.907
9.6	0.032	0.007	9.980	9.951	9.920	9.887
9.7	0.049	0.020	9.987	9.950	9.910	9.875
9.8	0.073	0.040	0.002	9.958	9.909	9.852
9.9	0.106	0.070	0.028	9.979	9.922	9.853
0.0	0.151	0.114	0.070	0.019	9.958	9.884
0.1	0.206	0.170	0.128	0.079	0.022	9.953
0.2	0.273	0.240	0.202	0.158	0.109	0.052
0.3	0.349	0.320	0.287	0.250	0.210	0.175
0.4	0.432	0.407	0.380	0.351	0.320	0.287
0.5	0.521	0.500	0.478	0.455	0.431	0.407
0.6	0.613	0.597	0.579	0.561	0.543	0.525
0.7	0.708	0.695	0.681	0.667	0.653	0.640
0.8	0.805	0.795	0.784	0.773	0.762	0.752
0.9	0.903	0.895	0.886	0.877	0.869	0.862
1.0	1.002	0.995	0.988	0.982	0.975	0.969
1.1	1.101	1.096	1.091	1.085	1.080	1.076
1.2	1.201	1.197	1.192	1.188	1.184	1.181
1.3	1.301	1.297	1.294	1.290	1.287	1.285
1.4	1.400	1.398	1.395	1.392	1.390	1.388
1.5	1.500	1.498	1.496	1.494	1.492	1.490
1.6	1.600	1.598	1.597	1.595	1.594	1.592
1.7	1.700	1.699	1.697	1.696	1.695	1.694
1.8	1.800	1.799	1.798	1.797	1.796	1.795
1.9	1.900	1.899	1.898	1.898	1.897	1.896
2.0	2.000	1.999	1.999	1.998	1.997	1.997

* Den Logarithmen mit der Kennziffer 9 ist — 10 anzuhängen.

Tafel der B^* (Fortsetzung).

A	$A = 150^\circ$	160°	170°	180°	190°	200°
8.0	9.997	9.996	9.996	9.996	9.996	9.996
8.1	9.996	9.996	9.995	9.995	9.995	9.995
8.2	9.995	9.994	9.994	9.993	9.993	9.993
8.3	9.994	9.993	9.992	9.992	9.991	9.991
8.4	9.992	9.991	9.990	9.990	9.989	9.989
8.5	9.990	9.989	9.988	9.987	9.986	9.986
8.6	9.988	9.986	9.984	9.983	9.983	9.982
8.7	9.985	9.982	9.980	9.979	9.978	9.978
8.8	9.981	9.978	9.975	9.973	9.972	9.972
8.9	9.976	9.972	9.968	9.966	9.965	9.964
9.0	9.969	9.964	9.960	9.957	9.955	9.954
9.1	9.962	9.955	9.949	9.945	9.942	9.942
9.2	9.952	9.943	9.935	9.930	9.926	9.925
9.3	9.940	9.928	9.918	9.910	9.905	9.903
9.4	9.925	9.909	9.895	9.884	9.877	9.874
9.5	9.907	9.885	9.865	9.849	9.839	9.835
9.6	9.887	9.856	9.826	9.802	9.785	9.780
9.7	9.875	9.822	9.777	9.737	9.708	9.698
9.8	9.852	9.788	9.719	9.648	9.591	9.567
9.9	9.853	9.769	9.667	9.540	9.396	9.313
0.0	9.884	9.791	9.669	9.495	9.196	$-\infty$
0.1	9.953	9.869	9.767	9.640	9.496	9.413
0.2	0.052	9.988	9.919	9.848	9.791	9.767
0.3	0.175	0.122	0.077	0.037	0.008	9.998
0.4	0.287	0.256	0.226	0.202	0.185	0.180
0.5	0.407	0.385	0.365	0.349	0.339	0.335
0.6	0.525	0.509	0.495	0.484	0.477	0.474
0.7	0.640	0.628	0.618	0.610	0.605	0.603
0.8	0.752	0.743	0.735	0.730	0.726	0.725
0.9	0.862	0.855	0.849	0.845	0.842	0.842
1.0	0.969	0.964	0.960	0.957	0.955	0.954
1.1	1.076	1.072	1.068	1.066	1.065	1.064
1.2	1.181	1.178	1.175	1.173	1.172	1.172
1.3	1.285	1.282	1.280	1.279	1.278	1.278
1.4	1.388	1.386	1.384	1.383	1.383	1.382
1.5	1.490	1.489	1.488	1.487	1.486	1.486
1.6	1.592	1.591	1.590	1.590	1.589	1.589
1.7	1.694	1.693	1.692	1.692	1.691	1.691
1.8	1.795	1.794	1.794	1.793	1.793	1.793
1.9	1.896	1.896	1.895	1.895	1.895	1.895
2.0	1.997	1.996	1.996	1.996	1.996	1.996

* Den Logarithmen mit der Kennziffer 9 ist -10 anzuhängen.

II. Tafel der B.

A	A = 0°	10°	20°	30°	40°	50°
8.0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4
8.1	0,0	0,1	0,2	0,4	0,5 —	0,6
8.2	0,0	0,2	0,3	0,5 —	0,6	0,7
8.3	0,0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9
8.4	0,0	0,2	0,5 —	0,7	0,9	1,1
8.5	0,0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,4
8.6	0,0	0,4	0,8	1,1	1,4	1,7
8.7	0,0	0,5 —	0,9	1,4	1,8	2,2
8.8	0,0	0,6	1,2	1,7	2,2	2,7
8.9	0,0	0,7	1,5 —	2,1	2,8	3,4
9.0	0,0	0,9	1,8	2,7	3,5 —	4,2
9.1	0,0	1,1	2,2	3,3	4,3	5,2
9.2	0,0	1,4	2,7	4,0	5,2	6,4
9.3	0,0	1,7	3,3	4,9	6,4	7,8
9.4	0,0	2,0	4,0	5,9	7,8	9,5
9.5	0,0	2,4	4,8	7,1	9,4	11,5
9.6	0,0	2,8	5,7	8,4	11,2	13,8
9.7	0,0	3,3	6,7	9,9	13,2	16,3
9.8	0,0	3,9	7,7	11,5	15,3	19,1
9.9	0,0	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0
0.0	0,0	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0
0.1	0,0	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0
0.2	0,0	6,1	12,3	18,5 —	24,7	30,9
0.3	0,0	6,7	13,3	20,1	26,8	33,7
0.4	0,0	7,2	14,3	21,6	28,8	36,2
0.5	0,0	7,6	15,2	22,9	30,6	38,5 —
0.6	0,0	8,0	16,0	24,1	32,2	40,5 —
0.7	0,0	8,3	16,7	25,1	33,6	42,2
0.8	0,0	8,6	17,3	26,0	34,8	43,6
0.9	0,0	8,9	17,8	26,7	35,7	44,8
1.0	0,0	9,1	18,2	27,3	36,5	45,8
1.1	0,0	9,3	18,5	27,9	37,2	46,6
1.2	0,0	9,4	18,8	28,3	37,8	47,3
1.3	0,0	9,5	19,1	28,6	38,2	47,8
1.4	0,0	9,6	19,2	28,9	38,6	48,3
1.5	0,0	9,7	19,4	29,1	38,8	48,6
1.6	0,0	9,8	19,5	29,3	39,1	48,9
1.7	0,0	9,8	19,6	29,4	39,3	49,1
1.8	0,0	9,8	19,7	29,5	39,4	49,3
1.9	0,0	9,9	19,8	29,6	39,5	49,4
2.0	0,0	9,9	19,8	29,7	39,6	49,6

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 50°	60°	70°	80°	90°	100°
8.0	0,4	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6
8.1	0,6	0,6	0,7	0,8	0,8	0,8
8.2	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,0
8.3	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3
8.4	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6
8.5	1,4	1,6	1,8	1,9	2,0	2,0
8.6	1,7	2,0	2,2	2,4	2,5	2,5
8.7	2,2	2,5	2,8	3,0	3,1	3,2
8.8	2,7	3,1	3,5	3,7	3,9	4,0
8.9	3,4	3,9	4,3	4,7	4,9	5,0
9.0	4,2	4,9	5,4	5,9	6,2	6,3
9.1	5,2	6,0	6,7	7,3	7,7	8,0
9.2	6,4	7,4	8,3	9,1	9,6	10,0
9.3	7,8	9,1	10,3	11,3	12,0	12,5
9.4	9,5	11,2	12,6	13,9	14,9	15,7
9.5	11,5	13,5	15,4	17,0	18,4	19,5
9.6	13,8	16,3	18,6	20,7	22,6	24,1
9.7	16,3	19,3	22,2	24,9	27,4	29,6
9.8	19,1	22,7	26,2	29,6	32,8	35,8
9.9	22,0	26,3	30,5	34,7	38,8	42,7
0.0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0
0.1	28,0	33,7	39,5	45,3	51,2	57,3
0.2	30,9	37,3	43,8	50,4	57,2	64,2
0.3	33,7	40,7	47,8	55,1	62,6	70,4
0.4	36,2	43,7	51,4	59,3	67,4	75,9
0.5	38,5	46,5	54,6	63,0	71,6	81,5
0.6	40,5	48,8	57,4	66,1	75,1	84,3
0.7	42,2	50,9	59,7	68,7	78,0	87,5
0.8	43,6	52,6	61,7	70,9	80,4	90,0
0.9	44,8	54,0	63,3	72,7	82,3	92,0
1.0	45,8	55,1	64,6	74,1	83,8	93,7
1.1	46,6	56,1	65,7	75,3	85,1	95,0
1.2	47,3	56,9	66,5	76,3	86,1	96,0
1.3	47,8	57,5	67,2	77,0	86,9	96,8
1.4	48,3	58,0	67,8	77,6	87,5	97,5
1.5	48,6	58,4	68,2	78,1	88,0	98,0
1.6	48,9	58,7	68,6	78,5	88,4	98,4
1.7	49,1	59,0	68,9	78,8	88,7	98,7
1.8	49,3	59,2	69,1	79,0	89,0	99,0
1.9	49,4	59,4	69,3	79,2	89,2	99,2
2.0	49,6	59,5	69,4	79,4	89,4	99,4

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 100°	110°	120°	130°	140°	150°
8.0	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5 —
8.1	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6
8.2	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7
8.3	1,3	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9
8.4	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2
8.5	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5 —
8.6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,1	1,8
8.7	3,2	3,2	3,1	2,9	2,7	2,3
8.8	4,0	4,0	3,9	3,7	3,4	3,0
8.9	5,0	5,0	4,9	4,7	4,3	3,8
9.0	6,3	6,4	6,2	5,9	5,5 —	4,8
9.1	8,0	8,0	7,9	7,5	7,0	6,2
9.2	10,0	10,1	10,0	9,6	8,9	8,0
9.3	12,5	12,8	12,7	12,3	11,5	10,4
9.4	15,7	16,1	16,1	15,8	14,9	13,5
9.5	19,5 —	20,2	20,5 —	20,2	19,4	17,9
9.6	24,1	25,3	25,1	26,0	25,3	23,8
9.7	29,6	31,4	32,7	33,4	33,2	31,3
9.8	35,8	38,5	40,8	42,5 —	43,4	43,2
9.9	42,7	46,5	50,0	53,2	55,9	57,8
0.0	50,0	55,0	60,0	65,0	70,0	75,0
0.1	57,3	63,5 —	70,0	76,8	84,1	92,2
0.2	64,2	71,5 —	79,9	87,5	96,6	106,8
0.3	70,4	78,6	87,3	96,6	106,8	118,7
0.4	75,9	84,7	94,9	104,0	114,7	126,2
0.5	81,5	89,8	99,5	109,8	120,6	132,1
0.6	84,3	93,9	103,9	114,2	125,1	136,5 —
0.7	87,5 —	97,2	107,3	117,7	128,5 —	139,6
0.8	90,0	99,9	110,0	120,4	131,1	142,0
0.9	92,0	102,0	112,1	122,5 —	133,0	143,8
1.0	93,7	103,6	113,8	124,1	134,5	145,2
1.1	95,0 —	105,0 —	115,1	125,3	135,7	146,2
1.2	96,0	106,0	116,1	126,3	136,6	147,0
1.3	96,8	106,8	116,9	127,1	137,3	147,7
1.4	97,5 —	107,5 —	117,6	127,7	137,9	148,2
1.5	98,0	108,0	118,1	128,2	138,3	148,5
1.6	98,4	108,4	118,5 —	128,6	138,7	148,8
1.7	98,7	108,7	118,8	128,9	139,0	149,1
1.8	99,0	109,0	119,0	129,1	139,2	149,3
1.9	99,2	109,2	119,2	129,3	139,3	149,4
2.0	99,4	109,4	119,4	129,4	139,5 —	149,5

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 150°	160°	170°	180°	190°	200°
8.0	0,5 —	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
8.1	0,6	0,5 —	0,4	0,3	0,1	0,0
8.2	0,7	0,6	0,5 —	0,3	0,2	0,0
8.3	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
8.4	1,2	1,0	0,7	0,5	0,3	0,0
8.5	1,5 —	1,2	0,9	0,6	0,3	0,0
8.6	1,8	1,5	1,2	0,8	0,4	0,0
8.7	2,3	2,0	1,5	1,0	0,5	0,0
8.8	3,0	2,5 —	1,9	1,3	0,7	0,0
8.9	3,8	3,2	2,5 —	1,7	0,9	0,0
9.0	4,8	4,1	3,2	2,2	1,1	0,0
9.1	6,2	5,2	4,1	2,8	1,4	0,0
9.2	8,0	6,8	5,3	3,7	1,9	0,0
9.3	10,4	8,8	7,0	4,8	2,5 —	0,0
9.4	13,5	11,7	9,3	6,5 —	3,3	0,0
9.5	17,9	15,6	12,6	8,6	4,6	0,0
9.6	23,8	21,2	17,4	12,4	6,5	0,0
9.7	31,3	29,3	24,8	18,3	9,8	0,0
9.8	43,2	41,3	36,9	28,9	16,3	0,0
9.9	57,8	58,4	56,6	50,1	33,3	0,0
0.0	75,0	80,0	85,0	90,0	95,0	100,0
0.1	92,2	101,6	113,4	129,9	156,7	200,0
0.2	106,8	118,7	133,1	151,1	173,7	200,0
0.3	118,7	130,7	145,2	161,7	180,2	200,0
0.4	126,2	138,8	152,6	167,6	183,5 —	200,0
0.5	132,1	144,4	157,4	171,4	185,4	200,0
0.6	136,5 —	148,3	160,7	173,5	186,7	200,0
0.7	139,6	151,2	163,0	175,2	187,5	200,0
0.8	142,0	153,2	164,7	176,3	188,1	200,0
0.9	143,8	154,8	165,9	177,2	188,6	200,0
1.0	145,2	155,9	166,8	177,8	188,9	200,0
1.1	146,2	156,8	167,5	178,3	189,1	200,0
1.2	147,0	157,5	168,1	178,7	189,3	200,0
1.3	147,7	158,0	168,5 —	179,0	189,5 —	200,0
1.4	148,2	158,5 —	168,8	179,2	189,6	200,0
1.5	148,5	158,8	169,1	179,4	189,7	200,0
1.6	148,8	159,0	169,3	179,5 —	189,7	200,0
1.7	149,1	159,2	169,4	179,6	189,8	200,0
1.8	149,3	159,4	169,5	179,7	189,8	200,0
1.9	149,4	159,5	169,6	179,7	189,9	200,0
2.0	149,5	159,6	169,7	179,8	189,9	200,0

III.

Das Verhalten der Steiner'schen, Cayley'schen und anderer covarianter Curven in singulären Punkten der Grundcurve.

Von

Dr. E. WÖLFFING

in Stuttgart.

Während die Untersuchung des Verhaltens der Hesse'schen Curve in singulären Punkten der Grundcurve in bekannter Weise durch directe Aufstellung der Gleichung dieser Curve vermittelst Ausrechnung einer Determinante erfolgt, kann das Verhalten der Steiner'schen Curve in singulären Punkten der Grundcurve, oder präciser ausgedrückt: der Einfluss solcher Punkte auf das Verhalten der Steiner'schen Curve nicht in derselben Weise direct ermittelt werden. Denn die Aufstellung der Gleichung der Steiner'schen Curve erfordert, wenn n die Ordnung der Grundcurve ist, die Elimination der (ternären) Veränderlichen aus drei Gleichungen $(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung; eine Aufgabe, deren Resultat schon im Falle der Curven vierter Ordnung kaum mehr zu übersehen ist. Dazu kommt, dass das Eliminationsresultat seiner Form nach von der Ordnung der Grundcurve abhängig ist und allgemein für Curven n^{ter} Ordnung gar nicht gebildet werden kann.

Dem gegenüber mag es von Interesse sein, dass es eine ganz elementare Methode giebt, um den Einfluss singulärer Punkte der Grundcurve auf das Verhalten der Steiner'schen Curve aufzufinden. Ehe ich zur Entwicklung derselben übergehe, möchte ich noch auf einige besondere Vorzüge derselben aufmerksam machen. Zunächst ist die Methode von der Ordnung der Grundcurve vollständig unabhängig. Ferner bedarf es nur geringer Weiterbildungen der Methode, um auch die Cayley'sche und andere covariante Curven in den Bereich der Untersuchung zu ziehen. Endlich bietet die Methode die Möglichkeit, ein genaues Bild vom Verlauf der Hesse'schen, Steiner'schen, Cayley'schen und der anderen covarianten Curven in der Umgebung des singulären Punktes zu entwerfen und die zusammengehörigen Zweige der einzelnen Curven zu übersehen. (Ja, man kann sogar die relative Geschwindig-

keit bestimmen, mit welcher die zusammengehörigen Punkte auf den verschiedenen covarianten Curven durch den singulären Punkt hindurchgehen.)

Erwähnt sei noch, dass zahlreiche Proben, die sich im Verlaufe der Rechnung ergeben, den Resultaten eine hohe Sicherheit gegen Rechnungsfehler verleihen.

1. Die Gleichung der Grundcurve habe die Form:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = F = \\ \qquad \qquad \qquad a \\ \qquad \qquad \qquad + b x + c y \\ \qquad \qquad \qquad + d x^2 + e x y + f y^2 \\ \qquad \qquad \qquad + g x^3 + h x^2 y + i x y^2 + k y^3 \\ \qquad \qquad \qquad + l x^4 + m x^3 y + p x^2 y^2 + q x y^3 + r y^4 \\ \qquad \qquad \qquad + s x^5 + t x^4 y + u x^3 y^2 + v x^2 y^3 + w x y^4 + \alpha y^5 \\ \qquad \qquad \qquad + \dots \end{array} \right.$$

Der singuläre Punkt liege im Nullpunkt.

Man stellt nun die Gleichung der Hesse'schen Curve auf, indem man die niedrigsten Glieder derselben in x und y , soweit man dieselben braucht, berechnet. Dann trennt man die einzelnen Zweige der Hesse'schen Curve mittelst des Newton'schen Parallelogramms (cf. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 330 fig.) und entwickelt nun zunächst für einen dieser Zweige beide Coordinaten rational als Functionen eines (unendlich klein zu denkenden) Parameters ε . Ist z. B. der Zweig ein r -facher und $y=0$ Tangente, so setzt man am Besten $x = \varepsilon^r$, worauf sich y als Reihe von ganzen, steigenden Potenzen von ε ergibt. Alsdann ist (x, y) ein Punkt der Hesse'schen Curve in der Umgebung des singulären Punktes. Nun bestehen zwischen einem Punkte $(x, y, z=1)$ der Hesse'schen Curve und dem zugehörigen $(\xi, \eta, \zeta=1)$ der Steiner'schen Curve die Beziehungen:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \xi + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \zeta = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \xi + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \zeta = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \xi + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \zeta = 0. \end{array} \right.$$

Setzt man in zwei dieser Gleichungen für x und y ihre Werthe in ε ein, so erhält man hieraus ξ und η ebenfalls in ε ausgedrückt, also den zum Punkt (x, y) der Hesse'schen Curve gehörigen Punkt (ξ, η) der Steiner'schen Curve. Die gefundenen Werthe x, y, ξ, η müssen zusammen die dritte Gleichung 2) identisch in ε befriedigen (1. Probe).

Die für (ξ, η) gewonnene Parameterdarstellung lässt die Lage des Punktes (ξ, η) und damit das Verhalten der Steiner'schen Curve in der Nähe des singulären Punktes und in diesem selbst um so genauer erkennen,

je mehr Glieder in ε man berücksichtigt. Die nämliche Rechnung ist alsdann auch für die übrigen Zweige der Hesse'schen Curve durchzuführen und man erhält so die übrigen zugehörigen Punkte der Steiner'schen Curve.

2. Die Cayley'sche Curve wird umhüllt von den Verbindungslinien der Punkte der Hesse'schen Curve mit den zugehörigen der Steiner'schen Curve. Die homogenen Coordinaten ($\dot{u}, \dot{v}, \dot{w} = 1$) der zum Parameter ε gehörigen Tangente derselben verhalten sich daher wie die Determinanten der Matrix

$$3) \quad \left\| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \end{array} \right\|.$$

Als II. Probe hat man die Identitäten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}x + \dot{v}y + \dot{w} = 0 \\ \dot{u}\xi + \dot{v}\eta + \dot{w} = 0 \end{array} \right\}.$$

Die Grössen $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ wären bereits zur Erkennung der Singularität der Cayley'schen Curve genügend; zur bequemeren Vergleichung mit der Hesse'schen und Steiner'schen Curve aber empfiehlt es sich, von den Liniencoordinaten zu Punktcoordinaten überzugehen, indem man den Berührungspunkt der Tangente ($\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$) sucht. Die Coordinaten ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} = 1$) desselben verhalten sich wie die Determinanten der Matrix

$$4) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \\ \frac{d\dot{u}}{d\varepsilon} & \frac{d\dot{v}}{d\varepsilon} & \frac{d\dot{w}}{d\varepsilon} \end{array} \right\|.$$

wobei die Identität

$$\dot{u}\dot{x} + \dot{v}\dot{y} + \dot{w} = 0$$

eine III. Probe liefert.

3. Es existirt aber noch eine zweite Möglichkeit, den zum Punkt (x, y) der Hesse'schen Curve gehörigen Punkt (ξ, η) der Steiner'schen Curve zu berechnen. Bekanntlich (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 365; Salmon-Fiedler, Höhere Curven 2. Aufl. S. 461) wird die Steiner'sche Curve umhüllt von den linearen Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve. Die Coordinaten ($\varrho, \sigma, \tau = 1$) der zu (x, y) gehörigen Tangente der Steiner'schen Curve verhalten sich daher wie die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$; die Coordinaten des Berührungspunktes ($\xi, \eta, \zeta = 1$) verhalten sich wie die Determinanten der Matrix

$$5) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \varrho & \sigma & \tau \\ \frac{d\varrho}{d\varepsilon} & \frac{d\sigma}{d\varepsilon} & \frac{d\tau}{d\varepsilon} \end{array} \right\|.$$

Diese Werthe müssen mit den oben für $(\xi, \eta, \zeta = 1)$ gefundenen übereinstimmen (IV. Probe).

Das Verfahren selbst steht meistens dem oben mitgetheilten an Einfachheit nach, doch giebt es Fälle, wo es immerhin auch gute Dienste leistet.

4. Bei Salmon-Fiedler (Höhere Curven S. 195) wird darauf aufmerksam gemacht, dass bei Curven dritter Ordnung die Cayley'sche Curve auch definirt werden kann als Umhüllungslinie der Geradenpaare, in welche die conischen Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve zerfallen, dass aber bei höheren Curven die so definirte Curve von der Cayley'schen verschieden sei. Ich werde mir erlauben, die Umhüllung der in Geradenpaare zerfallenden conischen Polaren als Salmon'sche Curve zu bezeichnen. Um auch ihr Verhalten im singulären Punkte festzustellen, empfiehlt es sich, die beiden Geraden des Paares zu trennen und das geschieht am einfachsten folgendermassen:

Die Gleichung des Geradenpaares ist

$$6) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} x' y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} x' z' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} y' z' + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} z'^2 = 0,$$

wo $x', y', z' = 1$ laufende Coordinaten sind.

Die beiden Schnittpunkte mit $z' = 0$ (also die beiden unendlich fernen Punkte) sind gegeben durch

$$7) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} x' y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 = 0.$$

Diese beiden Punkte werden getrennt durch Auflösung der in $(x':y')$ quadratischen Gleichung 7). Man hat jeden von beiden nur mit (ξ, η) zu verbinden — der Mittelpunkt des Geradenpaares ist ja der zu (x, y) gehörige Punkt der Steiner'schen Curve —, um die zwei zum Parameter ε gehörigen Tangenten der Salmon'schen Curve zu finden; die Coordinaten derselben seien resp. $(\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1 = 1)$ und $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2 = 1)$. Sind $x'_1 : y'_1$ und $x'_2 : y'_2$ die Wurzeln der Gleichung 7), so verhalten sich $\bar{u}_i : \bar{v}_i : \bar{w}$ wie die Determinanten der Matrix

$$8) \begin{vmatrix} x'_i & y'_i & 0 \\ \xi & \eta & 1 \end{vmatrix},$$

wo $i = 1, 2$.

Dabei ergibt sich als V. Probe, dass

$$(\bar{u}_1 x' + \bar{v}_1 y' + \bar{w}_1 z')(\bar{u}_2 x' + \bar{v}_2 y' + \bar{w}_2 z')$$

proportional zur linken Seite von 6) sein muss.

Für die Berührungspunkte auf der Salmon'schen Curve hat man

$$9) \quad \bar{x}_i : \bar{y}_i : 1 = \left\| \begin{array}{ccc} \bar{u}_i & \bar{v}_i & \bar{w}_i \\ \frac{d\bar{u}_i}{d\varepsilon} & \frac{d\bar{v}_i}{d\varepsilon} & \frac{d\bar{w}_i}{d\varepsilon} \end{array} \right\|$$

mit der VI. Probe:

$$\bar{u}_i \bar{x}_i + \bar{v}_i \bar{y}_i + \bar{w}_i = 0,$$

wo $i = 1, 2$.

5. Bei Clebsch-Lindemann (Vorlesungen über Geometrie I S. 360) ist ferner eine Curve erwähnt, die umhüllt wird von den Tangentenpaaren, welche die ersten Polaren der Punkte der Steiner'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve in ihren Doppelpunkten besitzen (letztere sind Punkte der Hesse'schen Curve). Die Ordnung dieser Curve ist von Zeuthen bestimmt worden, weshalb ich die Curve als Zeuthen'sche Curve citiren werde. Auch sie ist für Curven dritter Ordnung mit der Cayley'schen identisch, für höhere Curven von ihr verschieden.

Die erste Polare eines Punktes (ξ, η) der Steiner'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve hat die Gleichung:

$$10) \quad \frac{\partial F}{\partial x'} \xi + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta + \frac{\partial F}{\partial z'} \xi = 0,$$

wo wieder $(x', y', z' = 1)$ laufende Coordinaten sind.

Das Tangentenpaar im Doppelpunkte erhält man, wenn man von der Curve 10) die $n - 3^{\text{te}}$ (also conische) Polare in Bezug auf den Doppelpunkt (x, y) nimmt; dasselbe ist daher:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \xi + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \eta + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} \xi \right) x'^2 \\ + 2 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \xi + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \eta + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \xi \right) x' y' + \dots = 0. \end{array} \right.$$

Dieses Geradenpaar wird nun genau ebenso behandelt, wie das Geradenpaar 6) — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass sein Mittelpunkt der Punkt (x, y) ist — und man erhält somit zuerst die Tangenten $(\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i = 1)$, und alsdann die Punkte $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i = 1)$ der Zeuthen'schen Curve, welche zum Parameter ε gehören ($i = 1, 2$).

6. Eine sechste covariante Curve wird beschrieben von dem Schnittpunkte je zweier zusammengehörigen Tangenten der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve. Ich will dieselbe Gegencurve der Cayley'schen Curve nennen. Für Curven dritter Ordnung fällt sie gleichfalls mit der Cayley'schen Curve zusammen und ist für höhere Curven von ihr verschieden. Man erhält den zum Parameter ε gehörigen Punkt derselben in der Form:

$$12) \quad x^* : y^* : z^* = \left\| \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \varrho & \sigma & \tau \end{array} \right\|,$$

wo ϱ, σ, τ dieselbe Bedeutung haben, wie in der Matrix 5), während u, v, w die Determinanten der Matrix

$$13) \quad \left\| \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ \frac{dx}{d\varepsilon} & \frac{dy}{d\varepsilon} & 0 \end{array} \right\|$$

sind.

7. Die Anwendung der vorstehenden Formeln soll nun am Beispiel der Spitze (Rückkehrpunkt) gezeigt werden.

Ist $(0, 0)$ eine Spitze und $y = 0$ Spitzentangente, so ist in Gleichung 1):

$$a = b = c = d = e = 0.$$

Die Hesse'sche Curve hat nun bekanntlich in $(0, 0)$ eine Spitze mit Tangente $y = 0$ und einen durchgehenden Zweig. Lediglich zur Vereinfachung der Rechnung wähle ich den speciellen Fall, dass dieser durchgehende Zweig senkrecht zur Spitzentangente steht, also die Achse $x = 0$ berührt. Hieraus ergibt sich noch, dass $h = 0$ ist. Dass die nachstehenden Resultate auch für den Fall gelten, wo beide Zweige einen anderen Winkel mit einander einschliessen, folgt daraus, dass alle diese Resultate projectivischer Natur sind. Für die Parameterdarstellung sollen zwei Glieder als genügend betrachtet werden.

Der erste Zweig der Hesse'schen Curve, die Spitze, ergibt folgende Entwicklung:

$$x = -\varepsilon^2, \\ y = \lambda \varepsilon^3 - \left(\frac{1}{2(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots,$$

wo

$$\lambda = \sqrt{\frac{(n-3)g}{2(n-2)f}}.$$

(Haben f und g verschiedene Zeichen, so muss $x = \varepsilon^2$ und $\lambda = \sqrt{\frac{-(n-3)g}{2(n-2)f}}$ gesetzt werden.)

Die Coordinaten der Steiner'schen Curve verhalten sich nun wie die Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} -6g\varepsilon^2 + 12l\varepsilon^4 + \dots & 2i\lambda\varepsilon^3 + 6m\varepsilon^4 + \dots \\ 3(n-3)g\varepsilon^4 + ([n-3]i\lambda^2 - 4[n-4]l)\varepsilon^5 + \dots \\ 2i\lambda\varepsilon^3 + 6m\varepsilon^4 + \dots & 2f - 2i\varepsilon^2 + \dots \\ 2(n-2)f\lambda\varepsilon^3 - \left((2n-5)i - \frac{2(n-2)}{n-3} \frac{fl}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots \end{vmatrix},$$

also:

$$\begin{aligned} \xi : \eta : 1 &= -6(n-3)fg\varepsilon^4 + \left(\frac{(n-3)(7n-13)}{n-2} gi + 8(n-4)fl \right) \varepsilon^6 + \dots \\ &: 12(n-2)fg\lambda\varepsilon^5 - \left(6(n-2)gi + \frac{12(n-2)(2n-7)}{n-3} fl \right) \varepsilon^7 + \dots \\ &: -12fg\varepsilon^2 \left(1 - \left[\frac{i}{f} + \frac{2l}{g} \right] \varepsilon^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Die im letzten Glied auftretende Reihe $\left(1 - \left[\frac{i}{f} + \frac{2l}{g} \right] \varepsilon^2 + \dots \right)$ käme in den Nenner von ξ und η zu stehen und wird daher auf Grund der Formel

$$\frac{1}{1+p} = 1 - p + p^2 - p^3 + \dots$$

in den Zähler gebracht.

Es ist daher:

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2 - \left[\frac{(n-3)(7n-13)}{12(n-2)} \frac{i}{f} + \frac{2}{3}(n-4) \frac{l}{g} \right] \varepsilon^4 + \dots \right) \left(1 + \left[\frac{i}{f} + \frac{2l}{g} \right] \varepsilon^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2 - \left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3}(n-1) \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots, \end{aligned}$$

ebenso:

$$\eta = -(n-2)\lambda \varepsilon^3 - \left(\frac{1}{2}(n-2) \frac{i}{f} + \frac{n-2}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots$$

$$\text{Probe I): } \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2 - \left[\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3}(n-1) \frac{l}{g} \right] \varepsilon^4 + \dots \right) \\ & \quad \times \left(3(n-3)g\varepsilon^4 + [(n-3)i\lambda^2 - 4(n-4)l] \varepsilon^5 + \dots \right) \\ & + \left(-(n-2)\lambda \varepsilon^3 - \left[\frac{1}{2}(n-2) \frac{i}{f} + \frac{n-2}{n-3} \frac{l}{g} \right] \lambda \varepsilon^5 + \dots \right) \\ & \quad \times \left(2(n-2)f\lambda \varepsilon^3 - \left[(2n-5)i - \frac{2(n-2)}{n-3} \frac{fl}{g} \right] \lambda \varepsilon^5 + \dots \right) \\ & + \frac{1}{2}(n-3)(n-5)g\varepsilon^6 - \left((n-3)^2 i \lambda^2 - (n^2 - 8n + 17)l \right) \varepsilon^8 + \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

Selbstverständlich können in diesem Ausdruck, soweit er dasteht, nur die Coefficienten von ε^6 und ε^8 verschwinden, weil nur zwei Glieder berücksichtigt sind.

Cayley'sche Curve.

Die Matrix

$$\left\| \begin{array}{ccc} -\varepsilon^2 & \lambda \varepsilon^3 - \left(\frac{1}{2(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots & 1 \\ \frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2 - \left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3}(n-1) \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots & & \\ - (n-2)\lambda \varepsilon^3 - \left(\frac{1}{2}(n-2) \frac{i}{f} + \frac{n-2}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots & & 1 \end{array} \right\|$$

liefert:

$$\begin{aligned} \dot{u} : \dot{v} : \dot{w} &= (n-1)\lambda \varepsilon^3 + \left(\frac{(n-1)(n-3)}{2(n-2)} \frac{i}{f} + \frac{n-1}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots \\ &: \frac{1}{2}(n-1)\varepsilon^2 - \left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3}(n-1) \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots \\ &: \frac{1}{2}(n-1)\lambda \varepsilon^5 + \left(\frac{(n-1)(7n-18)}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{(n-1)(2n-9)}{6(n-3)} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^7 + \dots, \end{aligned}$$

beide Proben II) stimmen.

Die Coordinaten des zugehörigen Punktes auf der Cayley'schen Curve verhalten sich wie die Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{array}{l} \lambda \varepsilon^3 + \left(\frac{n-3}{2(n-2)} \frac{i}{f} + \frac{1}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \left(\frac{n-3}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3} \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots \\ \frac{1}{2} \lambda \varepsilon^5 + \left(\frac{7n-18}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{2n-9}{6(n-3)} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^7 + \dots \\ 3 \lambda \varepsilon^2 + 5 \left(\frac{n-3}{2(n-2)} \frac{i}{f} + \frac{1}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^4 + \dots - \varepsilon - 4 \left(\frac{n-3}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3} \frac{l}{g} \right) \varepsilon^3 + \dots \\ \frac{5}{2} \lambda \varepsilon^4 + 7 \left(\frac{7n-18}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{2n-9}{6(n-3)} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^6 + \dots \end{array} \right\|$$

Es ergeben sich:

$$\dot{x} = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 - \left(\frac{4n+3}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{n+3}{3(n-3)} \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots,$$

$$\dot{y} = 2 \lambda \varepsilon^3 + \frac{2}{3} (2n-3) \left(\frac{1}{n-2} \frac{i}{f} - \frac{1}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots,$$

Probe III stimmt.

Das unter 3. auseinandergesetzte Verfahren giebt die homogenen Coordinaten der Punkte der Steiner'schen Curve als Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{array}{l} 3g \varepsilon^4 + \left(\frac{n-3}{2(n-2)} \frac{gi}{f} - 4l \right) \varepsilon^6 + \dots \quad 2f \lambda \varepsilon^3 - \left(\frac{2n-3}{n-2} i - \frac{2}{n-3} \frac{fl}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots \\ \quad - \frac{n-3}{2} g \varepsilon^6 - \left(\frac{n-3}{2} \frac{gi}{f} - (n-3)l \right) \varepsilon^8 + \dots \\ 12g \varepsilon^3 + 6 \left(\frac{n-3}{2(n-2)} \frac{gi}{f} - 4l \right) \varepsilon^5 + \dots \quad 6f \lambda \varepsilon^2 - 5 \left(\frac{2n-3}{n-2} i - \frac{2}{n-3} \frac{fl}{g} \right) \lambda \varepsilon^4 + \dots \\ \quad - 3(n-3)g \varepsilon^5 - 8 \left(\frac{n-3}{2} \frac{gi}{f} - (n-3)l \right) \varepsilon^7 + \dots \end{array} \right\|$$

dieselben stimmen mit den früher gefundenen Werthen überein (Probe IV).

Salmon'sche Curve.

Die beiden unendlich fernen Punkte des zum Parameter ε gehörigen zerfallenden Kegelschnittes sind gegeben durch:

$$(-6g \varepsilon^2 + 12l \varepsilon^4 + \dots) x'^2 + 2(2i \lambda \varepsilon^3 + 6m \varepsilon^4 + \dots) x'y' + (2f - 2i \varepsilon^2 + \dots) y'^2 = 0.$$

Mit

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{6(n-2)}{n-3}}$$

folgt hieraus:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{l} 2\mu f \lambda \varepsilon - \left((\mu+2)i + 2\mu \frac{fl}{g} \right) \lambda \varepsilon^3 + \dots \\ \quad - 6g \varepsilon^2 + 12l \varepsilon^4 + \dots \quad 0 \end{array} \right\| \\ \bar{u} : \bar{v} : \bar{w} = & \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{2} (n-3) \varepsilon^2 - \left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)} \frac{i}{f} - \frac{1}{3} (n-1) \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots \\ \quad - (n-2) \lambda \varepsilon^3 - \left(\frac{1}{2} (n-2) \frac{i}{f} + \frac{n-2}{n-3} \frac{l}{g} \right) \lambda \varepsilon^5 + \dots \quad 1 \end{array} \right\| \\ = & -6g \varepsilon^2 + 12l \varepsilon^4 + \dots \\ & : -2\mu f \lambda \varepsilon + \left((\mu+2)i + 2\mu \frac{fl}{g} \right) \lambda \varepsilon^3 \dots \\ & : - (n-3)(\mu-3)g \varepsilon^4 + \left(\frac{(n-3)^2}{2(n-2)} \frac{gi}{f} + (n-4)(\mu-4)l \right) \varepsilon^6 + \dots \end{aligned}$$

Bei der Probe V) ergibt sich, dass man den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} x' y' + \dots$$

mit $-6g\varepsilon^2 + 12l\varepsilon^4 + \dots$ multipliciren muss, um das Produkt

$$(\bar{u}_1 x' + \bar{v}_1 y' + \bar{w}_1 z')(\bar{u}_2 x' + \bar{v}_2 y' + \bar{w}_2 z')$$

zu erhalten, wo sich die Indices auf das Doppelzeichen von μ beziehen, welches die beiden Zweige der Salmon'schen Curve unterscheidet.

Die Berührungspunkte der Salmon'schen Curve werden nun:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= -\frac{1}{2}(n-3)(\mu-3)\varepsilon^2 \\ &+ \left(\frac{(n-3)(4\mu+n-7)}{12(n-2)} \frac{i}{f} + \frac{-(9n-22)\mu + (22n-46)l}{6} \frac{l}{g} \right) \varepsilon^4 + \dots \\ &- \left(-(n-3)\mu + 2(n-2) \right) \lambda \varepsilon^3 \\ &- \left[\left(\frac{(n-3)(n-4)}{6(n-2)} \mu + 1 \right) \frac{i}{f} + \left(\frac{1}{3}(7n-13)\mu - 2 \frac{(n-2)(3n-7)l}{n-3} \right) \frac{l}{g} \right] \lambda \varepsilon^5 + \dots \end{aligned} \right.$$

Bei der Berechnung der Zeuthen'schen Curve möge in den Entwicklungen je nur ein Glied berücksichtigt werden.

Die Gleichung 11) wird mit $z' = 0$:

$$[6g\xi + 6(n-3)gx + \dots]x'^2 + 2[2i\eta + 2(n-3)iy + \dots]x'y' + [2(n-2)f + \dots]y'^2 = 0,$$

oder

$$[-3(n-3)g\varepsilon^2 + \dots]x'^2 + [-4i\lambda\varepsilon^3 + \dots]x'y' + [2(n-2)f + \dots]y'^2.$$

Dann ist:

$$\bar{u}_i : \bar{v}_i : \bar{w}_i = \left\| \begin{array}{ccc} + 2\sqrt{3}(n-2)f\lambda\varepsilon + \dots & - 3(n-3)g\varepsilon^2 + \dots & 0 \\ - \varepsilon^2 & \lambda\varepsilon^3 + \dots & 1 \end{array} \right\|$$

$$= -3(n-3)g\varepsilon^2 + \dots : \mp 2\sqrt{3}(n-2)f\lambda\varepsilon + \dots : -(n-3)(3 \mp \sqrt{3})g\varepsilon^4 + \dots$$

daher:

$$\bar{x} = -(3 \mp \sqrt{3})\varepsilon^2 + \dots,$$

$$\bar{y} = 2(\mp \sqrt{3} - 1)\lambda\varepsilon^3 + \dots$$

Auch bei der Gegencurve der Cayley'schen Curve möge nur ein Glied in Betracht gezogen werden.

Dann ist: $u : v : w = -3\lambda\varepsilon^2 + \dots : -2\varepsilon : -\lambda\varepsilon^4 + \dots,$

also:

$$x^* : y^* : 1 = \left\| \begin{array}{ccc} -3\lambda\varepsilon^2 + \dots & -2\varepsilon & -\lambda\varepsilon^4 + \dots \\ 3g\varepsilon^4 + \dots & 2f\lambda\varepsilon^3 + \dots & -\frac{n-3}{2}g\varepsilon^6 + \dots \end{array} \right\|$$

$$x^* = \frac{n-3}{3}\varepsilon^2 + \dots$$

$$y^* = -\frac{1}{2}(n-2)\lambda\varepsilon^3 + \dots$$

8. Die Entwicklung des zweiten (durchgehenden) Zweiges der Hesseschen Curve ergibt:

$$y = \varepsilon$$

$$x = \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 + \dots,$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{6} \frac{n-3}{n-2} \frac{i^2}{fg} - \frac{1}{3} \frac{p}{g},$$

$$\beta = -\frac{1}{6} \frac{(n-3)(n-4)}{(n-2)^2} \frac{i^2 k}{f^2 g} + \frac{1}{3} \frac{mp}{g^2} - \frac{1}{6} \frac{n-3}{n-2} \frac{i^2 m}{fg^2} - \frac{1}{3} \frac{v}{g} + \frac{1}{3} \frac{n-4}{n-2} \frac{iq}{fg}.$$

Mit Berührung der zweiten und dritten Gleichung 2) ergibt sich der Punkt der Steiner'schen Curve:

$$\xi = -(n-2) \frac{f}{i} - 2\gamma \frac{f}{i} \varepsilon + \dots,$$

$$\eta = \frac{1}{2} \gamma \varepsilon^2 \dots,$$

wo

$$\gamma = (n-3) \frac{k}{f} - (n-2) \frac{q}{i}.$$

Für die Cayley'sche Curve wird:

$$\dot{u} : \dot{v} : \dot{w} = \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma \varepsilon^2 + \dots : -(n-2) \frac{f}{i} - 2\gamma \frac{f}{i} \varepsilon + \dots : (n-2) \frac{f}{i} \varepsilon - 2\gamma \frac{f}{i} \varepsilon^2 + \dots,$$

daher:

$$\dot{x} = -(n-2) \frac{f}{i} - (n+2) \gamma \frac{f}{i} \varepsilon + \dots,$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2} (n+2) \gamma \frac{f}{i} \varepsilon^2 + \dots$$

Für die Salmon'sche Curve bekommt man:

$$\bar{u} : \bar{v} : 1 = (v-2)i\varepsilon + \left(-\frac{(n-3)}{(n-2)} v \frac{ik}{f} + (2v-3)q \right) \varepsilon^2 + \dots$$

$$: -2f - 6k\varepsilon + \dots$$

$$: (n-2)(v-2)f\varepsilon + (v-3)(n-3)k\varepsilon^2 + \dots,$$

wo

$$v = \pm \sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}},$$

daher:

$$\bar{x} = -(n-2) \frac{f}{i} - 2 \frac{(2v-3)}{v-2} \gamma \frac{f}{i} \varepsilon + \dots,$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2} (2v-3) \gamma \varepsilon^2 + \dots$$

Die Berechnung der Zeuthen'schen Curve ergibt:

$$\bar{\bar{u}} : \bar{\bar{v}} : \bar{\bar{w}} = -6(n-2) \frac{fg}{i} + \dots : -2qf\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots : 6(n-2) \frac{fg}{i} \varepsilon + \dots,$$

wo

also:

$$q = \pm \sqrt{\frac{3(n-2)g\gamma}{i}},$$

$$\bar{\bar{x}} = -\varepsilon + \dots,$$

$$\bar{\bar{y}} = +6(n-2) \frac{g}{q i} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Endlich findet man für die Gegencurve der Cayley'schen Curve:

$$x^* = - (n-1) \alpha \varepsilon^2 + \left(\frac{n}{2} \alpha \frac{k}{f} - \frac{1}{2} (3n-2) \beta \right) \varepsilon^3 + \dots,$$

$$y^* = - \frac{n-2}{2} \varepsilon + \frac{n}{4} \frac{k}{f} \varepsilon^2 + \dots$$

9. Das Verhalten der covarianten Curven möge in folgenden Sätzen zusammengefasst werden:

Wenn die Grundcurve im Punkte A eine Spitze mit Tangente a hat, so hat:

- a) die Hesse'sche Curve in A ebenfalls eine Spitze mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b ;
- b) die Steiner'sche Curve hat in A eine Spitze mit Tangente a und berührt a in einem weiteren Punkte B ;
- c) die Cayley'sche Curve hat in A eine Spitze mit Tangente a und berührt a ebenfalls im Punkte B ;
- d) die Salmon'sche Curve hat in A zwei Spitzen, beide mit Tangente a und in B einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) mit Tangente a ;
- e) die Zeuthen'sche Curve hat in A zwei Spitzen mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b ;
- f) die Gegencurve der Cayley'schen Curve hat in A eine Spitze mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b .

Hierbei ist jedoch zu bemerken:

Bei der Salmon'schen Curve treten merkwürdiger Weise Ausnahmen von der unter d) gegebenen Regel ein, wenn die Grundcurve von der fünften oder zehnten Ordnung ist. Bei der Ordnung 5 verwandelt sich die eine der beiden Spitzen in einen „Rückkehrspitzpunkt“ [cf. unten 14k)]. Bei der Ordnung 10 tritt dagegen an die Stelle des Berührungsknotens eine Singularität, bestehend aus einer Spitze in B mit Tangente a und einem gewöhnlichen Zweig in B , ebenfalls mit Tangente a .

Übrigens ist bei Curven dritter Ordnung das Verhalten der meisten covarianten Curven ein abnormes: die Cayley'sche Curve fällt mit ihrer Gegencurve, der Salmon'schen und der Zeuthen'schen, zusammen und zerfällt in den doppeltzählenden Punkt A und noch einen weiteren Punkt (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 592).

Aus den Entwicklungen für die Zweige der covarianten Curven ergeben sich noch folgende erwähnenswerthe Thatsachen:

Wenn sich zwei Zweige der covarianten Curven (beispielsweise der Zweig der Steiner'schen und derjenige der Cayley'schen Curve in B) berühren, so hängt das Verhältniss der Krümmungsradien, welches eine Invariante ist (cf. Zeitschrift für Mathematik u. Physik 38. Jahrg. S. 237), zwar im Allgemeinen von der Ordnung der Grundcurve ab, ist aber sonst von letzterer gänzlich unabhängig. Dasselbe gilt von dem Verhältniss der Spitzenparameter der in einem Punkte zusammenfallenden und die-

selbe Tangente besitzenden Spitzen (unter Parameter einer Spitze verstehe ich den Parameter einer die Curve in der Spitze siebenpunktig berührenden Neil'schen [semicubischen] Parabel).

Während ferner im Allgemeinen jede Gerade des Paares, welches die Salmon'sche oder Zeuthen'sche Curve umhüllt, für sich einen besonderen Zweig beschreibt, tritt im obigen Beispiel bei dem gewöhnlichen Zweige der Zeuthen'schen Curve eine Ausnahme ein. Dieser Zweig kommt nämlich zu Stande, indem jede Gerade des Paares eine Seite des Zweiges beschreibt; beide fallen dann in b zusammen und werden weiterhin imaginär.

Interessant ist auch in diesem Beispiele, wie sich die Cayley'sche und die Salmon'sche Curve an die Steiner'sche Curve anschliessen, während die Zeuthen'sche und die Gegencurve der Cayley'schen dem Verlauf der Hesse'schen Curve folgen.

10. Hat die Grundcurve in A einen Doppelpunkt mit Tangenten b und c , so haben die Hesse'sche, die Steiner'sche, die Cayley'sche Curve und deren Gegencurve ebenfalls je einen Doppelpunkt in A mit Tangente b und c . Die Salmon'sche Curve hat in A ebenfalls einen Doppelpunkt mit Tangenten b und c und berührt ausserdem noch b und c je in den Punkten B und C . Desgleichen hat die Zeuthen'sche Curve in A einen Doppelpunkt mit Tangenten b und c und berührt b und c je in denselben Punkten B und C . Die Verhältnisse der Krümmungsradien bei den sich berührenden Curven sind wieder von der Ordnung n der Grundcurve abhängig. Bei Clebsch-Lindemann (Vorlesungen über Geometrie I S. 325 Anmerkung) ist bereits darauf hingewiesen, dass die Zweige der Grundcurve und der Hesse'schen Curve im Doppelpunkte sich gegenseitig die convexe Seite zukehren: denn das Verhältniss ihrer Krümmungsradien ist negativ, nämlich gleich $-\frac{n-2}{n}$.

Zusatz:

Bei Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt zerfällt, wie bekannt (cf. Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 588) die Cayley'sche Curve in den Doppelpunkt und einen die Tangenten des letzteren in B und C berührenden Kegelschnitt. Unsere Entwicklungen zeigen noch besonders für diesen Fall, dass die Verbindungslinie der reellen zusammengehörigen Punkte in der Hesse'schen und Steiner'schen Curve nicht den ganzen Kegelschnitt umhüllt, sondern nur einen von den Berührungspunkten B und C begrenzten Bogen desselben, diesen aber doppelt.

11. Während mehreren Punkten der Hesse'schen Curve ein und derselbe Punkt der Steiner'schen entsprechen kann — letzterer ist eben dann ein mehrfacher Punkt in der Steiner'schen Curve —, kann umgekehrt ein Punkt der Hesse'schen Curve im Allgemeinen nicht auf mehrere Punkte der Steiner'schen Curve führen. Denn der Punkt $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$ liegt auf der Hesse'schen Curve, wenn die drei Geraden:

$$14) \quad \begin{cases} 2d\xi + e\eta + (n-1)b = 0, \\ e\xi + 2f\eta + (n-1)c = 0, \\ b\xi + c\eta + (n-2)a = 0 \end{cases}$$

sich in einem Punkte treffen und im Allgemeinen wird das, wenn es überhaupt stattfindet, nur in einem Punkte geschehen. Indes können die drei Geraden 14) durch theilweises Zusammenfallen oder Illusorischwerden doch auch mehr als einen Schnittpunkt bekommen und gerade bei höheren Singularitäten der Grundcurve kann es geschehen, dass einem Punkt der Hesse'schen Curve mehrere Punkte der Steiner'schen entsprechen. Es wurde z. B. bereits gezeigt, dass, wenn die Grundcurve eine Spitze A hat, dem Punkte A der Hesse'schen Curve in der Steiner'schen die zwei Punkte A' und B entsprechen (siehe oben Ziffer 9).

12. Während sich bekanntlich die Punkte der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve eindeutig entsprechen, tritt eine Ausnahme ein, wenn die Grundcurve eine Spitze A hat. Denn dem Punkte A als Punkt der Hesse'schen Curve entsprechen in der Steiner'schen Curve sämtliche Punkte der Spitzentangente a und zwar tritt letztere doppeltzählend in der Gleichung der Steiner'schen Curve auf. Dagegen entspricht die Curve, welche durch Weglassung dieser Doppelgeraden entsteht, und welche als reducirte Steiner'sche Curve bezeichnet werden möge, wieder eindeutig der Hesse'schen Curve und man kann nunmehr die Plücker'schen Zahlen für die (reducirte) Steiner'sche Curve aufstellen, wenn die Grundcurve d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat.

Wegen Weglassung der Doppelgeraden wird

$$n_s = 3(n-2)^2 - 2r.$$

Das Geschlecht ist gleich dem der Hesse'schen Curve, also:

$$p_s = \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8) - d - 3r.$$

Für die Klasse kann man die Formel

$$k_s = 3(n-1)(n-2) - 2d - 4r$$

(Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 671 Anmerkung) benützen, weil durch Weglassung der Doppelgeraden die Klasse nicht geändert wird.

Hieraus ergeben sich leicht die übrigen Zahlen:

$$d_s = \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2 - 9n - 5) + d - 6(n^2 - 4n + 2)r + 2r^2,$$

$$r_s = 12(n-2)(n-3) - 6r,$$

$$t_s = \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2 - 3n - 8) - 2d(3n^2 - 9n + 1) - 3r(4n^2 - 12n + 1) + 2d^2 + 8dr + 8r^2,$$

$$w_s = 3(n-2)(4n-9) - 6d - 12r.$$

13. Hat die Grundcurve in A einen dreifachen Punkt, so entsprechen dem letzteren als einem Punkte der Hesse'schen Curve sämtliche Punkte der Ebene als Punkte der Steiner'schen Curve, weil alle ersten Polaren in A einen Doppelpunkt haben. Als „Steiner'sche Curve“ hat man in diesem Falle den Ort der Punkte anzusehen, deren erste Polaren je ausser A noch einen zweiten Doppelpunkt haben.

Hat nun die Grundcurve in A drei verschiedene Zweige mit den Tangenten b, c, d , so hat die Hesse'sche Curve in A einen fünffachen Punkt; drei Zweige berühren die Tangenten b, c, d , während zwei Zweige mit den Tangenten e und f hindurchgehen. Gerade so verhält sich auch die Steiner'sche Curve.

(Man kann aber auch nach dem Ort der Punkte fragen, deren erste Polaren in A je eine Spitze [und sonst keinen Doppelpunkt] haben. Man erhält in unserem Falle als Ortscurve ein Geradenpaar, bestehend aus den Tangenten e und f der Hesse'schen Curve.)

14. Nachstehend möge noch das Verhalten der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve in einer Anzahl weiterer Singularitäten der Grundcurve mitgetheilt werden:

- a) Die Grundcurve hat einen Wendepunkt A mit Tangente a . Die Hesse'sche Curve geht durch A mit Tangente b hindurch. Die Steiner'sche Curve berührt a in einem Punkte B [cf. Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 371] (auch die Cayley'sche Curve berührt a in demselben Punkte B). Darum muss auch bei Curven dritter Ordnung die Hesse'sche Curve, da sie die Stelle der Steiner'schen vertritt, die Wendetangenten berühren (Salmon, Höhere Curven S. 197).
- b) Die Grundcurve hat einen Undulationspunkt (Flachpunkt) A mit Tangente a . Die Hesse'sche Curve berührt a in A . Die Steiner'sche Curve berührt a in einem Punkte B und hat daselbst einen Wendepunkt.
- c) Die Grundcurve hat in A einen Wendeflachpunkt (Reuschle, Praxis der Curvendiscussion I, Stuttgart 1886, S. 32) mit Tangente a , das heisst, ihre niedersten Glieder sind $cy + \dots + sx^5 + \dots$ (diese Singularität ist äquivalent mit drei Doppeltangenten und drei Wendepunkten). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Wendepunkt mit Tangente a . Die Steiner'sche Curve berührt a in einem Punkte B und hat daselbst einen Undulationspunkt.
- d) Die Grundcurve hat einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) A mit Tangente a . Die Hesse'sche Curve hat in A einen dreifachen Selbstberührungspunkt mit Tangente a (das heisst, drei gewöhnliche Zweige berühren a in A). Die Steiner'sche Curve verhält sich ebenso.

- e) Die Grundcurve hat einen symmetrischen Berührungsknoten in A mit Tangente a , das heisst, die Krümmungsradien der Zweige sind gleich und entgegengesetzt gerichtet. Die Hesse'sche Curve hat in A einen symmetrischen Berührungsknoten mit Tangente a und zwei durchgehende Zweige mit den Tangenten b und c (cf. Mathem. Annalen 36. Bd. S. 119). Die Steiner'sche Curve hat in A ebenfalls einen symmetrischen Berührungsknoten mit Tangente a und einen weiteren Berührungsknoten im Punkte B mit Tangente a .
- f) Die Grundcurve hat in A einen Rückkehrflachpunkt (Reuschle, a. a. O. S. 49) mit Tangente a , das heisst, ihre niedersten Glieder sind $fy^2 + \dots + sx^5 + \dots$ (der singuläre Punkt ist äquivalent mit einem Doppelpunkte, einer Spitze, zwei Doppeltangenten und zwei Wendepunkten). Die Hesse'sche Curve hat alsdann in A einen Rückkehrflachpunkt mit Tangente a , einen berührenden Zweig mit Tangente a und einen durchgehenden Zweig mit Tangente b . Die Steiner'sche Curve hat ebenfalls einen Rückkehrflachpunkt in A mit Tangente a und berührt a noch in einem Punkte B (wo sie einen Wendepunkt hat) und in einem weiteren Punkte C (hier, wie im Folgenden sind die Zweige der Steiner'schen Curve in derselben Reihenfolge aufgezählt, wie die damit zusammengehörenden der Hesse'schen Curve).
- g) Die Grundcurve hat in A eine Spitze mit Tangente a und einen durchgehenden Zweig mit Tangente b . Die Hesse'sche Curve hat in A zwei Spitzen, je mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b . Die Steiner'sche Curve hat ebenfalls zwei Spitzen in A , je mit Tangente a und berührt b in B , wo sie einen Wendepunkt hat.
- h) Die Grundcurve hat in A einen Spitzpunkt (Reuschle, a. a. O. S. 40) mit Tangente a , das heisst, ihre niedrigsten Glieder sind $ky^3 + lx^4 + \dots$ (diese Singularität ist mit einem Doppelpunkt und zwei Spitzen äquivalent). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Spitzpunkt mit Tangente a , einen berührenden Zweig mit Tangente a und zwei durchgehende Zweige mit den Tangenten b und c . Die Steiner'sche Curve hat einen Spitzpunkt in A mit Tangente a , einen gewöhnlichen Zweig, der weder durch A geht, noch a berührt, und sie berührt a noch in zwei Punkten B und C .
- i) Die Grundcurve hat in A einen Wendespitzpunkt (Reuschle a. a. O. S. 50) mit Tangente a , das heisst, die niedersten Glieder sind $ky^3 + \dots + sx^5 + \dots$ (der singuläre Punkt ist äquivalent mit zwei Doppelpunkten, zwei Spitzen, einer Doppeltangente und einem Wendepunkt). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Wendespitzpunkt mit Tangente a , eine Spitze mit Tangente a und einen

berührenden Zweig mit Tangente a . Die Steiner'sche Curve hat einen Wendespitzpunkt in A mit Tangente a , einen Wendepunkt in A mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig, der weder durch A geht, noch a berührt.

- k) Die Grundcurve hat in A einen Rückkehrspitzpunkt (cf. Reuschle a. a. O. S. 41) mit Tangente a , das heisst, die niedersten Glieder sind $ry^4 + sx^5 + \dots$ (die Singularität ist äquivalent mit drei Doppelpunkten und drei Rückkehrpunkten). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Rückkehrspitzpunkt mit Tangente a , eine Spitze mit Tangente a und drei durchgehende Zweige mit den Tangenten b, c, d . Die Steiner'sche Curve hat einen Rückkehrspitzpunkt in A mit Tangente a , einen durchgehenden Zweig in A mit einer Tangente e und berührt a noch in drei Punkten B, C und D .

15. Das im Vorhergehenden auseinander gesetzte Verfahren ermöglichte es, die Lage und Beschaffenheit der Zweige der Steiner'schen Curve zu bestimmen, welche dem singulären Punkte der Hesse'schen Curve entsprechen, welch' letzterer in den singulären Punkt der Grundcurve hineinfällt und demselben seinen Ursprung verdankt. Es erhebt sich nun aber die Frage, ob damit der Einfluss der Singularität der Grundcurve auf das Verhalten der Steiner'schen Curve erschöpft ist. Es wäre ja denkbar, dass die Gleichungen 2), wenn in ihnen $\left\{ \begin{matrix} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{matrix} \right\}$ gesetzt wird, noch durch einen von $\left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$ verschiedenen Punkt oder gar mehrere solche befriedigt würden. Es würde also noch ein weiterer Punkt der Hesse'schen Curve (oder mehrere) existiren, der zu einem durch den singulären Punkt gehenden Zweige der Steiner'schen Curve Anlass gäbe. Ein solcher Zweig wäre als accessorisch zu bezeichnen und ebenso würden wir einen Zweig zu nennen haben, welcher durch einen der etwa zum Punkte $\left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\}$ der Hesse'schen Curve gehörigen nicht in $\left\{ \begin{matrix} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{matrix} \right\}$ fallenden Punkte der Steiner'schen Curve hindurchgeht. Dass bei speciellen Grundcurven solche accessorischen Zweige vorkommen können, ist klar;* dagegen ist die Frage, ob sie bei allgemeinen Grundcurven zu erwarten sind, zwischen deren Coefficienten also, von der Singularität abgesehen, keine weiteren Relationen existiren, im Allgemeinen wohl zu verneinen. Indess ist nicht zu leugnen, dass bei gewissen Singularitäten in allgemeinen Grundcurven von einer

* Bei speciellen Grundcurven können auch sonst Abweichungen vom gewöhnlichen Verhalten der covarianten Curven eintreten. Verschwindet z. B. die Grösse γ in Ziffer 8, so haben im Punkte B die Steiner'sche und die Cayley'sche Curve je eine Spitze an Stelle eines gewöhnlichen Zweiges.

bestimmten Ordnung in der That accessorische Zweige in der Steiner'schen Curve regelmässig auftreten; ein Beispiel ist hierfür wenigstens der Wendepunkt bei den Curven dritter Ordnung. Durch ihn geht die Steiner'sche Curve accessorisch hindurch; denn der zugehörige Punkt der Hesse'schen Curve liegt nicht im Wendepunkte, sondern auf der Wendetangente im Berührungspunkte der Steiner'schen Curve (cf. Salmon, Höhere Curven S. 200). Es wäre immerhin denkbar, dass es für manche andere Singularitäten eine gewisse Ordnung der Grundcurve giebt, bei welcher solche accessorischen Zweige der Steiner'schen Curve auftreten. Dazu kommt aber die weitere Möglichkeit, dass infolge besonderer Umstände in der Steiner'schen Curve ausserhalb der bereits gefundenen Punkte ein singulärer Punkt auftritt, welcher einer in der Grundcurve befindlichen Singularität seine Entstehung verdankt, während der zugehörige Punkt der Hesse'schen Curve nicht in die genannte Singularität hereinfällt. Allgemein wird sich über diese Fragen nicht leicht etwas aussagen lassen, aber so viel ist sicher, dass die in vorliegender Abhandlung gegebene Methode hinreicht, um den wesentlichen Einfluss singulärer Punkte der Grundcurve auf das Verhalten der Steiner'schen und der anderen covarianten Curven zu ermitteln.

IV.

Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik.

Von

FRIEDRICH SCHUR

in Aachen.

Hierzu Tafel I, Figur 1—4.

Bekanntlich giebt die graphische Statik zu einer merkwürdigen Reciprocität ebener Figuren Veranlassung, bei welcher jeder Geraden der einen Figur eine ihr parallele der anderen entspricht. Nachdem Culmann vergeblich versucht hatte, diese Reciprocität als eine projective aufzufassen, gelang dies Maxwell dadurch, dass er die beiden Figuren als orthogonale Projectionen zweier räumlicher Figuren entstehen liess, welche einander in Beziehung auf ein Rotationsparaboloid polar sind, wobei allerdings die eine der beiden Figuren noch um einen rechten Winkel gedreht werden musste. Diese Drehung vermied Cremona* dadurch, dass er die Reciprocität in Beziehung auf ein Rotationsparaboloid durch diejenige in Bezug auf ein sogenanntes Nullsystem ersetzte. Obwohl der Zusammenhang der beiden ebenen Figuren gerade hierdurch in der glücklichsten Weise zum Ausdruck gebracht war, so konnte die strenge Entwicklung der Lehre vom Fachwerk insofern aus diesen Untersuchungen keinen Vortheil ziehen, als Cremona die Frage unbeantwortet liess, ob zwei gegebene reciproke Figuren der graphischen Statik sich stets als Projectionen zweier reciproker Figuren eines Nullsystems darstellen lassen. Auch in der späteren Literatur** hat, so viel dem Verfasser bekannt ist, diese naheliegende Frage nirgends eine Antwort gefunden. Der Verfasser will daher die Cremona'sche Untersuchung in diesem Sinne zum Abschlusse bringen, wobei sich zeigen wird, dass sich

* Siehe besonders Cremona: „Les figures réciproques en statique graphique trad. par Bossut“, Paris 1885, woselbst man auch genauere Literaturangaben findet.

** Erst nachdem dieser Artikel dem Drucke übergeben war, erhielt der Verfasser Kenntniss der Abhandlung von G. Hauck: „Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik“, Journal f. r. u. a. M. Bd. 100 S. 365 fig., in welcher die Lösung des entsprechenden Problems für die sogenannte Neumann'sche Projectionsart angedeutet ist (S. 388).

zu allen Fachwerken, soweit sich deren Mannigfaltigkeit übersehen lässt, Cremona'sche Kräftepläne mit Hilfe des Nullsystems construiren lassen. Des leichteren Verständnisses wegen knüpfen wir überall an bestimmte Beispiele an.

I. Wir erinnern zunächst an einige Sätze über das Nullsystem.* Wir werden dabei unseren Zielen entsprechend am besten von der statischen Definition desselben ausgehen. Ein beliebiges System von Kräften im Raume lässt sich bekanntlich entweder auf eine Einzelkraft oder auf ein Paar paralleler und entgegengesetzt gleicher Kräfte oder auf zwei windschiefe Kräfte g und k reduciren. Uns interessirt nur der letzte sogenannte allgemeine Fall. Von den Wirkungslinien der beiden Kräfte kann die eine ganz beliebig im Raume gewählt werden, wodurch beide der Lage und Grösse nach bestimmt sind. Schneiden sich nämlich g und g' in G , und ist K der Schnittpunkt von k mit der Ebene $[g, g']$, so zerlegen wir g in zwei Componenten g' und n nach g' und GK und suchen diejenige Kraft k' durch K , welche mit der in KG wirkenden Kraft $-n$ die Resultante k liefert; dann sind die Kräfte g' und k' offenbar den beiden gegebenen Kräften g und k äquivalent. Da g' nur in einer Ebene mit g zu liegen braucht, so kann man durch ihre Vermittelung zu jeder Wirkungslinie des Raumes kommen. Unsere Reduction würde allerdings dann absurd sein, wenn g' auch die Wirkungslinie k schneiden würde. Solche Linien heissen Nulllinien des Kräftesystems, weil dasselbe für jede solche Achse das Drehungsmoment Null liefert. Nennen wir zwei Geraden, die Wirkungslinien von zwei windschiefen das Kräftesystem ersetzenden Kräften sein können, conjugirt, so sind die Nulllinien diejenigen Geraden, welche zwei conjugirte gleichzeitig schneiden. Sie erfüllen den Raum in der Weise, dass die durch einen Punkt laufenden Nulllinien in einer Ebene liegen, der Nullebene des Punktes, und die in einer Ebene liegenden Nulllinien durch einen Punkt laufen, den Nullpunkt der Ebene; dreht sich die Nullebene um eine Gerade, so bewegt sich der Nullpunkt auf der conjugirten Geraden und umgekehrt. Da im Sinne des Rechnens mit Strecken einerseits $g = g' + n$ und andererseits $k = k' - n$, so sehen wir, dass g und k nach irgend einem gemeinsamen Angriffspunkte verschoben dieselbe Resultante liefern müssen wie g' und k' nach demselben Angriffspunkte verschoben. Nennen wir diese ausgezeichnete Richtung die Achsenrichtung des Kräfte- oder Nullsystems, so geht aus ihrer Definition hervor, dass je zwei conjugirte Geraden in der Achsenrichtung durch zwei parallele Ebenen projicirt werden. Bedenken wir nun noch, dass unsere Construction conjugirter Geraden, also auch der Nulllinien dasselbe Resultat liefern muss, wenn wir g und k ihrer Lage nach ungeändert lassen, sie aber in demselben Verhältnisse vergrössern oder verkleinern, so ist klar,

* S. l. c. Introduction par M. J. Jung.

dass ein Nullsystem durch ein Paar conjugirter Geraden und die Achsenrichtung vollkommen bestimmt ist, wobei die letztere natürlich so gewählt sein muss, dass die beiden Geraden nach ihrer Richtung durch zwei parallele Ebenen projectirt werden. Denn dann ist ja das Verhältniss der in g und k wirkenden Kräfte bekannt, also auch die zu jeder Geraden g' conjugirte Gerade k' .

Wollen wir z. B. die einer zu g parallelen Geraden g' conjugirte k' finden, so muss sie ja sicher durch den Schnittpunkt K von k mit der Ebene $[g, g']$ gehen. Geben wir dann der in g wirkenden Kraft beliebige Grösse und Sinn, wodurch auch die in k wirkende bestimmt ist, so zerlegen wir g in zwei Componenten nach g' und der dazu parallelen Geraden durch K ; nun ist die Richtung von k' dadurch bestimmt, dass sie mit der in K angebrachten Componente g' die Resultante $g + k$ liefere. Schneidet g' die g in G , so ist k' einfacher bestimmt als Schnittlinie der Ebene $[Gk]$ mit der Ebene durch K , welche der Achsenrichtung und der g' parallel ist.

II. Wir beginnen nun mit der Betrachtung eines ganz einfachen Fachwerks, welches die Knoten P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 1) besitzt und aus den beiden Dreiseiten $P_1P_2P_4$ und $P_2P_3P_4$ besteht; in den Knoten mögen die mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte g_1, g_2, g_3, g_4 (in der Figur mit $G_0G_1, G_1G_2, G_2G_3, G_3G_0$ bezeichnet) wirken. Denken wir also diese Kräfte in dem geschlossenen Kräftepolygone $K_0K_1K_2K_3K_0$ zusammengetragen und verstehen unter C irgend einen Pol, so muss auch der zugehörige Seilpolygon $S_0S_1S_2S_3S_4S_5$ ein geschlossener sein, also S_0S_1 mit S_4S_5 zusammenfallen.

Nunmehr kommt es darauf an, das ebene Vierseit $g_1g_2g_3g_4$ als eine in der Richtung der Achse eines Nullsystems erhaltene Projection eines räumlichen Vierseits $g'_1g'_2g'_3g'_4$ darzustellen, welchem in diesem Nullsystem ein Vierseit $K'_0K'_1K'_2K'_3$ conjugirt ist, dessen Projection das Kräftepolygon $K_0K_1K_2K_3$ ist. Um dies zu erreichen, betrachten wir die Zeichenebene als die Ebene des Grundrisses, die dazu senkrechte Richtung als die der Achse des Nullsystems und verzeichnen die räumlichen Figuren im umgeklappten Aufriss. Um das Nullsystem zu fixiren, nehmen wir hier nach noch die beiden conjugirten Geraden g'_1 und k'_1 sonst willkürlich aber so an, dass g_1 und $k_1 = K_0K_1$ ihre Grundrisse seien, wir nehmen also ihre Aufrisse g'_1 und k'_1 ganz beliebig an, wodurch zugleich die Punkte K'_0 und K'_1 bestimmt sind. Nun muss die nächste Seite g'_2 des ersten räumlichen Vierseits erstens g_2 zum Grundrisse haben und zweitens zu $K'_1K'_2 = k'_2$ conjugirt sein oder in der Nullebene $[K'_1g'_1]$ von K'_1 liegen, wonach g'_2 leicht zu construiren ist. Jetzt ist k'_2 umgekehrt als die g'_2 conjugirte Gerade bestimmt; man findet daher k'_2 , falls g_1 und g_2 sich in G_1, g'_1 und g'_2 , sich also in G'_1 schneiden, über $k_2 = K_1K_2$ als Grundriss in der Nullebene $[G'_1k'_1]$ von G'_1 , oder, falls g_1 und g_2 , folglich auch g'_1 und g'_2 parallel sind, nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode (vergl.

auch Fig. 2). In beiden Fällen ist die wirkliche Construction leicht zu bewerkstelligen. So können wir fortfahren und erhalten der Reihe nach K'_2 über K_2 aus k'_3 , dann g'_3 über g_3 , hieraus k'_3 über $k_3 = K_2 K_3$ und K'_3 , weiter g'_4 über g_4 , endlich k'_4 über $k_4 = K_3 K_0$, und es fragt sich nur, ob k'_4 wieder durch K'_0 geht.

Bezeichnen wir nun den über K_0 liegenden Punkt von k'_4 mit K''_0 und verstehen unter C' irgend einen Punkt über dem Pole C , so sind den fünf Strahlen von C' nach $K'_0, K'_1, K'_2, K'_3, K''_0$ fünf Strahlen einer Ebene conjugirt, welche sich der Reihe nach in vier Punkten S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 von g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 schneiden müssen; dasselbe gilt daher von deren Projectionen in Beziehung auf g_1, g_2, g_3, g_4 . Diese Projectionen müssen also, da sie den Strahlen von C nach K_0, K_1, K_2, K_3, K_0 parallel sind, ein Seilpolygon $S_0 S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$ bilden. In diesem müssen aber der Voraussetzung gemäss die erste und die letzte Seite zusammenfallen. Dasselbe gilt daher auch von den Strahlen, deren Projectionen sie sind, da diese in derselben Ebene liegen, es gilt also schliesslich auch von $C'K'_0$ und $C'K''_0$, so dass auch K'_0 und K''_0 zusammenfallen, und folglich g'_4 mit g'_1 in derselben K'_0 enthaltenden Ebene liegen muss. Der erste Theil unserer Aufgabe wäre also gelöst, und man sieht zugleich, dass dasselbe Verfahren auch auf beliebige viele Kräfte g_1, g_2, \dots, g_n angewendet werden kann.

Das Weitere ergibt sich in unserem Falle sehr leicht. Auf den Seiten g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 des ersten räumlichen Vierseits liegen jetzt der Reihe nach die Punkte P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 , deren Projectionen die Knoten P_1, P_2, P_3, P_4 des Fachwerks sind. Das aus den sechs Dreiecken $g'_1 g'_2, g'_2 g'_3, g'_3 g'_4, g'_4 g'_1, P'_1 P'_2 P'_4$ und $P'_2 P'_3 P'_4$ bestehende, im Allgemeinen offene Sechsfach ist nun die räumliche Figur, deren Kanten die Stäbe des Fachwerks und die wirkenden Kräfte zu Projectionen haben. Es entspricht ihr im Nullsystem das aus den Punkten $K'_1, K'_2, K'_3, K'_0, H'_1$ und H'_2 bestehende Sechseck, dessen Kanten einerseits die Seiten des Kräftepolygons und andererseits die Spannungen in den Stäben des Fachwerks zu Projectionen haben. Diese letzteren sind jedesmal die Verbindungslinien derjenigen beiden Punkte, welche Projectionen der Nullpunkte der beiden Flächen des Sechsfachs sind, in denen die zu dem betreffenden Stabe gehörige Kante liegt. Will man daher diese Spannungen schnell aus der Figur herausfinden, so wird man gut thun, in die Projectionen jener Flächen die Buchstaben K_1, K_2, K_3, K_0, H_1 und H_2 einzutragen. Gerade in der Praxis liefert diese Bezeichnungsweise eine viel leichtere Uebersicht, als die sonst übliche, welche die Stäbe und die zugehörigen Spannungen mit denselben Zahlen bezeichnet, weil die letzteren Strecken sich häufig theilweise decken oder durch einander gehen.

III. Handelt es sich um ein complicirteres Fachwerk, so geschieht zunächst die Bestimmung des räumlichen n -Seits $g'_1 g'_2 \dots g'_n$, dessen Projectionen die Wirkungslinien der gegebenen Kräfte sind, auf ganz dem-

selben Wege. Hiermit sind zugleich die Raumpunkte $P'_1 P'_2 \dots P'_n$ bestimmt, deren Projectionen die Angriffspunkte jener Kräfte sind. Da wir hier nicht eine Discussion aller möglichen Arten von Fachwerken beabsichtigen, so machen wir die der Praxis entsprechende Annahme, dass die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte am Rande des Fachwerks liegen, dass also die diese Knotenpunkte verbindenden Stäbe immer nur einem Felde des Fachwerks angehören. Wir werden dann weiter die Annahme machen müssen, dass von den Knotenpunkten $P_1 P_2 \dots P_n$ im Allgemeinen höchstens drei demselben Felde des Fachwerks angehören; denn die den Knotenpunkten eines Feldes zugehörigen Raumpunkte müssen in einer Ebene liegen, was ohne besondere Bedingungen nur für je drei solcher Punkte zutreffen wird. Sollten nun am Rande noch weitere Knotenpunkte liegen, in welchen keine Kräfte wirken, so denken wir uns dieselben jedesmal zwischen den zwei der schon behandelten Knotenpunkte P_i und P_{i+1} vertheilt, zwischen welchen sie bei einmaliger Umlaufung des ganzen Randes liegen. Nun haben wir uns in diesen Knotenpunkten die Kräfte Null angebracht zu denken, welche im Kräftepolygon durch den Punkt K_i dargestellt sind, so dass die ihnen entsprechenden Raumpunkte sämtlich in der Ebene $[g'_i, g'_{i+1}]$ zu suchen sind; ist j die Anzahl dieser zwischen P'_i und P'_{i+1} liegenden Punkte, so bilden sie eben mit diesen und dem Punkte (g'_i, g'_{i+1}) eine der ersten räumlichen Figur angehörige $j + 3$ -eckige Seitenfläche.

Was nun die dem inneren Knotenpunkte entsprechenden Raumpunkte betrifft, so lassen sich für deren Bestimmung allgemeine Regeln kaum angeben. Wir werden da zuerst zusehen, ob das Fachwerk derart in Felder zerfällt, dass jeder innere Stab zwei und nur zwei Feldern angehört resp. ob sich das durch Einführung idealer Knotenpunkte* erreichen lässt. Hierunter verstehen wir die Schnittpunkte der solche Stäbe darstellenden Strecken, die in Wirklichkeit nur über einander laufen. Die den vier in einem solchen idealen Knotenpunkte zusammenlaufenden Stäben in dem Kräfteplane entsprechenden Strecken werden nämlich ein Parallelogramm bilden, so dass man für jeden Stab in den verschiedenen Theilen desselben dieselbe Spannung erhalten wird. Besonderer Untersuchung aber bedarf der Fall, dass in einem solchen idealen Knotenpunkte mehr als zwei Stäbe über einander laufen; hier stellt sich gewöhnlich eine Unbestimmtheit heraus, die durch die Bedingung zu heben ist, dass die in jedem durch den idealen Knotenpunkt durchbrochen gedachten Stabe resultirenden Spannungen entgegengesetzt gleich seien.

Für die Bestimmung der Raumpunkte, welche den inneren, wirklichen sowohl wie idealen Knotenpunkten entsprechen, muss nun davon ausgegangen werden, dass die einem und demselben Felde des Fachwerks zugehörigen in derselben Ebene liegen. Man sucht dann also nach Punkten,

* S. l. c. Appendice par Saviotti p. 63.

welche mit drei schon bekannten Raumpunkten in einer Ebene liegen sollen, und versucht, so allmählich zu allen Raumpunkten der ersten Figur zu kommen. Hierbei wird man oft nicht direct zu Werke gehen können, sondern einen oder mehrere der unbekanntenen Punkte vorerst willkürlich annehmen müssen, um durch das Studium ihrer Bewegung zum Ziele zu gelangen. Wir werden dies Verfahren an einigen Beispielen erläutern und begnügen uns hier mit der allgemeinen Bemerkung, dass die Bestimmung der inneren Raumpunkte unmöglich, das Fachwerk also statisch unbestimmt sein wird, wenn es beim Vorhandensein innerer, wirklicher oder idealer Knotenpunkte nur aus dreieckigen Feldern besteht.

IV. Als erstes Beispiel wählen wir das aus den vier äusseren Knotenpunkten $P_1 \dots P_4$ (Fig. 2) und dem inneren Knotenpunkte P_5 bestehende Fachwerk; es zerfällt in die beiden dreieckigen Felder $P_1 P_4 P_5$ und $P_3 P_4 P_5$ und in das viereckige Feld $P_1 P_2 P_3 P_5$. In P_1, P_2, P_3 mögen die drei Kräfte g_1, g_2, g_3 wirken, deren Kräftepolygon $K_0 K_1 K_2 K_0$. Dann bestimmt man nach der in II. angegebenen Methode das Dreieck $g'_1 g'_2 g'_3$ (der Aufriss wurde in der Figur nach der Seite umgeklappt) und damit P'_1, P'_2, P'_3 ; ferner ist P_4 dadurch bestimmt, dass er in der Ebene $[g'_3, g'_1]$ liegen muss, und endlich P'_5 dadurch, dass er in der Ebene $P'_1 P'_2 P'_3$ liegen muss. Somit ist die erste räumliche Figur vollständig bestimmt.

Ein ähnliches Beispiel liefert der sogenannte französische Dachstuhlträger (Fig. 3), an welchem zugleich der Vortheil unserer Bezeichnungsweise deutlich wird. Auf die oberen Knotenpunkte P_2, P_3, \dots, P_8 mögen die gleichen und parallelen Kräfte g_2, g_3, \dots, g_8 wirken, während in P_1 und P_9 die Auflager-Relationen $g_1 = g_6 = -\frac{1}{2}(g_2 + \dots + g_8)$ wirksam zu denken sind; $K_0 K_1 \dots K_8 K_0$ ist das zugehörige Kräftepolygon. Nach Annahme von g'_1 und k'_1 ergeben sich nun zuerst wieder die Geraden g'_2, \dots, g'_9 und mit ihnen die Punkte $P'_1 P'_2, \dots, P'_9$, die Punkte $P'_{10}, P'_{11}, P'_{12}, P'_{13}$ sind dann dadurch bestimmt, dass sie in der Ebene $[g'_1, g'_9]$ liegen müssen, endlich P'_{14} und P'_{15} dadurch, dass sie in der Ebene $P'_5 P'_{11} P'_{12}$ liegen müssen. Das Nullsystem liefert also unmittelbar als Projection des dem räumlichen Zweiundzwanzigfläch entsprechenden Zweiundzwanzigecks den zum Fachwerk gehörigen Kräfteplan. Bekanntlich kommt man hier mit den gewöhnlichen Methoden der Zerlegung in Componenten nicht aus, sondern bedarf noch irgend eines Kunstgriffs. (In der Figur dachte man sich H_4 auf der Parallelen durch H_3 zu $P_3 P_{12}$ beweglich, wobei sich H_6 auf einer durch S gehenden Geraden bewegt; H_6 kann also aus irgend einer Lage des beweglichen Punktes H'_6 gefunden werden.)

Als letztes Beispiel behandeln wir das Fachwerk mit sechs Knotenpunkten P_1, P_2, \dots, P_6 (Fig. 4), den Seiten und Diagonalen des von ihnen gebildeten Sechsecks als Stäben; die letzteren laufen in drei Punkten A, B, C über einander, welche wir also als ideale

Knotenpunkte einführen müssen. In den sechs Knotenpunkten mögen die sechs Kräfte g_1, g_2, \dots, g_6 wirken, und $K_0 K_1 \dots K_5 K_0$ sei das zugehörige Kräftepolygon. Nach Annahme von g'_1 und k'_1 finden wir wieder g'_2, \dots, g'_6 und daraus P'_1, P'_2, \dots, P'_6 . Die den idealen Knotenpunkten entsprechenden Punkte A', B', C' können wir hier nicht direct angeben. Nehmen wir aber einen dieser Punkte willkürlich über A an, so wären damit auch B' und C' bestimmt als in den Ebenen $P'_1 P'_1 A'$ und $P'_5 P'_6 A'$ gelegen, und es frägt sich nur, ob auch B' und C' mit P'_3 und P'_4 in einer Ebene liegen. Bei beliebiger Annahme von A' wird das natürlich im Allgemeinen nicht der Fall sein. Wenn sich aber A' auf der Vertikalen über A bewegt, so beschreiben $P'_3 P'_4 B'$ und $P'_3 P'_4 C'$ zwei projective Ebenenbüschel, welche die verticale Ebene durch $P'_3 P'_4$ entsprechend gemein haben, so dass man im Allgemeinen eine und nur eine Lage von A' erhalten wird, welche die Aufgabe löst. Die weitere Verfolgung dieser Betrachtungen würde uns auch zeigen, wenn mehr als eine oder nur eine uneigentliche Lösung existirt. Da indessen zum leichten Verständnisse denselben einige Uebung in der projectiven Geometrie des Raumes gehört, auch der Fall, dass die drei Diagonalen durch einen Punkt laufen, hierbei besonders behandelt werden müsste, so ziehen wir ein Verfahren vor, welches sich auch dem bei der wirklichen Zeichnung des Kräfteplanes zu befolgenden Gedankengange anschliesst.

Wir können uns offenbar jeden Stab des Fachwerks entfernt denken, wenn wir ihn durch zwei in seinen Endpunkten angreifende und der in ihm herrschenden Spannung entsprechende entgegengesetzt gleiche Kräfte ersetzen. Denken wir uns dann das Fachwerk durch Hinzufügung eines idealen Stabes befestigt, so können wir unserem Probleme auch die Fassung geben: Die in den Endpunkten des zu entfernenden Stabes anzubringenden Kräfte ihrer Grösse und ihrem Sinne nach so zu bestimmen, dass sie mit dem gegebenen Kräftesysteme zusammen in dem idealen Stabe die Spannung Null hervorrufen;* denn dann kann man den idealen Stab wieder vernachlässigen. Dies Problem können wir aber in zwei Theile zerlegen: Man bestimme zuerst die von dem gegebenen Kräftesysteme herrührende Spannung in dem idealen Stabe, dann die von irgend zwei in dem entfernten Stabe wirkenden und entgegengesetzt gleichen Kräften in dem idealen Stabe hervorgerufene Spannung; die Bestimmung der in dem entfernten Stabe wirkenden Kräfte entsprechend der Forderung unseres Problems bedarf dann nur noch der Aufsuchung einer vierten Proportionale. Denn die von den beiden Kräftesystemen für sich hervorgerufenen Spannungen summiren sich ja bei ihrer gleichzeitigen Wirkung, und die durch die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte hervorgerufenen Spannungen ändern sich diesen proportional. Die Aufgabe wird offenbar nur dann eine

* Siehe Henneberg: „Statik der starren Systeme“, Darmstadt 1886, S. 228 fig.

unbestimmte oder liefert nur unendliche Lösungen, wenn die Spannung in dem idealen Stabe bei jeder Grösse der Kräfte in dem entfernten Stabe Null wird.

In unserem Falle entfernen wir den Stab P_1P_4 und fügen den idealen Stab P_2P_6 ein, so dass nur noch der ideale Knotenpunkt B übrig bleibt. Die zu dem gegebenen Kräftesysteme gehörige räumliche Figur ist ja unmittelbar bekannt; denn B' muss hier in der Ebene $P'_3P'_4P'_5$ liegen. Zu dem zweiten Kräftesysteme s und $-s$, das in P_1P_4 wirkt, möge das Kräftepolygon $T'_0T'_1T'_0$ gehören; dann können wir s' und t' beliebig über s und $T'_0T'_1$ annehmen, wodurch auch T'_0 und T'_1 bestimmt sind. Nuncmehr liegen P'_1, P'_2, P'_3 und P'_4 in der Nullebene $[T'_0s']$ von $T'_0, P'_4, P'_5, P'_6, P'_1$ in der Nullebene $[T'_1s']$ von T'_1 und B' wieder in der Ebene $P'_3P'_4P'_5$. In dem idealen Stabe P_2P_6 wird offenbar dann und nur dann die Spannung Null resultiren, wenn die beiden Ebenen $P'_6P'_1P'_2$ und $P'_2B'P'_6$ zusammenfallen, das heisst B' in der Schnittlinie der beiden Ebenen $P'_6P'_1P'_2$ und $P'_3P'_4P'_5$ oder in der Verbindungslinie der beiden Punkte $\alpha' = (P'_1P'_2, P'_3P'_4)$ und $\gamma' = (P'_4P'_5, P'_6P'_1)$ liegt. Dann würden aber auch die drei Punkte $\alpha = (P_1P_2, P_4P_3), B = (P_2P_5, P_3P_6)$ und $\gamma = (P_5P_4, P_6P_1)$ in einer Geraden liegen, das Sechseck $P_1P_2P_5P_4P_3P_6$ also wäre ein Pascal'sches, die gegebenen sechs Knotenpunkte müssten auf einem Kegelschnitte liegen.* Liegen umgekehrt die sechs Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte, α, B, γ also in einer Geraden, so liegt B' in der Geraden $\alpha'\gamma'$ oder in der Ebene $P'_6P'_1P'_2$, es wird also in dem idealen Stabe P_2P_6 , welche Grösse auch s haben mag, stets die Spannung Null resultiren. Ist daher das gegebene Kräftesystem nicht so beschaffen, dass es ebenfalls in P_2P_6 die Spannung Null hervorruft, so ruft es in dem ursprünglichen Fachwerke unendliche Spannungen hervor. Liegen die sechs Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte, so ist demnach unser Fachwerk im Allgemeinen unbrauchbar.

Diese Beispiele werden genügen, zu zeigen, wie der Cremona'sche Gedanke dazu benutzt werden kann, um die statische Bestimmtheit oder Brauchbarkeit gegebener Fachwerke zu untersuchen, und die Benutzung des Nullsystems bei der Construction von Kräfteplänen erhält hierdurch den Charakter einer allgemeinen Methode.

* Vergl. z. B. Müller-Breslau: „Die graphische Statik der Bauconstructionen“, 2. Aufl., Bd. I S. 208 fig. Leipzig 1887.

Kleinere Mittheilungen.

I. Zur Perspective des Kreises.

Bezeichnet (Fig. 1) oh den Augenpunkt, gh den Distanzpunkt, xy einen Punkt der Grundebene und $\xi\eta$ dessen Perspectivbild, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

$$(h - \eta)x = h\xi,$$

$$(h - \eta)y = g\eta;$$

dem Kreise $x^2 + (y - b)^2 = r^2$

entspricht hiernach der Kegelschnitt

$$h^2\xi^2 + [(b + g)^2 - r^2]\eta^2 + 2h[r^2 - b(b + g)]\eta + (b^2 - r^2)h^2 = 0,$$

welcher für $h^2 = (b + g)^2 - r^2$

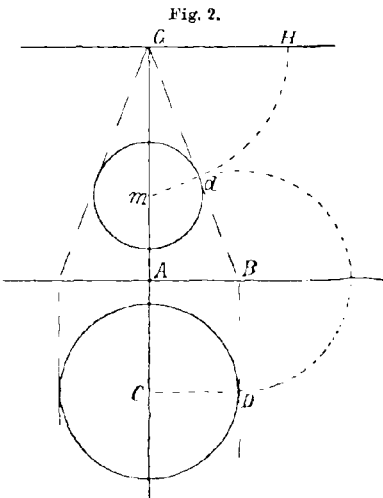
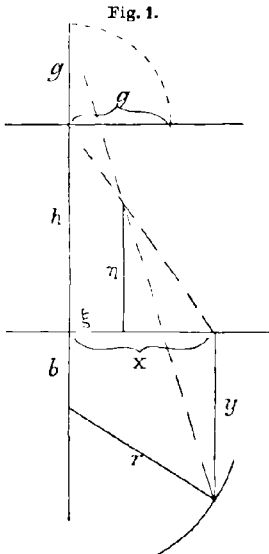
oder $g = \sqrt{h^2 + r^2} - b$

zu einem Kreise wird. Die zugehörige Construction zeigt Figur 2, worin $AC = b$, $AB = CD = r$ und AG die beliebig gewählte Augenhöhe bedeutet; schneidet man nämlich auf BG die Strecke $Bd = BD$ ab und nimmt $GH = Gd$, so ist H der Distanzpunkt.

An dieses mehrfach behandelte kleine Problem knüpft sich die, wie es scheint, neue Frage, ob zwei gegebene, aus den Mittelpunkten C_1 und C_2 mit den Radien $C_1D_1 = r_1$ und $C_2D_2 = r_2$ beschriebene Kreise (Fig. 3) so projectirt werden können, dass die beiden Perspectivbilder gleichzeitig Kreise sind.

Zunächst möge an den Satz erinnert sein: Bezeichnet E den Durchschnitt der Centrale C_1C_2 mit der Potenzlinie beider Kreise und ist

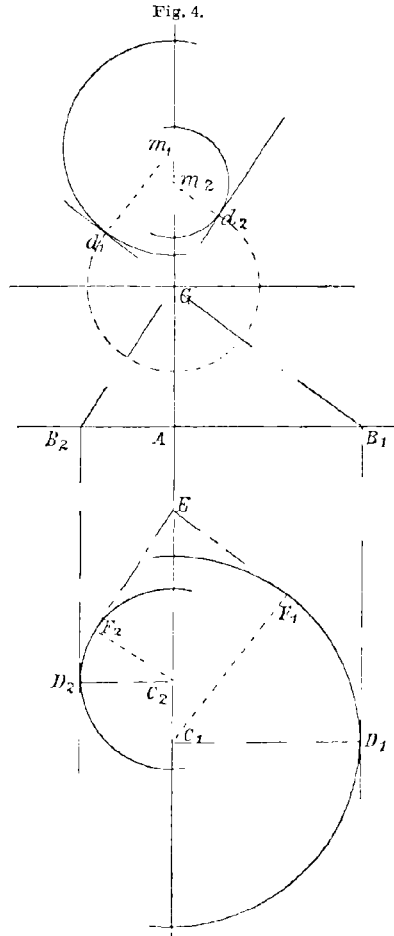
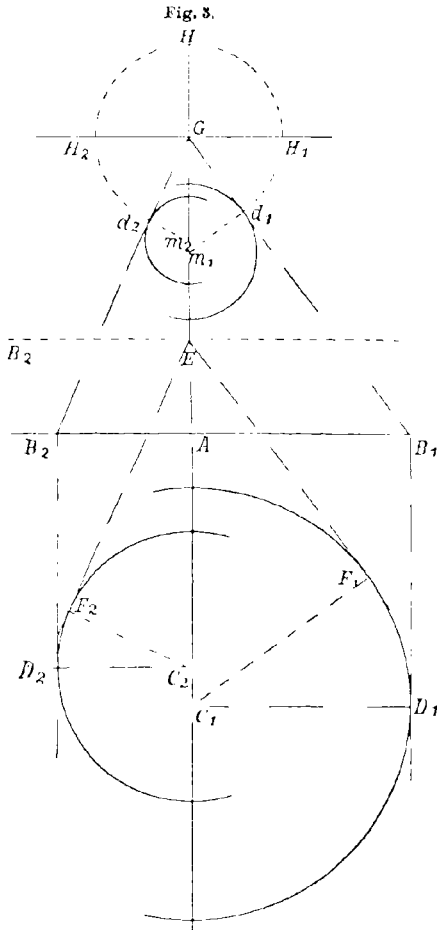
$C_1C_2 = c$, $C_1E = e_1$, $C_2E = e_2$, so bestehen die Formeln:



$$e_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + c^2}{2c}, \quad e_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2 - c^2}{2c},$$

und die Kreistangenten EF_1, EF_2 haben den gemeinschaftlichen Werth:

$$f = \sqrt{e_1^2 - r_1^2} = \sqrt{e_2^2 - r_2^2}.$$



Um nun die Augenhöhe $AG = h$ und die Distanz zu ermitteln, setze man, dem anfangs Gesagten analog, $AC_1 = B_1D_1 = b_1$, $AC_2 = B_2D_2 = b_2$ und beachte, dass jetzt die Bedingung

$$g = \sqrt{h^2 + r_1^2} - b_1 = \sqrt{h^2 + r_2^2} - b_2$$

zu erfüllen ist. Hieraus folgt wegen $b_1 - b_2 = c$:

mithin: $r_1^2 - r_2^2 - c^2 = 2c\sqrt{h^2 + r_2^2}$, das ist $2ce_2 = 2c\sqrt{h^2 + r_2^2}$,

und schliesslich: $h^2 = e_2^2 - r_2^2 = f^2$ oder $h = f$

$$g = e_2 - b_2 = e_1 - b_1.$$

Dies giebt die Construction (Fig. 3): man bestimme zunächst den Punkt E , lege die Grundlinie durch einen beliebigen Punkt A der Geraden C_1E senkrecht zu letzterer und nehme die Strecke $AG = EF_1 = EF_2$; dann ist G der Augenpunkt. Der zugehörige Distanzpunkt findet sich dadurch, dass man auf B_1G und B_2G die Strecken $B_1d_1 = B_1D_1$, $B_2d_2 = B_2D_2$ abschneidet; die Reste Gd_1 und Gd_2 sind dann gleich und geben die Distanz GH_1 oder GH_2 , so dass der Horizont die Potenzlinie der beiden Perspectivbilder ist. Nimmt man $GH = GH_1$ senkrecht zu GH_1 , so ist H das in die Bildebene aufgeklappte Projectionscentrum.

In dem speciellen Falle, wo A auf E gelegt wird, schrumpfen die beiden Kreisbilder zu Punkten zusammen; für $C_1A > C_1E$ erhalten die Kreisprojectionen die entgegengesetzte Lage (Fig. 4).

Zu der durch E gehenden Potenzlinie gehören bekanntlich nicht nur die ursprünglichen zwei, sondern unendlich viele Kreise; diesem Kreisbüschel entspricht im Bilde wieder eine Schaar von Kreisen, von denen der Horizont die gemeinschaftliche Potenzlinie ist. Daran würden sich noch manche collineare Beziehungen knüpfen lassen.

SCHLÖMILCH.

II. Constructionen der Krümmungsmittelpunkte von Kegelschnitten.

1. Die Tangenten in den Schnittpunkten einer Geraden mit einer Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitte umhüllen eine Parabel, welche die Gerade berührt.

Besteht die Schaar aus Ellipsen, so projicire man sie als concentrische Kreise. Die Normalen in den Schnittpunkten mit der Geraden gehen sämtlich durch den Mittelpunkt, folglich umhüllen ihre zugehörigen Tangenten eine Parabel, welche die Gerade berührt. Somit umhüllen auch die Tangenten in den Schnittpunkten der Ellipsenschaar eine Parabel, welche die schneidende Gerade berührt. Da diese Eigenschaft projectivisch ist, so wird sie auch für eine Hyperbelschaar gelten.

2. Die Normalen in den Schnittpunkten einer Geraden mit einer Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitte umhüllen eine Parabel, welche die Gerade, sowie die Hauptachsen der Schaar berührt.

Mau polarisire die Tangentenparabel in Bezug auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Brennpunkt O der Parabel liegt, so ist die Polarfigur ein Kreis, auf dem die Pole P der sämtlichen Tangenten, unter diesen insbesondere der Pol A der Schnittgeraden, sowie der Brennpunkt O liegen. Die Pole Q der Normalen liegen in den Schnittpunkten der auf den Strahlen OP in O errichteten Senkrechten mit den Strahlen AP . Da nun, die Strahlbüschel $O(Q)$ und $A(P)$ projectivisch sind, nämlich beide congruent

dem Strahlbüschel $O(P)$, so liegen ihre Schnittpunkte Q auf einem Kegelschnitt, der durch O und A geht und durch Rückpolarisirung eine Parabel ergibt, welche die Schnittgerade berührt und den Brennpunkt O hat. Endlich befinden sich unter den Normalen, welche die Parabel umbüllen, auch die Hauptachsen der Kegelschnittschaar, als Normalen von Kegelschnitten in den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit den Hauptachsen.

Eine nähere Betrachtung der beiden Umbüllungsparabeln der Tangenten und der Normalen ergibt manche sehr bemerkenswerthe Eigenschaften der Kegelschnitte, auf die jedoch hier nicht weiter eingetreten wird. Es sei nur noch angemerkt, dass die Achsen der beiden Parabeln auf einander senkrecht stehen.

3. Greift man einen Kegelschnitt der Schaar heraus, so erhält man aus 2. den Satz:

In einem Kegelschnitt umhüllt eine Secante mit den Normalen des Kegelschnitts in ihren Schnittpunkten und mit den beiden Hauptachsen eine Parabel.

Lässt man endlich die Secante in eine Tangente übergehen, so geht der Schnittpunkt der beiden zusammenfallenden Normalen in den Krümmungsmittelpunkt über und wird zugleich ihr Berührungspunkt mit der Parabel. Demnach:

Die Parabel, welche die Tangente und die Normale eines Kegelschnittpunktes nebst den Hauptachsen umhüllt, berührt die Normale im Krümmungsmittelpunkt, der zum Kegelschnittpunkt gehört. Der Durchmesser des Kegelschnittpunktes ist Leitlinie der Parabel.

Betrachtet man daher die Tangente und die Normale nebst den beiden Hauptachsen und der unendlich entfernten Geraden als ein der Parabel umgeschriebenes Fünfeck, so liefert der Brianchon'sche Satz sofort mehrere Constructionen des Krümmungsmittelpunktes, je nach der Anordnung dieser fünf Geraden zu einem Fünfeck. Bei jeder dieser Constructionen sind lediglich drei Gerade zu ziehen, nämlich je eine Parallele zu zwei jener Geraden und eine Verbindungsgerade.

Es sei nur die eine Construction erwähnt: Aus dem Schnittpunkt der Normalen mit einer Hauptachse ziehe man die Parallele zur Tangente und aus dem Schnittpunkt derselben mit dem Durchmesser des Kegelschnittpunktes die Parallele zur anderen Hauptachse, so wird die Normale von ihr im Krümmungsmittelpunkt getroffen.

Basel, 16. November 1894.

Prof. KINKELIN.

III. Der Bunsenbrenner.

In Kirchhoff's „Vorlesungen über die Theorie der Wärme“, herausgegeben im Jahre 1894 von Planck, findet sich als Beispiel (XII, § 4) die Bunsenlampe erwähnt neben der Wasserstrahlpumpe, als ob bei ihr auch die Dichte des strömenden Agens

$$\mu_1 = 1$$

wäre.

Dieses Versehen wäre unbedeutend und würde von jedem aufmerksamen Leser sogleich corrigirt werden. Allein im nächstfolgenden § 5 wird als zweites (und letztes) Beispiel der Anwendung diese Lampe ausführlich, soweit dies bei Kirchhoff denkbar ist, behandelt (eine Druckseite als Schluss von XII) und unter den Resultaten

$$u_1 = \sqrt{2(p_1 - p_0)} \cdot (1 + \alpha)$$

verzeichnet für die Ausflussgeschwindigkeit des Gases aus dem Gasbehälter vom Drucke p_1 , wo p_0 den Luftdruck und α eine kleine Grösse bedeutet, nämlich das Verhältniss $q_1 : q_0$ der Ausflussöffnung des Gases zur Einflussöffnung der atmosphärischen Luft.

Sieht man von α einstweilen ab und bezeichnet dafür (mit Kirchhoff) den vor der Oeffnung q_1 stattfindenden Druck, der kleiner als p_0 ist, mit p'_1 , so käme

$$u_1 = \sqrt{2(p_1 - p'_1)},$$

was aber offenbar gemäss der bekannten Torricelli'schen Formel heissen sollte:

$$u_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{(p_1 - p'_1)}{\mu}}.$$

Ist z. B. p_1 gleich einer Atmosphäre oder rund $1000 \cdot 1000 \frac{\text{Gramm}}{\text{Centim.}^3}$, so ist $\mu_1 = \frac{1}{770.2} \frac{\text{Gramm}}{\text{Centim.}^3}$, da das Leuchtgas ungefähr halbmal so schwer ist, als die Luft. In den luftleeren Raum (wenn p'_1 gleich Null wäre) strömt also das Leuchtgas stationär über mit der Geschwindigkeit ungefähr 560 Meter in der Secunde.

Soviel wird genügen, um das Bedürfniss nach Ersatz der an den genannten Stellen mitgetheilten Formeln durch richtigere zu rechtfertigen. Ich werde mich hierbei zwar an den unmittelbar voranstehenden § 3 mit seinen Bezeichnungen halten, aber dennoch die Darstellung so fassen, dass sie auch allein, ohne Benutzung jenes Buches, verständlich wird.

1)

$$q_0 u_0 u_0 + q_1 \mu_1 u_1 = q_2 \mu_2 u_2$$

besagt, dass in dem Raume vor q_1 , in welchem die Gas- und Luftmischung geschieht, soviel von beiden Stoffen ein- als in der gleichen Zeit auströmt; μ_0 ist in unserem Falle die Dichte der atmosphärischen Luft, welcher gegenüber ich vorhin μ_1 als halb so gross angeführt habe; μ_2 ist die Dichte des Gemisches.

$$2) \quad q_0 \mu_0 u_0^2 + q_1 \mu_1 u_1^2 - q_2 \mu_2 u_2^2 + q_0 p'_0 + q_1 p'_1 - q_2 p'_2 = 0$$

entspricht in der elementaren Mechanik der Gleichung von Bewegungsgrösse und Zeitwirkung der Kraft beim Ein- und Austritte in den Mischungsraum. Denn die indizirten Drücke, von denen p'_1 schon oben erwähnt wurde, wirken als Ergänzung zu den Bewegungsgrössen. Um da von Bewegungsgrösse und Zeitwirkung der Kraft reden zu können, darf man nur jedes der drei u^2 zerlegen in $u \cdot \frac{s}{t}$ und mit dem gleichen t die ganze Gleichung 2) multipliciren.

$$3) \quad p'_2 = p_2$$

gilt, wie bei der Dampfstrahlpumpe a. a. O., auch für unsere Lampe.

$$4) \quad p'_1 = p'_0$$

desgleichen. (Die im Buche unmittelbar vorangeschickte $q_0 + q_1 = q_2$ gilt hier nicht, oder wäre wenigstens eine unnöthige Beschränkung; sie ist meines Erachtens auch dort zur Begründung von 4) nicht nöthig.)

$$5) \quad \mu_1 u_1^2 = 2(p_1 - p'_1),$$

$$6) \quad \mu_0 u_0^2 = 2(p_0 - p'_0)$$

sind die schon berührten Gleichungen der lebendigen Kraft beziehungsweise für das Gas und die einströmende Luft (Toricellis Gesetz).

Ueberdies gilt bei der Bunsenlampe speciell

$$p_0 = p_2.$$

Demnach reduciren sich die sechs Gleichungen auf die vier folgenden:

1) bleibt; 2) wird zu

$$2^*) \quad q_0 \mu_0 u_0^2 + q_1 \mu_1 u_1^2 - q_2 \mu_2 u_2^2 + (q_0 + q_1) p'_1 - q_2 p_0 = 0;$$

3) und 4) sind schon benutzt, wie auch $p_0 = p_2$; 5) bleibt und 6) wird zu

$$6^*) \quad \mu_0 u_0^2 = 2(p_0 - p'_1).$$

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich $u_0 u_1 u_2$ und p'_1 bestimmen.

Wie am Schlusse von § 4 und von § 5 erwähnt wird, müssen die gefundenen Geschwindigkeiten $u_0 u_1 u_2$ der Ungleichung

$$p_0 q_0 u_0 + p_1 q_1 u_1 - p_2 q_2 u_2 > 0$$

entsprechen, weil durch Reibung etc. ein Theil der Arbeit (in der Zeiteinheit) im Mischungsraum verloren geht.

Die Gleichung 2) oder 2*) erinnert an die eine der beiden Gleichungen des Stosses unelastischer wie elastischer Körper, die von den Bewegungsgrössen handelt, die letzte Ungleichung an die zweite Gleichung des elementaren Stosses elastischer Körper, wobei man so häufig die auf Erwärmung und bleibende Formänderung verwandte lebendige Kraft ausser Acht lässt, was beim Stosse der unelastischen Körper von vornherein als

unthunlich sich zeigt. Bei letzterem Stosse bedarf man auch keiner zweiten Gleichung, da die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stosse schon aus der ersten Gleichung sich ergibt (siehe „Physikalisches Repertorium“ 1890 S. 146 und 1883 S. 338).

Ich will nun auch noch die vier Gleichungen zu einer numerischen Anwendung benutzen. Ein älterer Bunsenbrenner mit zwei Luftlöchern von je neun Millimeter Durchmesser (bei neueren sind diese kleiner) hat als Gasöffnung nicht viel mehr als einen Millimeter Durchmesser, als Ausströmungsöffnung für das Gemisch auch eine solche mit neun Millimeter Durchmesser. Deshalb wird die erste Gleichung, mit Weglassung des gemeinsamen Factors $\frac{\pi}{400 \mu_0}$, nahezu

$$1^*) \quad 160 u_0 + \frac{1}{2} u_1 = 80 u_2 \frac{\text{Gramm}}{\text{Secunde}},$$

wenn, wie oben, die relative Gasdichte zur Luft wie 1 zu 2 angenommen wird und μ_2 nahe gleich μ_0 gilt. Es entspricht dies auch der Thatsache, dass die angesaugte Luft stets im Ueberschuss vorhanden ist (siehe auch das am Anfange des gegenwärtigen Absatzes über die Querschnitte Gesagte).

In der weiter oben stehenden Gleichung 2*) können wir alsdann q_1 , wo es als Summand neben q_0 steht, weglassen, und dieselbe heisst jetzt, nach Kürzung mit dem gemeinsamen Factor $\frac{\pi}{400}$:

$$2^{**}) \quad 160 u_0^2 + \frac{1}{2} u_1^2 = 80 u_2^2 - 160 \frac{p'_1}{\mu_0} + 80 \frac{p_0}{\mu_0}.$$

Die Gleichung 5) wird jetzt

$$5^*) \quad u_1^2 = 4 \cdot \frac{p_1 - p'_1}{\mu_0},$$

und

$$6^*) \quad u_0^2 = 2 \cdot \frac{p_0 - p'_1}{\mu_0}.$$

Diese vier Gleichungen zur Bestimmung von u_0, u_1, u_2, p'_1 liefern: die erste angenähert, mit Weglassung des zweiten Gliedes,

$$2 u_0 = u_2;$$

ferner die dritte und vierte, wenn man vorerst von dem geringen Unterschiede zwischen p_0 und p_1 , der in der Wirklichkeit wenige Centimeter Wasser beträgt, absieht, $2 u_0^2 = u_1^2$.

Nun für u_2 und u_1 in der zweiten Gleichung u_0 eingeführt, wobei vorerst auch das zweite Glied wegen seiner Kleinheit wegfällt, dann wird aus ihr

$$0 = u_0^2 - \frac{p'_1}{\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{p_0}{\mu_0};$$

und 6*) kann man schreiben:

$$0 = u_0^2 + \frac{2 p'_1}{\mu_0} - 2 \frac{p_0}{\mu_0}.$$

Durch Subtraction findet man

$$p'_1 = \frac{5}{6} p_0 = \frac{5}{6}$$

Atmosphäre als Druck im Mischungsraum. Alsdann:

$$u_0^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{p_0}{\mu_0}, \quad u_1^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{p_0}{\mu_0}, \quad u_2^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{p_0}{\mu_0},$$

oder

$$u_0 = 16000, \quad u_1 = 23000, \quad u_2 = 32000 \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunde}}$$

für die Geschwindigkeiten, nämlich der Ansaugung der Luft, des Uebertritts vom Leuchtgas in den Mischungsraum und des Austritts des Gasgemisches in die freie Atmosphäre.

In der weiter oben stehenden Ungleichung, welche auf 6*) folgte, lassen wir die p und ebenfalls das zweite Glied weg und finden

$$16.16 - 8.32 = 0;$$

aber mit Hinzufügung des zweiten Gliedes wird doch die linke Seite grösser als Null, das ist „die nothwendige Bedingung dafür, dass eine Bewegung unseren Gleichungen gemäss möglich ist“.

Zweite Annäherung: Ich führe in die vier letzten Gleichungen, die zur Bestimmung von $u_0 u_1 u_2 p'_1$ benutzt wurden, die Correcturglieder du_0, du_1, du_2, dp'_1 ein und erhalte:

$$1') \quad 160 du_0 + \frac{1}{2} du_1 - 80 du_2 = -\frac{1}{2} \cdot 23000,$$

$$2') \quad 320.16000 du_0 + 23000 du_1 - 160.32000 du_2 = -\frac{1}{2} \cdot 23000^2 - 160 \frac{dp'_1}{\mu_0},$$

$$5') \quad 23000 du_1 = 2 \cdot \frac{1}{250} \frac{p_0}{\mu_0} - 2 \frac{dp'_1}{\mu_0},$$

$$6') \quad 16000 du_0 = -\frac{dp'_1}{\mu_0}.$$

Dabei ist in der vorletzten Gleichung angenommen worden, dass sich der Druck p_1 im Gasbehälter um vier Centimeter Wasser höher stellt, als der Luftdruck in der freien Atmosphäre, das ist um nahe $\frac{1}{250}$ Atmosphäre, so dass das erste Glied der rechten Seite wird:

$$2 \cdot \frac{770}{250} \cdot 10^6,$$

oder nahe $6 \cdot 10^6$.

Es entsteht also aus den beiden letzten Gleichungen durch Elimination von dp'_1

$$-32000 du_0 + 23000 du_1 = 6 \cdot 10^6,$$

woraus

$$du_1 = 260 + 1,4 du_0.$$

Dies in 1') eingesetzt, mit Weglassung von $0,7 du_0$ gegen $160 du_0$, so wird aus 1')

$$16 du_0 - 8 du_2 = -1163;$$

und, wenn man $\frac{dp'_1}{u_0}$ gemäss 6') und du_1 gemäss der vorletzten Gleichung in 2') eliminirt, dann wird aus 2'):

$$2592 du_0 - 5120 du_2 = - 27050.$$

Aus diesen beiden Gleichungen fand ich zunächst

$$du_0 = - 62,$$

dann

$$du_2 = + 21,$$

und durch Einsetzen von du_0

$$du_1 = + 173,$$

und aus 6')

$$dp'_1 = 1300,$$

das ist von 10^6 oder einer Atmosphäre der nahe 800. Theil.

Demnach sind die verbesserten Werthe:

$$u_0 = 15940, \quad u_1 = 23170, \quad u_2 = 32020, \quad p'_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{800} \text{ Atmosphäre,}$$

welche von den früheren so wenig abweichen, dass man angesichts der Näherung überhaupt, die man bei solchen Problemen vor sich hat, ganz gut die früheren Werthe belassen kann. Diese erscheinen aber jetzt durch die zweite Annäherungsrechnung gewissermassen gestützt.

Zusatz 1. Auch die Verhältnisse der Querschnitte sind, wie schon gesagt, oft derart, dass $q_0 : q_2$ nicht gleich 2 ist, wie in obiger Rechnung angenommen wurde, sondern z. B. etwas über 1, etwa $1\frac{1}{4}$, was zu einem neuen Rechenbeispiele Veranlassung geben könnte. Dagegen ist q_1 an einem anderen Brenner zwar nicht der 80. Theil wie oben, so doch der 60. Theil von q_2 , also ein noch kleinerer Theil von q_0 .

Zusatz 2. Die sechserlei Drücke $p_0 p_1 p_2 p'_0 p'_1 p'_2$ rühren von der Anlehnung an Kirchhoff's Formeln her, die, wie im Eingange gesagt wurde, zunächst anderen Untersuchungen als der obigen dienen sollten; für den Bunsenbrenner würden von vornherein $p_0 p_1 p'_1$ genügt haben, wie aus den von mir besonders numerirten Gleichungen hervorgeht.

Anmerkung. Ich benutze diese Gelegenheit, um einige inzwischen wahrgenommenen Korrekturen meiner Abhandlungen vom vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift beizufügen:

S. 126 Z. 14 u. 15 von unten muss α stehen statt β , was weiter keinen Eintrag thut. Dagegen werde ich bei einer künftigen Gelegenheit zeigen, dass es bei Clausius und Kirchhoff IX für c bzw. h des Wassers gegenüber dem Eise 0,959 heissen soll statt 0,945, wie auch auf meiner Seite 126 steht.

S. 191 Z. 9 von unten muss statt des zweiten D stehen $\frac{1}{2} D$, was im Uebrigen schon berücksichtigt ist.

Prof. Dr. KURZ.

V.

Homocentrische Brechung des Lichtes durch das Prisma.

Von

Dr. L. BURMESTER,

Professor an der Technischen Hochschule in München

Hierzu Tafel II und III Figur 1—14.

I. Vorbemerkungen.

Bei der viel behandelten Brechung des Lichtes durch das Prisma wurde der homocentrische Durchgang der Strahlen noch nicht untersucht. Es hat sich die unrichtige Ansicht erhalten, dass bei einem einfallenden unendlich dünnen Strahlenbündel, dessen Strahlen von einem beliebigen Punkt ausgehen oder nach demselben gerichtet sind, nach dem Durchgange durch ein Prisma sich in einem Punkte nicht wieder vereinigen können. Nur in dem besonderen Fall, in welchem der Durchgang der Strahlen im Minimum der Ablenkung erfolgt, und so dicht an der brechenden Kante, dass die Strahlenlänge im Prisma als unendlich klein betrachtet werden kann, ist die Vereinigung der austretenden Strahlen erkannt; aber dieser Durchgang hat nur als Grenzfall geometrische Bedeutung.

Wir werden in dieser Abhandlung beweisen, dass bei der Brechung der Strahlen durch ein Prisma jedem Punkt, von dem die Strahlen eines bestimmten unendlich dünnen Strahlenbündels ausgehen oder nach dem sie gerichtet sind, wieder ein Punkt entspricht, durch den die entsprechenden austretenden Strahlen gehen, und dass dies auch bei beliebig vielen Prismen gilt, deren brechenden Kanten parallel sind.

Jene unrichtige Ansicht ist entstanden, weil Helmholtz* zur Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen für den Durchgang der Lichtstrahlen durch ein Prisma die Strahlenlänge im Prisma vernachlässigte gegen die Strahlenlänge von dem leuchtenden Punkt bis zum Prisma.

* H. Helmholtz: „Physiologische Optik.“ 1867. S. 243; dessen „Wissenschaftliche Abhandlungen.“ 1883. Bd. II. S. 164.

Zuerst wollen wir die bekannten Beziehungen erwähnen, die bei der Strahlenbrechung aus einem Medium in ein anderes bestehen, um diese Beziehungen bei den nachfolgenden Betrachtungen zu verwenden.

In Figur 1 (Taf. II) ist die Trennungsebene E zweier Medien durch die Gerade E dargestellt. Tritt ein Lichtstrahl l im Punkt Ω aus dem einen Medium in das andere brechende Medium, dann ist der gebrochene Strahl λ durch das Brechungsgesetz bestimmt. Ziehen wir durch Ω auf die Trennungsebene E das Loth NN ; setzen wir den Einfallswinkel $\angle \Omega N = e$, den Brechungswinkel $\angle \Omega N = \varepsilon$ und den Brechungsindex gleich n , so ist

$$1) \quad \frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = n$$

und die Strahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$ liegen mit dem Lothe in einer Ebene, die Einfallsebene genannt wird.

Hiernach erhalten wir zu einem beliebigen Strahl $l\Omega$ den gebrochenen Strahl $\Omega\lambda$, wenn wir um Ω zwei Kreise k , κ beschreiben, deren Radien ΩH , ΩH sich wie $1 : n$ verhalten und durch den Punkt H die Senkrechte HH auf E ziehen, dann geht der Strahl $\Omega\lambda$ durch den Punkt H . Ist umgekehrt der Strahl $\Omega\lambda$ gegeben, so ziehen wir durch den Punkt H die Senkrechte HH auf E , und der Strahl $l\Omega$ geht dann durch den Punkt H .

Nehmen wir an, dass in Figur 1 durch einen Punkt A des Strahles $a\Theta$, der die Trennungsebene E im Punkt Θ trifft, unendlich viele Strahlen gehen, die mit dem Strahl $a\Theta$ ringsherum unendlich kleine Winkel bilden, dann wird die Gesamtheit dieser Strahlen ein unendlich dünnes centrales Strahlenbündel und der Strahl $a\Theta$ der Hauptstrahl desselben genannt. Die entsprechenden gebrochenen Strahlen gehen, wie die geometrische Optik gelehrt hat, durch zwei Gerade, Brennlinien, von denen die eine in einem Punkt A_1 des gebrochenen Strahles $\Theta\alpha$ senkrecht auf der Einfallsebene $a\Theta\alpha$ steht, und die andere die in der Einfallsebene liegende Gerade AA_2 ist und auf der Trennungsebene E senkrecht steht. Dieses von den gebrochenen Strahlen gebildetes, unendlich dünnes Strahlenbündel wird ein astigmatisches Strahlenbündel und der Strahl $\Theta\alpha$ der Hauptstrahl desselben genannt.

Die Schnittpunkte A_1 , A_2 dieses Hauptstrahles mit der zur Einfallsebene senkrechten Brennlinie und mit der in der Einfallsebene liegenden zur Trennungsebene senkrechten Brennlinie AA_2 heissen resp. der erste Brennpunkt und der zweite Brennpunkt. Wenn aber angenommen wird, dass sich in einem Punkt O des Hauptstrahles $\Theta\alpha$ ein Auge befindet, welches nach diesen Punkten schaut, dann werden die Punkte A_1 , A_2 auch der erste Bildpunkt und der zweite Bildpunkt des Punktes A genannt. Die im Punkt A_1 auf der Einfallsebene senkrechte Brennlinie heisst die erste Brennlinie und die andere in der Einfallsebene befindliche Brennlinie heisst die zweite Brennlinie. Die beiden

senkrechten Ebenen, welche durch den Hauptstrahl $\Theta \alpha$ gehen und diese Brennlinsen enthalten, werden resp. die erste und die zweite Brennebene genannt. Die zweite Brennebene ist also identisch mit der Einfallsebene und die erste Brennebene ist senkrecht auf derselben.

Wir wollen einen Punkt, von dem die einfallenden Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels ausgehen oder nach dem dieselben gerichtet sind, einen Lichtpunkt nennen. Befindet sich der Punkt im Medium der einfallenden Strahlen, dann ist er ein wirklicher Lichtpunkt; befindet er sich im Medium der gebrochenen Strahlen, dann ist er ein virtueller Lichtpunkt.

Geht von einem Lichtpunkt ein sehr dünnes Bündel homogener Lichtstrahlen aus, so wird ein in dem Hauptstrahl $\Theta \alpha$ befindliches Auge O mittelst eines auf den Punkt A_1 eingestellten Mikroskopes an der Stelle A_1 eine kurze Lichtlinie erblicken, die senkrecht zur Einfallsebene ist. Wird hierauf das Mikroskop mit dem Auge O verschoben auf den Punkt A_2 eingestellt, dann verschwindet diese Lichtlinie und es erscheint in senkrechter Richtung zu ihr eine andere kurze Brennlinie an der Stelle A_2 .

Der Abstand der beiden Bildpunkte A_1, A_2 heisst die homocentrische Differenz. Fallen diese beiden Bildpunkte in einem Punkt A_0 zusammen, ist also die homocentrische Differenz gleich Null, dann gehen alle gebrochenen Strahlen durch diesen Punkt A_0 , und das astigmatische Strahlenbündel geht in ein unendlich dünnes centrales Strahlenbündel über. Dem Punkt A entspricht dann ein homocentrischer Bildpunkt A_0 , das heisst ein eigentliches Bild.

II. Affine Beziehungen zwischen den Lichtpunkten und den Bildpunkten bei der Brechung paralleler Lichtstrahlen.

Gehen in Figur 2 von einem Punkt A die Strahlen eines einfallenden, unendlich dünnen Strahlenbündels aus, so entspricht demselben ein astigmatisches Strahlenbündel. Um den ersten Bildpunkt A_1 desselben zu bestimmen, nehmen wir einen in der Einfallsebene liegenden Strahl $A\Theta'$ an, der mit dem einfallenden Hauptstrahl $A\Theta$ einen unendlich kleinen Winkel $d\epsilon$ einschliesst. Der entsprechende gebrochene Strahl $\Theta'\alpha'$ schneidet dann im ersten Bildpunkt A_1 den gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$ und bildet mit diesem einen unendlich kleinen Winkel $d\epsilon$. Hiernach ist

$$\frac{d\epsilon}{\Theta\Theta'} = \frac{\cos \epsilon}{A\Theta}, \quad \frac{d\epsilon}{\Theta\Theta'} = \frac{\cos \epsilon}{A_1\Theta}$$

und

$$\frac{d\epsilon}{d\epsilon} = \frac{A_1\Theta \cdot \cos \epsilon}{A\Theta \cdot \cos \epsilon}$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\sin \epsilon = n \sin \epsilon$$

ergibt sich:

und demnach folgt

$$2) \quad \frac{A_1 \Theta}{A \Theta} = n \left(\frac{\cos \varepsilon}{\cos e} \right)^2$$

Hierdurch ist der erste Bildpunkt A_1 bestimmt. Da ferner der zweite Bildpunkt A_2 durch

$$3) \quad A_2 \Theta = n \cdot A \Theta$$

bestimmt ist, so erhalten wir

$$4) \quad \frac{A_1 \Theta}{A_2 \Theta} = \left(\frac{\cos \varepsilon}{\cos e} \right)^2$$

Der Fall $A_1 \Theta = A_2 \Theta$, bei welchem ein gebrochenes, unendlich dünnes centrales Strahlenbündel entsteht, tritt demnach nur dann ein, wenn der einfallende Strahl $A \Theta$ senkrecht zur Trennungsebene E ist. Nehmen wir in Figur 3 auf einem Hauptstrahl $a \Theta$ eine Reihe von Lichtpunkten $A A' A'' \dots$ an, denen die ersten Bildpunkte $A_1 A'_1 A''_1 \dots$ und die zweiten Bildpunkte $A_2 A'_2 A''_2 \dots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta \alpha$ entsprechen, so sind nach 2) die Verbindungsgeraden AA_1 , $A'A'_1$, $A''A''_1$ parallel und die Punktreihen $AA'A'' \dots$ und $A_1 A'_1 A''_1 \dots$ ähnlich. Ebenso sind auch die Punktreihen $AA'A'' \dots$ und $A_2 A'_2 A''_2 \dots$ ähnlich, weil die Verbindungsgeraden AA_2 , $A'A'_2$, $A''A''_2$, senkrecht zur Trennungsebene E und demnach parallel sind. Dasselbe gilt von den Punktreihen auf allen zu $a \Theta$ parallelen einfallenden Strahlen und den entsprechenden Punktreihen auf dem zugehörigen zu $\Theta \alpha$ parallelen Strahlen. Hiernach ist das in der Einfallsebene befindliche ebene System S der Lichtpunkte A , $A' \dots$ affin zu den System Σ_1 der ersten Bildpunkte A_1 , $A'_1 \dots$ und dem System Σ_2 der zweiten Bildpunkte A_2 , $A'_2 \dots$; folglich sind auch die Systeme Σ_1 , Σ_2 affin und die Gerade E ist für diese drei affinen Systeme Affinitätsachse.

Denken wir uns die betrachtete Einfallsebene mit den in ihr befindlichen parallelen Hauptstrahlen parallel zu sich selbst verlegt, dann erhalten wir statt jener ebenen affinen Systeme die räumlichen affinen Systeme S^r , Σ_1^r , Σ_2^r , für welche die Trennungsebene E die Affinitätsebene ist.

Sind in Figur 4 um den Punkt Ω die beiden Kreise κ , k beschrieben, so dass die Radion $\Omega \Lambda_1$, ΩH in dem Verhältniss $n : 1$ stehen, dann erhalten wir zu einem einfallenden Hauptstrahl $\Omega \Omega$, der den Kreis k im Punkt H schneidet, durch die zur E senkrechte Gerade HZ , welche den Kreis κ in dem Punkt Λ_1 trifft, den durch Λ_1 gehenden gebrochenen Hauptstrahl $\Omega \lambda$. Ziehen wir HG und $\Lambda_1 \Psi$ senkrecht auf das Einfallslot ΩN , ferner GF senkrecht auf $\Omega \Omega$ und $\Psi \Phi_1$ senkrecht auf $\Omega \lambda$, dann ist

$$\Omega F = \Omega H \cos^2 e, \quad \Omega \Phi_1 = \Omega \Lambda_1 \cos^2 \varepsilon,$$

und da

$$\Omega \Lambda_1 = n \cdot \Omega H$$

ist, so folgt

$$\frac{\Omega \Phi_1}{F \Omega} = n \left(\frac{\cos \varepsilon}{\cos e} \right)^2$$

Demnach sind in den beiden affinen Systemen S, Σ_1 die Punkte F, Φ_1 entsprechende Punkte. Betrachten wir F als einen Lichtpunkt auf dem Hauptstrahl Ω , so ist Φ_1 der entsprechende erste Bildpunkt auf dem Hauptstrahl $\Omega\lambda$. Zu einem beliebigen Lichtpunkt L' auf dem Hauptstrahl Ω ergibt sich hiernach der entsprechende erste Bildpunkt Λ'_1 auf dem Hauptstrahl $\Omega\lambda$ durch die Parallele $L'\Lambda'_1$ zu $F\Phi_1$. Umgekehrt erhalten wir zu dem ersten Bildpunkt Λ_1 den zugehörigen Lichtpunkt L durch die Parallele Λ_1L zu Φ_1F .

Eine andere Construction zweier entsprechender Punkte der affinen Systeme S, Σ_1 ergibt sich, wenn wir auf $\Lambda_1\Omega$ die Senkrechte Λ_1U errichten, welche die Gerade E im Punkt U schneidet, ferner die Gerade UH ziehen, die das Einfallslot ΩN im Punkt V trifft, und auf Ω die Senkrechte VL fällen. Dann entspricht dem Lichtpunkt L der erste Bildpunkt Λ_1 .

Um diese Construction zu beweisen, bezeichnen wir mit W den Schnittpunkt, welchen die auf $\Lambda_1\Omega$ Senkrechte $U\Lambda_1$ mit dem Einfallslot ΩN bildet. Es ist dann

$$\frac{\Omega \Lambda_1}{\Omega \Phi_1} = \frac{\Omega W}{\Omega \Psi} = \frac{\Omega W}{\Lambda_1 Z} = \frac{\Omega U}{ZU} = \frac{\Omega V}{\Omega G} = \frac{\Omega L}{\Omega F},$$

also

$$\frac{\Omega \Lambda_1}{\Omega L} = \frac{\Omega \Phi_1}{\Omega F}$$

und demnach ist $L\Lambda_1$ parallel $F\Phi_1$.

Die geometrische Optik lehrt, dass im Allgemeinen einem einfallenden astigmatischen Strahlenbündel wieder ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel entspricht.

Ist in Figur 5 ein einfallendes astigmatisches Strahlenbündel mit dem ersten und zweiten Bildpunkt A_1, A_2 auf dem Hauptstrahl $\alpha\Xi$ gegeben und ist die Einfallsebene die zweite Brennebene, dann entsteht ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel mit dem ersten und zweiten Bildpunkt $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ auf dem Hauptstrahl $\Xi\alpha$ und derselben zweiten Brennebene. Die vom ersten Bildpunkt A_1 ausgehenden Strahlen liegen in der Einfallsebene, sie werden also in derselben gebrochen und vereinigen sich in dem ersten Bildpunkt \mathfrak{A}_1 . Es besteht demnach zwischen A_1 und \mathfrak{A}_1 dieselbe Beziehung, wie in 2) zwischen A und A_1 . Die von dem zweiten Bildpunkt A_2 ausgehenden Strahlen liegen in der ersten Brennebene, die zur Einfallsebene senkrecht ist, und die gebrochenen Strahlen liegen in der zur Einfallsebene senkrechten, ersten Brennebene des gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels; sie vereinigen sich demnach in dem zweiten Bildpunkt \mathfrak{A}_2 und es ist die Gerade $A_2\mathfrak{A}_2$ zur Trennungsebene E senkrecht.

Nehmen wir nun beliebige viele solche einfallende astigmatische Strahlenbündel an, deren Hauptstrahlen parallel sind, dann ist das System Σ_1 der ersten Bildpunkte $A_1 \dots$ dem System \mathfrak{S}_1 der ersten Bildpunkte $\mathfrak{A}_1 \dots$ affin,

und diese beiden Systeme haben die Gerade E als Affinitätsachse. Ebenso ist das System Σ_2 der zweiten Bildpunkte $A_2 \dots$ dem System \mathfrak{S}_2 der zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}_2 \dots$ affin, und für diese beiden Systeme ist die Gerade E auch Affinitätsachse.

III. Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch das Prisma in der Normalebene desselben.

Wir nehmen in Figur 6 an, dass die Längskanten des Prismas senkrecht auf der Zeichnungsebene stehen und betrachten den Gang der Hauptstrahlen in der Zeichnungsebene, die also eine Normalebene des Prismas ist. Durch den Punkt Ω ist die brechende Kante und durch die Geraden ΩE_I , ΩE_{II} sind die Seitenflächen des Prismas gegeben, an denen die Brechung erfolgt. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die einfallenden Strahlen und die austretenden Strahlen sich in verschiedenen Medien befinden; und wir bezeichnen mit n_1 , n_2 die Brechungsindices an den Ebenen ΩE_I , ΩE_{II} gegen das Prisma.

Um zu einer gegebenen Richtung $l\Omega$ eines einfallenden Hauptstrahles die Richtung des im Prisma gebrochenen Hauptstrahles und die Richtung des austretenden Hauptstrahles zu construiren, verfahren wir in der bekannten Weise. Wir beschreiben um Ω die Kreise κ , h , i , deren Radien $\Omega\Lambda_1$, ΩH , ΩJ in dem Verhältniss

$$\Omega H : \Omega\Lambda_1 = 1 : n_1, \quad \Omega J : \Omega\Lambda_1 = 1 : n_2$$

stehen, ziehen $H\Lambda_1$ senkrecht ΩE und $\Lambda_1 J$ senkrecht ΩE_{II} . Dem in der Grenzlage befindlichen Hauptstrahl $l\Omega$, der das Prisma in der brechenden Kante trifft, entspricht geometrisch der durch Λ_1 bestimmte, im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\lambda\Omega$, dessen Strecke im Prisma als unendlich klein zu betrachten ist, und ferner der austretende Hauptstrahl $i\Omega$, der durch den Punkt J bestimmt ist.

Wenn nun ein beliebiger zu $l\Omega$ parallel einfallender Hauptstrahl $a\Theta$ gegeben ist, so ziehen wir $\Theta\Xi$ parallel $\lambda\Omega$ und Ξa parallel $i\Omega$; dann ist $\Theta\Xi$ der auch mit α bezeichnete Hauptstrahl im Prisma und Ξa der austretende Hauptstrahl.

Um zu dem Punkt Λ_1 auf $\lambda\Omega$ den entsprechenden Punkt L auf $i\Omega$ und ferner den entsprechenden Punkt \mathfrak{L}_1 auf $i\Omega$ zu erhalten, verfahren wir nach der S. 69 angegebenen zweiten Construction. Wir errichten in Λ_1 auf $\Lambda_1\Omega$ die Senkrechte, welche ΩE_I , ΩE_{II} resp. in den Punkten U_I , U_{II} schneidet, ziehen die Gerade $U_I H$, welche die auf ΩE_I senkrechte Gerade ΩV_I in V_I trifft, und analog die Gerade $U_{II} J$, welche die auf ΩE_{II} senkrechte Gerade ΩV_{II} in V_{II} trifft; dann ergeben sich durch $V_I L$ senkrecht $H\Omega$ und $V_{II} \mathfrak{L}_1$ senkrecht $J\Omega$ die Punkte L , \mathfrak{L}_1 . Befinden sich die einfallenden Strahlen und die austretenden Strahlen in demselben Medium, dann fallen die beiden Kreise h , i zusammen, und die Construction der Punkte L , \mathfrak{L}_1 bleibt dieselbe wie in dem allgemeinen Fall.

Nehmen wir auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ einen beliebigen Lichtpunkt A an, von dem ein unendlich dünnes Strahlenbündel ausgeht, dann entspricht demselben ein im Prisma gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel mit dem Hauptstrahl α . Ziehen wir AA_1 parallel $L\Lambda_1$ und AA_2 senkrecht ΩE_I , so erhalten wir auf dem Hauptstrahl α den entsprechenden ersten Bildpunkt A_1 und den entsprechenden zweiten Bildpunkt A_2 . Diesem astigmatischen Strahlenbündel entspricht ein austretendes astigmatisches Strahlenbündel mit dem Hauptstrahl $\Xi\alpha$. Auf diesem erhalten wir vermittelt der Parallelen $A_1\mathfrak{A}_1$ zu $\Lambda_1\mathfrak{L}_1$ und der Senkrechten $A_2\mathfrak{A}_2$ auf ΩE_{II} den ersten Bildpunkt \mathfrak{A}_1 und den zweiten Bildpunkt \mathfrak{A}_2 , welche dem Lichtpunkt A entsprechen. Eine Reihe von Lichtpunkten $A\dots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entspricht demnach eine ähnliche Reihe von ersten Bildpunkten $\mathfrak{A}_1\dots$ und eine ähnliche Reihe von zweiten Bildpunkten $\mathfrak{A}_2\dots$ auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\alpha$. Betrachten wir den Punkt Θ als einen Lichtpunkt auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ und ziehen wir $\Theta\mathfrak{T}_1$ parallel $\Lambda_1\mathfrak{L}_1$, ferner $\Theta\mathfrak{T}_2$ senkrecht ΩE_{II} , dann ist \mathfrak{T}_1 der erste Bildpunkt und \mathfrak{T}_2 der zweite Bildpunkt auf den Hauptstrahl $\Xi\alpha$, die dem Lichtpunkt Θ entsprechen. Ziehen wir durch den Schnittpunkt W der Geraden $A_1\mathfrak{A}_1$, $A_2\mathfrak{A}_2$ die Gerade $W\Theta$, welche den Hauptstrahl $\Xi\alpha$ in dem Punkt \mathfrak{A}_0 schneidet, dann ist \mathfrak{A}_0 der selbstentsprechende Punkt der ähnlichen Punktreihen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}_1\dots$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{T}_2\dots$. Zur Construction dieses selbstentsprechenden Punktes \mathfrak{A}_0 , in dem also der erste Bildpunkt und der zweite Bildpunkt zusammenfallen, sind demnach die Geraden $\Theta\mathfrak{T}_1$, $\Theta\mathfrak{T}_2$ nicht erforderlich. Vermittelt der Geraden \mathfrak{A}_0A_{02} senkrecht ΩE_{II} und der Geraden $A_{02}A_0$ senkrecht ΩE_I erhalten wir den entsprechenden Lichtpunkt A_0 auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$. Ferner ergibt sich auch dieser Punkt A_0 , indem wir die Gerade \mathfrak{A}_0A_{01} parallel $\mathfrak{L}_1\Lambda_1$ und die Gerade $A_{01}A_0$ parallel Λ_1L ziehen. Der Punkt A_0 ist demnach auf den einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der einzige Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt \mathfrak{A}_0 auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht. Hiernach erhalten wir den Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma giebt es auf jedem in einer Normalebene einfallenden Hauptstrahl einen einzigen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht.

Betrachten wir den Punkt \mathfrak{A}_0 als Lichtpunkt, so entspricht demselben der Punkt A_0 als homocentrischer Bildpunkt. Die Beziehung, dass einem Lichtpunkt ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, nennen wir Homocentricität. Es kommen hier nur solche einfallende Hauptstrahlen in Betracht, denen austretende Hauptstrahlen entsprechen; denn auf die totale Reflexion an ΩE_{II} erstreckt sich diese Beziehung nicht.

Nehmen wir in einer Normalebene beliebig viele parallele einfallende Hauptstrahlen an, dann liegen der ausgeführten Construction gemäss die zugehörigen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in

einer durch den Punkt Ω gehenden Geraden Ωg_0 , und diese homocentrischen Bildpunkte befinden sich in einer entsprechenden durch den Punkt Ω gehenden Geraden Ωg_0 . Hieraus folgt der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma in einer Normalebene liegen die auf parallelen einfallenden Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer Geraden Ωg_0 ; und diese homocentrischen Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen liegen in einer entsprechenden Geraden Ωg_0 .

Um die Homocentricität aus affinen Beziehungen abzuleiten, nehmen wir in einer Normalebene ein System S von Lichtpunkten auf parallelen einfallenden Hauptstrahlen an, dann entspricht dem System S dieser Lichtpunkte ein affines System Σ_1 der zugehörigen ersten Bildpunkte und ein affines System Σ_2 der zugehörigen zweiten Bildpunkte auf dem im Prisma gebrochenen parallelen Hauptstrahlen. Ferner entspricht dem System Σ_1 ein affines System \mathfrak{S}_1 der zugehörigen ersten Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen, und ebenso entspricht dem System Σ_2 ein affines System \mathfrak{S}_2 der zugehörigen zweiten Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen. Da das System S zu den Systemen Σ_1 , Σ_2 und zu den Systemen \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 affin ist, so sind auch die Systeme Σ_1 , Σ_2 und \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 einander affin. Für die drei Systeme S , Σ_1 , Σ_2 ist die Gerade ΩE_I gemeinsame Affinitätsachse. Für die beiden Systeme Σ_1 , \mathfrak{S}_1 , sowie für die beiden Systeme Σ_2 , \mathfrak{S}_2 ist die Gerade ΩE_{II} gemeinsame Affinitätsachse. Der Punkt Ω gehört allen fünf affinen Systemen S , Σ_1 , Σ_2 , \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 als selbstentsprechender Punkt an.

Die drei affinen Systeme S , Σ_1 , \mathfrak{S}_1 sind in Figur 6 durch die drei entsprechenden Punkte L , Λ_1 , \mathfrak{L}_1 auf den drei entsprechenden Hauptstrahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$, $l\Omega$ bestimmt. Die drei affinen Systeme S , Σ_2 , \mathfrak{S}_2 sind durch die drei entsprechenden Hauptstrahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$, $l\Omega$ bestimmt; denn die entsprechenden Punkte von S , Σ_2 liegen in Senkrechten zu ΩE_I und die entsprechenden Punkte von Σ_2 , \mathfrak{S}_2 liegen in Senkrechten zu ΩE_{II} .

Da die entsprechenden Punkte der beiden affinen Systeme \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen liegen, so haben diese Systeme eine Affinitätsachse, die durch Ω geht; und dieselbe enthält die selbstentsprechenden Punkte, das sind die homocentrischen Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen. Diese Affinitätsachse ist die vorhin construirte Gerade Ωg_0 und dieser entspricht im System S die Gerade Ωg_0 , welche die zugehörigen Lichtpunkte enthält. Die Affinitätsachse Ωg_0 ist durch den Schnittpunkt zweier entsprechender Geraden der Systeme \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 bestimmt und kann in folgender Weise construiert werden. Die vorher bestimmten Punkte \mathfrak{X}_1 , \mathfrak{X}_2 und \mathfrak{Y}_1 , \mathfrak{Y}_2 sind auf dem austretenden Hauptstrahl Ξa entsprechende Punkte in dem Systemen \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 . Ziehen wir

noch $L\Lambda_2$ senkrecht ΩE_I und $\Lambda_2\mathfrak{L}_2$ senkrecht ΩE_{II} , dann entspricht dem Punkt \mathfrak{L}_1 im System \mathfrak{S}_1 der Punkt \mathfrak{L}_2 im System \mathfrak{S}_2 . Die entsprechenden Geraden $\mathfrak{L}_1\mathfrak{T}_1, \mathfrak{L}_2\mathfrak{T}_2$ schneiden sich in einem Punkt \mathfrak{V}_0 der Affinitätsachse Ωg_0 ; und ebenso schneiden sich die entsprechenden Geraden $\mathfrak{L}_1\mathfrak{U}_1, \mathfrak{L}_2\mathfrak{U}_2$ in einem Punkt \mathfrak{X}_0 der Affinitätsachse Ωg_0 .

Legen wir in Figur 7 in dem System S der Lichtpunkte zu der Geraden Ωg_0 eine Parallele f , welche die parallelen einfallenden Hauptstrahlen a, b, l, \dots in den Lichtpunkten A, B, L, \dots schneidet, dann entsprechen dieser Parallelen in den Systemen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ die beiden zu Ωg_0 Parallelen f_1, f_2 , auf denen resp. die entsprechenden ersten Bildpunkte $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{L}_1, \dots$ und die entsprechenden zweiten Bildpunkte $\mathfrak{U}_2, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{L}_2, \dots$ liegen. Demnach sind die homocentrischen Differenzen $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2, \mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2, \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2, \dots$ der zugehörigen austretenden astigmatischen Strahlenbündel gleich, und es folgt der Satz:

Allen auf parallelen einfallenden Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkten, die in einer zur Geraden Ωg_0 Parallelen liegen, entsprechen in den austretenden astigmatischen Strahlenbündeln gleiche homocentrische Differenzen.

Die Grösse dieser gleichen homocentrischen Differenzen ist dem Abstände der Parallelen f von der Geraden Ωg_0 proportional und wird gleich Null, wenn diese Parallele mit der Geraden Ωg_0 zusammenfällt.

Um auf rechnerischem Wege die homocentrische Differenz eines austretenden astigmatischen Strahlenbündels zu erhalten, welches einem einfallenden, unendlich dünnen centralen Strahlenbündel entspricht, nehmen wir in Figur 6 an, dass die Winkel, welche der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$, und der Hauptstrahl $\Theta\alpha$ mit dem Lothe der Ebene ΩE_I bilden resp. e_1, ε_1 sind, dass ferner die Winkel, welche der austretende Hauptstrahl $\Xi\alpha$ und der Hauptstrahl $\Xi\alpha$ mit dem Lothe der Ebene ΩE_{II} einschliessen resp. e_2, ε_2 sind.

Es ist dann

$$5) \quad \frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n_1, \quad \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2} = n_2$$

und nach den Gleichungen 2), 3):

$$6) \quad \begin{cases} \frac{A_1\Theta}{A\Theta} = n_1 \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \right)^2, & \frac{A_2\Theta}{A\Theta} = n_1, \\ \frac{\mathfrak{U}_1\Xi}{A_1\Xi} = \frac{1}{n_2} \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2, & \frac{\mathfrak{U}_2\Xi}{A_2\Xi} = \frac{1}{n_2}. \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir:

$$A_1\Xi = A_1\Theta + \Theta\Xi = n_1 \cdot A\Theta \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \right)^2 + \Theta\Xi,$$

$$A_2\Xi = A_2\Theta + \Theta\Xi = n_1 \cdot A\Theta + \Theta\Xi$$

und ferner:

$$7) \quad \mathfrak{X}_1 \Xi = \frac{1}{n_2} \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 \left[n_1 \cdot A \Theta \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \right)^2 + \Theta \Xi \right],$$

$$8) \quad \mathfrak{X}_2 \Xi = \frac{1}{n_2} [n_1 \cdot A \Theta + \Theta \Xi];$$

folglich ist die homocentrische Differenz:

$$9) \quad \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = \frac{1}{n_2} \left\{ \Theta \Xi \left[\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right] + A \Theta \cdot n_1 \left[\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right] \right\}.$$

Für $A \Theta = 0$, also für den Punkt Θ als Lichtpunkt auf dem Hauptstrahl $\alpha \Theta$, ist die entsprechende homocentrische Differenz

$$10) \quad \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = \frac{\Theta \Xi}{n_2} \left[\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Für $\Theta \Xi = 0$, also für einen Lichtpunkt L auf dem Hauptstrahl $\{ \Omega$, ist die entsprechende homocentrische Differenz

$$11) \quad \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = L \Omega \frac{n_1}{n_2} \left[\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right].$$

Setzen wir die homocentrische Differenz $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = 0$, dann ist jener Lichtpunkt A identisch mit dem Lichtpunkt A_0 , dem der homocentrische Bildpunkt \mathfrak{X}_0 entspricht, und es ergibt sich:

$$12) \quad \frac{n_1 \cdot A_0 \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1},$$

und da $n_1 \cdot A_0 \Theta = A_{0g2} \Theta$ ist,

$$13) \quad \frac{A_{0g2} \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1}.$$

Durch die Ausdrücke in 10), 11) folgt aus 12) die Proportion:

$$14) \quad \frac{A_0 \Theta}{L \Omega} = - \frac{\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2}{\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2},$$

welche auch als Controle für die Construction des Lichtpunktes A_0 dienen kann. Zur Feststellung der Vorzeichen nehmen wir die Strecken in der Richtung des Lichtganges als positiv.

Nehmen wir eine andere Richtung der einfallenden Hauptstrahlen an, so erhalten wir zwei andere dieser Richtung entsprechende Gerade Ω_{g0} , Ω_{g1} . Besonders ausgezeichnet sind die parallelen einfallenden Hauptstrahlen bei deren Richtung:

$$15) \quad \frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}$$

ist; denn in diesem Falle coincidiren die beiden Bildpunkte \mathfrak{X}_1 , \mathfrak{X}_2 auf dem Hauptstrahl $\{ \Omega$. Jedem Lichtpunkt auf dem einfallenden Hauptstrahl $\{ \Omega$

entspricht dann ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl Ω . Diese Beziehung hat aber nur geometrische Bedeutung, weil in dieser Grenzlage die Strahlenlänge im Prisma verschwindet. Auf allen anderen in dieser Richtung einfallenden Hauptstrahlen befinden sich die Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, im Unendlichen und die homocentrischen Bildpunkte liegen ebenfalls im Unendlichen.

In diesem besonderen Falle ist die Gerade Ω die Affinitätsachse der Systeme $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ und da dieselbe parallel ist zu den Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte dieser Systeme, so ist die homocentrische Differenz auf einem austretenden Hauptstrahl constant gleich der Strecke $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2$; und diese Strecke ist auf den verschiedenen parallelen austretenden Hauptstrahlen proportional dem Abstände des entsprechenden einfallenden Hauptstrahles von dem Punkt Ω . Dies ergibt sich auch aus dem Ausdruck für die homocentrische Differenz in 9). Hiernach folgt:

Auf den parallelen Hauptstrahlen, welche bei der Brechung durch ein Prisma in einer Normalebene unter der Bedingung

$$\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}$$

einfallen, giebt es im Endlichen keinen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht; einem jeden Lichtpunkt auf einem solchen Hauptstrahl entspricht eine homocentrische Differenz des austretenden astigmatischen Strahlenbündels, die unabhängig von der Lage des Lichtpunktes und proportional dem Abstände des Hauptstrahles von der brechenden Kante ist; und nur auf dem Hauptstrahl, der die brechende Kante trifft, entspricht jedem Lichtpunkt geometrisch ein homocentrischer Bildpunkt. Bei einem Prisma, welches von einem Medium umgeben ist, tritt unter jener Bedingung das Minimum der Ablenkung auf.

Jene Bedingung 15) führt bei der Berechnung des Einfallswinkels e_1 auf eine Gleichung achten Grades; wenn aber das Prisma von einem Medium umgeben ist, wird jene Bedingung im Minimum der Ablenkung erfüllt. Für diesen speciellen Fall wurde die erhaltene Beziehung von Herrn A. Gleichen abgeleitet.*

Jedem einfallenden Hauptstrahl, sofern ihm ein austretender Hauptstrahl entspricht, ist ein Lichtpunkt zugeordnet, zu dem ein homocentrischer Bildpunkt gehört. Wenn wir in Figur 6 auf verschiedene in dem Punkt Θ eintretende Hauptstrahlen die zugeordneten Lichtpunkte construiren, dann bilden dieselben eine Curve t , welche wir die Homocentroide nennen wollen; vermittelt der Homocentroide können wir zu einem beliebig ge-

* Siehe diese Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1889. Bd. 34 S. 176.

gebenen Lichtpunkt P_0 den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt \mathfrak{P}_0 bestimmen. Wir ziehen durch P_0 die Gerade ΩP_0 , welche die Homocentroide t in einem Punkt A_0 schneiden möge, dann ist die zu $A_0 \Theta$ parallele Gerade $P_0 \Theta_p$ der zugehörige einfallende Hauptstrahl p zu dem in bekannter Weise der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta_p \Xi_p$ und der austretende Hauptstrahl $\Xi_p \rho$ bestimmt wird. Hierauf ziehen wir $P_0 \Pi_{02}$ senkrecht ΩE_I und $\Pi_{02} \mathfrak{P}_0$ senkrecht ΩE_{II} .

Zu einem System S_0 von Lichtpunkten erhalten wir ein System \mathfrak{S}_0 von entsprechenden homocentrischen Bildpunkten. Die Beziehung dieser beiden Systeme wollen wir die homocentrische Verwandtschaft und die Systeme S_0, \mathfrak{S}_0 die homocentrischen Systeme nennen. So viele Schnittpunkte, als die Gerade ΩP_0 mit der Homocentroide t bildet, so viele zugehörige einfallende Hauptstrahlen gehen im System S_0 durch den Lichtpunkt P_0 ; und es entsprechen demselben ebenso viele homocentrische Bildpunkte im System \mathfrak{S}_0 . Die homocentrische Verwandtschaft, welche analytisch sehr complicirt ist, kann physikalisch eindeutig und mehrdeutig sein. Jedem unendlich fernen Lichtpunkt im System S_0 entspricht, weil zu einem unendlich dünnen Bündel paralleler einfallender Strahlen ein unendlich dünnes Bündel paralleler austretender Strahlen gehört, ein unendlich ferner homocentrischer Bildpunkt; demnach entsprechen den unendlich fernen Punkten in einem der homocentrischen Systemen S_0, \mathfrak{S}_0 unendlich ferne Punkte in dem anderen; und der Punkt Ω ist ein selbstentsprechender Punkt dieser Systeme.

Einer Reihe von Lichtpunkten auf einer durch Ω gehenden Geraden Ωg_0 im System S_0 entspricht eine ähnliche Reihe von homocentrischen Bildpunkten auf einer Geraden Ωg_0 im System \mathfrak{S}_0 . Die homocentrischen Systeme stehen in gleichartiger Wechselbeziehung. Wenn die Homocentroide t in Bezug auf das System S_0 construirt ist, kann man zum System S_0 das entsprechende System \mathfrak{S}_0 bestimmen, und umgekehrt, wenn die Homocentroide t in Bezug auf das System \mathfrak{S}_0 construirt ist, erhält man zum System \mathfrak{S}_0 das entsprechende System S_0 .

Wir wollen noch auf den Weg hinweisen, der zur Gleichung der Homocentroide t führt. Setzen wir die Strecke $\Omega \Theta = q$ und den brechenden Winkel $E_I \Omega E_{II} = w$, so ist

$$\frac{\Theta \Xi}{q} = \frac{\sin w}{\cos \varepsilon_2},$$

und durch Einsetzung in 12) erhalten wir:

$$16) \quad A_0 \Theta = \frac{q \left[1 - \left(\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 \right] \sin w}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1}.$$

Da ferner

$$\frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n_1, \quad \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2} = n_2, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = w$$

ist, so kann man durch Elimination von e_2 , ε_1 , ε_2 , die sehr umständlich ist, die Polargleichung der Homocentroide t erhalten. Nach Einführung rechtwinkliger Coordinaten ergibt sich dann die Homocentroide vom 20. Grade, und wenn $n_1 = n_2$ ist, vom 16. Grade.

Aus der Gleichung 16) folgt, dass $A_0\Theta = 0$ wird für $\cos e_1 = 0$, wenn der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$ in ΩE_I liegt. Demnach geht die Homocentroide durch den Punkt Θ und wird in demselben von der Geraden ΩE_I berührt. Dieser Punkt Θ der Homocentroide bildet eine Ausnahme; denn ihm entspricht als Lichtpunkt nur dann ein homocentrischer Bildpunkt, wenn der von ihm ausgehende Hauptstrahl im Prisma auf der Ebene ΩE_{II} senkrecht steht. Ferner wird $A_0\Theta = 0$ für $\cos \varepsilon_2 = 1$, wenn der im Prisma gebrochene Hauptstrahl senkrecht auf ΩE_{II} ist.

Es wird $A_0\Theta = \infty$ für $\cos \varepsilon_2 = 0$, wenn der im Prisma gebrochene Hauptstrahl zu ΩE_{II} parallel ist. Ferner wird $A_0\Theta = \infty$ in dem vorhin betrachteten Fall, wenn $\cos e_1 \cos \varepsilon_2 = \cos \varepsilon_1 \cos e_2$ ist.

Da dieselben homocentrischen Beziehungen in jeder Normalebene auftreten, so giebt es auf jedem einfallenden Hauptstrahl, der parallel zu einer Normalebene ist und dem ein austretender Hauptstrahl entspricht, einen Lichtpunkt, zu dem ein homocentrischer Bildpunkt gehört. Bei einem Bündel paralleler einfallender Hauptstrahlen, die einer Normalebene parallel sind, liegen auf diesen einfallenden Hauptstrahlen die Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer durch die brechende Kante Ω gehende Ebene Ωg_0 und diese homocentrischen Bildpunkte liegen auch in einer durch Ω gehenden Ebene Ωg_0 . Dem System G_0 der Lichtpunkte in der Ebene Ωg_0 entspricht ein affines System \mathcal{G}_0 der homocentrischen Bildpunkte, weil das Bündel der einfallenden parallelen Hauptstrahlen dem Bündel der austretenden parallelen Hauptstrahlen affin ist.

Wir wollen, wenn das Prisma sich in einem Medium befindet, für die Homocentroide eine besondere Construction angeben. In diesem wichtigen speciellen Fall ist, wenn wir mit n den Brechungsindex des Prismas bezeichnen $n = n_1 = n_2$; und demnach

$$\frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n = \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2}.$$

Durch Umformung erhalten wir dann aus 13):

17)
$$\frac{A_{02}\Theta}{\Theta \Xi} = \frac{\cos^2 e_1 \sin^2 e_2}{\sin^2 e_1 - \sin^2 e_2},$$

und ferner

18)
$$\frac{A_{02}\Theta}{\Theta \Xi} = \frac{\tan^2 e_2}{\tan^2 e_1 - \tan^2 e_2} = \frac{\cot^2 e_1}{\cot^2 e_2 - \cot^2 e_1}.$$

Um hiernach die Homocentroide in Figur 8 zu construiren, beschreiben wir, damit wir einen Strahlengang erhalten, um den Punkt Θ die Kreise k, z mit den Radien im Verhältniss $1:n$; dann ergibt sich zu einem einfallenden Hauptstrahl $\alpha\Theta$, der den Kreis k im Punkt H schneidet, vermittelt $H\Lambda_1$ senkrecht ΩE_I und $\Lambda_1 J$ senkrecht ΩE_{II} der im Prisma gebrochene, mit α bezeichnete Hauptstrahl $\Lambda_1\Theta$ und der austretende Hauptstrahl $\Xi\alpha$ ist parallel $J\Theta$.

Um nun auf dem einfallenden Hauptstrahl $\alpha\Theta$ den Lichtpunkt A_0 nach 18) zu erhalten, dem ein homocentrischer Bildpunkt \mathfrak{A}_0 entspricht, ziehen wir HH_I senkrecht $H\Theta$ und $H_I G$ senkrecht ΩE_I , dann ist $HG = \Theta H \cot^2 e_1$; ferner ziehen wir zu ΩE_{II} die Parallele $\Theta E'_{II}$, hiernach JJ_{II} senkrecht $J\Theta$ und $J_{II}K$ senkrecht $\Theta E'_{II}$, dann ist $JK = \Theta J \cot^2 e_2$. Demzufolge erhalten wir durch die Proportion

$$\frac{A_{02}\Theta}{\Theta\Xi} = \frac{HG}{JK - HG}$$

die Strecke $A_{02}\Theta$. Durch die Senkrechte $A_{02}A_0$ auf ΩE_I ergibt sich der Lichtpunkt A_0 und durch die Senkrechte $A_{02}\mathfrak{A}_0$ auf ΩE_{II} der entsprechende homocentrische Bildpunkt \mathfrak{A}_0 . Wenn wir in dieser Weise auf mehreren nach Θ gerichteten einfallenden Hauptstrahlen die zugehörigen Lichtpunkte construiren, dann bilden diese Lichtpunkte die Homocentroide $t_w t_v$, die aus zwei Theilen besteht; denn dieselbe ist nur für alle einfallende Hauptstrahlen, den austretende Hauptstrahlen entsprechen, construirt. In analytischer Auffassung hat die Homocentroide eine Fortsetzung, der aber keine physikalische Deutung entspricht.

Auf dem einfallenden Hauptstrahl, der in $E_I\Theta$ liegt, befindet sich der zugeordnete Punkt in Θ . Auf dem im Minimum der Ablenkung einfallenden Hauptstrahl $m\Theta$, dem der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Xi_m$ und der austretende Hauptstrahl $\Xi_m m$ entspricht, befindet sich der Lichtpunkt M_0^∞ im Unendlichen. Für die einfallenden Hauptstrahlen, bei welchen der Winkel $e_1 < e_2$ ist, werden die Abstände der Lichtpunkte von Θ negativ, und diesen Hauptstrahlen entsprechen virtuelle Lichtpunkte. Dem einfallenden Hauptstrahl $z\Theta$ entspricht im Prisma der Hauptstrahl $\Theta\Xi_z$ und der in ΩE_{II} liegende austretende Hauptstrahl $\Xi_z\delta$, demnach ist der Winkel $e_2 = 90^\circ$ und $\cot e_2 = 0$; also $-A_{02}\Theta = \Theta\Xi_z$. Durch die Senkrechte $\Xi_z Z_0$ auf ΩE_I ergibt sich der Lichtpunkt Z_0 auf dem Hauptstrahl $z\Theta$, der die Grenze der in Θ eintretenden Hauptstrahlen bildet.

Der Theil t_w der Homocentroide enthält die wirklichen Lichtpunkte und geht die Gerade ΩE_I berührend von Θ aus nach dem unendlich fernen Punkt M_0^∞ des im Minimum der Ablenkung einfallenden Hauptstrahles $m\Theta$. Der andere Theil t_v der Homocentroide enthält die virtuellen Lichtpunkte und geht von Z_0 nach dem unendlich fernen Punkt M_0^∞ .

Ist ein beliebiger Lichtpunkt P_0 gegeben, so erhalten wir in der angegebenen Weise mittelst der Homocentroide den zugeordneten ein-

fallenden Hauptstrahl, indem wir die Gerade ΩP_0 ziehen, welche die Homocentroide in einem Punkt A_0 schneidet; dann ist $P_0 \Theta_p$ parallel $A_0 \Theta$ der einfallende Hauptstrahl p , zu dem die entsprechenden Hauptstrahlen $\Theta_p \Xi_p$, $\Xi_p \wp$ construirt werden. Durch $P_0 \Pi_{02}$ senkrecht ΩE_I und $\Pi_{02} \wp_0$ senkrecht ΩE_{II} ergibt sich der entsprechende homocentrische Bildpunkt \wp_0 . So kann man zu jedem anderen Punkt P_0 im System S_0 den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt \wp_0 im System \mathfrak{S}_0 bestimmen.

Es ist die Gerade $m' \Omega m''$ parallel $m \Theta$ und die Gerade $s' \Omega$ parallel $s \Theta$ gezogen, um die Gebiete zu begrenzen, in denen einfallende Hauptstrahlen mit wirklichen Lichtpunkten oder mit virtuellen Lichtpunkten liegen. Denken wir uns das Prisma über E_I, E_{II} unbegrenzt, dann kann jeder Punkt innerhalb des Winkels $E_I \Omega m'$ ein wirklicher Lichtpunkt und jeder Punkt innerhalb des Winkels $Z_0 \Omega m''$ als ein virtueller Lichtpunkt betrachtet werden. Denn zu allen einfallenden Hauptstrahlen, die einer innerhalb des Winkels $E_I \Omega m'$ durch Ω gehenden Geraden parallel sind, gehören wirkliche Lichtpunkte, und zu allen einfallenden Hauptstrahlen, die einer innerhalb des Winkels $m' \Omega s'$ durch Ω gehenden Geraden parallel sind, gehören virtuelle Lichtpunkte. Allen anderen einfallenden Hauptstrahlen entsprechen physikalisch keine austretende Hauptstrahlen und somit auch keine Lichtpunkte. Hierdurch ist das Gebiet der Lichtpunkte des Systems S_0 , den homocentrische Bildpunkte des Systems \mathfrak{S}_0 entsprechen, begrenzt.

Im betrachteten Falle haben wir als typisches Beispiel ein in Luft befindliches Glasprisma mit dem brechenden Winkel von 60° und dem Brechungsindex $n = \frac{3}{2}$ angenommen. Die construirte Homocentroide $t_u t_v$ wird von jeder innerhalb der Winkel $E_I \Omega m'$ und $Z_0 \Omega m''$ durch Ω gehenden Geraden nur in einem Punkt geschnitten; demnach entspricht physikalisch jedem Lichtpunkte im System S_0 eindeutig ein homocentrischer Bildpunkt im System \mathfrak{S}_0 und umgekehrt.

Die experimentelle Bestätigung der Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma wurde in folgender Weise (Figur 9 Taf. III) ausgeführt. Auf einem Block steht ein Glasprisma $E_I \Omega E_{II}$, dessen brechende Winkel 60° und dessen Brechungsindex für die Spectrumlinie D gleich 1,7 ist. Auf dem einfallenden Hauptstrahl $a \Theta$ ist der Lichtpunkt A_0 und auf dem austretenden Hauptstrahl Ξa ist der entsprechende homocentrische Bildpunkt \mathfrak{A}_0 construirt; ferner ist zu einem Lichtpunkt A auf diesem einfallenden Hauptstrahl der erste Bildpunkt \mathfrak{A}_1 und der zweite Bildpunkt \mathfrak{A}_2 construirt. Ein Glaswürfel $p q r s$ mit einer berussten Seite $p q$, in deren Russschicht mit einer Nadel eine sehr kleine Oeffnung gemacht ist, steht so auf dem Block, dass diese Oeffnung den Lichtpunkt A_0 vertritt. Vermittelst der Natronflamme F einer auf dem Block befindlichen Lampe wird durch die kleine Oeffnung ein sehr dünnes Strahlenbündel erzeugt.

Der Block mit Prisma, Würfel und Lampe ist in Parallelführung nach Richtung der Geraden Ξa verschiebbar. Durch ein festgestelltes Mikroskop M , ein Abbe'sches Focometer, bei dem die Entfernung eines deutlich sichtbaren Objectes von dem Objectiv O gleich 110 mm ist, wurde nach Einstellung des verschiebbaren Blockes gegen das feststehende Mikroskop für die Strecke $\mathfrak{U}_0 O = 110$ mm der homocentrische Bildpunkt \mathfrak{U}_0 als kleine helle Oeffnung so deutlich gesehen, dass auch die Rauigkeit des Oeffnungsrandes in der Russchicht scharf erkennbar war. Nachdem durch Verschieben des Blockes die Strecke $\mathfrak{U}_0 O$ grösser oder kleiner als 110 mm gemacht wurde, vergrösserte sich das beobachtete, matter werdende Lichtfeld und dadurch wurde das dünne centrale Strahlenbündel sichtbar.

Im Gegensatz hierzu wurde der Würfel $pqrs$ in gleicher Weise nach dem Lichtpunkt A gestellt und der Block so verschoben, dass die Strecke $\mathfrak{U}_2 O = 110$ mm war, dann zeigte sich deutlich eine kurze horizontale Lichtlinie. Ferner wurde der Block so verschoben, dass die Strecke $\mathfrak{U}_1 O = 110$ mm war und es erschien deutlich eine kurze vertikale Lichtlinie. In anderen Stellungen des Blockes konnte die Gestalt des austretenden astigmatischen Strahlenbündels beobachtet werden.

Wir wollen in Figur 10 (Taf. III) als Beispiel noch die homocentrische Brechung der Lichtstrahlen durch eine Platte betrachten, an deren beiden Seiten sich verschiedene Medien befinden. Weil die Ebenen E_I , E_{II} parallel sind, vereinfachen sich die Constructionen und wir gelangen zu anderen Constructionen, die diesem speciellen Fall eigenthümlich sind. Die Brechungsindices an den Ebenen E_I , E_{II} gegen die Platte seien n_1 , n_2 . Einen Strahlengang erhalten wir in der bekannten Weise. Wir beschreiben um den Punkt Θ die Kreise h , i , κ , deren Radien ΘH , ΘJ , ΘA_1 in dem Verhältniss

$$\Theta H : \Theta A_1 = 1 : n_1, \quad \Theta J : \Theta A_1 = 1 : n_2$$

stehen, so ergeben sich zu einem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entsprechende Hauptstrahlen $\Theta \Xi$ resp. α , und Ξa , indem wir durch H auf E_I die Senkrechte JA_1 ziehen. Nach der S. 71 angegebenen allgemeinen Construction des auf $a\Theta$ liegenden Lichtpunktes A_0 , dem ein homocentrischer Bildpunkt \mathfrak{U}_0 entspricht, ziehen wir $A_1 U_I$ senkrecht auf $A_1 \Theta$ und die Geraden $U_I H$, $U_I J$, welche die Normale ΘN der Ebene E_I resp. in V_I , V_{II} schneiden. Alsdann fällen wir auf $H\Theta$ die Senkrechte $V_I A$ und auf $J\Theta$ die Senkrechte $V_{II} \mathfrak{U}_1$. Ferner ziehen wir die Gerade AW senkrecht E_I und die Gerade $A_1 \mathfrak{U}_1$, die sich im Punkt W treffen; dann liefert die Gerade $W\Theta$ den homocentrischen Bildpunkt \mathfrak{U}_0 auf dem austretenden Hauptstrahl Ξa und vermittelst der Geraden $\mathfrak{U}_0 A_0$, die zu E_I senkrecht ist, ergibt sich auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der zugehörige Lichtpunkt A_0 .

Einfachere Constructionen erhalten wir durch Specialisirung der Gleichung 12):

$$\frac{n_1 A_1 \Theta_t}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - 1};$$

denn im betrachteten speciellen Fall ist $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, und demnach

$$\frac{n_1 A_0 \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2}{\left(\frac{\cos e_2}{\cos e_1} \right)^2 - 1}.$$

Da ferner

$$\frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n_1, \quad \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2} = n_2$$

ist, so folgt:

$$\frac{A_0 \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{n_2^2 - 1}{n_1 (n_1^2 - n_2^2)} \cdot \left(\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_1} \right)^2.$$

Hiernach kann man die Strecke $A_0 \Theta$ construiren, wenn man die constante Grösse

$$\frac{n_2^2 - 1}{n_1 (n_1^2 - n_2^2)} = k$$

vorher berechnet.

Zweckmässiger aber ist es, wenn wir in die Gleichung die Dicke d der Platte, also den Abstand der beiden Ebenen E_I, E_{II} einführen. Es ist dann

$$\Theta \Xi = \frac{d}{\cos \varepsilon_1}$$

und

$$A_0 \Theta = \frac{d (n_2^2 - 1)}{n_1 (n_1^2 - n_2^2)} \cdot \frac{\cos^2 e_1}{\cos^3 \varepsilon_1},$$

oder

$$A_0 \Theta = d \cdot k \frac{\cos^2 e_1}{\cos^3 \varepsilon_1}.$$

Hiernach erhalten wir, nachdem in Figur 11 auf $N\Theta$ die Strecke $\Theta N = d \cdot k$ gemacht ist, die folgende Construction. Wir ziehen von dem Schnittpunkt I_1 des Hauptstrahles $a\Theta$ und des Kreises κ die Gerade $H_1 H' \perp N\Theta$, $H' H'' \perp \Theta H$, dann ist $\Theta H'' = \Theta H_1 \cos^2 e_1$; ferner $A_1 Y \perp N\Theta$, $Y Y' \perp A_1 \Theta$, $Y' Y'' \perp N\Theta$, dann ist $\Theta Y'' = \Theta A_1 \cos^3 \varepsilon_1$. Hiernach ergibt sich, indem wir zu $Y'' H''$ die Parallele NA_0 ziehen, der Lichtpunkt A_0 auf den einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$. Auf den zu $J\Theta$ parallelen, austretenden Hauptstrahl Ξa erhalten wir durch $A_0 \mathcal{U}_0$ senkrecht auf E_I den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt \mathcal{U}_0 .

Bezeichnet X den Schnittpunkt, welchen der Kreis h mit $A_1 \Theta$ bildet, dann ist $n_1 \cdot X\Theta = A_1 \Theta$, und da ferner nach 6)

$$\frac{A_1 \Theta}{A \Theta} = n_1 \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \right)^2$$

ist, so folgt:

$$\frac{X\Theta}{A\Theta} = \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \right)^2;$$

und demnach erhalten wir

$$A_0\Theta = d \cdot k \frac{A\Theta}{X\Theta \cdot \cos \varepsilon_1}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Construction des Punktes A_0 in Figur 11. Wir ziehen auf $A_1\Theta$ die Senkrechte A_1U_I , dann die Gerade U_IH bis V_I und $V_I A$ senkrecht $II\Theta$; ferner ziehen wir die Senkrechte XX' auf $N\Theta$ und NA_0 parallel $X'A$.

In Figur 10 sind für mehrere im Punkt Θ eintretende Hauptstrahlen die Lichtpunkte $A_0 \dots$ construirt, welche die gezeichnete Homocentroide t bilden. Die Polargleichung derselben ist, wenn wir $A_0\Theta = r$ setzen:

$$r = \frac{d \cdot k \cdot \cos^2 e_1}{\left[1 - \left(\frac{\sin e_1}{n_1} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Umwandlung in rechtwinkelige Coordinaten ergibt sich, dass diese Homocentroide vom 6. Grade ist. In der Zeichnung ist $n_1 = \frac{3}{2}$, $n_2 = \frac{4}{3}$ genommen und es besteht diese Homocentroide, so weit sie physikalisch zur Geltung kommt, aus einem Oval, welches von dem senkrecht zur Platte einfallenden Hauptstrahl $N\Theta$ symmetrisch getheilt wird. In geometrischer Auffassung gehört zu der Homocentroide noch ein zweites nicht gezeichnetes Oval, welches bezüglich der Geraden E_I zu dem Oval t symmetrisch ist. Wenn $n_1 < 1$ ist, dann wird für $\sin e_1 = n_1$ der Radius vector $r = \infty$ und die Homocentroide hat in diesem Falle zwei unendlich ferne reelle Punkte.

Ziehen wir durch einen angenommenen Lichtpunkt P_0 im System S_0 zu E_I eine Parallele g_0 , welche die Homocentroide t schneidet, z. B. in den beiden Punkten A_0, A'_0 , so sind dem Lichtpunkt P_0 die beiden einfallenden Hauptstrahlen $p\Theta_p, p'\Theta'_p$ zugeordnet, die resp. zu $A_0\Theta, A'_0\Theta$ parallel sind; und diesen Hauptstrahlen entsprechen die austretenden Hauptstrahlen $\Xi_p\wp, \Xi'_p\wp'$, auf denen wir durch $P_0\wp_0$ senkrecht zu E_I den zugehörigen gemeinsamen, homocentrischen Bildpunkt \wp_0 erhalten. Es entspricht demnach einem im System S_0 befindlichen Lichtpunkt P_0 , obwohl demselben zwei einfallende Hauptstrahlen zugeordnet sind, ein einziger homocentrischer Bildpunkt \wp_0 im System S_0 . Einer Reihe von Lichtpunkten $A_0P_0 \dots$ auf einer zu E_I Parallelen g_0 im System S_0 entspricht eine congruente Reihe von homocentrischen Bildpunkten $\mathfrak{A}_0\wp_0 \dots$ auf einer zu E_I Parallelen g_0 im System S_0 . Das System S_0 der Lichtpunkte, denen zwei einfallende Hauptstrahlen zugeordnet sind und homocentrische Bildpunkte entsprechen, ist von der Geraden E_I und von der zu ihr parallelen Geraden u_0 , die durch N geht, begrenzt.

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch eine Platte besitzt jeder Hauptstrahl, der senkrecht zur Platte einfällt, also ohne Brechung durchgeht, die Eigenthümlichkeit, dass jedem Lichtpunkt auf demselben ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. Demzufolge entspricht einem System S von Lichtpunkten auf senkrecht einfallenden Hauptstrahlen ein System \mathfrak{S}_2 von homocentrischen Bildpunkten.

Nehmen wir auf den senkrecht einfallenden Hauptstrahl $N\Theta$ einen beliebigen Lichtpunkt F an, dem der homocentrische Bildpunkt \mathfrak{F}_2 entspricht, so ist analog der Gleichung 8)

$$\mathfrak{F}_2\Xi = \frac{1}{n_2} [n_1 F\Theta + \Theta\Xi],$$

und, wenn wir $\Theta\Xi = d$ einsetzen, ergibt sich

$$\mathfrak{F}_2\Theta = \frac{1}{n_2} [n_1 F\Theta + d] - d.$$

Die Systeme S , \mathfrak{S}_2 sind affin und ihre Affinitätsachse v , welche durch den selbstentsprechenden Punkt D des Hauptstrahles $N\Theta$ geht, ist parallel zu E_I . Setzen wir $\mathfrak{F}_2\Theta = F\Theta = D\Theta$, so wird der selbstentsprechende Punkt D durch

$$D\Theta = \frac{(1 - n_2)d}{n_2 - n_1}$$

bestimmt. Hieraus folgt:

Jedem Lichtpunkt in der Geraden v auf einem senkrecht einfallenden Hauptstrahl entspricht ein mit diesem Lichtpunkt coincidirender homocentrischer Bildpunkt.

Betrachten wir z. B. jenen Lichtpunkt P_0 auch zum System S gehörend, so ist \mathfrak{P}_2 der entsprechende homocentrische Bildpunkt im System \mathfrak{S}_2 . Hiernach entsprechen jedem Lichtpunkt P_0 , der zwischen den beiden Parallelen E_I , u_0 liegt, zwei homocentrische Bildpunkte \mathfrak{P}_0 , \mathfrak{P}_2 . Im Raum bilden die von einem Lichtpunkt P_0 ausgehenden Hauptstrahlen pp' ... eine Rotationskegelfläche, deren Basiskreis in der Ebene E_I den Durchmesser $\Theta_p \Theta'_p$ besitzt; und die zugehörigen austretenden Hauptstrahlen vereinigen sich in dem entsprechenden Bildpunkt \mathfrak{P}_0 .

IV. Homocentricität bei der Brechung schräg einfallender Lichtstrahlen durch das Prisma.

Nachdem wir die homocentrischen Beziehungen bei der Brechung der Lichtstrahlen durch das Prisma in der Normalebene erkannt haben, wollen wir auch die homocentrischen Beziehungen aufsuchen, welche bei schräg einfallenden Hauptstrahlen auftreten, die gegen eine Normalebene des Prisma geneigt sind, also nicht in einer Normalebene liegen.

Ist in Figur 12 ein schräg einfallender Hauptstrahl $a\Theta$ angenommen, dem der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Xi$ resp. α , und der austretende Hauptstrahl Ξa entspricht, dann sind die Einfallsebene $a\Theta\alpha$ und die Aus-

fallsebene $a \equiv \alpha$ gegen einander geneigt. Diese beiden Ebenen fallen nur dann zusammen, wenn der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$ in einer Normalebene des Prismas liegt. Denken wir uns auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ einen Lichtpunkt A_0 angenommen, von dem ein unendlich dünnes Strahlenbündel ausgeht, so entspricht diesem Strahlenbündel ein im Prisma gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl α ist, und welches α' heissen möge. Die zweite Brennebene dieses astigmatischen Strahlenbündels α' ist die Ebene $a\Theta\alpha$ und die erste Brennebene desselben steht im Hauptstrahl α senkrecht auf der Ebene $a\Theta\alpha$. Denken wir uns ebenso auf dem Hauptstrahl $a \equiv \alpha$ einen Punkt \mathcal{A}_0 angenommen, in dem sich die austretenden Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels vereinigen, so entstammt dasselbe einem im Prisma gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl α ist, und welches α'' heissen möge. Die zweite Brennebene dieses astigmatischen Strahlenbündels α'' ist die Ebene $a \equiv \alpha$ und die erste Brennebene desselben steht im Hauptstrahl α senkrecht auf der Ebene $a \equiv \alpha$. Wären nun die beiden astigmatischen Strahlenbündel α' , α'' identisch, dann wäre A_0 ein Lichtpunkt, dem der homocentrische Bildpunkt \mathcal{A}_0 entspricht. Damit aber diese beiden astigmatischen Strahlenbündel identisch werden, ist zunächst erforderlich, dass die Brennebenen des astigmatischen Strahlenbündels α' mit den Brennebenen des astigmatischen Strahlenbündels α'' zusammenfallen. Dies ist nur möglich, erstens, wenn die beiden ersten Brennebenen und die beiden zweiten Brennebenen der astigmatischen Strahlenbündel α' , α'' identisch sind, und wir erhalten dann den schon betrachteten Fall, der bei dem Strahlengang in einer Normalebene eintritt; zweitens, wenn bei den astigmatischen Strahlenbündeln α' , α'' die erste Brennebene von α' mit der zweiten Brennebene von α'' und die zweite Brennebene von α' mit der ersten Brennebene von α'' zusammenfällt. Ist ferner in diesem Fall der erste Bildpunkt von α' mit dem zweiten Bildpunkt von α'' und der zweite Bildpunkt von α' mit dem ersten Bildpunkt von α'' vereint, dann sind die beiden astigmatischen Strahlenbündel α' , α'' identisch. Die Neigung der Brennlinien gegen den Hauptstrahl eines astigmatischen Strahlenbündels bedingt dasselbe nur in unendlich kleiner Grösse höherer Ordnung, und deshalb kommt diese Neigung hier nicht in Betracht. Damit also bei einem schräg einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ einem Lichtpunkt A_0 auf demselben ein homocentrischer Bildpunkt \mathcal{A}_0 auf dem austretenden Hauptstrahl $\equiv \alpha$ entspricht, muss die Strecke $\Theta \equiv$ im Prisma so liegen, dass die durch sie gehenden Ebenen $a\Theta \equiv$, $a \equiv \Theta$ senkrecht zu einander sind.

Behufs der Construction einer solchen Strecke $\Theta \equiv$ ist in Figur 12 das Prisma mit der vertikalen brechenden Kante Ω in schiefer Parallelprojection so dargestellt, dass die Prismaseite ΩE_{II} in der Bildebene liegt und die Parallelprojection ΘO der von einem Punkt Θ der Prismaseite ΩE_I auf die Bildebene gefällten Senkrechten gleich der Hälfte ihrer wahren Grösse

ist. Im Punkt Θ ist auf der Prismaseite ΩE_I die Senkrechte ΘN errichtet, welche die Prismaseite ΩE_{II} im Punkt N trifft. Beschreiben wir nun über ON als Durchmesser in der Ebene ΩE_{II} einen Kreis ξ und nehmen wir auf demselben einen Punkt Ξ an, dann ist die Ebene $\Theta \Xi O$ senkrecht auf der Ebene $\Theta \Xi N$. Jede Strecke, die von dem Punkt Θ nach einem Punkt Ξ des Kreises ξ geht, hat also eine solche Lage, dass die durch sie gelegten beiden Ebenen $\Theta \Xi N$ und $\Theta \Xi O$, von denen die erste senkrecht auf der Ebene ΩE_I , die zweite senkrecht auf der Ebene ΩE_{II} ist, zu einander senkrecht stehen. Es ist dann die Ebene $\Theta \Xi N$ die Einfallsebene für einen einfallenden Hauptstrahl $\alpha \Theta$, dem der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta \Xi$ entspricht; und die Ebene $\Theta \Xi O$ ist die Ausfallsebene für den zugehörigen austretenden Hauptstrahl $\Xi \alpha$. Die Gesamtheit der von Θ ausgehenden Hauptstrahlen $\Theta \Xi$ bilden eine Kegelfläche $\Theta \xi$, dessen Spitze Θ und dessen Basis der Kreis ξ ist.

Um nun zu einem angenommenen, im Prisma gebrochenen Hauptstrahl $\Theta \Xi$ den zugehörigen einfallenden Hauptstrahl $\alpha \Theta$ und den zugehörigen austretenden Hauptstrahl $\Xi \alpha$ darzustellen, nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, dass an den Prismaseiten ΩE_I , ΩE_{II} sich verschiedene Medien befinden und n_1 , n_2 die Brechungsindices an diesen Seiten gegen das Prisma sind. Legen wir die Einfallsebene $\Theta \Xi N$ gedreht um ΞN in die Bildebene, dann gelangt der Punkt Θ nach Θ' in die Gerade $O \Xi$, und $N \Theta'$ ist gleich der wahren Grösse von $N \Theta$. Ziehen wir nun zu $N \Theta'$ die Parallele $\Xi \Phi$, welche den um Θ mit dem Radius $\frac{1}{n_1} \Theta' \Xi$ beschriebenen Kreis im Punkt Φ trifft, und ferner die Gerade $\Theta' \Phi$, die $N \Xi$ im Punkt Ξ_a schneidet, so ist die Gerade $\Theta \Xi_a$ der einfallende Hauptstrahl $\alpha \Theta$. Dieser Hauptstrahl $\alpha \Theta$ bildet mit der Normalen ΘN der Ebene ΩE_I den Winkel $e_1 = \Xi_a \Theta' \Xi$ und der Hauptstrahl $\alpha \Theta$ bildet mit dieser Normalen den Winkel $\epsilon_1 = \Xi \Theta' N$.

Legen wir die Ausfallsebene $\Theta \Xi O$ gedreht um $O \Xi$ in die Bildebene, dann gelangt Θ nach Θ'' in die auf $O \Xi$ Senkrechte $O \Theta''$, welche gleich der wahren Grösse von $O \Theta$ ist, und es ist $\Xi \Theta'' = \Xi \Theta'$. Wir beschreiben hierauf um Ξ mit dem Radius $\frac{1}{n_2} \Xi \Theta''$ einen Kreis, der $O \Theta''$ im Punkt Ψ'' schneidet. Diesem Punkt Ψ'' in der Umlegung entspricht der Punkt Ψ auf der Geraden $O \Theta$ und es ist dann $\Psi \Xi$ der austretende Hauptstrahl $\Xi \alpha$. Dieser Hauptstrahl $\Xi \alpha$ bildet mit der Normalen ΘO der Ebene ΩE_{II} den Winkel $e_2 = O \Psi'' \Xi$ und der Hauptstrahl $\alpha \Xi$ bildet mit dieser Normalen den Winkel $\epsilon_2 = O \Theta'' \Xi$. Damit ist ein Gang der Hauptstrahlen $\alpha \Theta$, $\Theta \Xi$, resp. α , und $\Xi \alpha$ dargestellt, bei dem die Ebenen $\alpha \Theta \Xi$, $\Theta \Xi \alpha$ zu einander senkrecht sind.

Nehmen wir auf dem einfallenden Hauptstrahl $\alpha \Theta$ einen Punkt A an, von dem ein unendlich dünnes Strahlenbündel ausgeht, und bestimmen auf dem Hauptstrahl $\alpha \Theta$ im Raum den Punkt A_1 , so dass:

$$\frac{A_1 \Theta}{A \Theta} = n_1 \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_1} \right)^2$$

ist, und ziehen wir die Gerade AA_2 bis an den Hauptstrahl $\alpha\Theta$ senkrecht zur Ebene ΩE_I , also parallel zu ΘN , dann entsprechen dem Lichtpunkt A auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der erste und zweite Bildpunkt A_1, A_2 auf dem Hauptstrahl $\alpha\Theta$ des im Prisma gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels. Bestimmen wir ferner auf dem austretenden Hauptstrahl Ξa im Raum den Punkt \mathfrak{A}_1 , so dass

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \Xi}{A_2 \Xi} = \frac{1}{n_2} \left(\frac{\cos \varepsilon_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2$$

ist, und ziehen wir die Gerade $A_1 \mathfrak{A}_2$ senkrecht zur Ebene ΩE_{II} , also parallel zu ΘO bis an den Hauptstrahl Ξa , dann entsprechen dem Lichtpunkt A der erste und zweite Bildpunkt $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ auf dem Hauptstrahl Ξa des austretenden astigmatischen Strahlenbündels. In dem astigmatischen Strahlenbündel, welches in dem Prisma gebrochen wird, geht von dem Punkt A_2 ein in der Ebene $\Theta \Xi O$ liegender Strahlenfächer aus, welcher an der in der Ebene ΩE_{II} liegenden Geraden ΞO gebrochen wird und dessen gebrochene Strahlen sich im Punkt \mathfrak{A}_1 vereinigen; und ferner geht von dem Punkt A_1 ein in der Ebene $\Theta \Xi N$ liegender Strahlenfächer aus, welcher an der in der Ebene ΩE_{II} liegenden Geraden ΞN gebrochen wird und dessen gebrochene Strahlen sich in dem Punkt \mathfrak{A}_2 vereinigen.

Einer Reihe von Lichtpunkten $A \dots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entsprechen demnach ähnliche Reihen der Punkte $\mathfrak{A}_1 \dots$ und $\mathfrak{A}_2 \dots$ auf dem austretenden Hauptstrahl Ξa . Den selbstentsprechenden Punkt \mathfrak{A}_0 dieser beiden ähnlichen Punktreihen erhalten wir, wie oben gezeigt wurde, indem wir durch den Schnittpunkt W der Geraden $A_1 \mathfrak{A}_2, A_2 \mathfrak{A}_1$ und den Punkt Θ die Gerade $W\Theta$ ziehen, welche den Hauptstrahl Ξa im Punkt \mathfrak{A}_0 trifft. Ziehen wir $\mathfrak{A}_0 A_{01}$ parallel ΘO und $A_{01} A_0$ parallel $A_1 A$, so erhalten wir auf $a\Theta$ den Lichtpunkt A_0 , dem der homocentrische Bildpunkt \mathfrak{A}_0 entspricht. Hiernach ergibt sich der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma gibt es auf jedem schräg einfallenden Hauptstrahl, dessen im Prisma gebrochener Hauptstrahl einer Mantellinie der Kegelfläche $\Theta \xi$ parallel ist, einen einzigen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht.

Hierbei ist aber zu beachten, dass die Kegelfläche $\Theta \xi$ nur soweit physikalisch zur Geltung kommt, als einem Hauptstrahl $\Theta \Xi$ ein einfallender und ein austretender Hauptstrahl entspricht.

Nehmen wir in Figur 13 beispielsweise ein Glasprisma mit dem brechenden Winkel von 45° an, umgeben von Luft, dann ist $n_1 = n_2 = \frac{3}{2}$. Für diesen

Fall sind zu den Punkten $\Xi \dots$ des Kreises ξ die entsprechenden Punkte $\Xi_a \dots$, wie vorhin angegeben wurde, construirt. Durch die Punkte $\Xi_a \dots$ erhalten wir eine Curve ξ_a , die dem Kreise ξ entspricht. Von diesem Kreise kommen aber nur die beiden zu ON symmetrisch liegenden Bogenstücke $\Xi^x \Xi^y$, $\Xi^y \Xi^x$ physikalisch zur Geltung; denn den Hauptstrahlen $\Theta \Xi^x$, $\Theta \Xi^y$ entsprechen die einfallenden Hauptstrahlen $\Xi_a^x \Theta$, $\Xi_a^y \Theta$, die in der Ebene ΩE_{II} liegen, und den Hauptstrahlen $\Theta \Xi^x$, $\Theta \Xi^y$ entsprechen austretende Hauptstrahlen, die in der Ebene ΩE_{II} liegen. Demnach kommen in diesem Falle von der Curve ξ_a nur die beiden Stücke $\Xi_a^x \Xi_a^y$, $\Xi_a^y \Xi_a^x$, welche jenen Bogenstücken entsprechen, in Betracht. Mit Beachtung dieser eventuellen Begrenzung entspricht der Kegelfläche $\Theta \xi$ eine Kegelfläche $\Theta \xi_a$. Auf jedem einfallenden Hauptstrahl $a \Theta$, der einer Mantellinie der so begrenzten Kegelfläche $\Theta \xi_a$ parallel ist, giebt es einen Lichtpunkt A_0 , dem ein homocentrischer Bildpunkt \mathfrak{A}_0 entspricht.

Nehmen wir ein Bündel von einfallenden Hauptstrahlen an, die zu einer Mantellinie der eventuell so begrenzten Kegelfläche $\Theta \xi_a$ parallel sind, dann liegen die auf diesen Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer durch die brechende Kante Ω gehenden Ebene Ωg_0 , und ebenso liegen auch diese homocentrischen Bildpunkte in einer durch die brechende Kante Ω gehenden Ebene Ωg_0 . Da einem Bündel paralleler einfallender Hauptstrahlen ein affines Bündel paralleler austretender Hauptstrahlen entspricht, so ist das System \mathcal{G}_0 der Lichtpunkte in der Ebene Ωg_0 affin dem System \mathcal{G}_0 der entsprechenden homocentrischen Bildpunkte in der Ebene Ωg_0 .

Die Gesamtheit der Lichtpunkte $A_0 \dots$ auf der Kegelfläche $\Theta \xi_a$ bilden auf derselben eine Curve t^r , die wir die räumliche Homocentroide nennen wollen. Nehmen wir nun einen beliebigen Lichtpunkt P_0 an, und legen wir durch die brechende Kante Ω und diesen Lichtpunkt P_0 eine Ebene ΩP_0 , welche die räumliche Homocentroide t^r in einem Punkt A_0 schneiden möge, so erhalten wir den einfallenden Hauptstrahl p , der dem Lichtpunkt P_0 zugeordnet ist als Parallele zu $A_0 \Theta$, und dem Lichtpunkt P_0 entspricht ein homocentrischer Bildpunkt \mathfrak{P}_0 auf dem austretenden Hauptstrahl p . Wir bekommen so zu einem räumlichen System S_0^r von Lichtpunkten ein entsprechendes räumliches System \mathcal{S}_0^r von homocentrischen Bildpunkten. Wenn aber jene Ebene ΩP_0 die räumliche Homocentroide in mehreren Punkten schneidet, so ist das Entsprechen der Systeme S_0^r , \mathcal{S}_0^r mehrdeutig.

Für einen Lichtpunkt A auf dem einfallenden Hauptstrahl $a \Theta$ ist in Figur 12 die Strecke $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ die homocentrische Differenz, welche wir noch rechnerisch bestimmen wollen.

Es ist

$$\frac{A_1 \Theta}{A \Theta} = n_1 \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \right)^2, \quad \frac{A_2 \Theta}{A \Theta} = n_1,$$

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \Xi}{A_2 \Xi} = \frac{1}{n_2} \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right); \quad \frac{\mathfrak{A}_2 \Xi}{A_1 \Xi} = \frac{1}{n_2};$$

ferner

$$A_1 \Xi = A_1 \Theta + \Theta \Xi = n_1 \left(\frac{\cos e_1}{\cos e_1} \right)^2 A \Theta + \Theta \Xi,$$

$$A_2 \Xi = A_2 \Theta + \Theta \Xi = n_1 A \Theta + \Theta \Xi,$$

und

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \Xi - \mathfrak{A}_2 \Xi = \frac{1}{n_2} \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 A_2 \Xi - \frac{1}{n_2} A_1 \Xi.$$

Hiernach ergibt sich für die homocentrische Differenz

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{n_2} \left\{ \Theta \Xi \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} - 1 \right) + n_1 \cdot A \Theta \left[\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - \left(\frac{\cos e_1}{\cos e_1} \right)^2 \right] \right\}$$

und für $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = 0$ folgt:

$$\frac{n_1 \cdot A \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2}{\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} \right)^2 - \left(\frac{\cos e_1}{\cos e_1} \right)^2}.$$

Hieraus kann man die Gleichung für die räumliche Homocentroide ableiten; aber die Rechnung ist sehr umständlich.

V. Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch beliebig viele Prismen.

Die homocentrische Brechung der Lichtstrahlen durch beliebig viele Prismen tritt ein, wenn die brechenden Kanten derselben parallel sind und der Durchgang der Lichtstrahlen in einer Normalebene erfolgt. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die Medien an den beiden Seiten eines jeden Prisma verschieden sind; demnach können die zwischen den Prismen befindlichen Medien auch als Prismen betrachtet werden. Es bilden dann die Prismen und die zwischen liegenden Medien eine Reihe von Prismen, die mit berührenden Seiten an einander stehen.

Wir betrachten in Figur 14 zunächst nur zwei Prismen $E_I \Omega E_{II}$, $E_{III} \Omega' E_{IV}$, deren brechenden Kanten Ω , Ω' parallel sind, und bezeichnen die Brechungsindices an den Ebenen ΩE_I , ΩE_{II} , ΩE_{III} , ΩE_{IV} gegen die Prismen resp. mit n_1 , n_2 , n_3 , n_4 . Bei dem ersten Prisma sind für eine angenommene Richtung der parallelen einfallenden Hauptstrahlen durch die Brechungsindices n_1 , n_2 die Hauptstrahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$, $\iota\Omega$ mit den entsprechenden Punkten L , Λ_1 , ι_1 in bekannter Weise construiert. Bei dem zweiten Prisma ist die Richtung $l'\Omega'$ der einfallenden Hauptstrahlen zu $\iota\Omega$ parallel und es sind in gleicher Weise die Hauptstrahlen $l'\Omega'$, $\lambda'\Omega'$, $\iota'\Omega'$ mit den entsprechenden Punkten L' , Λ'_1 , L'_1 bestimmt.

Ein Gang der Hauptstrahlen a , α , α , α' , α' ergibt sich, indem wir dieselben resp. parallel zu l , λ , ι , λ' , ι' ziehen. Nehmen wir nun auf dem Hauptstrahl a einen beliebigen Lichtpunkt A an und ziehen wir die Geraden AA_1 ,

$A_1 \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1 A_1', A_1' \mathcal{A}_1'$ bis an die betreffenden Hauptstrahlen resp. parallel zu $L \Lambda_1, \Lambda_1 \mathcal{L}_1, L' \Lambda_1', \Lambda_1' \mathcal{L}_1'$, so erhalten wir dadurch zu dem Lichtpunkt A den entsprechenden ersten Bildpunkt \mathcal{A}_1' auf dem zugehörigen austretenden Hauptstrahl a' . Ziehen wir ferner $A A_2, A_2 \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 A_2', A_2' \mathcal{A}_2'$ bis an die betreffenden Hauptstrahlen resp. senkrecht auf $\Omega E_I, \Omega E_{II}, \Omega' E_{III}, \Omega' E_{IV}$, so ergibt sich zu dem Lichtpunkt A der entsprechende zweite Bildpunkt \mathcal{A}_2' auf dem austretenden Hauptstrahl a' . In gleicher Weise erhalten wir zu den Lichtpunkten B, C auf den parallel zu a einfallenden Hauptstrahlen b, c die entsprechenden ersten und zweiten Bildpunkte $\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2', \mathcal{C}_1', \mathcal{C}_2'$ auf den austretenden Hauptstrahlen b', c' .

Den Lichtpunkten ABC im System S entsprechen demnach die ersten Bildpunkte $\mathcal{A}_1' \mathcal{B}_1' \mathcal{C}_1'$ im System \mathcal{S}_1' und die zweiten Bildpunkte $\mathcal{A}_2' \mathcal{B}_2' \mathcal{C}_2'$ im System \mathcal{S}_2' . Diese Systeme $S, \mathcal{S}_1', \mathcal{S}_2'$ sind affin. Die Affinitätsachse g_0' der Systeme $\mathcal{S}_1', \mathcal{S}_2'$, die durch die drei Paare entsprechender Punkte $\mathcal{A}_1' \mathcal{B}_1' \mathcal{C}_1'$ und $\mathcal{A}_2' \mathcal{B}_2' \mathcal{C}_2'$ bestimmt sind, ergibt sich durch die Schnittpunkte entsprechender Geraden. Dieser Affinitätsachse g_0'' , welche die austretenden Hauptstrahlen in den Punkten $\mathcal{A}_0'' \mathcal{B}_0'' \mathcal{C}_0'' \dots$ schneidet, entspricht im System S die Gerade g_0 , welche die einfallenden Hauptstrahlen in den Lichtpunkten $A_0 B_0 C_0 \dots$ schneidet, zu denen die homocentrische Bildpunkte $\mathcal{A}_0'' \mathcal{B}_0'' \mathcal{C}_0'' \dots$ gehören; und diese beiden Punktreihen sind ähnlich.

Anstatt zu jenen Lichtpunkten B, C die entsprechenden ersten und zweiten Bildpunkte zu construieren, erhalten wir einfacher zu den Punkten Ω und Θ , wenn wir dieselben als Lichtpunkte im System S betrachten, die entsprechenden Lichtpunktpaare $\mathcal{D}_1'' \mathcal{D}_2'', \mathcal{T}_1'' \mathcal{T}_2''$. Wir ziehen, weil Ω auf dem in das zweite Prisma einfallenden Hauptstrahl \uparrow liegt, die Gerade $\Omega \Omega''$ parallel $L' \Lambda_1'$ bis an λ'' und $\Omega'' \mathcal{D}_1''$ parallel $\Lambda_1' \mathcal{L}_1'$ bis an ν'' ; ferner $\Omega \Omega''$, $\Omega'' \mathcal{D}_2''$ resp. senkrecht $\Omega' E_{III}, \Omega' E_{IV}$. Zu dem Punkt Θ , in welchem der Hauptstrahl a das erste Prisma trifft, erhalten wir die entsprechenden Bildpunkte, weil in Θ drei entsprechende Punkte T, T_1, T_2 zusammenfallen, indem wir $\Theta \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1 T_1', T_1' \mathcal{T}_1'$ resp. parallel $\Lambda_1 \mathcal{L}_1, L' \Lambda_1', \Lambda_1' \mathcal{L}_1'$ und $\Theta \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2 T_2', T_2' \mathcal{T}_2'$ resp. senkrecht $\Omega E_{II}, \Omega' E_{III}, \Omega' E_{IV}$ ziehen. Die affinen Systeme $S, \mathcal{S}_1'', \mathcal{S}_2''$ sind dann auch durch die entsprechenden Punkte $A \Omega \Theta, \mathcal{A}_1'' \mathcal{D}_1'' \mathcal{T}_1'', \mathcal{A}_2'' \mathcal{D}_2'' \mathcal{T}_2''$ bestimmt, und die Affinitätsachse g_0'' der Systeme $\mathcal{S}_1'', \mathcal{S}_2''$ ergibt sich durch die Schnittpunkte zweier Paare entsprechender Geraden. Es schneiden sich die entsprechenden Geraden $\mathcal{T}_1'' \mathcal{D}_1'', \mathcal{T}_2'' \mathcal{D}_2''$ im Punkt \mathcal{U}_0'' und die entsprechenden Geraden $\mathcal{A}_1'' \mathcal{D}_1'', \mathcal{A}_2'' \mathcal{D}_2''$ im Punkt \mathcal{V}_0'' auf der Affinitätsachse. Nehmen wir für die parallelen einfallenden Hauptstrahlen a, b, c eine andere Richtung, dann entspricht derselben eine andere Affinitätsachse g_0'' und eine andere Gerade g_0 .

Sind nun statt der zwei betrachteten Prismen mehrere Prismen gegeben, deren brechenden Kanten parallel sind, so erhalten wir bei einer Anzahl von ν Prismen durch die weitere Fortsetzung der für jene zwei Prismen ausgeführten Construction in analoger Weise die Affinitätsachse g_0'' der beiden

letzten entsprechenden affinen Systeme \mathfrak{S}_1^v , \mathfrak{S}_2^v und die entsprechende Gerade g_0 in dem affinen System S der Lichtpunkte. Die Gerade g_0 enthält die auf den parallelen einfallenden Hauptstrahlen liegende Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, die sich in der Affinitätsachse g_0^v befinden. Hiernach ergibt sich der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch beliebig viele Prismen, deren brechende Kanten parallel sind, liegen die auf parallelen, in einer Normalebene einfallenden Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer Geraden g_0 ; und diese homocentrischen Bildpunkte auf den letzten parallelen austretenden Hauptstrahlen liegen in einer entsprechenden Geraden g_0^v .

Einer zu g_0 Parallelen im System S entsprechen in den Systemen \mathfrak{S}_1^v , \mathfrak{S}_2^v Parallele zu g_0^v ; demnach entsprechen den Lichtpunkten auf einer zu g_0 Parallelen gleiche homocentrische Differenzen.

Wenn insbesondere die Affinitätsachse g_0^v zu den letzten austretenden Hauptstrahlen parallel ist, dann entspricht derselben im System S eine Gerade g_0 , die parallel zu den einfallenden Hauptstrahlen ist. Liegt die Gerade g_0 so, dass sie, als einen einfallenden Hauptstrahl betrachtet, einen durch alle Prismen gehenden Strahlengang liefert, dann entspricht in diesem Falle jedem Lichtpunkt auf dem einfallenden Hauptstrahl g_0 ein homocentrischer Bildpunkt auf dem zugehörigen austretenden Hauptstrahl g_0^v . Auf allen anderen zu g_0 parallelen einfallenden Hauptstrahlen giebt es keinen im Endlichen befindlichen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. In den affinen Systemen \mathfrak{S}_1^v , \mathfrak{S}_2^v ist dann auf jedem austretenden Hauptstrahl der Abstand zweier entsprechender Punkte constant; die homocentrische Differenz ist demnach in diesem Falle unabhängig von der Lage des Lichtpunktes auf dem einfallenden Hauptstrahl und proportional dem Abstände dieses Hauptstrahles von dem Hauptstrahl g_0 . Wenn die Prismen sich in demselben Medium befinden, tritt dieser Fall beim Minimum der Ablenkung ein, wie Herr A. Gleichen a. a. O. bewiesen hat.

Die im obigen Satze enthaltenen Beziehungen sind in jeder Normalebene vorhanden und demnach liegen die Lichtpunkte auf allen parallelen einfallenden Hauptstrahlen, die zu einer Normalebene parallel sind, in einer Ebene g_0 und die zugehörigen homocentrischen Bildpunkte in einer Ebene g_0^v . Das System G_0 der Lichtpunkte in der Ebene g_0 und System \mathfrak{G}^v der entsprechenden homocentrischen Bildpunkte in der Ebene g_0^v sind affin, weil dem Bündel der parallelen einfallenden Hauptstrahlen das Bündel der parallelen austretenden Hauptstrahlen affin entspricht.

Die Untersuchung der homocentrischen Brechung durch die Linse, bei der zweien Lichtpunkten eines einfallenden, die Linsenachse schneidenden Hauptstrahles homocentrische Bildpunkte entsprechen, wollen wir in einer anderen Abhandlung mittheilen.

VI.

Ueber die Wendepole einer kinematischen Kette.

Von

Prof. F. WITTENBAUER

in Graz.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—12.

Für das Studium der gegenseitigen Bewegungen der Glieder einer ebenen kinematischen Kette erscheint es von Bedeutung, Constructionen für die Wendepole dieser Bewegungen zu kennen. Denn neben den Drehpolen der momentanen Bewegung spielen die genannten Punkte eine wichtige Rolle. Zunächst in rein geometrischer Hinsicht, denn die Kenntniss des Wendepoles führt bekanntlich mit Hilfe einer sehr einfachen Construction zu den Krümmungsmittelpunkten den Bahnen, welche die Punkte des einen Gliedes in Bezug auf ein anderes beschreiben.

In zweiter Linie aber dient der Wendepol mit zur Bestimmung des Beschleunigungszustandes, in welchem sich zwei Glieder gegen einander befinden; denn der Kreis, der über der Verbindungslinie des Drehpoles mit dem Wendepol als Durchmesser gezogen wird, enthält bereits den Beschleunigungspol jener relativen Bewegung.

Während es Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist, die Construction der Wendepole einer kinematischen Kette zu lehren, soll die Anwendung auf die Ermittlung der Beschleunigungspole einer Kette in einer späteren Abhandlung gezeigt werden.

1. In meiner Untersuchung über: „Die Wendepole der absoluten und der relativen Bewegung“* habe ich die Construction des Wendepoles für die resultirende aus zwei Bewegungen eines ebenen Systems, der führenden und der geführten Bewegung, gelehrt. Hierbei wurde zunächst die Annahme gemacht, dass die Winkelgeschwindigkeiten beider Bewegungen in den beiden auf einander folgenden Zeitelementen unveränderlich bleiben. Des besseren Verständnisses halber möge die dort mit Hilfe des barycentrischen Calculs begründete Construction nochmals kurz erwähnt werden.

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, 36. Bd.

Bezeichnen $O_{12} O_{23}$, $J_{12} J_{23}$ die Drehpole und die Wendepole der führenden Bewegung des Systemes 2 in dem (als fest zu denkenden) System 1, beziehungsweise der geführten Bewegung des Systemes 3 im System 2, so ergibt sich unter Zugrundelegung obiger Voraussetzung der resultierende Wendepol J^0_{13} aus dem resultierenden Drehpole O_{13} durch folgende einfache Construction (Taf. IV, Fig. 1):

Man ziehe die Linien $O_{12} J_{23}$, $O_{23} J_{12}$, $O_{13} J_{23}$, ferner $O_{13} K \parallel O_{12} J_{12}$, $O_{13} L \parallel O_{23} J_{23}$, $LM \parallel O_{12} O_{23}$, $NJ^0_{13} \parallel LK$, so giebt der Schnitt der Linien MK und NJ^0_{13} den gesuchten Wendepol J^0_{13} .

Keht man die beiden gegebenen Bewegungen um, so ändern zwar die Drehpole ihre Lage nicht, die Wendepole $J_{12} J_{23}$ hingegen gehen über in $J_{21} J_{32}$, wobei $O_{12} = O_{21}$ die Strecke $J_{12} J_{21}$ und $O_{23} = O_{32}$ die Strecke $J_{23} J_{32}$ halbt. Führt man für diese umgekehrten Bewegungen die Construction des Wendepoles wieder durch (Fig. 2), wobei jetzt J_{32} den Wendepol der führenden, J_{21} jenen der geführten Bewegung bedeutet, so ergibt sich der Wendepol J^0_{31} des Systemes 1 in Bezug auf das als fest gedachte System 3. Da diese Bewegung die Umkehrung der vorhin resultierenden ist, so muss der Punkt $O_{13} = O_{31}$ die Strecke $J^0_{13} J^0_{31}$ halbiren.

Man beachte also folgende Regel: Aus dem Wendepol J_{mn} der führenden und jenem J_{np} der geführten Bewegung liefert die angegebene Construction den Wendepol J^0_{mp} .

Geht die Bewegung des führenden Systemes in eine durch zwei Zeitelemente dauernde Rotation um denselben Drehpol über, so fallen für diese Bewegung Drehpol und Wendepol zusammen und die Construction vereinfacht sich wesentlich (Fig. 3). Man ziehe dann $O_{23} J_{12}$, mache

$$O_{13} K \parallel O_{12} J_{12}, \quad O_{12} K \parallel O_{13} J^0_{13},$$

so ergibt der Schnitt von $O_{23} J_{12}$ mit $O_{13} J^0_{13}$ den gesuchten Wendepol J^0_{13} .

Sind die Bewegungen beider Systeme dauernde Rotationen, so fallen $J_{12} J_{23}$ beziehungsweise mit $O_{12} O_{23}$ zusammen; man verbinde dann (Fig. 4) $O_{12} O_{23} O_{13}$ mit einem beliebigen Punkt K , ziehe

$$O_{13} L \parallel O_{12} K, \quad LJ^0_{13} \parallel KO_{13},$$

so giebt der Schnitt der Linien LJ_{13} und $O_{12} O_{23}$ den gesuchten Wendepol J^0_{13} .

Für die Umkehrung der Bewegungen vertauschen die führende und die geführte Bewegung ihre Rollen; die Construction von J^0_{31} erfordert dann die Linien

$$O_{13} L' \parallel O_{23} K, \quad L'J^0_{31} \parallel KO_{13}.$$

2. Allerdings sind alle diese Constructionen, wenige Ausnahmen abgerechnet, nur für den Fall richtig, dass die Winkelgeschwindigkeiten beider Systeme während beider Zeitelemente keine Aenderung erleiden. Allein ich habe in der früher erwähnten Abhandlung bereits angegeben,

wie man bei beliebiger Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeiten den Wendepol J_{13} findet, wenn derjenige J^0_{13} für unveränderliche Winkelgeschwindigkeiten bereits construirt ist. Die beiden Wendepole J_{13} und J^0_{13} liegen nämlich in einer Senkrechten auf die Polgerade $O_{13}O_{23}$ und zwar sind sie von einander um die Strecke

$$\beta = b \cdot \frac{\lambda_{13}}{\omega^2_{13}}$$

entfernt. Hierin bedeutet ω_{13} die resultirende Winkelgeschwindigkeit, λ_{13} die resultirende Winkelbeschleunigung und b die Entfernung der Punkte O_{13} und B_{13} , wobei B_{13} durch den barycentrischen Ausdruck

$$\lambda_{13} \cdot B_{13} = \lambda_{12} \cdot O_{12} + \lambda_{23} \cdot O_{23}$$

gegeben ist. Von grösster Wichtigkeit für vorliegenden Zweck ist nun der aus obiger Bemerkung fließende Satz:

Alle Wendepole J_{13} , die zu fünf Punkten $O_{12}O_{23}O_{13}$, $J_{12}J_{23}$ gehören, liegen in einer zur Polgeraden senkrechten Geraden.

Denn, ohne die Strecke β zu construiren, wird es nach obigem Satze in den meisten Fällen, wo es sich um die Bewegungen der Glieder einer kinematischen Kette handelt, möglich sein, zwei Gerade anzugeben, in denen der resultirende Wendepol liegen muss. Hierbei ist nach folgendem Schema zu verfahren:

Sind von vier bewegten Systemen $mnpq$ ausser den Drehpolen

$$\begin{matrix} O_{mn} O_{np} \\ O_{mq} O_{qp} \end{matrix} > O_{mp}$$

noch die vier Wendepole $J_{mn}J_{np}J_{mq}J_{qp}$ gegeben, so findet man den fünften Wendepol J_{mp} nach demselben Schema, das heisst, es ist

$$\begin{matrix} J_{mn}J_{np} \\ J_{mq}J_{qp} \end{matrix} > J_{mp}$$

Man sucht nämlich aus $J_{mn}J_{np}$ nach Construction Figur 1 den Punkt J^0_{mp} und fällt von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Polgerade $O_{mn}O_{np}$; sodann führt man dasselbe mit den Wendepolen $J_{mq}J_{qp}$ in Bezug auf die Polgerade $O_{mq}O_{qp}$ durch; wo die beiden Senkrechten sich schneiden, befindet sich der resultirende Wendepol J_{mp} .

3. Eine Anwendung dieses Vorganges auf die Wendepole des Kurbelviereckes wird ihn völlig klar machen.

Behufs Construction des Wendepoles J_{13} des Gliedes 3 in Bezug auf das als ruhend gedachte Glied 1 (Fig. 5) construire man auf den Polgeraden $O_{12}O_{23}$ und $O_{14}O_{43}$ nach Figur 4 die Punkte J^0_{13} , wobei der Punkt K im Schnitte der Glieder 1 und 3 gewählt wurde. Man ziehe also die Linien

$$O_{13}L \parallel O_{12}O_{14}, \quad LJ^0_{13} \quad KO_{13}$$

und errichte in den beiden Punkten J^0_{13} die Senkrechten auf die Pol-

geraden $O_{12}O_{23}$ und $O_{14}O_{43}$. Der Schnitt beider Senkrechten ist der gesuchte Wendepol J_{13} .*

Figur 6 zeigt die Construction des Wendepoles J_{31} für die umgekehrte Bewegung, das heisst bei festgehaltenem Gliede 3. Es muss wieder O_{13} in der Mitte zwischen J_{13} und J_{31} liegen.

In ebenso einfacher Weise sind die Wendepole der meisten kinematischen Ketten zu bestimmen und zwar lässt sich im Allgemeinen sagen, dass oben erwähntes Verfahren stets in allen jenen Fällen zur Kenntniss der Wendepole führen wird, in welchen sich die Configuration der Drehpole durch einfaches Ziehen von Polgeraden ergibt. Es kann für diese Constructionen sogar dasselbe Zifferschema dienen, welches zur Ermittlung der Drehpole benutzt wird, nur muss hier auf die Reihenfolge der Ziffern sorgfältig geachtet werden, da die Vertauschung derselben eine Umkehrung der Bewegung bedeutet.

Um z. B. in der von Burmester als Watt'scher Mechanismus bezeichneten Kette (Fig. 7) den Wendepol J_{51} zu construiren, ermittle man zunächst durch Ziehen von Polgeraden den Drehpol O_{51} , sodann nach Figur 5 die Wendepole J_{31} und J_{54} und hieraus nach dem Schema

$$\begin{matrix} J_{53} J_{31} \\ J_{54} J_{41} \end{matrix} > J_{51}$$

mit Benützung der Constructionen Figur 1 und 3 den Wendepol J_{51} . Hierbei sind die Wendepole J_{53} und J_{41} identisch mit den Drehpolen O_{53} und O_{41} .

Behufs Ermittlung des Wendepoles J_{13} in der durch Figur 8 dargestellten Kette suche man zunächst nach Figur 5 die Wendepole J_{12} und J_{23} ; dann liefert das Schema

$$\begin{matrix} J_{12} J_{23} \\ J_{14} J_{43} \end{matrix} > J_{13}$$

den gesuchten Wendepol J_{13} im Schnitt der durch die Punkte J_{13}^0 auf die zugehörigen Polgeraden $O_{12}O_{23}$, $O_{14}O_{43}$ errichteten Senkrechten. Hierbei sind wieder die Constructionen Figur 1 und 3 zu verwenden.

4. In jenen Fällen, in welchen sich die Polconfiguration nicht durch einfaches Ziehen von Polgeraden erreichen lässt, versagt auch die so einfache Construction der Wendepole zum Theile, das heisst, sie liefert gewöhnlich nur eine Gerade, in der der gesuchte Wendepol liegt.

Hier muss nun wenigstens ein Wendepol mit Hilfe anderer Mittel gefunden werden, die jetzt besprochen werden sollen. Die Mittheilung derselben giebt Gelegenheit, einige interessante Eigenschaften der Wendepole zu erwähnen.

* Vergl. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“, I. Bd. S. 123.

Wir betrachten wieder drei ebene Systeme: das als ruhend gedachte System 1, das führende 2 und das von diesem geführte 3. $O_{12} O_{23} O_{13}$ seien die Drehpole, $J_{12} J_{23} J_{13}^0$ die zugehörigen Wendepole, letzterer nach Figur 1 construirt, also ohne Berücksichtigung der Winkelbeschleunigungen. Dieser Wendepol J_{13}^0 hat, wie ich in der oben erwähnten Abhandlung gezeigt habe, den barycentrischen Ausdruck

$$\omega_{13}^2 J_{13}^0 = \omega_{12}^2 J_{12} + \omega_{23}^2 J_{23} + 2 \omega_{12} \omega_{23} \cdot O_{23},$$

worin $\omega_{12} \omega_{23} \omega_{13}$ die Winkelgeschwindigkeiten der drei Systeme um die betreffenden Drehpole bedeuten. Es ist also J_{13}^0 der Schwerpunkt der drei Punkte $J_{12} J_{23} O_{23}$, wenn in ihnen die Gewichte ω_{12}^2 , ω_{23}^2 und $2 \omega_{12} \omega_{23}$ angebracht werden.

Kennt man nun eine Gerade i_{13} (Fig. 9), auf welcher der Wendepol J_{13} liegt, so gewinnt man diesen durch Ziehen der Geraden $J_{13} J_{13}^0$ senkrecht zu $O_{12} O_{23}$.

Verändern wir jetzt die Lage des Wendepoles J_{12} , während J_{23} und O_{23} dieselben bleiben, so verändert auch J_{13}^0 seine Lage und zwar nach den Gesetzen des Schwerpunktes in ähnlicher Weise wie J_{12} . Beschreibt insbesondere J_{12} eine Gerade i_{12} , so durchschreitet J_{13}^0 eine parallele Gerade i_{13}^0 in ähnlicher Punktreihe. Zwei entsprechende Punkte J_{12} und J_{13}^0 liegen auf demselben Strahl eines Büschels, dessen Scheitel S auf der Linie $O_{23} J_{23}$ liegt und den barycentrischen Ausdruck hat:

$$S = \omega_{23} \cdot J_{23} + 2 \omega_{12} \cdot O_{23};$$

denn der oben angeführte Ausdruck für J_{13}^0 kann auch geschrieben werden:

$$J_{13}^0 = \omega_{12}^2 J_{12} + (\omega_{23}^2 + 2 \omega_{12} \omega_{23}) \cdot S.$$

Da die entsprechenden Punkte J_{12} und J_{13}^0 in Strahlen σ_{13} senkrecht zu $O_{12} O_{23}$ liegen, so durchschreitet auch J_{13} gleichzeitig eine Punktreihe auf i_{13} , welche den von J_{13}^0 und J_{12} beschriebenen ähnlich ist.

Sucht man nun umgekehrt aus J_{13} und J_{32} den Wendepol J_{12} der resultirenden Bewegung, so findet man durch Construction nach Figur 1 zunächst den Punkt J_{12}^0 , der mit J_{12} in einer Senkrechten σ_{12} auf der Polgeraden liegen muss.

J_{12}^0 hat den barycentrischen Ausdruck:

$$\omega_{12}^2 J_{12}^0 = \omega_{13}^2 J_{13} + \omega_{32}^2 J_{32} + 2 \omega_{13} \omega_{32} \cdot O_{32}.$$

Beschreibt somit J_{13} eine Gerade i_{13} , so durchschreitet J_{12}^0 die parallele Gerade i_{12}^0 in ähnlicher Punktreihe. Da

$$J_{32} = 2 O_{23} - J_{23}$$

ist, so kann obiger Ausdruck auch geschrieben werden:

$$J_{12}^0 = \omega_{13}^2 J_{13} - (\omega_{23}^2 + 2 \omega_{12} \omega_{23}) \cdot S,$$

worin S denselben Ausdruck hat wie oben.

Zwei entsprechende Punkte J^0_{12} und J_{13} liegen somit auf demselben Strahl eines Büschels, das seinen Scheitel wieder in S hat.

Hieraus folgt nun eine einfache Construction des Wendepoles, wenn der Punkt S und von den vier Geraden $i_{13} i^0_{13} i_{12} i^0_{12}$ drei bekannt sind. Um z. B. zu J_{12} den zugehörigen Punkt J_{13} zu bestimmen, ziehe man den Strahl SJ_{12} , der die Gerade i^0_{13} in J^0_{13} schneidet, und durch diesen Punkt den Strahl σ_{13} bis zum Schnitte J_{13} mit i_{13} . Oder man zieht durch J_{12} den Strahl σ_{12} bis zum Schnitte J^0_{12} mit i^0_{12} ; sodann schneidet der Strahl SJ^0_{12} die Gerade i_{13} in J_{13} .

Von Wichtigkeit ist ferner die Bemerkung, dass die von den Strahlen σ_{12} und σ_{13} gebildeten Parallelbüschel ähnlich sind. Ihr im Endlichen liegender Doppelstrahl geht durch S , er schneidet die Geraden i_{12} und i_{13} in zwei entsprechenden Wendepolen J_{12} und J_{13} .

Lässt man statt J_{12} den Wendepol J_{23} der geführten Bewegung seinen Ort auf einer Geraden i_{23} verändern, so gelangt man auf demselben Wege zu ganz analogen Resultaten. Nur liegt jetzt der Scheitel S_1 der beiden Strahlenbüschel nicht mehr auf einem Durchmesser des Wendekreises, wie früher, sondern auf der Geraden $O_{23}J_{12}$ und hat den Ausdruck:

$$S_1 \equiv \omega_{12} J_{12} + 2\omega_{23} \cdot O_{23}.$$

5. Die Resultate des vorigen Artikels führen nun zur Lösung einer Aufgabe, welche für die Construction der Wendepole von principieller Wichtigkeit ist.

Es seien (Fig. 10) von vier Systemen 1, 2, 3, 4 sämtliche Drehpole und die Wendepole der ersten drei Systeme $J_{13} J_{32} J_{21}$ gegeben; von den Wendepolen des vierten Systemes $J_{41} J_{42} J_{43}$ sei nur bekannt, dass sie beziehungsweise auf den Geraden $i_{41} i_{42} i_{43}$ liegen. Man suche diese Wendepole.

Um einen derselben, z. B. J_{42} zu ermitteln, nehme man auf i_{42} zunächst einen beliebigen Punkt W_{42} an, betrachte ihn als Wendepol und bestimme mit Hilfe der Punkte $O_{42} O_{21} O_{41}$, $W_{42} J_{21}$ und der Geraden i_{41} den auf derselben liegenden Wendepol W_{41} ; sodann suche man auf dieselbe Weise mit Hilfe der Punkte $O_{41} O_{13} O_{43}$, $W_{41} J_{13}$ und der Geraden i_{43} den auf dieser liegenden Wendepol W_{43} ; endlich aus $O_{43} O_{32} O_{42}$, $W_{43} J_{32}$ und der Geraden i_{42} den auf ihr liegenden Wendepol (W_{42}).

Nun nehme man auf i_{42} einen zweiten beliebigen Punkt W'_{42} an und ermittle in analoger Weise auf den Geraden $i_{41} i_{43} i_{42}$ die entsprechenden Punkte $W'_{41} W'_{43}$ (W'_{42}).

Nach Artikel 4 sind die auf den Geraden i liegenden Punktreihen $W_{42} W'_{42}$, $W_{41} W'_{41}$, $W_{43} W'_{43}$, (W_{42})(W'_{42}) ähnlich. Die erste und letzte dieser Punktreihen liegen auf derselben Geraden i_{42} ; ihr im Endlichen gelegener Doppelpunkt wird der gesuchte Wendepol J_{42} sein.

Die Parallelstrahlenbüschel σ , welche die beiden ähnlichen Punktreihen auf i_{42} projectiren, schneiden sich in einer Geraden π , welche durch den

Doppelpunkt geht und somit in ihrem Schnitte mit i_{42} den Wendepol J_{42} bestimmt.

Da die Punktreihen $J_{42}W_{42}W'_{42}$, $J_{41}W_{41}W'_{41}$, $J_{43}W_{43}W'_{43}$ ähnlich sind, so ergeben sich jetzt die beiden anderen Wendepole $J_{41}J_{43}$ in einfachster Weise.

Die hier auszuführenden Constructionen sind einfach und übersichtlich; sie können durch die Benützung der im vorigen Artikel gewonnenen Resultate, insbesondere der Eigenschaften des Punktes S , in vortheilhafter Weise abgekürzt werden.

6. Die soeben behandelte Aufgabe gestaltet sich viel einfacher, wenn von den drei Systemen 1, 2, 3 zwei Paare derselben dauernde Rotationen gegen einander ausführen. Es würde z. B. (Fig. 11) unter Beibehaltung der sonstigen Verhältnisse J_{12} mit O_{12} , J_{23} mit O_{23} zusammenfallen.

Errichtet man jetzt in O_{12} eine Senkrechte auf $O_{41}O_{42}$, so schneidet dieselbe die Geraden $i_{41}i_{42}$ bereits in entsprechenden Punkten, da der Punkt S (Artikel 4) hier mit O_{12} zusammenfällt.

Bei der Construction von W_{43} aus W_{41} ergibt sich zunächst nach Figur 1 W_{43}^0 , sodann durch Ziehen der Linie $W_{43}^0W_{43} \perp O_{41}O_{43}$ bis zum Schnitte mit i_{43} der Punkt W_{43} . Mit Hilfe dieses Punktes wird hierauf der auf i_{42} gelegene Punkt (W_{42}) construiert.

Eine zweite Gruppe entsprechender Punkte W' kann zweckmässig in folgender Weise ermittelt werden:

Verbindet man W_{41} mit W_{43}^0 , so schneidet diese Gerade den Wendedurchmesser $O_{13}J_{13}$ in S (Artikel 4). Die Senkrechte durch S auf $O_{41}O_{43}$ schneidet die Geraden $i_{41}i_{43}$ in entsprechenden Punkten $W'_{41}W'_{43}$; aus diesen wurden dann mit Benützung der Figur 3 die Punkte W'_{42} und (W'_{42}) bestimmt.

Der Schnitt der auf diese Weise gefundenen vier Strahlen σ , die Gerade π , schneidet i_{42} im Wendepol J_{42} .

Die beiden anderen Wendepole $J_{41}J_{43}$ können in zweifacher Weise gefunden werden: entweder durch Uebertragen des Aehnlichkeitsverhältnisses auf die Geraden $i_{41}i_{43}$ oder durch Benützung der Construction Figur 3.

7. Der soeben beschriebene Vorgang kann für die Bestimmung der Wendepole mancher kinematischen Kette verwendet werden, für welche die Anfangs erwähnten einfachen Constructionen nicht oder nur zum Theile anwendbar sind.

Hierher gehört z. B. die von Burmester als Dreispannmechanismus bezeichnete kinematische Kette (Figur 12). Um hier die Wendepole des Systemes 4 in Bezug auf die Systeme 1, 2, 3 zu ermitteln, bestimme man zunächst nach dem von Burmester angegebenen Verfahren* die Drehpole $O_{41}O_{42}O_{43}$, sodann nach Figur 5 den Wendepol J_{13} ; die Wende-

* Vergl. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“, I. Bd. S. 465.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 40. Jahrg. 1895. 2. Heft.

pole J_{12} und J_{32} fallen mit den Drehpolen O_{12} und O_{32} zusammen. Die Geraden $i_{41} i_{42} i_{43}$ erhält man mit Construction (Fig. 4) aus:

$$\begin{aligned} O_{45} O_{51} O_{41} & \cdot \cdot \cdot \cdot i_{41}, \\ O_{46} O_{62} O_{42} & \cdot \cdot \cdot \cdot i_{42}, \\ O_{47} O_{73} O_{43} & \cdot \cdot \cdot \cdot i_{43}. \end{aligned}$$

Sodann kann die im vorigen Artikel beschriebene Construction der Wendepole $J_{41} J_{42} J_{43}$ durchgeführt werden.

Ausser den zehn gegebenen Drehpolen, die zugleich Wendepole sind, den Wendepolen $J_{13} J_{28}$, deren Construction Figur 5 lehrt, und endlich den soeben gefundenen Wendepolen $J_{41} J_{42} J_{43}$ giebt es in dieser Kette noch 13 unbekannte Wendepole (von den Wendepolen der umgekehrten Bewegung abgesehen). Die Bestimmung derselben kann entweder direct mit Hilfe des oben geschilderten Vorganges oder aus den bereits bekannten Wendepolen geschehen. Um z. B. den Wendepol J_{52} zu finden, suche man die Drehpole $O_{52} O_{53} O_{58}$, die Wendepole J_{13} und J_{28} , sodann die Geraden $i_{52} i_{53} i_{58}$ nach dem Schema:

$$\begin{aligned} O_{51} O_{12} O_{52} & \cdot \cdot \cdot \cdot i_{52}, \\ O_{51} O_{13} O_{53}, J_{13} & \cdot \cdot \cdot i_{53}, \\ O_{51} O_{18} O_{58} & \cdot \cdot \cdot \cdot i_{58} \end{aligned}$$

und führe nun wieder die Construction des vorigen Artikels durch.

Oder auf indirectem Wege: man ermittle die Linien i_{52} und i'_{52} nach dem Schema:

$$\begin{aligned} O_{51} O_{12} O_{52} & \cdot \cdot \cdot \cdot i_{52}, \\ O_{54} O_{42} O_{52}, J_{42} & \cdot \cdot \cdot i'_{52}. \end{aligned}$$

Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Wendepol J_{52} .

S. C. Rodenberg hat in einer ausgezeichneten Arbeit: „Die Bestimmung der quadratischen Verwandtschaft der Krümmungs-Mittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette“* gelehrt. Obwohl unsere Arbeiten von völlig verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen und auch die Methode der Untersuchung eine andere ist, so dürften die Resultate beider doch geeignet sein, sich zu ergänzen. Man kann mit Hilfe der bekannten quadratischen Verwandtschaft der Krümmungs-Mittelpunkte ebenso leicht die Wendepole bestimmen, als man umgekehrt aus den Wendepolen die quadratische Verwandtschaft ermitteln kann. Welche Methode rascher zum Ziele führt, lässt sich nicht allgemein entscheiden. So ist z. B. für die in Figur 8 gezeichnete Kette der Wendepol einfacher zu finden wie die quadratische Verwandtschaft nach Rodenberg's Methode; beim Dreispannmechanismus (Figur 12) dürfte das Gegentheil eintreten.

* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1890.

VII.

Constructionen der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten und Construction des neunten Punktes zu acht Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung.

Von

Dr. CHR. BEYEL

in Zürich.

Hierzu Tafel V Figur 1—8.

Wir haben gezeigt*, wie zwei bestimmte Reciprocitäten (Nullsysteme) der Ebene zu einer Curve dritter Ordnung führen. Die Curve erscheint gleichsam als Leitlinie dieser Reciprocitäten. Damit tritt ihre Darstellung in Analogie mit derjenigen der Kegelschnitte aus dem Polarsysteme.

Wir wollen nun beweisen, dass jede beliebige Curve dritter Ordnung durch zwei Nullsysteme dargestellt werden kann. Der Beweis ist erbracht, wenn wir neun in allgemeiner Lage befindliche Punkte einer Curve dritter Ordnung geben und aus ihnen zwei Reciprocitäten ableiten, durch welche sich diese Curve hervorbringen lässt.

1. XYZ , AB , A_1B_1 , M , N seien die neun in allgemeiner Lage gegebenen Punkte der Curve dritter Ordnung C^3 . Wir wählen zwei von ihnen — AB — als Grundpunkte der einen Reciprocität und zwei weitere — A_1B_1 — als Grundpunkte der anderen. XYZ sei ein Punktetripel der zwei Reciprocitäten. Legen wir dann durch $ABXYZ$ einen Kegelschnitt K^2 und durch A_1B_1XYZ einen Kegelschnitt K^2_1 , so treffen sich diese Kegelschnitte in einem vierten Punkte P , zu dem das Tripel XYZ zugeordnet ist.** Der Kegelschnitt K^2 schneidet C^3 in einem sechsten Punkte C . K^2_1 trifft C^3 in einem sechsten Punkte C_1 . Diese zwei Punkte CC_1 bilden resp. mit AB , A_1B_1 die Grundpunktdreiecke der zwei Reciprocitäten $(ABC\Delta)(A_1B_1C_1\Delta_1)$. Wir suchen CC_1 .

* In der Abhandlung: „Darstellung der Curven dritter Ordnung und Klasse aus zwei Reciprocitäten.“ Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 38, 1893, S. 65 flg. An jene Abhandlung schliesst sich die folgende als C an.

** Loco citato pag. 68.

Zu diesem Zwecke gehen wir von einem beliebigen Punkte H auf K^2 aus. Dieser bestimmt im Allgemeinen mit den acht Punkten XYZ , AB , A_1B_1 , M eine Curve dritter Ordnung C_m^3 . Sie lässt sich durch zwei Reciprocitäten R_m, R_{m1} darstellen, in denen das Tripel XYZ dem Punkte P zugeordnet ist. ABH sind die drei Grundpunkte der einen Reciprocität. A_1B_1 sind zwei Grundpunkte der anderen. Der dritte H_{1m} liegt auf K_1^2 und wird durch folgenden Gedankengang gefunden:

Wir suchen in der ersten Reciprocität zu M die entsprechende Linie m . Wir benutzen dazu den Kegelschnitt durch $ABHM$ und X . Er schneidet aus der Geraden \overline{XP} — sie sei mit p bezeichnet — einen Punkt S_m von m .* Construiren wir jetzt auf allen Geraden durch S_m die entsprechenden Punkte in der Reciprocität R_{m1} , so liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitt durch $A_1B_1H_{1m}$ und S_m . Nun entsprechen die Geraden m, p den resp. Punkten M, X in beiden Reciprocitäten $R_m R_{m1}$, weil die Punkte M, X auf C_m^3 liegen. Daraus folgt, dass der zuletzt erwähnte Kegelschnitt auch durch M und X geht. Folglich ist er durch $A_1B_1S_mM$ und X bestimmt und schneidet aus K_1^2 den Punkt H_{1m} .

Lassen wir an Stelle von M den Punkt N treten, so wird durch XYZ , ABH , A_1B_1N eine Curve C_n^3 festgelegt. Auch diese lässt sich durch zwei Reciprocitäten $R_n R_{n1}$ darstellen. Die eine hat ABH zu Grundpunkten; die andere A_1B_1 und einen auf K_1^2 liegenden Punkt H_{1n} . Zu seiner Construction legen wir durch $ABHX$ und N einen Kegelschnitt. Er schneide p zum zweiten Male in S_n . Dann geht durch $S_n X A_1 B_1 N$ ein Kegelschnitt, der K_1^2 in H_{1n} trifft.

Durchläuft nun der Punkt H den Kegelschnitt K^2 , so gehört zu jeder Lage von H ein Punkt H_{1m} und ein Punkt H_{1n} . Diese Punkte bilden zwei projectivische Reihen auf K_1^2 . P ist ein Doppelpunkt der Reihen. Der andere ist der gesuchte Grundpunkt C_1 der Reciprocität $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$. In ihm schneiden sich nämlich zwei Curven dritter Ordnung C_m^3, C_n^3 , von denen wir nachweisen können, dass sie zusammenfallen. Beide Curven haben neun Punkte gemeinsam. Diese sind XYZ , $A_1 B_1 C_1$, AB und ein Punkt C auf K^2 . Es wäre nun denkbar, dass C der neunte Punkt sei, durch den alle Curven dritter Ordnung gehen müssen, welche die acht Punkte XYZ , AB , $A_1 B_1 C_1$ gemeinsam haben. Von diesen acht Punkten liegen aber sechs — $XYZ A_1 B_1 C_1$ — auf einem Kegelschnitt. Also muss nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Curven dritter Ordnung der neunte Punkt auf der Verbindungslinie \overline{AB} der zwei übrigen Punkte liegen. Er kann also nicht C sein. In analoger Weise schliessen wir, dass alle Curven, welche durch die acht Punkte $XYZ ABC A_1 B_1$ gehen, einen neunten Punkt auf der Geraden $\overline{A_1 B_1}$ gemeinsam haben. Folglich kann C_1 dieser neunte Punkt nicht sein.

* L. c. pag. 66.

Damit ist bewiesen, dass durch die Punkte XYZ , $A_1B_1C_1$, ABC nur eine Curve dritter Ordnung geht und diese muss mit der gegebenen Curve C^3 identisch sein. Haben wir C_1 als Doppelpunkt der erwähnten Projectivität gefunden, so legen wir durch $A_1B_1C_1X$ und M (oder N) einen Kegelschnitt und suchen seinen zweiten Schnittpunkt $S_m(S_n)$ mit p . Durch ihn, ABX und M (resp. N) geht ein Kegelschnitt, welcher aus K^2 den Punkt C schneidet.

2. Die Durchführung der Construction giebt uns den exacten Nachweis für die Projectivität der Reihen $H_{1m}H_{1n}$.

Wir beginnen damit, dass wir in bekannter Weise* den vierten gemeinsamen Punkt P der Kegelschnitte $K^2(XYZAB)$ und $K^2_1(XYZA_1B_1)$ suchen (Fig. 1).** Sodann wählen wir auf K^2 zwei beliebige Punkte HH^* . Wir legen durch $ABXMH$ und $ABXMH^*$ zwei Kegelschnitte und zeichnen ihre Schnittpunkte $S_mS_m^*$ mit p . Zu dieser Construction benutzen wir den Satz von Pascal. Wir bringen also p mit AB zum Schnitte. Der Schnittpunkt T liegt auf den zwei Pascallinien. Die Gerade BM schneidet aus XH , XH^* je einen weiteren Punkt $F_mF_m^*$. Folglich sind TF_m , TF_m^* die Pascallinien. Sie treffen resp. \overline{AH} , $\overline{AH^*}$ in zwei Punkten $G_mG_m^*$. Indem wir diese aus M auf p projectiren, erhalten wir $S_mS_m^*$.

Jetzt legen wir durch $A_1B_1XMS_m$ und durch $A_1B_1XMS_m^*$ zwei Kegelschnitte und zeichnen ihre vierten Schnittpunkte $H_{1m}H_{1m}^*$ mit K^2_1 .

Der erste dieser Kegelschnitte und K^2_1 werden von der Linie MS_m in zwei Paaren einer Involution geschnitten. Suchen wir in dieser zum Schnittpunkte J_m von $\overline{MS_m}$ mit $\overline{A_1B_1}$ den entsprechenden Punkt, so geht durch ihn und X eine Gerade, welche H_{1m} enthält. Wir projectiren am besten diese Involution aus X auf K^2_1 . Die Projection von M sei M_x . Die Projection von S_m ist P . Folglich liegt der Pol L_m der Involution auf der Linie $\overline{M_xP}$. Er ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit $\overline{MS_m}$. Projectiren wir schliesslich J_m aus X auf K^2_1 und sei O_m die Projection, so schneidet $\overline{O_mI_m}$ den Kegelschnitt K^2_1 ein zweites Mal in H_{1m} .

* Wir führen hier die Form der Construction von P an, welche für unsere weitere Darstellung zweckmässig erscheint. Wir gehen dabei von dem Satze aus, dass eine beliebige Gerade die Kegelschnitte $K^2K^2_1$ und die gegenüber liegenden Seiten des Vierecks $YYZP$ in Paaren einer Involution trifft. Als solche beliebige Gerade sei die Verbindungslinie von zwei Punkten — etwa AB — des einen Kegelschnittes gewählt. Dann projectiren wir die Involution aus einem der gemeinsamen Punkte — etwa aus X — auf den anderen Kegelschnitt. Wir zeichnen ihren Pol und suchen zu dem Strahle, welcher X mit dem Schnittpunkte J der Geraden \overline{AB} und \overline{YZ} verbindet, den entsprechenden Strahl. Auf ihm liegt P . Wir ziehen also folgende Linien: XA , XB , XJ . Ihre zweiten Schnittpunkte mit K^2_1 seien $A^*B^*J^*$. $\overline{A^*B^*}$ trifft \overline{AB} im Pole L der Involution. $\overline{LJ^*}$ schneidet K^2_1 in P .

** Die Figuren sind sämmtlich für circulare Curven dritter Ordnung gezeichnet. YZ sind als imaginäre Kreispunkte gewählt, so dass die Kegelschnitte $K^2K^2_1$ Kreise werden.

In analoger Weise wird H_{1m}^* gefunden. Die Linie $\overline{MS_m^*}$ trifft $\overline{A_1B_1}$ und PM_x in zwei Punkten J_m^* und L_m^* . Den ersten Punkt projectiren wir aus X auf K^2_1 . Die Projection O_m^* verbinden wir mit L_m^* . Diese Verbindungslinie schneidet K^2_1 ein zweites Mal in H_{1m}^* .

Lassen wir in der erklärten Construction an Stelle von M den Punkt N treten, so erhalten wir zu HH^* die zugehörigen Punkte H_{1n} , H_{1n}^* . Dann sind $H_{1m}H_{1n}$, $H_{1m}^*H_{1n}^*$ zwei Paare einer Projectivität, welche P , C_1 zu Doppelpunkten hat. Folglich geht durch P und den Schnittpunkt der Geraden $\overline{H_{1m}H_{1n}^*}$, $\overline{H_{1m}^*H_{1n}}$ eine Linie, welche K^2_1 in C_1 trifft.

3. Ein Ueberblick über die projectivischen Reihen, welche bei der oben dargelegten Construction auftreten, führt uns zu einer einfacheren Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Punkten H und H_1 .

Bewegt sich H auf K^2 (Fig. 1), so durchläuft F_m auf MB eine Reihe, welche zu dem Büschel der Strahlen XH perspectivisch liegt. Zu dieser Reihe F_m ist das Büschel der Pascallinien aus T perspectivisch. Das Büschel der Linien AH liegt zum Büschel der Geraden XH projectivisch. Also ist das erstere Büschel auch zum Büschel der Pascallinien projectivisch. In beiden Büscheln entspricht sich der Strahl AT selbst. Die Büschel sind daher perspectivisch. Ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich in der Reihe der Punkte G_m . Mithin liegen diese Punkte auf einer Geraden g_n . Sie geht durch P und den Punkt M_b , in welchem die Linie \overline{MB} den Kegelschnitt K^2 zum zweiten Male schneidet.

Das Analoge gilt für die Punkte G_n . Sie liegen ebenfalls auf einer Geraden g_n . Diese geht durch P und den Punkt N_b , in dem die Linie \overline{NB} den Kegelschnitt K^2 zum zweiten Male trifft.

Zwei Punkte G_mG_n , welche zu demselben Punkte H auf K^2 gehören, liegen auf einer Geraden durch A und H . Damit sind die Punkte G_mG_n einander perspectivisch zugeordnet. A ist Perspectivcentrum. Benutzen wir diese Punkte an Stelle der Punkte H , so gestaltet sich die Construction eines entsprechenden Paares $H_{1m}H_{1n}$ in folgender Weise (Fig. 2): Wir suchen die zweiten Schnittpunkte M_bN_b der Linien BM , BN mit K^2 . Die Verbindungslinien dieser Punkte mit P sind die Geraden g_m , g_n . Dann zeichnen wir die zweiten Schnittpunkte M_xN_x der Linien XM , XN mit K^2_1 . Die Verbindungslinien dieser Punkte mit P seien l_m , l_n . Eine beliebige Linie m durch M schneide g_m , l_m , A_1B_1 in den resp. Punkten G_m , L_m , J_m (Fig. 1). Wir projectiren J_m aus X auf K^2_1 . Die Projection O_m verbinden wir mit L_m . Diese Verbindungslinie trifft K^2_1 in H_{1m} . Sodann projectiren wir (Fig. 2) den Punkt G_m aus A auf g_n und verbinden die erhaltene Projection G_n mit N . Diese Verbindungslinie n treffe A_1B_1 , l_n resp. in J_nL_n . Wir ziehen $\overline{J_nX}$, schneiden mit dieser Linie K^2_1 und verbinden den Schnittpunkt O_n mit L_n . $\overline{O_nL_n}$ trifft K^2_1 in H_{1n} .

Eine zweite beliebige Gerade durch M führt zu einem Punktepaar H^*_m , H^*_{1n} der Projectivität auf K^2_1 und damit ist die Projectivität bestimmt.

Diese Darstellung zeigt uns, wie durch eine Reihe von Schnitt- und Scheinbildungen aus der Reihe der Punkte H die zu ihnen projectivischen Reihen der Punkte H_{1m} , H_{1n} hervorgehen.

Wir bemerken noch, dass eine weitere Vereinfachung der Construction erreicht wird, wenn wir die Geraden durch M resp. N nicht beliebig wählen. Wir ziehen vielmehr durch M eine Gerade m , welche den Schnittpunkt L_m der Linien l_m und $\overline{A_1 B_1}$ enthält (Fig. 2). Zu dieser Linie m gehört ein Punkt H_{1m} , der mit X zusammenfällt. Eine zweite Gerade n^* wählen wir so, dass sie N mit dem Schnittpunkte L_n der Linien l_n und $\overline{A_1 B_1}$ verbindet. Auch dieser Geraden entspricht ein Punkt H^*_{1n} , der in X liegt. Wir suchen nun H_{1n} und H^*_{1m} . Diese Punkte correspondiren den in X zusammenfallenden Punkten H_{1m} , H^*_{1n} . Ziehen wir folglich in X die Tangente an K^2_1 , so schneidet sie die Gerade $\overline{H^*_{1m} H_{1n}}$ in einem Punkte der Perspectivachse. Verbinden wir diesen mit dem Doppelpunkt P der Projectivität, so ist damit die Perspectivachse gefunden. Sie trifft K^2_1 zum zweiten Male im anderen Doppelpunkte der Projectivität, das heisst in C_1 .

4. Wir ziehen einige Schlüsse, welche uns zu neuen Formen der Construction aus neun Punkten führen. Wir knüpfen dabei an die Projectivität an, welche zwischen den Punkten H des Kegelschnittes K^2 und den Punkten H_{1m} von K^2_1 besteht. Diese Projectivität wird durch die Linie g_m und die Geraden m aus M vermittelt. Wir haben gesehen, wie zu einer beliebigen Linie m der Punkt H_{1m} gefunden werden kann. Jetzt suchen wir zu einem beliebigen Punkte H_{1m} die entsprechende Linie m .

Eine Gerade durch H_{1m} schneide K^2_1 zum zweiten Male in O_m (Fig. 1). Sie treffe l_m in L_m . Projiciren wir O_m aus X auf $\overline{A_1 B_1}$, so erhalten wir einen Punkt J_m . Drehen wir nun die Gerade um H_{1m} und zeichnen wir zu jeder ihrer Lagen die zugehörigen Punkte L_m , J_m , so erkennen wir, dass diese Punkte zwei projectivische Reihen auf l_m und $\overline{A_1 B_1}$ beschreiben. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen umhüllen also einen Kegelschnitt. l_m und $\overline{A_1 B_1}$ sind zwei Tangenten dieses Kegelschnittes. Die Specialisirung der Construction zeigt uns, dass auch die Linien \overline{XP} , \overline{MX} , $\overline{H_{1m} A_1}$, $\overline{H_{1m} B_1}$ den Kegelschnitt berühren. Doch M geht an denselben eine zweite Tangente. Diese entspricht dem Punkte H_{1m} . Nehmen wir umgekehrt eine beliebige Gerade durch M an, so bestimmt sie mit l_m , $\overline{A_1 B_1}$, \overline{XP} und \overline{MX} einen Kegelschnitt. Construiren wir an ihn die zweite Tangente durch A_1 oder B_1 , so schneidet diese K^2_1 zum zweiten Male in dem entsprechenden Punkte H_{1m} .

Führen wir diese Tangentenconstructions mit Hilfe des Satzes von Brianchon durch, so können wir den Schnittpunkt R_m der Linien $\overline{A_1 X}$ und $\overline{ML_m}$ (Fig. 1) als gemeinsamen Brianchonpunkt aller Kegelschnitte auffassen,

welche l_m , $\overline{A_1 B_1}$, \overline{XP} und \overline{MX} zu Tangenten haben. Dann schneiden sich auf der Linie $\overline{PR_m}$ — sie sei mit r_m bezeichnet — diejenigen Tangenten je eines Kegelschnittes, welche durch A_1 und M gehen. Daraus folgt:

Das Büschel der Linien durch M ist perspectivisch zu dem Strahlenbüschel aus A_1 nach den entsprechenden Punkten $H_{1,m}$. r_m ist die Perspectivachse beider Büschel.

Zur Construction von r_m erwähnen wir noch, dass die Tangenten aus A_1 und B_1 an einen Kegelschnitt der erwähnten Schaar sich in einem Punkte $H_{1,m}$ von K^2_1 treffen. Zu den Kegelschnitten der Schaar gehört auch derjenige, welcher MB_1 berührt. Durch den zweiten Schnittpunkt R_{b_1} dieser Tangente mit K^2_1 geht also eine Tangente aus A_1 . Folglich muss R_{b_1} auf r_m liegen. Mit anderen Worten heisst dies: Projiciren wir den Punkt B_1 aus M auf K^2_1 , so liegt diese Projection auf r_m .

Die analogen Schlüsse gelten für N . Jeder Geraden durch N entspricht ein Punkt $H_{1,n}$. Das Büschel aus A_1 nach diesen Punkten ist perspectivisch zum Büschel der Geraden durch N . Die Perspectivachse r_n geht durch P . Ein zweiter Punkt derselben wird erhalten, wenn wir B_1 aus N auf K^2_1 projiciren.

5. Wir zeigen jetzt, wie die Linien r_m , r_n zur Construction der C^3 aus neun Punkten benutzt werden können.

Zu jedem Punkte H von K^2 gehört — wie wir oben sahen — eine Gerade m durch M und eine Gerade n durch N . m schneidet aus r_m , n aus r_n einen Punkt. Verbinden wir dieses Punktepaar mit A_1 , so treffen diese Gerade den Kegelschnitt K^2_1 zum zweiten Male in den Punkten $H_{1,m}$, $H_{1,n}$, welche dem Punkte H correspondiren. Es entstehen folglich um A_1 zwei Strahlenbüschel, welche zu den Reihen der H_1 perspectivisch liegen. Also sind diese Büschel zu einander projectivisch. Einer der Doppelstrahlen geht durch P . Auf dem anderen liegt der gesuchte Punkt C_1 . Um ihn zu construiren, zeigen wir zuerst, dass die Reihen auf $r_m r_n$, welche durch die entsprechenden Linien $m n$ einander zugeordnet werden, perspectivisch sind. Dreht sich nämlich m um M , so beschreibt diese Gerade auf g_m und r_m perspectivische Reihen G_m , R_m . Wir projiciren die erste dieser Reihen aus A auf g_n . Die hierdurch entstehende Reihe wird mit N verbunden. Dann schneidet r_n aus diesem Strahlenbüschel eine zu ihm perspectivische Reihe R_n . Sie ist also zur Reihe der Punkte R_m projectivisch. Weil in beiden Reihen der Schnittpunkt der Träger sich selbst entspricht, geht die Projectivität in perspectivische Lage über. Die Reihen haben ein Perspectivcentrum S . Durch dieses geht der gesuchte Doppelstrahl der projectivischen Büschel aus A_1 , welcher C_1 enthält.

Damit sind wir zu einer zweiten Construction der C^3 aus neun Punkten gelangt. Sie erfordert nach dem Gesagten folgende Linien (Fig. 3):

Wir suchen P und projiciren aus M und N den Punkt B auf K^2 und B_1 auf K^2_1 . Durch diese Projectionen und P ziehen

wir die resp. Linien $g_m g_n$, $r_m r_n$. Dann wählen wir durch A zwei beliebige Gerade aa^* , welche $g_m g_n$ resp. in $G_m G_m^*$, $G_n G_n^*$ schneiden. Die zwei ersten Punkte projectiren wir aus M auf r_m , die zwei anderen aus N auf r_n . Sind $R_m R_m^*$, $R_n R_n^*$ die resp. Projectionen, so schneidet die Gerade $R_m R_n$ aus $R_m^* R_n^*$ einen Punkt S , den wir mit A_1 verbinden. $A_1 S$ trifft K_1^2 zum zweiten Male in C_1 . Wir finden aus C_1 den Punkt C , indem wir den Schnittpunkt von $A_1 S$ mit $r_m(r_n)$ suchen. Diesen projectiren wir aus $M(N)$ auf $g_m(g_n)$. Dann liegt auf der Geraden, welche durch diese Projection und A geht, der Punkt C .

Die Construction wird dadurch noch etwas vereinfacht, dass wir an Stelle der beliebigen Linien aa^* die Geraden \overline{AM} und \overline{AN} wählen. Sie schneiden sofort $r_m r_n$ in den Punkten $R_m R_n^*$ und wir müssen nur noch $R_m^* R_n$ construiren.

6. Eine dritte Construction der C^3 geht von den Linien m und n aus, welche durch die resp. Punkte M und N gehen. Zu jedem Punkte H von K^2 gehört ein solches Linienpaar. Es stellt die Geraden vor, welche den Punkten M und N in der Reciprocität $(ABH\Delta)$ entsprechen. Die Zuordnung dieser Linien wird durch A , g_m , g_n vermittelt. Jede Gerade durch A schneidet aus g_m und g_n zwei Punkte, durch welche zwei Linien m , n gehen. Folglich bilden diese Linien projectivische Büschel. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen also auf einem Kegelschnitt R^2 .

Vertauschen wir nun den Kegelschnitt K^2 mit K_1^2 , das heisst, lassen wir einen Punkt H_1 den Kegelschnitt K_1^2 durchlaufen, so wird durch jede Lage von H_1 eine Reciprocität $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ festgelegt. Wir finden in dieser Reciprocität die entsprechenden Linien $m_1 n_1$ zu M , N , indem wir zwei Linien $g_{m_1} g_{n_1}$ benutzen. Sie gehen durch P und die zweiten Schnittpunkte der Geraden $M B_1$, $N B_1$ mit K_1^2 . Die Gerade $A_1 H_1$ trifft $g_{m_1} g_{n_1}$ in zwei Punkten, durch welche resp. $m_1 n_1$ gehen. Folglich werden auch diese Linien durch A_1 , g_{m_1} , g_{n_1} einander projectivisch zugeordnet und erzeugen einen Kegelschnitt R_1^2 .

Jeder der zwei Kegelschnitte $R^2 R_1^2$ geht durch die drei Punkte M , N und P . Folglich schneiden sich diese Kegelschnitte in einem vierten Punkte U . Die Geraden, welche durch U und M resp. N gehen, entsprechen den Punkten MN in zwei Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$. Wir können daher MU und NU benutzen, um von diesen Reciprocitäten die Grundpunkte CC_1 zu finden. Sie liegen auf der gegebenen Curve dritter Ordnung.

Die bequeme Ausführung der Construction hängt von der Bestimmung der Kegelschnitte R^2 , R_1^2 ab. Wir bemerken daher zu dieser Bestimmung Folgendes: Nach dem oben Gesagten wird ein Punkt von R^2 gefunden, indem wir $g_m g_n$ mit einer beliebigen Geraden durch A schneiden. Verbinden wir diese Schnittpunkte resp. mit M und N , so treffen sich diese

Verbindungslinien in einem Punkte von R^2 . Specialisiren wir diese Construction für die Geraden \overline{AM} und \overline{AN} , so folgt, dass \overline{AM} aus g_n und \overline{AN} aus g_m je einen Punkt von R^2 schneidet. Diese zwei Punkte und \overline{MNP} bestimmen R^2 . In analoger Weise wird R^2_1 bestimmt.

Fassen wir schliesslich die Constructionslinien zusammen, so ergibt sich (Fig. 4):

Wir suchen P und projectiren M und N aus B auf K^2 und aus B_1 auf K^2_1 (wie bei 5). Durch P und diese Projectionen gehen die resp. Linien $g_m g_n$; $g_{m1} g_{n1}$. Sodann schneiden wir g_m mit \overline{AN} und g_n mit \overline{AM} ; ferner g_{m1} mit $A_1 N$ und g_{n1} mit $A_1 M$. Die Punkte \overline{PMN} bestimmen mit den ersten zwei Schnittpunkten einen Kegelschnitt R^2 und mit den letzten zwei einen Kegelschnitt R^2_1 . Wir construiren den vierten gemeinsamen Punkt U . MU schneidet aus $g_m(g_{m1})$ und NU aus $g_n(g_{n1})$ Punkte, welche auf einer Geraden durch $A(A_1)$ liegen. Diese trifft $K^2(K^2_1)$ zum zweiten Male in $C(C_1)$.

7. Im Zusammenhange mit der Construction einer Curve dritter Ordnung aus neun Punkten steht die Aufgabe, den neunten Punkt aller Curven dritter Ordnung zu finden, welche durch acht in allgemeiner Lage gegebene Punkte gehen.

Wir entwickeln eine Lösung dieser Aufgabe.

XYZ , AB , $A_1 B_1$ und M seien die acht gegebenen Punkte. Wir legen wieder, wie oben, durch $XYZAB$ und $XYZA_1 B_1$ zwei Kegelschnitte $K^2 K^2_1$ und zeichnen den vierten gemeinsamen Punkt P und die Linien $g_m r_m$ (Fig. 5). Durch jeden Punkt H von K^2 wird eine Curve des Büschels fixirt. Sie schneide K^2_1 in H_1 . Dann wird die Projectivität der Punkte HH_1 durch $g_m r_m$ vermittelt (5).

Jede Curve des Büschels trifft die Linie $A_1 B_1$ in einem dritten Punkte T_1 . Er entspricht dieser Linie in einer Reciprocität $(ABH\Delta)$.* Wir erhalten diese Punkte T_1 , indem wir durch $ABHX$ und den Schnittpunkt S von $\overline{A_1 B_1}$ mit XP Kegelschnitte legen. Ihre zweiten Schnittpunkte mit $\overline{A_1 B_1}$ sind die gesuchten Punkte T_1 . Benutzen wir zu dieser Construction den Satz von Pascal, so können wir die Anordnung der Punkte so festsetzen, dass alle Pascallinien durch den Schnittpunkt O der Linien \overline{AB} , $\overline{A_1 B_1}$ gehen. Die Linien \overline{HA} treffen \overline{XP} je in einem zweiten Punkte U einer Pascallinie. Schneiden wir diese Pascallinien mit \overline{BX} , so gehen durch die Schnittpunkte L und die resp. H gerade Linien, auf denen die Punkte T_1 liegen.

Eine Linie $\overline{HT_1}$ schneidet K^2 ausser in H noch in einem zweiten Punkte F . Suchen wir F mit Hilfe des Sechsecks $PXB A H F$, so finden wir, dass OU die Pascallinie ist, und dass F auf der Geraden \overline{PO} liegt.

* Vergl. die oben citirte Abhandlung S. 70 Nr. 4.

Daraus ergibt sich aber, dass alle Linien HT_1 durch den Punkt F gehen.

Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich allgemein als Satz so fassen:

Der Kegelschnitt, welcher durch fünf Grundpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung geht, und die Gerade, welche zwei weitere Grundpunkte verbindet, werden von jeder Curve des Büschels in einem Punktepaar geschnitten. Diese Punktepaare liegen auf Geraden durch einen Punkt des Kegelschnittes.

Wenden wir diesen Satz auf den Kegelschnitt K^2_1 und die Gerade AB an, so folgt, dass jede Curve des Büschels aus K^2_1 und AB zwei Punkte H_1T schneidet, welche auf einer Geraden durch einen Punkt F_1 von K^2_1 liegen. F_1 ist der Schnittpunkt der Linie OP mit K^2_1 .

Die Projectivität, welche zwischen den Punkten HH_1 besteht, überträgt sich auf die Strahlen FH , F_1H_1 . Diese bilden — weil der Strahl FF_1 sich selbst entspricht — perspectivische Büschel. Folglich schneiden sich entsprechende Strahlen der Büschel auf Punkten einer Geraden m . Die Bedeutung von m ergibt sich aus der Bemerkung, dass TT_1 Sternpunkte auf AB , A_1B_1 in zwei zusammengehörigen Reciprocitäten ($ABH\Delta$) ($A_1B_1H_1\Delta_1$) sind. Daraus folgt*, dass sich die Linien HT_1 , H_1T in einem Punkte E derjenigen Curve C^3 schneiden, welche durch die erwähnten Reciprocitäten dargestellt wird. Wir schliessen daher: Jede Gerade durch $F(F_1)$ schneidet aus m , $\overline{A_1B_1}$, $K^2(m, \overline{AB}, K^2_1)$ drei Punkte einer Curve dritter Ordnung des Büschels.

8. Auf m muss der neunte Punkt M_1 des Büschels liegen. Soll nämlich M_1 allen Curven des Büschels gemeinsam sein, so muss M_1 auch derjenigen Curve angehören, für welche die Gerade FM_1 aus m , A_1B_1 , K^2 drei Punkte schneidet. Einer dieser Punkte muss M_1 sein; denn sonst würden auf FM_1 vier Punkte einer C^3 liegen und diese Curve zerfiel in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Dies ist unmöglich, wenn die acht Grundpunkte — wie vorausgesetzt — in allgemeiner Lage gegeben sind. Derselben Voraussetzung widerspricht es, dass M_1 auf K^2 oder auf A_1B_1 liegt. Im ersten Falle enthielte K^2 sechs, im zweiten Falle A_1B_1 drei Grundpunkte des Büschels. In beiden Fällen könnten die acht gegebenen Grundpunkte sich nicht in allgemeiner Lage befinden. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass M_1 auf m liegt.**

Wir wenden uns nun zur Construction von m und M_1 .

M ist ein Punkt von m ; denn läge M nicht in m , so müsste die Gerade FM vier Punkte einer Curve des Büschels enthalten. Wir haben oben gesehen, dass dies unmöglich ist. Ein zweiter Punkt E von m wird

* Loco citato p. 70 No. 4 und p. 71 Nr. 5.

** Dass m zwei Grundpunkte enthält, folgt auch aus der Umkehrung des in 7 bewiesenen Satzes.

gefunden, indem wir ein entsprechendes Paar HH_1 construiren und FH mit F_1H_1 zum Schnitte bringen. Wir wählen am besten an Stelle von H den zweiten Schnittpunkt von AM mit K^2 . Durch diese Wahl wird die Construction von g_m überflüssig.

Um M_1 auf m zu finden, bemerken wir, dass jede Curve des Büschels aus $K^2(K^2_1)$ und m ein Punktepaar schneidet, welches auf einer Geraden durch $F(F_1)$ liegt. Es gilt also für diese Punkte, was wir im Satze von 7 bewiesen haben. Wir können daher in Umkehrung der Reihenfolge die Figur construiren, welche zu diesem Satze führte. Dann folgt, dass eine Gerade durch $F(F_1)$ und den Schnittpunkt von m mit $AB(A_1B_1)$ aus $K^2(K^2_1)$ einen Punkt $P_m(P_{m_1})$ schneidet, welcher mit $XYZMM_1$ auf einem Kegelschnitt liegt. Derselbe wird durch $XYZMP_m(P_{m_1})$ bestimmt und trifft m in M_1 . Fassen wir schliesslich nochmals die nöthigen Constructionslinien zusammen, so ergibt sich für die Construction des neunten Punktes Folgendes (Fig. 6):

Wir suchen P , projeciren M aus B_1 auf K^2_1 und ziehen durch P und diese Projection die Gerade r_m . Dann verbinden wir P mit dem Schnittpunkte O der Linien AB, A_1B_1 und construiren die Schnittpunkte FE_1 dieser Verbindungslinie mit K^2, K^2_1 . Hierauf suchen wir den zweiten Schnittpunkt H von MA mit K^2 und den Schnittpunkt R von MA mit r_m . RA_1 schneidet K^2_1 zum zweiten Male in H_1 . Wir ziehen durch M und den Schnittpunkt E der Linien FH, F_1H_1 die Gerade m und suchen ihren Schnittpunkt $O_m(O_{m_1})$ mit $AB(A_1B_1)$. $FO_m(F_1O_{m_1})$ trifft $K^2(K^2_1)$ ein zweites Mal in $P_m(P_{m_1})$. Endlich construiren wir den neunten Punkt M_1 als den zweiten Schnittpunkt der Linie m mit einem Kegelschnitt, welcher durch $XYZMP_m(P_{m_1})$ geht.*

In Figur 6 ist die Curve C^3_n des Büschels eingezeichnet, welche durch das Punktepaar HH_1 bestimmt wird. Sie geht durch E und die Schnittpunkte T, T_1 von AB mit F_1H_1 und A_1B_1 mit FH .

10. Die Construction des neunten Punktes zu den acht Grundpunkten eines Büschels von C^3 lässt sich anwenden, um eine Curve dritter Ordnung aus neun Punkten zu zeichnen. Wir fassen je acht dieser neun Punkte als Grundpunkte eines Büschels auf und construiren den neunten Punkt. Alle diese neunten Punkte liegen auf C^3 .

Der Gedanke, welcher zur Construction des neunten Punktes führte, lässt sich aber noch in anderer Weise für eine vierte Construction der C^3 aus neun Punkten verwerthen.

Wir suchen wieder zwei Reciprocitäten, durch welche sich C^3 darstellen lässt und gehen dabei von zwei Curvenbüscheln aus, welche $XYZABA_1B_1$ und M resp. N zu Grundpunkten haben. Wir zeichnen

* In Figur 6 ist dieser Kegelschnitt ein Kreis, weil YZ die imaginären Kreispunkte sind.

für das erste Büschel die Linie M , welche m mit dem neunten Punkte M_1 verbindet. Ferner suchen wir für das zweite Büschel die Linie n , welche durch N und den neunten Punkt N_1 dieses Büschels geht. Der Schnittpunkt E der Linien m und n muss auf der gegebenen C^3 liegen. Die Gerade FE schneidet nämlich aus K^2 und A_1B_1 zwei Punkte, welche einer Curve des einen und einer Curve des anderen Büschels angehören. Keiner dieser zwei Punkte kann Grundpunkt eines der zwei Büschel sein, weil acht Grundpunkte jedes Büschels in **allgemeiner** Lage gegeben sind. Folglich müssen die in Rede stehenden zwei Curven dritter Ordnung mit der gegebenen C^3 zusammenfallen. CT_1 sind zwei ihrer Punkte. Ein dritter ist E . Die Gerade F_1E schneidet aus K^2_1 und AB zwei weitere Punkte C_1, T . $ABC, A_1B_1C_1$ sind die Grundpunkte der gesuchten Reciprocitäten.

Zur Erklärung der Figur 7, welche die entwickelten Gedanken darstellt, fassen wir die nöthigen Constructionslinien nochmals zusammen.

Wir suchen P, F, F_1, r_m und m wie oben (9 und Fig. 6). Dann projectiren wir N aus B_1 auf K^2 , und ziehen durch P und diese Projection die Gerade r_n . \overline{AN} schneide K^2 in H_n und r_n in R_n . Wir construiren den zweiten Schnittpunkt H_{1n} von $\overline{A_1R_n}$ mit K^2_1 . Die Verbindungslinie von N mit dem Schnittpunkte der Geraden FH_n, F_1H_{1n} ist n . m trifft n in einem Punkte E von C^3 . FE, F_1E schneiden K^2, K^2_1 resp. in C, C_1 und AB, A_1B_1 resp. in TT_1 .

Schliesslich sei bemerkt, dass in der Figur auch die neunten Punkte M_1, N_1 gezeichnet sind. Wir projectiren die Schnittpunkte der Geraden $AB(A_1B_1)$ mit m und n aus $F(F_1)$ auf $K^2(K^2_1)$. Die Projectionen bestimmen resp. mit $XYZM, XYZN$ zwei Kegelschnitte. Der eine trifft m in M_1 , der andere n in N_1 .

11. Die erklärten Constructionen der C^3 aus neun Punkten behalten für eine Reihe von Specialfällen ihre Giltigkeit.

Zunächst sehen wir, dass je die Punkte XYZ, AB, A_1B_1, MN dieselbe Rolle spielen. Wir dürfen daher die Punkte von jeder dieser vier Gruppen unter einander vertauschen.

Ferner können wir die Punkte der drei ersten Gruppen einander unendlich nahe rücken lassen. Nehmen wir an, dass die drei Punkte XYZ auf einer Geraden unendlich benachbart liegen, so ist C^3 durch eine Inflectionstangente, ihren Berührungspunkt und sechs Punkte gegeben. Die Aenderung, welche hierdurch in der allgemeinen Construction eintritt, beschränkt sich darauf, dass sich die Kegelschnitte K^2, K^2_1 in X osculiren. Ebenso einfach gestalten sich die Constructionen, wenn zwei oder drei Punkte XY , oder wenn die Punkte AB, A_1B_1 als Berührungspunkte je einer Tangente zusammenfallen. Wir erhalten dann Constructionen für Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte und die Tangente in einem, durch sieben Punkte und die Tangenten in zweien oder durch sechs Punkte und die Tangenten in drei dieser Punkte gehen.

Lassen wir aber M und N als Berührungspunkte einer Tangente zusammenfallen, so versagen die bis jetzt abgeleiteten Constructionen. Die Linien $r_m r_n$, $g_m g_n \dots$ fallen zusammen und es tritt eine gewisse Unbestimmtheit ein.

Wir leiten daher eine fünfte Construction einer Curve C^3 aus neun Punkten ab.

Wir werden sehen, dass diese Construction auch dann Giltigkeit hat, wenn C^3 durch fünf Punkte und die Tangenten in vier derselben gegeben ist. Zugleich löst die Construction die allgemeine Aufgabe, den dritten Schnittpunkt einer Geraden mit C^3 zu finden, wenn diese Gerade durch zwei gegebene Punkte der C^3 geht.

12. Für die Erklärung der neuen Construction ist es bequem, die neun gegebenen Punkte der C^3 mit XYZ , $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ zu bezeichnen. Die Geraden $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$, $\overline{A_3 B_3}$ seien resp. c_1 , c_2 , c_3 . Wir legen nun drei Kegelschnitte $K^2_1 K^2_2 K^2_3$, welche die Punkte XYZ gemein haben und resp. durch $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ gehen.* Wir suchen hierauf den vierten gemeinsamen Punkt P_3 zwischen $K^2_1 K^2_2$ und den vierten gemeinsamen Punkt P_1 zwischen $K^2_2 K^2_3$.

Durch die acht Punkte XYZ , $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und A_3 wird ein Büschel C^3_{12} von Curven dritter Ordnung bestimmt. Jeder Punkt H_1 auf K^2_1 fixirt eine Curve des Büschels. Sie schneidet K^2_2 in einem sechsten Punkte H_2 und die Gerade c_2 in einem dritten Punkte T_2 . Die Reihe der Punkte H_1 ist perspectivisch zur Reihe der Punkte T_2 (Satz von 7). Das Perspectivcentrum ist ein Punkt F_1 auf K^2_1 . Ferner ist die Reihe der H_1 projectivisch zur Reihe der H_2 . Die Projectivität wird durch zwei Gerade $g_3 r_3$ vermittelt, welche durch P_3 und die zwei Schnittpunkte der Linien $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ mit den resp. Kegelschnitten $K^2_1 K^2_2$ gehen (5).

Wir führen jetzt den analogen Gedankengang für ein zweites Büschel von Curven dritter Ordnung C^3_{23} aus, welches XYZ , $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ und A_1 zu Grundpunkten hat. Die Curven dieses Büschels schneiden aus $K^2_2 K^2_3$ und aus c_2 Reihen von Punkten H_2 , H_3 , T^*_2 . Die ersten dieser zwei Reihen sind zu einander projectivisch. Entsprechende Punkte werden mit Hilfe von zwei Geraden $g_1 r_1$ gefunden, welche durch P_1 und die zweiten Schnittpunkte der Geraden $A_2 A_1$, $A_3 A_1$ mit den resp. Kegelschnitten K^2_2 , K^2_3 gehen. Die Reihe der H_3 liegt perspectivisch zur Reihe der T^*_2 . Perspectivcentrum ist ein in K^2_3 liegender Punkt F_3 .

Wir ordnen nun die Reihen $T_2 T^*_2$ einander projectivisch zu. Durch jeden Punkt H_1 von K^2_1 geht eine Curve C^3_{12} , welche K^2_2 in einem Punkte H_2 schneidet. Durch ihn geht eine bestimmte Curve C^3_{23} , welche K^2_3 in einem sechsten Punkte H_3 trifft. Auf diese Weise wird jedem Punkte H_1 ein Punkt H_3 , und somit jedem Punkte T_2 ein Punkt T^*_2 zugeordnet.

* In Figur 8 sind $K^2_1 K^2_2 K^2_3$ Kreise, weil die Curve C^3 circular gewählt ist.

Diese Punkte bilden also projectivische Reihen. Die zwei Doppelpunkte der Reihen haben verschiedene Bedeutung.

Je zwei durch einen Punkt H_2 einander zugeordnete Curven dritter Ordnung C^3_{12} , C^3_{23} bestimmen ein Büschel von C^3 , denn sie haben die Punkte XYZ , A_1A_2 , B_2 , A_3 und einen Punkt H_2 auf K^2_2 gemeinsam. Bekanntlich gehen die Curven eines solchen Büschels durch einen neunten Punkt. In unserem Falle liegen sechs der acht gemeinsamen Punkte auf dem Kegelschnitt K^2_2 . Mithin müssen die zwei anderen gemeinsamen Punkte mit dem neunten Punkte auf einer Geraden liegen. Diese ist die Linie A_1A_3 . Sie enthält alle neunten Punkte der erwähnten Curvenbüschel. Folglich wird sie die Linie c_2 in einem Punkte V treffen, welcher ein neunter Punkt für eines dieser Curvenbüschel ist. In ihm schneidet also eine bestimmte Curve C^3_{12} ihre entsprechende Curve C^3_{23} . Folglich ist V einer der Doppelpunkte für die projectiven Reihen $T_2T^*_2$. Zum anderen Doppelpunkte W gehören zwei Curven C^3_{12} , C^3_{23} , welche neun Punkte in allgemeiner Lage gemein haben. Daraus folgt, dass diese zwei Curven mit derjenigen C^3 zusammenfallen, welche durch die neun gegebenen Punkte geht. W liegt also auf dieser C^3 .

Verbinden wir W mit F_1F_3 , so schneiden diese Geraden resp. aus $K^2_1K^2_3$ zwei weitere Punkte C_1C_3 . Sie bestimmen mit A_1B_1 , A_3B_3 zwei Reciprocitäten, durch welche C^3 dargestellt werden kann.

13. Indem wir die Ausführung dieser Construction besprechen, gelangen wir noch zu einigen Abkürzungen.

Wir verfolgen zuerst den Linienzug, welcher von einem Punkte H_1 zu dem entsprechenden Punkte H_3 führt. Kennen wir g_3r_3 , g_1r_1 , so ziehen wir $\overline{H_1B_1(5)}$. Diese Gerade schneide g_3 in G_3 . $\overline{G_3A_3}$ treffe r_3 in R_3 . Wir ziehen $\overline{R_3B_3}$. Diese Linie schneidet K^2_2 zum zweiten Male in H_2 . Sie treffe g_1 in G_1 . $\overline{G_1A_1}$ schneide r_1 in R_1 . Verbinden wir schliesslich R_1 mit B_3 , so schneidet diese Verbindungslinie den Kegelschnitt K^2_3 zum zweiten Male in H_3 . Die Ecken des Linienzuges sind also:

$$H_1 - B_1 - G_3 - A_3 - R_3 - B_2 - G_1 - A_1 - R_1 - B_3 - H_3.$$

Dieser Linienzug wird abgekürzt, wenn wir einmal an Stelle von H_1 den Punkt P_3 und dann an Stelle von H_3 den Punkt P_1 setzen. Im ersten Falle deckt sich H_2 mit H_1 . Im zweiten Falle liegt H_2 in H_3 .

Zur Construction von W bemerken wir, dass die Büschel aus F_1F_3 nach den resp. Punkten H_1H_3 , $T_2T^*_2$ zu einander projectivisch sind. Sie erzeugen also einen Kegelschnitt K^2 . Er schneidet c_2 in V und W . F_1F_2V sind drei bekannte Punkte von K^2 . Zeichnen wir noch zwei weitere Punkte auf den Linien F_1P_3 , F_3P_1 , so ist damit der Kegelschnitt bestimmt. Sein zweiter Schnittpunkt mit c_2 ist W .

Fassen wir schliesslich die Constructionslinien, wie sie in Figur 8 dargestellt sind, zusammen, so ergibt sich Folgendes:

Wir construiren P_3P_1 , g_3r_3 , g_1r_1 . Dann verbinden wir den Schnittpunkt O_1 der Linien c_1c_2 mit P_3 . Diese Verbindungslinie trifft K_1^2 zum zweiten Male in F_1 . Ferner ziehen wir durch P_1 eine Gerade nach dem Schnittpunkte O_3 der Linien c_3c_2 . Sie schneidet K_3^2 zum zweiten Male in F_3 . Hierauf construiren wir zu P_3 den entsprechenden Punkt H_3 durch den Linienzug $P_3-B_2-G_1-A_1-R_1-B_3-H_3$. Zu P_1 finden wir den entsprechenden Punkt H_1 durch den Linienzug $P_1-B_2-R_3-A_3-G_3-B_1-H_1$. F_1P_3 schneide F_3H_3 in S_1 . F_3P_1 treffe F_1H_1 in S_3 . A_1A_3 schneidet c_2 in V . Construiren wir endlich den zweiten Schnittpunkt von c_2 mit dem Kegelschnitt, welcher durch $F_1F_3VS_1S_3$ geht, so erhalten wir W . Die Linien F_1W , F_3W schneiden resp. $K_1^2K_3^2$ zum zweiten Male in C_1C_3 . Durch den Linienzug

$$\text{oder} \quad \begin{array}{l} C_1 - B_1 - G_3 - A_3 - R_3 - B_2 - C_2 \\ C_3 - B_3 - R_1 - A_3 - G_1 - B_2 - C_2 \end{array}$$

wird C_2 gefunden, das heisst, der sechste Schnittpunkt der gegebenen C^3 mit K_2^2 .

Lassen wir in der erklärten Construction Y mit Z , A_1 mit B_1 , A_2 mit B_2 , A_3 mit B_3 als Berührungspunkte von Tangenten zusammenfallen, so finden wir die Curve dritter Ordnung, welche durch fünf Punkte und die Tangenten in vier dieser Punkte geht.

Unsere Ueberlegungen haben nun gezeigt, dass jede beliebige Curve dritter Ordnung durch zwei Reciprocitäten dargestellt werden kann. Wir haben die Grundpunkte von zwei solchen Reciprocitäten in mancherlei Weise und zwar stets mit dem Lineal allein* construirt. Die Beziehungen dieser Reciprocitäten zu einander und die Untersuchung ihrer Δ wird uns zu den Singularitäten der C^3 und zu ihren speciellen Formen führen. Wir treten jetzt auf diese Relationen nicht näher ein.

* Alle oben mit Kegelschnitten ausgeführten Constructionen sind linear.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges.

Eine Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades besitzt bekanntlich n^r -Elemente und $(n!)^{r-1}$ -Glieder. Ein Element wird mit r -Indices versehen und durch das Symbol von der Form $a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}$ dargestellt, wobei jeder Zeiger irgend eine der Zahlen $1, 2 \dots n$ bedeuten kann. Wir nennen k -Elemente, bei welchen die gleichstelligen Zeiger eine Variation k^{ter} Klasse o. W. aus den Elementen $1, 2 \dots n$ bilden, k -transversale Elemente, dann bilden die n -Elemente irgend eines Gliedes, also auch des Anfangsgliedes $a_{1, 1, \dots, 1, a_{2, 2, \dots, 2, r}, \dots, a_{n, n, \dots, n, r}}$, n -transversale Elemente.

Die adjungirte Unterdeterminante eines jeden Elementes ist bekanntlich eine Determinante r^{ten} Ranges und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Es bezeichne $\overset{r}{A}_k^{(n)}$ und $\overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(n)}$ die Anzahl der verschwindenden bzw. der nicht verschwindenden Glieder — also die Gliederzahl — einer Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades mit k transversalen Nullelementen, so bedeuten die Symbole $\overset{r}{A}_0^{(n)}$ und $\overset{r}{\mathfrak{A}}_0^{(n)}$ die Anzahl der ersteren bzw. der letzteren Glieder dieser Determinante ohne Nullelemente.

Es bestehen dann die Gleichungen:

$$1) \quad \overset{r}{A}_0^{(n)} = 0,$$

$$2) \quad \overset{r}{\mathfrak{A}}_0^{(n)} = [n!]^{r-1},$$

$$3) \quad \overset{r}{A}_k^{(n)} + \overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(n)} = [n!]^{r-1},$$

giltig für $k = 0, 1 \dots n$.

Die Grösse $\overset{r}{A}_k^{(n)}$ kann durch den Ausdruck dargestellt werden:

$$\overset{r}{A}_k^{(n)} = \overset{r}{A}_{k-1}^{(n)} + \sigma,$$

wenn σ die Anzahl der Glieder bezeichnet, deren Verschwinden durch das k^{te} Nullelement b_k bewirkt wird. Die Grösse σ ist also gleich der Gliederzahl der adjungirten Unterdeterminante B_k des Elementes b_k , B_k ist aber eine Determinante r^{ten} Ranges und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche die $(k-1)$ ersten Nullelemente enthält, mithin wird die Gliederzahl σ von B_k durch das Symbol $\overset{r}{\mathfrak{A}}_{k-1}^{(n-1)}$ ausgedrückt; es ist also

$$4) \quad \overset{r}{A}_k^{(n)} = \overset{r}{A}_{k-1}^{(n)} + \overset{r}{\mathfrak{A}}_{k-1}^{(n-1)}$$

giltig für $k = 1, \dots n$.

Ersetzt man in 4) die Grössen A mit Hilfe der Gleichung 3) durch die entsprechenden Grössen \mathfrak{A} , so ist

$$5) \quad \mathfrak{A}_k^{(n)} = \mathfrak{A}_{k-1}^{(n)} - \mathfrak{A}_{k-1}^{(n-1)},$$

giltig für $k = 1, \dots, n$.

Schreibt man in 5) τ für k und bildet daraus die für

$$\tau = (p+1), (p+2) \dots k$$

— wobei $p = 0, 1 \dots (k-1)$ ist — sich ergebenden Ausdrücke, so erhält man nach Addition der letzteren folgende Formel:

$$6) \quad \mathfrak{A}_p^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)} + \sum_{\tau=p}^{\tau=k-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)},$$

giltig für $k = 1, \dots, n$ und $p = 0, 1 \dots (k-1)$.

Für $p = 0$ folgt aus 6) mit Rücksicht auf 2):

$$7) \quad [n!]^{r-1} = \mathfrak{A}_k^{(n)} + \sum_{\tau=0}^{\tau=k-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)},$$

giltig für $k = 1, 2 \dots n$.

Ersetzt man in 7) die Grösse $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ durch ihren aus 3) folgenden Werth, so folgt:

$$A_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-1} \mathfrak{A}_\tau^{(n-1)}$$

giltig für $k = 1, 2, \dots, n$.

Um den Fundamentalsatz für $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ zu erhalten, bilden wir die Reihe R_ϱ , deren Glieder aus ihrem allgemeinen Gliede

$$g_\varrho^{(\lambda)} = \mathfrak{A}_\varrho^{(\varrho+\lambda-1)}$$

für $\lambda = 1, 2 \dots (n + \nu) \dots$ erhalten werden.

Bildet man aus der Gleichung 5) für $n = \varrho + \lambda - 1$ und $k = \varrho$ die Formel:

$$\mathfrak{A}_\varrho^{(\varrho+\lambda-1)} = \mathfrak{A}_{\varrho-1}^{(\varrho+\lambda-1)} - \mathfrak{A}_{\varrho-1}^{(\varrho+\lambda-2)},$$

so sieht man, dass das allgemeine Glied

$$g_{\varrho-1}^{(\lambda+1)} - g_{\varrho-1}^{(\lambda)} = \mathfrak{A}_{\varrho-1}^{(\varrho+\lambda-1)} - \mathfrak{A}_{\varrho-1}^{(\varrho+\lambda-2)}$$

der ersten Differenzreihe von der für $\varrho = \varrho - 1$ entstehenden Reihe $R_{\varrho-1}$

durch den Ausdruck: $\mathfrak{A}_\varrho^{(\varrho+\lambda-1)}$ dargestellt wird, daher mit dem allgemeinen Gliede

$$g_\varrho^{(\lambda)} = \mathfrak{A}_\varrho^{(\varrho+\lambda-1)}$$

der für $\varrho = \varrho$ erhaltenen Reihe R_ϱ identisch ist, woraus folgt, dass die Reihe R_ϱ die erste Differenzreihe der Reihe $R_{\varrho-1}$ ist, mithin R_ϱ die $(\varrho-1)$ te Differenzreihe der für $\varrho = 1$ erhaltenen Reihe R_1 bildet. Man erkennt ferner, dass die Reihe R_1 die erste Differenzreihe der für $\varrho = 0$

hervorgehenden Reihe R_0 darstellt, so dass die Reihe R_q die q^{te} Differenzreihe der Reihe R_0 ist; man hat also den Satz:

Die aus ihrem allgemeinen Gliede: $\mathfrak{A}_k^{(k+\lambda-1)}$ für

$$\lambda = 1 \dots (n + \nu) \dots$$

hervorgehende Reihe:

$$\mathfrak{A}_k^{(k)}, \quad \mathfrak{A}_k^{(k+1)}, \dots \mathfrak{A}_k^{(n)} \dots \mathfrak{A}_k^{(n+\nu)} \dots,$$

deren auf einander folgende Glieder die Gliederzahlen der Determinanten r^{ten} Ranges von dem k^{ten} bis zum n^{ten} ... Grade mit je k -transversalen Nullelementen bedeuten, bildet die k^{te} Differenzreihe von der Reihe:

$$(0!)^{r-1}, \quad (1!)^{r-1}, \quad (2!)^{r-1} \dots (n!)^{r-1} \dots,$$

welche aus ihrem allgemeinen Gliede $\mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = [(\lambda-1)!]^{r-1}$ für $\lambda = 1, \dots, n$ erhalten wird; wobei $\mathfrak{A}_0^{(0)} = (0!)^{r-1} = 1$.

Es folgt ferner:

Die Gliederzahl $\mathfrak{A}_k^{(k+x)}$ einer Determinante r^{ten} Ranges und $(k+x)^{\text{ten}}$ Grades mit k -transversalen Nullelementen ist das $(x+1)^{\text{te}}$ Glied der k^{ten} Differenzreihe von der Reihe:

$$(0!)^{r-1}, \quad (1!)^{r-1} \dots (n!)^{r-1} \dots,$$

welche aus ihrem allgemeinen Gliede $\mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = [(\lambda-1)!]^{r-1}$ für $\lambda = 1, 2 \dots, n$ erhalten wird.

In der Theorie der Differenzreihen erhält man für eine aus $(n+1)$ Gliedern bestehende Hauptreihe die folgenden Gleichungen:

$$I) \quad D_k g_\lambda = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-p} (-1)^\tau \cdot (k-p)_\tau \cdot D_p g_{k+\lambda-p-\tau},$$

giltig für $k = 1, 2 \dots, n$; $\lambda = 1, 2 \dots, (n+1-k)$; $p = 0, \dots, (k-1)$;

$$II) \quad D_p g_{r+\lambda} = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda} (\lambda)_\tau \cdot D_{k+\tau} g_r,$$

giltig für $k=0, 1 \dots, (n-1)$; $r=1, 2 \dots, (r+\lambda-1)$; $\lambda=1, 2 \dots, (n+1-k-r)$;

$$III) \quad \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\tau} D_k g_{r+\varrho} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda+1} (\lambda+1)_\tau \cdot D_{k+\tau-1} g_r,$$

giltig für $k=0, 1 \dots, (n-1)$; $r=1, 2 \dots, (n-k)$; $\lambda=1, 2 \dots, (n+1-k-r)$;

$$IV) \quad \sum_{\tau=1}^{\tau=n+1-k} D_k g_\tau = D_{k-1} g_{n+2-k} - D_{k-1} g_1,$$

giltig für $k = 1, 2 \dots, n$.

In diesen Gleichungen bedeutet allgemein $(q)_\tau$ den τ^{ten} Binomial coefficienten der q^{ten} Potenz, und mit:

$$\text{V)} \quad D_0 g_\lambda = \mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = [(\lambda-1)!]^{r-1}$$

das allgemeine Glied der Hauptreihe, mit

$$\text{VI)} \quad D_k g_\lambda = \mathfrak{A}_k^{(\lambda-1)}$$

das allgemeine Glied der k^{ten} Differenzreihe bezeichnet ist.

Mit Hilfe dieser Gleichungen könnte man verschiedene Formeln für die Grössen $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ und $\mathfrak{A}_k^{(n)}$ herleiten, es soll aber nur die independente Form derselben bestimmt werden.

Aus der Gleichung I) folgt für $\lambda = n + 1 - k$:

$$9) \quad \mathfrak{A}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-p} (-1)^\tau \cdot (k-p)_\tau \cdot \mathfrak{A}_p^{(n-\tau)},$$

giltig für $k = 1, 2 \dots n$ und $p = 0, 1 \dots (k-1)$.

Aus 9) erhält man für $p = 0$ die independente Form von $\mathfrak{A}_k^{(n)}$; es ist:

$$10) \quad \mathfrak{A}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} (-1)^\tau \cdot (k)_\tau \cdot [(n-\tau)!]^{r-1},$$

giltig für $k = 0, 1 \dots n$; der Werth $k = 0$ ist zulässig, weil dafür die Gleichung 10) den richtigen Werth $\mathfrak{A}_0^{(n)} = (n!)^{r-1}$ liefert.

Aus 3) und 10) erhält man die independente Form von $\mathfrak{A}_k^{(n)}$; es ist:

$$11) \quad \mathfrak{A}_k^{(n)} = - \sum_{\tau=1}^{\tau=k} (-1)^\tau \cdot (k)_\tau \cdot [(n-\tau)!]^{r-1},$$

giltig für $k = 1, 2 \dots n$.

Für $k = n$ folgt aus den Gleichungen 10) und 11):

$$12) \quad \mathfrak{A}_n^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot (n)_\tau \cdot [(n-\tau)!]^{r-1} = n! \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot \frac{[(n-\tau)!]^{r-2}}{\tau!}$$

und

$$13) \quad \mathfrak{A}_n^{(n)} = - \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot (n)_\tau \cdot [(n-\tau)!]^{r-1} = - n! \cdot \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (-1)^\tau \cdot \frac{[(n-\tau)!]^{r-2}}{\tau!}.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{F}_k^{(n)}$ und $\mathfrak{F}_{k0}^{(n)}$ die Anzahl der Glieder einer Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades, welche Elemente eines gegebenen Systems $k \leq n$ -transversaler Elemente als Factor enthalten bzw. nicht enthalten, so bestehen die Gleichungen:

$$14) \quad \mathfrak{F}_k^{(n)} + \mathfrak{F}_{k0}^{(n)} = [n!]^{r-1},$$

$$15) \quad \mathfrak{F}_k^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)},$$

$$16) \quad \mathfrak{F}_{k0}^{(n)} = \mathfrak{A}_k^{(n)},$$

giltig für $k = 0, 1 \dots n$; die Annahme $k = 0$ ist in dem Sinne zu definiren, dass, wenn alle Elemente des gegebenen Systems den Werth Null haben, die Symbole $\overset{r}{F}_0^{(n)}$ und $\overset{r}{\mathfrak{A}}_0^{(n)}$ bezw. $\overset{r}{F}_0^{(n)}$ und $\overset{r}{A}_0^{(n)}$ dieselbe Bedeutung haben.

Infolge der Gleichungen 15) und 16) haben alle für $\overset{r}{A}_k^{(n)}$ giltigen Formeln auch für $\overset{r}{F}_k^{(n)}$, und die für $\overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(n)}$ auch für $\overset{r}{F}_{k0}^{(n)}$ Giltigkeit.

Ordnet man die betrachteten transversalen Elemente in einer bestimmten sonst aber ganz beliebigen Reihenfolge, so ist die Anzahl derjenigen Glieder $\overset{r}{E}_\lambda^{(n)}$, in welchen keines der $(\lambda - 1)$ ersten Elemente vorkommt, dabei aber jedes dieser Glieder das λ^{te} Element enthält, durch den Ausdruck gegeben:

$$17) \quad \overset{r}{E}_\lambda^{(n)} = \overset{r}{F}_\lambda^{(n)} - \overset{r}{F}_{\lambda-1}^{(n)} = \overset{r}{A}_\lambda^{(n)} - \overset{r}{A}_{\lambda-1}^{(n)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}_{\lambda-1}^{(n-1)},$$

giltig für $\lambda = 1, 2 \dots n$.

Die Gleichung 17) enthält den Satz:

Ordnet man die betrachteten transversalen Elemente einer Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades in einer bestimmten, sonst aber beliebigen Reihenfolge, so ist die Anzahl der Glieder, in welchen keines der $(\lambda - 1)$ ersten Elemente vorkommt, dabei aber jedes dieser Glieder das λ^{te} Element enthält, gleich der Gliederzahl einer Determinante r^{ten} Ranges und $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades mit $(\lambda - 1)$ transversalen Nullelementen.

Substituirt man den aus 10) dadurch sich ergebenden Werth von $\overset{r}{\mathfrak{A}}_{\lambda-1}^{(n-1)}$, dass darin $(n - 1)$ für r und $(\lambda - 1)$ für k gesetzt wird, in die Gleichung 17), so erhält man $\overset{r}{E}_\lambda^{(n)}$ in independenter Form:

$$18) \quad \overset{r}{E}_\lambda^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} (-1)^\tau \cdot (\lambda - 1)_\tau \cdot [(n - 1 - \tau)!]^{r-1},$$

giltig für $\lambda = 1, 2 \dots n$.

Setzt man in 17) für λ die successiven Werthe $1, 2 \dots k$ und addirt die erhaltenen Ausdrücke, so erhält man mit Rücksicht auf 8) die Formel:

$$19) \quad \overset{r}{A}_k^{(n)} = \overset{r}{F}_k^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \overset{r}{E}_\lambda^{(n)},$$

giltig für $k = 1, 2 \dots n$.

Ertheilt man den betrachteten transversalen Elementen den Werth Null, so ist in 19) die Grösse $\overset{r}{A}_k^{(n)}$ durch die Anzahl der Glieder ausgedrückt, deren Verschwinden durch die einzelnen, in bestimmter Reihenfolge geordneten Nullelemente bewirkt wird.

Die entwickelten Gleichungen sind insbesondere giltig bei $r = 2$ für die quadratischen, bei $r = 3$ für die cubischen Determinanten.

V. Ueber die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl N mit Hilfe der Primzahlen, welche kleiner als \sqrt{N} sind.

Die Aufgabe, die Anzahl der Primzahlen zu bestimmen, welche kleiner sind als eine gegebene Zahl N , wird gewissermassen mechanisch gelöst durch das sogenannte Sieb des Eratosthenes und durch directes Abzählen der nicht weggestrichenen Zahlen. Um diese Frage durch Rechnung zu beantworten, erscheint es der einfachste Weg, diese Methode der Ausschliessung der zusammengesetzten Zahlen in Rechnungen umzusetzen.

Hat man bei einer beliebigen Grenzzahl N die Anzahl A der aufzuschreibenden ungeraden Zahlen im Zahlenraum von 1 bis N einschliesslich bestimmt, so sucht man zunächst für jede dabei in Betracht kommende ungerade Primzahl $3, 5, 7, 11, \dots$ bis $p_\nu < \sqrt{N}$

die Anzahl ($q_3, q_5, q_7, q_{11} \dots q_{p_\nu}$) der ungeraden Vielfachen derselben bis zur Grenze N , berechnet sodann für jede dieser Primzahlen p_x die Menge derjenigen Vielfachen, welche bereits als Vielfache der kleineren Primzahlen

$$3, 5, 7, 11, \dots p_{x-1}$$

in Wegfall gekommen sind und zieht sie von q_x ab und subtrahirt zuletzt von A die Summe der übriggebliebenen Vielfachen der einzelnen Primzahlen.

Ist N gerade, so ist $A = \frac{N}{2}$; für ein ungerades N ist $A = \frac{N+1}{2}$.

Betrachten wir die Zahl 1 nicht als Primzahl, so sind $A-1$ ungerade Zahlen zu berücksichtigen; addiren wir zu denselben gleich hier die einzige gerade Primzahl 2, so sind die in Abzug zu bringenden Vielfachen der ungeraden Primzahlen von A abziehen.

In der Reihe der ungeraden Zahlen können von jeder ungeraden Primzahl nur die ungeraden Vielfachen vorkommen und jede ungerade Zahl p nimmt in dieser Reihe die $\frac{p+1}{2}$ Stelle ein. Um das Hinwegstreichen der aufeinander folgenden Vielfachen der einzelnen Primzahlen als ein Dividiren betrachten zu können, denken wir bei jeder Primzahl p die Reihe der ungeraden Zahlen rückwärts über die Zahl 1 um $\frac{p-1}{2}$ Stellen erweitert; dann ist

$$\frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2} = p;$$

denn, um diese Berechnung mit den späteren in Uebereinstimmung zu bringen, denken wir uns zunächst jede Primzahl selbst mit weggestrichen, müssen jedoch zum Schlussresultat die Anzahl der in Betracht kommenden ungeraden Primzahlen addiren. Es sind also, um die Anzahl ($q_3, q_5, q_7, q_{11} \dots q_{p_\nu}$) der bei jeder Primzahl in Wegfall kommenden ungeraden Zahlen zu finden, durch die aufeinander folgenden Primzahlen:

die Summen $3, 5, 7, 11, \dots p_\nu$
 $A + 1, A + 2, A + 3, A + 5, \dots A + \frac{p_\nu - 1}{2}$

zu dividiren; die bei diesen Divisionen sich ergebenden ganzen Zahlen sind die gesuchten Zahlen $q_3, q_5, q_7, q_{11}, \dots q_{p_\nu}$.

Die schwierigere Frage ist nun die, wieviel von den bei der Primzahl p_π zu streichenden Zahlen schon früher als Vielfache der kleineren Primzahlen

$$3, 5, 7, 11, \dots p_{\pi-1}$$

in Wegfall gekommen sind. Die Zahl q_π giebt die Anzahl der Glieder in der Reihe der ungeraden Vielfachen von p_π an. Verfolgen wir den weiteren Verlauf der Untersuchung in der Reihenfolge der Primzahlen, so ergibt

$$(A + 1) : 3 = q_3$$

die Anzahl der in der Zahlenreihe von 1 bis N vorkommenden ungeraden Vielfachen von 3, von denen noch keine weggestrichen waren,

$$(A + 2) : 5 = q_5$$

die Anzahl der in demselben Zahlenraume vorkommenden ungeraden Vielfachen von 5, das heisst des 1, 3, 5, 7, 9... q_5 fachen; von dem Dreifachen dieser Reihe an muss jedes dritte Glied derselben den Factor 3 enthalten; es sind also entsprechend unserer ersten Ueberlegung von den q_5 Vielfachen von 5 bereits

$$(q_5 + 1) : 3$$

ungerade Zahlen als Vielfache von 3 in Abzug gebracht worden, so dass bei der Primzahl 5 nicht q_5 , sondern nur

$$q_5 - (q_5 + 1) : 3$$

Zahlen zum ersten Male weggestrichen werden.

Die Division $(A_3 + 1) : 7 = q_7$ giebt die Anzahl der in dem betreffenden Zahlenraume vorkommenden ungeraden Vielfachen von 7, das heisst des

$$1, 3, 5, 7, \dots q_7^{\text{ten}};$$

unter diesen q_7 Zahlen enthalten $(q_7 + 1) : 3$ den Factor 3 und $(q_7 + 2) : 5$ den Factor 5. Von den letzteren Fünffachen der Primzahl 7, nämlich dem

$$1, 3, 5, 7, 9 \dots (q_7 + 2) : 5 \text{ fachen}$$

sind unter den $(q_7 + 1) : 3$ Zahlen der Dreifachen von 7 schon

$$[(q_7 + 2) : 5 + 1] : 3$$

Zahlen als Dreifache des Fünffachen von 7 enthalten, so dass als Fünffache nur

$$(q_7 + 2) : 5 - [(q_7 + 2) : 5 + 1] : 3$$

Zahlen, im Ganzen also für die Primzahl 7 nur

$$q_7 - \{(q_7 + 1) : 3 + [(q_7 + 2) : 5 - ((q_7 + 2) : 5 + 1) : 3]\}$$

Zahlen zu subtrahiren sind.

Die Division $(A + 5) : 11 = q_{11}$ giebt die ungeraden Vielfachen von 11; unter diesen q_{11} Zahlen enthalten $(q_{11} + 1) : 3$ den Factor 3, $(q_{11} + 2) : 5$

den Factor 5, $(q_{11} + 3) : 7$ den Factor 7; von den $(q_{11} + 2) : 5$ gehen als Vielfache von 3 weiter $[(q_{11} + 2) : 5 + 1] : 3$ Zahlen in Abzug; von den $(q_{11} + 3) : 7$ fallen noch fort

$((q_{11} + 3) : 7 + 1) : 3 + [((q_{11} + 3) : 7 + 2) : 5 - \{(q_{11} + 3) : 7 + 2\} : 5 + 1] : 3$ u. s. w.

Bei allen diesen Divisionen gilt als Resultat die sich ergebende ganze Zahl. Bezeichnen wir allgemein

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 11, \dots p_\nu$$

die ν^{te} ungerade Primzahl und verstehen wir unter dem Zeichen $\Psi(N, \nu)$ die Menge derjenigen ungeraden Zahlen, welche in der Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis N einschliesslich durch keine der Primzahlen

$$p_1, p_2, p_3 \dots p_\nu$$

theilbar sind, so haben wir in der angegebenen Weise für jeden Quotienten q_x den Werth des Zeichens $\Psi(2q_x, x - 1)$ zu berechnen, um zu finden, wieviel von den bei der Primzahl p_x in Abzug zu bringenden Zahlen q_x bereits durch die kleineren Primzahlen

$$p_1, p_2, p_3 \dots p_{x-1}$$

in Wegfall gekommen sind; denn da der Quotient q_x die Anzahl der Glieder in der Reihe der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen angiebt, so ist die letzte ungerade Zahl $2q_x - 1$.

Bei diesen letzteren Berechnungen bieten uns einige bekannte, einfache Ueberlegungen bedeutende Vortheile. Gelangen wir bei der Berechnung der durch eine kleinere Primzahl p_h schon in Abzug gebrachten Zahlen auf einen Quotienten Q_h , dessen Doppeltes kleiner ist als das Quadrat der vorhergehenden Primzahl $2Q_h < (p_h - 1)^2$,

so sind von den ungeraden Zahlen im Zahlenraume von 1 bis $2Q_h$ als Vielfache der Primzahlen 3, 5, 7, 11 ... p_{h-1} alle ausgeschlossen mit Ausnahme der 1 und der Primzahlen, welche grösser als p_{h-1} und kleiner als $2Q_h$ sind. Hierbei wird $2Q_h$ stets kleiner als die grösste, bei der ganzen Berechnung zu berücksichtigende Primzahl p_ν sein, so dass wir nur die Tafel der unbedingt nothwendigen Primzahlen zu benutzen brauchen. Unter Anwendung des Zeichens $\varphi(m)$, welches die Menge der Primzahlen $\leq m$ bedeutet, können wir diesen Satz folgendermassen schreiben:

$$\Psi(2Q_h, h - 1) = 1 + \varphi(2Q_h) - (h - 1),$$

wenn $(p_h - 1)^2 > 2Q_h > p_h$ ist.

Erhalten wir ferner bei einer solchen kleineren Primzahl p_h einen Quotienten Q_h , dessen Doppeltes kleiner als p_h und grösser als p_{h-1} ist, so sind alle Zahlen ausser der Einheit ausgeschlossen; es ist

$$\Psi[2Q_h, \varphi(2Q_h)] = 1.$$

Bei noch kleineren Quotienten Q_h , so dass $2Q_h < p_{h-1}$ ist, bedeutet das Zeichen Ψ , es soll die Menge der ungeraden Zahlen im Zahlenraume von 1 bis $2Q_h$ gesucht werden, die durch keine aller ungeraden Prim-

zahlen zwischen 1 bis $2Q_h$, ja selbst durch keine grössere als $2Q_h$ theilbar sind; es kann in diesem Falle erst recht nur die Einheit übrig bleiben und es ist

$$\Psi[2Q_h, a + \varphi(2Q_h)] = 1,$$

wo $a \geq 0$ und eine ganze Zahl ist.

Einige Beispiele werden sofort die Einfachheit und Kürze der Berechnungen erkennen lassen.

$$\begin{array}{r}
 N = 500; \sqrt{500} = 22. \\
 3 \quad 500 : 2 = 250 \\
 5 \quad (250 + 1) : 3 = 83 \\
 7 \quad (250 + 2) : 5 = 50; 50 - 17 = 33 \\
 11 \quad (50 + 1) : 3 = 17 \\
 13 \\
 17 \quad (250 + 3) : 7 = 36; 36 - (12 + 5) = 19 \\
 19 \quad (36 + 1) : 3 = 12 \\
 \frac{19}{7} \quad (36 + 2) : 5 = 7; 7 - 2 = 5 \\
 \quad \quad \quad (7 + 1) : 3 = 2 \\
 \\
 255 : 11 = 23; 23 - (8 + 3 + 1) = 11 \\
 \quad 24 : 3 = 8 \\
 \quad 25 : 5 = 5; 5 - 2 = 3 \\
 \quad \quad 6 : 3 = 2 \\
 \quad 26 : 7 = 3 \quad - 1 \\
 \quad 2 \cdot 3 = 6 < 5^2 \\
 \\
 \dots 6 : 13 = 19; 19 - (6 + 3 + 1 + 1) = 8 \\
 \quad 20 : 3 = 6 \\
 \quad 1 : 5 = 4; = 3 \\
 \quad 2 \cdot 4 = 8 < 3^2 \\
 \text{um so mehr für } 7 = 1 \\
 \quad \quad \quad \text{,, } 11 = 1 \\
 \\
 \dots 8 : 17 = 15; 15 - 10 = 5 \\
 \quad 6 : 3 = 5 \\
 \quad 7 : 5 = 3; 6 = 2 \\
 \quad 7, 11, 13 = 3 \\
 \\
 \dots 9 : 19 = 13 = 3 \\
 \quad 4 : 3 = 4 \\
 \quad 5 : 5 = 3, 6 = 2 \\
 \quad 7, 11, 13, 17 = 4 \\
 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 16 \ 2 \\
 \\
 250 - 162 = 88 \\
 \quad \quad \quad 7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 95 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 N = 1000; \sqrt{1000} = 31 \\
 3 \quad 1000 : 2 = 500 \\
 5 \quad (500 + 1) : 3 = 167 \\
 7 \quad 502 : 5 = 100; 100 - 33 = 67 \\
 11 \quad 101 : 3 = 33 \\
 13 \\
 17 \quad 503 : 7 = 71; 71 - (24 + 9) = 38 \\
 19 \quad 72 : 3 = 24 \\
 23 \quad 73 : 5 = 14 \quad - 9 \\
 29 \quad 15 : 3 = 5 \\
 31 \quad \dots 5 : 11 = 45 = 21 \\
 \\
 10 \quad 6 : 3 = 15 \\
 \quad 7 : 5 = 9 = 6 \\
 \quad 10 : 3 = 3 \\
 \quad 8 : 7 = 6, 12 = 3 \\
 \\
 6 : 13 = 38 = 17 \\
 9 : 3 = 13 \\
 40 : 5 = 8 - 3 = 5 \\
 1 : 7 = 5, 10 = 2 \\
 3 : 11 = 3, 6 = 1 \\
 8 : 17 = 29 = 11 \\
 30 : 3 = 10 \\
 1 : 5 = 6 - 2 = 4 \\
 2 : 7 = 4, 8 = 2 \\
 4 : 11 = 3 = 1 \\
 \quad 13 = 1 \\
 \\
 9 : 19 = 26 = 9 \\
 \quad 7 : 3 = 9 \\
 \quad 8 : 5 = 5 - 2 = 3 \\
 \quad 9 : 7 = 4, 8 = 2 \\
 \quad 11, 13, 17 = 3 \\
 \\
 511 : 23 = 22 = 7 \\
 \frac{5}{5} \quad 3 : 3 = 7 \\
 \quad 4 : 5 = 4, 8 = 3 \\
 \quad 5 : 7 = 3, 6 = 1 \\
 \quad 11, 13, 17, 19 = 4 \\
 \\
 514 : 29 = 17 = 3 \\
 22 \quad 8 : 3 = 6 \\
 \quad 9 : 5 = 3, 6 = 2 \\
 \quad 7, 11, 13, 17, 19, 23 = 6 \\
 \\
 515 : 31 = 16 = 2 \\
 20 \quad 7 : 3 = 5 \\
 \quad 8 : 5 = 3, 6 = 2 \\
 \quad \quad \quad 7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 342 \\
 \\
 500 - 342 = 158 \\
 \quad \quad \quad 10 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 168 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

$N = 10000; \sqrt{10000} = 100,$

3	10000 : 2 = 5000		5015 : 31 = 161	= 57
5	5001 : 3 = 1667		162 : 3 = 54	
7	... 2 : 5 = 1000 = 667		3 : 5 = 32 - 11 = 21	
11	... 1 : 3 = 333		4 : 7 = 23 - 8 - 3 = 12	
13			6 : 11 = 15	30 7
17	3 : 7 = 714 = 381		7 : 13 = 12	24 5
19	5 : 3 = 238		9 : 17 = 9	18 2
23	6 : 5 = 143 48 - 95		19, 23, 29	3
29				
31	5005 : 11 = 455 = 208		5018 : 37 - 135	= 47
37	456 : 3 = 152		136 : 3 = 45	
41	7 : 5 = 91 - 30 = 61		7 : 5 = 27 - 9 = 18	
43	8 : 7 = 65 = 34		8 : 7 = 19 - 6 - 3 = 10	
47	6 : 3 = 22		140 : 11 = 12	24 6
53	7 : 5 = 13 - 4 = 9		1 : 13 = 10	20 4
59	5006 : 13 = 385 = 160		3 : 17 = 8	16 1
61	386 : 3 = 128		19, 23, 29, 31	4
67	7 : 5 = 77 - 26 = 51			
71	8 : 7 = 55 = 30		5020 : 41 = 122	= 42
73	6 : 3 = 18		123 : 3 = 41	
79	7 : 5 = 11 - 4 = 7		4 : 5 = 24 - 8 = 16	
83	90 : 11 = 35 = 16		5 : 7 = 17 - 6 - 2 = 9	
89	6 : 3 = 12		7 : 11 = 11	22 5
97	7 : 5 = 7 - 2 = 5		8 : 13 = 9	18 3
24	8 : 7 = 5, 10 = 2			6
			5021 : 43 = 116	= 38
			117 : 3 = 39	
	5008 : 17 = 294 = 111		8 : 5 = 23 - 8 = 15	
	295 : 3 = 98		9 : 7 = 17 - 6 - 2 = 9	
	6 : 5 = 59 - 20 = 39		120 : 11 = 10	5
	7 : 7 = 42 - 14 - 5 = 23		1 : 13 = 9	3
	9 : 11 = 27 - 9 - 3 - 2 = 13			7
	300 : 13 = 23, 46 = 10		5023 : 47 = 106	= 34
			107 : 3 = 35	
	5009 : 19 = 263 = 95		8 : 5 = 21 - 7 = 14	
	264 : 3 = 88		9 : 7 = 15 - 5 - 2 = 8	
	5 : 5 = 53 - 18 = 35		111 : 11 = 10 20	5
	6 : 7 = 38 - 13 - 5 = 20		2 : 13 = 8 16	2
	8 : 11 = 24, 48 = 12			8
	9 : 13 = 20, 40 8		5026 : 53 = 94	= 28
	271 : 17 = 15, 30 5		95 : 3 = 31	
			6 : 5 = 19 - 6 = 13	
	5011 : 23 = 217 = 77		7 : 7 = 13 - 4 - 2 = 7	
	218 : 3 = 72		9 : 11 = 9 18	4
	9 : 5 = 43 - 14 = 29		100 : 13 = 7 14	2
	220 : 7 = 31 - 10 - 4 = 17			9
	2 : 11 = 20 40 9		5029 : 59 = 85	= 24
	3 : 13 = 17 34 7		86 : 3 = 28	
	5 : 17 = 13 26 4		7 : 5 = 17 - 6 = 11	
	6 : 19 = 11 22 2		8 : 7 = 12 24 7	
			90 : 11 = 8 16 3	
	5014 : 29 = 172 = 60		1 : 13 = 7 14 2	
	173 : 3 = 57			10
	4 : 5 = 34 - 11 = 23		5030 : 61 = 82	= 22
	5 : 7 = 25 8 - 3 - 14		83 : 3 = 27	
	7 : 11 = 16 32 8		4 : 5 = 16 - 5 = 11	
	8 : 13 = 13 26 5		5 : 7 = 12 24 7	
	180 : 17 = 10 20 3		7 : 11 = 7 14 3	
	1 : 19 = 9 18 1		8 : 13 = 6 12 1	
	3 : 23 = 7 14 1			11

$5033 : 67 = 75$ $76 : 3 = 25$ $7 : 5 = 15 - 5 = 10$ $8 : 7 = 11 \quad 22 \quad 6$ $80 : 11 = 7 \quad 14 \quad 3$ <div style="text-align: right;">13</div>	$= 18$	$5041 : 83 = 60$ $61 : 3 = 20$ $2 : 5 = 12 - 4 = 8$ $3 : 7 = 9 \quad 18 \quad 5$ $5 : 11 = 5 \quad 10 \quad 1$ <div style="text-align: right;">17</div>	$= 9$
$5035 : 71 = 70$ $71 : 3 = 23$ $2 : 5 = 14 - 5 = 9$ $3 : 7 = 10 \quad 20 \quad 6$ $5 : 11 = 6 \quad 12 \quad 2$ <div style="text-align: right;">14</div>	$= 16$	$5044 : 89 = 56$ $57 : 3 = 19$ $8 : 5 = 11 - 4 = 7$ $9 : 7 = 8 \quad 16 \quad 4$ <div style="text-align: right;">19</div>	$= 7$
$5036 : 73 = 68$ $69 : 3 = 23$ $70 : 5 = 14 - 5 = 9$ $1 : 7 = 10 \quad 6$ $3 : 11 = 6 \quad 2$ <div style="text-align: right;">15</div>	$= 13$	$5048 : 97 = 52$ $53 : 3 = 17$ $4 : 5 = 10 - 3 = 7$ $5 : 7 = 7 \quad 14 \quad 4$ <div style="text-align: right;">20</div>	$= 4$
$5039 : 79 = 63$ $64 : 3 = 21$ $5 : 5 = 13 - 4 = 9$ $6 : 7 = 9 \quad 18 \quad 5$ $8 : 11 = 6 \quad 12 \quad 2$ <div style="text-align: right;">16</div>	$= 10$	$5000 - 3795 = 1205$ <div style="text-align: right;">24</div> <div style="text-align: right; border-top: 1px solid black; border-bottom: 3px double black;">1229</div>	

Bautzen.

Dr. H. VOLLPRECHT.

VI. Beweis eines Satzes von Jacob Steiner über die Krümmungskreise einer Ellipse.

Jacob Steiner stellte den nachstehenden Satz über die Krümmungskreise einer Ellipse auf, den wir in Folgendem auf einfache Art beweisen werden.

„Durch jeden Punkt q einer Ellipse gehen drei Krümmungskreise der Ellipse und zwar liegen die Osculationspunkte a, b, c dieser Kreise mit dem Punkt q auf einem Kreise und sind die Ecken eines grössten, der Ellipse einbeschriebenen Dreiecks.“

In den Ecken eines beliebigen einem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABC seien an den Kreis die Tangenten gezogen, welche einen beliebigen Durchmesser D dieses Kreises in den Punkten A_1, B_1 und C_1 treffen. Um A, B, C seien mit den Längen AA_1, BB_1 und CC_1 Kreisbögen beschrieben, die den Durchmesser D ein zweites Mal in den Punkten A_2, B_2 und C_2 treffen. Es lässt sich dann auf elementare Weise zeigen, dass

α) AA_2, BB_2 und CC_2 sich in einem Punkte Q auf dem Kreise schneiden; und

β) die Geradenpaare AB, CQ ; AC, BQ und BC und AQ gegen den Durchmesser D gleich geneigt sind.

Drehen wir den Kreis um den Durchmesser D und projeciren die ganze Figur auf die ursprüngliche Kreisebene, oder aber verkürzen wir die Entfernungen aller Punkte vom Durchmesser D in bestimmtem Verhältniss, so sind, wenn wir die Projectionen der Punkte mit den gleichen,

jedoch kleinen Buchstaben bezeichnen, allemal auch in der neuen Figur α) ab und qc und ac und qb und ebenso bc und aq gegen den Durchmesser D gleich geneigt;

β) ebenso bilden die Geradenpaare $aa_1, aa_2; bb_1, bb_2$ und cc_1, cc_2 mit dem Durchmesser D gleiche Winkel. Es folgt daraus aber unmittelbar, dass auch die Punkte a, b, c und q auf einem Kreise liegen; denn bilden zwei Gegenseiten eines Vierecks, das einer Ellipse einbeschrieben ist, mit einer Achse der Ellipse, also hier mit D , gleiche Winkel, so ist das Viereck ein Kreisviereck.

Da weiter das Dreieck ABC ein dem Kreise einbeschriebenes grösstes Dreieck ist, so ist auch abc ein solches in Bezug auf die Projection des Kreises, also in Bezug auf die Ellipse. Da ferner z. B. die Geraden aa_1 und aq auch in Bezug auf die Gerade D , die Hauptachse der Ellipse, gleich geneigt sind, so geht der Krümmungskreis der Ellipse im Punkte a durch den Punkt q , womit der Satz bewiesen ist.

Weingarten (Württemberg).

BENEDIKT SPORER.

VII. Combinatorischer Beweis des Wilson'schen Lehrsatzes.

Die in der Zahl $(p-1)!$ enthaltenen Einheiten lassen sich durch die sämtlichen Permutationen von p verschiedenen Elementen $1, 2, \dots, p$ darstellen, wenn die nur durch cyklische Verschiebung ihrer Elemente vor einander verschiedenen Permutationen als identisch betrachtet werden. Es kann ja unter dieser Bedingung jede Permutation so umgestellt werden, dass sie mit einem bestimmten Elemente, etwa mit 1 , beginnt, so dass alle wesentlich von einander verschiedenen Anordnungen nur durch den Platzwechsel der $(p-1)$ übrigen Elemente entstehen.

Leitet man nun aus irgend einer Permutation a, b, \dots, p, \dots, k dadurch eine andere $(a+1), (b+1), \dots, 1, \dots, (k+1)$ ab, dass man jedes Element durch das ihm nach der ursprünglichen Anordnung $(1, 2, \dots, p)$ folgende ersetzt, wobei natürlich 1 als auf p folgend gilt, und wendet man auf die erhaltene Permutation immer wieder dieselbe Operation an, so muss man endlich einmal, spätestens nach p maliger Ausführung dieses Verfahrens, wieder diejenige Anordnung erhalten, von der man ausgegangen ist. Geschieht dies nun zum ersten Male nach m Operationen, so wird es immer wieder und nicht früher als nach m weiteren, das heisst, es wird nach $m, 2m, 3m, \dots$ Verwandlungen stattfinden. Demnach muss m ein Theiler von p sein.

Sämmtliche $(p-1)!$ Permutationen werden durch dieses Verfahren in geschlossene Gruppen zusammengefasst, von denen keine zwei irgend eine Permutation gemeinsam haben können, da die Ableitung der übrigen zu einer Gruppe gehörigen Permutationen aus einer derselben durch eine eindeutige Operation erfolgt.

Ist nun p eine Primzahl, so bleiben für m nur die beiden Werthe 1 und p möglich, das heisst, es kann in diesem Falle nur solche Permutationen geben, die durch die geschilderte Verwandlung ungeändert bleiben, und solche, die zu p gliedrigen Gruppen zusammentreten. Die Anzahl der ersteren ist leicht zu bestimmen. In der cyklisch angeordneten Elementenreihe muss bei ihnen der Abstand von a bis $(a + 1)$ derselbe sein, wie der von $(a + 1)$ bis $(a + 2)$ u. s. w., da sonst $a \dots, (a + 1) \dots, (a + 2) \dots$ nicht mit $(a + 1) \dots, (a + 2) \dots, (a + 3) \dots$ übereinstimmen könnte. Es sind daher nur die $(p - 1)$ Fälle möglich, in denen dieser Abstand 1, 2, 3... oder $(p - 1)$ Intervalle ausmacht, und diese Fälle kommen thatsächlich sämmtlich vor, da die genannten Zahlen alle relativ prim zu p sind, so dass jedesmal gerade ein Element auf jeden Platz entfällt.

Die $(p - 1)!$ vorhandenen Permutationen zerfallen also in $(p - 1)$ einzelstehende und in Gruppen von je p zusammengehörigen. Demnach ist $(p - 1)!$ in Bezug auf den Modul p mit $(p - 1)$ oder (-1) congruent.

Ein einfaches Beispiel möge das (übrigens leicht geometrisch zu veranschaulichende) Beweisverfahren erläutern. Für $p = 5$ hat man die Permutationen:

1 2 3 4 5	1 3 5 2 4	1 4 2 5 3	1 5 4 3 2	
1 2 3 5 4	1 5 2 3 4	1 3 4 5 2	1 3 2 4 5	1 2 4 3 5
1 2 4 5 3	1 4 2 3 5	1 2 5 3 4	1 4 5 2 3	1 3 4 2 5
1 2 5 4 3	1 5 4 2 3	1 5 3 4 2	1 4 5 3 2	1 4 3 2 5
1 3 5 4 2	1 5 3 2 4	1 4 3 5 2	1 3 2 5 4	1 5 2 4 3

Gotha.

Dr. AD. SCHMIDT.

VIII. Ueber einen zahlentheoretischen Satz von Legendre.

Wie auf S. 221 der Historisch-literarischen Abtheilung des 39. Jahrganges der vorliegenden Zeitschrift angegeben ist, hat Herr Dr. Scheffler den folgenden, von Legendre ausgesprochenen Satz zu beweisen versucht:

Ist eine Folge von k beliebigen ungeraden Primzahlen p_1, \dots, p_k gegeben, und versteht man unter π_i das i^{te} Glied in der natürlichen Reihe der Primzahlen 3, 5, 7, 11, ..., so giebt es unter π_{k-1} aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Progression, deren Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, mindestens eines, das durch keine der Primzahlen p_1, \dots, p_k theilbar ist.

Nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Dr. K. Th. Vahlen in Berlin hat zuerst Herr Dr. Piltz die Unrichtigkeit dieser Behauptung in seiner Habilitationsschrift (Jena 1884) nachgewiesen; auf dem von Dr. Piltz angegebenen Wege hat nachher Herr Prof. Bachmann (Zahlentheorie, II. Bd. Auhang) an einem Beispiele die Unrichtigkeit des Legendre'schen Satzes gezeigt.

SCHLÖMILCH.

IX. Ueber eine Verallgemeinerung der Euler'schen φ Function

Es seien α und β beliebige positive, n eine positive ganze Zahl, F eine beliebige, für positive Brüche eindeutig definirte Function.

Wir definiren eine Function $\varphi_{\alpha\beta}(n)$ durch die Gleichung:

$$I) \quad \varphi_{\alpha\beta}(n) = \sum F\left(\frac{m}{n}\right), \quad (m, n \text{ theilerfremd})$$

in welcher die Summation über alle irreductibeln, zwischen α und β gelegenen Brüche $\frac{m}{n}$ zu erstrecken ist.

Setzt man in I) für n alle Divisoren d von n und summirt, so erhält man:

$$II) \quad \sum_{d|n} \varphi_{\alpha\beta}(d) = \sum F\left(\frac{m}{n}\right),$$

wo die Summation rechts über alle reductibeln und irreductibeln Brüche $\frac{m}{n}$ zwischen α und β zu erstrecken ist.

Setzt man in II) für n alle ganze Zahlen bis n und summirt, so ergibt sich:

$$III) \quad \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] \varphi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{h, k} [(\alpha - \beta)k] F\left(\frac{h}{k}\right); \quad (h, k \text{ theilerfremd});$$

hier bezieht sich rechts die Summation auf alle zwischen α und β gelegenen irreductibeln Brüche, deren Nenner n nicht übersteigen.

Für $F\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ bedeutet $\varphi_{\alpha\beta}(n)$ die Anzahl der zwischen α und β gelegenen irreductibeln Brüche mit dem Nenner n .

Aus II) und III) folgt dann:

$$IV) \quad \sum_{d|n} \varphi_{\alpha\beta}(d) = [(\alpha - \beta)n],$$

$$V) \quad \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] \varphi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{k=1}^n [(\alpha - \beta)k].$$

Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ist $\varphi_{1,0}(n)$ die Anzahl der zwischen 1 und 0 gelegenen irreductibeln Brüche mit dem Nenner n , also $\varphi_{1,0}(n) = \varphi(n)$. Dann folgt aus IV) und V):

$$VI) \quad \sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$

$$VII) \quad \sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] \varphi(k) = \frac{n(n+1)}{2},$$

von denen die erste Gleichung bekanntlich Gauss*, die zweite Sylvester** aufgestellt hat.

* Gauss, Disquisitiones arithmeticae Art. 39.

** Sylvester, Comptes rendus XCVI.

Eine von Eisenstein* und Stern** betrachtete Function ergibt sich aus I) für $F\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{m}$; eine Gleichung von Laguerre*** aus IV) für $\alpha = \frac{1}{k}$, $\beta = 0$.

Berlin.

K. TH. VAHLEN.

X. Die Transformation der quadratischen Formen.

Die Transformation der quadratischen Formen lässt sich auf Grund der von Euklid zur Auflösung der quadratischen Gleichungen benutzten Methode der quadratischen Ergänzung in folgender Weise ausführen.

Es sei
$$f = \sum a_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

die zu transformirende Form. Giebt man ihr die Gestalt:

$$f = \frac{1}{a_{11}} \{a_{11}^2 x_1^2 + 2a_{11} x_1 (a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)\} + \sum a_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 2, \dots, n)$$

und ergänzt den ersten Theil zum Quadrat, so erhält man:

$$f = \frac{(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)^2}{a_{11}} + \frac{1}{a_{11}} \sum a'_{ik} x_i x_k, \quad (i, k = 2, \dots, n)$$

wo $a'_{ik} = a_{11} a_{ik} - a_{1i} a_{1k}$ gesetzt ist.

Ebenso wird:

$$\sum_{(i, k = 2, \dots, n)} a'_{ik} x_i x_k = \frac{(a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + \dots + a'_{2n} x_n)^2}{a'_{22}} + \frac{1}{a'_{22}} \sum a''_{ik} x_i x_k, \quad (i, k = 3, \dots, n)$$

wo $a''_{ik} = a'_{22} a'_{ik} - a'_{2i} a'_{2k}$ ist; u. s. w.

Schliesslich wird also:

$$\left\{ \begin{aligned} f &= \frac{(a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n)^2}{a_{11}} + \frac{(a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n)^2}{a_{11} \cdot a'_{22}} \\ &+ \frac{(a''_{33} x_3 + \dots + a''_{3n} x_n)^2}{a_{11} \cdot a'_{22} \cdot a''_{33}} + \dots + \frac{(a^{(n-1)} x_n)^2}{a_{11} \cdot a'_{22} \dots a^{(n-1)}_{nn}} \end{aligned} \right.$$

wo $a'''_{ik} = a''_{33} a''_{ik} - a''_{3i} a''_{3k}$ u. s. w. ist.

Um jetzt auf die bei der Transformation einer quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten übliche Form zu kommen, ist die Anwendung eines einfachen Determinantensatzes nothwendig.

* Eisenstein, Monatsberichte der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften, Berlin 1850; Journal für d. r. u. a. Mathematik Bd. 39.

** Stern, Journal für d. r. u. a. Mathematik Bd. 55.

*** Laguerre, Bulletin de la société mathématique Bd. 1.

Die folgende Gleichung:

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\
 a_{12}, & a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}, & \dots, & a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{1m}, & a_{11}a_{2m} - a_{12}a_{1m}, & a_{11}a_{3m} - a_{12}a_{1m}, & \dots, & a_{11}a_{mm} - a_{12}^2 \\
 \end{array} \right| \\
 = \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} & \dots & a_{11}a_{1m} \\
 a_{12} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \dots & a_{11}a_{2m} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{1m} & a_{11}a_{2m} & a_{11}a_{3m} & \dots & a_{11}a_{mm}
 \end{array} \right|, \text{ wo } a_{ik} = a_{ki} \text{ ist,}
 \end{array}$$

die man erhält, wenn man in der ersten Determinante die mit a_{1k} multiplicirte erste Colonne zur k^{ten} addirt, (für $k = 2, 3, \dots, m$), liefert den Satz:

$$|a'_{ik}| = a_{11}^{m-2} \cdot |a_{ik}|^*$$

$i, k = 2, \dots, m \quad i, k = 1, 2, \dots, m$

Die successive Anwendung desselben ergiebt:

$$\begin{aligned}
 a'_{gh} &= a_{11} \cdot |a_{ik}|, \\
 &\quad i = 1, 2, g \\
 &\quad k = 1, 2, h \\
 a''_{gh} &= a'_{22} \cdot |a'_{ik}| = a_{11}^2 \cdot |a_{ik}| \cdot |a_{ik}|, \\
 &\quad i = 2, 3, g \quad i = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3, g \\
 &\quad k = 2, 3, h \quad k = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3, h \\
 a'''_{gh} &= a'^2_{22} \cdot |a'_{ik}| \cdot |a'_{ik}| = a_{11}^4 \cdot |a_{ik}|^2 \cdot |a_{ik}| \cdot |a_{ik}|; \\
 &\quad i = 2, 3 \quad i = 2, 3, 4, g \quad i = 1, 2 \quad i = 1, 2, 3 \quad i = 1, 2, 3, 4, g \\
 &\quad k = 2, 3 \quad k = 2, 3, 4, h \quad k = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3, 4, h
 \end{aligned}$$

durch Induction findet man, dass allgemein

$$a^{(v-1)}_{gh} = A_1^{2^{v-3}} \cdot A_2^{2^{v-4}} \cdot A_3^{2^{v-5}} \cdot \dots \cdot A_{v-2}^{2^0} \cdot A_{v,g,h}$$

ist, wenn

$$|a_{ik}| = A_{v,g,h}, \quad A_{v,v,h} = A_{v,h}, \quad A_{vv} = A_v$$

gesetzt wird. $i = 1, 2, \dots, v-1, g$
 $k = 1, 2, \dots, v-1, h$

Setzt man diese Ausdrücke für $a^{(v-1)}_{gh}$ in die transformirte Form f ein, und beachtet, dass

$$a_{11} a'_{22} a''_{33} \dots a^{(v-1)}_{vv} = A_1^{2^{v-2}} \cdot A_2^{2^{v-3}} \cdot A_3^{2^{v-4}} \cdot \dots \cdot A_{v-2}^2 \cdot A_{v-1} \cdot A_v$$

wird, so dass sich aus dem Zähler und Nenner des v^{ten} Gliedes der Factor $A_1^{2^{v-2}} \cdot A_2^{2^{v-3}} \cdot A_3^{2^{v-4}} \cdot \dots \cdot A_{v-2}^2$ forthebt, so bekommt man die quadratische Form in der gewünschten Gestalt:

$$f = \frac{\left(\sum_1^n a_{1h} x_h\right)^2}{A_1} + \frac{\left(\sum_2^n A_{2,h} x_h\right)^2}{A_1 A_2} + \frac{\left(\sum_3^n A_{3,h} x_h\right)^2}{A_2 A_3} + \dots + \frac{(A_n x_n)^2}{A_{n-1} A_n}$$

* Derselbe ist ein besonderer Fall des Subdeterminantensatzes, welchen Herr G. Landsberg in der Arbeit: „Ueber relativ adjungirte Minoren“ (Bd. 109 des Journals für die reine und angewandte Mathematik) aufgestellt hat.

VIII.

Conforme Abbildungen, welche von der ζ -Function vermittelt werden.

Von

J. C. KLUYVER,

Professor an der Universität Leiden.

Hierzu Tafel VI Fig. 1—6.

Wie aus den Untersuchungen des Herrn Schwarz hervorgeht, bewirkt das elliptische Integral erster Gattung oder dessen Umkehrung die p -Function, die Abbildung der inneren w -Fläche eines Rechtecks, in einzelnen Fällen auch eines geradlinigen Dreiecks auf die positive z -Halbebene.*

Ausserdem aber zeigte Herr Schwarz, dass ein solches Integral zweiter Gattung das Innere eines Kreises auf das Aeussere eines Quadrates abbildet. Dies veranlasste mich zu näherer Beschäftigung mit der Aufgabe der conformen Abbildung einer äusseren Polygonsfläche, insofern für deren Lösung die ζ -Function Verwerthung findet.

Die Herleitung der betreffenden Abbildungsformeln bildet den Gegenstand der nachfolgenden Seiten.

§ 1. Die Function $w = f(z)$, welche die äussere w -Fläche eines geradlinigen n -Ecks auf die positive z -Halbebene abbildet.

Im Anschluss an die Schwarz'sche Lösung der Abbildungsaufgabe für die innere Polygonsfläche bildet auch im vorliegenden Falle die Untersuchung der Function:

* Ausser der Abhandlung des Herrn Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben“, Ges. W. II S. 65, mögen hier angeführt werden:

„Love, Vortex Motion in certain Triangles, American Journ. of Math. XI S. 153 (1889)“,

„Burnside, On a Problem of conformal Representation, Proc. of the London Math. Soc. XXIV S. 187 (1893).“

$$J(z) = \frac{d}{dz} \log \frac{dw}{dz}$$

den Ausgangspunkt. Unmittelbar erkennt man, dass die von Herrn Schwarz nachgewiesenen Eigenschaften dieser Function theils völlig ungeändert bleiben, theils nur sehr unwesentliche Umänderungen erfahren, so dass wir, ohne darauf weiter einzugehen, nachstehende Sätze aufstellen können.

1. In der Umgebung eines beliebigen Punktes $w = w_1$ der äusseren Polygonsfläche gilt die Entwicklung

$$J(z) = P(z - z_1).$$

2. In der Umgebung eines beliebigen Punktes $w = w_1$ der Begrenzung hat man

$$J(z) = p(z - z_1).$$

3. In der Umgebung eines Eckpunktes $w = b$ mit dem inneren Polygonswinkel $\lambda\pi$ ist

$$J(z) = \frac{1 - \lambda}{z - a} + p(z - a),$$

falls der entsprechende reelle Punkt $z = a$ im Endlichen liegt. Ist dagegen $a = \infty$, so hat man zu setzen:

$$J(z) = -\frac{3 - \lambda}{z} + \frac{1}{z^2} p\left(\frac{1}{z}\right).$$

4. Ist dem Punkte $z = \infty$ ein gewöhnlicher Punkt w des Umfanges zugeordnet, so gilt in der Umgebung des letzteren die Entwicklung:

$$J(z) = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} p\left(\frac{1}{z}\right).$$

Die Potenzreihen $P(z - z_1)$, $p(z - z_1)$ sind für $z = z_1$ von Null verschieden; sämtliche Coefficienten der Reihen p sind reell.

Die in diesen Sätzen zusammengestellten wesentlichen Eigenschaften der Function $J(z)$ genügen fast vollständig zu ihrer expliciten Darstellung. Man hat nur noch, wie wir jetzt thun wollen, das Verhalten von $J(z)$ in der Umgebung von $w = \infty$ näher in Betracht zu ziehen.

Vorausgesetzt $w = \infty$ entspricht der complexe z -Werth $z = k$, so erfordert die Aehnlichkeit der Stellen $w = \infty$, $z = k$, dass die Ableitung $\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{w}\right)$ für $z = k$ endlich und von Null verschieden ist.* Demzufolge lässt sich $\frac{1}{w}$ im Bereiche des Punktes $z = k$ entwickeln in eine Reihe von der Gestalt

$$\frac{1}{w} = (z - k)P(z - k),$$

wo in der Potenzreihe $P(z - k)$ das constante Anfangsglied nicht fehlen darf.

* Wir betrachten nur solche Polygone, welche keinen unendlich weit entfernten Eckpunkt haben.

Man erhält hieraus:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C}{(z-k)^2} + P(z-k),$$

$$1) \quad J(z) = -\frac{2}{z-k} + (z-k)P(z-k).$$

Es hat also die Function $J(z)$ ausser den Unstetigkeitspunkten $z = a$, welche den Eckpunkten des Polygons entsprechen, im Punkte $z = k$ einen einfachen Pol.

Wir haben jetzt zu zeigen, dass $J(z)$ in die negative z -Halbebene fortzusetzen ist und im Punkte $z = k_0$, wo k und k_0 conjugirt complexe Werthe sind, sich ganz wie im Punkte $z = k$ verhält.

In dieser Absicht grenzen wir einen Theil U der positiven z -Halbebene so ab, dass die vollständige Begrenzung dieses einfach zusammenhängenden Stückes gebildet wird, erstens von einer Strecke AB der Achse des Reellen, welche keinen der Unstetigkeitspunkte $z = a$ enthält, zweitens von einer sich nicht schneidenden Curve ACB , die in der Umgebung von $z = k$ verläuft, ohne den Punkt $z = k$ selbst einzuschliessen.

In dem so erhaltenen Gebiete U ist $J(z)$ definirt als einwerthige und stetige Function von z , wobei hervorzuheben ist, dass für die reellen Werthe, welche z auf AB annimmt, $J(z)$ eine stetige Folge ebenfalls reeller Werthe aufweist. Man kann somit den bekannten Schwarz'schen Satz anwenden und schliessen, dass die für U erklärte Function $J(z)$ über AB hinaus in das conjugirte Gebiet U_0 derart fortzusetzen ist, dass zu conjugirt complexen z -Werthen auch conjugirt complexe Functionswerthe gehören. Insbesondere nimmt daher $\text{mod} J(z)$ für entsprechende Punkte der beiden Umgebungen von $z = k$ und $z = k_0$ gleich grosse Werthe an.

Durch diese Betrachtungen ist nun $J(z)$ charakterisirt als eine in der ganzen z -Ebene einwerthige und bis auf einzelne jetzt völlig bekannten Pole stetige reelle Function, welche für $z = \infty$ verschwindet und die deshalb nur ein rationaler Ausdruck sein kann, dessen Darstellung sich ohne Weiteres aus den vorhergehenden Erwägungen ergibt.

Für den Fall, dass alle den n -Eckpunkten zugehörigen z -Werthe endlich sind, hat man offenbar

$$2) \quad J(z) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1 - \lambda_i}{z - a_i} - \frac{2}{z - k} - \frac{2}{z - k_0}.$$

Gehört aber zum Punkte $z = \infty$ der Eckpunkt $w = b_n$ mit dem inneren Polygonswinkel $\lambda_n \pi$, so bleibt in der Summe der Bruch $\frac{1 - \lambda_n}{z - a_n}$ einfach weg. Da $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = n - 2$, erhält man, wie es sein muss, für sehr grosse

z -Werthe in der ersten Voraussetzung $-\frac{2}{z}$, im zweiten Falle $-\frac{3-\lambda_n}{z}$ als Hauptglied von $J(z)$.

Aus 1) folgt noch, dass das geschlossene Integral

$$\int \frac{J(z)}{z-k} dz,$$

genommen längs eines kleinen Kreises um den Punkt k herum, verschwindet. Indem wir in dasselbe für $J(z)$ die rechte Seite von 2) eintragen, ergibt sich das wichtige Resultat:

$$3) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1-\lambda_i}{k-a_i} - \frac{2}{k-k_0} = 0.$$

Namentlich ist durch diese Gleichung der Pol k festgelegt, so bald man die reellen z -Werthe a_i als bekannt ansieht. In Bezug auf dieses „Bekanntsein“ der Grössen a_i wollen wir beiläufig bemerken, dass drei unter ihnen die übrigen bestimmen, wenn man nicht blos die Winkel λ_i als gegeben betrachtet, sondern die Abbildung eines Polygons von vorgeschriebener Form verlangt.

Die Gleichung 3) für k ist ziemlich verwickelt und ihre directe Auflösung möchte manche Schwierigkeiten darbieten. Sie ist, wie zu erwarten war, gegenüber beliebigen linearen Transformationen invariant und lässt sich auf verschiedene Weisen umformen. So z. B. ist sie zu schreiben in der Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \frac{k-a_i}{k_0-a_i} = 0,$$

oder in

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \frac{k_0-a_i}{k-a_i} = 0,$$

woraus man, indem mit α_i die Amplitude von $k-a_i$ bezeichnet wird, weiter ableitet die reellen Relationen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \cos 2\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \sin 2\alpha_i = 0.$$

Indessen kann man unschwer die Gleichung 3) geometrisch deuten. Die Anwendung der Substitution

$$k - a'_i = \frac{(k - k_0)^2}{k - a_i}$$

liefert

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) a'_i = k_0 \sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i),$$

und damit gewinnt man den Satz:

Spiegelt man die Punkte a_i an einem Kreise, der k zum Mittelpunkt und die Strecke kk_0 zum Radius hat, so liegen die Spiegelbilder a''_i auf einem Kreise mit k_0 als Mittelpunkt derart, dass k_0 den Schwerpunkt bilde der Massen $1 - \lambda_i$, welche in den Punkten a''_i enthalten sind.

Besonders für den Fall $n=3$ ist diese Aussage von Interesse, da wir mit ihrer Hilfe zu der folgenden einfachen Construction des Punktes k geführt werden.

Um ein Dreieck PQR , dessen Seiten sich wie die Grössen $1 - \lambda_i$ verhalten, beschreiben wir einen Kreis, auf welchem die Mitten A_1, A_2, A_3 der Bogen QR, RP, PQ verzeichnet werden. Wie man nun durch elementargeometrische Ueberlegung zeigt, werden die Massen $1 - \lambda_i$, in den Punkten A_i angebracht, den Mittelpunkt des Kreises zum Schwerpunkt haben. Denken wir uns jetzt die gegebenen Punkte a_i auf der Achse des Reellen so, dass a_2 auf die endliche Strecke $a_1 a_3$ fällt, dann folgert man leicht, dass die Winkel $\angle a_1 k a_2$ und $\angle a_2 k a_3$ resp. den Winkeln A_3 und A_1 des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ einfach gleich zu machen sind. Durch letztere Construction aber ist k unzweideutig bestimmt.

Nachdem wir hiermit die Eigenschaften der Function $J(z)$ und die Beziehung des Poles k zum Punktssysteme der a_i erörtert haben, wenden wir uns nunmehr zu der Darstellung der Function w .

Offenbar erhalten wir dieselbe aus 2) durch zweifache Integration, wobei zwei beliebige Constanten A und B eingeführt werden; dann entsteht das Integral*

$$4) \quad Aw + B = \int^z \frac{\prod_{i=1}^{i=n} (z - a_i)^{1 - \lambda_i}}{(z - k)^2 (z - k_0)^2} dz,$$

welches, weil wir $\lambda_i < 2$ voraussetzten, nur in den Punkten k und k_0 unendlich wird. Wie wir aber sahen, sind diese Unendlichkeitsstellen einfache Pole, wenn nur k die Bedingung 3) erfüllt. Die Eindeutigkeit der durch 4) definirten Function w unterliegt daher keinem Zweifel, so lange z sich in der positiven Halbebene bewegt. Für rationale Werthe der λ_i ist das Integral 4) algebraisch und zwar von der zweiten Gattung; daneben erscheint dann als zugehöriges Integral erster Gattung:

$$5) \quad Au + B = \int^z \prod_{i=1}^{i=n} (z - a_i)^{\lambda_i - 1} dz.$$

Dasselbe bildet, wie bekannt genug, das Innere eines n -Ecks auf die z -Halbebene ab; folglich bewirkt die aus 4) und 5) resultierende Be-

* In seiner Arbeit: „Ueber gewisse geradlinig begrenzte Stücke Riemannscher Flächen“ (Göttinger Nachrichten 1892 S. 258, Note) benutzt Herr Schönflies dieses Integral in sehr allgemeiner Gestalt. Die Abbildungsformel ist, wie er mittheilt, von Herrn Klein in Vorlesungen dargelegt.

ziehung zwischen w und n die Abbildung einer äusseren Polygonsfläche auf das Innere eines zweiten n -Ecks, welche beide Polygone entsprechend gleiche Winkel besitzen.

Inzwischen hat auch die Frage nach den Bedingungen, unter welchen die ζ -Function für die Lösung unserer Aufgabe ausreicht, ihre Erledigung gefunden, und können wir auf bekannte Resultate Bezug nehmen. So findet man, z. B. von Briot und Bouquet (Theorie des Fonctions elliptiques, 1875 S. 390) angegeben*, dass nur in den folgenden vier Fällen die Gleichung 5) eine einwerthige doppelperiodische Function von n definiert:

$$\text{I) } n = 4, \lambda_i = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \quad \text{III) } n = 3, \lambda_i = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3};$$

$$\text{II) } n = 3, \lambda_i = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \quad \text{IV) } n = 3, \lambda_i = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}.$$

Dazu kommt noch der Fall V), in welchem z zwar doppelperiodisch in u , aber zugleich zweideutig wird:

$$\text{V) } n = 3, \lambda_i = \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}.$$

Wir werden nun in den folgenden Paragraphen daran gehen, diese speciellen Fälle nach einander zu discutiren.

§ 2. Das Rechteck.

Im Falle I) handelt es sich um die äussere Fläche irgend eines Rechtecks R . Wir wollen zuvörderst das Seitenverhältniss nicht als gegeben betrachten, vielmehr werden wir für sämmtliche vier Punkte a_i auf der Achse des Reellen eine bestimmte Wahl treffen. Aus der fertigen Abbildungsformel wird sich alsdann die Gestalt des Rechtecks ergeben.

Da für alle Ecken $\lambda_i = \frac{1}{2}$ ist, erscheint das Abbildungsintegral § 1(4) sofort als ein elliptisches. Wir nehmen nun, wie es angemessen scheint, für a_1, a_2, a_3 die mit dem negativen Zeichen versehenen Wurzeln e_1, e_2, e_3 irgend einer p -Function, lassen aber a_4 ins Unendliche rücken, sodass der Factor $(z - a_4)^{\frac{1}{2}}$ im Integranden wegzulassen ist.

Substituiren wir ausserdem noch

$$1) \quad z = -pu,$$

so erhalten wir schliesslich

$$2) \quad Adw = du \frac{p'^2 u}{(pu + k)^2 (pu + k_0)^2}.$$

* Man vergleiche auch die citirten Schriften der Herren Love und Burside, oder: Appell-Goursat, Theorie des Fonctions algébriques et de leurs Intégrales (1894) S. 246.

Einerseits wird nun durch 1) die positive z -Halbebene abgebildet auf die innere u -Fläche eines zweiten Rechtecks R' mit den vier Eckpunkten $b'_i = 0, \omega, \omega'', \omega'$, andererseits wird durch 2) eine analoge Beziehung zwischen dieser u -Fläche und der äusseren w -Fläche des Rechtecks R hergestellt, derart, dass die Ecken b'_i von R' mit denjenigen b_i von R übereinstimmen.

Es erübrigt noch die Auffindung des Poles k . Dazu kann man verschiedene Wege einschlagen. Entweder kann man nach Einsetzung der Werthe der a_i und der λ_i die Lösung versuchen einer der in § 1 für k abgeleiteten Gleichungen, oder man kann, was auf dasselbe hinausläuft, die Bedingungen aufstellen, unter welchen die Residuen der rechten Seite von 2) für die Pole $pu = -k, pu = -k_0$ einzeln zum Verschwinden gebracht werden können. Am einfachsten verfährt man jedoch, indem man den in § 1 bewiesenen Satz benutzt.

Weil λ in allen Ecken denselben Werth hat, werden jetzt diesem Satze zufolge die Spiegelbilder a''_i der a_i an einem Kreise mit k als Mittelpunkt in die Ecken eines Rechtecks verlegt. Das aber erfordert, dass die Strecken $a_1 a_3$ und $a_2 a_4$ aus k durch rechte Winkel projectirt werden, womit ersichtlich k den Werth

$$-p \frac{\omega''}{2} = -e_2 + i\sqrt{(e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}$$

erhält. Dem Unendlichkeitspunkte der w -Ebene ist also in der u -Ebene der Mittelpunkt des Rechtecks R' zugewiesen, wie mit Rücksicht auf die Symmetrie zu erwarten war (Fig. 1).

Die Gleichung 2) lässt sich nun ohne Mühe integrieren. Ersichtlich besitzt die Function rechter Hand, jetzt von der Gestalt

$$\frac{p'^2 u}{\left(pu - p \frac{\omega''}{2}\right)^2 \left(pu - p \frac{\omega' - \omega}{2}\right)^2},$$

die vier zweifachen Pole $\pm \frac{\omega''}{2}, \pm \frac{\omega' - \omega}{2}$ und die vier zweifachen Nullstellen $0, \omega, \omega'', \omega'$, folglich unterscheidet dieselbe sich nur um einen constanten Factor von dem Ausdrücke

$$p(2u - \omega'') - e_2.$$

Indem wir der willkürlichen Constanten A einen geeigneten Werth ertheilen, erhalten wir demnach

$$-\frac{dw}{du} = p(2u - \omega'') - e_2,$$

und schliesslich:

$$3) \quad w = \frac{1}{2} \xi(2u - \omega'') + e_2 u + \frac{1}{2} \eta''.$$

Dieses particuläre Integral liefert in Verbindung mit 1) die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe.

Die Frage nach der Beschaffenheit des Rechtecks R wird nun dadurch erledigt, dass man durch Substitution aus 1) und 3) die den Ecken zukommenden w -Werthe b_i bestimmt. Das Resultat ist in nachstehendem Schema enthalten:

$$\begin{array}{l} z\text{-Ebene: } z = a_i = -e_1, \quad -e_2, \quad -e_3, \quad \infty, \\ u\text{-Ebene: } u = b'_i = \omega, \quad \omega'', \quad \omega', \quad 0, \\ w\text{-Ebene: } w = b_i = \eta + e_2 \omega, \quad \eta'' + e_2 \omega'', \quad \eta' + e_2 \omega', \quad 0. \end{array}$$

Bei dieser Folge der Ecken werden die Ränder von R und R' im positiven Sinne durchlaufen. Sind also, wie üblich, ω und $\frac{\omega'}{i}$ reell und positiv, so können wir beiläufig schliessen, dass für jede p -Function positiver Discriminante die reellen Grössen $\eta + e_2 \omega$ und $\frac{1}{i}(\eta' + e_2 \omega')$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Thatsächlich aber ist $\eta + e_2 \omega$ stets positiv, die Seitenlängen l_1, l_2 des Rechtecks erhalten somit die Werthe:

$$\begin{aligned} l_1 &= \eta + e_2 \omega, \\ l_2 &= -\frac{1}{i}(\eta' + e_2 \omega'). \end{aligned}$$

Dem entsprechend hat man vorab die p -Function zu bestimmen, falls ein gegebenes Rechteck zur Abbildung vorgelegt ist.

Das geschieht mit Benutzung der beiden Formeln*:

$$\begin{aligned} \eta \omega' - \eta' \omega &= \frac{i\pi}{2}, \\ \eta + e_2 \omega &= \frac{2\pi^2}{\omega} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^{2p-1}}{(1+q^{2p-1})^2} = \frac{2\pi^2}{\omega} \varphi(q). \end{aligned}$$

Dieselben führen zu den Gleichungen

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \log q + \frac{1}{\varphi(q)} = 4\pi \frac{l_2}{l_1}, \\ \omega = \frac{2\pi^2}{l_1} \varphi(q), \end{array} \right.$$

welche zur Auswerthung von q und ω und damit zur endgiltigen Bestimmung der p -Function dienen können.

Es fragt sich, ob unter Umständen die Rechtecke R und R' einander ähnlich werden. Alsdann würde eine einzige Formel 3) — wenigstens,

* Schwarz: „Formeln und Lehrsätze“ S. 36 Formel 12.

wenn man darin w durch den mit einem passenden Factor multiplicirten conjugirt complexen Werth w_0 ersetzt — ohne Weiteres genügen, um eine indirect conforme Abbildung der äusseren Fläche R auf das Innere desselben Rechtecks darzustellen.

Man könnte diese Beziehung gewissermassen eine „Spiegelung am Rechtecke“ nennen. Selbstverständlich ist bei jedem Rechtecke eine derartige Spiegelung zu erreichen, jedoch ist dabei dann eine vermittelnde Abbildung der äusseren wie der inneren Fläche auf die z -Halbebene unumgänglich.

Wir sichern nun die Aehnlichkeit der beiden Rechtecke, indem wir setzen:

$$-\frac{\eta + e_2 \omega}{\eta' + e_2 \omega'} = \frac{\omega}{\omega'},$$

oder

$$0 = \omega' \eta + \omega \eta' + 2 e_2 \omega \omega'.$$

Etwas einfacher gestaltet sich diese Bedingung, wenn man von der Legendre'schen Bezeichnung Gebrauch macht. Wir setzen also

$$\begin{aligned} K &= \omega \sqrt{e_1 - e_3}, & E &= \frac{\eta + e_1 \omega}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \\ i K' &= \omega' \sqrt{e_1 - e_3}, & E' &= \frac{\eta' + e_3 \omega'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \end{aligned} \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

und bestätigen dann leicht, dass obige Gleichung zusammengezogen werden kann in

$$\frac{d(KK')}{d(k^2)} = 0.$$

Die im Intervalle $0 < k^2 < 1$ stets positive Function KK' , unendlich sowohl für $k^2 = 0$ als auch für $k^2 = 1$, besitzt muthmasslich daselbst nur ein einziges Minimum, welches auf Grund der Symmetrie in der Mitte des Intervalles, also bei $k^2 = \frac{1}{2}$, zu suchen ist. Hieraus würde aber folgen, dass nur für $e_2 = 0$, $i\omega = \omega'$ die Forderung der Aehnlichkeit erfüllt wird, und dass daher lediglich beim Quadrate eine einzige Abbildungsformel die Spiegelung unmittelbar bewirkt.

Am Ende wollen wir noch nebenbei bemerken, dass die hergeleiteten Abbildungsformeln im Grenzfall, wo die Discriminante der elliptischen Functionen verschwindet, nicht länger anwendbar sind, weil wir die sämtlichen w -Werthe b_i endlich voraussetzten. Die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassend, lautet das Resultat:

Die Gleichungen

$$w = \frac{1}{2} \zeta(2u - \omega') + e_2 u + \frac{1}{2} \eta'', \quad z = -pu$$

stellen die conforme Abbildung dar der positiven z -Halbebene auf die

äussere w -Fläche eines Rechtecks R mit den Seitenlängen l_1 und l_2 unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Innern eines Rechtecks R' mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega', \omega'$. Die Bestimmungsstücke q und ω der p -Function genügen den Gleichungen 4).

§ 3. Das rechtwinkelige gleichschenkelige Dreieck.

Im Falle II) ist

$$\lambda_i = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}.$$

Für die drei willkürlichen reellen Grössen a_i machen wir die Annahme:

$$a_i = 1, \quad -1, \quad 0.$$

Die allgemeine Abbildungsformel erscheint hiermit in der Form:

$$1) \quad Adw = \frac{dz \sqrt[4]{z^2(z^2-1)^3}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Bevor wir das Differential zu reduciren versuchen, wollen wir den Werth von k mittelst der in § 1 angegebenen Construction bestimmen. Demgemäss construiren wir ein Dreieck PQR mit den Seiten

$$q(1 - \lambda_i) = 3, \quad 3, \quad 2,$$

und halbiren die Bogen QR, RP, PQ des umgeschriebenen Kreises durch die Punkte A_1, A_2, A_3 . Weil jetzt a_3 den Mittelpunkt bildet der endlichen Strecke $a_2 a_1$, sind die Winkel $\angle a_2 k a_3, \angle a_3 k a_1$ resp. den Winkeln A_1, A_2 des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ gleich zu machen (Fig. 2).

Aus dieser Construction erhellt sofort

$$\text{ctg } \angle a_2 k a_3 = \text{ctg } \angle a_3 k a_1 = \text{tg } \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

sodass man einfach findet $k = i \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Unter Einführung dieses Werthes für k , setzen wir nunmehr

$$z = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \quad \sqrt[4]{z^2(z^2-1)^3} = \frac{\sqrt{t}}{t^2-1},$$

$$dz = - \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}},$$

wodurch die Differentialgleichung 1) die Gestalt annimmt:

$$Adw = \frac{Adt}{\sqrt{4t^3-4t}} \cdot \frac{1}{(3t^2-1)^2}.$$

Hiermit ist schon auf die lemniscatische p -Function mit den reellen Wurzeln $1, 0, -1$ hingewiesen. Demnach ersetzen wir t durch pu oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch $pu - e_2$, woraus hervorgeht:

$$2) \quad -2u = \int^z \frac{dz}{\sqrt{z^2(z^2-1)^3}}, \quad z = \frac{pu - e_2}{\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_3)}}$$

$$3) \quad A \frac{dw}{du} = \frac{pu}{p''^2 u}$$

Die Gleichung 2) definiert, wie wir einstweilen hervorheben, die Variable z als eindeutige Function des complexen Argumentes u .

In Betreff der geometrischen Bedeutung der Gleichungen 2) und 3) erkennt man leicht folgendes. Durchläuft z die positive Halbebene, so giebt es einen eindeutig bestimmten Werth des Argumentes u , der sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $b'_i = 0, 2\omega, \omega''$ resp. den reellen z -Werthen $a_i = 1, -1, 0$ entsprechend. Die Gleichung 2) bildet also die z -Halbebene auf das Innere von D' ab, während 3) eine ähnliche Beziehung zwischen letzterer Fläche und der äusseren w -Fläche eines Dreiecks D vermittelt (Fig. 2).

Wir werden diese letztere Beziehung endgiltig festsetzen, indem wir 3) integriren. Das erfordert die vorhergehende Zerlegung der doppelperiodischen Function rechter Hand:

$$F(u) = \frac{pu}{p''^2 u}$$

Diese Function ist sicherlich, weil w ein elliptisches Integral zweiter Gattung vorstellt, durch eine Summe von p -Functionen darstellbar, mit anderen Worten, sie besitzt nur zweifache Pole und für jeden Pol verschwindet das Residuum. Ersichtlich sind diese Pole der vier Wurzeln $\pm \alpha, \pm \beta$ der Gleichung $p''u = 0$ und eine kurze Ueberlegung genügt sonach, um zu zeigen, dass $F(u)$ bis auf einen constanten Factor mit der Summe

$$p(u - \alpha) + p(u + \alpha) + p(u - \beta) + p(u + \beta)$$

identisch ist.

Indem wir für A einen geeigneten Werth wählen, können wir daher setzen

$$-\frac{dw}{du} = p(u - \alpha) + p(u + \alpha) + p(u - \beta) + p(u + \beta),$$

eine Gleichung, deren particuläres Integral

$$w = \zeta(u - \alpha) + \zeta(u + \alpha) + \zeta(u - \beta) + \zeta(u + \beta) = 4\zeta u + \frac{p''u}{p''u}$$

wir als Abbildungsformel benutzen wollen.

Durch Substitution der u -Werthe $b'_i = 0, 2\omega, \omega''$ findet man für die entsprechenden Ecken des Dreiecks D die w -Werthe $b_i = 0, 8\eta, 4\eta''$. Hieraus ersieht man ohne Mühe, dass dieses Dreieck D in der That rechtwinkelig gleichschenkelig ist. Offenbar gehört nun zum Unendlichkeitspunkte der w -Ebene diejenige Wurzel α der Gleichung $p''u = 0$, welche im Inneren des Dreiecks D' liegt. Dieser u -Werth ist also bestimmt durch

$p\alpha = +\sqrt{\frac{1}{3}}$, das heisst, der Punkt α befindet sich auf der Strecke $\omega\omega''$.

Den bisherigen Betrachtungen entnehmen wir jetzt folgenden Satz:
Die Gleichungen

$$w = 4\zeta u + \frac{p'''u}{p''u}, \quad z = \frac{pu - e_2}{\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_3)}} \\ (p'^2u = 4p^3u - 4pu)$$

stellen eine conforme Abbildung der positiven z -Halbebene dar auf die äussere w -Fläche eines rechtwinkligen gleichschenkeligen Dreiecks D unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $0, 2\omega, \omega'$.

§ 4. Das gleichseitige Dreieck.

Wir wiederholen in Kurzem für den Fall III) die Rechnung des vorigen Paragraphen. Zunächst setzen wir in die allgemeine Abbildungsformel

$$a_i = -1, \quad 0, \quad +1, \\ \lambda_i = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3},$$

wodurch wir erhalten

$$Adw = \frac{dz \sqrt[3]{z^2(z^2-1)^2}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Die schon mehrfach benutzte Construction des Poles k lehrt hier unmittelbar, dass aus diesem Punkte die Strecken a_1a_2 und a_2a_3 durch Winkel von 60° projectirt werden, dass also für k den Werth $i\sqrt{\frac{1}{3}}$ einzutragen ist.

Wir reduciren weiter das Differential in der letztgefundenen Gleichung unter Benutzung einer p -Function negativer Discriminante, bestimmt durch

$$p'^2u = 4p^3u + 1,$$

mit den beiden Perioden $2\omega_2$ und $2\omega'_2$, zwischen welchen die Relation $\omega_2 i = \omega'_2 \sqrt{3}$ stattfindet.

In dieser Absicht setzen wir

$$1) \quad z = -\frac{1}{p'u}$$

und mithin

$$\sqrt[3]{z^2(z^2-1)^2} = \frac{p^2u \sqrt[3]{16}}{p'^2u}, \quad dz = \frac{p''u}{p'^2u} du,$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{16}} u = \int^z \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2(z^2-1)^2}},$$

wodurch wir eine Gleichung von der Form:

$$2) \quad A \frac{dw}{du} = \frac{p^4 u}{(p'^2 u + 3)^2} = \frac{p^4 u}{\left(p'^2 u - p'^2 \frac{2\omega_2}{3}\right)^2}$$

erhalten.

Unschwer sieht man ein, dass die Gleichung 1) die eindeutige Abbildung der positiven z -Halbebene auf die innere u -Fläche eines gleichseitigen Dreiecks D' vermittelt, dessen Eckpunkte $b'_i = 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, 0, \frac{2\omega_2}{3}$ resp. den reellen z -Werthen $a_i = -1, 0, +1$ entsprechen (Fig. 3).

Die Gleichung 2) wird wiederum das Innere von D' auf die äussere w -Fläche eines gleichseitigen Dreiecks D abbilden. Dem Werthe $w = \infty$ gehört $z = k = i\sqrt{\frac{1}{3}}$, und deshalb auch der u -Werth $\alpha = \frac{2\omega_3}{3}$, das heisst der Mittelpunkt des Dreiecks D' .

Es erübrigt nur noch die Integration von 2). Die zu integrierende Function besitzt die sechs zweifachen Pole $\pm \frac{2\omega'_2}{3}, \pm \frac{2\omega_3}{3}, \pm \frac{2\omega_1}{3}$ und die drei vierfachen Nullstellen $0, \pm \frac{2\omega_2}{3}$. Unter Berücksichtigung der speciellen Eigenschaften der hier gebrauchten elliptischen Functionen — wir erinnern hier insbesondere an die Relationen

$$p \varepsilon u = \varepsilon p u, \quad p' \varepsilon u = p' u, \quad \zeta \varepsilon u = \varepsilon^2 \zeta u - \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right)$$

zeigt man mühelos, weil für alle Pole das Residuum verschwindet, dass die Function der rechten Seite von Gleichung 2) bis auf einen constanten Factor durch den Ausdruck

$$\left\{ \begin{array}{l} p\left(u - \frac{2\omega_3}{3}\right) + p\left(u + \frac{2\omega_3}{3}\right) + p\left(u - \frac{2\omega_1}{3}\right) + p\left(u + \frac{2\omega_1}{3}\right) \\ \quad + p\left(u - \frac{2\omega'_2}{3}\right) + p\left(u + \frac{2\omega'_2}{3}\right) \end{array} \right.$$

zu ersetzen ist.

Sonach ist es gestattet, die Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \zeta\left(u - \frac{2\omega_3}{3}\right) + \zeta\left(u + \frac{2\omega_3}{3}\right) + \zeta\left(u - \frac{2\omega_1}{3}\right) + \zeta\left(u + \frac{2\omega_1}{3}\right) \\ \quad + \zeta\left(u - \frac{2\omega'_2}{3}\right) + \zeta\left(u + \frac{2\omega'_2}{3}\right) \end{array} \right.$$

als die gesuchte Abbildungsformel zu betrachten.

Eine leichte Umrechnung giebt indessen dieser Formel die einfachere Gestalt:

$$w = 6\zeta u + \frac{3p^2 u p' u}{p^3 u + 1}$$

Hieraus erhält man durch die Substitutionen

$$u = b'_i = 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, \quad 0, \quad \frac{2\omega_2}{3}$$

unmittelbar $w = b_i = -4\varepsilon\eta_2, 0, 4\eta_2$, welche Functionswerthe, wie es sein muss, in der w -Ebene ein gleichseitiges Dreieck bestimmen. Für ein solches Dreieck gilt also der Satz:

Die Gleichungen

$$w = 6\xi u + \frac{3p^2 u p' u}{p^3 u + 1}, \quad z = -\frac{1}{p' u} \quad (p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen eine conforme Abbildung dar der positiven z -Halbebene auf die äussere w -Fläche eines gleichseitigen Dreiecks D unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, 0, \frac{2\omega_2}{3}$.

§ 5. Das Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

Nur wenig umständlicher gestaltet sich die Rechnung im Falle IV), wo man hat

$$a_i = 0, \quad -4, \quad -1,$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3},$$

und wo es sich handelt um die Gleichung

$$A dw = \frac{dz \sqrt[6]{z^3(z+4)^5(z+1)^4}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Zur Bestimmung des Poles k auf geometrischem Wege construiren wir das Dreieck PQR mit den Seitenlängen $\varrho(1-\lambda_i) = 3, 5, 4$ im Kreise (Fig. 4). Das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ der Bogenhalbierungspunkte erhält erstens einen Winkel $A_2 = \frac{\pi}{4}$; ein zweiter Winkel A_1 ist offenbar bestimmt durch

$$\operatorname{tg} A_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} R \right) = 3.$$

Es wird hier aber $\angle a_2 k a_3 = A_1, \angle a_3 k a_1 = A_2$, mithin ergibt sich sofort $k = -1 + i$.

Wir verwerthen wiederum hier die p -Function des § 4 zur Reduction der Differentialgleichung, indem wir setzen:

$$1) \quad z = -\frac{p'^2 u}{1 + p^3 u},$$

und somit:

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt[6]{z^5(z+4)^5(z+1)^4} &= \frac{3p^2up'u}{(1+p^3u)^2} \sqrt[6]{-3^3}, \quad dz = -\frac{9p^2up'u}{(1+p^3u^2)} du, \\ -\frac{3}{\sqrt[6]{-3^3}} u &= \int \frac{dz}{\sqrt[6]{z^5(z+4)^5(z+1)^4}}. \end{aligned} \right.$$

Zugleich führen wir statt des Poles k das Argument α ein, bestimmt durch die Gleichung:

$$p^3\alpha = -\frac{k+1}{k+4} = -\frac{1}{10}(1+3i),$$

und gelangen schliesslich zu einer Gleichung von der Form:

$$2) \quad A \frac{dw}{du} = \frac{p^2up'^2u}{(p'^2u - p'^2\alpha)^2(p'^2u - p'^2\alpha_0)^2},$$

in welcher wir unter α_0 den zu α conjugirten complexen Werth verstehen.

Es geht nunmehr aus einer einfachen Ueberlegung hervor, dass die Gleichung 1) eine beiderseitig eindeutige Abbildung der positiven z -Halbebene bewirkt auf die innere u -Fläche eines Dreiecks D' mit den Ecken $b'_i = \omega_3, 0, \frac{2\omega_2}{3}$ und den inneren Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$, so dass also die Gleichung 2) in analoger Weise das Innere von D' auf das Aeusserere des Dreiecks D in der w -Ebene bezieht.

Letztere Beziehung ist nun durch Integration von 2) zweckmässig zu fixiren.

Von der doppeltperiodischen Function rechter Hand, welche offenbar die zwölf zweifachen Pole $\pm \alpha, \pm \varepsilon \alpha, \pm \varepsilon^2 \alpha, \pm \alpha_0, \pm \varepsilon \alpha_0, \pm \varepsilon^2 \alpha_0$ besitzt, ist von vornherein bekannt, dass die Residuen sämmtlicher Pole verschwinden. Eine sehr leichte Rechnung genügt daher, zu zeigen, dass die Function bis auf einen constanten Factor einfach durch die Summe der zwölf p -Functionen: $p(u - \alpha), p(u + \alpha)$ u. s. w. dargestellt werden kann.

Wir können also die Gleichung

$$\left\{ \begin{aligned} w &= \zeta(u - \alpha) + \zeta(u + \alpha) + \zeta(u - \varepsilon \alpha) + \zeta(u + \varepsilon \alpha) + \zeta(u - \varepsilon^2 \alpha) + \zeta(u + \varepsilon^2 \alpha) \\ &+ \zeta(u - \alpha_0) + \zeta(u + \alpha_0) + \zeta(u - \varepsilon \alpha_0) + \zeta(u + \varepsilon \alpha_0) + \zeta(u - \varepsilon^2 \alpha_0) + \zeta(u + \varepsilon^2 \alpha_0) \end{aligned} \right.$$

ansetzen als ein particuläres Integral von 2), welches sich auch in der bequemeren Form:

$$w = 12 \zeta u + \frac{pu p'' u (10 p'^2 u - 6)}{5 p'^4 u - 6 p'^2 u + 9}$$

schreiben lässt.

Für $u = b'_i = \omega_3, 0, \frac{2\omega_2}{3}$ folgt aus dieser Abbildungsformel

$$w = b_i = 4 \eta_2 (1 - \varepsilon), 0, 8 \eta_2;$$

den Ecken des Dreiecks D' sind also diejenigen eines ihm indirect ähnlichen Dreiecks D in der w -Ebene zugefügt.

Hiermit ist nun für das vorliegende Problem folgende Lösung gefunden:

Die Gleichungen

$$w = 12\zeta u + \frac{p u p'' u (10p'^2 u - 6)}{5p'^4 u - 6p'^2 u + 9}, \quad z = -\frac{p'^2 u}{1 + p^3 u}$$

$$(p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen eine conforme Abbildung dar der positiven z -Halbebene auf die äussere w -Fläche eines Dreiecks D mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $\omega_3, 0, \frac{2\omega_2}{3}$.

§ 6. Das Dreieck mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

Wie schon gesagt, unterscheidet sich der Fall V) von den übrigen dadurch, dass es nicht gelingt, die Veränderliche z als eine in der ganzen u -Ebene eindeutige Function des Argumentes u darzustellen.

Wir setzen in die Grundformel ein:

$$a_i = 0, \quad +1, \quad -1,$$

$$\lambda_i = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6},$$

wodurch die Gleichung entsteht:

$$A dz = \frac{dz \sqrt[5]{z^2(z^2-1)^5}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Zur Bestimmung von k haben wir jetzt im Kreise ein Dreieck PQR zu construiren mit den Seitenlängen $\rho(1-\lambda_i) = 2, 5, 5$ (Fig. 5). Das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ der Bogenhalbierungspunkte wird gleichschenkelig, für den Winkel A_2 gilt offenbar

$$\cot A_2 = \frac{1 - \cos Q}{\sin Q} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Man hat hier aber $\angle a_3 k a_1 = A_2, \angle a_1 k a_2 = A_3$, das hat mithin zur Folge $k = i \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Die Reduction des Differentials gelingt jetzt durch die Substitution

1)
$$z = \frac{2\sqrt{p^3 u}}{p' u},$$

wo noch immer
$$p'^2 u = 4p^3 u + 1.$$

Man findet auf diesem Wege:

$$\sqrt[6]{z^2(z^2-1)^5} = \frac{\sqrt[6]{-4p^3u}}{p'^2u}, \quad dz = \frac{3\sqrt[6]{p^3u}}{p'^2u} du,$$

$$\frac{3}{\sqrt[6]{-4}} u = \int \frac{dz}{\sqrt[6]{z^2(z^2-1)^5}},$$

und schliesslich erscheinen, indem noch:

$$p'^2\alpha = \frac{1}{1-k^2} = \frac{3}{5}$$

gesetzt wird, die Variablen u und w verbunden durch eine Gleichung von der Form:

$$2) \quad A \frac{dw}{du} = \frac{pu}{(p'^2u - p'^2\alpha)^2}.$$

Wir betrachten zunächst die Gleichung 1). Sie definiert z als zweideutige Function von u mit den Verzweigungspunkten

$$u \equiv \pm \frac{2\omega_2}{3}.$$

Diese Zweideutigkeit aber wird gänzlich aufgehoben, wenn wir das Gebiet der Veränderlichen u beschränken auf das Innere eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $b'_i = \frac{2\omega_2}{3}, 2\omega_3, 0$, weil innerhalb D' kein Verzweigungspunkt angetroffen wird. Wenn wir nun überdies festsetzen, dass für alle reellen u -Werthe auf der Dreiecksseite $b'_3b'_1$ der Veränderlichen z die Amplitude $+\pi$ zukommen soll, ist dadurch z eindeutig und völlig bestimmt.

Dieser Voraussetzung gemäss erhält z für $u = b'_i = \frac{2\omega_2}{3}, 2\omega_3, 0$ die reellen Werthe $a_i = 0, +1, -1$. Eine eindeutige Abbildung des Inneren des Dreiecks D' mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ ist dabei erreicht worden, indem es aus den besonderen Eigenschaften der p -Function sofort erhellt, dass immer ein, aber auch nur ein einziges Argument u innerhalb D' einem gegebenen positiv complexen z -Werthe entspricht. So z. B. gehört zu dem Pole k das Argument α , wofür wir jetzt in ganz bestimmter Weise finden können.:

$$p\alpha = -\varepsilon\sqrt[3]{\frac{1}{10}}, \quad p'\alpha = -\sqrt[3]{\frac{3}{5}}.$$

Nach diesen Erörterungen kehren wir zu der Gleichung 2) zurück, welche die Abbildung der äusseren w -Fläche des Dreiecks D auf das Innere von D' bewirken soll. Die rechte Seite besitzt die sechs zweifachen Pole $\pm\alpha, \pm\varepsilon\alpha, \pm\varepsilon^2\alpha$, für welche die Residuen verschwinden. Letzterem

Umstände Rechnung tragend, überzeugt man sich bald davon, dass die Function, ungerechnet einen constanten Factor, sich auf die einfache Summe der sechs p -Functionen $p(u - \alpha)$, $p(u + \alpha)$ u. s. w. reduciren lässt. Indem wir daher der Constanten A einen passenden Werth ertheilen, erhalten wir das particuläre Integral:

$$w = \zeta(u - \alpha) + \zeta(u + \alpha) + \zeta(u - \varepsilon\alpha) + \zeta(u + \varepsilon\alpha) + \zeta(u - \varepsilon^2\alpha) + \zeta(u + \varepsilon^2\alpha),$$

oder auch

$$w = 6\zeta u + \frac{30p^2 u p' u}{10p^3 u + 1}.$$

Aus dieser Abbildungsformel ersieht man sofort, dass w die Werthe $b_i = 4\eta_2$, $4\eta_2(1 - \varepsilon)$, 0 resp. annimmt für $u = b'_i = \frac{2\omega_2}{3}$, $2\omega_3$, 0 , dass also das Dreieck D der w -Ebene dem Dreiecke D' indirect ähnlich ist.

In Betreff dieses Dreiecks D lautet mithin das Schlussresultat:

Die Gleichungen

$$w = 6\zeta u + \frac{30p^2 u p' u}{10p^3 u + 1}, \quad z = \frac{2\sqrt{p^3 u}}{p' u} \quad (p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen eine conforme Abbildung dar der positiven z -Halbebene auf die äussere w -Fläche eines Dreiecks D mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $\frac{2\omega_2}{3}$, $2\omega_3$, 0 . Für reelle u -Werthe ist dabei π die Amplitude $+\pi$ zuzuweisen.

§ 7. Zusammengesetzte Figuren.

Herr Burnside* hat darauf aufmerksam gemacht, dass aus jeder Lösung der Abbildungsaufgabe für eine innere Polygonsfläche einfach durch algebraische Elimination neue Abbildungsformeln hergeleitet werden können. Letztere beziehen sich alsdann auf die Figuren, welche aus dem ursprünglichen Polygone entstehen durch Anlegung von Spiegelbildern an den Seiten. So z. B. betrachtet Herr Burnside das Dreieck ABB' mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ als hervorgegangen aus dem Dreiecke ABC mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ indem er an der kürzesten Seite AC des letzteren das Spiegelbild ACB' anlegt. Diese Betrachtung gestattet nun sofort aus der Abbildungsformel des Dreiecks ABC diejenige für ABB' zu ermitteln.

Gleiches gilt gewissermassen für äussere Polygonsflächen, was hier an dem Beispiele des regelmässigen Sechsecks S dargelegt werden möge.

* Man sehe die citirte Schrift S. 194.

In der u -Ebene lassen wir das Sechseck S' durch eine fünfmal wiederholte Spiegelung und Anlegung entstehen aus dem gleichseitigen Dreiecke I mit den Ecken:

$$b'_1 = 0, \quad b'_2 = 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, \quad \alpha = \frac{2\omega_2}{3},$$

derart, dass nach einander zum Ausgangsdreiecke I die Dreiecke II bis VI hinzugefügt werden (Fig. 6).

Das Dreieck I wurde durch die Gleichung $z = -\frac{1}{p'u}$ auf die positive z -Halbebene abgebildet (§ 4), den Ecken b'_1, b'_2, α entsprachen die reellen z -Werthe $a_1 = 0, a_2 = -1, h = +1$.

Es fragt sich, welche Erweiterung das z -Gebiet erfährt, wenn das Gebiet von u zufolge der erwähnten Construction sich allmählich über die ganze Fläche von S' ausdehnt.

Ersichtlich überschreitet z die Achse des Reellen zwischen den Punkten $+1$ und -1 bei jedem Durchgange von u durch die Radien $\alpha b'_2, \alpha b'_4, \alpha b'_6$; überschreitet aber u die Radien $\alpha b'_1, \alpha b'_3, \alpha b'_5$, so geht z zwischen den Punkten $+1$ und 0 aus der negativen in die positive Halbebene über.

Die innere u -Fläche von S' findet daher ihre Abbildung auf sechs zusammenhängende Halbebenen; drei unter ihnen, die positiven, entsprechen den Dreiecken I, III, V, die drei negativen sind den Dreiecken II, IV, VI zugewiesen.

Man überzeugt sich nun bald davon, dass dieses System von Halbebenen eine dreiblättrige Windungsfläche R_3 bildet mit dem Windungspunkte $z = +1$. Alle Uebergangslinien fallen zusammen in die Strecke $0, +1$, längs welcher also die Blätter cyklich an einander geheftet sind; der Rand der Fläche R_3 aber besteht aus den drei Doppelgeraden $0, -1$. Um letzteren Umstand zu veranschaulichen ist auf R_3 eine in sich selber zurücklaufende Linie gezeichnet, welche die Abbildung vorstellt einer hart am inneren Rande von S' verlaufenden geschlossenen Curve (Fig. 6).

Man ersieht hieraus, dass die den Ecken b'_i von S' entsprechenden Punkte a_i sich zu dreien über einander lagern, dass also $a_1 = a_3 = a_5 = 0, a_2 = a_4 = a_6 = -1$.

Wir erreichen nun unser nächstes Ziel, die conforme Abbildung auf eine Halbebene der inneren u -Fläche S' , indem wir die z -Fläche R_3 eindeutig auf diese t -Halbebene beziehen.

Letztere Beziehung findet ihren analytischen Ausdruck in einer algebraischen, in z linearen Gleichung $f(t, z) = 0$, in welcher nur reelle Coefficienten vorkommen, da z für jeden reellen t -Werth einen ebenfalls reellen, zwischen -1 und 0 gelegenen Werth annimmt. Wie am Ende diese Gleichung sich gestaltet, geht aus der folgenden Ueberlegung hervor.

Wir überdecken R_3 mit einer zweiten ihr congruenten Fläche R'_3 und verbinden beide längs der Strecke $-1, 0$, je ein Blatt von R_3 mit einem

von R'_3 verknüpfend. So entsteht eine geschlossene sechsblättrige Fläche R_6 mit zwei in $z = +1$ übereinander liegenden Windungspunkten zweiter Ordnung, während in $z = 0$ und $z = -1$ je drei einfache Windungspunkte auftreten (Fig. 6). Diese Fläche R_6 ist nun der J -Fläche R'_6 , welche von der Diederirrationalität*:

$$\lambda(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; J\right)$$

auf die λ -Ebene conform abgebildet wird, vollkommen ähnlich. Die Ausnahmepunkte von R'_6 aber, die auf R_6 den Punkten $z = +1, 0, -1$ entsprechen, sind $J = 0, +1, \infty$; folglich geht R'_6 durch die Substitution

$$J = \frac{1-z}{1+z}$$

in R^6 über, woraus wir schliessen, dass die Function $\lambda\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ die Fläche R_6 auf die lückenlose λ -Ebene eindeutig bezieht. Die positive λ -Halbebene kann offenbar dabei als das Abbild unserer ursprünglichen Fläche R_3 angesehen werden. Indem wir noch die sehr unwesentliche Substitution $2\lambda = t + 1$ in der bekannten Gleichung der Irrationalität λ vornehmen, ergibt sich nunmehr die Relation $f(z, t) = 0$ in der Form:

$$1) \quad 1 - z : -2z : z + 1 = (t^2 + 3)^3 : t^2(t^2 - 9)^2 : 27(t^2 - 1)^2.$$

Jeder der sechs Halbebenen von R_3 entspricht jetzt ein bestimmtes von Geraden und Kreisbogen begrenztes Stück der t -Halbebene. Den z -Werthen a_i gehören nach einander die t -Werthe $a_i = 0, -1, -3, \infty, +3, +1$; der Windungspunkt $z = +1$ ist in $t = i\sqrt{3}$ verlegt. Wir ersetzen in der Gleichung 1) z durch $-\frac{1}{p'u}$ und erhalten als Abbildungsformel** für die innere u -Fläche des regelmässigen Sechsecks S' :

$$2) \quad 1 + p'u : +2 : p'u - 1 = (t^2 + 3)^3 : t^2(t^2 - 9)^2 : 27(t^2 - 1)^2.$$

Damit jedoch die Beziehung zwischen u und t eine beiderseitig eindeutige sei, hat man stete Rücksicht zu nehmen auf die Eintheilung der beiden Flächen in entsprechende Bereiche (Fig. 6).

Ausgerüstet mit dem oben gewonnenen Resultate können wir nun endlich die Abbildungsfrage für die äussere w -Fläche eines regelmässigen Sechsecks S ohne Mühe lösen.

Wir gehen dabei aus von der Bemerkung, dass die Gleichung 2) und die Abbildungsformel:

$$3) \quad Au + B + \int^t \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t^2 - 9)(t^2 - 1)}}$$

* Klein-Fricke: „Theorie der elliptischen Modulfunctionen“ I, S. 65-71.

** In etwas abweichender Form von Herrn Burnside angegeben.

gleichbedeutend sein müssen. Betrachten wir nun zu gleicher Zeit das Integral

$$4) \quad Aw + B = \int^t \frac{dt \sqrt[3]{t(t^2-1)(t^2-9)}}{(t-k)^2(t-k_0)^2},$$

welches die Abbildung bewirkt der äusseren w -Fläche eines bestimmten gleichwinkligen, aber nicht nothwendig gleichseitigen Sechsecks S , so liegt die Vermuthung nahe, das dieses Integral 4) unter Zuhilfenahme von 2) auf ein elliptisches reducirt werden kann.

Ehe wir jedoch diese Reduction versuchen können, haben wir wie früher den Pol k zu ermitteln. Alle Rechnung lässt sich dabei vermeiden, indem wir bemerken, dass die Punkte $c_i = 0, -1, -3, \infty, +3, +1$ durch Spiegelung an einem Kreise mit dem Mittelpunkt $i\sqrt{3}$ und dem Radius $2i\sqrt{3}$ in die Ecken c''_i eines regelmässigen Sechsecks übergehen, dessen Mittelpunkt den t -Werth $-i\sqrt{3}$ zukommt. Die Anwendung des in § 1 bewiesenen Satzes ergiebt dann unmittelbar das Resultat:

$$k = i\sqrt{3}.$$

Es handelt sich also um die Einführung von u in die Gleichung

$$A dw = \frac{dt \sqrt[3]{t(t^2-1)(t^2-9)}}{(t^2+3)^2}.$$

Aus 2) und 3) findet man:

$$dt = -\frac{1}{3} du \sqrt[3]{t(t^2-1)(t^2-9)},$$

$$\frac{\sqrt[3]{t^2(t^2-1)^2(t^2-9)^2}}{(t^2+3)^2} = \frac{2}{3} \frac{pu}{1+p'u},$$

so dass wir in der That w durch u ausdrücken können und zu der Gleichung

$$A \frac{dw}{du} = -\frac{2pu}{1+p'u} = p \left(u - \frac{2\omega_2}{3} \right)$$

gelangen. Die gesuchte Abbildungsformel ist also:

$$w = \xi \left(u - \frac{2\omega_2}{3} \right) + \frac{2}{3} \eta_2,$$

oder:

$$w = \xi u + \frac{1}{2} \frac{p'u - 1}{pu}.$$

Substitution der sechs u -Werthe b'_i liefert für die Ecken des Sechsecks S :

$$w = b_i = 0, \quad 2\eta_3 - \frac{2}{3}\eta_2, \quad 2\eta_3, \quad \frac{4}{3}\eta_2, \quad 2\eta_1, \quad 2\eta_1 - \frac{2}{3}\eta_2;$$

das Sechseck S erweist sich also als regelmässig, womit wir den Satz gewonnen haben:

Die Gleichungen

$$w = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u - 1}{pu},$$

$$1 + p'u : + 2 : p'u - 1 = (t^2 + 3)^3 : t^2(t^2 - 9)^2 : 27(t^2 - 1)^2,$$

$$(p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen die conforme Abbildung dar der äusseren w -Fläche eines regelmässigen Sechsecks S auf die positive t -Halbebene unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren des Sechsecks S' mit den Eckpunkten

$$0, \quad 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, \quad 2\omega_3, \quad \frac{4}{3}\omega_2, \quad 2\omega_1, \quad 2\omega_1 - \frac{2\omega_2}{3}.$$

IX.

Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung.

Von

Prof. F. WITTENBAUER

in Graz.

Hierzu Taf. VII Fig. 1—7.

Der Beschleunigungspol ist für die Kenntniss des Beschleunigungszustandes eines in ebener Bewegung begriffenen starren Systems von hervorragender Bedeutung; um ihn gruppieren sich die Beschleunigungen aller Systempunkte sowohl der Grösse wie auch der Richtung nach in so übersichtlicher Weise, dass man sagen kann: mit der Angabe dieses Punktes gewinnt man mit einem Schlage einen Ueberblick über den Beschleunigungszustand des Systems.

Zu dem kommt, dass, wenn ausser dem Beschleunigungspol die Beschleunigung eines Systempunktes gegeben ist, die Beschleunigung jedes anderen Systempunktes in sehr einfacher Weise construirt werden kann.

Die Lösung des wichtigen und für die Zukunft der Kinematik bedeutungsvollen Problems: die Beschleunigung jedes Punktes einer kinematischen Kette in Bezug auf jedes beliebige Glied derselben zu construiren, lässt sich vom allgemeinen Gesichtspunkte aus nur so erreichen, dass man zunächst zeigt, wie der Beschleunigungspol jedes Gliedes in Bezug auf jedes andere Glied der Kette construirt werden kann.

Die folgenden Untersuchungen sollen die Lösung dieser Frage vorbereiten; sie sollen zeigen, wie man den resultirenden Beschleunigungspol eines Systems finden kann, das eine bekannte Eigenbewegung besitzt und überdies gezwungen wird, die Bewegung eines fremden Systems mitzumachen.

1. Der Bewegungszustand eines ebenen Systems Σ_2 sei durch Angabe des Drehpoles O_2 , des Wendepoles O_2 , des Beschleunigungspoles G_2 , der Winkelgeschwindigkeit ω_2 und der Winkelbeschleunigung $\lambda_2 = \frac{d\omega_2}{dt}$ vollständig bekannt (Fig. 1).

Dieses System, das geführte, werde gezwungen, die Bewegung eines anderen Systems Σ_1 , des führenden, mitzumachen. Die Bewegung dieses letzteren sei durch die Angabe der analogen Punkte und Intensitäten

$$O_1 J_1 G_1, \omega_1, \lambda_1 = \frac{d\omega_1}{dt} \text{ vollständig bestimmt.}$$

Es sei der Beschleunigungspol G der resultirenden Bewegung des Systems Σ_2 zu bestimmen. Die Lösung ist folgende: Man suche zuerst den Drehpol O und den Wendepol J der resultirenden Bewegung, ziehe über OJ als Durchmesser den Wendekreis und construiere den Winkel $JOG = \varphi$; im Schnitte der Linie OG mit dem Wendekreise liegt der gesuchte Beschleunigungspol G (vergl. Fig. 3).

Die Bestimmung des Wendepoles J habe ich in meiner Abhandlung: „Die Wendepole der absoluten und relativen Bewegung“ gelehrt.* Man ziehe die Linien $O_1 J_2, O_2 J_1, O J_2$, ferner

$$OK \parallel O_1 J_1, \quad OL \parallel O_2 J_2, \quad LMN \parallel O_1 O_2, \quad NJ^0 \parallel KL,$$

dann liefert der Schnitt der Linien MK und NJ^0 den Punkt J^0 , das ist den resultirenden Wendepol bei Ausserachtlassung der Winkelbeschleunigungen λ_1 und λ_2 . Der wirkliche Wendepol J liegt mit J^0 in einer Senkrechten auf $O_1 O_2$ und zwar ist, wie ich a. a. O. gezeigt habe,

$$\beta = JJ^0 = b \cdot \frac{\lambda}{\omega^2} = b \cdot \text{tang } \varphi,$$

worin $\omega = \omega_1 + \omega_2$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ die resultirende Winkelbeschleunigung und b die Strecke OB bedeutet (Fig. 4), wobei die Punkte O und B die barycentrischen Ausdrücke besitzen:

$$\omega O = \omega_1 O_1 + \omega_2 O_2, \quad \lambda B = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2.$$

Beachtet man die aus Obigem folgenden Relationen:

$$a_1 : a_2 : a = \omega_2 : \omega_1 : \omega,$$

$$a_1 + b : a_2 - b : a = \lambda_2 : \lambda_1 : \lambda,$$

worin $O_1 O = a_1, \quad O O_2 = a_2, \quad O_1 O_2 = a$ bedeuten; ferner die bekannten Beziehungen:

$$\frac{\lambda}{\omega^2} = \text{tang } \varphi, \quad \frac{\lambda_1}{\omega_1^2} = \text{tang } \varphi_1, \quad \frac{\lambda_2}{\omega_2^2} = \text{tang } \varphi_2,$$

worin $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ die Winkel $JOG, J_1 O_1 G_1, J_2 O_2 G_2$ bezeichnen, so ergeben sich die Gleichungen:

$$1) \quad \omega^2 \text{tang } \varphi = \omega_1^2 \text{tang } \varphi_1 + \omega_2^2 \text{tang } \varphi_2,$$

$$2) \quad b \cdot \omega^2 \text{tang } \varphi = a_1 \omega_1^2 \text{tang } \varphi_1 + a_2 \omega_2^2 \text{tang } \varphi_2,$$

oder:

* Zeitschrift für Mathematik und Physik 36. Bd.

$$3) \quad a^2 \cdot \text{tang } \varphi = a_2^2 \cdot \text{tang } \varphi_1 + a_1^2 \cdot \text{tang } \varphi_2,$$

$$4) \quad b \cdot a^2 \cdot \text{tang } \varphi = a_1 a_2^2 \text{tang } \varphi_1 + a_2 a_1^2 \text{tang } \varphi_2.$$

Diese Relationen können zur Construction von b und φ zweckmässig in folgender Weise verwendet werden (Fig. 1). Man übertrage die Bögen $F_1 E_1 = G_1 J_1$, $F_2 E_2 = G_2 J_2$ und ziehe die Linien $E_1 O_1$ und $E_2 O_2$ bis zu den Schnitten 1 und 2 mit einer Geraden, die im Punkte V auf $O_1 O_2$ senkrecht errichtet wird. V ist der Vertauschungspunkt der Strecke $O_1 O_2$, das heisst, es ist:

$$O_1 V = a_2, \quad V O_2 = a_1.$$

Es ist dann
und

$$V 1 = a_2 \cdot \text{tang } \varphi_1, \quad V 2 = a_1 \cdot \text{tang } \varphi_2$$

$$\text{Fläche } O_1 1 2 O_2 = \frac{1}{2} a_2^2 \text{tang } \varphi_1 + \frac{1}{2} a_1^2 \cdot \text{tang } \varphi_2.$$

Zieht man nun $23 \parallel O_2 1$, $34 \parallel O_2 O_1$, so ist nach 3)

$$\text{Fläche } 4 O_2 O_1 = \frac{1}{2} a^2 \text{tang } \varphi,$$

somit

$$\sphericalangle (4 O_2 O_1) = \varphi.$$

Zieht man ferner $25 \parallel O_2 O_1$, $5B \parallel 4O$, so erhält man auf $O_1 O_2$ den Punkt B und damit die Strecke b .

Errichtet man nun $CB \perp O_1 O_2$ und zieht $COE \parallel 4O_2$, so ist

$$BC = b \cdot \text{tang } \varphi = \beta = J J^0.$$

Hierdurch ist der resultirende Wendepol J bekannt. Beschreibt man über OJ als Durchmesser einen Kreis und überträgt den Bogen $FE = JG$, so hat man damit den resultirenden Beschleunigungspol G gefunden.

2. Die im vorigen Artikel angegebene Construction des Beschleunigungspoles ist zwar sehr einfach, verlangt aber die Uebertragung von Winkeln, was wohl umgangen werden kann.

Es soll deshalb hier noch eine andere Construction des Beschleunigungspoles mitgetheilt werden, welche diese Uebertragung überflüssig macht und bei welcher auch die Construction des Wendepoles J^0 und der Strecke b vermieden werden kann.

Zieht man (Fig. 2) $E_1 J_1 A_1 \parallel O_1 O_2$ und bringt diese Gerade zum Schnitte E_1 mit $F_1 G_1$, der Linie, welche den Beschleunigungspol G_1 mit dem zweiten Schnittpunkte F_1 des Wendekreises mit der Polgeraden $O_1 O_2$ verbindet, fällt $E_1 i_1 \perp A_1 O$ bis zum Schnitte i_1 mit der Geraden $J_1 F_1 \perp O_1 O_2$, so ist

$$J_1 i_1 = a_1 \cdot \text{tang } \varphi_1.$$

Führt man dieselbe Construction am zweiten Wendekreise durch, so ist

$$J_2 i_2 = a_2 \cdot \text{tang } \varphi_2.$$

Es kann nun gezeigt werden, dass der resultirende Wendepol J den barycentrischen Ausdruck besitzt:

$$\omega^2 J = \omega_1^2 i_1 + \omega_2^2 i_2 + 2 \omega_1 \omega_2 O_2,$$

das heisst, dass er aus den Punkten $i_1 i_2 O_2$ durch dieselbe Construction gefunden werden kann, wie J^0 aus $J_1 J_2 O_2$ gefunden wurde. Beachtet man nämlich, dass J^0 den barycentrischen Ausdruck besitzt

$$\omega^2 J^0 = \omega_1^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + 2 \omega_1 \omega_2 O_2$$

und bezeichnet die Abstände der Punkte $J_1 J_2 J^0$, $i_1 i_2 J$ von der Polgeraden $O_1 O_2$ mit $p_1 p_2 p$, $q_1 q_2 q$, so liefert die Differenz obenstehender Ausdrücke:

$$(q - p) \omega^2 = (q_1 - p_1) \cdot \omega_1^2 + (q_2 - p_2) \cdot \omega_2^2,$$

oder, da $q - p = J J^0 = b \cdot \text{tang } \varphi$, $q_1 - p_1 = J_1 i_1 = a_1 \text{ tang } \varphi_1$,

$$q_2 - p_2 = J_2 i_2 = a_2 \cdot \text{tang } \varphi_2,$$

$$b \cdot \omega^2 \cdot \text{tang } \varphi = a_1 \omega_1^2 \text{ tang } \varphi_1 + a_2 \omega_2^2 \text{ tang } \varphi_2,$$

welche Gleichung mit 2) übereinstimmt.

Man construirt also zunächst die Punkte $i_1 i_2$ und aus ihnen auf gewöhnlichem Wege den Wendepol J ; die Construction der Strecke $J J^0$ entfällt.

Um den Beschleunigungspol G zweckmässig zu construiren, beachte man nun folgenden Hilfssatz, auf den ich schon bei anderer Gelegenheit aufmerksam gemacht habe:*

Bewegen sich n mit den Gewichten $p_1 \dots p_n$ behaftete Punkte in einer Ebene derart, dass sie stets in einer parallel zu sich fortrückenden Geraden verbleiben, jeder derselben aber eine beliebige, gegen die erstgenannte unter dem Winkel α_n geneigte Gerade beschreibt, so bewegt sich der Schwerpunkt dieser Punkte ebenfalls in einer Geraden, für deren Neigung α zur fortrückenden Geraden die Beziehung besteht:

$$\text{cotang } \alpha \cdot \Sigma p_n = \Sigma p_n \cdot \text{cotang } \alpha_n.$$

Dieser Hilfssatz gestattet im vorliegenden Falle eine bemerkenswerthe Anwendung. Bezeichnet man (Fig. 2) mit $F F_1 F_2$ die zweiten Schnittpunkte der Wendekreise mit der Polgeraden $O_1 O_2$, so ist F der Schwerpunkt der Punkte $F_1 F_2 O_2$, wenn in ihnen die Gewichte ω_1^2 , ω_2^2 , $2 \omega_1 \omega_2$ angebracht werden; denn zu allen Wendepolen $J_1 J_2$, die beziehungsweise auf den Geraden $J_1 F_1$, $J_2 F_2$ angenommen werden, liegt der resultirende Wendepol auf der Geraden $J F$.

Zieht man nun die Geraden $F_1 G_1$, $F_2 G_2$, $O_2 A_2$ und lässt die Polgerade $O_1 O_2$ parallel zu sich fortrücken, sucht in irgend einer neuen Lage derselben ihre Schnittpunkte $D_1 D_2 D_0$ mit den eben erwähnten Geraden und bringt in ihnen die Gewichte ω_1^2 , ω_2^2 , $2 \omega_1 \omega_2$ an, so gilt für die Gerade, in welcher der Schwerpunkt D dieser drei Punkte liegen muss, nach obigen Hilfssatze die Gleichung:

* „Ueber gleichzeitige Bewegungen eines ebenen Systems“, Zeitschrift für Mathematik und Physik 33, Bd.

$$\omega^2 \cotang \alpha = \omega_1^2 \cotang \alpha_1 + \omega_2^2 \cotang \alpha_2 + 2 \omega_1 \omega_2 \cotang \alpha_0,$$

oder:

$$\omega^2 \cotang \alpha = \omega_1^2 \cdot tang \varphi_1 + \omega_2^2 \cdot tang \varphi_2.$$

Vergleicht man hiermit Gleichung 1), so folgt $\alpha = 90 - \varphi$, das heisst, die Gerade DF , in der sich der Schwerpunkt D bewegt, geht durch den Beschleunigungspol G .

Die Bestimmung des Punktes D aus $D_1 D_2 D_0$ kann in folgender Weise vorgenommen werden (Fig 5):

Man suche die Schnittpunkte:

$$\begin{array}{l} S_1 \text{ von } O_1 D_1 \text{ und } O_2 D_0, \\ S_2 \text{ " } O_1 D_0 \text{ " } O_2 D_2, \\ R_1 \text{ " } OS_1 \text{ " } D_1 D_2, \\ R_2 \text{ " } OS_2 \text{ " } D_1 D_2, \\ T \text{ " } O_1 R_1 \text{ " } O_2 R_2, \\ D \text{ " } OT \text{ " } D_1 D_2, \end{array}$$

dann ist D der gesuchte Schwerpunkt; denn es bestehen zwischen den Punkten die barycentrischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \omega O &= \omega_1 O_1 + \omega_2 O_2, \\ \omega R_1 &= \omega_1 D_1 + \omega_2 D_0, \quad \omega R_2 = \omega_1 D_0 + \omega_2 D_2, \end{aligned}$$

somit

$$\omega D = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2,$$

$$\omega^2 D = \omega_1^2 D_1 + \omega_2^2 D_2 + 2 \omega_1 \omega_2 D_0.$$

Diese Construction wird besonders einfach, wenn man die Polgerade bis zum Schnitte von zweien jener drei Geraden $D_1 F_1$, $D_2 F_2$, $D_0 O_2$ verschiebt, z. B. bis $C_1 C_2$ (Fig. 2); hier fallen $C_0 C_2 R_2$ zusammen und es genügt, folgende Schnittpunkte zu bestimmen:

$$\begin{array}{l} S_1 \text{ von } O_1 C_1 \text{ und } O_2 C_0, \\ R_1 \text{ " } OS_1 \text{ " } C_1 C_2, \\ T \text{ " } O_1 R_1 \text{ " } O_2 C_0, \\ C \text{ " } OT \text{ " } C_1 C_2, \end{array}$$

dann ist C ein Punkt der Linie DF , die durch den Beschleunigungspol G geht.

Die Construction dieses Poles nimmt also folgenden Verlauf: Man suche zuerst die Punkte $i_1 i_2$, sodann den Wendepol J und ziehe den Wendekreis über OJ . Hierauf ermittle man den Punkt C (oder allgemein D) und verbinde ihn mit F , dem zweiten Schnittpunkt des Wendekreises mit der Polgeraden; dann schneidet CF diesen Kreis im Beschleunigungspol G .

3. Ausser dem Wendekreis, dessen Punkte keine Normalbeschleunigung besitzen und deshalb Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, dient noch ein anderer Kreis dazu, den Bewegungszustand eines ebenen Systems in ganz ausgezeichneter Weise darzustellen. Es ist dies der zweite der

Bresse'schen Kreise (Gleichenkreis nach Burmester*, Tangentialkreis nach Proell**). Die Punkte dieses Kreises besitzen keine Tangentialbeschleunigung und legen somit in zwei aufeinander folgenden Zeitelementen gleiche Wegelemente zurück.

Der Tangentialkreis enthält den Drehpol O und den Beschleunigungspol G (Fig. 3); sein Mittelpunkt liegt auf der Poltangente und schneidet diese ausser in O in einem zweiten Punkte H , den wir Tangentialpol nennen wollen.

Zwischen den Durchmessern des Wendekreises d und des Tangentialkreises e besteht die Beziehung:

$$5) \quad d\omega^2 = e\lambda.$$

Der Tangentialpol spielt bei der Bestimmung des Beschleunigungspoles eine ähnlich wichtige Rolle, wie der Wendepol. Auf diesen Punkt hat zuerst W. Schell aufmerksam gemacht***; er nennt ihn Mittelpunkt der Winkelbeschleunigung.

Es soll hier die Aufgabe gelöst werden, den Tangentialpol H der resultirenden Bewegung zu finden, wenn die Tangentialpole H_1 und H_2 der führenden und der geführten Bewegung gegeben sind.

Der Tangentialpol ist jener Punkt, um welchen die augenblicklich auftretende Winkelbeschleunigung zu drehen sucht.

Die um H_1 auftretende Winkelbeschleunigung λ_1 (Fig. 6) kann in folgender Weise ersetzt werden:

- a) durch eine Translationsbeschleunigung $e_1\lambda_1$ in der Richtung des Wendedurchmessers $O_1J_1 = d_1$ und
- b) durch eine Winkelbeschleunigung λ_1 um O_1 .

Ebenso kann die um H_2 auftretende Winkelbeschleunigung λ_2 ersetzt werden:

- c) durch eine Translationsbeschleunigung $e_2\lambda_2$ in der Richtung des Wendedurchmessers $O_2J_2 = d_2$ und
- d) durch eine Winkelbeschleunigung λ_2 um O_2 .

Anderseits sind beide Winkelbeschleunigungen λ_1 und λ_2 zusammen einer dritten $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ um A äquivalent, wobei A den barycentrischen Ausdruck hat:

$$\lambda A = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2.$$

Die Winkelbeschleunigung λ um H kann in folgender Weise ersetzt werden:

- e) durch eine Translationsbeschleunigung $-\gamma \cdot \lambda$ senkrecht zu $AH = \gamma$,
- f) durch eine Translationsbeschleunigung $e\lambda$ in der Richtung des Wendedurchmessers $OJ = d$,

* Lehrbuch der Kinematik S. 809.

** Civilingenieur 1872.

*** Zeitschrift für Mathematik und Physik 19. Jahrgang.

- g) durch eine Translationsbeschleunigung $b \lambda$, senkrecht zu $OB = b$ und
 h) durch eine Winkelbeschleunigung λ um B .

Die unter a) bis d) angeführten Beschleunigungen müssen den unter e) bis h) aufgezählten äquivalent sein; nun sind aber in Folge des Ausdruckes

$$\lambda B = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2$$

die unter b) und d) erwähnten ohnedies der unter h) angeführten Beschleunigung äquivalent; es müssen also auch die Translationsbeschleunigungen a) und c) jenen e), f) und g) äquivalent sein, das heisst, es muss die Gleichheit der geometrischen Summen bestehen:

$$\bar{e}_1 \cdot \lambda_1 + \bar{e}_2 \cdot \lambda_2 = \bar{e} \cdot \lambda + \bar{b} \cdot \lambda - \bar{\gamma} \cdot \lambda.$$

Benützt man die imaginäre Einheit i , um anzudeuten, dass die Strecke $i\bar{b}$ durch Drehung der Strecke b um 90° im Sinne der Winkelbeschleunigung λ entsteht, so ist mit Berufung auf Gleichung 5):

$$\bar{d}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_2 \omega_2^2 = \bar{d} \omega^2 + i\bar{b} \lambda - i\bar{\gamma} \lambda.$$

Vergleicht man hiermit die in meiner Abhandlung: „Die Wendepole der absoluten und relativen Bewegung“ gegebene Gleichung 2):

$$\bar{d}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_2 \omega_2^2 = \bar{d} \omega^2 + i\bar{b} \lambda - \bar{a} \omega_1 \omega_2,$$

so folgt unmittelbar:

$$\gamma = a \cdot \frac{\omega_1 \omega_2}{\lambda} = \frac{a_1 a_2}{a} \cdot \frac{\omega^2}{\lambda}$$

und zwar ist diese Strecke senkrecht zur Polgeraden $O_1 O_2 = a$.

Hieraus folgt der Satz:

Der Tangentialpol H der resultirenden Bewegung liegt in einer Senkrechten, die man aus dem Theilungspunkte A der Geraden $H_1 H_2$ auf die Polgerade $O_1 O_2$ fällt.

Der Theilungspunkt A theilt die Strecke $H_1 H_2$ im umgekehrten Verhältniss der Winkelbeschleunigungen $\lambda_1 \lambda_2$.

Dieser Satz kann mit Vortheil zur Construction des Beschleunigungs-poles verwendet werden.

Zieht man nämlich in Figur 1 $BD \parallel O_1 H_1$ bis zum Schnitte mit $O_2 H_1$, sodann $DA \parallel O_2 H_2$ bis zum Schnitte mit $H_1 H_2$, so ist A der Theilungspunkt und die von ihm auf $O_1 O_2$ gefällte Senkrechte trifft die Poltangente $OH \perp OJ$ im Tangentialpol H der resultirenden Bewegung.

Sind beide Bewegungen, die führende wie die geführte, dauernde Rotationen, so fallen die Wendepole und Tangentialpole mit den zugehörigen Drehpolen zusammen. Der Theilungspunkt A fällt dann nach B .

Dieser Specialfall hat insbesondere Bedeutung für kinematische Ketten; wie hier die Tangentialpole zu construiren sind, soll in einer folgenden Arbeit gezeigt werden.

4. Zum Schlusse möge noch der Beweis erbracht werden, dass die angegebene Construction des Beschleunigungs-poles einer zusammengesetzten

Bewegung in völliger Uebereinstimmung steht mit dem Coriolis'schen Satze über die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Punktes.

Es seien wieder (Fig. 7) $O_1 O_2 O$, $J_1 J_2 J$, $G_1 G_2 G$ die Drehpole, Wendepole und Beschleunigungspole dreier Bewegungen: der führenden, der geführten und der resultirenden aus beiden.

Nennt man die Abstände eines beliebigen Punktes M der Ebene von den drei Drehpolen $\varrho_1 \varrho_2 \varrho$, von den drei Beschleunigungspolen $r_1 r_2 r$, so ist die Beschleunigung γ des Punktes M zusammengesetzt aus $r\omega^2$ in der Richtung MG und aus $r\lambda$ senkrecht zu MG , oder

$$\gamma = \bar{r} \cdot \omega^2 - i \cdot \bar{r} \lambda.$$

Diese beiden Beschleunigungen können in folgender Weise in Componenten zerlegt werden:

$$r\omega^2 = \bar{\varrho}\omega^2 + \bar{d}\omega^2 + \overline{JG} \cdot \omega^2,$$

$$r\lambda = \overline{MB} \cdot \lambda - b \cdot \lambda + \overline{OG} \cdot \lambda,$$

somit

$$\gamma = \bar{\varrho}\omega^2 + \bar{d}\omega^2 + \overline{JG} \cdot \omega^2 - i \cdot \overline{MB} \cdot \lambda + i\bar{b}\lambda - i \cdot \overline{OG} \cdot \lambda.$$

Nun ist

$$JG = i \cdot \overline{OG} \cdot \text{tang } \varphi = i \cdot \overline{OG} \cdot \frac{\lambda}{\omega^2},$$

somit

$$\overline{JG} \cdot \omega^2 - i \cdot \overline{OG} \cdot \lambda = 0.$$

Ferner ist

$$MB \cdot \lambda = \varrho_1 \lambda_1 + \varrho_2 \lambda_2,$$

$$\varrho\omega^2 = \omega(\varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2) = \varrho_1 \omega_1^2 + \varrho_2 \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2 (\varrho_1 + \varrho_2);$$

endlich nach vorigem Artikel:

$$\bar{d}\omega^2 + i\bar{b}\lambda = \bar{d}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_2 \omega_2^2 + \bar{a} \cdot \omega_1 \omega_2.$$

Die geometrische Summe, welche γ darstellt, geht somit über in:

$$\gamma = \bar{\varrho}_1 \omega_1^2 + \bar{\varrho}_2 \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2 (\bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{a}) + \bar{d}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_2 \omega_2^2 - i\bar{\varrho}_1 \lambda_1 - i\bar{\varrho}_2 \lambda_2$$

und da die Strecke a die Richtung $O_1 O_2$ besitzt:

$$\bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{a} = 2\varrho_2,$$

$$\gamma = (\bar{\varrho}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_1 \omega_1^2 - i\bar{\varrho}_1 \lambda_1) + (\bar{\varrho}_2 \omega_2^2 + \bar{d}_2 \omega_2^2 - i\bar{\varrho}_2 \lambda_2) + 2\varrho_2 \omega_1 \omega_2.$$

Nun ist aber die Beschleunigung des Punktes M in Bezug auf das führende System:

$$\gamma_1 = \bar{r}_1 \omega_1^2 - i\bar{r}_1 \lambda_1 = \bar{\varrho}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_1 \omega_1^2 + \overline{J_1 G_1} \omega_1^2 - i\varrho_1 \lambda_1 - i \cdot \overline{O_1 G_1} \cdot \lambda_1$$

und da auch hier gilt:

$$\overline{J_1 G_1} \cdot \omega_1^2 - i \cdot \overline{O_1 G_1} \cdot \lambda_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = \bar{\varrho}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_1 \omega_1^2 - i\bar{\varrho}_1 \lambda_1.$$

Ebenso ergibt sich für die Beschleunigung des Punktes im geführten System:

$$\gamma_2 = \bar{\varrho}_2 \omega_2^2 + \bar{d}_2 \omega_2^2 - i\bar{\varrho}_2 \lambda_2,$$

somit bleibt

$$\gamma = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + 2\bar{\varrho}_2 \cdot \omega_1 \omega_2,$$

der bekannte Satz von Coriolis.

X.

Ueber einige besondere Curven des dritten Grades und solche der dritten Klasse.

Von

BENEDIKT SPORER

in Ulm a. D.

I.

1. Sind die Kegelschnitte C^2 eines Büschels von Kegelschnitten, $B(C^2)$ durch vier Grundpunkte p_1, p_2, p_3 und p_4 und zwei beliebige Geraden G und H gegeben, so bestimmt jeder Kegelschnitt C^2 auf der Geraden G zwei Punkte x_1 und x_2 und auf der Geraden H zwei Punkte y_1 und y_2 . Durch irgend einen Kegelschnitt C^2 sind dadurch vier Gerade xy , nämlich die Geraden x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1 und x_2y_2 , bestimmt, und zwar gehen durch jeden Punkt x auf der Geraden G zwei Gerade xy , die im Allgemeinen von G verschieden sind; die Gerade xy fällt aber auch einmal auf die Gerade G selbst und zwar für den Punkt $x = x_0$, den der Kegelschnitt C^2_0 des Büschels durch den Schnittpunkt $a = y_0$ der Geraden G und H mit G ausserdem gemein hat. Ebenso fällt xy auch einmal auf die Gerade G , oder wir erhalten:

Der Ort der Geraden xy ist eine Curve der dritten Klasse, K^3 , mit G und H als einfachen Tangenten, und zwar werden die letzteren von der Curve K^3 in den Punkten berührt, in denen der Kegelschnitt C^2_0 des Büschels, der durch den Schnittpunkt a der Geraden G und H geht, diese nochmals schneidet.

2. Von der Curve K^3 lassen sich (ausser den Geraden G und H) eine Reihe von Tangenten angeben oder leicht zeichnen, so z. B.:

α) Die Tangente des Kegelschnitts C^2_0 im Punkte a .

β) Die sechs Verbindungslinien der vier Grundpunkte p_1, p_2, p_3 und p_4 .

γ) Die Geraden xy , die durch die zerfallenden drei Kegelschnitte des Büschels bestimmt sind.

Ueberdies können die Schnittpunkte der Ortscurve K^3 mit jeder der Geraden G und H bestimmt werden. Die mit der Geraden G sind die vier

Punkte, in denen die zwei Kegelschnitte des Büschels, welche die Gerade H berühren, die Gerade G schneiden. Für jeden dieser vier Schnittpunkte fallen nämlich zwei Geraden xy auf einander und die Tangenten in diesen Punkten an K^3 schneiden sich also zu zweimal zwei auf G , oder wir finden, dass die Tangenten in diesen Punkten an K^3 paarweise durch die Doppelpunkte der Involution auf H gehen, die auf H durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte C^2 bestimmt ist. Gleiches gilt auch für die Gerade H .

3. Irgend zwei Kegelschnitte C^2 bestimmen im Ganzen acht Geraden xy , welche mit den Geraden G und H zusammen zehn Tangenten der Curve K^3 sind und wir schliessen daraus, dass wir dieselbe Curve K^3 erhalten, wenn wir durch die vier Punkte $2x$ und $2y$ auf dem ersten Kegelschnitt C^2 einen beliebigen Kegelschnitt M^2_1 und ebenso durch die vier Punkte $2x$ und $2y$ auf dem zweiten Kegelschnitt einen beliebigen Kegelschnitt M^2_2 legen und an Stelle des Kegelschnittbüschels $B(C^2)$ das durch die Kegelschnitte M^2_1 und M^2_2 bestimmte Büschel setzen. Die Curve K^3 ist also nichts Anderes, als die Einhüllende der zerfallenden Kegelschnitte des Netzes, das durch zwei Kegelschnitte C^2 und die Geraden G und H , zusammen als Kegelschnitt angesehen, bestimmt ist; K^3 ist also die Cayley'sche Curve dieses Netzes.

4. Die Kegelschnitte irgend eines Büschels $B(C^2)$ bestimmen auf einem Kegelschnitt N^2 , der dem Büschel nicht angehört, Gruppen von vier Punkten z , deren sechs Verbindungslinien die zum Netz, das durch N^2 und das Büschel bestimmt ist, gehörige Curve K^3 umhüllen. Soll die Mitte einer Sehne des Kegelschnitts N^2 auf einer Geraden L gelegen sein, so ist aber der Ort dieser Sehne eine Parabel P^2 . Diese hat mit der Ortscurve K^3 im Allgemeinen sechs Tangenten gemein und auf einer beliebigen Geraden L liegen also im Allgemeinen die Mitten von sechs Sehnen, die N^2 mit Kegelschnitten des Büschels gemein hat, oder:

Der Ort der Mitten aller Sehnen, welche die Kegelschnitte des Büschels $B(C^2)$ mit irgend einem Kegelschnitt N^2 gemein haben, ist eine Curve des sechsten Grades S^6 .

Die Tangenten der Curve K^3 sind zu drei und drei parallel und es liegen also die Mitten von je drei parallelen Sehnen auf einem Durchmesser von N^2 . Da durch den Mittelpunkt von N^2 ebenfalls drei Tangenten von K^3 gehen, so ist dieser dreifache Punkt des Ortes S^6 . Für jede Sehne parallel einer Asymptote von S^2 fällt die Mitte auf die unendlich ferne Gerade G_∞ , das heisst, die Curve S^6 hat in den unendlich fernen Punkten des Kegelschnitts N^2 mit diesem drei Punkte gemein. In den weiteren sechs gemeinsamen Punkten von S^6 und N^2 wird N^2 von je einem Kegelschnitt C^2 berührt und es giebt also auch im Allgemeinen immer sechs Kegelschnitte eines Büschels, die einen dem Büschel nicht angehörigen Kegelschnitt C^2 berühren. Von der Curve S^6 lassen sich weiter noch die 18 Punkte bestimmen, die Mitten solcher Sehnen von N^2 mit je einem der

zerfallenden Kegelschnitte des Büschels sind. Tritt an Stelle des Kegelschnitts N^2 ein Geradenpaar, so berührt die obengenannte Parabel P^2 die Geraden und P^2 und K^3 haben ausser diesen nur noch vier weitere Tangenten gemein, das heisst, S^6 zerfällt in diese Geraden und eine Curve des vierten Grades S^4 .

5. Ist das Büschel Kegelschnitte $B(C^2)$ ein Büschel doppelt berührender Kegelschnitte, so erleiden die Curven K^3 und S^6 folgende Aenderungen:

α) Die Curve K^3 hat die gemeinsame Berührungssehne R zur Doppeltangente, und berührt ausserdem die gemeinsamen Tangenten in den Berührungspunkten. Durch irgend vier Punkte $2x$ und $2y$ auf den Geraden G und H ist dann allemal ein neues Büschel von Kegelschnitten $B(C^2_1)$ bestimmt und jeder dieser Kegelschnitte C^2_1 bestimmt auf der Geraden R zwei Punkte, die die gemeinschaftlichen Berührungspunkte eines Büschels doppelt berührender Kegelschnitte des Netzes sind, und die Ortscurve K^3 kann jetzt durch die Tangenten erzeugt werden, die man an die einzelnen Kegelschnitte C^2_1 in ihren Schnitten mit R ziehen kann. Die Curve K^3 ist also dann die besondere Curve, die wir bereits früher (siehe diese Zeitschrift Bd. 38 S. 34—47) eingehender untersucht haben.

β) Ist insbesondere die Berührungssehne R die unendlich ferne Gerade G_∞ , die Gerade G_∞ also der Ort aller Asymptoten eines Büschels $B(C^2_1)$, so berührt die Curve K^3 die Gerade G_∞ in zwei Punkten. Zudem hat sie auch die beiden Asymptoten irgend eines Kegelschnitts N^2 des Netzes zu Tangenten. Ihre gemeinschaftlichen sechs Tangenten mit der Parabel P^2 (siehe 4) bestehen also aus der doppelt zu zählenden Geraden G_∞ und den beiden Asymptoten des Kegelschnitts N^2 und zwei weiteren Tangenten. Die zu dem Kegelschnitt N^2 des Netzes gehörige Curve S^6 zerfällt also in die doppelt zu zählende Gerade G_∞ , die beiden Asymptoten von N^2 und eine Curve S^2 , das heisst, wir haben:

Das Büschel Kegelschnitte $B(C^2_1)$, das durch zwei Geraden als Asymptoten bestimmt ist, hat mit einem festen Kegelschnitt Sehnen gemein, deren Mitten auf einem Kegelschnitt S^2 gelegen sind.

Irgend ein Kegelschnitt dieses Büschels bestimmt auf dem Kegelschnitt N^2 vier Punkte q und die drei Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des vollständigen Vierecks dieser Punkte q schneiden sich dann allemal in einem Punkt S und halbiren sich in diesem Punkt, und zwar ist der Punkt S der Schwerpunkt der Punkte q . Diese drei Verbindungslinien sind aber zugleich Sehnen des Kegelschnitts S^2 und der Punkt S muss nothwendig Mittelpunkt dieses Kegelschnitts sein, oder:

Jeder Kegelschnitt C^2_1 des Büschels $B(C^2_1)$, das durch zwei Geraden als gemeinsame Asymptoten bestimmt ist, bestimmt auf einem Kegelschnitt N^2 vier Punkte, die einen unveränderlichen Punkt S zum Schwerpunkt haben.

Sind also irgend zwei Kegelschnitte N^2 und C^2 gegeben und halten wir den einen dieser Kegelschnitte, etwa N^2 fest, und lassen den andern sich ändern, doch so, dass er seine Asymptoten beibehält, so bestimmt er auf N^2 immer vier Punkte q , die denselben Punkt S zum Schwerpunkt haben. Halten wir ebenso den Kegelschnitt C^2 fest und lassen gleicherweise den Kegelschnitt N^2 sich ändern, so dass die Asymptoten dieses Kegelschnitts dieselben bleiben, so folgt, dass auch jetzt die vier gemeinschaftlichen Punkte des Kegelschnitts N^2 mit dem Kegelschnitt C^2 dieselben bleiben, oder, dass wir jeden der Kegelschnitte N^2 und C^2 durch einen anderen ersetzen dürfen, der jedoch mit N^2 resp. C^2 die Asymptoten gemein hat. Solche Kegelschnitte sind aber auch die Asymptotenpaare von N^2 und C^2 selbst; das heisst, wir finden:

Der Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte fällt mit dem Schwerpunkt der vier Punkte zusammen, welche die Asymptoten des einen Kegelschnitts auf den Asymptoten des anderen bestimmen.

Da weiter concentrische Kreise ebenfalls ein Büschel von Kegelschnitten sind, die auf der unendlich fernen Geraden G_∞ sich doppelt berühren, so folgt daraus noch:

Beschreibt man um einen festen Punkt als Mittelpunkt beliebige Kreise, so haben die vier Punkte, die jeder dieser Kreise mit einem Kegelschnitt gemein hat, einen festen Punkt zum Schwerpunkt.

Der Kegelschnitt S^2 wird für diesen Fall zur gleichseitigen Hyperbel, die auch durch die Fusspunkte der vier vom Kreismittelpunkt auf den Kegelschnitt gefälltten Lothe, den Kreismittelpunkt, den Mittelpunkt des Kegelschnitts und durch die unendlich fernen Punkte der Achsen des letzteren geht.

II.

1. Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte a, b, c gehen und gegebene Achsenrichtungen haben, so geht er stets noch durch einen Punkt d auf dem Umkreis des Dreiecks abc ; alle Kegelschnitte, welche den gegebenen Bedingungen gehorchen, bilden also ein Büschel $B(C^2)$ von Kegelschnitten und der Ort der Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte ist eine gleichseitige Hyperbel H^2 , deren Asymptoten den gegebenen Achsenrichtungen parallel sind.* Diese Hyperbel H^2 geht durch die Mitten der Seiten des Dreiecks abc und den Mittelpunkt des Umkreises.

* Es folgt dies aus dem Umstand, dass die Seiten eines Kreisvierecks, das einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, gegen die Achsen desselben gleich geneigt sind; der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels durch die vier Ecken des Kreisvierecks ist dann nach einem bekannten Satz eine gleichseitige Hyperbel, die durch den Mittelpunkt des Kreises als eines Kegelschnitts des Büschels geht.

des Dreiecks abc . Geben wir also den Achsen aller Kegelschnitte durch die Punkte abc nach und nach alle Richtungen, so gehört zu jeder Richtung eine Hyperbel H^2 und alle diese Hyperbeln H^2 bilden ein Büschel $B(H^2)$ von gleichseitigen Hyperbeln durch vier Punkte. Unter allen diesen Kegelschnitten sind aber auch Parabeln mit inbegriffen und zwar sind die Achsen dieser Parabeln die Asymptoten dieser Hyperbeln H^2 . Diese Achsen umhüllen also eine Curve der dritten Klasse mit G_∞ als Doppeltangente, oder wir finden:

Der Ort der Achsen aller Parabeln, die durch drei Punkte gehen, ist eine Curve der dritten Klasse P^3 mit G_∞ als Doppeltangente.

2. Jede der Hyperbeln H^2 bestimmt auf einer festen Geraden G zwei Punkte x ; ziehen wir durch diese Punkte x Parallelen zu den Asymptoten der Hyperbel, so erhalten wir (nach I., 1) als Ort dieser Parallelen eine Curve der dritten Klasse mit G und der Geraden G_∞ als einfachen Tangenten, indem die Gerade G_∞ an Stelle der Geraden H getreten ist, oder:

Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte gehen und seinen Mittelpunkt auf einer Geraden G haben, so ist der Ort der Achsen aller dieser Kegelschnitte eine Curve der dritten Klasse K^3_1 , mit der Geraden G und der unendlich fernen Geraden als einfachen Tangenten, und die vier Asymptoten dieser Curven schneiden sich zweimal zu zweien rechtwinklig auf der Geraden G in den Doppelpunkten der Involution, die durch die gleichseitigen Hyperbeln durch die drei Punkte auf der Geraden G bestimmt ist. Die Berührungspunkte der Curve K^3_1 mit den Geraden G und G_∞ sind durch die Hyperbel bestimmt, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden G und G_∞ geht, das heisst, die Gerade G wird von K^3_1 in der Mitte zwischen den Doppelpunkten obiger Involution und die Gerade G_∞ in einem Punkte berührt, dessen Richtung senkrecht zur Richtung der Geraden G ist.

Und hieraus:

Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte abc und eine seiner Achsen durch einen festen Punkt p gehen, so ist der Ort seines Mittelpunktes eine Curve des dritten Grades P^3 mit p als Doppelpunkt.

Durch jeden Punkt p gehen nämlich drei Tangenten des Ortes K^3_1 , oder auf G liegen drei Punkte, die Mittelpunkte von Kegelschnitten sind, von denen eine Achse durch p geht. Auf jeder Geraden durch p liegt ferner nur noch ein Punkt von P^3_1 , indem jede solche Gerade Achse eines einzigen Kegelschnitts durch abc ist, der Punkt p ist also Doppelpunkt von P^3_1 und zwar wird er zu einem solchen für den Kegelschnitt durch abc , der p zum Mittelpunkt hat, und die Achsen dieses Kegel-

schnitts sind Tangenten an P^3_1 , und die Tangenten an P^3_1 im Doppelpunkt stehen also senkrecht auf einander.

3. Von den Ortscurven P^3 , K^3_1 und P^3_1 lassen sich eine Reihe von Tangenten resp. Punkte angeben oder doch leicht bestimmen, so:

α) Die Curve P^3 berührt die Verbindungslinien der Mitten der Seiten des Dreiecks abc , in dem jede dieser Geraden als Achse einer Parabel durch abc angesehen werden kann, die aus zwei parallelen Geraden besteht; ebenso berührt die Curve P^3 die Halbierungsloth der Seiten des Dreiecks abc und zwar ist jede dieser Gerade Achse einer eigentlichen Parabel durch abc . Die gleichseitigen Hyperbeln H^2 bestimmen weiter auf G_∞ eine Rechtwinkel-Involution und die Curve P^3 berührt G_∞ in den Doppelpunkten dieser Involution, also in den unendlich fernen Kreispunkten auf G_∞ . Die Mittelpunkte aller Hyperbeln H^2 liegen auf dem Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks abc und Tangentenpaare von P^3 , die aufeinander senkrecht stehen, schneiden sich also auf diesem Kreise.

β) Die Curve K^3_1 berührt ausser den drei Verbindungslinien der Mitten der Seiten Dreiecks abc und den drei Halbierungsloth der Seiten dieses Dreiecks noch die auf diesen sechs Geraden in ihren Schnitten mit G errichteten Lothe, indem jedes dieser sechs Geradenpaare, die ihren Schnitt auf G haben, die Achsen eines zerfallenden resp. eigentlich Kegelschnitts durch abc sind.

γ) Die Curve P^3_1 geht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck abc umschriebenen Kreises, die Mitten der Seiten des Dreiecks abc , die Punkte, in welchen die Parallelen durch p zu den Seiten des Dreiecks die Halbierungsloth zu diesen Seiten treffen, durch die Fusspunkte der Lothe von p auf die Verbindungslinien der Seitenmitten des Dreiecks abc und die zwei Punkte auf jeder Seite von abc , in welchen die Tangenten von den Gegenecken an den Kreis die Seite treffen, der p zum Mittelpunkt hat und die Seite berührt. Alle diese Punkte sind nämlich Mittelpunkte einzelner Kegelschnitte durch abc , von denen eine Achse durch p geht.

Wählen wir für den Punkt p eine besondere Lage in Bezug auf das Dreieck abc , so zerfällt die Curve P^3_1 und wir erhalten z. B.:

Auf der Verbindungslinie a_1c_1 zweier Seitenmitten des Dreiecks abc (a_1 auf bc etc.) sei ein Punkt p angenommen; von p werde auf die Geraden, welche a_1 und c_1 mit der Mitte b_1 von ac verbinden, die Lothe pa und $p\beta$ gefällt, ebenso auf die Halbierungsloth c_1m und a_1m von ab und bc die Lothe $p\delta$ und $p\gamma$; um p werden weiter die Kreise K_a , K_b , K_c beschrieben, welche die Seiten des Dreiecks abc berühren (K_a die Seite bc u. s. f.) und die p zum Mittelpunkt haben; von a werden an K_a die beiden Tangenten gezogen, welche bc in a_2 und a_3 schneiden, und ebenso von c an den Kreis K_c die beiden Tangenten, die auf ab die Punkte c_2 und c_3 bestimmen und endlich von b

aus an den Kreis K_b die Tangente, die zu ac nicht parallel ist, und die auf ac den Punkt b_2 bestimmt. Es liegen dann allemal die Punkte $p, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, der Mittelpunkt m des Umkreises des Dreiecks abc , der Halbierungspunkt b_1 von ac , die Punkte a_2, a_3, b_2, c_2 mit c_3 auf einem Kegelschnitt, der die Gerade a_1c_1 in p senkrecht durchschneidet.

Und:

Auf dem Halbierungslothe a_1m der Seite bc eines beliebigen Dreiecks abc sei ein beliebiger Punkt p angenommen und um denselben seien als Mittelpunkt die Kreise K_a, K_b, K_c beschrieben, die die Seiten des Dreiecks abc berühren. Von dem Punkte a seien an K_a die Tangenten gezogen, welche auf bc die Punkte a_2 und a_3 bestimmen, von b ebenso an Kreis K_b die Tangente gelegt, die (im Allgemeinen) mit bc und ac kein gleichschenkliges Dreieck bildet und die ac in b_2 trifft, und endlich sei von c auch an K_c die Tangente gezogen, die mit bc und ac kein gleichschenkliges Dreieck bildet und die ab in c_2 trifft; auf die Halbierungslothe b_1m und c_1m der Dreiecksseiten ac und ab und die Verbindungslinien der Seitenmitten a_1 von bc mit den Seitenmitten von ab und ac seien von p die Lothe $p\alpha, p\beta, p\gamma$ und $p\delta$ gefällt. Es liegen dann immer die Punkte $p, \alpha, \beta, \gamma, \delta, a_2, a_3, b_2$ und c_2 , die Mitten b_1 und c_1 von ac und ab auf einem Kegelschnitt, der das Mittelloth von bc in p senkrecht durchschneidet.

4. Sind ferner irgend vier Punkte $abcd$ gegeben, so können wir aus diesen zwei Gruppen von drei Punkten abc und abd auswählen. Zu jeder dieser Gruppen und einem Punkt p gehört dann eine Ortscurve P^3_1 . Die gemeinsamen Punkte dieser Curven setzen sich dann aus folgenden Punkten zusammen:

- a) Dem Punkte p , als Doppelpunkt bei den Curven vierfach zählend.
- β) Dem Halbierungspunkt von ab .
- γ) Dem Fusspunkt des Lothes von p auf das Halbierungsloth von ab .
- δ) Drei weiteren Punkten, welche solchen Kegelschnitten angehören, die durch die vier Punkte $abcd$ gehen und von denen eine Achse durch p geht; das heisst wir finden:

Der Ort der Achsen der Kegelschnitte eines Büschels durch vier Punkte ist eine Curve der dritten Klasse A^3 .

Unter den Kegelschnitten eines Büschels sind weiter zwei Parabeln. Es folgt daraus:

Die Curve A^3 hat die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente, sie ist also von der vierten Ordnung und unter den Achsen aller dieser Kegelschnitte sind keine zwei parallel.

Die Curve A^3 berührt die Halbierungsloth der Seiten des vollständigen Vierecks der vier Punkte und die drei Geradenpaare, welche die Winkel der Gegenseiten dieses Vierecks halbiren. Sind die Kegelschnitte des Büschels alle gleichseitige Hyperbeln, oder ist jeder der Grundpunkte Höhenschnitt des Dreiecks der andern, so ist die Curve P^3 der Curve A^3 congruent und die drei Rückkehrpunkte beider Curven bilden zwei gleichseitige Dreiecke, die die Mittelpunkte gemein haben, und von denen das eine gegen das andere um 180° gedreht ist.

III.

1. Unter den Curven C^3 eines Büschels von Curven des dritten Grades $B(C^3)$ giebt es im Allgemeinen immer vier solche, die eine Gerade G berühren. Ziehen wir an jede der Curven C^3 in ihren drei Schnittpunkten mit G die Tangenten, so erhalten wir als Ort dieser Tangenten eine Curve der fünften Klasse G^5 mit G als vierfacher Tangente, indem durch jeden Punkt auf G nur eine einzige solche Tangente geht, die von G verschieden ist, diese Tangente aber auch viermal auf G zu liegen kommt. Ist ausserdem noch ein zweites Büschel von Curven des dritten Grades $B(C^3_1)$ gegeben, und ziehen wir auch an die Curven dieses Büschels in ihren Schnitten mit derselben Geraden G die Tangenten, so ist auch der Ort dieser Tangenten eine Curve der fünften Classe mit G als vierfacher Tangente. Beide Curven haben ausser G selbst noch $5 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = 9$ Tangenten gemein, oder:

Soll eine Curve C^3 eines Büschels von Curven durch neun Grundpunkte eine Curve C^3_1 eines zweiten Büschels durch neun andere Grundpunkte berühren, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve des neunten Grades S^9 .

Durch jeden Grundpunkt des einen Büschels geht eine Curve des anderen Büschels, und die Curve S^9 geht also namentlich auch durch die Grundpunkte beider Büschel.

2. Haben die beiden Büschel sieben Punkte gemein, so giebt es immer eine Curve C^3 , welche beiden Büscheln zugleich angehört. Jeder Punkt dieser gemeinsamen Curve beider Büschel kann aber als ein Punkt angesehen werden, in dem eine Curve des einen Büschels eine Curve des anderen Büschels berührt; das heisst, die Curve S^9 zerfällt in diese gemeinsame Curve C^3 beider Büschel und in eine Curve des sechsten Grades S^6 , oder:

Haben zwei Curvenbüschel $B(C^3)$ und $B(C^3_1)$ sieben Punkte gemein, so ist der Ort der Punkte, in denen eine Curve des ersten Büschels eine solche des zweiten Büschels berührt, eine Curve des sechsten Grades S^6 .

Irgend ein Punkt dieses Ortes S^6 bildet aber mit den sieben gemeinschaftlichen Grundpunkten der beiden ersten Büschel acht Grundpunkte

eines neuen Büschels und zwar berühren sich in diesem achten Punkte zwei Curven C^3 und C^3_1 , die dem neuen Büschel angehören und somit alle Curven dieses Büschels. Unter diesen Curven ist aber auch immer eine solche, die in diesem gemeinsamen Berührungspunkt einen Doppelpunkt hat, das heisst, wir finden:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sieben Punkte gehen und einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve des sechsten Grades, nämlich die Curve S^6 (Steiner's G. W. Bd. 2 S. 526)*.

Da jeder der sieben Punkte selbst Doppelpunkt einer Curve C^3 durch diese sieben Punkte sein kann, so folgt daraus noch:

Die Curve S^6 hat die sieben festen Punkte zu Doppelpunkten.

Die Curve S^6 geht ausserdem durch die 42 Punkte, in denen die Verbindungslinien von je zwei Punkten der Kegelschnitte durch die übrigen fünf Punkte treffen, indem jede dieser Geraden mit dem zugehörigen Kegelschnitt als zerfallende Curve des dritten Grades mit zwei Doppelpunkten angesehen werden kann.

3. Sind irgend sechs Punkte p gegeben, so können wir jeden Punkt x der Geraden G als Doppelpunkt einer Curve des dritten Grades ansehen; diese Curve bestimmt dann auf einer zweiten Geraden H drei Punkte y und durch jeden Punkt x auf G gehen also drei Geraden xy . Die Gerade xy fällt aber auch viermal auf die Gerade G selbst, nämlich für die Punkte x_0 , in denen die zu den sechs Punkten p und dem Schnittpunkt a von G und H gehörige Ortscurve S^6 die Gerade G ausser in a noch schneidet. Der Ort der Geraden xy ist also eine Curve der siebenten Klasse mit G als vierfacher Tangente. Lassen wir G und H zusammenfallen, so fällt eine der drei Geraden xy auf die Gerade G und die anderen werden zu Tangenten im Doppelpunkt x auf G , und wir erhalten:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sechs Punkte gehen und auf einer Geraden G einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort der Tangenten in diesem Doppelpunkt eine Curve der siebenten Klasse G^7 mit G als fünffacher Tangente.

Durch jeden Punkt q ausserhalb G gehen also sieben solche Tangenten einzelner der Curven C^3 mit Doppelpunkt durch die sechs Punkte p , die C^3 in einem Doppelpunkt berühren, der auf G liegt, oder:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sechs gegebene Punkte p gehen, einen Doppelpunkt haben, und soll die eine

* Ganz ebenso findet man allgemein:

Soll eine Curve des n ten Grades durch $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ Punkte gehen und einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort des Doppelpunktes eine Curve des $3(n-1)$ ten Grades.

der Tangenten in diesem Doppelpunkt durch einen gegebenen Punkt gehen, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve des siebenten Grades Q^7 (Steiner a. a. O.).

Jede Gerade G kann fünfmal zu einer Tangente im Doppelpunkt einer Curve C^3 durch sechs Punkte werden und auf jeder Geraden durch q liegen also ausser q nur noch fünf weitere Punkte des Ortes Q^7 , oder q ist selbst Doppelpunkt dieses Ortes. Ziehen wir in q an die Curve C^3 mit Doppelpunkt, welche durch die sechs Punkte p geht und den Punkt q zum Doppelpunkt hat, die Tangenten, so wird jede dieser Tangenten nur noch von vier weiteren Curven C^3 berührt, die auf diesen Tangenten einen Doppelpunkt und die diese Geraden selbst zu Tangenten in diesem Doppelpunkt haben; diese beiden Tangenten sind also auch Tangenten an Q^7 im Doppelpunkt A .

Auch von dieser Curve lassen sich eine Reihe von Punkten leicht angeben; legen wir z. B. durch fünf der sechs Punkte p einen Kegelschnitt, so liegen auf diesem 14 Punkte des Ortes, nämlich die beiden Schnittpunkte der Geraden von q nach dem sechsten Punkt p und die Berührungspunkte der zwei von q an den Kegelschnitt gelegten Tangenten, indem diese ebenfalls als Doppelpunkte von Curven C^3 auftreten, die in diesen Kegelschnitt und eine Gerade von einem dieser Berührungspunkte nach dem letzten Punkt p zerfallen. Ausser diesen vier Punkten und den fünf Punkten p kann auf dem Kegelschnitt kein weiterer Punkt des Ortes Q^7 liegen, das heisst, die Punkte p sind Doppelpunkte des Ortes. Auf jeder Geraden qp liegen ausser dem zweifach zählenden Punkt q und den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt durch die übrigen fünf Punkte p nur noch der sechste Punkt p ; dieser ist also dreifach zu zählen, oder die Geraden qp sind ausserdem noch Tangenten in den Doppelpunkten p des Ortes Q^7 .

4. Zu irgend zwei Punkten q und q_1 gehören in Bezug auf die obigen Curven C^3 (durch dieselben sechs Punkte p) zwei Ortscurven Q^7 und Q_1^7 . Die gemeinsamen Punkte dieser Curven setzen sich zusammen aus 24 Punkten, die in die sechs Punkte p , aus fünf, die auf die Gerade qq_1 fallen und aus zwanzig weiteren Punkten, das heisst wir finden:

Soll eine Curve dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt durch sechs Punkte gehen und sollen die Tangenten im Doppelpunkt an C^3 durch zwei feste Punkte q und q_1 gehen, so giebt es im Allgemeinen 20 Lösungen.*

Und:

Soll eine Curve des dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt durch sechs Punkte p gehen und soll die eine Tangente im

* Steiner giebt 25 Lösungen an, indem er wohl die fünf Punkte von Q^7 und Q_1^7 auf qq_1 übersah in Abzug zu bringen.

Doppelpunkt dieser C^3 durch einen festen Punkt q gehen, so ist der Ort der anderen Tangente in diesem Doppelpunkt eine Curve der zwanzigsten Klasse Q^{20} .

Jeder Tangente von q an diese Curve Q^{20} entspricht eine Curve C^3 , die anstatt einem Doppelpunkt einen Rückkehrpunkt hat. Unter den zwanzig Tangenten von q an Q^{20} sind aber die zwei mit inbegriffen, die an die C^3 gezogen sind, die q selbst zum Doppelpunkt hat, und wir finden also in Uebereinstimmung mit Steiner:

Soll eine Curve C^3 mit Doppelpunkt durch sechs Punkte p gehen und soll die eine Tangente in diesem Doppelpunkt durch einen festen Punkt q gehen, so sind unter der Schaar von diesen Curven dritten Grades im Allgemeinen 18, die einen Rückkehrpunkt haben; und soll eine C^3 durch sechs Punkte gehen und einen Rückkehrpunkt haben, so ist der Ort der Rückkehrtangente eine Curve der 18. Klasse R^{18} .

5. Wir sahen oben, dass es im Allgemeinen fünf Curven C^3 durch sechs Punkte p gibt, die auf einer Geraden G einen Doppelpunkt und G zu dem zur Tangente in diesem Doppelpunkt haben, und es gibt also auch fünf solche Curven C^3 durch sechs Punkte p , die auf G_∞ einen Doppelpunkt haben und G_∞ zugleich zur Tangente in diesem Doppelpunkt. Jeder dieser fünf Doppelpunkte auf G_∞ kann aber als Mittelpunkt einer C^3 angesehen werden, die durch die p geht, und wir schliessen daraus:

Soll eine Curve C^3 durch sechs Punkte p gehen und einen Mittelpunkt haben, so ist der Ort dieses Mittelpunkts eine Curve des fünften Grades M^5 .

Diese Curve M^5 geht namentlich durch jeden der Punkte p selbst, durch die Mitten der 15 Verbindungslinien von je zwei dieser Punkte, durch die Mittelpunkte der 30 Kegelschnitte, die durch vier Punkte p gehen und ihren Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der letzten zwei Punkte p haben, und durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte durch je fünf der Punkte p .

6. Die in 3. gefundene Ortscurve G^7 hat mit der Geraden G ausser den fünf Berührungspunkten zwölf weitere Punkte gemein, indem ihr Grad gleich $6 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = 22$ ist. Jedem dieser zwölf Punkte entspricht aber eine Curve C^3 , die auf G einen Rückkehrpunkt hat, oder:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sechs Punkte p gehen und einen Rückkehrpunkt haben, so ist der Ort dieses Rückkehrpunkts eine Curve des zwölften Grades, R^{12} (Steiner a. a. O. S. 526, findet eine Curve R^6).

Die Curve R^6 hat die Punkte p zu vierfachen Punkten und geht ausserdem durch die 30 Punkte, in denen die Verbindungslinie von je zweien von

einem Kegelschnitt durch die übrigen vier berührt wird, sowie durch die zwölf Berührungspunkte der Tangenten von jedem Punkt p an den Kegelschnitt durch die anderen fünf Punkte p , indem alle diese Punkte (ausser den Punkten p selbst), Rückkehrpunkte einzelner (zerfallender) Curven C^3 durch die sechs Punkte p sind.

7. Die oben (in 2.) entwickelte Ortscurve S^6 zerfällt für besondere Lagen der gegebenen sieben Punkte p . Sind insbesondere drei der sieben Punkte in einer Geraden gelegen, so kann jeder Punkt dieser Geraden als Doppelpunkt einer zerfallenden Curve C^3 angesehen werden oder diese Gerade ist ein Theil der Curve S^6 . Sind also sechs der gegebenen Punkte p die Schnitte von je zweien von vier Geraden, oder sind sechs Punkte p die Ecken eines vollständigen Vierseits, so enthält die Ortscurve S^6 die Seiten dieses Vierseits, zerfällt also in diese vier Seiten und in eine Curve des zweiten Grades. Die letztere muss also den siebenten Punkt p zum Doppelpunkt haben, zerfällt also selbst wieder in zwei Geraden L und L_1 , die zu dem in dem siebenten Punkte p Tangenten an eine solche C^3 durch die sechs Ecken des Vierseits sind, die den siebenten Punkt p zum Doppelpunkt hat, oder:

Soll eine Curve des dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt durch die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits und einen siebenten beliebigen Punkt p_7 gehen, so ist der Ort des Doppelpunkts aus den Geraden L und L_1 zusammengesetzt, die Tangenten in p_7 an die besondere der Curven C^3 in p_7 sind, die p_7 zum Doppelpunkt hat.

Wir sahen weiter, dass auf der Curve S^6 die Punkte liegen, in denen ein Kegelschnitt durch fünf der gegebenen Punkte die Verbindungslinie der letzten zwei Punkte p schneidet, oder wir finden:

Legen wir durch je zwei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits und einen beliebigen Punkt p Kegelschnitte, so schneidet jeder dieser Kegelschnitte die Verbindungslinie des dritten Paares von Gegenecken des Vierseits in zwei Punkten a und die so erhaltenen sechs Punkte a liegen dann allemal auf zwei durch den Punkt p gehenden Geraden, nämlich den Geraden L und L_1 .

8. Auch die Curve M^5 kann in Curven niedrigeren Grades zerfallen; liegen z. B. irgend drei der gegebenen Punkte p auf einer Geraden, so hat diese Gerade nach Obigem mit M^5 mehr als fünf Punkte gemein, ist also ein Theil von M^5 und dieser Ort besteht somit aus dieser Geraden und einer Curve des vierten Grades M^4 . Sind die sechs Punkte p z. B. zu je drei auf drei Geraden gelegen, so folgt daraus:

Werden auf den Seiten p_1p_2 , p_1p_3 und p_2p_3 eines Dreiecks $p_1p_2p_3$ drei beliebige Punkte p_6 , p_5 und p_4 angenommen und sind

g_3, g_2 und g_1 die Mitten der Seiten des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$, so liegen allemal die Mitten der Seiten des Dreiecks $p_4 p_5 p_6$, die Mitten von $p_1 p_4, p_2 p_5, p_3 p_6$ und die Schnittpunkte von $g_1 g_2$ mit $p_4 p_5, g_1 g_3$ mit $p_4 p_6$ und $g_2 g_3$ mit $p_5 p_6$ auf einem Kegelschnitt H^2 und dieser ist der Ort der Mittelpunkte aller Curven des dritten Grades mit Mittelpunkt durch die sechs Punkte p .

Schneiden sich die Geraden $p_1 p_4, p_2 p_5$ und $p_3 p_6$ in einem Punkt, so geht der Kegelschnitt H^2 auch durch diesen Punkt.

Liegen die sechs Punkte p auf vier Geraden, oder sind dieselben die Ecken eines vollständigen Vierseits, so zerfällt M^5 in die Seiten dieses Vierseits und in eine Gerade, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des Vierseits geht. Da diese Gerade zugleich der Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte ist, die dem Vierseit einbeschrieben sind, so folgt daraus noch:

Soll eine Curve des dritten Grades durch die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits gehen und einen Mittelpunkt haben, so ist der Ort des Mittelpunktes diejenige Gerade, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des Vierseits geht und jede dieser Curven hat also auch mit einem Kegelschnitt, der die Seiten des Vierseits berührt, den Mittelpunkt gemein.

IV.

1. Durch jeden Punkt x gehen im Allgemeinen zwei Kegelschnitte eines Systems $S(C^2)$ von Kegelschnitten, die vier Gerade berühren. Lassen wir den Punkt x sich auf einer Geraden G bewegen und ziehen wir in x an jeden durch x gehenden Kegelschnitt C^2 die Tangenten, so ist der Ort dieser Tangenten eine Curve der dritten Klasse G^3_1 , indem durch jeden Punkt auf G zwei der obigen Tangenten gehen, diese aber auch einmal mit G zusammenfällt und zwar für den Punkt, in dem G von einem Kegelschnitt C^2 berührt wird. Zudem berührt die Ortcurve die vier Tangenten der Schaar und zwar in ihren Schnitten mit G und ebenso die drei Diagonalen des Vierseits der Schaar. Durch jeden Punkt ausserhalb G gehen also auch drei Tangenten an einzelne C^2 , die ihren Berührungspunkt auf G haben. Wir folgern daraus:

Ziehen wir an alle C^2 der Schaar von einem Punkt p_0 die Tangenten, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve des dritten Grades P^3 .

Durch p_0 selbst gehen zwei Kegelschnitte C^2 , das heisst, P^3 hat den Punkt p_0 zum Doppelpunkt und zwar sind die beiden Tangenten in p_0 an diese Kegelschnitte auch Tangenten im Doppelpunkt von P^3 , indem auf jeder dieser kein weiterer Punkt des Ortes liegen kann. Die Curve P^3

geht ferner auch durch die sechs Ecken des Vierseits, das heisst wir finden:

Die Geraden L und L_1 (vergl. III.) sind Tangenten in p_0 an die zwei Kegelschnitte, die dem Vierseit einbeschrieben sind und die durch p_0 gehen.

Und hieraus wieder:

a) Soll eine Curve des dritten Grades durch die Ecken eines vollständigen Vierseits gehen und auf einer Geraden G einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort der Tangenten ein Doppelpunkt an diese Curve die obige Curve G^3_1 ; soll dagegen die Tangente im Doppelpunkt durch einen festen Punkt p_0 gehen, so ist der Ort des Doppelpunkts die Curve des dritten Grades, die durch die sechs Ecken des Vierseits geht und p_0 zum Doppelpunkt hat.

Und:

b) Geht eine Curve des dritten Grades mit Doppelpunkt durch die Ecken eines vollständigen Vierseits und durch einen siebenten Punkt p_0 , so ist der Ort der Tangenten im Doppelpunkt aus zwei Curven der dritten Klasse zusammengesetzt, nämlich aus den Curven G^3_1 , die zu L und L_1 gehören.

Ziehen wir von p_0 an alle Kegelschnitte der Schaar die Tangenten, so bilden diese ein involutorisches Büschel mit den Geraden L und L_1 . Irgend ein solches Tangentenpaar bildet mit einer Seite s_1 des Vierseits ein Dreieck, das einem Kegelschnitt umschrieben ist. Da aber auch das Dreieck aus den übrigen Seiten s_2, s_3, s_4 des Vierseits demselben Kegelschnitt umschrieben ist, so geht durch die sechs Ecken beider Dreiecke stets ein Kegelschnitt. Alle auf diese Art erhaltenen Kegelschnitte haben aber vier Punkte, den Punkt p_0 und die drei Ecken des zweiten Dreiecks aus s_2, s_3, s_4 , gemein, bilden also ein Büschel von Kegelschnitten.

Diese Kegelschnitte bestimmen aber auf der ersten Seite s_1 eine Involution von Punkten, die von p_0 durch das obige Strahlenbüschel projectirt werden. Die Doppelpunkte dieser Involution sind aber die Punkte, in denen s_1 von Kegelschnitten des Büschels berührt wird, oder:

Legen wir durch einen Punkt p_0 und die Ecken jeden Dreiecks, das drei der vier Seiten eines Vierseits bilden, die zwei Kegelschnitte, welche die vierte Seite berühren, so liegen die so erhaltenen acht Berührungspunkte auf zwei Geraden, nämlich auf den Geraden L und L_1 .

V.

1. Kehren wir wieder zu der in I. erhaltenen Curve K^3 zurück und halten wir eine der Geraden, etwa G , und irgend einen Punkt q fest, so

finden wir, da für jede beliebige Gerade H durch den Punkt q drei Tangenten der zu G und II gehörigen Curve K^3 gehen, und wir erhalten:

Verbinden wir die Schnittpunkte eines veränderlichen Kegelschnitts C^2 durch vier Grundpunkte p und einer festen Geraden G mit einem Punkte q , so ist der Ort der zweiten Schnitte r dieser Verbindungslinien mit dem zugehörigen Kegelschnitte C^2 eine Curve des dritten Grades Q^3 .

Der Punkt r fällt auch in den Punkt q und zwar für die zwei Schnittpunkte des Kegelschnitts C^2 durch q mit der Geraden G ; der Punkt q ist also Doppelpunkt der Curve Q^3 . Ausserdem geht die Ortscurve durch die vier Grundpunkte p und die sechs Punkte auf den Verbindungslinien der vier Punkte p , die sich aus den drei zerfallenden Kegelschnitten C^2 ableiten lassen. Die Verbindungslinie der zwei Punkte r geht weiter -- nach einem bekannten Satz über die Curven dritten Grades -- durch einen festen Punkt s auf der Curve Q^3 .

2. Geht eine beliebige Curve des dritten Grades durch sechs Punkte ($4p$ und $2r$) und hat in einem siebenten Punkte q einen Doppelpunkt, so kann aus dem Obigen folgende Construction der Tangenten im Doppelpunkte abgeleitet werden.

Durch vier der gegebenen Punkte und je einen der übrigen zwei (durch die $4p$ und je einen r) legen wir einen Kegelschnitt und verbinden jeden der letzten zwei Punkte (r) mit dem Doppelpunkt q , so schneidet jede dieser Verbindungslinien den zugehörigen Kegelschnitt nochmals in einem zweiten Punkt, wodurch wir zwei neue Punkte (x und x_1) erhalten. Die Verbindungslinie dieser letzten Punkte (xx_1) ist die oben auftretende Gerade G . Der Kegelschnitt durch die vier gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kegelschnitte und den Punkt q schneidet dann die Verbindungslinie (xx_1) in zwei Punkten, die auf den Tangenten der Curve dritten Grades im Doppelpunkt liegen. Die Construction der Curve selbst ist damit ebenfalls gegeben.

3. Es ist nur eine Folgerung aus Obigem, wenn wir sagen:

Soll eine Curve C^3 durch die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits gehen und einen siebenten Punkt p_0 zum Doppelpunkte haben, so liegen auch die Projectionen der drei Diagonalschnitte von p_0 auf die Gegenseiten des Dreiecks der drei Diagonalen auf der Curve C^3 .

Es ist hierbei eine Diagonale zur Geraden G und der Punkte p_0 zum Punkt q gewählt worden.

4. Aus den hier allgemein entwickelten Eigenschaften können wir folgende Sätze als specielle Fälle ableiten:

a) Projicirt man jeden Schnittpunkt der sechs Seiten eines vollständigen Vierecks mit einer Geraden G von einem Punkt q auf die Gegenseite des Vierecks, so liegen die sechs Pro-

jectionen mit den vier Ecken des Vierecks auf einer Curve des dritten Grades mit dem Punkte q als Doppelpunkt, und ist umgekehrt irgend einer Curve des dritten Grades mit Doppelpunkt irgend ein Viereck einbeschrieben, so liegen allemal die Projectionen der weiteren Schnitte der Vierecksseiten mit der Curve vom Doppelpunkte auf die Gegenseiten des Vierecks in einer Geraden. Die Verbindungslinien der ersteren Projectionen von q auf den Gegenseitenpaaren schneiden sich zudem in einem Punkte, der gleichfalls auf der Curve liegt.

Liegt der Punkt q auf einer Seite ab des Vierecks $abcd$, so zerfällt die Curve dritten Grades in eine Curve des zweiten Grades und die Seite ab des Vierecks und es folgt daraus:

b) Projicirt man von einem beliebigen Punkt q auf eine Seite eines Vierecks die Schnitte der übrigen fünf Seiten desselben mit einer Geraden auf die Gegenseiten des Vierecks, so liegen die fünf Projectionen mit den beiden Ecken des Vierecks, die mit dem angenommenen Punkt nicht in einer Geraden liegen, auf einem Kegelschnitt und die Verbindungslinien der zwei Paare der fünf Projectionen, die auf Paaren von Gegenseiten liegen, schneiden sich allemal auf der angenommenen Seite des Vierecks. Der Kegelschnitt berührt ausserdem die Gerade, welche q mit dem Schnittpunkt der Gegenseite der angenommenen Seite mit der Geraden verbindet und zwar in q .

Hierbei ist q als eine der obigen fünf Projectionen angesehen.

Ist der Punkt q der Schnittpunkt zweier Gegenseiten ab und cd des Vierecks, so zerfällt die Curve dritten Grades in drei Geraden und man erhält:

c) Projicirt man von dem Schnittpunkt q zweier Gegenseiten eines Vierecks die vier Schnitte der übrigen vier Vierecksseiten mit einer Geraden G auf die Gegenseiten, so liegen die vier Projectionen auf einer Geraden H , welche ausserdem durch den Schnittpunkt der Geraden G mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare des Vierecks, die nicht durch q gehen, geht.

5. Geht eine Curve des dritten Grades durch fünf Punkte p und hat dieselbe einen sechsten Punkt q zum Doppelpunkt, so können wir durch die fünf Punkte p einen Kegelschnitt C^2 legen und ebenso durch vier Punkte p und den Punkt q einen zweiten Kegelschnitt D^2 ; schneidet die Verbindungslinie von q mit dem fünften Punkt p , der nicht auf D^2 liegt, in einem Punkt r , so bestimmt eine beliebige durch r gehende Gerade (als Gerade G) auf D^2 zwei Punkte y und y_1 , so dass qy und qy_1 Tangenten

im Doppelpunkt an eine der möglichen Curven C^3 sind. Da unter den Geradenpaaren gy und gy_1 auch zwei solche sind, die zusammenfallen, so finden wir:

Durch fünf Punkte p gehen unendlich viele Curven C^3 , die einen sechsten Punkt q zum Doppelpunkt haben und die Tangentenpaare an diesem Doppelpunkt an alle Curven C^3 bilden eine Involution und unter den Curven sind auch immer zwei, die den Punkt q zum Rückkehrpunkt haben.

VI.

1. Sind irgend zwei Büschel von Kegelschnitten $B(C^2)$ und $B(D^2)$ gegeben, die auf einer Geraden G dieselbe Involution von Punkten bestimmen, giebt es also unter den Kegelschnitten C^2 und D^2 dieser Büschel unendlich viele solche, die die Gerade G zur Sehne haben, so erhalten wir für die letzten zwei Schnittpunkte x und x_1 zweier Kegelschnitte C^2 und D^2 , die auf G dieselben Punkte bestimmen, einen Ort, den wir wie folgt ableiten können: Zu jedem der Büschel gehört in Bezug auf die Gerade G und eine zweite Gerade H (nach I.) eine Curve K^3 . Diese beiden Curven K^3 haben die Geraden G und H zu Tangenten und zwar berühren sie die Gerade G in demselben Punkte, in dem die beiden Kegelschnitte beider Büschel durch den Schnittpunkt a von H und G auf G noch denselben zweiten Punkt bestimmen. Die Gerade G ist also zweifach als gemeinsame Tangente und die Gerade H einfach als solche zu rechnen. Die übrigen sechs gemeinsamen Tangenten ordnen sich zu drei Paaren von Geraden, die von gemeinsamen Punkten von Kegelschnitten C^2 und D^2 auf nach den gemeinschaftlichen Punkten dieser Kegelschnitte auf G gehen. Der Ort der letzten Punkte x und x_1 der Kegelschnitte C^2 und D^2 ist also eine Curve des dritten Grades X^3 . Diese Curve geht ferner durch die Grundpunkte beider Büschel und die Gerade xx_1 dreht sich — nach einem bekannten Satz über die Curven dritten Grades — um einen festen Punkt auf X^2 ; das heisst wir erhalten:

Bestimmen die Kegelschnitte zweier Büschel auf einer Geraden G dieselbe Involution von Punkten, so ist der Ort der letzten gemeinsamen Punkte x und x_1 zweier Kegelschnitte der Büschel, die auf G dieselben Punkte bestimmen, eine Curve des dritten Grades, X^3 , die durch die Grundpunkte beider Büschel geht und die Verbindungslinie xx_1 dreht sich um einen festen Punkt dieses Ortes.

2. Insbesondere folgt daraus:

Sind $abcd$ und $a_1b_1c_1d_1$ zwei Vierecke, deren Seiten sich paarweise auf einer Geraden G schneiden, so liegen die Schnittpunkte:

$$\begin{array}{l}
 x \text{ von } ab \text{ mit } c_1 d_1, \quad x_1 \text{ von } a_1 b_1 \text{ mit } cd, \\
 y \text{ " } ac \text{ " } b_1 d_1, \quad y_1 \text{ " } a_1 c_1 \text{ " } bd, \\
 z \text{ " } ad \text{ " } b_1 c_1, \quad z_1 \text{ " } a_1 d_1 \text{ " } bc
 \end{array}$$

mit den Ecken der beiden Vierecke auf derselben Curve dritten Grades und die Geraden xx_1 , yy_1 und zz_1 schneiden sich in einem Punkte dieser Curve.

Und:

Haben zwei Vierecke $abcd$, $a_1 b_1 c_1 d_1$ zwei Seiten, etwa ad und $a_1 d_1$ auf einer Geraden liegend, so liegen die übrigen Ecken b , c , b_1 und d_1 mit den Schnitten x und x_1 von ab mit $c_1 d_1$, $a_1 b_1$ mit cd , y und y_1 von ac und $b_1 d_1$, $a_1 c_1$ und bd auf einem Kegelschnitt und xx_1 und yy_1 schneiden sich auf ad .

Kleinere Mittheilungen.

XI. Ein neuer Satz über die Determinanten einer Matrix.

Es sei gegeben eine Matrix

$$1) \quad M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (n > m).$$

Unter $|i_1, i_2 \dots i_m|$ werde, wenn die i irgend welche Indices aus der Reihe $1 \dots n$ sind, die aus den Columnen $i_1, i_2 \dots i_m$ gebildete Determinante m^{ten} Grades verstanden. Wir wollen nun voraussetzen, dass von allen $\binom{n}{m}$ Determinanten m^{ten} Grades $n - m + 1$ verschwinden, so zwar, dass, wenn wir dieselben in der oben angegebenen Bezeichnung schreiben und etwa

$$2) \quad \begin{cases} |i_{11}, i_{12} \dots i_{1m}| = 0 \\ |i_{21}, i_{22} \dots i_{2m}| = 0 \\ \vdots \\ |i_{s1}, i_{s2} \dots i_{sm}| = 0 \end{cases}$$

haben, wo s zur Abkürzung für $n - m + 1$ gesetzt ist, sich eine solche Anordnung treffen lässt, dass von den Indices jeder Zeile in 2) gerade $m - 1$ in den vorhergehenden Zeilen schon vorkommen. Wir wollen annehmen, dass in dem obigen Schema diese Anordnung bereits getroffen ist und ferner, dass die neu hinzutretenden Indices in jeder Zeile an erster Stelle stehen. Man sieht, dass alsdann in der ersten Horizontal- und der ersten Verticalreihe von 2) alle n Indices vorkommen.

Wenn wir nun noch die weitere Voraussetzung machen, dass in jeder der s Matrices, welche von den Columnen $i_{k2}, i_{k3} \dots i_{km}$ ($k = 1 \dots s$) gebildet werden, unter den je m Determinanten $(m - 1)^{\text{ten}}$ Grades wenigstens eine von 0 verschiedene ist, so müssen alle Determinanten m^{ten} Grades der Matrix M verschwinden. — Der Beweis hierfür ergibt sich leicht folgendermassen:

Der Relation

$$3) \quad |x, i_{12}, i_{13} \dots i_{1m}| = 0$$

wird offenbar genügt durch $x = i_{11}, i_{21}, i_{12}, i_{13} \dots i_{1m}$, also durch alle in den beiden ersten Zeilen von 2) vorkommenden Indices, und zwar folgt dies für die Indices i_{11} und i_{21} aus den beiden ersten Gleichungen von 2), während für die anderen Indices die Relation 3) eine Identität ist. Wählen wir von diesen $m+1$ Werthen für x irgend m Werthe aus, welche wir mit $i_1, i_2 \dots i_m$ bezeichnen wollen, stellen für diese die m Determinantengleichungen von der Form 3) auf und entwickeln jede derselben nach den Unterdeterminanten der ersten Colonne, so haben wir offenbar ein System von m linearen homogenen Gleichungen in Bezug auf die m Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades der aus den Columnen $i_{12}, i_{13} \dots i_{1m}$ gebildeten Matrix. Da nun wenigstens eine dieser Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades nach unserer Voraussetzung von 0 verschieden ist, so muss also die Determinante des Systems linearer Gleichungen verschwinden; dies ist aber nichts Anderes als:

$$|i_1, i_2 \dots i_m| = 0.$$

Bilden wir also irgend eine Combination zu m Elementen von den in den beiden ersten Zeilen von 2) vorkommenden Indices, so verschwindet die aus den durch diese Indices bezeichneten Columnen gebildete Determinante m^{ten} Grades. Es verschwindet daher auch die Determinante $|y, i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}|$ für jedes y , welches in den beiden ersten Zeilen von 2) bereits vorkommt, da ja $i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}$ dort auch schon vorkommen. Hiernach und nach der dritten Gleichung von 2) folgt, dass der Gleichung

$$4) \quad |y, i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}| = 0$$

Genüge geleistet wird durch die Werthe $y = i_{11}, i_{12} \dots i_{1m}, i_{21}, i_{31}$. Wählen wir also irgend m dieser $m+2$ Indices aus und bilden für sie die Determinantengleichungen von der Form 4), so erhalten wir offenbar wieder ein solches System von m linearen homogenen Gleichungen in Bezug auf die m Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades der aus den Columnen $i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}$ bestehenden Matrix. Da nun von diesen Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades nach unserer Voraussetzung wenigstens eine von 0 verschieden ist, so muss die Determinante des Gleichungssystems verschwinden, d. h. also: jede aus m der Columnen $i_{11}, i_{12} \dots i_{1m}, i_{21}, i_{31}$ gebildete Determinante ist = 0. Dies geht offenbar so fort und es folgt, dass jede Determinante m^{ten} Grades der Matrix M verschwindet.

Dieser Satz lässt nun eine Reihe geometrischer Anwendungen zu, von denen wir einige anführen wollen. Wenn nämlich die Grössen x_i, y_i, z_i, w_i , $i = 1, 2, 3$ die homogenen Coordinaten von drei Raumpunkten sind, so sind in der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

die drei Determinanten dritten Grades, welche die letzte Colonne enthalten, im Wesentlichen die Projectionen des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks auf die Coordinatenebenen, und wir erhalten durch Anwendung unseres Determinantensatzes das bekannte Resultat, dass, wenn zwei der Projectionen eines Dreiecks auf die Coordinatenebenen verschwinden, die dritte auch verschwinden muss.* Sehen wir dagegen in dieser Matrix die Elemente der einzelnen Columnen als Richtungscosinus von Geraden an, welche durch einen Punkt gehen, so kommen wir zu dem Satz, dass, wenn drei durch einen Punkt gehende Gerade x, y, z in einer Ebene liegen und eine vierte Gerade w mit zwei der früheren x, y gleichfalls in einer Ebene gelegen ist, alsdann alle vier Geraden in derselben Ebene liegen müssen, ausser wenn die beiden Geraden x, y coincidiren.

Gehen wir von dieser Matrix von drei Zeilen und vier Columnen zu einer solchen von vier Zeilen und fünf Columnen über:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{vmatrix}$$

und verstehen unter den x_i, y_i, z_i, w_i homogene Punkteordinaten, so liefert unser Determinantensatz das Resultat, dass, wenn vier Punkte (1, 2, 3, 4) in einer Ebene liegen und ein fünfter (5) mit drei (1, 2, 3) dieser vier wieder in einer Ebene liegt, alle fünf Punkte in derselben Ebene gelegen sind, ausser wenn die drei Punkte (1, 2, 3) auf der Schnittcurve zweier Ebenen, einer Geraden, liegen. Ein entsprechender Satz lässt sich natürlich für Flächen zweiter Ordnung aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{11}^2 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_{11} y_{11} \\ x_1 z_1 & x_2 z_2 & \dots & x_{11} z_{11} \\ x_1 w_1 & x_2 w_2 & \dots & x_{11} w_{11} \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_{11}^2 \\ y_1 z_1 & y_2 z_2 & \dots & y_{11} z_{11} \\ y_1 w_1 & y_2 w_2 & \dots & y_{11} w_{11} \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_{11}^2 \\ z_1 w_1 & z_2 w_2 & \dots & z_{11} w_{11} \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_{11}^2 \end{vmatrix}$$

herleiten, und man erhält so:

* Auf diese geometrische Anwendung machte mich Herr Prof. Staude bereits im Sommer 1894 gütigst aufmerksam.

Wenn zehn Punkte (1, 2...10) auf einer Fläche zweiter Ordnung gelegen sind und ein elfter Punkt (11) mit 9 (1...9) der zehn Punkte gleichfalls auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt, so liegen alle elf Punkte auf derselben Fläche zweiter Ordnung, ausser wenn die neun Punkte (1...9) auf der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiter Ordnung liegen.

Allgemein ergibt sich natürlich der Satz: Wenn

$$N(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Punkte auf einer Fläche n^{ter} Ordnung liegen und ein weiterer Punkt liegt mit $N(n) - 1$ dieser Punkte auf einer Fläche n^{ter} Ordnung, so liegen alle $N(n) + 1$ Punkte auf derselben Fläche n^{ter} Ordnung, ausser wenn die $N(n) - 1$ ausgezeichneten Punkte auf der Schnittcurve zweier Flächen n^{ter} Ordnung (resp. auf ein- oder mehrfach unendlich vielen solchen Schnittcurven) liegen.

Rostock.

W. AHRENS.

XII. Beiträge zur Integralrechnung.

1. Ueber den zweiten Mittelwerthsatz.

Im Folgenden will ich einen neuen Beweis für den zweiten Mittelwerthsatz der Integralrechnung geben, der ihn als Consequenz des ersten erscheinen lässt, sobald noch die Stetigkeit des bestimmten Integrals, als Function seiner oberen Grenze angesehen, zu den Voraussetzungen tritt. Die gebräuchliche Form des Satzes lässt sich (vergl. Harnack: Differential- und Integralrechnung S. 270) sofort aus der besonderen Form

$$\int_{a_0}^x f(x)\varphi(x)dx = f(a_0)\int_{a_0}^{x'} \varphi(x)dx \quad (a_0 \leq x' \leq x)$$

ableiten, wie sie zuerst O. Bonnet (Liouv. Journ. XIV) aufgestellt hat; und diese Form wollen wir beweisen.

Wir setzen voraus, dass $f(x)$ von a_0 bis b stets positiv und abnehmend und (was keine Beschränkung involvirt) für $x = a_0$ gleich 1 sei. Die Integrale

$$\int_{a_0}^x \varphi(x)dx, \quad \int_{a_0}^x f(x)\varphi(x)dx \quad (a_0 \leq x < b)$$

sollen eine Bedeutung haben.

Wir bezeichnen mit a_1, a_2, a_3, \dots die Punkte, in denen $\varphi(x)$ zwischen a_0 und b verschwindet, in denen also die Curve $y = \varphi(x)$ die x -Achse schneidet. Zur Abkürzung sei ferner:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \int_{a_0}^x f(x)\varphi(x)dx = K(x); \quad \int_{a_0}^x \varphi(x)dx = L(x); \\ \left| \int_{a_\lambda}^x \varphi(x)dx \right| = J_\lambda(x), \quad (a_\lambda < x < a_{\lambda+1}); \quad J_\lambda(a_{\lambda+1}) = J_\lambda \end{array} \right.$$

gesetzt. Um die Anschauungen zu fixiren, nehmen wir an, dass $\varphi(x)$ zwischen a_0 und a_1 positiv sei. Dann ist:

$$2) \left\{ \begin{array}{l} L(a_{2k+1}) - L(a_{2k}) = J_{2k}, \\ L(a_{2k+2}) - L(a_{2k+1}) = -J_{2k+1}, \\ L(a_k) = J_0 - J_1 + J_2 - \dots + (-1)^{k-1} J_{k-1}. \end{array} \right.$$

Der erste Mittelwerthsatz gilt dann für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ in der Ausdehnung:

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \int_{a_\lambda}^x f(x)\varphi(x)dx = \varepsilon_\lambda(x) \int_{a_\lambda}^x \varphi(x)dx \quad (a_\lambda \leq x \leq a_{\lambda+1}) \\ \varepsilon_\lambda(x) = f[a_\lambda + \vartheta(x - a_\lambda)] \quad (0 \leq \vartheta \leq 1). \end{array} \right.$$

Der Abkürzung halber setzen wir

$$4) \quad \varepsilon_\lambda(a_{\lambda+1}) = \varepsilon_\lambda$$

und können aus der Annahme, f sei positiv und abnehmend, den Schluss ziehen, dass

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\lambda(x_1) > \varepsilon_{\lambda+1}(x_2) \quad (a_\lambda \leq x_1 \leq a_{\lambda+1} \leq x_2 \leq a_{\lambda+2}) \\ \varepsilon_\lambda > \varepsilon_{\lambda+1} \end{array} \right.$$

sei.

Gesetzt nun, die den zweiten Mittelwerthsatz darstellende Gleichung

$$6) \quad K(x) = L(x') \quad (a_0 < x' \leq x < b)$$

wäre für alle x von a_0 ab bis zu einer Grenze $x = \xi$, zu der $x' = \xi'$ gehört, richtig, dann würde sie im Allgemeinen auch noch weiter über $x = \xi$ hinaus richtig sein. Denn, wenn für wachsende x die linke Seite von 6) zu- oder abnimmt, kann man bei hinlänglich kleinen Aenderungen auch x' nach der einen oder der anderen Seite sich so ändern lassen, dass $L(x')$ ebensoviel zu- oder abnimmt.

Nur in folgenden Fällen könnte die Fortsetzbarkeit durch stetige Aenderung des x' unterbrochen sein:

I. ξ liegt zwischen $a_{2\lambda-1}$ und $a_{2\lambda}$, $K(x)$ nimmt also mit wachsendem x ab; ξ' ist $= a_{2k}$ ($k < \lambda$), $L(x')$ wird also bei wachsendem und abnehmendem x' grösser.

II. ξ liegt zwischen $a_{2\lambda}$ und $a_{2\lambda+1}$, $K(x)$ nimmt also mit wachsendem x zu; ξ' ist $= a_{2k+1}$ ($k < \lambda$), $L(x')$ wird also bei wachsendem und abnehmendem x' kleiner.

Man erkennt, dass, wenn 6) überhaupt noch weiter gilt, der Werth x' sich in den beiden Fällen sprungweise ändern muss.

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_0 J_0 - \varepsilon_1 J_1 + \dots - \varepsilon_{2k-1} J_{2k-1} < \varepsilon_0 J_0 - \varepsilon_1 J_1 + \dots - \varepsilon_{2k-1} J_{2k-1} \\ + [\varepsilon_{2k} J_{2k} - \dots - \varepsilon_{2\lambda-1}(\xi) J_{2\lambda-1}(\xi)], \end{aligned} \right.$$

das heisst, man bekommt für die linke Seite von 7)

$$9) \quad K(a_k) < K(\xi) < 0.$$

Für dieses $a_k < \xi$ gilt aber der Voraussetzung gemäss der zweite Mittelwerthsatz, und da auf dem Wege von $x = a_0$ bis $x = a_k$ die Function K von Null bis $K(a_k)$ läuft, so giebt es dazwischen ein in der eingeschlagenen Richtung letztes ξ_1 mit zugehörigem ξ'_1 , für welches

$$K(\xi) = K(\xi_1) = I(\xi'_1) \quad (\xi'_1 < \xi_1 < \xi)$$

wird. Da ferner $K(a_k)$ noch kleiner als $K(\xi)$ wird, so ist auch in diesem Falle die Fortsetzbarkeit der Gleichung 6) nachgewiesen, da ja $K(\xi_1 + d\xi_1)$, $I(\xi'_1 + d\xi'_1)$ noch geringere Werthe annehmen. Wir erkennen dabei, dass auch hier die Aenderung des Werthes ξ' sprungweise erfolgt.

Die Gleichung 6) gilt also in jedem Falle auch noch über den Punkt $x = \xi$ hinaus, und da sie zwischen a_0 und a_1 selbstverständlich ist, so hat sie für das ganze Intervall von a_0 bis b hin Giltigkeit. Ueber die Anzahl der Stellen a_1, a_2, \dots ist keine beschränkende Voraussetzung gemacht worden.

2. Berechnung bestimmter Integrale aus der Summen-Definition.

In den Lehrbüchern der Integralrechnung wird nach der Besprechung der bestimmten Integrale als Grenze von Summen meist nur als einziges Beispiel

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

dafür abgeleitet, dass die Definition auch zu wirklicher Berechnung des Integral-Werthes benutzt werden kann. Am Ausführlichsten ist noch das Werk von G. F. Meyer, welches ausser dem Angeführten auch die beiden Integrale

$$\int_a^b e^x dx, \quad \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$$

behandelt. Es ist deshalb vielleicht nicht ohne Interesse zu sehen, dass die Definition

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_a^b (x_{\lambda+1} - x_\lambda) f(\xi_\lambda), \quad (x_\lambda < \xi_\lambda < x_{\lambda+1})$$

zur Berechnung jedes Integrals verwendet werden kann, falls das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ bekannt ist.

Es sei

$$\left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x) dx &= F(x) - F(a) = y, \\ x &= \varphi(y), \quad a = \varphi(0), \end{aligned} \right.$$

dann ist:

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(y)} f(x) dx = y,$$

$$\int_{\varphi(\lambda\delta)}^{\varphi[(\lambda+1)\delta]} f(x) dx = \delta = [\varphi((\lambda+1)\delta) - \varphi(\lambda\delta)] \cdot f(\lambda\delta + \theta_2\delta), \quad (0 \leq \theta_2 \leq 1).$$

Nun setzen wir:

$$x_0 = \varphi(0) = a, \quad x_1 = \varphi(\delta), \dots \quad x_\lambda = \varphi(\lambda\delta), \dots \quad x_n = \varphi(n\delta) = b.$$

Daraus folgt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \Sigma [\varphi((\lambda+1)\delta) - \varphi(\lambda\delta)] f(\xi_\lambda);$$

nimmt man daher $\xi_\lambda = \lambda\delta + \theta_2\delta$, so geht die Summe über in

$$\lim \Sigma \delta = n\delta = F(b) - F(a).$$

So hat man z. B. für

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (b < 1)$$

$$\varphi(x) = \arcsin x; \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \sin \delta, \dots \quad x_\lambda = \sin \lambda\delta, \dots \quad b = \sin n\delta,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim \Sigma [\sin(\lambda+1)\delta - \sin \lambda\delta] \frac{1}{\sqrt{1-\xi_\lambda^2}} \\ &= \lim \Sigma 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{2\lambda+1}{2} \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi_\lambda^2}}. \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$\begin{cases} \sin \lambda\delta \leq \xi_\lambda \leq \sin(\lambda+1)\delta, \\ \cos \lambda\delta \geq \sqrt{1-\xi_\lambda^2} \geq \cos(\lambda+1)\delta, \end{cases}$$

und da $\frac{2\lambda+1}{2}$ zwischen λ und $\lambda+1$ liegt, kann man ξ_λ so wählen, dass

$$\cos \frac{2\lambda+1}{2} \delta = \sqrt{1-\xi_\lambda^2}$$

wird. Dies ergibt dann

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim \Sigma 2 \sin \frac{\delta}{2} = \lim n\delta \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\delta} = \arcsin b \cdot \lim \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\delta} \\ &= \arcsin b. \end{aligned} \right.$$

In derselben Weise kann man viele Integrale behandeln, z. B.:

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}, \dots$$

In anderen Fällen, in denen die inverse Function des unbestimmten Integrals nicht einfach genug ist, kann man mitunter auf folgende Weise zum Ziele gelangen.

Es sei $\psi(x)$ die inverse Function von $f(x)$ und $a = \psi(\alpha)$. Dann nehmen wir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \psi(\alpha), \quad x_1 = \psi(\alpha + \delta), \quad x_2 = \psi(\alpha + 2\delta), \dots \quad x_n = \psi(\alpha + n\delta), \\ \xi_0 = x_0, \quad \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \dots \quad \xi_n = x_n, \\ f(\xi_0) = \alpha, \quad f(\xi_1) = \alpha + \delta, \quad f(\xi_2) = \alpha + 2\delta, \dots \quad f(\xi_n) = \alpha + n\delta \end{array} \right.$$

und erhalten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(x) dx = \lim \Sigma [\psi(\alpha + (\lambda + 1)\delta) - \psi(\alpha + \lambda\delta)] (\alpha + \lambda\delta) \\ \quad = \lim \left\{ \alpha [\psi(\alpha + n\delta) - \psi(\alpha)] + (n-1)\delta \psi(\alpha + n\delta) - \delta \sum_{\lambda=1}^{n-1} \psi(\alpha + \lambda\delta) \right\} \\ \quad = b f(b) - a f(a) - \lim \delta \sum_{\lambda=1}^{n-1} \psi(\alpha + \lambda\delta). \end{array} \right.$$

Sobald also die Summe in dem letzten Ausdrucke sich bilden lässt, haben wir den Werth des bestimmten Integrals.

Beispielsweise sei gegeben: $\int_a^b \log x dx$.

Hier wird $x_\lambda = e^{\alpha + \lambda\delta}, \quad f(\xi_\lambda) = \alpha + \lambda\delta,$
 $a = e^\alpha, \quad b = e^{\alpha + n\delta},$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \log x dx = b \log b - a \log a - \lim \delta (e^\delta + e^{2\delta} + \dots + e^{(n-1)\delta}) e^\alpha \\ \quad = b \log b - a \log a - a \lim (e^{n\delta} - e^\delta) \frac{\delta}{e^\delta - 1} \\ \quad = b \log b - a \log a - (b - a). \end{array} \right.$$

Ebenso ergibt sich für

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^b \arcsin x dx = b \arcsin b - \lim \delta [\sin \delta + \dots + \sin (n-1)\delta] \\ \quad = b \arcsin b - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (\arcsin b) \\ \quad = b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1. \end{array} \right.$$

Giessen.

Prof. E. NETTO.

XIII. Zur Wärmeleitung in der Erde.

Im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift S. 124 flg., dann S. 192 und in diesem Jahrgange S. 60 flg. sind thermische Studien-Ergebnisse von mir mitgetheilt worden, welche ich jetzt, nach völliger Durchnahme der vorzüglichen Vorlesungen Kirchhoff's (herausgegeben durch Planck) noch fortsetze, aber auch unter den speciellen Titeln, die das spätere Wiederfinden solcher Notate erleichtern sollen.

In der zweiten Vorlesung (§ 2) handelt Kirchhoff von der Anwendung der bekannten Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$$

auf das Erdinnere und vergleicht deren Ergebnisse mit Beobachtungen, welche Quetelet in Brüssel angestellt hat. Das Integral

$$\vartheta = e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cdot \cos \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{2a}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right)$$

lässt ersehen, dass sich das Maximum oder Minimum der Periode τ in die Tiefe z fortpflanzt mit der Geschwindigkeit $2a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$.

Quetelet fand für die tägliche Periode ($\tau = 1$) diese Geschwindigkeit gleich 1 Meter und in der Tiefe $z = \frac{1}{5}$ Meter als Amplitudenverhältniss (verglichen mit der Erdoberfläche) 1 : 6. Aus

$$2a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} = 1 \quad \text{oder} \quad a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\text{Meter}}{\text{Tag}^{\frac{1}{2}}}$$

wird also das genannte Verhältniss $e^{-2\pi z}$, oder $e^{-0,4\pi}$, oder $e^{-\frac{1}{2}}$, oder 1 : 3,5, das ist beinahe doppelt so gross als 1 : 6.

„Zuverlässiger sind die Beobachtungen der jährlichen Periode“ $\tau = 365$, wofür Quetelet die Geschwindigkeit 0,0464 Meter pro Tag fand. Die Theorie liefert demnach

$$2a\sqrt{\frac{\pi}{365}} = 0,0464 \quad \text{oder} \quad a = \frac{0,44}{\sqrt{\pi}},$$

was dem vorigen Werthe $a = \frac{0,5}{\sqrt{\pi}}$ nur um 12 Procente nachsteht.

Ich berechnete nun mit ersterem Werthe von a die Amplituden der obigen zweiten Gleichung für die jährliche Periode und für die von Kirchhoff nach Quetelet angegebenen Tiefen

$$\text{Meter } 0,188 \quad 0,75 \quad 1,95 \quad 3,90 \quad 7,80$$

und fand beziehungsweise

$$1 : 1,07 \quad 1 : 1,32 \quad 1 : 2,07 \quad 1 : 4,27 \quad 1 : 18.$$

Angegeben sind die jährlichen Schwankungen der Temperatur

$$\text{Grade: } 13,28 \quad 11,30 \quad 7,69 \quad 4,49 \quad 1,43.$$

Es muss also beispielsweise für das erste Paar der beiden letzten Zahlenreihen $1,32 : 1,07 = 13,28 : 11,30$, oder überhaupt, es müssten die Quotienten je zweier Zahlen dieser Reihen gleich sein. Diese sind aber beziehungsweise

$$14,2 \quad 14,9 \quad 15,9 \quad 19,2! \quad 25,7!$$

Man sieht, dass eine ziemlich gute Uebereinstimmung nur herrscht in den drei ersten dieser fünf Producte, aber nicht mehr hinsichtlich der beiden letzten. Kirchhoff hat vielleicht nur bei jenen eine Controle vorgenommen, da er diese Unterscheidung nicht macht.

Oder ich will einmal annehmen, dass statt der letzten Reihe ein und dieselbe Zahl

15

zutreffen würde; so würden statt der vorletzten Reihe durch Multiplication der 15 mit den betreffenden Zahlen der drittletzten Reihe kommen

Grade: 14,0 11,4 7,2 3,5 0,8.

Die im Buche erwähnten „wenigen Zehntel von 1° C.“ als Abweichung treffen also auch nur wenig zu.

XIV. Erwärmung des Wassers durch Zusammendrücken.

Geschieht diese Erwärmung adiabatisch, was bei genauer Betrachtung ohnehin vorausgesetzt werden muss, so findet die Thermodynamik

$$d\tau = \frac{\tau}{\kappa \cdot c_p} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot dp,$$

wo $p\tau$ den Druck auf die Fläche 1, das spezifische Volum, die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme des Körpers bei constantem Druck und κ das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten.

Kirchhoff's Vorlesungen bringen diese Gleichung in VI § 7 kurz vor dessen Schluss, und in VII § 2, am Schlusse dieses Paragraphen, werden Joules Versuche mit Wasser angeführt, bei welchen $dp = 25$ Atmosphären war und beobachtet wurde

$$\begin{aligned} \text{für} \quad d\tau &= -0,008 \text{ C.}, \quad +0,020, \quad +0,054 \\ \tau &= 274,2, \quad 284,7 \quad 303,0, \end{aligned}$$

„in fast völliger Uebereinstimmung mit der Theorie“.

Es interessirte mich, diese theoretische Rechnung anzustellen, und ich werde hierüber jetzt berichten.

Da sich bei diesen Resultaten Unterschiede von vier Promille als gegenstandslos erweisen, so nehme ich $c_p = 1$ in den drei Fällen. Und da auch ein Prozent nichts gilt, so sei auch das Volum von ein Kilogramm Wasser durchweg $v = 0,001$ Cubikmeter; dasselbe kommt durch

$$\left(\frac{\partial v}{v \partial \tau} \right) \cdot v$$

herein, worin ich für die eingeklammerte Grösse den aus der Volkmann'schen Tabelle bei der Temperatur-Erhöhung um 1° von den drei fraglichen Temperaturen aus sich ergebenden Ausdehnungs-Coefficienten setze

$$\alpha = -0,00003, \quad +0,00011, \quad +0,00047.$$

Für eine Atmosphäre ist 10334 gesetzt und $\kappa = 425$; das bei beiden herzusetzende g (Erdbeschleunigung) entfernt sich aus dem Ausdrucke. Der für die drei Fälle constante Factor

$$\frac{1}{\kappa \cdot c_p} \cdot v \cdot dp \quad \text{oder} \quad \frac{1}{425} \cdot 0,001 \cdot 25 \cdot 10334$$

ergiebt den Logarithmus (mit unnöthig vielen Decimalen)

0,783819 - 1

und, das Product der je zwei sich ändernden Factoren $\tau \cdot \alpha$ (siehe oben) hinzugefügt, es findet sich nach der Delogarithmirung beziehungsweise

$$d\tau \text{ berechnet} = - 0,005, + 0,019, + 0,087.$$

Vergleicht man diese Zahlen mit den beobachteten, die oben angegeben sind, so findet man eine „fast völlige Uebereinstimmung“ bei der mittleren, während die beiden anderen berechneten um fast gleichviel höher sind (60 Procent) als die beobachteten.

Gleichwohl kann man auch da noch von einer gewissen Uebereinstimmung sprechen (hinsichtlich der Vorzeichen und der Decimalstellen), und, dass die Beobachtung hinter der Berechnung zurückbleibt, ist bei der Schwierigkeit der anzustellenden Messungen nicht verwunderlich.

Interessant ist auch noch für den gegenwärtigen Betreff, was Kirchhoff sogleich im nächsten Paragraphen (VII § 3) folgen lässt über die Abkühlung von Drähten durch Zug und das durch Joule ziemlich bekannt gewordene Gegentheil beim Kautschuk, wovon ich unter besonderem Titel noch handeln will.

XV. Abkühlung von Drähten durch Zug.

Unmittelbar auf die Formel von der (adiabatischen) Erwärmung eines Körpers durch Druck folgt in Kirchhoff's Buch (herausgegeben von Planck) die Formel (VII § 3)

$$d\tau = - \frac{\tau}{\kappa c_p} \cdot \frac{\partial l}{\partial \tau} \cdot dP,$$

wo $P l \tau$ den Zug (nicht auf die Fläche 1, sondern absolut), die spezifische Länge, die absolute Temperatur, c_p die spezifische Wärme des Körpers bei constantem Druck und κ das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten.

Clausius hat dieselbe Gleichung in VIII § 9 seiner „mechanischen Wärmetheorie“ (2. Aufl. 1876) und sagt, dass „ihre Richtigkeit durch Versuche von Joule bestätigt“ wurde (1859). Kirchhoff berichtet genauer, dass die Formel in „besonders auffallender Weise an Streifen vulkanisirten Kautschuks bestätigt“ wurde. Hierbei kommen bekanntlich negative thermische Längsdehnungs-Coefficienten $\frac{\partial l}{l \cdot \partial \tau}$ zum Vorschein, und die somit gemäss der Formel resultirende Erwärmung statt der Abkühlung durch Zug hat sich experimentell ergeben.

Aber Kirchhoff fährt fort: „Was die Grösse der beobachteten Temperaturänderungen betrifft, so stimmte diese, auch bei den Metallen, nicht ganz mit den theoretisch berechneten überein; ja bei den Versuchen mit Metalldrähten fand Edlund diese Temperaturänderungen nur etwa gleich zwei Drittel der theoretisch berechneten. Der Grund hierfür ist noch nicht aufgeklärt.“ Und nun folgen acht Zeilen Text über die muthmasslichen störenden Einflüsse.

Dazu kann ich nun Zweierlei hinzufügen.

Fürs Erste habe ich auch bei den von Kirchhoff erwähnten drei Messungen Joules über die Erwärmung des Wassers durch Druck nachgewiesen, dass zwei derselben ein Zurückbleiben der beobachteten Temperaturänderung hinter der berechneten ergeben haben und zwar zufällig auch gerade um denselben Betrag.

Zweitens kann man bei den gezogenen Drähten noch ganz bestimmt eine Ursache angeben, welche die beobachtete Temperatur-Minderung macht, als die nach obiger Formel berechnete. Durch den Zug nach der Länge des Drahtes werden nämlich die Querdimensionen desselben vermindert, also gewissermaassen zusammengedrückt und der Draht in Folge dessen auch erwärmt. Dieser Einfluss kommt von der durch die Formel berechneten Wirkung in Abzug.

Dürfte man für die zweite Elasticitätsconstante, die sogenannte Quercorrection, genauer deren Verhältniss zur Längsdilatation, die Zahl $\frac{1}{4}$ rechnen, so wäre das für den Querschnitt vom doppelten Erfolge, $\frac{1}{2}$, und es ergäbe sich als Resultat der Erkaltung und Erwärmung eine Erkaltung halb so gross als die oben genannte theoretische. Bei geringerer Quercorrection, wie sie an den schon mehrmals gezogenen Drähten nicht auffällig ist, wird der besprochene Abzug $\frac{1}{3}$ und noch weniger der theoretischen Erkaltung betragen. Abgesehen von den sonstigen Gründen, welche die Beobachtung hinter der Theorie zurückbleibend erwarten lassen.

Ich benutze diesen Anlass, um für die Aufnahme der zweiten Elasticitätsconstanten neben der ersten (dem Elasticitätsmodul) in die Physikbücher neuerdings das Wort zu nehmen (siehe die letzten Jahrgänge des im Jahre 1891 abgeschlossenen Repertoriums der Physik). So z. B. reproducirt u. A. auch der Leitfaden der Physik von Beetz-Henrici (11. Aufl. 1893) die Vergleichung der thermischen mit der mechanischen Längsdehnung (§ 161). Und doch haben beide nur diesen äusseren Schein, möchte ich mich ausdrücken, gemein. Denn thermisch ist mit der Längsdehnung auch die Vergrösserung, mechanisch dagegen die Verkleinerung der Querdimensionen verknüpft.

Wenn man einen solchen Vergleich anstellen will, wie er ja didaktisch ganz empfehlenswerth ist, so muss man die cubische thermische Ausdehnung mit der mechanischen bei dreiseitigem und gleichem Normalzug des isotrop und etwa würfelförmig gedachten Körpers vergleichen. Man erhält dann einerseits $a^3(1 + Kt)$ oder $a^3(1 + 3kt)$,

wo K der cubische und k der lineare Ausdehnungs-Coefficient; andererseits

$$a^3 \left[1 + \frac{3p}{\varepsilon} \left(1 - \frac{2}{n} \right) \right],$$

wenn p , wie der Elasticitätsmodul ϵ , beispielsweise Kilogramme durch Quadratmillimeter und $n > 2$ die zweite Elasticitätsconstante bedeutet.

Bei gleich gross gedachter Volumzunahme ist dann

$$p \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \epsilon kt;$$

die Nichtberücksichtigung von n bedeutet die Annahme $n = \infty$, ausserdem, dass hier der Zug p auf alle drei Würfelseitenpaare ausgeübt wird. Bei bloss einem dieser Züge würde der Factor 3 bei p wegfallen; aber wie schon gesagt sind dann der thermische und mechanische Vorgang wesentlich verschieden.

XVI. Nachtrag zur barometrischen Höhenmessungsformel

(im vorigen Jahrgange der Zeitschrift).

Kohlrausch giebt in seinem Leitfaden der praktischen Physik als Annäherungsformel, bis zu 1000 Metern gültig,

$$h = 16000 \frac{b_0 - b_1}{b_0 + b_1}.$$

In einer Mittheilung über diesen Gegenstand (Rep. d. Phys. 1889) setzte ich einfacher statt des Nenners $2b_1$; dann wird im äussersten Falle

$$1000 = 8000 \cdot \frac{b_0 - b_1}{b_1} \quad \text{oder} \quad b_0 - b_1 = \frac{1}{8} b_1, \quad b_1 = \frac{8}{9} b_0.$$

Setzt man dagegen $2b_0$ im Nenner, so wird

$$b_0 - b_1 = \frac{1}{8} b_0, \quad b_1 = \frac{7}{8} b_0.$$

Der Unterschied dieser beiden Werthe von b_1 beträgt also höchstens 10 Millimeter, wenn b_0 über 700, also der Unterschied der obigen Formel von

$$h = 8000 \frac{b_0 - b_1}{b_1}, \quad \text{oder von} \quad h = 8000 \frac{b_0 - b_1}{b_0}$$

höchstens 5 Millimeter.

In einer späteren Mittheilung (Rep. d. Phys. 1890) kam ich auf diese Annäherung nicht zu sprechen; desgleichen nicht in der letzten, die ich im vorigen Jahrgang dieser Zeitschrift veröffentlichte. Diesem Nachtrage füge ich heute noch den Temperaturfactor

$$(1 + 0,004t)$$

für die rechte Seite der Gleichung von h bei.

Augsburg.

Prof. Dr. Kurz.

XVII. Preisaufgaben der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

1. Für das Jahr 1895.

Die Gesellschaft wünscht

eine kritische Zusammenstellung der bisherigen Hauptergebnisse über die an Krystallen beobachteten künst-

lich erzeugten und natürlich vorkommenden Aetzerscheinungen, sowie die Ausführung weiterer Untersuchungen, welche geeignet sind, das Zustandekommen und die speciellere Ausbildungsweise derselben zu erläutern, und insbesondere die Beziehungen zwischen Aetzerscheinungen und Molecularstructur aufzuklären.

Preis 1000 Mark.

2. Für das Jahr 1896.

Wenn man sich heute — und es geschieht das mit Recht — einer besseren und tieferen Kenntniss der Entwicklungsgeschichte berührt, als man sie früher besass, so gilt das doch zunächst nur in Bezug auf die äussere Erscheinung und die Reihenfolge der Vorgänge, welche den Aufbau des thierischen Organismus ermöglichen. Die physiologischen Bedingungen dieser Vorgänge sind bis bis jetzt erst wenig erforscht worden. Nur so viel steht fest, dass letztere nicht ausschliesslich durch gewisse Grundfunctionen bestimmt sind, sondern auch von äusseren Reizursachen abhängen, und durch Veränderung derselben in dieser oder jener Weise selbst abgeändert werden.

In der Hoffnung nun, die physiologische Morphologie zu fördern und zur Lösung ihrer Probleme anzuregen, wünscht die Gesellschaft

eine durch Darstellung der bisher gewonnenen Ergebnisse eingeleitete Experimentaluntersuchung über den Einfluss, den die verschiedentlich abgeänderten Lebensbedingungen auf die Entwicklungsvorgänge eines (höheren oder niederen) Thieres ausüben.

Preis 1000 Mark.

3. Für das Jahr 1897.

Die von Monge, Ampère und Darboux herrührenden Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung finden bekanntlich nur für solche Gleichungen Anwendung, die mit anderen Gleichungen Lösungen gemein haben, welche nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Es geht andererseits aus Lie's Untersuchungen über unendliche Gruppen hervor, dass Gleichungen, die eine unendliche Gruppe von Berührungs-Transformationen gestatten, im Allgemeinen zu anderen Gleichungen in der soeben besprochenen Beziehung (Involutionsbeziehung) stehen.* Die Gesellschaft wünscht,

dass die aus dieser Bemerkung fliessenden Integrationsmethoden entwickelt und an möglichst instructiven und vollständig durchgeführten Beispielen illustriert werden.

Preis 1000 Mark.

* Vergl. Darboux: Journal de l'école normale 1870. — Lie: Berichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1891—1894.

4. Für das Jahr 1898.

Da die von Poisson, Green, Gauss, Dirichlet u. A. gegebene Theorie der dem Newton'schen Gesetze entsprechenden Kräfte einen der wichtigsten Theile der ganzen mathematischen Physik repräsentirt, andererseits aber die absolute Giltigkeit des Newton'schen Gesetzes (namentlich für sehr kleine und für sehr grosse Entfernungen) mancherlei Bedenken ausgesetzt ist, so liegt der Gedanke nahe, die Theorie der Fernwirkungen in grösserer Allgemeinheit zu entwickeln und dabei, neben dem Newton'schen auch andere Gesetze der Fernwirkung in Betracht zu ziehen.

Ein solcher Versuch ist schon im Jahre 1832 von Green gemacht worden in seinen *Mathematical Investigations concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid*.* Statt der Newton'schen Kräfte vom Gesetze $\frac{1}{r^2}$ werden dort ganz allgemein Kräfte vom Gesetze $\frac{1}{r^n}$ in Betracht gezogen. Doch zeigen sich in jener ebenso wichtigen wie scharfsinnigen Abhandlung mancherlei Lücken und Unklarheiten, auf welche Green zum Theil schon selbst aufmerksam gemacht hat. Auch sind daselbst gewisse Aufgaben (wie z. B. die Aufgabe der elektrischen Vertheilung in einem Ellipsoid oder in einer Kreisscheibe) nur ganz beiläufig besprochen worden. Demgemäss wünscht die Gesellschaft eine wirkliche Lösung dieser von Green in seiner Abhandlung nur angedeuteten Aufgaben, sowie auch die Ausfüllung und Aufklärung der in der genannten Schrift vorhandenen Lücken und Dunkelheiten.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1895 Geh. Bergrath Professor Dr. F. Zirkel, Thalstrasse Nr. 33) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die „Leipziger Zeitung“ im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Hofrath Prof. R. LEUCKART, Präses.

* Transactions of the Cambridge Philos. Society 1833, wieder abgedruckt in den *Mathematical Papers of G. Green* p. 117—183.

XI.

Metrische Strahlencongruenzen bei einer cubischen Raumcurve.

Von

Dr. H. KRÜGER

in Pless O.-S.

Bei einem Kegelschnitt liegen bekanntlich die Mitten paralleler Sehnen auf einer Geraden, und die Gesamtheit dieser Geraden bildet das Strahlenbüschel der Durchmesser. In analoger Weise gelangt man zu gewissen Strahlencongruenzen, wenn man die singulären Punkte von Schnittpunktsdreiecken einer cubischen Raumcurve betrachtet, deren Ebenen einander parallel sind. Als ausgezeichnete Punkte eines Dreiecks bezeichnen wir dabei

1. den Schwerpunkt,
2. den Höhenpunkt (Schnittpunkt der drei Höhen),
3. den Mittelpunkt des Umkreises.

I. Schwerlinie, Höhenpunktlinie, Mittellinie einer cubischen Raumcurve.

1. Der Theorie der Kegelschnitte entnehmen wir folgende Sätze:

In einem System Poncelet'scher Dreiecke, die einem allgemeinen Kegelschnitt \mathcal{C}^2 eingeschrieben und gleichzeitig einer Parabel \mathfrak{P}^2 umschrieben sind, beschreiben 1. die Höhenpunkte, 2. die Schwerpunkte, 3. die Mittelpunkte der Umkreise je eine Gerade.¹⁾

Im Fall 1 erhalten wir bekanntlich als Ort der Höhenpunkte die Leitlinie der Parabel. Um den Fall 2 zu beweisen, setzen wir vorerst als umschriebenen Kegelschnitt \mathcal{C}^2 einen Kreis voraus. Nun theilt der Schwerpunkt jedes Dreiecks den Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises und dem Höhenpunkt im Verhältniss 1 : 2 (die drei singulären Punkte liegen auf der Euler'schen Geraden). Da also die Höhenpunkte auf einer Geraden liegen, so erfüllen auch die Schwerpunkte aller Poncelet'schen Dreiecke eine zweite Gerade, welche der Leitlinie parallel läuft und ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Umkreises im Verhältniss 1 : 2 theilt.

Projicirt man jetzt die ganze Figur in der Ebene ε_1 durch Parallelstrahlen auf eine andere Ebene ε_2 , so geht der umschriebene Kreis in eine Ellipse, die Parabel in eine andere Parabel über, und jeder Schwerpunkt eines Dreiecks in ε_1 wird in den Schwerpunkt des entsprechenden Dreiecks in ε_2 projicirt. Folglich bleibt die Eigenschaft der Schwerpunkte, eine Gerade zu bilden, auch für eine umschriebene Ellipse erhalten, und wir können sie nach dem Princip der Continuität auf einen allgemeinen Kegelschnitt ausdehnen.

Der Höhenpunkt und der Schwerpunkt beschreiben weiter auf ihrer bezüglichen Geraden zwei projectiv ähnliche Punktreihen, und die Eulerschen Geraden, welche je zwei entsprechende Punkte verbinden, umhüllen daher eine Parabel, zu deren Tangenten die Schwerpunktslinie und Höhenpunktslinie gehören. Die Mittelpunkte der Umkreise aller Dreiecke liegen aber derart auf den Euler'schen Geraden, dass der Schwerpunkt den Abstand zwischen Kreismittelpunkt und Höhenpunkt im Verhältniss 1:2 theilt. Folglich beschreiben diese Mittelpunkte eine dritte feste Tangente der Parabel, womit auch der Fall 3 bewiesen ist.

2. Die vorstehenden Sätze lassen sich jetzt unmittelbar auf eine cubische Raumcurve C^3 übertragen, als welche wir im Allgemeinen eine cubische Hyperbel mit drei reellen unendlich fernen Punkten $\alpha_\infty, \beta_\infty, \gamma_\infty$ voraussetzen. Legt man zu einer beliebigen Ebene ε ein Büschel paralleler Ebenen, so schneidet dieses aus C^3 eine Schaar Dreiecke aus. Wir projiciren die letzteren von einem unendlich fernen Punkt α_∞ der Raumcurve C^3 auf die feste Ebene ε , dann bilden die Projectionsstrahlen den einen (hyperbolischen) Cylinder, welcher sich durch C^3 legen lässt, oder die cubische Raumcurve wird in einen Kegelschnitt \mathcal{C}^2 (Hyperbel) in ε projicirt, die Schnittpunktsdreiecke auf C^3 aber in ein System von jenen bez. congruenten Dreiecken, welche dem Kegelschnitt \mathcal{C}^2 eingeschrieben sind. Die Seiten der Schnittpunktsdreiecke auf der Raumcurve C^3 sind Secanten derselben, welche zu der Ebene ε parallel laufen, das heisst ihre unendlich ferne Gerade g_∞ schneiden; die Seiten erzeugen daher eine Regelfläche vierter Ordnung R^4 mit C^3 als Doppellinie.²⁾ Diese Regelfläche R^4 wird aber von dem Doppelpunkte α_∞ aus in einen parabolischen Cylinder zweiter Ordnung projicirt, das heisst, die Seiten der Schnittpunktsdreiecke umhüllen einen parabolischen Cylinder, ihre Projectionen in ε folglich eine Parabel \mathfrak{P}^2 . Das räumliche System der Schnittpunktsdreiecke auf C^3 ist somit übertragen in ein congruentes ebenes System Poncelet'scher Dreiecke, die dem Kegelschnitt \mathcal{C}^2 eingeschrieben und der Parabel \mathfrak{P}^2 umschrieben sind. Mit den Dreiecken werden aber zugleich ihre singulären Punkte bezüglich projicirt, so dass wir für diese aus dem unter 1. bewiesenen Satze folgern: die Schwerpunkte, Höhenpunkte und Mittelpunkte der Umkreise in den Schnittpunktsdreiecken auf C^3 liegen in je einer Ebene durch α_∞ . Derselbe Schluss wiederholt sich für den zweiten un-

endlich fernen Punkt b_∞ der Raumcurve C^3 als Projectionscentrum; die drei Linien, welche die drei ausgezeichneten Punkte der Schnittpunktsdreiecke erfüllen, gehören auch je einer Ebene durch b_∞ an. Die so construirten drei Ebenenpaare durch a_∞ und b_∞ schneiden sich bezüglich in drei Geraden, und wir erhalten den Satz:

Ein Büschel paralleler Ebenen schneidet aus einer cubischen Raumcurve C^3 ein System von Dreiecken aus. Die Schwerpunkte, die Höhenpunkte, die Mittelpunkte der Umkreise in den Schnittpunktsdreiecken beschreiben dabei je eine Gerade, die wir kurz bezüglich als Schwerlinie s , Höhenpunktlinie h und Mittellinie m bezeichnen.³⁾

Diese drei Geraden bilden drei Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloids, dessen andere Regelschaar die Eulerschen Geraden der Schnittpunktsdreiecke darstellt, und die von jenen drei Geraden im Verhältniss 1:2 getheilt wird.

II. Das System der Schwerlinien einer cubischen Raumcurve.

1. Jedem Büschel von Parallelebenen oder auch jeder Achse x_∞ eines solchen in der unendlich fernen Ebene ε_∞ ist nach I, 2 eine Schwerlinie s der Raumcurve C^3 zugeordnet. Die Gesamtheit der Schwerlinien bildet daher eine ∞^2 Mannigfaltigkeit im Raume oder eine Strahlencongruenz. Um den Charakter derselben zu ermitteln, projeciren wir in der obigen Weise das veränderliche System der Schnittpunktsdreiecke, welches das beliebige Parallelebenenbüschel $[x_\infty]$ aus der Curve C^3 ausschneidet, sowohl von ihrem unendlich fernen Punkte a_∞ , als auch von ihrem unendlich fernen Punkte b_∞ auf eine beliebige, aber feste Ebene ε . Das Projectionenbild in ε ist dann bez. a_∞ eine Schaar Poncelet'scher Dreiecke, die einem Kegelschnitt \mathcal{C}_a^2 eingeschrieben und einer Parabel \mathcal{P}_a^2 umschrieben sind, und deren Schwerpunkte eine Gerade a_ε beschreiben, anderseits bez. b_∞ eine entsprechende Schaar von Dreiecken, die einem Kegelschnitt \mathcal{C}_b^2 eingeschrieben und einer Parabel \mathcal{P}_b^2 umschrieben sind mit der Schwerpunktsgeraden b_ε . Und zwar sind die Geraden a_ε und b_ε die Projectionen der Schwerlinie s_ε , welche dem Ebenenbüschel $[x_\infty]$ zugeordnet ist, oder umgekehrt: die Schwerlinie s_ε ist die Schnittlinie der Verbindungsebenen $(a_\varepsilon a_\varepsilon)$ und $(b_\varepsilon b_\varepsilon)$.

Lassen wir jetzt die Achse x_∞ in der Ebene ε_∞ sich verändern, so bleiben die beiden Kegelschnitte \mathcal{C}_a^2 und \mathcal{C}_b^2 fest als Durchschnittsfiguren der Ebene ε mit den beiden Cylindern, die von a_∞ und b_∞ aus durch die Raumcurve C^3 gehen. Dagegen verändern sich die beiden Parabeln \mathcal{P}_a^2 und \mathcal{P}_b^2 als Projectionen der veränderlichen Regelfläche R^4 , die x_∞ zur Leitlinie hat (vergl. I, 2) und mit ihnen die beiden Schwerlinien a_ε und b_ε . Dabei bleiben für jede Parabel \mathcal{P}_a^2 einerseits und \mathcal{P}_b^2 anderseits ausser der unendlich fernen Geraden g_ε ihrer Ebene ε noch je zwei Tangenten unverändert:

die Asymptote der Raumcurve C^3 in a_∞ , t_a^∞ schneidet nämlich den Kegelschnitt \mathbb{C}^3_a in einem Punkte a , und die beiden Strahlen von a aus nach den unendlich fernen Punkten des Kegelschnitts \mathbb{C}^3_a bilden mit g_∞ die Projection des Schnittpunktdreiecks $a_\infty b_\infty c_\infty$, berühren daher die Parabel \mathbb{P}_a ; das Analoge gilt für die Parabel \mathbb{P}_b . Die einzelnen Parabeln \mathbb{P}_a und \mathbb{P}_b sind also je einem festen Dreieck eingeschrieben oder bilden je ein specielles Kegelschnittgewebe, so dass die Glieder der beiden Gewebe eindeutig auf einander bezogen sind. Ferner entspricht, wie leicht ersichtlich, jeder Schaar (\mathbb{P}_a) eine Schaar (\mathbb{P}_b); zwischen den beiden Parabelgeweben besteht daher eine collineare Verwandtschaft. Durch die beiden so definirten Parabelgewebe werden nun auch die den einzelnen Parabeln \mathbb{P}_a und \mathbb{P}_b zugeordneten Schwerlinien a_ε und b_ε , welche das Strahlenfeld der Ebene ε erfüllen, projectiv auf einander bezogen, indem jeder Parabelschaar (\mathbb{P}_a) und (\mathbb{P}_b) ein Strahlenbüschel (a_ε) und (b_ε) entspricht. Das Letztere folgt daraus, dass zunächst die Leitlinien einer Parabelschaar (die einem Dreieck eingeschrieben ist) ein zu ihr projectives Strahlenbüschel bilden, was dieselbe Eigenschaft für die Schwerlinien der umschriebenen Poncelet'schen Dreieckssysteme nach sich zieht. Die beiden Strahlenfelder $\varepsilon(a_\varepsilon)$ und $\varepsilon(b_\varepsilon)$ sind somit collinear verwandt; folglich gilt dasselbe für die sie projectirenden Ebenenbündel $a_\infty(a_\varepsilon)$ und $b_\infty(b_\varepsilon)$. Für die Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare der beiden collinearen Bündel, das heisst für die Schwerlinien s_ε der Raumcurve C^3 , gilt daher der Satz:

Die Schwerlinien s_ε einer cubischen Raumcurve C^3 bilden eine Strahlencongruenz erster Ordnung und dritter Klasse oder das Secantensystem einer anderen cubischen Raumcurve S^3 .

2. Die gefundene Leiteurve S^3 geht zunächst durch die Mittelpunkte a_∞ und b_∞ der beiden collinearen Bündel, daher nach Analogie auch durch den dritten unendlich fernen Punkt c_∞ von C^3 . Ferner gehört zu ihren Secanten die singuläre Schwerlinie, welche die Schmiegungepunkte der beiden einzigen parallelen Schmiegungeebenen von C^3 verbindet, da eine Schmiegungeebene die Raumcurve C^3 in einem Null-Dreieck mit coincidentem Schwerpunkt schneidet. Diese besondere Schwerlinie ist also zugleich Secante der Raumcurve C^3 ; sie geht durch den Mittelpunkt m derselben und soll kurz als Mittelsecante von C^3 bezeichnet werden.

Für die Lage der Leiteurve S^3 ergibt sich demnach:

Die Leiteurve S^3 hat mit der ursprünglichen Raumcurve C^3 die drei unendlich fernen Punkte und die Mittelsecante gemein.

Zur vollständigen Bestimmung der Curve S^3 genügt es, noch ihre Schnittpunkte mit der Mittelpunktsebene μ von C^3 aufzusuchen (Ort der Mittelpunkte aller der Raumcurve C^3 eingeschriebenen Flächen zweiter Ordnung). In der Ebene μ besteht folgende Configuration von Punkten⁴⁾: Die Ebene μ schneidet die Raumcurve C^3 in drei Punkten a_0 , b_0 , c_0 und

ihre Asymptoten t_a , t_b , t_c bez. in drei Punkten a_1 , b_1 , c_1 , so dass die beiden Dreiecke $a_0 b_0 c_0$ und $a_1 b_1 c_1$ in Bezug auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt m (den sogenannten Mittelpunkt von C_3) perspectiv liegen, und zwar verhält sich:

$$\overline{m a_1} : \overline{m a_0} = \overline{m b_1} : \overline{m b_0} = \overline{m c_1} : \overline{m c_0} = 1 : -3.$$

Die Gerade $a_0 a_1$ ferner (ebenso $b_0 b_1$ und $c_0 c_1$), von Schröter als „Durchmesser“ von C^3 bezeichnet, ist der Schnittlinie der entsprechenden Asymptotenebene τ_a mit ϵ_∞ , $|\tau_a \epsilon_\infty|$ conjugirt und enthält die Mittelpunkte aller zu τ_a paralleler Sehnen der Raumcurve C^3 . Jede Ebene ξ durch einen solchen Durchmesser $a_0 a_1$ trifft daher die Curve C^3 in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt auf dem Durchmesser $a_0 a_1$ liegt, das heisst, dem zur Ebene ξ parallelen Ebenenbüschel ist eine Schwerlinie s_ξ zugeordnet, welche den Durchmesser $a_0 a_1$ schneidet. Andererseits muss eine derartige Schwerlinie s_ξ in ϵ_∞ der zu $a_0 a_1$ conjugirten Geraden $|\tau_a \epsilon_\infty|$ begegnen, auf welcher der harmonische Pol der unendlich fernen Geraden von ξ in Bezug auf das Dreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$ liegt (der Grenzfall des Schwerpunktes). Dreht man jetzt die Ebene ξ um den Durchmesser $a_0 a_1$ als Achse, so durchbohren die entsprechenden Schwerlinien s_ξ die beiden Geraden $a_0 a_1$ und $|\tau_a \epsilon_\infty|$ in zwei projectiven Punktreihen und beschreiben daher die eine, zweifach schneidende Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids, welches durch die Leitcurve S^3 der Schwerlinien geht.

Folglich gehört $a_0 a_1$ und analog $b_0 b_1$, ebenso wie $c_0 c_1$, zu den Geraden, welche die cubische Raumcurve S^3 in je Einem Punkte treffen, das heisst, die drei Durchmesser enthalten die gesuchten Schnittpunkte der letzteren mit der Ebene μ .

Weiter ist jede Asymptote t_a der Raumcurve C^3 als eine besondere Schwerlinie derselben zu betrachten: eine beliebige Ebene π durch t_a schneidet nämlich die Curve C^3 noch in einem endlichen Punkte p , und für das singuläre Schnittpunktsdreieck $a_\infty a_\infty p$ stellt jeder Punkt auf t_a den Schwerpunkt dar, während die zur Ebene π planparallelen Schnittpunktsdreiecke sämmtlich ihren Schwerpunkt in a_∞ besitzen. Die Asymptote t_a von C^3 ist daher eine Bisecante der Raumcurve S^3 , und da diese Secante die einfach schneidende Gerade $a_0 a_1$ in dem Punkte a_1 trifft, so liegt a_1 auf der Curve S^3 , und nach Analogie gilt dasselbe von den Punkten b_1 und c_1 , das heisst:

Die Leitcurve S^3 schneidet die Mittelpunktsebene μ von C^3 in den drei Punkten a_1 , b_1 , c_1 , worin die drei Asymptoten der Raumcurve C^3 der Ebene μ begegnen.

Durch diese drei Punkte, in Verbindung mit den drei unendlich fernen a_∞ , b_∞ , c_∞ ist somit die cubische Raumcurve S^3 eindeutig bestimmt, und zwar ergibt sich aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke $a_1 b_1 c_1$ und $a_0 b_0 c_0$ folgender einfache Zusammenhang der beiden Raumcurven S^3 und C^3 :

Die Leitcurve S^3 und die ursprüngliche Raumcurve C^3 werden von ihrem gemeinsamen Mittelpunkt m aus durch ein und denselben Kegel dritter Ordnung K^3 projectirt, so dass die Projectionsstrahlen in m nach dem constanten Verhältniss 1:—3 getheilt werden, oder, anders ausgedrückt:

Die beiden Raumcurven S^3 und C^3 sind ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt m , so dass sich entsprechende Strecken wie 1:—3 verhalten.

3. Noch von anderer Seite her gelangt man zu der Leitcurve S^3 , wenn man von den drei Asymptoten der Raumcurve C^3 ausgeht. Ein Büschel von parallelen Ebenen schneidet die letzteren in Dreiecken, deren Ecken drei projective, und zwar ähnliche Punktreihen durchlaufen. Daraus folgt ohne Weiteres: die Schwerpunkte dieser Schnittpunktsdreiecke beschreiben ebenfalls eine Gerade, eine Schwerlinie in Bezug auf die drei Asymptoten t_a, t_b, t_c . Die so definirte Gerade hat aber mit der entsprechenden Schwerlinie bezüglich der cubischen Raumcurve C^3 den unendlich fernen Punkt und ausserdem den diesem unendlich nahen Punkt auf der Geraden gemeinsam; die beiden Schwerlinien sind daher identisch, oder:

Das System der Schwerlinien in Bezug auf die cubische Raumcurve C^3 ist identisch mit demjenigen bezüglich ihrer drei Asymptoten t_a, t_b, t_c .⁵⁾

Im Anschluss daran ergeben sich noch die Sätze:

Eine beliebige Ebene schneidet eine cubische Raumcurve und ihre drei Asymptoten in zwei cobarycentrischen Dreiecken, das heisst mit gemeinsamen Schwerpunkt.

Jede Schmiegungebene einer cubischen Raumcurve schneidet die drei Asymptoten derselben in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt der zugehörige Schmiegungepunkt auf der Raumcurve ist.

Legt man jetzt eine Gerade g , welche die drei Asymptoten t_a, t_b, t_c bez. in α, β, γ trifft, so stellt die Punktgruppe $(\alpha\beta\gamma)$ mit ihrem Schwerpunkt ξ ein in eine Gerade degenerirtes Schnittpunktsdreieck der drei Asymptoten vor. Jede Ebene durch g begegnet daher nach vorigem Satze der Raumcurve C^3 in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt mit ξ zusammenfällt, oder auch: Die ∞^1 Schwerlinien, welche dem Ebenenbüschel $g(\xi)$ durch eine solche Gerade g zugeordnet sind, gehen sämmtlich durch ξ . Der Punkt ξ ist hiernach ein singulärer Punkt der durch die Schwerlinie von C^3 gebildeten Strahlencongruenz und liegt auf der Leitcurve S^3 derselben.

Dies führt zu dem Satze:

Die Geraden g , welche die drei Asymptoten einer cubischen Raumcurve C^3 schneiden, bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloids A^2 . Dabei beschreibt der Schwerpunkt ξ zu je drei Schnittpunkten einer Erzeugenden g mit den Asymptoten

eine zweite cubische Raumcurve S^3 , die Leitcurve zu dem System der Schwerlinien von C^3 .

Die Leitcurve S^3 liegt also auf dem Asymptoten-Hyperboloid A^2 , und zwar trifft sie die Erzeugenden g einfach, dagegen die drei Asymptoten bez. ausser in ihren unendlich fernen Punkten in den drei Durchbohrungspunkten der Mittelpunktebene μ . Die letzteren sind daher zugleich die Mitten der drei Strecken, welche durch je einen dieser Punkte gehen und die betreffenden beiden anderen Asymptoten schneiden.

Damit ist zugleich eine neue Construction einer cubischen Raumcurve (Hyperbel) gewonnen: als barycentrische Curve einer Regelschaar mit drei festen Leitlinien.

Das erhaltene Resultat lässt sich noch in anderer Weise ausdrücken, wie folgt:

Durch einen Punkt p im Raume lässt sich im Allgemeinen Eine und nur Eine Ebene legen, die aus der cubischen Raumcurve C^3 ein Dreieck mit p als Schwerpunkt ausschneidet.

Durch jeden Punkt \bar{s} dagegen auf der Leitcurve S^3 der Schwerlinien gehen die Ebenen von ∞^1 cobarycentrischen Schnittpunktsdreiecken, die alle ihren Schwerpunkt in \bar{s} haben, und zwar bilden diese Ebenen ein Büschel um eine Achse g , welche die drei Asymptoten von C^3 schneidet.

4. Wir können jetzt auch die projective Verwandtschaft der Strahlencongruenz der Schwerlinien von C^3 mit dem Strahlenfelde der unendlich fernen Ebene ϵ_∞ näher begründen. Die Schwerlinie s_g , welche nach 1. der Achse x_∞ zugeordnet ist, schneidet die Ebene ϵ_∞ in dem harmonischen Pole r_∞ der Geraden x_∞ in Bezug auf das Schnittpunktsdreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$. Die Beziehung zwischen Pol r_∞ und Polare x_∞ ist dabei quadratisch, das heisst, wenn die Gerade x_∞ sich um einen festen Punkt in ϵ_∞ dreht, so beschreibt der zugehörige Pol r_∞ einen Kegelschnitt X^2 , der dem Fundamental-Dreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$ umschrieben ist.⁷⁾ Die entsprechenden Schwerlinien gehen mithin durch die Punkte des Kegelschnitts X^2 , und da sie andererseits Secanten der Leitcurve S^3 sind, so folgt daraus:

Jedem Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene ϵ_∞ ist im Allgemeinen eine Regelschaar zweiter Ordnung von Schwerlinien zugeordnet.

Liegt insbesondere der Mittelpunkt eines solchen Strahlenbüschels in dem unendlich fernen Kegelschnitt des Asymptoten-Hyperboloids A^2 , so degenerirt die entsprechende Regelschaar in einen durch die Leitcurve S^3 gelegten Kegel zweiter Ordnung.

Die Ebenen eines beliebigen Ebenenbüschels sind dadurch projectiv bezogen auf die Erzeugenden einer Regelschaar zweiter Ordnung als conjugirte Schwerlinien, und das Erzeugniss beider Gebilde ist somit eine Raumcurve dritter Ordnung, oder:

Die Schwerpunkte aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 , deren Ebenen durch eine endliche Gerade l gehen, erfüllen eine andere cubische Raumcurve, welche mit der ersteren die drei unendlich fernen Punkte gemein hat und die Gerade l zweifach schneidet.

Ebenso ergibt sich als Erzeugniß eines Ebenenbündels und der dazu projectiven Congruenz der Schwerlinien von C^3 eine Fläche dritter Ordnung, oder:

Die Schwerpunkte aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 , deren Ebenen durch einen festen endlichen Punkt p laufen, beschreiben eine Fläche dritter Ordnung, welche durch den Punkt p geht und die drei unendlich fernen Punkte von C^3 zu Knotenpunkten hat.

Es mögen noch die beiden dualen Sätze dazu hier Platz finden:

Die Ebenen aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 , deren Schwerpunkte auf einer Geraden l liegen, osculiren eine cubische Parabel, welche l zum Schmiegungsstrahl hat.

Die Ebenen aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 , deren Schwerpunkte in einer Ebene ε gelegen sind, umhüllen eine Fläche dritter Klasse, welche die Ebene ε berührt und die unendlich ferne Ebene ε_∞ zur Doppelene hat.

III. Das System der Höhenpunktlinien einer cubischen Raumcurve.

1. Projiciren wir in der obigen Weise unter I 2. ein System von Schnittpunktsdreiecken, das ein Parallelebenenbüschel aus C^3 ausschneidet, von a_∞ auf eine Ebene ε des Büschels, so wird die entsprechende Höhenpunktlinie h von C^3 in die Directrix d der dort gefundenen Parabel \mathfrak{P}^2 projectirt. Die Directrix d trifft nun den Kegelschnitt \mathfrak{C}^2 , das Projectionbild der Raumcurve C^3 , in zwei Punkten p und q , die zugleich Höhenpunkt und Ecke von zwei Poncelet'schen Dreiecken vorstellen; das heisst, p und q sind die Spitzen der beiden einzigen rechtwinkligen Dreiecke in der Poncelet'schen Figur. Die beiden Punkte p und q sind aber entstanden durch Projection von zwei entsprechenden Punkten p' und q' auf der Raumcurve C^3 , die daher ebenfalls die Spitzen von zwei rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecken von C^3 ergeben. Jede Höhenpunktlinie einer Raumcurve C^3 ist folglich gleichzeitig Secante derselben, oder:

Die Höhenpunkte einer Schaar planparalleler Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 erfüllen eine Secante derselben. Die Schnittpunkte der letzteren mit C^3 sind die Spitzen der beiden einzigen rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecke in der Schaar.

2. Sei jetzt g eine beliebige Secante der Raumcurve C^3 , welche der letzteren in den Punkten p und q begegnet, so wird C^3 von den beiden Punkten aus bez. durch zwei quadratische Kegel p^2 und q^2 projecirt. Die Ebenen, welche diese beiden Kegel in rechten Winkeln oder aus der Raumcurve C^3 rechtwinklige Dreiecke schneiden, umhüllen daher je einen Kegel zweiter Klasse \bar{p}^2 und \bar{q}^2 , welche ihrerseits die unendlich ferne Ebene ϵ_∞ in je einem Kegelschnitt ϵ_p^2 und ϵ_q^2 treffen.⁸⁾ Den vier gemeinsamen Tangenten der letzteren entsprechen folglich vier Paar parallele Tangentialebenen der Kegel \bar{p}^2 und \bar{q}^2 , oder:

Jede Secante der Raumcurve C^3 ist gemeinsame Höhenpunktslinie zu vier Schaaren planparalleler Schnittpunktsdreiecke von C^3 .

Da durch jeden Punkt im Raume Eine und nur Eine Secante an die cubische Raumcurve C^3 geht, so folgt daraus:

Durch einen beliebigen Punkt r lassen sich im Allgemeinen vier Ebenen legen, deren Schnittpunktsdreiecke mit einer cubischen Raumcurve ihren gemeinsamen Höhenpunkt in r besitzen.

Durch einen Punkt p auf der Raumcurve C^3 gehen ∞^1 rechtwinklige Schnittpunktsdreiecke (deren Höhenpunkt in p liegt), deren Ebenen einen Kegel zweiter Klasse \bar{p}^2 umhüllen.

3. Die Congruenz der Höhenpunktslinien einer C^3 ist mithin identisch mit dem Secantensystem derselben und den Geraden der Ebene ϵ_∞ derart zugeordnet, dass jedem Strahl x_∞ in ϵ_∞ als Achse eines Parallelebenbüschels Eine Secante h von C^3 als Höhenpunktslinie entspricht, dagegen umgekehrt zu jeder Secante h vier Geraden in ϵ_∞ gehören, das heisst, die Höhenpunktslinien h von C^3 sind ein-vierdeutig auf das Strahlenfeld der Ebene ϵ_∞ bezogen, oder bilden mit diesem eine Correspondenz [1,4].⁹ Um den Grad dieser ein-vierdeutigen Verwandtschaft zu ermitteln, betrachten wir ein Strahlenbüschel $p(x_\infty)$ in der Ebene ϵ_∞ . Jeder Geraden x_∞ entspricht als Höhenpunkt bez. des unendlich fernen Schnittpunktsdreiecks $a_\infty b_\infty c_\infty$ von C^3 ein Punkt r_∞ von folgender Construction:

Die Gerade x_∞ mag die Seiten $c_\infty a_\infty$ und $c_\infty b_\infty$ bez. in w und v treffen. Zu jedem dieser beiden Punkte ist dann auf x_∞ bez. des imaginären Kreises \mathbb{K}_∞^2 je ein Punkt w' und v' conjugirt, und die beiden Verbindungslinien $a_\infty v'$ und $b_\infty w'$ treffen sich in dem zu x_∞ zugeordneten Höhenpunkte r_∞ . Dreht sich jetzt der Strahl x_∞ um p_∞ , so beschreiben die Punkte v' und w' je einen Kegelschnitt \mathfrak{B}^2 und \mathfrak{B}'^2 , deren Punkte projectiv auf einander bezogen sind. Der Strahl x_∞ geht nämlich durch den, beiden Kegelschnitten gemeinsamen Punkt p_∞ und schneidet daher beide Curven in projectiven Punktreihen. Die Geraden $a_\infty v'$ und $b_\infty w'$, welche bez. nach den entsprechenden Punkten der beiden projectiven

krummlinigen Punktreihen \mathfrak{B}^2 und \mathfrak{B}^3 gehen, beschreiben daher bei der Bewegung des Strahles x_∞ zwei Strahlenbüschel von der Correspondenz [2,2]. Das Erzeugniss derselben oder der Ort des Höhenpunktes x_∞ ist folglich eine Curve von der Ordnung $2 + 2 = 4$, \mathfrak{P}^4 , welche ersichtlich die drei Punkte a_∞ , b_∞ , c_∞ zu Doppelpunkten hat:

Jedem Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene ε_∞ ist als Ort der zugehörigen Höhenpunkte in Bezug auf das Schnittpunktsdreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$ der Raumcurve C^3 eine Curve vierter Ordnung (sechster Klasse) \mathfrak{P}^4_6 mit drei Doppelpunkten in a_∞ , b_∞ , c_∞ zugeordnet, oder auch:

Die Geraden der unendlich fernen Ebene ε_∞ bilden mit den Punkten derselben als entsprechenden Höhenpunkten bez. des Dreiecks $a_\infty b_\infty c_\infty$ eine vier-eindeutige Verwandtschaft vierten Grades, in der $a_\infty b_\infty c_\infty$ ein Fundamentaldreieck vorstellt.

In dieser Verwandtschaft ist insbesondere der imaginäre Kreis \mathfrak{K}^2_∞ sich selbst zugeordnet, so dass jeder Tangente desselben ihr Berührungspunkt mit \mathfrak{K}^2_∞ entspricht.

Die entsprechenden Höhenpunktlinien der Raumcurve C^3 erhalten wir jetzt, indem wir an diese von den Punkten einer derart ermittelten Curve \mathfrak{P}^4 bezüglich die Secanten legen. Letztere erfüllen als Gerade, die einer Curve vierter Ordnung \mathfrak{P}^4 einfach und einer Raumcurve dritter Ordnung C^3 zweifach begegnen, eine Regelfläche vom Grade $4 \cdot 4 = 16$; indessen erniedrigt sich der Grad durch die drei Doppelpunkte der Curve \mathfrak{P}^4 : a_∞ , b_∞ , c_∞ , die auf C^3 liegen, um $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, das heisst:

Die Höhenpunktlinien der Raumcurve C^3 , die einem Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$ in der unendlich fernen Ebene ε_∞ zugeordnet sind, beschreiben eine Regelfläche vierten Grades $R^4(h)$ mit der Raumcurve C^3 als Doppellinie.

Die so erhaltene Regelfläche $R^4(h)$ ist zugleich der Ort der Höhenpunkte in den Schnittpunktsdreiecken von C^3 , deren Ebenen durch den Punkt \mathfrak{p}_∞ gehen, oder:

Die Höhenpunkte aller Schnittpunktsdreiecke der Raumcurve C^3 , deren Ebenen einer festen Geraden parallel laufen, erfüllen eine Regelfläche vierten Grades mit der Raumcurve C^3 als Doppellinie.

Andererseits schneidet jedes Ebenenbüschel durch eine Gerade g die unendlich ferne Ebene ε_∞ in einem Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$, welchem als Höhenpunktlinien bezüglich der Raumcurve C^3 die Erzeugenden einer solchen Regelfläche $R^4(h)$ zugeordnet sind. Jeder Ebene ε durch g entspricht daher eindeutig eine Erzeugende h der Fläche $R^4(h)$ als Höhenpunktlinie, welche die Ebene ε in dem Höhenpunkt ihres Schnittpunktsdreiecks mit der Raumcurve C^3 trifft. Das Erzeugniss des Ebenenbüschels $\mathfrak{g}(\varepsilon)$ mit der eindeutig darauf bezogenen Regelschaar $R^4(h)$ ist aber eine Raumcurve von der Ordnung $1 + 4 = 5$, H^5 , so dass sich ergibt:

Die Höhenpunkte der Schnittpunktsdreiecke der Raumcurve C^3 , deren Ebenen durch eine feste, endliche Gerade g gehen, beschreiben eine Raumcurve fünfter Ordnung, H^5 .

Dieselbe schneidet die unendlich ferne Ebene ε_∞ in den beiden Punkten, in welchen die beiden Berührungsebenen durch die Gerade g an den imaginären Kreis \mathfrak{K}_∞^2 diesen berühren und ferner in den drei unendlich fernen Punkten der Normalen zu den drei Ebenen, welche die Gerade g mit den drei unendlich fernen Punkten $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ von C^3 verbinden.

4. Insbesondere muss auch die Raumcurve H^5 der Raumcurve C^3 begegnen, da sie mit dieser auf derselben Regelfläche $R^4(h)$ liegt. Um die Schnittpunkte beider Curven zu ermitteln, projeciren wir die Raumcurve C^3 von einem ihrer Punkte r durch einen Kegel zweiter Ordnung r^2 . Dieser Kegel r^2 trifft die Raumcurve H^5 in $2 \cdot 5 = 10$ Punkten, von denen zwei auf den beiden Erzeugenden der Regelfläche $R^4(h)$ liegen, die von dem Punkte r auf C^3 ausgehen. Die übrigen $10 - 2 = 8$ Punkte stellen dagegen die den beiden Curven C^3 und H^5 gemeinsamen Punkte vor (als Schnittpunkte von je zwei Secanten der Raumcurve C^3). Das einem solchen Punkte entsprechende Schnittpunktsdreieck von C^3 hat folglich seinen Höhenpunkt in einer Ecke oder ist rechtwinklig, das heisst:

Durch eine Gerade g gehen die Ebenen von acht rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecken der Raumcurve C^3 , was zu dem Satze führt:

Alle Ebenen, welche aus einer cubischen Raumcurve C^3 rechtwinklige Dreiecke ausschneiden, umhüllen eine Fläche achter Klasse, Φ^8 .

Dieselbe enthält die drei unendlich fernen Secanten der Raumcurve C^3 als zweifache Gerade, die unendlich ferne Ebene als sechsfache Berührungsebene (durch eine unendlich ferne Gerade gehen die Ebenen von zwei rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecken, vergl. III, 1).

In dieser Fläche Φ^8 stellt ferner die zugehörige Raumcurve C^3 eine singuläre Curve vor, indem der Tangentialkegel von jedem Punkte der Raumcurve C^3 an die Fläche Φ^8 in einen Kegel zweiter Klasse und einen solchen sechster Klasse zerfällt (vergl. III, 2). Insbesondere osculirt die Raumcurve C^3 die Fläche Φ^8 in den acht imaginären Punkten auf C^3 , deren Tangenten den imaginären Kreis \mathfrak{K}_∞^2 treffen (gleichwerthig mit $8 \cdot 3 = 24$ gemeinsamen Ebenen): Denn die Schmiegungeebene in einem solchen ausgezeichneten Punkte f von C^3 , als Null-Dreieck derselben aufgefasst, hat ihren entsprechenden Höhenpunkt in dem Schmiegungepunkte f selber.

5. Wir gelangen damit zu einem Grenzfall des Höhenpunktes, der, so viel ich weiss, noch nirgends behandelt worden ist und der auch bei jeder anderen Curve sich darbietet. Drei unendlich nahe Punkte p_1, p_2, p_3 einer (ebenen oder räumlichen) Curve bilden nämlich ein Null-Dreieck derselben, für das der Mittelpunkt des Umkreises bekanntlich in das Krümmungscentrum m übergeht (Schnittpunkt von zwei sich folgenden Normalen der

Curve). In analoger Weise gehört aber auch zu jedem Null-Dreieck $p_1 p_2 p_3$ ein Höhenpunkt h , den wir kurz als „Krümmungshöhenpunkt“ bezeichnen wollen: der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Lothe bez. von p_1 auf die benachbarte Tangente $p_2 p_3$ und von p_2 auf die unendlich nahe Secante $p_3 p_1$. Da ferner der Schwerpunkt eines solchen Null-Dreiecks mit dem betreffenden Curvenpunkt p zusammenfällt, so führt der Eulersche Satz über die drei singulären Punkte eines Dreiecks zu folgendem Ergebniss:

Jedem Punkte p einer Raumcurve ist in seiner Schmiegungebene ein Krümmungshöhenpunkt h zugeordnet (als Höhenpunkt des entsprechenden Null-Dreiecks). Derselbe liegt auf der Hauptnormalen der Curve in p , und zwar in entgegengesetzter Richtung vom Krümmungsmittelpunkt m , so dass sich verhält

$$pm : ph = 1 : -2.$$

Eine Schmiegungebene einer cubischen Raumcurve C^3 wird hiernach von der ihrer unendlich fernen Geraden conjugirten Höhenpunktlinie in dem zugehörigen Krümmungshöhenpunkt geschnitten, und wir erhalten folgende einfache Construction des letzteren, sowie des Krümmungsmittelpunktes:

Sei π die Schmiegungebene einer cubischen Raumcurve C^3 im Punkte p , so legt man eine Parallelebene zu π und sucht den Höhenpunkt r des Schnittpunktsdreiecks mit C^3 . Die Secante von r an die Raumcurve C^3 trifft dann die Schmiegungeebene π in dem gesuchten Krümmungshöhenpunkt h , und die Verlängerung von hp um die Hälfte dieser Strecke ergibt den Krümmungsmittelpunkt m . Diese Construction lässt sich noch vereinfachen, wenn man die drei Asymptotenrichtungen von C^3 als bekannt voraussetzt.

Die Krümmungshöhenpunkte der Raumcurve C^3 erfüllen eine gewisse Curve, deren Ordnung sich wie folgt ermitteln lässt. Die Schmiegungebenen der Raumcurve C^3 treffen die unendlich ferne Ebene ε_∞ in den Tangenten einer Curve dritter Klasse \mathfrak{R}^3 , denen als Höhenpunkte in Bezug auf das Schnittpunktsdreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$ von C^3 in der oben behandelten Verwandtschaft vierten Grades die Punkte einer Curve $3.4 = 12$. Ordnung, \mathfrak{C}^{12} , zugeordnet sind mit $a_\infty, b_\infty, c_\infty$ als sechsfachen Punkten. Daher beschreiben die entsprechenden Höhenpunktlinien, das heisst die Secanten von den Punkten der Curve \mathfrak{C}^{12} an die Raumcurve C^3 eine Regelfläche, deren Grad in Folge der drei sechsfachen Punkte von \mathfrak{C}^{12} auf C^3 sich auf $4.12 - 3.6.2 = 12$ erniedrigt. Jede Erzeugende dieser Regelfläche zwölften Grades R^{12} ist als Höhenpunktlinie auf eine Schmiegungebene von C^3 eindeutig bezogen und trifft sie in dem zugehörigen Krümmungshöhenpunkt; der geometrische Ort der letzteren ist somit eine Raumcurve von der Ordnung $12 + 3 = 15$, das heisst:

Die Krümmungshöhenpunkte einer cubischen Raumcurve C^3 erfüllen eine Raumcurve fünfzehnter Ordnung, C^{15} .

Die so erhaltene Curve C^{15} begegnet offenbar der unendlich fernen Ebene ε_∞ in denselben $6 + 3 \cdot 3$ Punkten, in denen diese von der Curve der Krümmungsmittelpunkte geschnitten wird, und beide Curven haben überdies noch mit der Raumcurve C^3 die nämlichen acht Punkte \mathfrak{f} gemein, deren Tangenten den imaginären Kreis \mathfrak{K}_∞^2 treffen.¹⁰⁾

6. Wir bestimmen endlich noch den Ort der Höhenpunkte eines Bündels von Schnittpunktsdreiecken. Die Ebenen durch einen festen endlichen Punkt \mathfrak{p} schneiden die Raumcurve C^3 in Dreiecken, deren Höhenpunkte eine Fläche erfüllen, welche die Raumcurve C^3 als Doppellinie enthält; denn durch jede Gerade, die \mathfrak{p} mit einem Punkte \mathfrak{r} von C^3 verbindet, gehen zwei rechtwinklige Schnittpunktsdreiecke mit \mathfrak{r} als Spitzen. Andererseits ist jede Secante von C^3 der Ort der Höhenpunkte für vier Büschel bezüglich einander paralleler Schnittpunktsdreiecke, das heisst, jede Secante von C^3 trifft die fragliche Fläche der Höhenpunkte ausser in den beiden als Doppelpunkten zu zählenden Schnittpunkten mit C^3 noch in vier anderen Punkten. Wir schliessen daraus:

Die Höhenpunkte aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 , deren Ebenen durch einen festen endlichen Punkt \mathfrak{p} laufen, erfüllen eine Fläche achter Ordnung, F^8 .

Dieselbe hat den Punkt \mathfrak{p} zum vierfachen Punkt, enthält die Raumcurve C^3 als Doppellinie und schneidet die unendlich ferne Ebene ausser dem imaginären Kreise \mathfrak{K}_∞^2 einmal in dem unendlich fernen Schnittpunktsdreieck von C^3 und ferner in dem Polardreieck des letzteren in Bezug auf \mathfrak{K}_∞^2 .

IV. Das System der Mittellinien einer cubischen Raumcurve.

1. Die Mittelpunkte der Umkreise von einer Schaar planparalleler Schnittpunktsdreiecke der Raumcurve C^3 erfüllen nach I, 2 eine Gerade, die als Mittellinie bezeichnet wurde. Die umschriebenen Kreise selber aber beschreiben dabei eine durch die Raumcurve C^3 gehende Regelfläche zweiter Ordnung F^2 , oder ihre Ebenen bilden das eine System cyclischer Ebenen von F^2 . Denn die unendlich ferne Achse des entsprechenden Büschels von Parallelebenen schneidet den imaginären Kreis \mathfrak{K}_∞^2 in zwei Punkten, und durch diese geht eine Regelfläche F^2 , welche die Raumcurve C^3 enthält, und die von den Parallelebenen in Kreisen geschnitten wird. Wir gelangen damit zu folgender neuer Definition der Mittellinie:

Die Mittellinien der Raumcurve C^3 sind identisch mit dem System von Durchmessern, die den cyclischen Ebenen aller durch C^3 gelegten Flächen zweiter Ordnung in Bezug auf diese conjugirt sind.¹¹⁾

Die Verhältnisse der dadurch bestimmten Strahlencongruenz sind demnach wesentlich complicirter, als die oben abgeleiteten, und wir begnügen uns damit, bloß Ordnung und Klasse der Congruenz festzustellen.

2. Ein beliebiger Punkt p des Raumes ist Mittelpunkt eines concentrischen Kugelbüschels, das auf einer Raumcurve C^3 eine Involution sechsten Grades erster Stufe einschneidet.¹²⁾ Die Ebenen, welche je drei Punkte einer Gruppe von sechs Punkten verbinden, umhüllen daher (nach dem Princip von der Erhaltung der Anzahl) eine Curve von der Klasse $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Folglich gehen durch den Punkt p zehn Durchmesserbenen von Kugeln des Büschels, das heisst:

Ein Punkt p ist im Allgemeinen gemeinsamer Mittelpunkt von zehn Kreisen, welche bezüglich eine cubische Raumcurve C^3 in je drei Punkten schneiden.

Zu jedem dieser zehn Kreise ist aber eine Mittellinie durch p conjugirt, woraus folgt:

Die Congruenz der Mittellinien einer cubischen Raumcurve ist zehnter Ordnung.

3. Um auch die Klasse derselben zu ermitteln, beschränken wir uns auf die Untersuchung der Mittelpunktsebene μ von der Raumcurve C^3 . Die Ebene μ enthält die drei Durchmesser a_0a_1 , b_0b_1 , c_0c_1 von C^3 , die sich im Mittelpunkte m der Raumcurve begegnen. Ein solcher Durchmesser a_0a_1 ist der Ort für die Mittelpunkte aller zu der entsprechenden Schmiegungebene τ_α parallelen Sehnen an die Raumcurve C^3 ; jeder Punkt auf a_0a_1 ist aber zugleich Mittelpunkt einer durch die Raumcurve C^3 gelegten Fläche zweiter Ordnung. Das Strahlentripel der drei Durchmesser in der Ebene μ stellt daher den vollständigen Schnitt der letzteren mit der Fläche dritter Ordnung F^3 vor, welche die Mittelpunkte des durch die Raumcurve C^3 gelegten Flächenbündels zweiter Ordnung enthält.

Und zwar ist jeder Durchmesser a_0a_1 Mittelpunktslinie eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung, die durch die Raumcurve C^3 gehen, da alle Flächen F^2 mit dem Mittelpunkt auf a_0a_1 die Secante a_0a_∞ an C^3 gemeinsam haben. In jeder Fläche F^2 des vorliegenden Büschels giebt es nun sechs cyklische Richtungsebenen und dementsprechend sechs dazu conjugirte Durchmesser oder Mittellinien, die sich in dem Mittelpunkte von F^2 auf a_0a_1 schneiden. Soll daher eine solche Mittellinie m in die Ebene μ fallen, so muss der unendlich ferne Punkt von m auf die unendlich ferne Gerade g_1^∞ der Ebene μ zu liegen kommen, oder die Ebene μ zu einer cyklischen Ebene in Bezug auf eine Fläche F^2 des Büschels conjugirt sein. Die Pole der Ebene μ bezüglich der Flächen des Büschels, das dem Durchmesser a_0a_1 zugeordnet ist, beschreiben nun in der unendlich fernen Ebene ε_∞ eine gerade Punktreihe α , nämlich die Durchschnittslinie der Schmiegungebene τ_α (in α_∞) mit der Ebene ε_∞ . Andererseits schneiden die cyklischen

Ebenen des Flächenbüschels in ε_∞ eine Curve dritter Klasse \mathfrak{K}^3 ein; das Secantensystem, welches dem entsprechenden Kegelschnittbüschel in ε_∞ mit dem imaginären Kreis \mathfrak{K}^2_∞ gemeinsam ist, sodass jeder Fläche F^2 , bezüglich ihrem Kegelschnitt in ε_∞ , sechs Secanten oder Tangenten von \mathfrak{K}^3 entsprechen. Da weiter von jedem Punkte auf a drei Tangenten an die Curve \mathfrak{K}^3 ausgehen, so wird dadurch eine Verwandtschaft [3,6] unter den Tangenten von \mathfrak{K}^3 begründet. In dieser Correspondenz giebt es $3 + 6 = 9$ Coincidenzen, das heisst, 9mal geht eine cyklische Ebene einer Fläche F^2 durch den Pol der Ebene μ in Bezug auf dieselbe Fläche. Davon sind indessen als illusorisch auszuschliessen die beiden Asymptotenebenen des hyperbolischen Cylinders a^2_∞ durch die Raumcurve C^3 , welche die Ebene ε_∞ in den beiden Secanten $a_\infty b_\infty$, $a_\infty c_\infty$ treffen.

Dementsprechend bleiben $9 - 2 = 7$ Mittellinien, die von dem Durchmesser $a_0 a_1$ ausgehen und in die Ebene μ fallen. Derselbe Schluss wiederholt sich für die beiden anderen Durchmesser $b_0 b_1$ und $c_0 c_1$, so dass im Ganzen $3 \cdot 7 = 21$ Mittellinien der Ebene μ angehören. Indem wir dies Ergebniss für eine beliebige Ebene verallgemeinern, gelangen wir zu dem Satz:

Die Congruenz der Mittellinien einer cubischen Raumcurve ist 21. Klasse.

V. Besondere Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve.

1. Die oben behandelten Strahlencongruenzen führen schliesslich dazu, die Gestalt der Schnittpunktsdreiecke auf der Raumcurve C^3 in ihrer Abhängigkeit von der Lage der Schnittebene zu ermitteln. So ergab sich unter III, 4 als Ort der rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecke eine Fläche achter Klasse, \mathcal{O}^8 . Ebenso lässt sich die Enveloppe der Ebenen bestimmen, die gleichschenklige Dreiecke aus der Raumcurve C^3 ausschneiden, indem wir als Kriterium dafür feststellen: Die Euler'sche Gerade, das heisst die Verbindungslinie von Schwerpunkt und Höhenpunkt, geht durch eine Ecke (die Spitze) des Dreiecks, ohne dass diese selber Höhenpunkt ist.

Betrachten wir zu dem Zwecke ein Ebenenbüschel durch eine beliebige Gerade l , so beschreiben die Schwerpunkte der betreffenden Schnittpunktsdreiecke mit der Raumcurve C^3 eine Raumcurve dritter Ordnung S^3_l , die mit C^3 die drei unendlich fernen Punkte a_∞ , b_∞ , c_∞ gemein hat (II, 4), dagegen die bezüglichen Höhenpunkte eine Raumcurve fünfter Ordnung H^5 (III, 3). Durch das Ebenenbüschel $l(\xi)$ sind die Punkte beider Raumcurven perspectiv auf einander bezogen, die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare auf S^3_l und H^5 , das heisst die Euler'schen Geraden der Schnittpunktsdreiecke, erzeugen daher eine Regelfläche vom Grade $3 + 5 = 8$, R^8 , welche die Gerade l zur Leitlinie hat und drei unendlich ferne Erzeugende bezüglich durch a_∞ , b_∞ , c_∞ besitzt. Die Regel-

fläche R^3 schneidet jetzt die Raumcurve C^3 ausser den drei gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkten in $8 \cdot 3 - 3 = 21$ Punkten. Von diesen sind acht die Spitzen der acht rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecke, deren Ebenen durch die Gerade l gehen, es bleiben also übrig: $21 - 8 = 13$ Punkte als Spitzen gleichschenkliger Schnittpunktsdreiecke, mit anderen Worten:

Alle Ebenen, die aus einer cubischen Raumcurve C^3 gleichschenklige Dreiecke ausschneiden, umhüllen eine Fläche 13. Klasse, Φ^{13} . Dieselbe enthält die drei unendlich fernen Secanten von C^3 als dreifache Gerade, die unendlich ferne Ebene als neunfache Berührungsebene (in jedem Parallelebenenbüschel giebt es folglich vier gleichschenklige Schnittpunktsdreiecke mit der Raumcurve C^3). Endlich gehört die Raumcurve C^3 selber durch ihre Schmiegungebenen der Fläche Φ^{13} an.

2. Von besonderem Interesse ist hierbei noch der Fall der gleichseitigen Schnittpunktsdreiecke, deren Ebenen ersichtlich eine dreifache Curve in der Fläche Φ^{13} bilden, da ein gleichseitiges Dreieck auf dreifache Art gleichschenklig ist. Ein gleichseitiges Dreieck ist dadurch gekennzeichnet, dass sein Schwerpunkt und Höhenpunkt zusammenfallen, und die vorliegende Frage lässt sich somit dahin formuliren: Den Ort der Ebenen zu finden, für welche die zugeordnete Schwerlinie und Höhenpunktlinie sich schneiden. In dem fraglichen Ort zählt zunächst die unendlich ferne Ebene ε_∞ vierfach, das heisst, es kommt viermal vor, dass für eine Gerade in ε_∞ der zugeordnete Schwerpunkt und Höhenpunkt in Bezug auf das unendlich ferne Schnittpunktsdreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$ coincidiren; denn aus einem Dreikant wird, wie leicht zu zeigen, durch eine Ebene in vier verschiedenen Stellungen ein gleichseitiges Dreieck ausgeschnitten.

Legen wir jetzt durch einen Punkt p der unendlich fernen Ebene ein Strahlenbüschel $p(x_\infty)$, so beschreiben die den Geraden x_∞ in Bezug auf die Raumcurve C^3 zugeordneten Schwerlinien eine Regelfläche zweiten Grades $R^2(s)$, dagegen die zugeordneten Höhenpunktlinien eine Regelfläche vierten Grades $R^4(h)$ (II, 4 und III, 3). Die beiden Regelflächen $R^2(s)$ und $R^4(h)$ schneiden sich dann in einer Curve von der Ordnung $2 \cdot 4 = 8$, C^8 , so dass jede Erzeugende s von $R^2(s)$ vier Punkte, jede Erzeugende h von $R^4(h)$ zwei Punkte mit der Curve C^8 gemein hat. Da nun die Erzeugenden s und h durch das Strahlenbüschel $p(x_\infty)$ eindeutig auf einander bezogen sind, so entsteht zwischen den entsprechenden Punkten auf der Raumcurve C^8 eine Correspondenz [4,2] mit $4 + 2 = 6$ Coincidenzen, das heisst, für sechs Strahlen durch einen Punkt p in der Ebene ε_∞ schneiden sich bezüglich die zugeordnete Schwerlinie und Höhenpunktlinie in einem Punkte auf der Raumcurve C^8 . Eine Ebene, die einen solchen singulären Strahl mit dem entsprechenden Coincidenzpunkte auf C^8 verbindet, schneidet folglich die Raumcurve C^3 in einem gleichseitigen Dreieck.

Wir schliessen daraus:

Durch einen unendlich fernen Punkt gehen die Ebenen von sechs gleichseitigen endlichen Schnittpunktsdreiecken, und da die unendlich ferne Ebene selber als vierfache Schmiegungebene der gesuchten Raumcurve gilt, so ergibt sich als Endresultat:

Alle Ebenen, die aus einer cubischen Raumcurve gleichseitige Dreiecke ausschneiden, umhüllen eine Raumcurve zehnter Klasse, welche die unendlich ferne Ebene vierfach osculirt.

Der letzte Satz ist übrigens nur ein specieller Fall von der allgemeinsten Aufgabe dieser Art, deren Lösung aber andere Mittel als die oben angewandten erfordert, nämlich: „Den Ort der Ebenen zu finden, die aus einer cubischen Raumcurve Dreiecke von constanter Gestalt (die einem gegebenen Dreiecke ähnlich sind) ausschneiden“.

Literatur.

1. Die angeführten Sätze sind zuerst von Weill in den *Nouvelles annales de mathématiques*, II^e série, t. XIX, p. 367 analytisch bewiesen. Der nachfolgende synthetische Beweis dürfte sich durch Einfachheit empfehlen, wenn er auch zunächst nur für die umschriebene Ellipse gilt.
2. Reye: *Geometrie der Lage* II, 15. Vortrag.
3. Der erste Theil dieses Satzes von der Schwerlinie stammt in seiner allgemeinsten Form von Hurwitz (vergl. die bez. Mittheilung von Geisenheimer: „Die Erzeugung polarer Elemente“ u. s. w. in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik* XXXI, 4, S. 211); der Beweis von Hurwitz ist mir jedoch nicht zugänglich gewesen. — Einen besonderen Fall der Höhenpunktlinie ferner, nämlich wenn dieselbe senkrecht auf den Ebenen des betreffenden Parallelebenenbüschels steht, erwähnt schon Reye in der Abhandlung: „Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der cubischen Raumcurven“ in der *Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg*. 1890. S. 56.
4. Geisenheimer a. a. O. S. 207.
5. Schröter: „*Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung*“ § 39. Die in diesem Werke durchgeführte Bezeichnung habe ich ebenfalls angenommen.
6. Dieser Satz ist ein besonderer Fall einer allgemeinen, für jede Raumcurve giltigen Beziehung, die Geisenheimer nach Analogie eines Satzes von Chasles abgeleitet hat, a. a. O. S. 205.
7. Vergl. Reye: „*Geometrie der Lage*“ II, 16. Vortrag.

8. Der reciproke Fall zu einem bekannten Steiner'schen Satze aus der Theorie der Kegelschnitte; vergl. auch Reye: „Geometrie der Lage“ I, 2. Aufl. S. 184.
9. Für die Untersuchung dieser und der weiterhin gebrauchten Correspondenzen war massgebend:
R. Sturm: „Die Gebilde der Liniengeometrie“ I, S. 16 fig.
10. Vergl. Sturm: „Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurve“, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 40. Jahrgang, 1895, 1. Heft, § 6.
11. Den Zusammenhang der cyklischen Ebenen und ihrer Kreise betrachten von anderen Gesichtspunkten aus: Sturm, a. a. O. und Timerding: „Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren“. Inaugural-Dissertation. Strassburg 1894.
12. Sturm a. a. O., § 14; vergl. auch Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie des Raumes“ II, 3. Auflage, Literatur-Nachweisungen, Nr. 271.

Pless, 24. December 1894.

XII.

Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven.

Von

R. MEHMKE

in Stuttgart.

Im 25. Bande der „Mathematischen Annalen“ S. 293 (1885) hat H. Schröter eine grosse Anzahl von metrischen Eigenschaften derjenigen Raumcurven dritter Ordnung, für welche die unendlich ferne Ebene Schmiegungebene ist, also der sogenannten cubischen Parabeln, abgeleitet. Da es bei diesen Eigenschaften sich wesentlich um die Rauminhalte von Tetraedern handelt, welche zu einer cubischen Parabel in bestimmter Beziehung stehen, der Inhalt eines Tetraeders aber bei projectiven Umformungen bis auf gewisse, von der Lage der Ecken des Tetraeders abhängende Factoren erhalten bleibt, so ist von vornherein klar, dass jene Schröterschen Sätze projectiv verallgemeinert, das heisst auf eine Form gebracht werden können, in der sie für jede Raumcurve dritter Ordnung gelten, wobei an Stelle der unendlich fernen Ebene eine beliebige Schmiegungebene der Curve tritt. Diese Verallgemeinerung könnte auf ziemlich mechanische Weise mit Hilfe der für jede Collineation bestehenden Transformationsformeln für projectiv-metrische Grössen vorgenommen werden. Ich ziehe jedoch eine directe Entwicklung vor, weil ich die fraglichen Sätze von Schröter nicht blos zu verallgemeinern, sondern durch eine Reihe neuer Sätze verwandter Art, in denen zum Theil ausser Rauminhalten bezw. Massen und Abständen auch noch andere metrische Grössen vorkommen, zu vermehren wünsche. Vielleicht darf ich auf die in den Paragraphen 7, 8 und 9 mitgetheilten Uebertragungsprincipien besonders hinweisen, durch deren Anwendung sich aus jeder Beziehung zwischen Strecken einer und derselben geraden Linie etliche metrische Eigenschaften einer beliebigen cubischen Raumcurve ergeben.* Das Princip der Reci-

* Nachdem ich (vor einigen Jahren) diese Uebertragungsprincipien gefunden hatte, wurde durch das „Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik“ meine Aufmerksamkeit auf eine Abhandlung des Herrn Gino Loria: „Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito“ (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Dicembre 1885) gelenkt. Herr Loria war so liebenswürdig, mir einen Abdruck derselben zu schicken, aus welchem ich ersah, dass ihm das dritte der fraglichen Uebertragungsprincipien, wenn auch in der speciellen Form, die es bei der cubischen Parabel annimmt, schon bekannt war.

procität oder Dualität, welches in Schröter's Arbeit nicht zum Ausdruck gekommen ist, wird hier volle Berücksichtigung finden. Aehnliche Untersuchungen, wie die folgenden, kann man schon bei den Kegelschnitten und weiterhin bei den Curven n^{ter} Ordnung im Raum von n -Dimensionen, dann auch bei den Flächen zweiten Grades u. s. w. anstellen, worauf ich anderwärts näher eingehen werde.

§ 1. Bezeichnungen.

Wir wollen Punkte immer mit kleinen lateinischen, Geraden mit grossen lateinischen, Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen.

Es bedeute — ich werde im Folgenden Grassmann's Rechnung mit Punkten, Geraden und Ebenen anwenden* — $|p|$, $|G|$, $|\varepsilon|$ den Coefficienten (metrischen Werth oder das Gewicht) des Punktes p bezw. der Geraden G , der Ebene ε , so dass

$$\frac{p}{|p|}, \quad \frac{G}{|G|}, \quad \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}$$

den Punkt p bezw. die Gerade G , die Ebene ε mit dem Gewicht Eins versehen vorstellt. Ferner bezeichne $\overline{p\varepsilon}$ die Entfernung des Punktes p von der Ebene ε ; $\overline{mom\ GG_1}$ das Moment der beiden Geraden G und G_1 ** ; $\overline{mom\ pp_1, G}$ das Moment der als Kraft aufgefassten Strecke pp_1 in Bezug auf die Gerade G als Achse; $\overline{mom\ \varepsilon\varepsilon_1, G}$ die zur vorhergehenden dualistische Grösse, nämlich das Product aus dem \sin des von den Ebenen ε und ε_1 gebildeten Winkels und dem Moment ihrer Schnittlinie in Bezug auf die Gerade G , welche Grösse das Moment des Flächenwinkels $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$ in Bezug auf G genannt werden mag; $\overline{pp_1 p_2 p_3}$ den sechsfachen Rauminhalt des Tetraeders mit den Ecken p, p_1, p_2, p_3 , und dualistisch dazu $\overline{\sin\ \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ den „Sinus“ des durch die vier Ebenen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ gebildeten Vierflachs, welcher u. A. gleich dem Product aus den \sin der Flächenwinkel an irgend zwei gegenüberliegenden Kanten des Vierflachs und dem Moment dieser Kanten ist. Auf die Bestimmung der Vorzeichen dieser metrischen Grössen einzugehen, ist für das Folgende nicht nöthig. Wenn wir mit Grassmann bei äusseren Producten eckige Klammern benützen, so erhalten wir:

$$[p\varepsilon] = \overline{p\varepsilon} \cdot |p| \cdot |\varepsilon|,$$

$$[GG_1] = \overline{mom\ GG_1} \cdot |G| \cdot |G_1|,$$

$$[pp_1 G] = \overline{mom\ pp_1, G} \cdot |p| \cdot |p_1| \cdot |G|,$$

* Siehe Grassmann's „Ausdehnungslehre“ von 1862 (Gesammelte Werke I. Bd. 2. Theil) 1. Abschnitt, Kapitel 5.

** A. Cayley, Comptes rendus de l'Academie des Sciences t. 61 p. 829, 1865: „Je nomme moment de deux droites la distance perpendiculaire de ces droites, multipliée par le sinus de leur inclinaison mutuelle.“

$$\begin{aligned} [\varepsilon \varepsilon_1 G] &= \overline{\text{mom } \varepsilon \varepsilon_1, G} \cdot |\varepsilon| \cdot |\varepsilon_1| \cdot |G|, \\ [p p_1 p_2 p_3] &= \overline{p p_1 p_2 p_3} \cdot |p| \cdot |p_1| \cdot |p_2| \cdot |p_3|, \\ [\varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3] &= \overline{\text{sin } \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \cdot |\varepsilon| \cdot |\varepsilon_1| \cdot |\varepsilon_2| \cdot |\varepsilon_3|. \end{aligned}$$

Hat man irgend eine Gleichung zwischen äusseren Producten, welche in Bezug auf alle in ihr enthaltenen Punkte, Geraden und Ebenen homogen ist, und führt man statt der äusseren Producte die zugehörigen metrischen Grössen ein, so heben sich offenbar die als Factoren heraustretenden Gewichte jener Punkte, Geraden und Ebenen gegenseitig auf, das heisst, man kann in jeder solchen Gleichung ohne Weiteres die äusseren Producte durch die entsprechenden metrischen Grössen ersetzen. Hierauf beruhen alle Ergebnisse der vorliegenden Abhandlung. Wie Grassmann schon in seiner „Ausdehnungslehre“ von 1844 (Gesammelte Werke Band 1, Theil 1, § 165) bemerkt hat, bleibt jede Gleichung der besprochenen Art bestehen, wenn statt der darin vorkommenden Elemente die entsprechenden Elemente eines beliebigen collinear-verwandten Systems gesetzt werden. Daher sind alle metrischen Eigenschaften der allgemeinsten cubischen Raumcurven, die ich im Folgenden ableiten werde, projectiv.*

§ 2. Darstellung der Curve, ihrer Tangenten und Schmiegungebenen.

Eine beliebige Raumcurve dritter Ordnung lässt sich durch die Gleichung

$$1) \quad x = a + 3\lambda b + 3\lambda^2 c + \lambda^3 d$$

darstellen, in welcher x einen mit dem Parameter λ veränderlichen Punkt der Curve bezeichnet. Die Punkte a und d gehören der Curve an — sie entsprechen den Werthen 0 und ∞ des Parameters — und können beliebig auf ihr gewählt werden. Es ist b der Punkt, in welchem die in a an die Curve gelegte Tangente ab die zum Punkt d gehörige Schmiegungeebene bcd der Curve schneidet, ebenso c der Schnittpunkt der zum Punkt a gehörigen Schmiegungeebene abc mit der Curventangente cd zum Berührungspunkt d , oder es bilden die Punkte a, b, c, d ein sogenanntes Schmiegungetetraeder der Curve (Schröter a. a. O. S. 294).**

* Ich verstehe hier unter projectiven Eigenschaften geometrischer Gebilde dasselbe, wie Poncelet, der Schöpfer dieses Begriffs, Möbius und Andere. Sehr mit Unrecht, wie mir scheint, wird gegenwärtig von vielen Geometern das Wort projectiv im Sinne von „descriptiv, graphisch, situell, lagengeometrisch“ angewendet, also um das Gegentheil von metrisch auszudrücken, während man doch eine Unzahl projectiver Eigenschaften und Ausdrücke kennt — ich erinnere blos an das Verhältniss der Gauss'schen Krümmungsmaasse zweier sich berührenden Flächen im Berührungspunkt — die entschieden metrischer Natur sind.

** Vergl. Möbius: „Barycentrischer Calcul“ (Gesammelte Werke Bd. 1) § 98.

Durch Ableitung der Gleichung 1) nach λ erhält man

$$\frac{dx}{d\lambda} = 3(b + 2\lambda c + \lambda^2 d),$$

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} = 6(c + \lambda d)$$

und durch äussere Multiplication dieser Gleichungen mit 1), wenn man noch

$$\frac{1}{3} \left[x \frac{dx}{d\lambda} \right] = X, \quad \frac{1}{18} \left[x \frac{dx}{d\lambda} \frac{d^2x}{d\lambda^2} \right] = \xi$$

setzt:

$$2) \quad X = [ab] + 2\lambda[ac] + \lambda^2[ad + 3bc] + 2\lambda^3[bd] + \lambda^4[cd],$$

$$3) \quad \xi = [abc] + \lambda[abd] + \lambda^2[acd] + \lambda^3[bcd].$$

Offenbar ist X die Tangente, ξ die Schmiegungebene, welche die Curve im Punkt x hat. Wir setzen nun

$$4) \quad [abc] = \alpha, \quad [abd] = 3\beta, \quad [acd] = 3\gamma, \quad [bcd] = \delta.$$

Werden die Punkte a, b, c, d alle mit einer und derselben willkürlichen Zahl multiplicirt, so ändert sich die Lage dieser Punkte nicht, und ebenso wenig die Lage des durch die Gleichung 1) gelieferten Punktes x , seiner Tangente X und Schmiegungebene ξ . Wir dürfen daher voraussetzen, die Gewichte der Punkte a, b, c, d , auf deren Verhältnisse es allein ankommt, seien so gewählt, dass das äussere Product $[abcd]$, welches nicht Null sein kann, irgend einen bestimmten Werth erhält. Wir machen die Annahme:

$$5) \quad [abcd] = 3.$$

Unter Berücksichtigung derselben ergibt sich aus den Gleichungen 4) durch äussere Multiplication:

$$6) \quad \begin{cases} [\alpha\beta] = [ab], & [\alpha\gamma] = [ac], & [\alpha\delta] = 3[bc], \\ 3[\beta\gamma] = [ad], & [\beta\delta] = [bd], & [\gamma\delta] = [cd]; \end{cases}$$

ferner:

$$4') \quad [\alpha\beta\gamma] = a, \quad [\alpha\beta\delta] = 3b, \quad [\alpha\gamma\delta] = 3c, \quad [\beta\gamma\delta] = d.$$

Die Gleichungen 3), 2), 1) können jetzt in der neuen Form geschrieben werden:

$$1') \quad \xi = \alpha + 3\lambda\beta + 3\lambda^2\gamma + \lambda^3\delta,$$

$$2') \quad X = [\alpha\beta] + 2\lambda[\alpha\gamma] + \lambda^2[\alpha\delta + 3\beta\gamma] + 2\lambda^3[\beta\delta] + \lambda^4[\gamma\delta],$$

$$3') \quad x = [\alpha\beta\gamma] + \lambda[\alpha\beta\delta] + \lambda^2[\alpha\gamma\delta] + \lambda^3[\beta\gamma\delta].$$

Es stimmen die Gleichungen 1) und 1'), 2) und 2'), 3) und 3') der Gestalt nach vollständig überein, woraus wir schliessen, dass zu jeder, durch eine Gleichung zwischen äusseren Producten darstellbaren Beziehung zwischen irgend welchen Punkten, Tangenten und Schmiegungebenen der cubischen Raumcurve — und dieser Art sind alle metrischen Eigenschaften der allgemeinsten cubischen Raumcurven, die später entwickelt werden

sollen — eine dualistische vorhanden ist, die dadurch aus der ersten abgeleitet werden kann, dass man statt eines jeden Punktes der Curve die zugehörige Schmiegungeebene, statt einer jeden Schmiegungeebene ihren Berührungs- oder Anschmiegungepunkt setzt, eine jede Tangente der Curve aber beibehält.* Natürlich muss zugleich statt der Entfernung zweier beliebigen Punkte der *sin* des Winkels der entsprechenden Ebenen, statt des sechsfachen Inhalts eines Tetraeders der *sin* des entsprechenden Vierfachs u. s. w. genommen und, falls in dem betreffenden Satz das Schmiegungetetraeder $abcd$ vorkommt, b mit β , c mit γ und umgekehrt vertauscht werden.

§ 3.

Da eine Raumcurve dritter Ordnung bestimmt ist, wenn von ihr ein beliebiges Schmiegungetetraeder $abcd$ und noch irgend ein Punkt x gegeben sind, so müssen sich beim Hinzutreten der Tangente X und der Schmiegungeebene ξ der Curve in diesem Punkt bereits Beziehungen ergeben. Um solche zu finden, multipliciren wir zunächst Gleichung 1) der Reihe nach mit den Seitenflächen, Gleichung 2) mit den Kanten, Gleichung 3) mit den Ecken des Schmiegungetetraeders $abcd$, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \begin{cases} [xbcd] = [abcd], & [axcd] = 3\lambda[abcd], \\ [abxd] = 3\lambda^2[abcd], & [abcx] = \lambda^3[abcd]; \end{cases} \\
 8) \quad & \begin{cases} [abX] = \lambda^4[abcd], & [acX] = -2\lambda^3[abcd], \\ [adX] = 3\lambda^2[abcd], & [bcX] = \lambda^2[abcd], \\ [bdX] = -2\lambda[abcd], & [cdX] = [abcd]; \end{cases} \\
 9) \quad & \begin{cases} [a\xi] = \lambda^3[abcd], & [b\xi] = -\lambda^2[abcd], \\ [c\xi] = \lambda[abcd], & [d\xi] = -[abcd]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Wir fügen noch die aus 4) und 7) folgenden Gleichungen

$$9') \quad \begin{cases} [x\alpha] = -\lambda^3[abcd], & [x\beta] = \lambda^2[abcd], \\ [x\gamma] = -\lambda[abcd], & [x\delta] = [abcd] \end{cases}$$

hinzu, sowie die aus 4) durch äussere Multiplication mit a, b, c, d hervorgehenden:

$$10) \quad [\alpha\delta] = -3[b\gamma] = 3[c\beta] = -[d\alpha] = [abcd].$$

* Offenbar ist die Ebene π , welche aus den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mittelst derselben Zahlen (Coordinationen) abgeleitet wird, wie ein beliebiger Punkt p aus den Punkten a, b, c, d die Nullebene des Punktes p in dem durch die betrachtete Raumcurve dritter Ordnung bestimmten Nullsystem. Es erweisen sich auch manche der später aufzustellenden Sätze bei näherer Betrachtung als besondere Fälle von metrischen Sätzen über Nullsysteme, worauf jedoch hier nicht eingegangen werden soll.

Aus den Gleichungen 7) bis 10) folgt:

$$3 \frac{[x\alpha][d\xi]}{[d\alpha]} = - \frac{[x\beta][c\xi]}{[c\beta]} = \frac{[x\gamma][b\xi]}{[b\gamma]} = -3 \frac{[x\delta][a\xi]}{[a\delta]}$$

$$(\equiv -3\lambda^3[abcd]),$$

$$3[xbcd][a\xi] = -[axcd][b\xi] = [abxd][c\xi] = -3[abcx][d\xi]$$

$$(\equiv 3\lambda^3[abcd]^2),$$

$$12[abX][cdX] = 3[acX][bdX] = 4[adX][bcX]$$

$$(\equiv 12\lambda^4[abcd]^2),$$

$$6[abX][c\xi][d\xi] = 3[acX][b\xi][d\xi] = 2[adX][b\xi][c\xi]$$

$$= 6[bcX][a\xi][d\xi] = 3[bdX][a\xi][c\xi] = 6[cdX][a\xi][b\xi]$$

$$(\equiv -6\lambda^5[abcd]^2).$$

Da diese Gleichungen alle homogen sind, so dürfen (nach § 1) die äusseren Producte darin durch die zugehörigen metrischen Grössen ersetzt werden; auch versteht es sich nach § 2 von selbst, dass die dualistischen Gleichungen ebenfalls gelten. Wir haben somit den Satz:

Bei jeder Raumcurve dritter Ordnung ist, wenn x einen beliebigen Punkt derselben, X die Tangente, ξ die Schmiegungebene in diesem Punkt, $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder, von welchem die Ecken a und d auf der Curve liegen, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beziehentlich die der Ecke d, c, b, a gegenüberliegende Seitenebene dieses Tetraeders bezeichnet:

$$3 \frac{\overline{x\alpha} \cdot \overline{d\xi}}{d\alpha} = - \frac{\overline{x\beta} \cdot \overline{c\xi}}{c\beta} = \frac{\overline{x\gamma} \cdot \overline{b\xi}}{b\gamma} = -3 \frac{\overline{x\delta} \cdot \overline{a\xi}}{a\delta};$$

$$3 \overline{xbcd} \cdot \overline{a\xi} = - \overline{axcd} \cdot \overline{b\xi} = \overline{abxd} \cdot \overline{c\xi} = -3 \overline{abcx} \cdot \overline{d\xi};$$

$$12 \overline{mom ab}, \overline{X mom cd}, \overline{X} = 3 \overline{mom ac}, \overline{X mom bd}, \overline{X} = 4 \overline{mom ad}, \overline{X mom bc}, \overline{X};$$

$$12 \overline{mom \alpha\beta}, \overline{X mom \gamma\delta}, \overline{X} = 3 \overline{mom \alpha\gamma}, \overline{X mom \beta\delta}, \overline{X} = 4 \overline{mom \alpha\delta}, \overline{X mom \beta\gamma}, \overline{X};$$

$$6 \overline{mom ab}, \overline{X} \cdot \overline{c\xi} \cdot \overline{d\xi} = 3 \overline{mom ac}, \overline{X} \cdot \overline{b\xi} \cdot \overline{d\xi} = 2 \overline{mom ad}, \overline{X} \cdot \overline{b\xi} \cdot \overline{c\xi}$$

$$= 6 \overline{mom bc}, \overline{X} \cdot \overline{a\xi} \cdot \overline{d\xi} = 3 \overline{mom bd}, \overline{X} \cdot \overline{a\xi} \cdot \overline{c\xi} = 6 \overline{mom cd}, \overline{X} \cdot \overline{a\xi} \cdot \overline{b\xi};$$

$$6 \overline{mom \alpha\beta}, \overline{X} \cdot \overline{\gamma x} \cdot \overline{\delta x} = 3 \overline{mom \alpha\gamma}, \overline{X} \cdot \overline{\beta x} \cdot \overline{\delta x} = 2 \overline{mom \alpha\delta}, \overline{X} \cdot \overline{\beta x} \cdot \overline{\gamma x}$$

$$= 6 \overline{mom \beta\gamma}, \overline{X} \cdot \overline{\alpha x} \cdot \overline{\delta x} = 3 \overline{mom \beta\delta}, \overline{X} \cdot \overline{\alpha x} \cdot \overline{\gamma x} = 6 \overline{mom \gamma\delta}, \overline{X} \cdot \overline{\alpha x} \cdot \overline{\beta x}.$$

Anmerkung. Die erste der obigen Reihen von Gleichungen, welche übrigens dualistisch zu sich selbst und der folgenden gleichwerthig ist, kann dazu benützt werden, die Schmiegungebene in einem gegebenen Punkt x der Curve oder den Berührungspunkt einer gegebenen Schmiegungeebene ξ zu construiren, da sie die Verhältnisse der Abstände der Ebene ξ von den Ecken des als bekannt angesehenen Schmiegungstetraeders $abcd$

bezw. die Verhältnisse der Abstände des Punktes x von den Seitenebenen jenes Schmiegungstetraeders, kennen lehrt. Aehnliches gilt für die übrigen Gleichungen.

§ 4.

In diesem und dem folgenden Paragraphen wollen wir eine Reihe metrischer Eigenschaften der cubischen Raumcurven zusammenstellen, in welchen ausser einem beliebigen Schmiegungstetraeder $abcd$ der Curve noch zwei willkürliche Punkte derselben mit den zugehörigen Tangenten und Schmiegungebenen vorkommen. Einem beliebigen Werthe μ des Parameters entspreche auf der Curve der Punkt y , und es sei Y die Tangente, η die Schmiegungeebene in diesem Punkt. Schreibt man in den Gleichungen 1), 2), 3) μ statt λ und verbindet die neuen Gleichungen mit den ursprünglichen durch äussere Multiplication, so ergibt sich:

$$11) \quad [x\eta] = [\xi y] = (\mu - \lambda)^3 [abcd],$$

$$12) \quad [XY] = (\mu - \lambda)^4 [abcd].$$

Mit Hilfe der Gleichungen 7) bis 12) und derjenigen, die aus 7) bis 10) durch Vertauschung von λ mit μ , x mit y u. s. w. entstehen, bilden wir folgende Proportionen:

$$13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{[x\alpha][d\eta]}{[d\alpha]} : \frac{[x\beta][c\eta]}{[c\beta]} : \frac{[x\gamma][b\eta]}{[b\gamma]} : \frac{[x\delta][a\eta]}{[a\delta]} : [x\eta] \\ = \frac{[y\delta][a\xi]}{[a\delta]} : \frac{[y\gamma][b\xi]}{[b\gamma]} : \frac{[y\beta][c\xi]}{[c\beta]} : \frac{[y\alpha][d\xi]}{[d\alpha]} : [y\xi] \\ = \lambda^3 : -3\lambda^2\mu : 3\lambda\mu^2 : -\mu^3 : (\lambda - \mu)^3; \end{array} \right.$$

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{l} [abcd][a\eta] : [axcd][b\eta] : [abxd][c\eta] : [abxc][d\eta] : [abcd][x\eta] \\ = [abcy][d\xi] : [abyd][c\xi] : [aycd][b\xi] : [ybcd][a\xi] : [abcd][y\xi] \\ = \mu^3 : -3\mu^2\lambda : 3\mu\lambda^2 : -\lambda^3 : (\mu - \lambda)^3; \end{array} \right.$$

$$15) \quad \left\{ \begin{array}{l} [abX][cdY] : [acX][bdY] : [adX][bcY] : [bcX][adY] \\ \quad \quad \quad : [bdX][acY] : [cdX][abY] : [abcd][XY] \\ = \lambda^4 : 4\lambda^3\mu : 3\lambda^2\mu^2 : 3\lambda^2\mu^2 : 4\lambda\mu^3 : \mu^4 : (\lambda - \mu)^4; \end{array} \right.$$

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} [abX][c\eta][d\eta] : [acX][b\eta][d\eta] : [adX][b\eta][c\eta] \\ : [bcX][a\eta][d\eta] : [bdX][a\eta][c\eta] : [cdX][a\eta][b\eta] \\ = \lambda^4 : 2\lambda^3\mu : 3\lambda^2\mu^2 : \lambda^2\mu^2 : 2\lambda\mu^3 : \mu^4. \end{array} \right.$$

Man kann aus diesen Proportionen auf eine Anzahl verschiedener Arten λ und μ eliminiren, indem man die einzelnen Glieder lediglich durch Multiplication verbindet. Die sich ergebenden Gleichungen sind homogen, weshalb sofort metrische Grössen statt der äusseren Producte eingeführt werden können. Wo sich durch Anwendung des Principis der Reciprocität neue Gleichungen ergeben, fügen wir diese hinzu, lassen dagegen solche Gleichungen weg, die aus bereits vorhandenen entweder durch Vertauschung

von x, X, ξ mit y, Y, η , oder durch Vertauschung von a mit d und gleichzeitige Vertauschung von b mit c , α mit δ , β mit γ abgeleitet werden können. Wir erhalten so:

Ist $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder einer Raumcurve dritter Ordnung allgemeinsten Art, wobei die Ecken a und d diejenigen sein mögen, welche auf der Curve selbst liegen, und die den Ecken d, c, b, a gegenüberliegenden Seitenebenen desselben beziehentlich mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet werden sollen; sind ferner x und y zwei beliebige Punkte dieser Curve, X und Y bezw. ξ und η die Tangenten bezw. Schmiegungebenen der Curve in jenen Punkten, so hat man:

$$\begin{aligned} \overline{x\alpha} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{y\xi} \cdot \overline{a\delta} &= \overline{y\delta} \cdot \overline{a\xi} \cdot \overline{x\eta} \cdot \overline{d\alpha}, \\ \overline{x\beta} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{y\xi} \cdot \overline{b\gamma} &= \overline{y\gamma} \cdot \overline{b\xi} \cdot \overline{x\eta} \cdot \overline{c\beta}, \\ 9\overline{x\alpha} \cdot \overline{x\delta} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{b\gamma} \cdot \overline{c\beta} &= \overline{x\beta} \cdot \overline{x\gamma} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{a\delta} \cdot \overline{d\alpha}, \\ 3\overline{x\alpha} \cdot \overline{x\gamma} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{c\beta}^2 &= \overline{x\beta}^2 \cdot \overline{c\eta}^2 \cdot \overline{b\gamma} \cdot \overline{d\alpha}, \\ \overline{abcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{y\xi} &= \overline{abc\gamma} \cdot \overline{d\xi} \cdot \overline{x\eta}, \\ \sin \overline{\xi\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma} \cdot \overline{\eta x} &= \sin \overline{\alpha\beta\gamma\eta} \cdot \overline{\delta x} \cdot \overline{\xi y}, \\ \overline{axcd} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{y\xi} &= \overline{abyd} \cdot \overline{c\xi} \cdot \overline{x\eta}, \\ \sin \overline{\alpha\xi\gamma\delta} \cdot \overline{\beta y} \cdot \overline{\eta x} &= \sin \overline{\alpha\beta\eta\delta} \cdot \overline{\gamma x} \cdot \overline{\xi y}, \\ 9\overline{abcd} \cdot \overline{abcx} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} &= \overline{axcd} \cdot \overline{abd\delta} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{c\eta}, \\ 9\sin \overline{\xi\beta\gamma\delta} \cdot \sin \overline{\alpha\beta\gamma\xi} \cdot \overline{\alpha y} \cdot \overline{\delta y} &= \sin \overline{\alpha\xi\gamma\delta} \cdot \sin \overline{\alpha\beta\xi\delta} \cdot \overline{\beta y} \cdot \overline{\gamma y}, \\ 3\overline{abcd} \cdot \overline{abd\delta} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{c\eta} &= \overline{axcd}^2 \cdot \overline{b\eta}^2, \\ 3\sin \overline{\xi\beta\gamma\delta} \sin \overline{\alpha\beta\xi\delta} \cdot \overline{\alpha y} \cdot \overline{\gamma y} &= \sin \overline{\alpha\xi\gamma\delta}^2 \cdot \overline{\beta y}^2, \\ \overline{mom\ ad}, \overline{X\ mom\ bc}, \overline{Y} &= \overline{mom\ bc}, \overline{X\ mom\ ad}, \overline{Y}, \\ \overline{mom\ a\delta}, \overline{X\ mom\ \beta\gamma}, \overline{Y} &= \overline{mom\ \beta\gamma}, \overline{X\ mom\ a\delta}, \overline{Y}, \\ 16\overline{mom\ ab}, \overline{X\ mom\ a\delta}, \overline{X\ mom\ bc}, \overline{Y\ mom\ cd}, \overline{Y} &= 3(\overline{mom\ ac}, \overline{X\ mom\ b\delta}, \overline{Y})^2, \\ 16\overline{mom\ \alpha\beta}, \overline{X\ mom\ a\delta}, \overline{X\ mom\ \beta\gamma}, \overline{Y\ mom\ \gamma\delta}, \overline{Y} &= 3(\overline{mom\ \alpha\gamma}, \overline{X\ mom\ \beta\delta}, \overline{Y})^2, \\ \overline{mom\ ad}, \overline{X} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{c\eta} &= 3\overline{mom\ bc} \cdot \overline{X} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta}, \\ \overline{mom\ a\delta}, \overline{X} \cdot \overline{\beta y} \cdot \overline{\gamma y} &= 3\overline{mom\ \beta\gamma} \cdot \overline{X} \cdot \overline{\alpha y} \cdot \overline{\delta y}, \\ 4\overline{mom\ ab}, \overline{X\ mom\ a\delta}, \overline{X} \cdot \overline{c\eta}^2 &= 3\overline{mom\ ac} \cdot \overline{X}^2 \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{d\eta}, \\ 4\overline{mom\ \alpha\beta}, \overline{X\ mom\ a\delta}, \overline{X} \cdot \overline{\gamma y}^2 &= 3\overline{mom\ \alpha\gamma} \cdot \overline{X}^2 \cdot \overline{\beta y} \cdot \overline{\delta y}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\overline{x\alpha \cdot d\eta}}{\overline{x\eta \cdot d\alpha}}\right)^4 = \left(\frac{\overline{mom ab, X mom cd, Y}}{\overline{abcd mom XY}}\right)^3 = \left(\frac{\overline{mom \alpha\beta, X mom \gamma\delta, Y}}{\overline{\sin \alpha\beta\gamma\delta mom XY}}\right)^3,$$

$$27 \left(\frac{\overline{x\alpha \cdot x\delta \cdot a\eta \cdot d\eta}}{\overline{x\eta^2 a\delta \cdot d\alpha}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{mom ad, X mom bc, Y}}{\overline{abcd mom XY}}\right)^3$$

$$= \left(\frac{\overline{mom \alpha\delta, X mom \beta\gamma, Y}}{\overline{\sin \alpha\beta\gamma\delta mom XY}}\right)^3.$$

Die gefundenen Sätze gelten natürlich auch für die cubische Parabel; einige besondere, dieser letzteren eigenthümliche Sätze ergeben sich aber, wenn man die Schmiegungeebene η ins Unendliche rücken lässt, was zur Folge hat, dass die Verhältnisse der Abstände $a\eta, b\eta, c\eta, d\eta$ den Grenzwert 1 annehmen und daher diese Abstände in gewissen der obigen Gleichungen sich gegenseitig aufheben. Weitere Beziehungen erhält man durch Division der ursprünglichen Gleichungen mit den neuen. Die Ergebnisse sind folgende:

Bezeichnet $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder einer cubischen Parabel, von welchem die Ecken a und d der Curve angehören, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beziehentlich die der Ecke d, c, b, a gegenüberliegende Seitenebene dieses Tetraeders, x einen willkürlichen Punkt der Curve, η eine willkürliche Schmiegungeebene derselben, so ist:

$$9\overline{x\alpha \cdot x\delta \cdot b\gamma \cdot c\beta} = \overline{x\beta \cdot x\gamma \cdot a\delta \cdot d\alpha},$$

$$3\overline{x\alpha \cdot x\gamma \cdot c\beta^2} = \overline{x\beta^2 \cdot b\gamma \cdot d\alpha},$$

$$9\overline{xbcd \cdot abcx} = \overline{axcd \cdot abxd},$$

$$3\overline{axcd \cdot abxd} = \overline{axcd^2},$$

$$\overline{a\eta \cdot d\eta} = \overline{b\eta \cdot c\eta},$$

$$\overline{a\eta \cdot c\eta} = \overline{b\eta^2},$$

$$\overline{mom ad, X} = 3\overline{mom bc, X},$$

$$4\overline{mom ab, X mom ad, X} = 3\overline{mom ac, X}.$$

§ 5.

Auch durch Addition bestimmter Glieder der Proportionen 13), 14) und 15), oder gewisser Wurzeln aus denselben, können auf mannigfache Weise λ und μ eliminirt werden. So erhält man z. B. aus 14), wenn man gleich die betreffenden metrischen Grössen nimmt:

$$\sqrt[3]{\overline{xbcd \cdot a\eta}} : \sqrt[3]{\overline{abcx \cdot d\eta}} = \sqrt[3]{\overline{abcd \cdot x\eta}} = \mu : -\lambda : (\mu - \lambda),$$

also:

$$\sqrt[3]{\overline{xbcd \cdot a\eta}} + \sqrt[3]{\overline{abcx \cdot d\eta}} = \sqrt[3]{\overline{abcd \cdot x\eta}},$$

welches die projective Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter ist (siehe a. a. O. S. 298). Die Gleichungen 13) werden wir meistens unberücksichtigt lassen, weil sie doch nur eine andere Form von 14) darstellen. Im Uebrigen aber in der bisherigen Weise vorgehend, fassen wir die Ergebnisse zusammen wie folgt:

Bei jeder cubischen Raumcurve ist, wenn $abcd$ irgend eines ihrer Schmiegungstetraeder vorstellt, von welchem die den Ecken d, c, b, a gegenüberliegenden Seitenebenen beziehentlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heissen und die Ecken a und d auf der Curve liegen mögen; wenn ferner x einen beliebigen Punkt der Curve, η eine beliebige Schmiegungebene derselben, X die Curventangente in x , Y diejenige in η bezeichnet:

$$\sqrt[3]{x\overline{bcd} \cdot \overline{a\eta}} + \sqrt[3]{a\overline{bcx} \cdot \overline{d\eta}} = \sqrt[3]{a\overline{bcd} \cdot \overline{x\eta}},$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 298),

$$\sqrt[3]{\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma}} + \sqrt[3]{\sin \alpha\overline{\beta\gamma\xi} \cdot \overline{\delta y}} = \sqrt[3]{\sin \alpha\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\xi y}},$$

$$3x\overline{bcd} \cdot \overline{a\eta} + a\overline{xcd} \cdot \overline{b\eta} = 3\sqrt[3]{x\overline{bcd}^2 a\overline{\eta}^2 \overline{abcd} \cdot \overline{x\eta}},$$

$$3\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma} + \sin \alpha\overline{\xi\gamma\delta} \cdot \overline{\beta y} = 3\sqrt[3]{\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta}^2 \alpha y^2 \sin \alpha\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\xi y}},$$

$$3x\overline{bcd} \cdot \overline{a\eta} - a\overline{bx d} \cdot \overline{c\eta} = 3\sqrt[3]{x\overline{bcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{abcd}^2 x\overline{\eta}^2} \\ \cdot (\sqrt[3]{x\overline{bcd} \cdot \overline{a\eta}} - \sqrt[3]{a\overline{bcx} \cdot \overline{d\eta}}),$$

$$3\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma} - \sin \alpha\overline{\beta\xi\delta} \cdot \overline{\gamma y} = 3\sqrt[3]{\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma} \sin \alpha\overline{\beta\gamma\delta}^2 \overline{\xi y}^2} \\ \cdot (\sqrt[3]{\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma}} - \sqrt[3]{\sin \alpha\overline{\beta\gamma\xi} \cdot \overline{\delta y}}),$$

$$a\overline{xcd} \cdot \overline{b\eta} + a\overline{bx d} \cdot \overline{c\eta} = 3\sqrt[3]{x\overline{bcd} \cdot \overline{abcx} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{x\eta}},$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 300),

$$\sin \alpha\overline{\xi\gamma\delta} \cdot \overline{\beta y} + \sin \alpha\overline{\beta\xi\delta} \cdot \overline{\gamma y} = \sqrt[3]{\sin \xi\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \sin \alpha\overline{\beta\gamma\xi} \cdot \sin \alpha\overline{\beta\gamma\delta} \cdot \overline{\alpha\gamma} \cdot \overline{\delta y} \cdot \overline{\xi y}},$$

ferner

$$\sqrt[4]{\text{mom } \overline{ab}, \overline{X} \text{ mom } \overline{cd}, \overline{Y}} - \sqrt[4]{\text{mom } \overline{cd}, \overline{X} \text{ mom } \overline{ab}, \overline{Y}} \\ = \sqrt[4]{\overline{abcd} \text{ mom } \overline{XY}},$$

$$4 \text{mom } \overline{ab}, \overline{X} \text{ mom } \overline{cd}, \overline{Y} - \text{mom } \overline{ac}, \overline{X} \text{ mom } \overline{bd}, \overline{Y} \\ = 4\sqrt[4]{\text{mom } \overline{ab}, \overline{X}^3 \text{ mom } \overline{cd}, \overline{Y}^3 \overline{abcd} \text{ mom } \overline{XY}},$$

$$3 \text{mom } \overline{ab}, \overline{X} \text{ mom } \overline{cd}, \overline{Y} - \text{mom } \overline{ad}, \overline{X} \text{ mom } \overline{bc}, \overline{Y} \\ = 3\sqrt[4]{\text{mom } \overline{ab}, \overline{X} \text{ mom } \overline{cd}, \overline{Y} \overline{abcd} \text{ mom } \overline{XY}} \\ \cdot (\sqrt[4]{\text{mom } \overline{ab}, \overline{X} \text{ mom } \overline{cd}, \overline{Y}} + \sqrt[4]{\text{mom } \overline{cd}, \overline{X} \text{ mom } \overline{ab}, \overline{Y}}),$$

$$\left\{ \begin{aligned} & 3 \overline{mom\ ac}, \overline{X\ mom\ bd}, \overline{Y} - 4 \overline{mom\ ad}, \overline{X\ mom\ bc}, \overline{Y} \\ & = 12 \sqrt{\overline{mom\ ab}, \overline{X\ mom\ cd}, \overline{Y}} \sqrt[4]{\overline{mom\ cd}, \overline{X\ mom\ ab}, \overline{Y\ mom\ XY} \cdot \overline{abcd}}, \\ & \left\{ \begin{aligned} & 3(\overline{mom\ ac}, \overline{X\ mom\ bd}, \overline{Y} - \overline{mom\ bd}, \overline{X\ mom\ ac}, \overline{Y}) \\ & = 4 \sqrt{3 \overline{mom\ ad}, \overline{X\ mom\ bc}, \overline{Y}} \sqrt[4]{\overline{abcd\ mom\ XY}} \\ & \cdot (\sqrt[4]{\overline{mom\ ab}, \overline{X\ mom\ cd}, \overline{Y}} + \sqrt[4]{\overline{mom\ cd}, \overline{X\ mom\ ab}, \overline{Y}}), \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

zu welcher letzteren fünf Beziehungen die reciproken durch Vertauschung von a, b, c, d mit α bzw. β, γ, δ erhalten werden können.

Es ist wieder zu bemerken, dass man specielle, nur für die cubische Parabel gültige Sätze erhält, wenn man die Schmiegungeebene η ins Unendliche verlegt, wodurch die Abstände $\overline{a\eta}, \overline{b\eta}, \overline{c\eta}, \overline{d\eta}, \overline{x\eta}$ in Wegfall kommen und die Bedeutung der Grössen $\overline{mom\ XY}$ u. s. w. sich etwas ändert, weil Y ebenfalls ins Unendliche rückt, also durch eine Stellung ersetzt werden muss (vergl. den Schlussparagraphen).

§ 6.

Die Einführung der Momente in Bezug auf die beliebige Tangente X der cubischen Raumeurve lässt sich umgehen, wenn man, wie dies H. Schröter a. a. O. gethan hat, die Schnittpunkte von X mit den zu den Punkten a und d gehörigen Schmiegungeebenen $\overline{abc} = \alpha$ und $\overline{bcd} = \delta$ — wir wollen dieselben x_1 und x_2 nennen — in Betracht zieht. Da X proportional $[x_1 x_2]$ ist, so kann bei allen in Bezug auf X homogenen Gleichungen $[x_1 x_2]$ an Stelle von X treten, wodurch z. B. das äussere Product $[abX]$ sich in das, dem Inhalt des Tetraeders $abx_1 x_2$ proportionale $[abx_1 x_2]$ verwandelt. Auf diese Weise folgen z. B. aus den in § 4 gefundenen Beziehungen

$$\overline{mom\ ad}, \overline{X \cdot b\eta \cdot c\eta} = 3 \overline{mom\ bc}, \overline{X \cdot a\eta \cdot d\eta},$$

$$4 \overline{mom\ ab}, \overline{X\ mom\ ad}, \overline{X \cdot c\eta^2} = 3 \overline{mom\ ac}, \overline{X^2 b\eta \cdot d\eta}$$

die gleichwerthigen

$$\overline{adx_1 x_2 \cdot b\eta \cdot c\eta} = 3 \overline{bcx_1 x_2 \cdot a\eta \cdot d\eta}$$

und

$$4 \overline{abx_1 x_2 \cdot adx_1 x_2 \cdot c\eta^2} = 3 \overline{acx_1 x_2^2 b\eta \cdot d\eta},$$

welches Verallgemeinerungen Schröter'scher Sätze (a. a. O. S. 302 und 303) sind. Natürlich leisten in dem besprochenen Falle zwei beliebige Punkte der Tangente X dieselben Dienste, wie die ganz speciellen x_1 und x_2 , aber wir können nach Schröter's Vorgang auch Sätze aufstellen, bei denen das nicht zutrifft.

Für die Punkte x_1 und x_2 kann man die Ausdrücke nehmen:

$$17) \quad \begin{cases} x_1 = a + 2\lambda b + \lambda^2 c, \\ x_2 = b + 2\lambda c + \lambda^2 d. \end{cases}$$

Denn, weil

$$x_2 = \frac{1}{3} \frac{dx}{d\lambda}$$

ist, so liegt dieser Punkt jedenfalls auf der zum Punkt x gehörigen Tangente X , und wegen der offenbar vorhandenen Beziehung

$$x_1 + \lambda x_2 = x$$

auch der Punkt x_1 , während andererseits der Anblick der Gleichungen 17) lehrt, dass x_1 in der Ebene abc , x_2 in der Ebene bcd sich befindet.

Multipliziert man die obigen Gleichungen beide mit der Schmiegungebene η , so ergibt sich, da nach 9)

$$\begin{aligned} [a\eta] &= \mu^3 [abcd], & [b\eta] &= -\mu^2 [abcd], & [c\eta] &= \mu [abcd], \\ [d\eta] &= -[abcd] \end{aligned}$$

ist:

$$18) \quad [x_1\eta] = \mu(\mu - \lambda)^2 [abcd], \quad [x_2\eta] = -(\mu - \lambda)^2 [abcd].$$

Weiter folgt aus den Gleichungen 17) durch äussere Multiplication mit bcd , cad u. s. w.:

$$\begin{aligned} [x_1bcd] &= [ax_2cd] = [abcd], \\ [ax_1cd] &= [abx_2d] = 2\lambda [abcd], \\ [abx_1d] &= [abcx_2] = \lambda^2 [abcd]. \end{aligned}$$

Daher hat man die Proportionen:

$$19) \quad \begin{cases} [x_1bcd][a\eta] : [ax_1cd][b\eta] : [abx_1d][c\eta] : [abcd][x_1\eta] \\ = [ax_2cd][b\eta] : [abx_2d][c\eta] : [abcx_2][d\eta] : [abcd][x_2\eta] \\ = \mu^2 : -2\lambda\mu : \lambda^2 : (\mu - \lambda)^2. \end{cases}$$

Ferner liefern uns die Gleichungen 8), wenn wir darin $[x_1x_2]$ statt X schreiben und 18) benutzen:

$$\begin{aligned} & [cdx_1x_2][a\eta][b\eta] : [bdx_1x_2][a\eta][c\eta] : [bcx_1x_2][a\eta][d\eta] \\ & : [adx_1x_2][b\eta][c\eta] : [acx_1x_2][b\eta][d\eta] : [abx_1x_2][c\eta][d\eta] : [abcd][x_1\eta][x_2\eta] \\ & = \mu^4 : 2\lambda\mu^3 : \lambda^2\mu^2 : 3\lambda^2\mu^2 : 2\lambda^3\mu : \lambda^4 : (\mu - \lambda)^4. \end{aligned}$$

Man kann wieder auf mannigfaltige Art λ und μ eliminiren und, weil die entstehenden Gleichungen homogen sind, ohne Weiteres für die äusseren Producte Tetraederinhalte bezw. Abstände einführen. Es ergibt sich so folgende neue Reihe von Beziehungen:

Wenn irgend eine Tangente einer beliebigen cubischen Raumcurve die zu den Punkten a und d gehörigen Schmiegungebenen abc und bcd eines beliebigen Schmiegungetetraeders $abcd$ derselben in den Punkten x_1 und x_2 trifft, während η eine willkürliche Schmiegungeebene jener Curve bezeichnet, so ist u. A.:

$$\overline{x_1bcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{x_2\eta} = \overline{ax_2cd} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{x_1\eta},$$

$$\overline{ax_1cd} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{x_2\eta} = \overline{abx_2d} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{x_1\eta},$$

$$\overline{abx_1d} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{x_2\eta} = \overline{abcx_2} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{x_1\eta},$$

$$4 \overline{x_1bcd} \cdot \overline{abcx_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} = \overline{ax_1cd} \cdot \overline{abx_2d} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{c\eta},$$

$$4 \overline{x_1bcd} \cdot \overline{abx_1d} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{c\eta} = \overline{ax_1cd^2} \cdot \overline{b\eta^2},$$

$$4 \overline{ax_2cd} \cdot \overline{abcx_2} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{d\eta} = \overline{abx_2d^2} \cdot \overline{c\eta^2},$$

$$\sqrt{\overline{x_1bcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{x_2\eta}} - \sqrt{\overline{abcx_2} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{x_1\eta}} = \sqrt{\overline{abcd} \cdot \overline{x_2\eta}}$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 302),

$$\sqrt{\overline{x_1bcd} \cdot \overline{a\eta}} - \sqrt{\overline{abx_1d} \cdot \overline{c\eta}} = \sqrt{\overline{abcd} \cdot \overline{x_1\eta}},$$

$$\sqrt{\overline{ax_2cd} \cdot \overline{b\eta}} - \sqrt{\overline{abcx_2} \cdot \overline{d\eta}} = \sqrt{\overline{abcd} \cdot \overline{x_2\eta}},$$

$$2 \overline{x_1bcd} \cdot \overline{a\eta} + \overline{ax_1cd} \cdot \overline{b\eta} = 2 \sqrt{\overline{x_1bcd} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{x_1\eta}},$$

$$2 \overline{ax_2cd} \cdot \overline{b\eta} + \overline{abx_2d} \cdot \overline{c\eta} = 2 \sqrt{\overline{ax_2cd} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{x_2\eta}},$$

$$\overline{ax_1cd} \cdot \overline{b\eta} + 2 \overline{abx_1d} \cdot \overline{c\eta} = -2 \sqrt{\overline{abx_1d} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{x_1\eta}},$$

$$\overline{abx_2d} \cdot \overline{c\eta} + 2 \overline{abcx_2} \cdot \overline{d\eta} = -2 \sqrt{\overline{abcx_2} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{x_2\eta}},$$

$$\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta}} - \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{d\eta}} = \sqrt[4]{\overline{abcd} \cdot \overline{x_1\eta} \cdot \overline{x_2\eta}},$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 302),

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{bdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} - \overline{acx_1x_2} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{d\eta} \\ = 2 \sqrt{\overline{bcx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta}} \sqrt[4]{\overline{abcd} \cdot \overline{x_1\eta} \cdot \overline{x_2\eta}} \\ \cdot (\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta}} + \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{d\eta}}), \end{array} \right.$$

$$2 \overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta} - \overline{bdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{c\eta} = 2 \sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2}^3 \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{a\eta}^3 \cdot \overline{b\eta}^3 \cdot \overline{x_1\eta} \cdot \overline{x_2\eta}},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{bdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{c\eta} - 2 \overline{bcx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} \\ = 2 \sqrt{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta}} \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{d\eta} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{x_1\eta} \cdot \overline{x_2\eta}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta} - \overline{bcx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta} \\ = \sqrt{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta}} \sqrt[4]{\overline{abcd} \cdot \overline{x_1\eta} \cdot \overline{x_2\eta}} (\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta}} + \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{d\eta}}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta} - \overline{acx_1x_2} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{d\eta} \\ = 2 \sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{abcd} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta} \cdot \overline{x_1\eta} \cdot \overline{x_2\eta}} \\ \cdot (\sqrt{\overline{cdx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{b\eta}} + \sqrt{\overline{bcx_1x_2} \cdot \overline{a\eta} \cdot \overline{d\eta}} + \sqrt{\overline{abx_1x_2} \cdot \overline{c\eta} \cdot \overline{d\eta}}). \end{array} \right.$$

Aus jedem der obigen Sätze folgt eine besondere, nur für cubische Parabeln gültige Beziehung durch Weglassen der auf die Ebene η bezüglichen Abstände (vergl. den Schluss von § 4). Die ersten drei Gleichungen z. B. ergeben

$$\overline{x_1 b c d} = \overline{a x_2 c d}, \quad \overline{a x_1 c d} = \overline{a b x_2 d}, \quad \overline{a b x_1 d} = \overline{a b c x_2},$$

und letztere im Verein mit jenen:

$$\overline{a \eta} : \overline{b \eta} = \overline{b \eta} : \overline{c \eta} = \overline{c \eta} : \overline{d \eta} = \overline{x_1 \eta} : \overline{x_2 \eta}.$$

Um schliesslich noch die zu den obigen dualistischen Sätze formuliren zu können, muss man die Verbindungsebenen ξ_1 und ξ_2 der Tangente $X = x_1 x_2$ mit den Curvenpunkten a und d einführen. Bei Benützung der früheren Bezeichnungen ist dann z. B.:

$$\sin \overline{\xi_1 \beta \gamma \delta} \cdot \overline{\alpha y} \cdot \overline{\xi_2 y} = \sin \alpha \overline{\xi_2 \gamma \delta} \cdot \overline{\beta y} \cdot \overline{\xi_1 y}, \quad \text{u. s. w.},$$

$$\sqrt{\overline{\sin \xi_1 \beta \gamma \delta} \cdot \overline{\alpha y}} - \sqrt{\overline{\sin \alpha \beta \xi_1 \delta} \cdot \overline{\gamma y}} = \sqrt{\overline{\sin \alpha \beta \gamma \delta} \cdot \overline{\xi_1 y}}, \quad \text{u. s. w.},$$

$$\sqrt[4]{\overline{\sin \gamma \delta \xi_1 \xi_2} \cdot \overline{\alpha y} \cdot \overline{\beta y}} - \sqrt[4]{\overline{\sin \alpha \beta \xi_1 \xi_2} \cdot \overline{\gamma y} \cdot \overline{\delta y}} = \sqrt[4]{\overline{\sin \alpha \beta \gamma \delta} \cdot \overline{\xi_1 y} \cdot \overline{\xi_2 y}}, \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 4) und 10) könnte übrigens ein Theil aller dieser Sätze auf eine andere Form gebracht werden, so dass nur Abstände zwischen Punkten und Ebenen vorkämen; der erste mit seinem reciproken z. B. auf die folgende:

$$\overline{x_1 \delta} \cdot \overline{a \eta} \cdot \overline{x_2 \eta} \cdot \overline{b \gamma} = \overline{x_2 \gamma} \cdot \overline{b \eta} \cdot \overline{x_1 \eta} \cdot \overline{a \delta},$$

$$\overline{\xi_1 d} \cdot \overline{\alpha y} \cdot \overline{\xi_2 y} \cdot \overline{\beta c} = \overline{\xi_2 c} \cdot \overline{\beta y} \cdot \overline{\xi_1 y} \cdot \overline{\alpha d}.$$

§ 7. Erstes Uebertragungsprincip.

Zufolge 11), 9) und 9') hat man

$$\frac{[x \eta]}{[x \delta][\eta d]} = \frac{[\xi y]}{[\xi d][y \delta]} = (\mu - \lambda)^3 [abcd]^{-1},$$

oder, da nach § 1 $[x \eta] = \overline{x \eta} \cdot |x| \cdot |\eta|$ u. s. w. ist,

$$\frac{\overline{x \eta}}{x \delta \cdot \overline{\eta d} \cdot |\delta| \cdot |d|} = \frac{\overline{\xi y}}{\xi d \cdot \overline{y \delta} \cdot |d| \cdot |\delta|} = (\mu - \lambda)^3 [abcd]^{-1},$$

also:

$$21) \quad \sqrt[3]{\frac{\overline{x \eta}}{x \delta \cdot \overline{\eta d}}} = \sqrt[3]{\frac{\overline{\xi y}}{\xi d \cdot \overline{y \delta}}} = (\mu - \lambda) \sqrt[3]{|d| \cdot |\delta| \cdot [abcd]^{-1}}.$$

Wir bilden nun die betrachtete Raumcurve dritter Ordnung auf eine gerade Linie ab, indem wir auf letzterer einen Anfangspunkt und die positive Richtung beliebig wählen und dem zum Parameterwerth λ gehörigen Punkt x der Curve denjenigen Punkt x' der Geraden zuordnen, dessen Entfernung vom Anfangspunkt gleich λ ist. Bezeichnet ebenso y' das Bild des zum Parameterwerth μ gehörigen Curvenpunkts y , so ist demnach die Entfernung der Bildpunkte x' und y' gleich $(\mu - \lambda)$. Sieht man d als einen

festen Punkt der Curve an, so erscheinen die Gewichte $|d|$ und $|\delta|$ als Constanten und es wird folglich die Strecke $\overline{x'y'}$ den in 21) angegebenen dritten Wurzeln proportional. Wir haben somit folgendes

1. Uebertragungsprincip: Aus jeder homogenen Beziehung zwischen Strecken einer und derselben Geraden ergibt sich ein Satz über die cubische Raumcurve, wenn man statt einer beliebigen Strecke $\overline{x'y'}$ der Geraden den Ausdruck

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{x\eta}}{\overline{x\delta \cdot \eta d}}},$$

oder den ihm gleichen

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{\xi y}}{\overline{\xi d \cdot y \delta}}}$$

setzt, wo x und y zwei beliebige Punkte der Curve, ξ und η ihre Schmiegungebenen in diesen Punkten sind, d dagegen einen willkürlichen festen Punkt der Curve, δ die Schmiegungeebene in demselben bezeichnet.

Betrachten wir das einfachste Beispiel für die Anwendung dieses Princips. Bei n beliebigen Punkten 1, 2, 3, ... n einer Geraden ist

$$\overline{12} + \overline{23} + \overline{34} + \dots + \overline{n1} = 0.$$

Dies liefert den Satz:

Sind $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, d$ ($n + 1$) beliebige Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung und $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \delta$ die zugehörigen Schmiegungebenen derselben, so ist:

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{x_1 \xi_2}}{\overline{x_1 \delta \cdot \xi_2 d}}} + \sqrt[3]{\frac{\overline{x_2 \xi_3}}{\overline{x_2 \delta \cdot \xi_3 d}}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{\overline{x_{n-1} \xi_n}}{\overline{x_{n-1} \delta \cdot \xi_n d}}} + \sqrt[3]{\frac{\overline{x_n \xi_1}}{\overline{x_n \delta \cdot \xi_1 d}}} = 0.$$

Durch die vorhin eingeführte Abbildung der Curve dritter Ordnung auf eine Gerade werden offenbar beide Linien projectiv auf einander bezogen, so dass Gleichheit zwischen dem Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten x_1, x_2, x_3, x_4 (oder den zugehörigen Schmiegungebenen) der Curve und demjenigen ihrer Bildpunkte besteht. Schreibt man aber mit Hilfe des gefundenen Uebertragungsprincips den Ausdruck hin, welcher dem Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden entspricht, so heben sich darin die auf d und δ bezüglichen Abstände gegenseitig auf und man erhält für denselben:

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{x_1 \xi_3}}{\overline{\xi_3 x_2}} : \frac{\overline{x_1 \xi_1}}{\overline{\xi_1 x_2}}} = \sqrt[3]{\frac{\overline{\xi_1 x_3}}{\overline{x_3 \xi_2}} : \frac{\overline{\xi_1 x_1}}{\overline{x_4 \xi_2}}}.$$

Augenscheinlich ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen linker Hand z. B. gleich dem Doppelverhältniss, welches die Punkte x_1, x_2 und die Schnittpunkte der Geraden $x_1 x_2$ mit den Ebenen ξ_3, ξ_4 (oder auch die Verbindungsebenen der Punkte x_1, x_2 mit der Schnittlinie von ξ_3 und ξ_4

sowie die Ebenen ξ_3 und ξ_4) zusammen liefern. Wir wollen dasselbe das Doppelverhältniss der vier Elemente $x_1 x_2 \xi_3 \xi_4$ nennen und können dann folgenden Satz aussprechen:

Das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten einer cubischen Raumeurve, oder dasjenige der zugehörigen Schmiegungebenen (das heisst das Doppelverhältniss der vier Ebenen, durch die jene vier Punkte aus irgend einer Sehne der Curve projectirt werden, bezw. das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen jene Schmiegungebenen von irgend einer „Achse“ — Schnittlinie zweier Schmiegungebenen der Curve — geschnitten werden), ist gleich der Cubikwurzel aus dem Doppelverhältniss, welches die ersten beiden Curvenpunkte zusammen mit den Schmiegungebenen in den beiden anderen, oder die ersten beiden Schmiegungebenen zusammen mit den Anschmiegungepunkten der beiden übrigen bestimmen.*

§ 8. Zweites Uebertragungsprincip.

Aus den Gleichungen 12) und 8) folgt, wenn man die zum Punkt d gehörige Tangente cd der Curve mit D bezeichnet:

$$\frac{[XY]}{[XD][YD]} = \frac{\text{mom } \overline{XY}}{\text{mom } \overline{XD} \text{ mom } \overline{YD} \cdot |D|^2} = (\mu - \lambda)^4 [abcd]^{-1},$$

oder:

$$22) \quad \sqrt[4]{\frac{\text{mom } \overline{XY}}{\text{mom } \overline{XD} \text{ mom } \overline{YD}}} = (\mu - \lambda) \sqrt[4]{|D|^2 [abcd]^{-1}}.$$

Durch eine ähnliche Betrachtung, wie die im vorhergehenden Paragraphen angestellte, findet man daher folgendes

* Man kann diesen Satz einfacher und directer beweisen, wenn man die Punkte a und d , die ja zwei beliebige Punkte der Curve sind, und zwei beliebige andere Punkte x und y derselben zusammen betrachtet. Durch äussere Multiplication der Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{und} \quad x &= a + 3\lambda b + 3\lambda^2 c + \lambda^3 d \\ y &= a + 3\mu b + 3\mu^2 c + \mu^3 d \end{aligned}$$

mit der Sehne ad der Curve erhält man

$$\begin{aligned} [adx] &= -3\lambda([abd] + \lambda[acd]), \\ [ady] &= -3\mu([abd] + \mu[acd]), \end{aligned}$$

das heisst das Doppelverhältniss der vier Punkte a, d, x, y ist gleich $\mu : \lambda$. Multiplicirt man aber jene Gleichungen mit der Schnittlinie bc der zu den Punkten a und d gehörigen Schmiegungebenen $\alpha = abc$ und $\delta = bcd$, so kommt

$$\begin{aligned} [bcx] &= [abc] + \lambda^3 [bcd], \\ [bcy] &= [abc] + \mu^3 [bcd], \end{aligned}$$

wonach das durch die Elemente α, δ, x, y bestimmte Doppelverhältniss den Werth $\mu^3 : \lambda^3$ hat.

2. Uebertragungsprincip: Aus jeder homogenen Beziehung zwischen Strecken einer und derselben Geraden ergibt sich ein Satz über die cubische Raumcurve, wenn man statt einer beliebigen Strecke der Geraden den Ausdruck

$$\sqrt[4]{\frac{\text{mom } \overline{XY}}{\text{mom } \overline{XD} \text{mom } \overline{YD}}}$$

setzt, wo X und Y zwei beliebige Tangenten der Curve sind und D eine willkürliche feste Tangente derselben bezeichnet.

Dabei hat man, wie leicht einzusehen ist, den zu zwei Tangentenpaaren XY und $X_1 Y_1$ gehörigen vierten Wurzeln dann und blos dann gleiches Vorzeichen zu geben, wenn eine veränderliche Tangente, die stetig und ohne umzukehren an der Curve so hingleitet, dass sie aus der Lage X in die Lage Y ohne Ueberschreitung der Lage D kommt, durch dieselbe Bewegung auch aus der Lage X_1 in die Lage Y_1 gelangen kann, ohne durch die Lage D hindurchgehen zu müssen.

Benützen wir als Beispiel wieder die einfachste Streckenbeziehung, zu der n Punkte einer Geraden Anlass geben. Wir erhalten den Satz:

Wenn $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, D$ ($n+1$) beliebige Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung vorstellen, so ist

$$\left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{\frac{\text{mom } \overline{X_1 X_2}}{\text{mom } \overline{X_1 D} \text{mom } \overline{X_2 D}}} + \sqrt[4]{\frac{\text{mom } \overline{X_2 X_3}}{\text{mom } \overline{X_2 D} \text{mom } \overline{X_3 D}}} + \dots \\ &+ \sqrt[4]{\frac{\text{mom } \overline{X_n X_1}}{\text{mom } \overline{X_n D} \text{mom } \overline{X_1 D}}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist die Streckengleichung, von der man ausgeht, in Bezug auf die Endpunkte der darin vorkommenden Strecken homogen, so werden in dem Satz, den das besprochene Uebertragungsprincip liefert, die Momente in Bezug auf die feste Tangente D herausfallen. So ergibt z. B. die bekannte Beziehung

$$\overline{12.34} + \overline{13.41} + \overline{14.23} = 0$$

zwischen vier beliebigen Punkten 1, 2, 3, 4 einer Geraden den Satz:

Zwischen vier beliebigen Tangenten X_1, X_2, X_3, X_4 einer cubischen Raumcurve besteht die Beziehung

$$\left\{ \begin{aligned} &\sqrt[4]{\text{mom } \overline{X_1 X_2} \text{mom } \overline{X_3 X_4}} + \sqrt[4]{\text{mom } \overline{X_1 X_3} \text{mom } \overline{X_4 X_1}} \\ &+ \sqrt[4]{\text{mom } \overline{X_1 X_4} \text{mom } \overline{X_2 X_3}} = 0. \end{aligned} \right.$$

(Dieser Satz kann übrigens leicht auf den vorhergehenden zurückgeführt werden und ist eigentlich schon in § 5 vorgekommen.)

Endlich erhalten wir noch (vergl. den Schluss von § 7) den Satz:

Das Grassmann'sche Doppelverhältniß von vier beliebigen Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung ist gleich der

vierten Potenz des Doppelverhältnisses der zugehörigen Berührungspunkte (oder der vier Schmiegungebenen, in welchen jene Tangenten liegen).*

§ 9. Drittes Uebertragungsprincip.

Wenn x und y zwei beliebige, den Parameterwerthen λ und μ entsprechende Punkte der untersuchten Raumcurve dritter Ordnung sind, so wollen wir den sechsfachen Inhalt des zur Sehne xy gehörigen Schmiegungetetraeders der Curve mit $V(xy)$ bezeichnen. Um zunächst für die beiden noch nicht bekannten Ecken dieses Tetraeders, die wir x_μ und y_λ nennen wollen, eine Darstellung zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Jeder Punkt der in x an die Curve gelegten Tangente X lässt sich in der Form

$$x + \varrho \frac{dx}{d\lambda}$$

schreiben. Damit dieser Punkt in der zum Punkt y gehörigen Schmiegungeebene η liegt, muss sein äusseres Product mit η verschwinden, also

$$[x\eta] + \varrho \left[\frac{dx}{d\lambda} \eta \right] = 0$$

sein. Nach 11) ist aber

$$[x\eta] = (\mu - \lambda)^3 [abcd],$$

also:

$$\left[\frac{dx}{d\lambda} \eta \right] = \frac{d}{d\lambda} [x\eta] = -3(\mu - \lambda)^2 [abcd],$$

mithin:

$$\varrho = \frac{\mu - \lambda}{3}.$$

Ebenso findet man für den Schnittpunkt der zum Punkt x gehörigen Schmiegungeebene ξ mit der Curventangente Y im Punkt y den Ausdruck:

* Zu dem von Grassmann aufgestellten Doppelverhältniss von vier zu einander windschiefen Geraden vergleiche man die interessanten Ausführungen von E. Study in Grassmann's gesammelten Werken Band 3 Theil 1 S. 409 (Anmerkung zu S. 272). Man beweist übrigens den obigen Satz am einfachsten so: Wir in der Anmerkung auf S. 226 sahen, ist das Doppelverhältniss der vier beliebigen Curvenpunkte a, d, x, y gleich $\mu : \lambda$. Durch äussere Multiplication der Gleichung 2) und der entsprechenden für Y mit den zu den Punkten a und d gehörigen Tangenten $A = [ab]$ und $D = [cd]$ erhält man aber

$$[AX] = \lambda^4 [abcd], \quad [XD] = [abcd],$$

$$[AY] = \mu^4 [abcd], \quad [YD] = [abcd],$$

also ist das Doppelverhältniss der vier Geraden A, D, X, Y , nämlich:

$$\frac{[AX]}{[XD]} : \frac{[AY]}{[YD]} = \frac{\text{mom } \overline{A\overline{X}}}{\text{mom } \overline{X\overline{D}}} : \frac{\text{mom } \overline{A\overline{Y}}}{\text{mom } \overline{Y\overline{D}}},$$

gleich $\mu^4 : \lambda^4$. Wie ich nachträglich bemerkt habe, hat Sturm den fraglichen Satz, als von Voss herrührend, in etwas anderer Form schon in „Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik“ Bd. 86 S. 130 (1879) mitgetheilt.

mit

$$y_\lambda = y + \sigma \frac{dy}{d\lambda},$$

$$\sigma = -\frac{\lambda - \mu}{3}.$$

Das äussere Product der Ecken des fraglichen Schmiegungstetraeders wird daher

$$[xx_\mu y_\lambda y] = \left[x \left(x + \varrho \frac{dx}{d\lambda} \right) \left(y + \sigma \frac{dy}{d\mu} \right) y \right] = -\varrho \sigma \left[x \frac{dx}{d\lambda} y \frac{dy}{d\mu} \right],$$

also, weil nach § 2

$$\left[x \frac{dx}{d\lambda} \right] = 3X, \quad \left[y \frac{dy}{d\mu} \right] = 3Y,$$

und nach 12)

$$[XY] = (\mu - \lambda)^4 [abcd]$$

ist,

$$[xx_\mu y_\lambda y] = (\mu - \lambda)^6 [abcd].$$

Bestimmen wir noch die äusseren Producte der Punkte x_μ und y_λ mit der Schmiegungebene δ . Nach 9') ist

$$[x\delta] = [abcd],$$

folglich

$$\left[\frac{dx}{d\lambda} \delta \right] = \frac{d}{d\lambda} [x\delta] = 0,$$

und daher

$$[x_\mu \delta] = [x\delta] = [abcd].$$

Denselben Werth hat offenbar $[y_\lambda \delta]$.

Also wird

$$\frac{[xx_\mu y_\lambda y]}{[x\delta][x_\mu \delta][y_\lambda \delta][y\delta]} = \frac{V(xy)}{x\delta \cdot x_\mu \delta \cdot y_\lambda \delta \cdot y\delta \cdot |\delta|^4} = (\mu - \lambda)^6 [abcd]^{-3},$$

oder

$$23) \quad \sqrt[6]{\frac{V(xy)}{x\delta \cdot x_\mu \delta \cdot y_\lambda \delta \cdot y\delta}} = (\mu - \lambda) \sqrt[6]{|\delta|^4 [abcd]^{-3}}.$$

Wir erhalten somit (vergl. die beiden vorhergehenden Paragraphen) folgendes

3. Uebertragungsprincip: Aus jeder homogenen Beziehung zwischen Strecken einer und derselben Geraden ergibt sich ein Satz über die cubische Raumcurve, wenn man statt einer beliebigen Strecke der Geraden die sechste Wurzel aus dem Inhalt eines beliebigen Schmiegungstetraeders der Curve, dividirt durch die sechste Wurzel aus dem Product der Entfernungen der Ecken dieses Tetraeders von einer willkürlichen festen Schmiegungebene der Curve, oder dualistisch die sechste Wurzel aus dem Sinus des Schmiegungstetraeders, dividirt durch die sechste Wurzel aus dem Product der Entfernungen der Seitenebenen des Tetraeders von einem willkürlichen festen Punkt der Curve, setzt.

Ueber die Vorzeichen der fraglichen sechsten Wurzeln lässt sich eine ähnliche Regel, wie in § 8, aufstellen.

Wir beschränken uns auf ein Beispiel, das dem ersten der in den §§ 7 und 8 vorgeführten entspricht.

Sind $x_1, x_2, x_3 \dots x_n, d$ ($n+1$) beliebige Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung und $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n, \delta$ die zugehörigen Schmiegungebenen, bezeichnet ferner V_{kl} resp. Sin_{kl} den sechsfachen Inhalt resp. den Sinus des zur Sehne $x_k x_l$ (oder dem Schmiegungsstrahl $\xi_k \xi_l$) gehörigen Schmiegungstetraeders; x_{kl} resp. ξ_{kl} den Schnittpunkt der Curventangente in x_k mit der Schmiegungebene ξ_l resp. die Verbindungsebene jener Tangente mit dem Punkt x_l , so ist

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{\frac{V_{12}}{x_1 \delta \cdot x_{12} \delta \cdot x_{21} \delta \cdot x_2 \delta}} + \sqrt[6]{\frac{V_{23}}{x_2 \delta \cdot x_{23} \delta \cdot x_{32} \delta \cdot x_3 \delta}} + \dots \\ & + \sqrt[6]{\frac{V_{n1}}{x_n \delta \cdot x_{n1} \delta \cdot x_{1n} \delta \cdot x_1 \delta}} = 0, \\ & \sqrt[6]{\frac{\text{Sin}_{12}}{\xi_1 d \cdot \xi_{12} d \cdot \xi_{21} d \cdot \xi_2 d}} + \sqrt[6]{\frac{\text{Sin}_{23}}{\xi_2 d \cdot \xi_{23} d \cdot \xi_{32} d \cdot \xi_3 d}} + \dots \\ & + \sqrt[6]{\frac{\text{Sin}_{n1}}{\xi_n d \cdot \xi_{n1} d \cdot \xi_{1n} d \cdot \xi_1 d}} = 0. \end{aligned}$$

Bei der cubischen Parabel, welche unter ihren Schmiegungebenen die unendlich ferne Ebene hat, kann man letztere statt der beliebigen Schmiegungeebene δ nehmen, wodurch bei der Anwendung des ersten Theils des obigen Uebertragungsprincips die Entfernungen der Ecken der Schmiegungstetraeder von δ in Wegfall kommen (vergl. den Schluss von § 4). Man erhält so das specielle Uebertragungsprincip, das Gino Loria in seiner, in der Einleitung angeführten Abhandlung ausgesprochen hat, und welches auch leicht aus einem Satz von Schröter (a. a. O. S. 308) folgt.

§ 10.

Ueber die Inhalte bezw. Sin der Schmiegungstetraeder einer cubischen Raumcurve sollen jetzt noch einige Sätze abgeleitet werden, die zum Theil in der besonderen Form, die man ihnen bei der cubischen Parabel geben kann, in Schröter's mehrfach erwähnter Arbeit (a. a. O. auf S. 307) vorkommen. Wir dürfen annehmen, die Parametervertheilung auf der Curve sei so vorgenommen, dass irgend einem bestimmten Werthe des Parameters, etwa $\lambda = -1$, ein willkürlicher Punkt e der Curve entspricht. Die Tangente bezw. Schmiegungebene in diesem Punkt heisse E bezw. ε . (Solche willkürliche, aber als fest betrachteten Elemente kamen schon in den früheren Paragraphen vor; in den §§ 7—9 waren es der Punkt d mit der Tangente D

und der Schmiegungeebene δ). Zur Vereinfachung des sprachlichen Ausdrucks werden wir einige Benennungen anwenden, die bisher schon mit Nutzen hätten gebraucht werden können. Unter der reducirten Entfernung zweier Punkte oder eines Punktes von einer Ebene, dem reducirten *sin* eines Flächenwinkels, dem reducirten Moment zweier Geraden, dem reducirten Inhalt eines Tetraeders (als bestimmt durch seine vier Ecken), dem reducirten *Sin* eines Tetraeders (als bestimmt durch seine vier Seitenebenen) u. s. w. wollen wir den Quotienten verstehen, der zum Zähler die betreffende metrische Grösse hat, zum Nenner dagegen das Product der Entfernungen der jene Grösse bestimmenden Elemente — wenn es Punkte oder Ebenen sind — vom festen Punkt e bzw. der festen Schmiegungeebene ε , oder das Product der Momente in Bezug auf die feste Tangente E , wenn es Geraden sind. Es mögen die reducirten metrischen Grössen durch Vorsetzen des Buchstabens \Re bezeichnet werden. Hiernach ist z. B. die reducirte Entfernung des Punktes x von der Ebene η

$$\Re \overline{x\eta} = \frac{\overline{x\eta}}{x\varepsilon \cdot \eta e},$$

das reducirte Moment der Geraden X und Y

$$\Re \overline{mom XY} = \frac{mom \overline{XY}}{mom \overline{XE} mom \overline{YE}},$$

der reducirte sechsfache Inhalt des Tetraeders $abcd$

$$\Re \overline{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{a\varepsilon \cdot b\varepsilon \cdot c\varepsilon \cdot d\varepsilon},$$

u. s. w. (Wenn ε mit der unendlich fernen Ebene zusammenfällt, gehen die reducirten Entfernungen von Punkten und die reducirten Inhalte in die gewöhnlichen über.) Bei der oben gemachten Annahme, dass den festen Elementen e , E , ε der Parameterwerth $\lambda = -1$ entspreche, erhält man aus den Gleichungen 11), 12) und 9):

$$24) \quad [x\varepsilon] = [\xi e] = -(1 + \lambda)^3 [abcd],$$

$$25) \quad [XE] = (1 + \lambda)^4 [abcd],$$

$$26) \quad [a\varepsilon] = [b\varepsilon] = [c\varepsilon] = [d\varepsilon] = -[abcd].$$

Seien x' und y' die Punkte, in welchen die Schmiegungeebenen ξ und η den beliebigen „Schmiegungsstrahl“ oder die „Achse“ bc (die Schnittlinie der beiden Schmiegungeebenen α und δ) schneiden. Man kann setzen

$$x' = b + \lambda c, \quad y' = b + \mu c,$$

denn es ist z. B.

$$[x'\xi] = [b\xi] + \lambda [c\xi] = (-\lambda^2 + \lambda^2) [abcd] = 0$$

(siehe Gleichung 9), also liegt in der That x' in ξ . Wegen 26) erhält man

$$[x'\varepsilon] = [b\varepsilon] + \lambda [c\varepsilon] = -(1 + \lambda) [abcd],$$

$$[y'\varepsilon] = -(1 + \mu) [abcd].$$

Ferner ist

$$[x'y'] = (\mu - \lambda)[bc].$$

Man multiplicire diese Gleichung mit einem Feld F' (äusseren Product zweier Strecken), dessen Inhalt 1 und dessen Stellung senkrecht zur Geraden bc oder $x'y'$ ist, und dividire dann durch das Product der beiden vorhergehenden Gleichungen. Es kommt

$$\frac{[x'y'F']}{[x'\varepsilon][y'\varepsilon]} = \frac{\overline{x'y'}}{x'\varepsilon \cdot y'\varepsilon \cdot |\varepsilon|^2} = \frac{\mu - \lambda}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} [bcF'],$$

oder

$$27) \quad \Re \overline{x'y'} = \frac{\overline{x'y'}}{x'\varepsilon \cdot y'\varepsilon} = \frac{\mu - \lambda}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} [bcF'] |\varepsilon|^2.$$

Dualistisch dazu ist

$$27') \quad \Re \sin \overline{\xi \eta'} = \frac{\sin \overline{\xi \eta'}}{\xi e \cdot \eta' e} = \frac{\mu - \lambda}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} [\beta \gamma F'] |e|^2,$$

wo ξ' und η' die beiden Ebenen bezeichnen, durch welche die Curvenpunkte x und y aus der beliebigen Sehne ad oder $\beta\gamma$ der Curve projectirt werden (und F' ein zu ad senkrechtcs Feld vom Inhalt 1 vorstellt).

Da ε an Stelle der in § 10 benützten festen Schmiegungeebene δ getreten ist, müssen jetzt statt $[x_\mu \delta]$ und $[y_\lambda \delta]$ die äusseren Producte $[x_\mu \varepsilon]$ und $[y_\lambda \varepsilon]$ berechnet werden. Nun ist nach 24)

$$\text{folglich} \quad [x_\mu \varepsilon] = - (1 + \lambda)^3 [abcd],$$

$$\left[\frac{dx}{d\lambda} \varepsilon \right] = \frac{d}{d\lambda} [x_\mu \varepsilon] = - 3(1 + \lambda)^2 [abcd],$$

somit

$$[x_\mu \varepsilon] = \left[\left(x + \frac{\mu - \lambda}{3} \frac{dx}{d\lambda} \right) \varepsilon \right] = - (1 + \lambda)^2 (1 + \mu) [abcd]$$

und entsprechend

$$[y_\lambda \varepsilon] = - (1 + \lambda)(1 + \mu)^2 [abcd].$$

In § 9 wurde gefunden

$$[xx_\mu y_\lambda y] = (\mu - \lambda)^6 [abcd].$$

Daher ist

$$\frac{[xx_\mu y_\lambda y]}{[x_\mu \varepsilon][x_\mu \varepsilon][y_\lambda \varepsilon][y_\lambda \varepsilon]} = \frac{\overline{xx_\mu y_\lambda y}}{x_\mu \varepsilon \cdot x_\mu \varepsilon \cdot y_\lambda \varepsilon \cdot y_\lambda \varepsilon \cdot |\varepsilon|^4} = \frac{(\mu - \lambda)^6}{(1 + \lambda)^6 (1 + \mu)^6} [abcd]^{-3},$$

mithin der reducirte sechsfache Inhalt des zur Sehne xy gehörigen Schmiegungetetraeders

$$28) \quad \Re V(xy) = \Re \overline{xx_\mu x_\lambda y} = \frac{\overline{xx_\mu x_\lambda y}}{x_\mu \varepsilon \cdot x_\mu \varepsilon \cdot y_\lambda \varepsilon \cdot y_\lambda \varepsilon} = \frac{(\mu - \lambda)^6}{(1 + \lambda)^6 (1 + \mu)^6} |\varepsilon|^4 [abcd]^{-3}.$$

Einen entsprechenden Ausdruck giebt es für den reducirten Sinus eines Schmiegungetetraeders, nämlich

$$28') \quad \Re \sin(\xi \eta) = \frac{(\mu - \lambda)^6}{(1 + \lambda)^6 (1 + \mu)^6} |e|^4 [\alpha \beta \gamma \delta]^{-3}.$$

Durch Vergleichung von 27) und 28) ergibt sich zunächst folgender Satz (vergl. den besonderen Fall bei Schröter a. a. O. S. 308):

Die bezüglich einer willkürlichen festen Schmiegungebene einer cubischen Raumcurve reducirten Inhalte der zu zwei beliebigen Sehnen dieser Curve gehörigen Schmiegungetetraeder verhalten sich zu einander, wie die sechsten Potenzen der reducirten Längen der beiden Strecken, welche die Schmiegungebenen in den Endpunkten je einer Sehne auf einem beliebig gewählten Schmiegungsstrahl (der Schnittlinie irgend zweier Schmiegungebenen der Curve) ausschneiden.

Auf Grund von 27') und 28') können wir hinzufügen, dass die fraglichen reducirten Inhalte sich auch verhalten wie die sechsten Potenzen der *sin* der Flächenwinkel, durch welche die beiden Sehnen, zu welchen die Schmiegungetetraeder gehören, aus einer beliebig gewählten Sehne der Curve projectirt werden, sowie, dass die reducirten *Sin* jener Schmiegungetetraeder in demselben Verhältniss stehen.

Die Gleichungen 11), 12), 24), 25) liefern uns ferner:

$$\frac{[x\eta]}{[x\varepsilon][\eta e]} = \frac{[\xi y]}{[\xi e][y\varepsilon]} = \frac{(\mu - \lambda)^3}{(1 + \lambda)^3(1 + \mu)^3} [abcd]^{-1},$$

$$\frac{[XY]}{[XE][YE]} = \frac{(\mu - \lambda)^4}{(1 + \lambda)^4(1 + \mu)^4} [abcd]^{-1},$$

oder:

$$29) \quad \Re \overline{x\eta} = \Re \overline{\xi y} = \frac{(\mu - \lambda)^3}{(1 + \lambda)^3(1 + \mu)^3} |\varepsilon| \cdot |e| \cdot [abcd]^{-1},$$

$$30) \quad \Re \text{mom } \overline{XY} = \frac{(\mu - \lambda)^4}{(1 + \lambda)^4(1 + \mu)^4} |E|^2 [abcd]^{-1}.$$

Sonach besteht noch, wie die Gegenüberstellung von 28) und 30) bzw. 29) zeigt, der weitere Satz:

Die Quadrate der reducirten Inhalte (wie auch der reducirten Sinus) der Schmiegungetetraeder, die zu zwei beliebigen Sehnen einer cubischen Raumcurve gehören, verhalten sich wie die dritten Potenzen der reducirten Momente der Tangenten in den Endpunkten je einer Sehne, und wie die vierten Potenzen der reducirten Entfernungen eines Endpunktes je einer Sehne von der Schmiegungebene im anderen Endpunkt.

§ 11.

H. Schröter hat a. a. O. S. 305 den Satz bewiesen:

Irgend vier Punkte einer cubischen Parabel sind die Ecken eines derselben einbeschriebenen Tetraeders; die vier Schmiegungebenen in diesen Punkten bilden ein zugehöriges, der cubischen Parabel umschriebenes Tetraeder; das Volumen

des einbeschriebenen Tetraeders ist das neunfache von dem Volumen des umschriebenen.

Nach allem Vorhergegangenen, man vergleiche namentlich § 10, dürfen wir bestimmt vermuthen, dass dieser Satz auch für beliebige Raumcurven dritter Ordnung gilt, vorausgesetzt, dass man statt der Rauminhalte selbst die bezüglich einer beliebigen Schmiegungeebene der Curve reducirten Rauminhalte nimmt. Die folgende Untersuchung wird das bestätigen und ausser dem dualistischen Satze auch noch eine neue Eigenschaft der cubischen Parabel ergeben. Wir nehmen zu Ecken des eingeschriebenen Tetraeders die zu den Parameterwerthen $0, \lambda, \mu, \infty$ gehörigen Curvenpunkte a, x, y, d , von welchen der erste und letzte ja auch als willkürlich zu betrachten sind. Fasst man das äussere Product der Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= a + 3\lambda b + 3\lambda^2 c + \lambda^3 d, \\y &= a + 3\mu b + 3\mu^2 c + \mu^3 d\end{aligned}$$

zwischen die Factoren a und d , so fallen die a und d enthaltenden Glieder weg und es kommt

$$[axyd] = 9\lambda\mu(\mu - \lambda)[abcd].$$

Daher ist:

$$31) \quad \Re \overline{axyd} = \frac{\overline{axyd}}{a\varepsilon \cdot x\varepsilon \cdot y\varepsilon \cdot d\varepsilon} = \frac{9\lambda\mu(\mu - \lambda)}{(1 + \lambda)^3(1 + \mu)^3} |\varepsilon|^4 [abcd]^{-3}.$$

Wir haben jetzt die Ecken des durch die vier Schmiegungeebenen $\alpha, \xi, \eta, \delta$ bestimmten Schmiegungetetraeders auszudrücken. Zwei derselben bestehen in den Schnittpunkten x' und y' des Schmiegungestrahles $\alpha\delta$ oder bc mit ξ und η , für welche in § 10 gefunden wurde:

$$x' = b + \lambda c, \quad y' = b + \mu c,$$

$$[x'\varepsilon] = -(1 + \lambda)[abcd], \quad [y'\varepsilon] = -(1 + \mu)[abcd].$$

Die beiden übrigen Ecken — sie mögen a' und d' heissen — liegen auf der Schnittlinie von ξ mit η und ausserdem der erste in der Ebene $\alpha = abc$, der andere in der Ebene $\delta = bcd$, können also durch Gleichungen der Form:

$$a' = a + \varrho b + \sigma c, \quad d' = b + \tau c + v d$$

dargestellt werden. Drückt man mit Hilfe der Gleichungen 9) die äusseren Producte der Punkte a' und d' mit den Ebenen ξ und η aus und setzt dieselben gleich Null, so kommt nach Weglassung des bekanntlich immer von Null verschiedenen Factors $[abcd]$:

$$\begin{aligned}\lambda^3 - \varrho\lambda^2 + \sigma\lambda &= 0, & \mu^3 - \varrho\mu^2 + \sigma\mu &= 0, \\ -\lambda^2 + \tau\lambda - v &= 0, & -\mu^2 + \tau\mu - v &= 0.\end{aligned}$$

Hieraus giebt sich

$$\varrho = \tau = \lambda + \mu, \quad \sigma = v = \lambda\mu.$$

Somit hat man

$$[a'x'y'd] = \lambda\mu(\mu - \lambda)[abcd]$$

und wegen 26)

$$[a'\varepsilon] = [d'\varepsilon] = -(1 + \lambda)(1 + \mu)[abcd].$$

Daher wird

$$32) \quad \Re \overline{a'x'y'd} = \frac{\overline{a'x'y'd}}{\overline{a'\varepsilon \cdot x'\varepsilon \cdot y'\varepsilon \cdot d'\varepsilon}} = -\frac{\lambda\mu(\mu - \lambda)}{(1 + \lambda)^3(1 + \mu)} |\varepsilon|^4 [abcd]^{-3}.$$

Folglich ist in der That

$$\Re \overline{axyd} = 9 \Re \overline{a'x'y'd}.$$

Der reciproke Satz bedarf nach § 2 keines besonderen Beweises. Er lässt sich folgendermassen aussprechen:

Der bezüglich einer beliebigen Schmiegungeebene einer cubischen Raumcurve reducirte Sinus irgend eines der Curve umschriebenen Tetraeders ist das neunfache von dem reducirten Sinus desjenigen der Curve einbeschriebenen Tetraeders, dessen Ecken in den Anschmiegungepunkten der Seitenebenen des ersten Tetraeders bestehen.

Gehen wir zu dem ersten Satz zurück und wenden ihn auf eine cubische Parabel an, so ist also, wenn ε eine beliebige Schmiegungeebene bezeichnet,

$$\frac{\overline{axyd}}{\overline{a\varepsilon \cdot x\varepsilon \cdot y\varepsilon \cdot d\varepsilon}} = 9 \frac{\overline{a'x'y'd'}}{\overline{a'\varepsilon \cdot x'\varepsilon \cdot y'\varepsilon \cdot d'\varepsilon}},$$

aber andererseits nach dem Schröter'schen Satz (der sich hieraus ergibt, wenn man ε die unendlich ferne Schmiegungeebene der cubischen Parabel bedeuten lässt),

$$\overline{axyd} = 9 \overline{a'x'y'd'}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\overline{a\varepsilon \cdot x\varepsilon \cdot y\varepsilon \cdot d\varepsilon} = \overline{a'\varepsilon \cdot x'\varepsilon \cdot y'\varepsilon \cdot d'\varepsilon},$$

oder in Worten:

Steht ein beliebiges, einer cubischen Parabel einbeschriebenes Tetraeder zu einem derselben umschriebenen Tetraeder in der Beziehung, dass die Ecken des ersteren die Anschmiegungepunkte der Seitenebenen des letzteren sind, so haben die Producte der Entfernungen der Ecken des einen und des anderen Tetraeders von irgend einer Schmiegungeebene der cubischen Parabel beide denselben Werth.

Wir wollen jetzt noch den reducirten Inhalt eines beliebigen, einer allgemeinen cubischen Raumcurve einbeschriebenen Tetraeders berechnen, dessen Ecken x_1, x_2, x_3, x_4 heissen und zu den Werthen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des Parameters gehören mögen. Der Einfachheit wegen lassen wir die Schmiegungeebene ε jetzt mit δ zusammenfallen. Es ist dann

$$x_i = a + 3\lambda_i b + 3\lambda_i^2 c + \lambda_i^3 d, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

also:

$$[x_1 x_2 x_3 x_4] = 9 \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} \cdot [abcd] = 9 \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4) \\ (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4) \end{cases} [abcd],$$

folglich [siehe 9)]:

$$33) \quad \begin{cases} \Re x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{x_1 \delta \cdot x_2 \delta \cdot x_3 \delta \cdot x_4 \delta} \\ = 9(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4) \delta^4 [abcd]^{-3}. \end{cases}$$

Der sechsfache Inhalt des zur Sehne $x_i x_k$ gehörigen Schmiegungstetraeders werde mit V_{ik} bezeichnet. Man hat (siehe § 9)

$$\text{Daher ist} \quad \Re V_{ik} = (\lambda_k - \lambda_i)^6 \delta^4 [abcd]^{-3}.$$

$$\left(\frac{1}{9} \frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{x_1 x_2 x_3 x_4} \right)^6 = \Re V_{12} \cdot \Re V_{13} \cdot \Re V_{14} \cdot \Re V_{23} \cdot \Re V_{24} \cdot \Re V_{34},$$

das heisst:

Die sechste Potenz des durch neun getheilten reducirten Inhalts eines beliebigen, einer cubischen Raumcurve eingeschriebenen Tetraeders ist gleich dem Product aus den reducirten Inhalten der zu den Kanten dieses Tetraeders gehörigen Schmiegungstetraeder der Curve.

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter a. a. O. S. 308.)

Den reciproken Satz zu formuliren, kann dem Leser überlassen bleiben.

§ 12.

Es finden sich in der schon wiederholt angeführten Abhandlung von Schröter (a. a. O. S. 314—318) auch einige (zum Theil von Hurwitz herrührende) Sätze über Inhalte von Körpern, zu deren Begrenzung Stücken der Tangentenfläche einer cubischen Parabel, oder Stücken von Kegelflächen, welche eine cubische Parabel zur Leitlinie haben, gehören. Ohne die in Betracht kommenden metrischen Eigenschaften der Collineationen genauer zu untersuchen, können wir doch, auf die Ergebnisse der letzten Paragraphen gestützt, die Regel entwickeln, nach welcher die projective Verallgemeinerung derartiger Sätze vorzunehmen ist. Es hat sich gezeigt, dass bei der projectiven Verallgemeinerung von Sätzen über eine cubische Parabel an Stelle des Inhalts eines Tetraeders der „reducirte“ Inhalt tritt, das heisst der Quotient aus dem Inhalt und dem Product der Entfernungen der Ecken des Tetraeders von einer willkürlichen Schmiegungeebene ε der Raumcurve dritter Ordnung allgemeinsten Art, welche die Stelle der cubischen Parabel einnimmt. Handelt es sich um einen beliebig begrenzten Körper, so wird man denselben in tetraedrische Elemente zerlegen. Denkt

man sich ein jedes dieser Elemente mit einer Masse versehen, die der vierten Potenz der Entfernung eines mittleren seiner Punkte von der Schmiegungebene ε umgekehrt proportional ist, so hat man offenbar beim Uebergang von der cubischen Parabel zur allgemeinsten cubischen Raumcurve die gesammte Masse des Körpers statt seines Inhaltes einzuführen. Die fraglichen Sätze von Hurwitz und Schröter nehmen dann folgende Form an:

1. Bezeichnet $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder einer beliebigen cubischen Raumcurve, von welchem die Ecken a und d auf der Curve liegen, so begrenzen die Schmiegungebenen abc und bcd nebst den Stücken von Kegelflächen dritter Ordnung, durch welche der Curvenbogen ad aus den Ecken b und c projectirt wird, einen Körper, dessen Masse ein Zehntel von der Masse des Schmiegungstetraeders beträgt, vorausgesetzt, dass man jedem Element dieser Körper eine Masse ertheilt, die der vierten Potenz der Entfernung eines mittleren seiner Punkte von einer willkürlichen Schmiegungebene ε der Curve umgekehrt proportional ist.*

2. Zieht man von a und d nach sämtlichen zwischenliegenden Punkten der cubischen Raumcurve Strahlen, so schliessen die erhaltenen Kegelstücke einen Körper ein, dessen Masse [bei derselben Voraussetzung über die Massenvertheilung wie unter 1)] drei Zehntel von der Masse des Schmiegungstetraeders $abcd$ ist.

3. Die geradlinige abwickelbare Fläche vierter Ordnung, welche von sämtlichen Tangenten der cubischen Raumcurve gebildet wird, theilt das Schmiegungstetraeder $abcd$ in zwei solche Stücke, deren Massen [bei der unter 1) getroffenen Festsetzung über die Massenvertheilung] sich zu einander verhalten, wie 29 : 1, wobei das Stück mit der grösseren Masse an der Kante ad liegt.

Um vorstehende Sätze direct zu beweisen, berechnen wir zuerst die Masse des Schmiegungstetraeders $abcd$. Wir denken uns die Parametervertheilung auf der Curve so vorgenommen, dass den positiven Werthen des Parameters λ die Punkte des zwischen a und d innerhalb des genannten Tetraeders verlaufenden Curvenbogens entsprechen. Ein beliebiger Punkt z innerhalb jenes Tetraeders ist dann durch

$$z = a + u(b - a) + v(c - a) + w(d - a)$$

mit der Beschränkung $0 \leq u + v + w < 1$

dargestellt. Durch drei Schaaren von Ebenen, welche durch je zwei der

* Will man das Auftreten unendlich grosser Massen vermeiden, so muss die Schmiegungebene ε natürlich so gewählt werden, dass sie die betrachteten Körper nicht schneidet.

drei Punkte $(b-a)$, $(c-a)$, $(d-a)$ gehen, zerlegen wir das Tetraeder in (unregelmässig hexaedrische) Elemente. Den Inhalt des an den Punkt z stossenden Elementes kann man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung gleich dem sechsfachen Inhalt des Tetraeders mit den Ecken z , $z + \frac{\partial z}{\partial u} du$, $z + \frac{\partial z}{\partial v} dv$, $z + \frac{\partial z}{\partial w} dw$, das heisst gleich

$$\frac{\begin{bmatrix} z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}}{|z|^4} du dv dw \quad \text{oder} \quad \frac{[abcd]}{|z|^4} du dv dw$$

setzen. Daher ist, wenn die Masse dieses Elementes mit dM bezeichnet und die spezifische Masse gleich 1 genommen wird:

$$\left\{ \begin{aligned} dM &= \frac{[abcd]}{z \varepsilon^4 |z|^4} du dv dw = \frac{[abcd] \cdot |\varepsilon|^4}{z \varepsilon^4 |z|^4 |\varepsilon|^4} du dv dw \\ &= \frac{[abcd] \cdot |\varepsilon|^4}{[z \varepsilon]^4} du dv dw, \end{aligned} \right.$$

oder weil [vergl. 26)] $[z\varepsilon] = [a\varepsilon] = [b\varepsilon] = [c\varepsilon] = [d\varepsilon] = -[abcd]$,

$$dM = \frac{[abcd] \cdot |\varepsilon|^3}{[a\varepsilon][b\varepsilon][c\varepsilon][d\varepsilon]} du dv dw.$$

Folglich hat man, weil das über die fraglichen Werthe von u , v , w erstreckte dreifache Integral von $du dv dw$ gleich $1/6$ ist, für die Masse des ganzen Tetraeders $abcd$:

$$M(abcd) = \frac{1}{6} \frac{[abcd] \cdot |\varepsilon|^4}{[a\varepsilon][b\varepsilon][c\varepsilon][d\varepsilon]} = \frac{1}{6} \frac{\overline{abcd}}{a\varepsilon \cdot b\varepsilon \cdot c\varepsilon \cdot d\varepsilon},$$

ein nach dem Früheren allerdings selbstverständliches Ergebniss.

Sei nun x ein beliebiger, zum Parameterwerth λ gehöriger Punkt des Curvenbogens ad , dann bildet das Tetraeder mit den Ecken

$$b, c, x, x + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda$$

ein Element des im Satz unter 1) beschriebenen Körpers. Das Verhältniss der Masse dieses Elementes zur Masse des Tetraeders $abcd$ hat (wegen

$$\left[bcx \left(x + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda \right) \right] = \left[bcx \frac{dx}{d\lambda} \right] d\lambda = 3[abcd] \lambda^2 d\lambda,$$

$$[x\varepsilon] = (1 + \lambda)^3 [abcd], \quad [a\varepsilon] = [b\varepsilon] = -[abcd]$$

den Werth

$$\frac{3 \lambda^2 d\lambda}{(1 + \lambda)^6}.$$

Da jedoch

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(1 + \lambda)^6} = \frac{1}{30}$$

ist, so wird in der That die Masse des betrachteten Körpers gleich $\frac{1}{10} M(abcd)$.

Von dem unter 2) namhaft gemachten Körper bildet das Tetraeder mit den Ecken:

$$a, x, x + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda, d$$

ein Element. Da nun

$$[\alpha\varepsilon] = [b\varepsilon] = [c\varepsilon] = [d\varepsilon]$$

und

$$\left[ax \frac{dx}{d\lambda} d\right] = 3 \left[abx \frac{dx}{d\lambda}\right]$$

ist, so hat dieser Körper, ganz der Behauptung entsprechend, eine dreimal so grosse Masse als der im Satz unter 1) vorkommende.

Die Schnittpunkte einer beliebigen Tangente X der cubischen Raumcurve mit den Schmiegungebenen abc und bcd sollen wie früher x_1 und x_2 genannt werden. Ferner mögen die Schmiegungeebene ξ und die ihr unendlich benachbarte $\xi + \frac{d\xi}{d\lambda} d\lambda$, welche sich beide in der Tangente X schneiden, die Kante bc in x' und $x' + \frac{dx'}{d\lambda} d\lambda$ treffen. Wenn λ von 0 bis ∞ wächst,

oder der Berührungspunkt x der Tangente X von a bis d fortschreitet, so setzen die verschiedenen Lagen des unendlich schmalen Tetraeders mit den Ecken $x_1, x_2, x', x' + \frac{dx'}{d\lambda} d\lambda$ einen Körper zusammen, der durch die Schmiegungebenen abc und bcd , sowie die Tangentenfläche der Curve begrenzt wird (vergl. Schröter a. a. O. S. 317). Nun ist zufolge 17)

$$x_1 = a + 2\lambda b + \lambda^2 c, \quad x_2 = b + 2\lambda c + \lambda^2 d$$

und nach § 10

$$x' = b + \lambda c,$$

also

$$\frac{dx'}{d\lambda} = c,$$

und somit

$$\left[x_1 x_2 x' \left(x' + \frac{dx'}{d\lambda} d\lambda\right)\right] = \left[x_1 x_2 x' \frac{dx'}{d\lambda}\right] = \lambda^2 [abcd].$$

Ferner erhält man mit Hilfe von 26):

$$[x_1\varepsilon] = [x_2\varepsilon] = -(1 + \lambda)^2 [abcd], \quad [x'\varepsilon] = -(1 + \lambda)[abcd].$$

Daher ist die Masse des in Rede stehenden unendlich schmalen Tetraeders gleich

$$\frac{\lambda^2 d\lambda}{(1 + \lambda)^6} M(abcd)$$

und folglich die gesammte Masse des oben genannten Körpers $\frac{1}{30} M(abcd)$, was zu beweisen war.

Die zu den obigen dualistischen Sätze würden sich nicht ohne Einführung neuer geometrischer Begriffe formuliren lassen, weshalb hier von deren weiterer Verfolgung Abstand genommen werden soll.

§ 13.

Es wurde einigemal des besonderen Falles gedacht, in welchem eine Schmiegungsebene der cubischen Raumcurve unendlich fern liegt, die Curve also eine cubische Parabel ist. Auch ohne eine besondere Beschaffenheit der Curve vorauszusetzen, kann man vielen der aufgestellten Sätze dadurch eine besondere Form geben, dass man einzelne der darin vorkommenden Punkte im Unendlichen annimmt. Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir uns auf einige kurze Andeutungen darüber beschränken; für den Kenner der Grassmann'schen Methoden versteht es sich ohnehin von selbst, wie solche Fälle zu behandeln sind.

Ist ein Punkt p in Unendliche gerückt, so kann derselbe nach Grassmann durch eine nach ihm gerichtete Strecke p' ersetzt werden. Da es sich hier um lauter homogene Gleichungen handelt, so dürfen wir p' die Länge 1 beilegen. Es tritt dann an die Stelle der Entfernung $\overline{p\varepsilon}$ des Punktes p von irgend einer Ebene ε (vom Gewicht 1) der metrische Werth des äusseren Products $[p'\varepsilon]$, welcher gleich $\sin \overline{p'\varepsilon}$, das heisst gleich dem \sin des Winkels ist, den p' und ε mit einander bilden. Nehmen wir z. B. von der ersten Gleichungsreihe des Satzes in § 3 bloß das erste und letzte Glied, was die Gleichung

$$\overline{a\delta} \cdot \overline{d\xi} \cdot \overline{x\alpha} + \overline{a\xi} \cdot \overline{d\alpha} \cdot \overline{x\delta} = 0$$

liefert*, und verlegen wir die drei Curvenpunkte a, d, x ins Unendliche, so entsteht (bei Veränderung der Buchstaben) folgender Satz:

Sind die Strecken a_1, a_2, a_3 den Asymptoten einer cubischen Hyperbel parallel und bezeichnet $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die zugehörigen Asymptotenebenen, $\overline{\alpha_i a_k}$ den Neigungswinkel von a_i gegen α_k , so ist

$$\sin \overline{a_1 \alpha_2} \sin \overline{a_2 \alpha_3} \sin \overline{a_3 \alpha_1} + \sin \overline{a_1 \alpha_3} \sin \overline{a_2 \alpha_1} \sin \overline{a_3 \alpha_2} = 0.$$

Eine unendlich ferne Gerade G kann man durch ein Feld G' von bestimmter Stellung ersetzen, dessen Flächeninhalt gleich 1 angenommen werden mag. Wenn dann H eine endliche Gerade (vom Gewicht 1) bezeichnet, so ist statt des bedeutungslos gewordenen Ausdrucks $\text{mom } GH$ der metrische Werth des äusseren Products $[G'H]$, das heisst $\sin \overline{G'H}$, der \sin des durch die Stellung von G' und die Richtung von H bestimmten Winkels, zu nehmen; ebenso statt $\text{mom } pq, G$ der metrische Werth des äusseren Products $[pqG']$, das heisst die Länge der Projection der Strecke pq auf eine zur Stellung von G' senkrechte Gerade, oder, was dasselbe ist, die Differenz der Entfernungen der Punkte p und q von einer die Stellung

* Dieser Satz könnte übrigens leicht unmittelbar aus der Thatsache abgeleitet werden, dass je drei Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve sich in einem Punkte der Verbindungsebene ihrer Anschmiegungspunkte schneiden, also der folgende Satz daraus, dass die Asymptotenebenen einer cubischen Hyperbel ein Prisma bilden.

von G' besitzenden Ebene. So können wir z. B. in der dritten Gleichungsreihe des Satzes in § 3, nämlich:

$$\left\{ \begin{array}{l} 12 \overline{mom ab}, \overline{X mom cd}, \overline{X} = 3 \overline{mom ac}, \overline{X mom bd}, \overline{X} \\ = 4 \overline{mom ad}, \overline{X mom bc}, \overline{X}, \end{array} \right.$$

die Annahme machen, dass X die unendlich ferne Tangente einer cubischen Parabel vorstelle, und erhalten dann den Satz:

Ist $abcd$ ein beliebiges Schmiegungstetraeder einer cubischen Parabel und bedeuten \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} die Entfernungen der Ecken dieses Tetraeders von einer Ebene mit Achsenstellung (das heisst einer Ebene, deren unendlich ferne Gerade mit der unendlich fernen Tangente der Curve zusammenfällt), so hat man:

$$12(\bar{a} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{d}) = 3(\bar{a} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{d}) = 4(\bar{a} - \bar{d})(\bar{b} - \bar{c}).$$

XIII.

Ueber die mechanische Erzeugung der orthogonalen Projectionen ebener Curven, der Ellipsen und der Trochoiden.

Von

Dr. N. DELAUNAY,

Professor der Mechanik an dem landwirthschaftlichen Institut in Novo-Alexandria,
Russland, Gouvernement Lublin.

Hierzu Tafel VIII Figur 1—11.

§ 1. Nehmen wir auf den vier Seiten des in Figur 1 Taf. VIII gezeichneten Gelenkrhombus $ABCD$ die vier in einer festen Geraden mn liegenden Punkte M, P, Q, N , so bleiben diese vier Punkte während der Veränderung desselben stets auf dieser Geraden, und die Aehnlichkeit der Dreiecke PDJ und MBJ giebt:

$$1) \quad \frac{JB}{JD} = \frac{MB}{PD} = \text{const.}$$

Wenn die Punkte M und N so genommen sind, dass

$$BM = BN,$$

so wird auch

$$DP = DQ$$

sein, und die Gerade BD wird der Geraden mn perpendicular.

Indem wir also die Gerade mn als eine Abscissenachse ansehen, können wir sagen: Die Ordinaten der Punkte B und D eines Gelenkrhombus $ABCD$ (Fig. 2), in welchem $BM = BN$ und die Punkte M und N längs der Abscissenachse mn gleiten, bleiben in einem constanten Verhältnisse während der Veränderung des Rhombus.

Wenn der Punkt B eine Curve σ beschreibt, so beschreibt der Punkt D eine Curve σ' , deren Ordinaten in einem constanten Verhältnisse mit den Ordinaten der Curve σ sind.

Wenn man die in einer Ebene xoy (Fig. 3) liegende Curve σ auf die Ebene xoy' orthogonal projectirt und die gemeinschaftliche Gerade ox dieser Ebenen als die Abscissenachse der orthogonalen Systeme xoy und xoy' ansieht, so sind auch die Ordinaten sp und sp' der Curve σ und ihrer orthogonalen Projection σ' in einem constanten Verhältnisse

$$\frac{sp'}{sp} = \cos \alpha,$$

wo α der Projectionswinkel ist.

Der in Figur 4 gezeichnete Mechanismus, in welchem $ABCD$ ein Rhombus ist, $BM = BN$ und die Punkte M und N längs einer Geraden gleiten, ist also ein Projector, und wenn der Punkt B des Projectors eine ebene Curve σ beschreibt, so beschreibt der Punkt D die orthogonale Projection der Curve σ .*

Der Projector kann bei Webe- und Tapetendruckerei gute Dienste leisten, sowohl als in allen denjenigen Fällen, wo eine Zeichnung in einer gegebenen Richtung verlängert oder verkürzt werden muss.

§ 2. Bekanntlich ist die orthogonale Projection des Kreises eine Ellipse. Wenn also der Punkt B eines Projectors einen Kreis beschreibt, so beschreibt der Punkt D eine Ellipse. Damit der Punkt B einen Kreis um O beschreibe, braucht man nur den Radius OB (Fig. 6) des Kreises durch eine Kurbel zu ersetzen, die sich um die feste Achse O dreht.

So bekommen wir einen Ellipsograph (Fig. 6), in welchem der Punkt D Ellipsen beschreibt.

Nebenbei ersieht man daraus, dass:

1. Wenn $AB = AM$, die Ellipse in eine Gerade mn degenerirt. In dem Falle einer gleichmässigen Drehung der Kurbel OB wird die geradlinige Bewegung des Punktes D eine harmonische.
2. Wenn $AB < AM < BM$, ist die grosse Achse der Ellipse der Geraden mn parallel und dem Diameter $2OB$ des Kreises gleich. Die Punkte B und D durchlaufen ihre Bahnen in demselben Sinne.
3. Wenn $AM < AB < BM$ ist, so ist ebenfalls die grosse Achse der Ellipse der Geraden mn parallel und gleich der $2OB$, aber die Punkte B und D durchlaufen ihre Bahnen in entgegengesetzter Richtung.
4. Ist aber $BA > BM$ (Fig. 7), so ist die grosse Achse der Ellipse der Geraden mn perpendicular und die kleine Achse $= 2OB$.
5. In dem Falle $AB = BM$ (Fig. 8) beschreibt der Punkt D einen Kreis, so dass man den Radius desselben durch eine Kurbel $O'D$ ersetzen kann. Diesen Mechanismus habe ich Reversor benannt.

In dem Reversor entsteht die Transformation der Drehung der Kurbel OB in eine Drehung der Kurbel $O'D$, als ob diese Kurbeln mit gleichen Stirnrädern versehen wären.

Diese Eigenschaft des Reversors lässt, in analoger Weise, wie es im Watt'schen Planetenrade geschieht, eine Verdoppelung der Drehungen erhalten.

§ 3. Theorem. Die Mitte des Abstandes zweier Punkte, welche zwei Kreise mit einem constanten Verhältnisse der

* Die Geradföhrung der Punkte M und N ist in Figur 5 mittelst zwei Hart'scher Mechanismen erzeugt.

Geschwindigkeiten durchlaufen, beschreibt eine Trochoide, die, je nachdem die Drehungen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne erfolgen, Epitrochoiden oder Hypotrochoiden sind.

Nehmen wir an, dass die Punkte M und N die Kreise O und O' (Fig. 9) mit einem constanten Verhältnisse der Geschwindigkeiten durchlaufen, und dass C die Mitte des Abstandes der Centra O und O' ist. Bilden wir ferner die Parallelogramme $O C A M$ und $O' C B N$, so sind $A M$ und $B N$ einander gleich und parallel. Ebenso kann man auch die Parallelogramme $A M B N$ und $A C B D$ bilden. Da p die Mitte der Diagonale $M N$ ist, so muss es auch die Mitte der Diagonale $A B$ und deswegen auch die Mitte der Diagonale $C D$ sein. Die Strecken $C A$ und $C B$ drehen sich in Folge ihres Parallelismus mit den Radien $O M$ und $O' N$ um den Punkt C mit einem constanten Verhältnisse der Geschwindigkeiten, und nach einem bekannten Satz muss der vierte Eckpunkt D des Parallelogramms $A C B D$ eine Trochoide beschreiben.* Wenn aber der Punkt D eine Trochoide beschreibt, so beschreibt der Punkt p , als die Mitte des Vectors $C D$, auch eine Trochoide. Wir haben gezeigt, dass der Punkt p die Mitte des Abstandes $M N$ ist; deshalb können wir sagen: dass die Mitte des Abstandes $M N$ eine Trochoide beschreibt, was zu beweisen war.

Man ersieht leicht, dass:

1. der Punkt p eine Hypotrochoide erzeugt, wenn die Radien $O M$ und $O' N$ sich in entgegengesetzter Richtung drehen;
2. der Punkt p eine Epitrochoide erzeugt, wenn die Radien $O M$ und $O' N$ sich in gleicher Richtung drehen;
3. der Punkt p eine Epicycloide oder Hypocycloide erzeugt, wenn die Geschwindigkeiten der Punkte M und N einander gleich sind,
4. Wenn einer der Kreise in eine Gerade degenerirt, so degenerirt die Bahn der Mitte des Abstandes $M N$ in eine Cycloide.

Um die Mitte des Abstandes $M N$ kinematisch zu erhalten, kann man die Punkte M und N durch einen gleichschenkligen Pantograph $p q r s M N$ (Fig. 10) verbinden.

Nach dem oben Gesagten kann man die graphische Construction der Cycloiden auf folgende Weise erzeugen:

Man nimmt auf einem Kreise O (Fig. 11) die Punkte: 1, 2, 3, 4... in gleichem Abstände von einander und die Punkte: 1', 2', 3', 4'... auf einer Geraden auch in gleichem Abstände von einander; man verbindet die Punkte 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'... Der geometrische Ort der Strecken 1 1', 2 2', 3 3'... ist eine Cycloide, welche verschlungen, gestreckt oder gespitzt ist, je nachdem die Kreisbogen 1 2, 2 3, 3 4... kleiner, grösser oder gleich den Strecken 1' 2', 2' 3', 3' 4'... sind.

* J. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“. 1888. Bd. I S. 136.

Kleinere Mittheilungen.

XVIII. Ueber einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert.

Die vorliegende Mittheilung bezweckt eine Erweiterung eines zahlentheoretischen Satzes, welchen Herr Schubert angegeben* und zu dem Herr Busche einen Beweis geliefert hat.**

Ist a eine positive ganze Zahl und $q = \frac{m}{n}$ (m und n relativ prim) ein positiver unechter Bruch, so mag $F_q(a)$, wenn $a \cdot q$ eine ganze Zahl ist, eben diese ganze Zahl und wenn $a \cdot q$ ein Bruch ist, die nächst grössere ganze Zahl bezeichnen. Die Operation, welche von a zu $F_q(a)$ führt, mag kurz als Operation F_q bezeichnet werden. Die zu der Operation F_q inverse Operation werde mit Φ_q bezeichnet und das Resultat dieser auf a angewandten Operation mit $\Phi_q(a)$.

Die Operation F_q kann man sich auf die Zahl a nun offenbar in der Weise angewandt denken, dass zu ma eine positive Zahl k , welche $< n$ ist, so addirt wird, dass $ma + k \equiv 0 \pmod n$ ist, alsdann ist

$$F_q(a) = \frac{ma + k}{n}.$$

Hieraus folgt nun, dass die Operation Φ_q dadurch ausgeführt werden kann, dass von dem n -fachen der vorgelegten Zahl a eine positive Zahl k ($< n$) so subtrahirt wird, dass $na - k \equiv 0 \pmod m$ ist; dann ist

$$\Phi_q(a) = \frac{na - k}{m}.$$

Hiermit ist auch zugleich die Unmöglichkeit einer Mehrdeutigkeit der Operation Φ_q bewiesen. Man sieht jedoch auch, dass die Operation Φ_q auf solche Zahlen a unanwendbar ist, für welche der kleinste positive Rest von $n \cdot a$ nach $m > n$ ist. Dem entsprechend wollen wir eine Zahl, auf welche die Operation Φ_q anwendbar ist, reducirbar in Bezug auf den Quotienten q , eine solche dagegen, auf welche diese Operation nicht anwendbar ist, unreducirbar nennen, und man sieht alsdann leicht, dass jede einer reducibaren Zahl $\pmod m$ congruente Zahl selbst wieder reducirbar,

* Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg Bd. III S. 223.

** Ib. p. 225.

jede einer unreducirbaren Zahl $\text{mod } m$ congruente selbst unreducirbar ist. Werden also alle Zahlen zu m arithmetischen Reihen von der gleichen Differenz m angeordnet, so wird jede der Reihen entweder nur reducirbare oder nur unreducirbare Zahlen enthalten, und zwar sehen wir nach dem oben Gesagten unmittelbar, dass es n solche Reihen reducirbarer und $m - n$ Reihen unreducirbarer Zahlen giebt. Die Trennung der reducirbaren und unreducirbaren Zahlen lässt sich nun leicht folgendermassen bewerkstelligen: Man nehme die Zahlen $1 \dots m - 1$ und stelle von den aus diesen durch Multiplication mit n hervorgehenden Zahlen, welche ja auch wieder unter sich alle incongruent $\text{mod } m$ sind, die kleinsten positiven Reste nach m auf, dann sind diejenigen Zahlen, deren n -faches einen kleinsten Rest nach m besitzt, welcher $< n$ ist, die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der reducirbaren Zahlen, zu denen dann noch die Reihe der durch m theilbaren Zahlen hinzukommt, während die übrigen $m - n$ Zahlen die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der unreducirbaren Zahlen sind.

Berücksichtigt man nun, dass sich jede reducirbare Zahl ihrem Begriff nach durch ein- oder mehrfache Anwendung der Operation F_q aus einer unreducirbaren Zahl ergeben muss, wegen der Eindeutigkeit der inversen Operation Φ_q aber auch nur aus einer, so ergibt sich folgender Satz:

„Zu einem beliebigen unechten Bruch $q = \frac{m}{n}$ lassen sich stets

$m - n$ Zahlen aus der Reihe $1 \dots m - 1$ so auswählen, dass, wenn man mit diesen $m - n$ Zahlen als Anfangsgliedern arithmetische Reihen von der Differenz m bildet und man auf alle Zahlen dieser $m - n$ Reihen die Operation F_q anwendet, auf die hierdurch erhaltenen Zahlen wieder dieselbe Operation u. s. f., man jede Zahl einmal erhält, aber auch nur einmal.“

Der Satz des Herrn Schubert beschränkt sich auf den Fall

$$m - n = 1.$$

Schliesslich betrachten wir noch das Beispiel $m = 7$, $n = 5$. Da die fünffachen Werthe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 nach 7 die kleinsten Reste 5, 3, 1, 6, 4, 2 besitzen, so stellen die Reihen:

2,	9,	16,	23,	30,	37,	44...
3,	10,	17,	24,	31,	38,	45...
5,	12,	19,	26,	33,	40,	47...
6,	13,	20,	27,	34,	41,	48...
7,	14,	21,	28,	35,	42,	49...

alle reducirbaren und die Reihen:

1,	8,	15,	22,	29,	36,	43,	50...
4,	11,	18,	25,	32,	39,	46...	

alle unreducirbaren Zahlen dar. In der That liefert nun eine iterirte Anwendung der Operation F_q auf die Zahlen der zweiten Serie jede Zahl einmal, aber auch nur einmal, wie nachfolgendes Schema zeigt:

1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 40...
 4, 6, 9, 13, 19, 27, 38...
 8, 12, 17, 24, 34, 48...
 11, 16, 23, 33, 47...
 15, 21, 30, 42...
 18, 26, 37...
 22, 31, 44...
 25, 35, 49...
 29, 41...
 32, 45...
 36...
 39...
 43...
 46...
 50...

Rostock, den 6. April 1895.

W. AHRENS.

XIX. Kurze Ableitung der Bedingungen, dass zwei algebraische Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben.

Mein College, Herr Prof. Stickelberger, hat mir gelegentlich bemerkt, dass man die Sätze über die Theilung von ganzen Zahlen oder von ganzen Functionen besser auf den Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen statt auf den des grössten gemeinsamen Theilers gründe. Um nämlich zu wissen, dass zwei ganze rationale Functionen von x , $f(x)$ vom m^{ten} und $g(x)$ vom n^{ten} Grade, einen gemeinsamen Theiler besitzen, der mindestens vom p^{ten} Grade ist, braucht man nur zu zeigen, dass ein gemeinsames Vielfaches, das heisst eine durch f und durch g theilbare Function, vom Grade $m + n - p$ existirt.

Ist nämlich M ein gemeinsames Vielfaches niedrigsten Grades von f und g , so muss fg durch M theilbar sein, weil sonst ein gemeinsames Vielfaches niedrigeren Grades als M existirte. Setzt man $fg = Mh$, so zeigen die Gleichungen:

$$f = \frac{M}{g} \cdot h, \quad g = \frac{M}{f} \cdot h,$$

weil M durch f und durch g theilbar ist, dass f und g den Theiler h haben. Giebt es ein gemeinsames Vielfaches vom Grade $m + n - p$, so ist M höchstens vom Grade $m + n - p$, also der Grad von h grösser oder gleich p .

In den folgenden Zeilen sollen mit Hilfe dieses Satzes die bekannten, nothwendigen und hinreichenden Bedingungen abgeleitet werden dafür, dass die beiden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen Theiler haben.

§ 1.

Sollen zwei ganze Functionen A_{n-p} , B_{m-p} (die Indices bezeichnen stets den Grad) von den Graden $n-p$ und $m-p$ gefunden werden, so dass die Function

$$1) \quad A_{n-p}f - B_{m-p}g = C_{p-1}$$

höchstens vom Grade $p-1$ werde, so hat man $n-p+1+m-p+1$ Coefficienten zu bestimmen und für sie $m+n-2p+1$ Gleichungen, indem die Potenzen x^{m+n-p} , $x^{m+n-p-1}$, ... x^p in dem Ausdruck linker Hand verschwinden müssen. Da die Gleichungen linear und homogen in den zu bestimmenden Coefficienten sind und ihre Anzahl kleiner als die der letzteren ist, lassen sich diese Gleichungen durch Werthe der Coefficienten befriedigen, die nicht alle Null sind, so dass also solche Functionen A_{n-p} , B_{m-p} stets sicher existiren.

Werden aber zwei Functionen D_{n-p} und E_{m-p} von den Graden $n-p$ und $m-p$ gesucht, die

$$2) \quad D_{n-p}f - E_{m-p}g = F_{p-2}$$

zu einer Function vom Grade $p-2$ höchstens machen, so hat man zwischen den unbekanntten Coefficienten jetzt eine Gleichung mehr wie vorhin, so dass die Zahl der Gleichungen der der Unbekanntten gleich ist.

Schreibt man

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m, \\ g &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n, \\ D_{n-p} &= r_0 x^{n-p} + r_1 x^{n-p-1} + \dots + r_{n-p}, \\ E_{m-p} &= s_0 x^{m-p} + s_1 x^{m-p-1} + \dots + s_{m-p}, \end{aligned}$$

so werden diese Gleichungen:

$$3) \quad \begin{cases} 0 = a_0 r_0 - b_0 s_0, \\ 0 = a_1 r_0 - b_1 s_0 + a_0 r_1 - b_0 s_1, \\ \dots \\ 0 = a_\mu r_0 - b_\mu s_0 + \dots + a_{m-p+1} r_{n-p} - b_{n-p+1} s_{m-p}, \end{cases}$$

wo μ für $m+n-2p+1$ gesetzt ist und hier wie im Folgenden angenommen wird, dass alle a , b , r , s , deren Indices bezw. grösser als m , n , $n-p$, $m-p$ sind, Null gesetzt werden.

Sollen also nicht alle r und s Null sein, in welchem Falle auch D_{n-p} , E_{m-p} identisch Null wären, so muss die Determinante

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_0 0 & 0 & b_0 0 & 0 \\ a_1 a_0 & 0 & b_1 b_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\mu a_{\mu-1} \dots a_{m-p+1} & b_\mu b_{\mu-1} \dots b_{n-p+1} \end{vmatrix}$$

von $\mu + 1 = m + n - 2p + 2$ Zeilen und Reihen Null sein. Und umgekehrt, wenn diese Determinante verschwindet, gibt es sicher Werthe der Coefficienten r , s , die nicht alle Null sind und also Functionen der gewünschten Eigenschaft liefern. Weiss man andererseits, dass es solche Functionen giebt, dass also die r und s nicht alle Null sind, so muss $\Delta_p = 0$ sein. Kann man daher Functionen finden, für die

$$D_{n-p}f - E_{m-p}g$$

vom $p - 2^{\text{ten}}$ Grade höchstens ist, so ist $\Delta_p = 0$; und umgekehrt, wenn $\Delta_p = 0$ ist, giebt es solche Functionen.

Dies hat nur einen Sinn, wenn $p \geq 2$ ist. Für $p = 1$ ist aber $\Delta_1 = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass es Functionen D_{n-1} und E_{m-1} giebt, die nicht identisch Null sind und die Gleichung

$$4) \quad D_{n-1}f = E_{m-1}g$$

erfüllen.

§ 2.

Gesetzt, es hätten f und g einen grössten gemeinsamen Theiler h vom q^{ten} Grade. Stellt man sich die q -Gleichungen auf, die für $p = 1, 2, \dots, q$ der Gleichung 1) entsprechen, so sind die Functionen C_0, C_1, \dots, C_{q-1} alle durch den Theiler h vom Grade q theilbar und daher, weil sie niedrigeren Grades sind, alle gleich Null. Die Gleichung 4) ist daher durch

$$D_{n-1} = A_{n-1}, \quad E_{m-1} = B_{m-1}$$

erfüllt, und den Gleichungen 2) wird durch

$$D_{n-p} = A_{n-p}, \quad E_{m-p} = B_{m-p}, \quad F_{p-2} = 0$$

genügt; deswegen müssen die Determinanten $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_q$ alle Null sein.

Seien nun diese Determinanten alle Null, dagegen Δ_{q+1} nicht Null. Dann können f und g keinen Theiler haben, dessen Grad q überstiege. Dass sie aber einen Theiler q^{ten} Grades haben folgt so:

Weil $\Delta_1 = 0$ ist, gilt die Gleichung 4), die zeigt, dass die Function $D_{n-1}f = E_{m-1}g$ vom Grade $m + n - 1$ sowohl durch f wie durch g theilbar ist. Folglich haben f und g sicher mindestens einen gemeinsamen Theiler ersten Grades. Wegen $\Delta_2 = 0$ besteht eine Gleichung:

$$D_{n-2}f - E_{m-2}g = F_0.$$

Weil aber f und g einen Theiler ersten Grades haben, muss die Constante $F_0 = 0$ sein. Daher ist:

$$D_{n-2} f = E_{m-2} g$$

ein gemeinsames Vielfaches von f und g vom Grade $m + n - 2$ und die beiden Functionen haben also sicher mindestens einen gemeinsamen Theiler zweiten Grades. Deswegen wird in der Gleichung:

$$D_{n-3} f - E_{m-3} g = F_1,$$

die wegen $\Delta_3 = 0$ besteht, $F_1 = 0$, weil es höchstens vom ersten Grade ist und durch eine Function zweiten Grades theilbar sein muss. Die Gleichung

$$D_{n-3} f = E_{m-3} g$$

zeigt dann, dass f und g mindestens einen gemeinsamen Theiler dritten Grades haben u. s. w., bis schliesslich $\Delta_q = 0$ auf einen Theiler q^{ten} Grades führt.

Also sind die Gleichungen

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \dots, \Delta_q = 0$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die beiden Functionen f und g einen grössten gemeinsamen Theiler h vom q^{ten} Grade haben.

§ 3.

Bildet man nun die Gleichung

$$A_{n-q-1} f = B_{m-q-1} g = C_q,$$

so muss C_q durch h theilbar sein. Wäre es nicht vom q^{ten} , sondern von einem niedrigeren Grade, so müsste es also identisch Null sein. Dann wäre aber

$$A_{n-q-1} f - B_{m-q-1} g$$

ein gemeinsames Vielfaches von f und g vom Grade $m + n - q - 1$, f hätte also mit g einen Factor $(q + 1)^{\text{ten}}$ Grades gemein und Δ_{q+1} wäre Null gegen die Annahme. Da C_q vom q^{ten} Grade und durch h theilbar ist, kann es sich von h nur um einen constanten Factor unterscheiden. Setzt man

$$C_q = c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \dots + c_q,$$

$$A_{n-q-1} = u_0 x^{n-q-1} + u_1 x^{n-q-2} + \dots + u_{n-q-1},$$

$$B_{m-q-1} = v_0 x^{m-q-1} + v_1 x^{m-q-2} + \dots + v_{m-q-1},$$

so ist $c_0 \neq 0$ und man hat zur Bestimmung der u , v und c die Gleichungen

$$0 = a_0 u_0 - l_0 v_0,$$

$$0 = a_1 u_0 - b_1 v_0 + a_0 r_1 - b_0 v_1,$$

$$\dots$$

$$0 = a_{\mu-1} u_0 - b_{\mu-1} v_0 + \dots + a_{m-q-1} u_{n-q-1} - b_{n-p-1} v_{m-q-1},$$

in denen $\mu = m + n - 2q - 1$ ist, neben den Gleichungen:

$$0 = a_\mu u_0 - b_\mu v_0 + \dots + a_{m-q} u_{n-q-1} - b_{n-q} v_{m-q-1} = c_0$$

$$0 = a_{\mu+\lambda} u_0 - b_{\mu+\lambda} v_0 + \dots + a_{m-q+\lambda} u_{n-q-1} - b_{n-q+\lambda} v_{m-q-1} = c_\lambda$$

für $\lambda = 1, 2 \dots q$.

Eliminirt man aus den ersten μ Gleichungen, der für c_0 und der für c_λ die u und die v , so folgt

$$c_\lambda \Delta_{q+1} = c_0 I_\lambda,$$

wo I_λ wieder eine Determinante aus den a und den b ist. Weil $c_0 \neq 0$ und $\Delta_{q+1} \neq 0$, ist demnach

$$\frac{c_\lambda}{c_0} = \frac{I_\lambda}{\Delta_{q+1}},$$

so dass der grösste gemeinsame Theiler von f und g sich in die Form bringen lässt:

$$x^q + \frac{I_1}{\Delta_{q+1}} x^{q-1} + \frac{I_2}{\Delta_{q+1}} x^{q-2} + \dots + \frac{I_q}{\Delta_{q+1}}.*$$

Freiburg i. Br., Januar 1895.

J. LÜROTH.

XX.** Wärme-Capacitäten

sind mehr als zweierlei zu unterscheiden. Oder bleibt man zunächst bei den beiden bekannten stehen, der specifischen Wärme c_p bei constantem Drucke und bei der specifischen Wärme c_v bei constantem Volum, so habe ich für Wasser nach dem Vorgange von Clausius im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift S. 126 c_v bei 25° und bei 50° um etwas höher gefunden als Clausius, beziehungsweise aber erst in der vierten und dritten Decimale.

Es ist	bei 0°	25°	50°	100°
	$c_p = 1,0000$	1,0016	1,0042	1,0130,
	$c_v = 0,9995$	0,9917	0,9675	0,8689?

Das Fragezeichen bei der letzten Zahl bedeutet, dass ich diesmal auch für 100° die Rechnung nach der Formel

$$c = c_p - \frac{\tau}{\kappa} \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot v$$

unternahm, wo $\tau = 373$, $\kappa = 425$, α der von Clausius bei der Berechnung einer anderen specifischen Wärme (wovon unten***) benutzte thermische Ausdehnungscoefficient 0,00080, $v = 0,001043$ das Volum von 1 Kilogramm in Cubikmetern. Und für β , den mechanischen Ausdehnungs-

* Vergl. Weierstrass Abhandlung aus der Functionenlehre, S. 120 und 121. Berlin 1886.

** Für die beiden folgenden Mittheilungen dient als Einleitung der vorletzte Absatz von S. 185, wie für die Mittheilungen S. 185, 187 und 188.

*** Siehe auch S. 126 l. c. und die Anmerkung S. 64 in diesem Bande, von welcher aber die drei Zeilen über die Zahlen 0,945 und 0,959 wegfallen sollen, indem erstere richtiger ist als letztere. Ueber die Reihe c_v siehe auf S. 192 l. c.

Coefficienten, extrapolierte ich (auf eigene Rechnung und Gefahr) zu den von Clausius VIII § 5 angegebenen drei Werthen für eine Atmosphäre, die also noch mit 10334 zu dividiren sind, beziehungsweise den vierten:

$$\beta = 0,000\ 050 \quad 0,000\ 046 \quad 0,000\ 044 \quad 0,000\ 042?$$

Die vorige Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$c_v = c_p - \frac{\tau}{\kappa} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial p}{\partial \tau},$$

worin beide Differentialquotienten partielle sind.

Hiervon wohl zu unterscheiden ist eine dritte spezifische Wärme c' , die man neuerer Zeit auch berechnet hat, nämlich:

$$c' = c_p - \frac{\tau}{\kappa} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{dp}{d\tau},$$

worin der Differentialquotient $\frac{dp}{d\tau}$ nicht partiell, sondern total zu verstehen ist. Clausius berechnet denselben für das Wasser von 0° (siehe S. 126 des vorigen Bandes dieser Zeitschrift)

$$c' = 0,945^*$$

und Kirchhoff hat dasselbe Resultat in IX § 5.

Für Wasser von 100° ist nach Clausius $c' = 1,0130 - 0,0003$, also nahe gleich dem betreffenden c_p , wovon ich S. 126 l.c. schon gesprochen habe.

Aber für Eis von 0° hat Clausius und mit ihm Kirchhoff an der letztgenannten Stelle den cubischen Ausdehnungs-Coefficienten zu 0,000153 genommen, während in den Tabellen von Landolt und Börnstein (1. und 2. Auflage) der merklich kleinere Werth 0,00011 steht, so dass statt

$$c' = c_p + 0,151 = 0,48 + 0,15 = 0,63$$

stehen muss:

$$c' = c_p + 0,11 = 0,48 + 0,11 = 0,59.$$

Zieht man diese beiden, für Wasser und Eis von 0° erhaltenen Zahlen von einander ab, so erhält man 0,36 statt 0,32 (0,314 bei Clausius und Kirchhoff), und diese Differenz ist zu verwenden bei der Gleichung

$$\frac{dr}{d\tau} = 0,36 + \frac{r}{\tau},$$

in welcher r die latende Schmelzwärme bedeutet, welche bekanntlich 79 Calorien beträgt. Da also $r : \tau = 79 : 273 = 0,29$, so wird

$$\frac{dr}{d\tau} = 0,65,$$

statt 0,60 bei Clausius und Kirchhoff.**

* Praktisch ist das spezifische Volum 0,00100012 von 0,001 nicht zu unterscheiden.

** r bedeutet Calorie durch Gewicht 1, also so viel wie Temperaturgrad; oder, wenn man lieber will: $r : 1$, τ ist eine reine Zahl, wie die spezifischen Wärmehzahlen.

Zum Schlusse will ich nochmals auf den thermischen Ausdehnungs-Coefficienten

$$\frac{\partial v}{v \partial \tau}$$

hinweisen, oder α , der beim Wasser von 0° nach Kopp zu $-0,000061$ angenommen wird, während er in den Tabellen von Landolt und Börnstein gleich $-0,000055$ ist zwischen 0° und 1° . Ich habe in den letzten Jahrgängen des „Repertoriums der Physik“ aus dem Volum 1,00012 von 1 Gramm Wasser bei 0° und 8° , während 1 bei 4° gilt, gemäss der Annäherungsformel, die bis zu 20° sehr genügende Werthe giebt,

$$v = v_0(1 - at + bt^2),$$

das $a = 0,000060$ und $b = 0,0000075$ berechnet, wonach also

$$\left(\frac{\partial v}{v \partial \tau}\right)_{t=0} = -a = -0,000060$$

sich ergibt, mit fast völliger Uebereinstimmung gegenüber dem von Kopp angegebenen Werthe.

Wegen der auch hierher gehörigen specifischen Wärme des gesättigten Wasserdampfes, wie sie Clausius genannt hat, verweise ich auf ihn (VI) und auf Kirchhoff (VIII), worüber auch unter meinem folgenden Titel noch theilweise die Rede kommen wird.

XXI. Gemisch von Flüssigkeit und Dampf.

Im vorigen Titel kam das Gemisch aus Wasser und Eis vor; in XII § 2 handelt Kirchhoff wie auch in VIII vom Gemisch aus Wasserdampf und Wasser. Es ist dafür analog

$$h' - c' = \frac{dr}{d\tau} - \frac{r}{\tau},$$

worin r die Verdampfungswärme und h' die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes ist, während r' sich auf das Wasser bezieht.

Statt des vom Buche in XII eingeschlagenen Weges dünkt mir kürzer der folgende:

$$dQ = r dx + [h'x + c'(1-x)] d\tau$$

ist die Wärmemenge für die Einheit des Gemisches, von welchem der Theil x aus Dampf besteht. Wegen der Adiabase wird sie gleich Null gesetzt und für $h' - c'$ gemäss Obigem $\tau d\left(\frac{r}{\tau}\right) : d\tau$ substituirt. Man erhält dann

$$r dx + c' d\tau + \tau d\left(\frac{r}{\tau}\right) \cdot x = 0,$$

oder

$$\frac{r}{\tau} dx + x d\left(\frac{r}{\tau}\right) + \frac{c'}{\tau} d\tau = 0,$$

oder

$$d\left(\frac{rx}{\tau}\right) + c' \frac{d\tau}{\tau} = 0.*$$

Ich habe dazu ein Beispiel gerechnet: Dampf von 150° Cels. (nicht ganz sechs Atmosphären) ströme in die freie Luft (eine Atmosphäre). Da

$$r = 607 - 0,708 t$$

nach Clausius, wo t vom gewöhnlichen Nullpunkte aus gezählt wird, so ist in der durch Integration entstandenen Gleichung (c' constant angenommen)

$$\frac{r_2 x_2}{\tau_2} - \frac{r_1 x_1}{\tau_1} = c' \log \text{nat} \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

zu setzen:

$$r_2 = \frac{607 - 0,708 \cdot 100}{373},$$

x_2 wird gesucht,

$$r_1 = \frac{607 - 0,708 \cdot 150}{423},$$

$x_1 = 1$ (da nur Dampf ausströmen soll); für c' setzte Clausius, der in VI § 12 eine Tabelle mit mehreren solchen Rechnungsergebnissen mittheilt, die spezifische Wärme des Wassers bei constantem Druck c_p und findet

$$x_2 = 0,911;$$

ich habe statt $c_p = 1,013$ (bei 100°) nur mit dem Factor 1 gerechnet und 0,92 . . .

gefunden, das ist genügende Uebereinstimmung.

Die Dichtigkeitszahlen des gesättigten Wasserdampfes, welche Kirchhoff in VIII § 3 mittheilt, gegenüber Luft als Einheit, differiren von den durch Clausius mitgetheilten (VI § 9) nur in der dritten Decimale; mit Ausnahme derjenigen bei 0°, wo Kirchhoff 0,606, Clausius 0,622 angiebt. Für das spezifische Volum (Centimeter³ durch 1 Gramm) giebt Kirchhoff ebendasselbst

$$\begin{array}{rcc} \text{bei } t = 0 & 50 & 100, \\ n \quad s = & 210600 & 12050 \quad 1650, \end{array}$$

gegen welche das spezifische Volum des Wassers σ das Wasser verschwinden muss.**

* Im Buche fehlt bei dem r durchweg der Factor κ , das mechanische Wärmeäquivalent, was in meinem Texte gar nicht auftritt.

** Demnach fällt die „genügende Annäherung“ $\sigma = 1$ weg. Aber wegen des Gliedes $\rho \frac{d\sigma}{d\tau}$ in VIII § 4 ist besondere Betrachtung und Erwähnung nöthig; bei dem nachher gerechneten Beispiele des Quecksilbers fällt es auch fort.

Oben haben wir gefunden, dass die zwei Lagen $C_1 C_2$ des Collineationscentrums, welche zu einer Geraden u gehören, symmetrisch zu u liegen. Folglich muss C_2 in p gelegen sein. Mit anderen Worten heisst dies:

$C_1 C_2$ sind in Bezug auf K^2 zu einander conjugirt.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich die Construction der Centra zu einer beliebigen Geraden u so aussprechen:

Wir zeichnen in der Involution harmonischer Pole auf y das Paar, welches zu u symmetrisch liegt. Jeder Punkt dieses Paares kann als ein Centrum C angesehen werden.

Wählen wir C beliebig, so ergibt sich u in folgender Weise:

Wir construiren zu C die Polare p in Bezug auf K^2 . Die Gerade, welche in der Mitte zwischen C und p liegt, ist u .

3. Zweite Aufgabe. Gegeben seien zwei Kreise $K^2_1 K^2_2$. Man sucht eine centrische Collineation, in der beiden Kreisen wieder Kreise entsprechen.

Wir müssen u so bestimmen, dass die Involution harmonischer Pole auf u für beide Kreise identisch ist. Dann muss u beide Kreise in denselben Punkten schneiden. u ist also die Potenzlinie beider Kreise. Zu ihr bestimmen wir die Centra $C_1 C_2$ wie bei I. Wir erhalten die Centra direct, wenn wir auf der Centrale y beider Kreise die Involutionen harmonischer Pole zeichnen. Ihr gemeinsames Paar stellt $C_1 C_2$ vor. Diese Punkte werden nur dann reell, wenn die Involution harmonischer Pole auf der Potenzlinie elliptisch ist, das heisst, wenn die Kreise $K^2_1 K^2_2$ sich nicht reell schneiden.

Zürich.

Dr. CHR. BEVEL.

XIV.

Ueber eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Mechanismen.

Von

Dr. R. MÜLLER,

Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

Hierzu Tafel IX Fig. 1—11.

Durch die Arbeiten von Hart, Kempe, Darboux, Burmester sind wir zur Kenntniss einer Reihe von übergeschlossenen Mechanismen gelangt, die alle dadurch entstehen, dass ein gewisser Punkt in der Ebene eines Gelenkvierecks an die vier Glieder desselben in bestimmter Weise gelenkig angeschlossen wird.* Um einen systematischen Zusammenhang zwischen den einzelnen hierher gebörenden Mechanismen herzustellen, werden wir zweckmässig von der Curve ausgehen, die ein Punkt, der nur mit zwei gegenüberliegenden Gliedern des Vierecks durch Gelenke verbunden ist, in Bezug auf eines der beiden anderen Glieder beschreibt. Bei jedem übergeschlossenen Mechanismus zerfällt dieselbe in einen Kreis und eine gewisse andere Curve, und dann liefert die jeweilige Art des Zerfallens ein charakteristisches Merkmal des betreffenden Mechanismus. Im weiteren Verlauf wird es sich fragen, ob wir durch Einfügung eines viergliedrigen Gelenks aus dem Gelenkviereck noch andere übergeschlossene Mechanismen bilden können, oder, ob mit den bisher bekannten Formen die Anzahl der möglichen Mechanismen dieser Art bereits erschöpft ist.

1. In Figur 1 ist $OO'R'R$ ein beliebiges ebenes Gelenkviereck; in der Ebene desselben sind an die starren Dreiecke ORS , $O'R'S'$ die Glieder SK , $S'K$ in den Punkten S , S' drehbar angeschlossen, und diese wieder sind

* Vergl. im Folgenden die Figuren 2, 4, 6, 7, 8, sowie

Hart: Proceedings of the London Mathematical Society vol. VIII p. 288;

Kempe: daselbst vol. IX p. 138;

Darboux: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^{ème} sér.
T. III p. 144;

Burmester: diese Zeitschrift 38. Jahrgang S. 193; ferner: Kinematik I
S. 571, 595, 598.

im Punkte K zu einem gelenkigen Knie SKS' verbunden. In dem so entstehenden zwangsläufigen Mechanismus beschreibt der Punkt K in Bezug auf das feste Glied OO' eine Curve k , die wir im Folgenden kurz als Kniecurve bezeichnen wollen. Die Gleichung derselben soll zunächst ermittelt werden.

Es sei $OO' = m$, $RR' = n$, $OR = r$, $O'R' = r'$, $OS = s$, $O'S' = s'$, Winkel $ROS = \alpha$, Winkel $R'O'S' = \alpha'$, $KS = l$, $KS' = l'$. Wir bezeichnen ferner mit x, y die rechtwinkligen Coordinaten von K in Bezug auf O als Anfangspunkt, OO' als x -Achse, mit ϑ, ϑ' bez. die Winkel, welche $OR, O'R'$ mit der Richtung OO' einschliessen. Dann ist

$$\begin{aligned} [x - s \cos(\vartheta - \alpha)]^2 + [y - s \sin(\vartheta - \alpha)]^2 &= l^2, \\ [x - m - s' \cos(\vartheta' - \alpha')]^2 + [y - s' \sin(\vartheta' - \alpha')]^2 &= l'^2, \\ (m + r' \cos \vartheta' - r \cos \vartheta)^2 + (r \sin \vartheta - r' \sin \vartheta')^2 &= n^2. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha - y \sin \alpha &= a, \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha &= b, \\ (x - m) \cos \alpha' + y \sin \alpha' &= a', \\ (x - m) \sin \alpha' + y \cos \alpha' &= b', \\ x^2 + y^2 + s^2 - l^2 &= P, \\ (x - m)^2 + y^2 + s'^2 - l'^2 &= P', \\ m^2 - n^2 + r^2 + r'^2 &= q^2, \end{aligned}$$

so gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2as \cos \vartheta + 2bs \sin \vartheta = P, \\ 2) \quad & 2a's' \cos \vartheta' + 2b's' \sin \vartheta' = P', \\ 3) \quad & 2rr'(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta') + 2mr \cos \vartheta - 2mr' \cos \vartheta' = q^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Elimination von ϑ, ϑ' die Gleichung der Curve k in der Form:

$$4) \quad AB + C^2 = 0,$$

wobei

$$\begin{cases} A = r^2 r'^2 P P' + 2m r r' (r s' a' P - r' s a P') + 2r r' s s' [2m^2 b b' - q^2 (a a' + b b')], \\ B = P P' \{ m^2 [r^2 s'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + r'^2 s^2 (a^2 + b^2) P'^2 - 2r r' s s' (a a' + b b') P P'] \\ \quad + 4m r r' s s' (a b' - a' b) (r' s' b' P + r s b P') \\ \quad - 2m s s' q^2 [r s' a (a'^2 + b'^2) P - r' s a' (a^2 + b^2) P'] \\ \quad + s^2 s'^2 q^4 (a^2 + b^2) (a'^2 + b'^2) - 4r^2 r'^2 s^2 s'^2 (a b' - a' b)^2 \\ \quad - 4m^2 s^2 s'^2 [r^2 b^2 (a'^2 + b'^2) + r'^2 b'^2 (a^2 + b^2)] \} \\ \quad + 2r r' [s'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + s^2 (a^2 + b^2) P'^2 - 4s^2 s'^2 (a^2 + b^2) (a'^2 + b'^2)] \\ \quad \times [m (r s' a' P - r' s a P') + 2m^2 s s' b b' - s s' q^2 (a a' + b b')], \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 C &= r^2 r'^2 [s'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + s^2 (a^2 + b^2) P'^2] \\
 &\quad - m^2 [r^2 s'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + r'^2 s^2 (a^2 + b^2) P'^2 - 2 r r' s s' (a a' + b b') P P'] \\
 &\quad - 4 m r r' s s' (a b' - a' b) (r' s' b' P + r s b P') \\
 &\quad + 2 m s s' q^2 [r s' a (a'^2 + b'^2) P - r' s a' (a^2 + b^2) P'] \\
 &\quad - s^2 s'^2 q^4 (a^2 + b^2) (a'^2 + b'^2) - 4 r^2 r'^2 s^2 s'^2 (a a' + b b')^2 \\
 &\quad + 4 m^2 s^2 s'^2 [r^2 b^2 (a'^2 + b'^2) + r'^2 b'^2 (a^2 + b^2)].
 \end{aligned} \right.$$

Nun ist

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2,$$

$$a'^2 + b'^2 = (x - m)^2 + y^2,$$

$$a a' + b b' = (x^2 + y^2 - m x) \cos(\alpha - \alpha') + m y \sin(\alpha - \alpha'),$$

$$a b' - a' b = -(x^2 + y^2 - m x) \sin(\alpha - \alpha') + m y \cos(\alpha - \alpha'),$$

folglich:

$$A = r^2 r'^2 (x^2 + y^2)^2 + \dots$$

$$B = m^2 [r^2 s'^2 + r'^2 s^2 - 2 r r' s s' \cos(\alpha - \alpha')] (x^2 + y^2)^5 + \dots,$$

während C einen Ausdruck sechsten Grades darstellt. Der Factor

$$r^2 s'^2 + r'^2 s^2 - 2 r r' s s' \cos(\alpha - \alpha') = [r s' - r' s \cos(\alpha - \alpha')]^2 + r'^2 s^2 \sin^2(\alpha - \alpha')$$

verschwindet nur für $\alpha = \alpha'$, $r s' = r' s$; die Kniecurve ist also von der vierzehnten Ordnung, sobald nicht die Dreiecke ORS und $O'R'S'$ gleichsinnig ähnlich sind.

2. Wir nehmen zunächst an, die Dreiecke ORS und $O'R'S'$ seien nicht gleichsinnig ähnlich. Setzen wir dann in Gleichung 4) $x^2 + y^2$ gleich einer ganzen linearen Function von x und y , so wird A vom zweiten, B vom fünften, C vom dritten Grade; die Kniecurve hat also die imaginären Kreispunkte zu siebenfachen Punkten, und ihre Focalcentra — das heisst die reellen Schnittpunkte der zweimal sieben Tangenten in den imaginären Kreispunkten — sind identisch mit den zwei bez. fünf Focalcentren der Curven $A = 0$, $B = 0$.

Ist nun der Punkt $x = \xi$, $y = \eta$ ein Focalcentrum der bicircularen Curve vierter Ordnung $A = 0$, so hat die Gerade

$$y - \eta = i(x - \xi),$$

die den Punkt ξ , η mit einem der imaginären Kreispunkte verbindet, mit $A = 0$ nur einen endlichen Schnittpunkt gemein; durch die Substitution

$$y = i(x - \xi) + \eta$$

verschwindet also in $A = 0$ das Glied mit x^2 . Setzen wir noch

$$\xi + i\eta = \zeta,$$

also

$$y = i(x - \zeta),$$

so wird:

$$\begin{aligned}
 a &= x e^{-i\alpha} + \dots \\
 b &= i x e^{-i\alpha} + \dots \\
 a' &= x e^{-i\alpha'} + \dots \\
 b' &= i x e^{-i\alpha'} + \dots \\
 a^2 + b^2 &= 2\xi x + \dots \\
 a'^2 + b'^2 &= 2(\xi - m)x + \dots \\
 aa' + bb' &= [\xi e^{i(\alpha - \alpha')} + (\xi - m)e^{-i(\alpha - \alpha')}]x + \dots \\
 ab' - a'b &= [\xi e^{i(\alpha - \alpha')} - (\xi - m)e^{-i(\alpha - \alpha')}]x + \dots \\
 P &= 2\xi x + \dots \\
 P' &= 2(\xi - m)x + \dots,
 \end{aligned}$$

und dann verschwindet in $A=0$ der Factor von x^2 , wenn

$$r r' \xi (\xi - m) + m [r s' \xi e^{-i\alpha'} - r' s (\xi - m) e^{-i\alpha}] - m^2 s s' e^{-i(\alpha + \alpha')} = 0,$$

das heisst, wenn

$$r \xi - m s e^{-i\alpha} = 0,$$

oder, wenn

$$r'(\xi - m) + m s' e^{-i\alpha'} = 0$$

ist. Bezeichnen wir demnach mit F_1, F_2 die beiden Focalcentren der Curve $A=0$, so erhalten wir für F_1 :

$$\xi = \frac{m s}{r} \cos \alpha, \quad \eta = -\frac{m s}{r} \sin \alpha,$$

und für F_2 :

$$\xi = m - \frac{m s'}{r'} \cos \alpha', \quad \eta = \frac{m s'}{r'} \sin \alpha'.$$

Es ist also $\Delta O O' F_1$ gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O R S$ und $\Delta O' O F_2$ gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O' R' S'$.

In ganz derselben Weise ergibt sich für die fünf Focalcentra der Curve $B=0$ die Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &(r s' e^{-i\alpha} - r' s e^{-i\alpha'}) \xi (\xi - m) \{ m \xi (\xi - m) [r s' \xi e^{i\alpha} - r' s (\xi - m) e^{i\alpha'}] \\
 &\quad - s s' q^2 \xi (\xi - m) + r r' [s'^2 \xi^2 e^{i(\alpha - \alpha')} + s^2 (\xi - m)^2 e^{-i(\alpha - \alpha')}] \\
 &\quad - m s s' [r' s' \xi e^{-i\alpha'} - r s (\xi - m) e^{-i\alpha}] \} = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Die Curve $B=0$ hat folglich zu Focalcentren die beiden Punkte O, O' und drei weitere Punkte G_1, G_2, G_3 , deren Coordinaten bestimmt sind durch die im Allgemeinen irreductible Gleichung dritten Grades:

$$5) \left\{ \begin{aligned}
 &m(r s' e^{i\alpha} - r' s e^{i\alpha'}) \xi^3 \\
 &+ [m^2 (2 r' s e^{i\alpha'} - r s e^{i\alpha}) - s s' (m^2 - n^2 + r^2 + r'^2) + r r' s^2 e^{-i(\alpha - \alpha')} + r r' s'^2 e^{i(\alpha - \alpha')}] \xi^2 \\
 &+ m s [s' (m^2 - n^2 + r^2 + r'^2) - m^2 r' e^{i\alpha'} + r s s' e^{-i\alpha} - r' s'^2 e^{-i\alpha'} - 2 r r' s e^{-i(\alpha - \alpha')}] \xi \\
 &+ m^2 r s^2 e^{-i\alpha} (r' e^{i\alpha'} - s) = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Die Lage der sieben Focalcentra $O, O', F_1, F_2, G_1, G_2, G_3$ der Curve k ist hiernach vollkommen unabhängig von den Gliedlängen l, l' ; sind also die Dreiecke ORS und $O'R'S'$ nicht gleichsinnig ähnlich, so beschreiben die sämtlichen ∞^2 Punkte K , die man in S und S' an das Gelenkviereck $OO'R'R$ anschliessen kann, siebenfach concentrische Kniecurven.

Ist $\alpha = \alpha' = 0$, das heisst, liegen die Anschlusspunkte S, S' auf den Vierecksseiten $OR, O'R'$, so wird die Curve k symmetrisch in Bezug auf OO' . Dann sind alle Coefficienten der Gleichung 5) reell und von den drei Punkten G_1, G_2, G_3 liegt wenigstens einer auf der Geraden OO' .

In Bezug auf das Glied RR' beschreibt der Punkt K eine Kniecurve \mathfrak{k} mit den Focalcentren $R, R', \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$. Die Punkte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ werden analog construiert, wie vorher $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$. Betrachten wir R als Anfangspunkt, RR' als x -Achse und bezeichnen die Strecken $RS, R'S'$ bez. mit t, t' , die Winkel $ORS, O'R'S'$ mit β, β' , so erhalten wir die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$, indem wir in Gleichung 5) die Grössen $m, n, s, s', \alpha, \alpha'$ bez. mit $n, m, t, t', \beta, \beta'$ vertauschen. Dabei ist:

$$te^{i\beta} = r - se^{-i\alpha}, \quad t'e^{i\beta'} = r' - s'e^{-i\alpha'}$$

3. Es sei ferner $\triangle ORS$ gleichsinnig ähnlich mit $\triangle O'R'S'$, also $\alpha = \alpha'$ und $\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$. Setzen wir

$$\frac{s}{r} = \varepsilon$$

und

$$\frac{A}{r^2 r'^2} = \mathfrak{A}, \quad \frac{B}{\varepsilon^2 r^2 r'^2} = \mathfrak{B}, \quad \frac{C}{\varepsilon^2 r^2 r'^2} = \mathfrak{C},$$

so geht die Curvengleichung 4) über in

$$6) \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varepsilon^2 \mathfrak{C}^2 = 0.$$

Gegenwärtig ist:

$$aa' + bb' = x^2 + y^2 - mx,$$

$$ab' - a'b = my,$$

$$a'P - aP' = (x \cos \alpha - y \sin \alpha)(2mx - m^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2) - mP \cos \alpha,$$

$$\left\{ \begin{aligned} (a'^2 + b'^2)P^2 + (a^2 + b^2)P'^2 - 2(aa' + bb')PP' &= m^2 PP' \\ + [(\varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2)(x^2 + y^2) - m(\varepsilon^2 r^2 \cdot l^2)(2x - m)](2mx - m^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a(a'^2 + b'^2)P - a'(a^2 + b^2)P' &= m(x^2 + y^2)P' \cos \alpha \\ + (x \cos \alpha - y \sin \alpha)[(\varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2)(x^2 + y^2) - m(\varepsilon^2 r^2 - l^2)(2x - m)], \end{aligned} \right.$$

mithin verschwinden in Gleichung 6) die Glieder vierzehnten und dreizehnten Grades, und das Glied zwölften Grades lautet:

$$[m^4 - 2\varepsilon m^2(m^2 - n^2) \cos \alpha + \varepsilon^2(m^2 - n^2)^2](x^2 + y^2)^6.$$

Die Curve wird also — durch Ablösung der doppelt zählenden unendlich fernen Geraden — zu einer sechsfach circularen Curve zwölfter Ordnung, falls nicht gleichzeitig

$$\alpha = 0, \quad \varepsilon = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

ist.

Um die Focalcentra zu bestimmen, bringen wir den mit \mathfrak{B} bezeichneten Ausdruck auf die Form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} = & PP' \{ m^2 [(a'^2 + b'^2) P^2 + (a^2 + b^2) P'^2 - 2(a'a + b'b) PP'] \\ & - 2 \varepsilon m q^2 [a(a'^2 + b'^2) P - a'(a^2 + b^2) P'] \\ & + \varepsilon^2 q^4 (a^2 + b^2) (a'^2 + b'^2) - 4 \varepsilon^2 r^2 r'^2 (a'b' - a'b)^2 \} \\ & - 2 \varepsilon^2 q^2 (a'a + b'b) [r'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + r^2 (a^2 + b^2) P'^2] \\ & - 8 \varepsilon^3 r^2 r'^2 (a^2 + b^2) (a'^2 + b'^2) [m(a'P - aP') + 2 \varepsilon m^2 b'b' - \varepsilon q^2 (a'a + b'b)] \\ & + 2 \varepsilon m \{ [r'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + r^2 (a^2 + b^2) P'^2] [2m(a^2 + b^2) \cos \alpha - mP \cos \alpha \\ & + a(\varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2 - m^2)] + 2mby [r'^2 (\varepsilon^2 r'^2 - l'^2) P^2 + r^2 (\varepsilon^2 r^2 - l^2) P'^2] \\ & - 2m^2 r'^2 y P^2 P' \sin \alpha \} \\ & + 4 \varepsilon^2 m^2 \{ b^2 [(\varepsilon^2 r^2 - l^2) (a'^2 + b'^2) - (\varepsilon^2 r'^2 - l'^2) (a^2 + b^2)] (r'^2 P - r^2 P') \\ & - mb \sin \alpha [r'^2 (a'^2 + b'^2) P^2 + r^2 (a^2 + b^2) P'^2] \\ & + m r'^2 (a^2 + b^2) PP' \sin \alpha (2b - m \sin \alpha) \}. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $y = i(x - \xi)$

verwandelt sich 6) in eine Gleichung sechsten Grades in x ; in derselben hat x^6 den Factor:

$$\begin{aligned} & (\xi - \varepsilon m e^{-i\alpha}) (\xi - m + \varepsilon m e^{-i\alpha}) \\ & \{ [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{-i\alpha}] \xi (\xi - m) + \varepsilon m e^{-i\alpha} (1 - \varepsilon e^{-i\alpha}) [r'^2 \xi - r^2 (\xi - m)] \} \\ & \cdot \{ [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{i\alpha}] \xi (\xi - m) + m [l'^2 \xi - l^2 (\xi - m)] \}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die folgenden sechs Focalcentra:

- I. Zwei Punkte F_1, F_2 , die wie früher construirt werden, indem wir $\Delta OO'F_1$ und $\Delta O'OF_2$ gleichsinnig ähnlich machen zu ΔORS .
- II. Zwei Punkte G_1, G_2 , entsprechend der Gleichung:

$$7) \quad \begin{cases} [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{-i\alpha}] \xi^2 - m [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{-i\alpha} + \varepsilon(r^2 - r'^2) e^{-i\alpha} (1 - \varepsilon e^{-i\alpha})] \xi \\ \quad + \varepsilon m^2 r^2 e^{-i\alpha} (1 - \varepsilon e^{-i\alpha}) = 0; \end{cases}$$
 dieselbe geht aus 5) hervor für $\alpha = \alpha', s = \varepsilon r, s' = \varepsilon r'$.
- III. Zwei Punkte H_1, H_2 ; die Coordinaten derselben werden gefunden, indem wir in der Gleichung

$$8) \quad [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{i\alpha}] \xi^2 - m [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{i\alpha} + l^2 - l'^2] \xi + m^2 l^2 = 0$$
 den reellen und den imaginären Theil der linken Seite einzeln gleich Null setzen.

Vertauschen wir in den letzten Gleichungen die Grössen $m, n, \varepsilon e^{i\alpha}, \varepsilon e^{-i\alpha}$ bez. mit $n, m, 1 - \varepsilon e^{-i\alpha}, 1 - \varepsilon e^{i\alpha}$, so ergeben sich die Focalcentra $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ der Kniecurve k , die der Punkt K in Bezug auf das Glied RR' beschreibt.

4. In dem bereits erwähnten Sonderfall

$$9) \quad \alpha = \alpha' = 0, \quad \varepsilon = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

ist ε entweder negativ oder grösser als 1; die Anschlusspunkte S, S' liegen demnach ausserhalb der Strecken $OR, O'R'$. Dann reducirt sich Gleichung 6) auf eine Gleichung zehnten Grades mit dem Anfangsglied:

$$m^2(x^2 + y^2)^4 \{ [\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2) - (l^2 - l'^2)]^2 x^2 + [\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2) + (l^2 - l'^2)]^2 y^2 \},$$

und die Curve k wird zu einer vierfach circularen Curve zehnter Ordnung mit den vier auf der Geraden OO' liegenden Focalcentren F_1, F_2, G_1, H_1 , wobei

$$OF_1 = \varepsilon m, \quad OF_2 = (1 - \varepsilon) m, \\ OG_1 = \frac{m r^2}{r^2 - r'^2}, \quad OH_1 = \frac{m l^2}{l^2 - l'^2}.$$

Sie hat mit der unendlich fernen Geraden, von den Kreispunkten abgesehen, noch zwei im Allgemeinen imaginäre Punkte Q_1, Q_2 gemein, die durch das Geradenpaar bestimmt sind:

$$[\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2) - (l^2 - l'^2)]^2 x^2 + [\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2) + (l^2 - l'^2)]^2 y^2 = 0.$$

Ist $r = r'$, oder $l = l'$, so fallen Q_1, Q_2 mit den Kreispunkten zusammen, und die Kniecurve berührt in diesen die unendlich ferne Gerade.

Die Punkte Q_1, Q_2 sind nur reell, wenn

$$l^2 - l'^2 = \mp \varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)$$

ist, und dann vereinigen sich Q_1 und Q_2 im unendlich fernen Punkte der y - bez. x -Achse. Wir wollen beide Fälle getrennt betrachten.

I. Ist $l^2 - l'^2 = -\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)$, so verwandelt sich Gleichung 6) durch die Substitution $y^2 = u^2 - x^2$ in eine Gleichung vierten Grades in Bezug auf u^2 mit dem Anfangsglied

$$\{ 2\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)mx + m^2[\varepsilon(\varepsilon - 1)r'^2 - l'^2] - \varepsilon^2(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)^2 u^8;$$

die Curve k hat folglich im unendlich fernen Punkte der y -Achse einen Selbstberührungspunkt mit der Asymptote:

$$10) \quad 2\varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)mx + m^2[\varepsilon(\varepsilon - 1)r'^2 - l'^2] - \varepsilon^2(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)^2 = 0.$$

Soll k mit dieser Geraden nicht nur vier, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte gemein haben, so finden wir als nothwendige und hinreichende Bedingung:

$$11) \quad l'^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)r^2,$$

also

$$12) \quad l^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)r'^2,$$

und dann geht Gleichung 10) über in

$$13) \quad 2mx = m^2 + \varepsilon(r^2 - r'^2).$$

Nun zeigt aber die weitere Durchführung der Rechnung, dass die Substitution 13) der Curvengleichung identisch genügt, das heisst, die Kniecurve zerfällt in die doppelt zählende Gerade 13) und eine vierfach circulare Curve achter Ordnung. Gegenwärtig ist

$$OH_1 = -\frac{mr'^2}{r^2 - r'^2} = m - OG_1;$$

die vier Focalcentra F_1, F_2, G_1, H_1 liegen also paarweise symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt von OO' . Der durch die Gleichungen 9), 11), 12) definirte Mechanismus ist bekannt unter der Bezeichnung „zweite“ Hart'sche Geradföhrung.* Betrachten wir in demselben nicht OO' , sondern RR' als festes Glied, so beschreibt der Punkt K einerseits eine Gerade, die auf RR' senkrecht steht.

II. Nehmen wir an, es sei $l^2 - l'^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)$, so verschwinden in Gleichung 6) die Glieder mit x^{10} und x^9 , und x^8 erhält den Factor:

$$4\varepsilon^2(\varepsilon - 1)^2(r^2 - r'^2)^2m^2y^2 + \{m^2[\varepsilon(\varepsilon - 1)r^2 - l^2] - \varepsilon^2(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)^2\}^2;$$

die Curve k hat also im unendlich fernen Punkte der Geraden OO' einen isolirten Punkt. Derselbe verwandelt sich in einen Rückkehrpunkt mit der Tangente OO' für

$$m^2[\varepsilon(\varepsilon - 1)r^2 - l^2] = \varepsilon^2(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)^2.$$

Es ergibt sich weiter, dass dieser Rückkehrpunkt in einen Selbstberührungspunkt übergeht, wenn gleichzeitig

$$m^2 = \varepsilon(r^2 - r'^2)$$

ist, also für

$$m^2 - n^2 = r^2 - r'^2,$$

$$l^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)r^2,$$

$$l'^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)(2r^2 - r'^2).$$

Setzen wir in diesem Falle in der Curvengleichung $y = 0$, so ergibt sich für x eine Gleichung sechsten Grades mit dem Anfangsgliede:

$$16\varepsilon^5(\varepsilon - 1)^2r^{14}(r^2 - r'^2)^3x^6.$$

Dasselbe verschwindet nur für die nicht in Betracht kommenden Annahmen $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ und für $r = r'$, das heisst $\varepsilon = \infty$. Daraus folgt, dass die Gerade OO' in keinem Falle einen Bestandtheil der Kniecurve bilden kann.

* Hart u. a. O.

III. Ist endlich in Verbindung mit Gleichung 9)

$$r = r', \quad l = l',$$

so reducirt sich die Curve k durch abermalige Ablösung der unendlich fernen Geraden auf eine bicirculare Curve achter Ordnung, die auch symmetrisch ist in Bezug auf die Mittelsenkrechte der Strecke OO' . Setzen wir

$$x = x' + \frac{m}{2},$$

so lautet das Glied achten Grades der Curvengleichung:

$$m^4(x'^2 + y^2)^2 \{ [l^2 - \varepsilon(\varepsilon - 1)r^2]^2(x'^2 + y^2)^2 + 16\varepsilon(\varepsilon - 1)r^2l^2x'^2y^2 \}.$$

Die Curve hat demnach vier durch den Mittelpunkt von OO' gehende Asymptoten; dieselben sind imaginär, wenn nicht

$$l^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)r^2$$

ist. Unter dieser letzten Voraussetzung zerfällt die Kniecurve in die doppelt zählende Gerade $x' = 0$ (vergl. Fall I) und in die bicirculare Curve sechster Ordnung:

$$y^2(x'^2 + y^2)^2 - 2 \left[\left(\frac{m}{2} \right)^2 + \varepsilon(2\varepsilon - 1)r^2 \right] y^2(x'^2 + y^2) + (2\varepsilon - 1)^2 m^2 y^4 + \varepsilon^2 r^4 x'^2 + \left\{ \left[\left(\frac{m}{2} \right)^2 + \varepsilon r^2 \right]^2 - \varepsilon^2 m^2 r^2 \right\} y^2 = 0$$

mit den Focalcentren F_1, F_2 , mit einem Selbstberührungspunkte im unendlich fernen Punkte der Geraden OO' und einem Doppelpunkte in der Mitte von OO' .

Hiermit sind die sämtlichen Fälle erschöpft, in denen die Kniecurve einen reellen unendlich fernen Punkt enthält, und es ist gleichzeitig die Frage nach denjenigen Bedingungen erledigt, unter denen eine endliche Gerade als Bestandtheile der Curve auftreten kann. Wir haben nämlich gefunden, dass der einzige Fall dieser Art bei der „zweiten“ Hart-schen Geradföhrung vorliegt; dieselbe stellt also die einzig mögliche Geradföhrung dar, bei welcher der geradlinig bewegte Punkt mit zwei gegenüberliegenden Vierecksseiten gelenkig verbunden ist.

5. Zerfällt in Figur 1 die Curve k in einen Kreis und eine gewisse andere Curve, so ist der Kreismittelpunkt identisch mit einem der früher bestimmten Focalcentra der k . Wir erhalten dann einen übergeschlossenen Mechanismus, indem wir diesen Mittelpunkt mit dem Punkte K gelenkig verbinden. Können wir gleichzeitig den Punkt K an das vierte Glied RR' anschliessen, ohne dadurch die Beweglichkeit des Mechanismus aufzuheben, so gehört der neue Anschlusspunkt zu den Focalcentren der Kniecurve f , die K in Bezug auf das Glied RR' beschreibt.

Von solchen übergeschlossenen Mechanismen kennen wir bisher die folgenden Arten:

I. In Figur 2 ist $OO'R'R$ ein beliebiges Gelenkviereck; die Dreiecke $O'R'S'$, $OO'T$, $RR'\mathfrak{Z}$ sind gleichsinnig ähnlich mit dem beliebigen Dreieck ORS . Bilden wir das Parallelogramm $TO'S'K$, so ist bekanntlich ΔORK gleichsinnig ähnlich mit ΔOOT^* , mithin ist auch $SR\mathfrak{Z}K$ ein Parallelogramm und die Vierecke $OTKS$ und $KS'R'\mathfrak{Z}$ sind gleichsinnig ähnlich mit $OO'R'R$. Ersetzen wir die Strecken SK , TK , $S'K$, $\mathfrak{Z}K$ durch ein viergliedriges Gelenk, so ergibt sich ein übergeschlossener Mechanismus. Derselbe besteht aus zwei Sylvester'schen Pantographen**, die in den Punkten O , R' , K verbunden sind; wir wollen ihn deshalb kurz den Sylvester'schen Mechanismus nennen.***

Entfernen wir in Figur 2 die Glieder TK , $\mathfrak{Z}K$, so kann der Punkt K in Bezug auf die Glieder OO' , RR' bez. die vollständigen Kniecurven k , \mathfrak{k} beschreiben, deren Focalcentra wir wie früher mit $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ bezeichnen. Dann sind F_1, \mathfrak{F}_2 ihrer Definition nach bez. identisch mit den Anschlusspunkten T, \mathfrak{Z} . Die Focalcentra H_1, H_2 ergeben sich aus Gleichung 8). Nun ist in Figur 2):

$$14) \quad l = SK = R\mathfrak{Z} = RR' \cdot \frac{OS}{OR} = \varepsilon n$$

und

$$15) \quad l' = S'K = OT = OO' \cdot \frac{RS}{OR} = m\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha};$$

folglich geht Gleichung 8) über in

$$(\zeta - \varepsilon m e^{-i\alpha}) \{ [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) e^{i\alpha}] \zeta - \varepsilon m n^2 e^{i\alpha} \} = 0.$$

Die erste Lösung derselben, $\zeta = \varepsilon m e^{-i\alpha}$, giebt wiederum den Punkt T ; der Sylvester'sche Mechanismus wird also dadurch charakterisirt, dass im Anschlusspunkte T zwei Focalcentra der Curve k vereinigt sind, nämlich F_1 und einer der beiden Punkte H_1, H_2 . Ebenso liegen in \mathfrak{Z} zwei Focalcentra der Curve \mathfrak{k} , nämlich \mathfrak{F}_2 und ein \mathfrak{H} .

Ist α nicht gleich 0, so bilden umgekehrt die Gleichungen 14) und 15) die nothwendige und hinreichende Bedingung, unter welcher die Focalcentra F_1, \mathfrak{F}_2 bez. mit einem der Punkte H_1, \mathfrak{H} zusammenfallen.

Die Kniecurve k spaltet sich gegenwärtig in den doppelt zählenden Kreis um T mit dem Radius TK und in eine vierfach circulare Curve achter Ordnung. Wir erhalten dieselbe als Bahncurve des Punktes K^* , wenn das Knie SK^*S' symmetrisch ist zu SKS' .

* Burmester: Kinematik I S. 295.

** Daselbst: S. 562.

*** Burmester: Die Brennpunktmechanismen, diese Zeitschrift 38. Jahrgang S. 218.

An Stelle der Focalcentra F_1, \mathfrak{F}_2 können wir auch F_2, \mathfrak{F}_1 als Anschlusspunkte eines Sylvester'schen Mechanismus verwenden. In diesem sind die Dreiecke $OO'F_2$ und $RR'\mathfrak{F}_1$ gleichsinnig ähnlich mit ROS ; K wird der gemeinschaftliche Eckpunkt der Parallelogramme F_2OSK und $S'R'\mathfrak{F}_1K$, und es ist

$$SK = m\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha}, \quad S'K = \varepsilon n.$$

Ist in Figur 2

$$16) \quad m^2(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha) = \varepsilon^2 n^2,$$

das heisst, $O'T = R\mathfrak{X} = \varepsilon n$, so wird

$$SK = SK^* = S'K = S'K^* = \varepsilon n,$$

und dann sind alle vier Punkte $F_1, F_2, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ der Reihe nach identisch mit $H_1, H_2, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$. In diesem besonderen Falle, der in Figur 3 dargestellt ist, können wir gleichzeitig den Punkt K mit F_1, \mathfrak{F}_2 und in der symmetrischen Lage des Knies den Punkt K^* mit F_2, \mathfrak{F}_1 zu einem Sylvester'schen Mechanismus verbinden.

Wie sich leicht ergibt, enthält Gleichung 16) die Bedingung, unter welcher in Figur 2 die Punkte S, S' im Laufe der Bewegung zusammen treffen. Die Glieder $SK, S'K$ können um die beiden Treffpunkte vereinigt rotiren; dieselben gehören also zu den Focalcentren der Curve k und sind folglich identisch mit G_1, G_2 . In Figur 3 zerfällt demnach die Curve zwölfter Ordnung k in zwei doppelt zählende Kreise um F_1 und F_2 und in die einfach zählenden Kreise um G_1 und G_2 .

II. Bei dem von Kempe angegebenen Mechanismus*, den Burmester als Brennpunktmechanismus bezeichnet hat, ist das Viereck $OO'R'R$ gleichfalls beliebig und S ein beliebiger Punkt auf der Seite OR ; S' theilt die Seite $O'R'$ im Verhältniss $OS : RS$, und die Punkte T, \mathfrak{X}, K werden so bestimmt, dass die beiden Vierecke $OTKS$ und $K\mathfrak{X}R'S'$, sowie auch $O'TKS'$ und $K\mathfrak{X}RS$ entgegengesetzt ähnlich sind (Fig. 4). Dann bleibt der Punkt K während der ganzen Bewegung der Koppelgeraden RR' ein Brennpunkt eines dem Viereck $OO'R'R$ eingeschriebenen Kegelschnitts.

Setzen wir wieder $OO' = m, RR' = n, OR = r, O'R' = r', OS = \varepsilon r, SK = l, S'K = l'$ und verstehen unter ε' eine Wurzel der Gleichung:

$$17) \quad \left\{ \begin{aligned} [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)]\varepsilon'^2 - [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2) + \varepsilon(1 - \varepsilon)(r^2 - r'^2)]\varepsilon' \\ + \varepsilon(1 - \varepsilon)r^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

so ist nach Kempe:

$$18) \quad OT = \varepsilon' m, \quad R\mathfrak{X} = \varepsilon' n.$$

$$19) \quad l^2 = \varepsilon \varepsilon' \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} r'^2, \quad l'^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon') r^2,$$

$$20) \quad TK^2 = \varepsilon \varepsilon' \frac{1 - \varepsilon'}{1 - \varepsilon} n^2, \quad \mathfrak{X}K^2 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (1 - \varepsilon) (1 - \varepsilon') m^2.$$

* Kempe a. a. O.

Für $\alpha = 0$, $\zeta = \varepsilon' m$ und die angegebenen Werthe von l^2 und l'^2 gehen die Gleichungen 7) und 8) über in 17), das heisst, im Anschlusspunkte T fällt einer der beiden Punkte G mit einem H zusammen, etwa G_1 mit H_1 . Ebenso vereinigen sich in \mathfrak{Z} die Punkte \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{H}_1^* . Die vollständige Kniecurve k besteht demnach aus dem doppelt zählenden Kreise um T und einer vierfach circularen Curve achter Ordnung mit den Focalcentren F_1, F_2, G_2, H_2 . Dieselbe ergibt sich als Bahncurve des Punktes K^* , der zu K symmetrisch liegt in Bezug auf SS' .

Ist $r = n$, $r' = m$, so liefert Gleichung 17) die Wurzeln:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon n^2}{m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)}$$

und

$$\varepsilon' = 1 - \varepsilon.$$

Für die erste derselben folgt aus 18) und 20):

$$OT = TK = \frac{\varepsilon m n^2}{m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)}, \quad \mathfrak{Z}K' = \mathfrak{Z}K = \frac{(1 - \varepsilon) m^2 n}{m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)}$$

und aus 19):

$$l = \varepsilon n = R\mathfrak{H}_2, \quad l' = (1 - \varepsilon)m = F_1 O'.$$

Dieselben Werthe ergeben sich aber aus 14) und 15) für $\alpha = 0$, das heisst, wir erhalten aus dem in Figur 5 gezeichneten Brennpunktmechanismus einen Sylvester'schen Mechanismus, wenn wir das Knie SKS' in die symmetrische Lage SK^*S' bringen und K^* mit F_1 und \mathfrak{H}_2 verbinden. In diesem besonderen Falle vereinigen sich dreimal je zwei Focalcentra der Curve k , nämlich H_1 mit G_1 in T , H_2 mit F_1 , G_2 mit F_2 ; dabei ist $OF_2 = F_1 O' = S'R'$. Die Curve k spaltet sich in drei doppelt zählende Kreise um T, F_1 und F_2 bez. mit den Radien $OT, OS', S'R'$.

Wir bemerken beiläufig, dass es keinen speciellen Fall des in Figur 4 dargestellten Brennpunktmechanismus giebt, bei welchem es möglich wäre, analog zu Figur 3 den Punkt K^* mit $S, S', G_2, \mathfrak{G}_2$ zu einem zweiten Brennpunktmechanismus zu verbinden.

Für $\varepsilon = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$ wird die eine Wurzel der Gleichung 17) unendlich gross; der zugehörige Brennpunktmechanismus ist identisch mit der zweiten Hart'schen Geradföhrung.

6. Ausser dem Sylvester'schen und dem Brennpunktmechanismus kennen wir noch drei andere übergeschlossene Mechanismen, bei denen aber das Gelenkviereck $OO'R'R$ nicht mehr willkürlich ist.

* Aber die Gleichungen 19) bilden nicht die nothwendige Bedingung für das Zusammenfallen von G_1 und H_1, \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{H}_1 .

III. Ist in Figur 6

$$m^2 + n^2 = r^2 + r'^2,$$

so sind die Diagonalen OR' und OR beständig senkrecht auf einander. Der Schnittpunkt K derselben hat von den Mittelpunkten S, S', T, \mathfrak{T} der Seiten r, r', m, n bez. die unveränderlichen Entfernungen

$$\frac{r}{2}, \frac{r'}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2};$$

wir erhalten demnach einen übergeschlossenen Mechanismus, indem wir die Strecken $SK, S'K, TK, \mathfrak{T}K$ im Punkte K zu einem viergliedrigen Gelenk verbinden.*

Setzen wir in den Gleichungen 7) und 8):

$$n^2 = r^2 + r'^2 - m^2, \quad \alpha = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{r}{2}, \quad l' = \frac{r'}{2},$$

so gehen beide über in

$$\left(\xi - \frac{m}{2}\right)[(r^2 + r'^2)\xi - mr^2] = 0.$$

Von den sechs Focalcentren der Curve k fallen also vier, nämlich F_1, F_2 und je einer der Punkte G und H mit T zusammen, während die beiden anderen G und H in einem Punkte U der Geraden OO' vereinigt sind; dabei ist

$$OU = \frac{mr^2}{r^2 + r'^2}.$$

Machen wir noch auf RR' die Strecke

$$RU = \frac{nr^2}{r^2 + r'^2},$$

so zählt U für zwei, \mathfrak{T} für vier Focalcentra der Curve f .

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon' = \frac{r^2}{r^2 + r'^2}$ verwandeln sich die Gleichungen 19) in

$$l = \frac{r}{2}, \quad l' = \frac{r'}{2}.$$

Lösen wir daher in Figur 6 das viergliedrige Gelenk bei K auf und bringen das Knie SKS' in die symmetrische Lage SK^*S' , so können wir K^* mit U und U zu einem Brennpunktmechanismus verbinden. — Fragen wir umgekehrt nach der Bedingung, unter welcher bei dem in Figur 4 dargestellten Brennpunktmechanismus die Focalcentra F_1, F_2, G_2, H_2 in einen Punkt zusammenfallen, so finden wir

$$m^2 + n^2 = r^2 + r'^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{2},$$

wie in Figur 6.

Im vorliegenden Falle besteht die Kniecurve k aus dem vierfach zählenden Kreis um T mit dem Radius TK und aus dem doppelt zählenden

* Burmester: Kinematik I S. 598.

Kreis um U mit dem Radius UK^* . In der That, lassen wir in Figur 6 die Koppel RR' alle möglichen Lagen oberhalb der Geraden OO' continuirlich einmal durchlaufen, so beschreibt der Punkt K viermal hin- und hergehend ein Bogenstück des ersten Kreises, während der Punkt K^* den zweiten Kreis einmal ganz durchwandert, und das entsprechende gilt für diejenige Bewegung der Koppel RR' , die zur ersten symmetrisch ist in Bezug auf OO' .

Wir können auch die Punkte S, S', T, \mathfrak{X} mit einem gewissen Punkte J zu einem Brennpunktmechanismus vereinigen. Dann ist $\epsilon' = \frac{1}{2}$, also nach 19) und 20):

$$SJ = \frac{r'}{2}, \quad S'J = \frac{r}{2},$$

$$TJ = \frac{n}{2}, \quad \mathfrak{X}J = \frac{m}{2},$$

das heisst $SKS'J$ und ebenso $TK\mathfrak{X}J$ ein Parallelogramm. Während die Glieder $OR, O'R, TK$ zwischen gewissen Grenzlagen hin- und herschwingen, macht das Glied TJ gleichzeitig mit UK^* eine volle Umdrehung.

Der Rest der zum Punkte J gehörenden Kniecurve ist eine eigentliche Curve achter Ordnung. Von ihren Focalcentren sind zwei in T vereinigt; das dritte ist U , und das vierte liegt auf OO' symmetrisch zu U in Bezug auf T .

IV. In Figur 7 ist $OO'R'R$ ein Parallelogramm und die Dreiecke $O'R'S'$ und $RR'\mathfrak{X}$ sind bez. congruent mit den beliebigen Dreiecken ORS und $OO'T$. Construiren wir das Parallelogramm $SOTK$, so sind auch $S'K, \mathfrak{X}K$ bez. gleich und parallel zu $O'T, RS$; die vier in K zusammenschliessenden Strecken bilden also ein viergliedriges Gelenk.*

Im vorliegenden Falle ist $m = n, r = r'$, folglich verwandelt sich Gleichung 8) in

$$m^2 \xi^2 - m(m^2 + l^2 - l'^2) \xi + m^2 l^2 = 0,$$

oder, wenn ω den Winkel $T'OO'$ bezeichnet,

$$\xi^2 - 2l\xi \cos \omega + l^2 = 0,$$

oder

$$(\xi - le^{i\omega})(\xi - le^{-i\omega}) = 0.$$

Die Focalcentra H_1, H_2 sind also identisch mit T und mit dem Punkte T^* , der zu T symmetrisch liegt in Bezug auf OO' . Machen wir die Dreiecke $SS'K^*$ und $RR'\mathfrak{X}^*$ congruent zu $OO'T^*$, so werden $T^*K^*, \mathfrak{X}^*T^*$ bez. gleich und parallel zu $TK, \mathfrak{X}K$. Die vollständige Curve k zerfällt demnach in die einfach zählenden Kreise um T und T^* vom Radius TK und in eine vierfach circulare Curve achter Ordnung, die wir erhalten, wenn beim Durchgange durch die Durchschlagslage das Parallelogramm $OO'R'R$ in ein Antiparallelogramm übergeht.

* Burmester: Kinematik I S. 595.

V. Bei dem in Figur 8 gezeichneten Gelenkmechanismus ist

$$\begin{aligned} OO' = RR' = m, \quad OR = O'R' = r, \\ OS = S'R = s, \quad SK = S'K = l; \end{aligned}$$

dabei sind die Strecken m, r, s, l vollkommen unabhängig von einander. Schneidet die Gerade SS' die Seiten OO', RR' bez. in T, \mathfrak{X} und bezeichnen wir den Mittelpunkt von SS' mit M , so ist

$$SK^2 - TK^2 = SM^2 - TM^2 = ST \cdot S\mathfrak{X} = \frac{s}{r} RO' \cdot \frac{r-s}{r} OR'.$$

Aus dem Kreisviereck $OO'RR'$ folgt aber

$$OO' \cdot RR' = RO' \cdot OR' + OR \cdot O'R,$$

oder

$$RO' \cdot OR = m^2 - r^2,$$

mithin ist

$$TK^2 = l^2 - \frac{s(r-s)(m^2 - r^2)}{r^2}.$$

Die einander gleichen Strecken $TK, \mathfrak{X}K$ sind also während der ganzen Bewegung constant und folglich durch Gelenke ersetzbar.*

In den Punkten T, \mathfrak{X} vereinigen sich bez. die Focalcentra F_1, F_2 und $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$. — Wir kommen auf diesen Fall später ausführlicher zurück.

7. Um in systematischer Weise die sämmtlichen übergeschlossenen Mechanismen zu erhalten, die sich überhaupt durch Einfügung eines viergliedrigen Gelenks aus dem Gelenkviereck construiren lassen, könnten wir zunächst untersuchen, unter welchen Umständen sich in Figur 1 der Punkt K noch mit einem dritten Gliede, etwa OO' , durch ein Gelenk verbinden lässt. Dies verlangt die Angabe aller derjenigen Bedingungen, denen die Grössen $m, n, r, r', s, s', \alpha, \alpha', l, l'$ genügen müssen, wenn ein gewisser Kreis um eines der bereits bestimmten Focalcentra als Bestandtheil der Curve k auftreten soll. Dabei kommen die mit O, O' zusammenfallenden Focalcentra nicht weiter in Betracht; könnte nämlich der Punkt K einen Kreis um O beschreiben, so würden die Punkte O, R, K ein unveränderliches Dreieck bilden, das mit dem Dreieck $O'R'S'$ durch die drei Glieder OO', RR', KS' verbunden wäre.

Verstehen wir unter ϱ den unbekanntem Kreisradius, so fragt es sich, in welchen Fällen die Substitution

$$21) \quad y^2 = -x^2 + 2\xi x + 2\eta y - \xi^2 - \eta^2 + \varrho^2$$

der Curvengleichung 4) oder 6) identisch genügt, wenn wir für ξ, η der Reihe nach die Coordinaten der mit F, G, H bezeichneten Focalcentra setzen.

Bei dieser allgemeinen Fassung der Aufgabe würde sich aber die Rechnung sehr umständlich gestalten. Wir beschränken uns daher zur vorläufigen

* Burmester: Kinematik I S. 571.

Orientirung auf die Betrachtung eines speciellen Falles, indem wir annehmen, das Viereck $OO'R'R$ sei ein Parallelogramm (Fig. 9).

Construiren wir dann die Parallelogramme $OSKT$ und $O'S'KT'$, so wird

$$OT = l, \quad O'T' = l', \quad TK = s, \quad T'K = s',$$

Winkel $TKT' = \alpha - \alpha'$. Demnach ist TKT' ein starres Dreieck, und die Curve, die K in Verbindung mit dem Parallelogramm $OO'R'R$ beschreibt, ist identisch mit der Koppelcurve k_1 , die wir erhalten, wenn wir K an die Seite TT' des Gelenkvierecks $OO'T'T$ anschliessen. Geht das Viereck $OO'R'R$ in seiner Durchschlagslage in ein Antiparallelogramm über, so erzeugt der Punkt K eine neue Curve k_2 , die mit k_1 vereinigt die vollständige Kniecurve k darstellt. Nun ist k_1 bekanntlich eine tricirculare Curve sechster Ordnung, mithin ergibt sich der Satz: Sind in dem Gelenkviereck $OO'R'R$ je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so spaltet sich die Kniecurve k in eine Koppelcurve k_1 und eine vierfach circulare Curve achter Ordnung k_2 .

Für $m = n$, $r = r'$ zerfällt die Gleichung 5) in die beiden Gleichungen:

$$22) \quad m\xi^2 - (m^2 + rsc^{-i\alpha} - rs'e^{-i\alpha'})\xi + mse^{-i\alpha}(r - s'e^{-i\alpha'}) = 0$$

und

$$(s'e^{i\alpha} - se^{i\alpha'})\xi + mse^{i\alpha'} = 0.$$

Die erste bestimmt zwei Punkte G_1, G_2 , die zweite einen Punkt G_3 , den wir erhalten, indem wir $\triangle OO'G_3$ gleichsinnig ähnlich machen mit $\triangle TT'K$. Die Punkte O, O', G_3 sind bekanntlich die Focalcentra der Koppelcurve k_1 ; die Curve k_2 hat demnach zu Focalcentren die Punkte F_1, F_2, G_1, G_2 .

Sind alle vier Seiten des Vierecks $OO'R'R$ einander gleich, so werden G_1, G_2 bez. identisch mit F_1, F_2 , und die Curve k_2 verwandelt sich in zwei doppelt zählende Kreise um F_1 und F_2 . Dann kann sich nämlich das Viereck nicht mehr als Antiparallelogramm bewegen, sondern es fällt entweder OR zusammen mit OO' , so dass die Glieder $O'R'$ und RR' vereinigt um O' rotiren — oder es deckt sich $O'R'$ mit $O'O$, und die Glieder OR, RR' drehen sich gemeinschaftlich um O . Im letzten Falle gelangt der Punkt S' in die feste Lage F_2 , und wir erhalten das Gelenkviereck $OSKF_2$ mit dem festen Gliede OF_2 .

8. Wir setzen im Folgenden voraus, in dem Parallelogramm $OO'R'R$ seien die benachbarten Seiten nicht einander gleich. Soll dann der Punkt K in Bezug auf das Glied OO' eines Theils einen Kreis beschreiben, so muss derselbe entweder in der Koppelcurve k_1 , oder in der Curve k_2 enthalten sein. Wir untersuchen zunächst, wann der erste Fall eintreten kann.

I. Die Koppelcurve k_1 besteht aus einem Kreis und einer bicircularen Curve vierter Ordnung, wenn in Figur 9 das Viereck $OO'T'T$ zu einem Parallelogramm wird, das heisst für:

$$23) \quad \left\{ \text{und} \quad \begin{array}{l} l = l' \\ s^2 + s'^2 - 2ss'\cos(\alpha - \alpha') = m^2. \end{array} \right.$$

Dann verwandelt sich Figur 9 in Figur 10, in welcher die Seiten SK , $S'K$ der Parallelogramme $OSKT$, $O'S'KT'$ zusammenfallen. Die Gleichungen 23) enthalten demnach die Bedingung, unter welcher die Eckpunkte S , S' der Dreiecke ORS , $O'R'S'$ im Verlaufe der Bewegung des Parallelogramms $OO'R'R$ einmal zusammentreffen. Die sich deckenden Glieder SK , $S'K$ können naturgemäss um diesen Treffpunkt rotiren, während das Gelenkviereck in Ruhe bleibt, ein übergeschlossener Mechanismus ergibt sich hieraus aber nicht.

II. Sind in Figur 9 die Dreiecke ORS , $O'R'S'$ gleichsinnig congruent, so wird die Strecke $TT' = 0$, und das Gelenkviereck $OO'T'T$ geht über in das starre Dreieck $OO'T$. Dann zerfällt die k_1 in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und in zwei Kreise vom Radius s um T und um den Punkt T^* , der zu T symmetrisch liegt in Bezug auf OO' . Machen wir noch $\triangle RR'T$ congruent zu $\triangle OO'T$ und verbinden K mit \mathfrak{L} , so erhalten wir den in Figur 7 dargestellten übergeschlossenen Mechanismus.

III. Die Curve k_1 spaltet sich endlich in einen doppelt zählenden Kreis um O und in die beiden Geraden, die den Punkt O' mit den imaginären Kreispunkten verbinden, wenn in Figur 9 der Punkt K mit T zusammenfällt. Dann müsste aber $s = 0$, das heisst S identisch sein mit O — eine Annahme, die gegenwärtig nicht in Betracht kommt.

9. In Figur 11 ist das Gelenkviereck $OO'R'R$ in ein Antiparallelogramm übergegangen; der Punkt K beschreibt also augenblicklich die Curve k_2 . Bezeichnen wir wie in Artikel 1 mit ϑ , ϑ' die Winkel, welche bez. die Strecken OR , $O'R'$ mit der oberen Seite der Geraden OO' einschliessen, so ist

$$\vartheta' = 180^\circ + R\hat{O}'R' - R\hat{O}O$$

und

$$\sin R\hat{O}'R' = \frac{m \sin \vartheta}{O'R}, \quad \cos R\hat{O}'R' = \frac{r - m \cos \vartheta}{O'R},$$

$$\sin R\hat{O}O = \frac{r \sin \vartheta}{O'R}, \quad \cos R\hat{O}O = \frac{m - r \cos \vartheta}{O'R},$$

folglich:

$$\sin \vartheta' = - \frac{(m^2 - r^2) \sin \vartheta}{m^2 + r^2 - 2mr \cos \vartheta},$$

$$\cos \vartheta' = \frac{(m^2 + r^2) \cos \vartheta - 2mr}{m^2 + r^2 - 2mr \cos \vartheta}.$$

Setzen wir in Gleichung 2) für $\sin \vartheta'$ und $\cos \vartheta'$ die gefundenen Werthe und eliminiren hierauf ϑ zwischen 1) und 2), so erhalten wir als Gleichung der Curve k_2 :

$$24) \left\{ \begin{aligned} & [r^2 PP' + 2mr(s'a'P - saP') - 4m^2 ss'a'a' + 2ss'(m^2 - r^2)(aa' + bb')] \\ & \cdot [m^2 PP' + 2mr(s'a'P - saP') - 4m^2 ss'a'a' + 2ss'(m^2 - r^2)(aa' + bb')] \\ & + (m^2 - r^2)^2 [s^2(a'^2 + b'^2)P^2 + s^2(a^2 + b^2)P'^2 \\ & - 4s^2 s'^2 (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Es handelt sich nun um Angabe der sämtlichen Fälle, in denen die Substitution 21) dieser Gleichung identisch genügt, wenn ξ , η zunächst die Coordinaten von F_1 (oder F_2), sodann diejenigen eines der Punkte G_1 , G_2 bedeuten. Ohne auf die immerhin langwierige Rechnung weiter einzugehen, beschränken wir uns im Folgenden auf die Mittheilung der erhaltenen Resultate.

I. Setzen wir für ξ , η die Coordinaten von F_1 :

$$\xi = \frac{ms}{r} \cos \alpha, \quad \eta = -\frac{ms}{r} \sin \alpha,$$

so zeigt es sich, dass die linke Seite der Gleichung 24) in zwei Fällen identisch verschwindet, nämlich:

A. Für $\alpha = \alpha'$, $s = s'$, $l = \frac{ms}{r}$, $l'^2 = \frac{m^2}{r^2}(r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha)$, $q = s$.

Gegenwärtig ist $SK = OF_1$, $S'K = O'F_1$, $F_1K = OS = O'S'$, also das Viereck $F_1O'S'K$ ein Parallelogramm und OF_1KS ein Antiparallelogramm. Machen wir noch $\Delta RR'\mathfrak{F}_2$ gleichsinnig congruent zu $\Delta OO'F_1$, so wird $R\mathfrak{F}_2$ parallel und gleich zu SK ; wir erhalten daher den in Figur 2 dargestellten Sylvester'schen Mechanismus für den speciellen Fall, dass das Viereck $OO'R'R$ ein Antiparallelogramm ist. Die Curve k_2 spaltet sich in den Kreis k'_2 um F_1 mit dem Radius s und eine tricirculare Curve sechster Ordnung k''_2 mit den Focalcentren F_2 , G_1 , G_2 . Dieselbe ist übrigens keine Koppelcurve, wie wir am einfachsten in dem speciellen Falle $\alpha = \alpha' = 0$ erkennen. Dann wird die k''_2 symmetrisch in Bezug auf OO' ; sie schneidet diese Gerade in denselben Punkten, wie der Kreis k'_2 und hat überdies auf OO' zwei Doppelpunkte. Von den drei Focalcentren fällt der Punkt F_2 auf OO' , und die beiden anderen Punkte G_1 , G_2 liegen auf oder symmetrisch zu OO' , je nachdem $m^2 \geq 4s(r-s)$ ist. Wäre k''_2 eine Koppelcurve, so müsste sie auf OO' gleichzeitig drei Focalcentra und drei Doppelpunkte besitzen. — Die Koppelcurve k_1 zerfällt gegenwärtig in den Kreis k'_2 , in den Kreis, der zu diesem symmetrisch ist in Bezug auf OO' , und in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade.

B. Die linke Seite der Gleichung 24) wird ferner identisch zu Null für

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad s' = r - s, \quad l = l', \quad q^2 = l'^2 - \frac{s(r-s)(m^2 - r^2)}{r^2}.$$

Durch diese Relationen ist aber der in Figur 8 dargestellte Mechanismus defnirt. Da bei demselben die beiden Focalcentra F_1 , F_2 mit dem Punkte T zusammenfallen, so bildet der Kreis um T mit dem Radius TK einen doppelt zählenden Bestandtheil der Curve k_2 .

Lässt sich aus den Strecken OO' , OS , $O'S'$ ein Dreieck construiren, so fallen die Punkte S und S' während der Bewegung des Antiparallelogramms zweimal zusammen, und dann sind diese Treffpunkte, um welche die Glieder SK , $S'K$ vereinigt rotiren, identisch mit den Focalcentren G_1 , G_2 .

Der Rest der Curve k_2 besteht demnach aus zwei reellen oder imaginären Kreisen vom Radius l , deren Mittelpunkte von O um s , von O' um $r - s$ entfernt sind.

Dieses Ergebniss bestätigt in anschaulicher Weise den letzten Satz des Artikels 2. Es beschreiben nämlich alle Punkte K , die wir in Figur 8 durch zwei beliebig, aber gleich lange Glieder SK , $S'K$ an die Punkte S , S' anschliessen können, drei Schaaren concentrischer Kreise um T , G_1 , G_2 und überdies eine Schaar symmetrischer Koppelcurven mit den festen Focalcentren O , O' , G_3 ; dabei theilt G_3 die Strecke OO' im Verhältniss $OS : O'S'$.

II. Die Coordinaten der Punkte G_1 , G_2 sind nach 22) die reellen Lösungen der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} m(\xi^2 - \eta^2) - (m^2 + r s \cos \alpha - r s' \cos \alpha') \xi - r(s \sin \alpha - s' \sin \alpha') \eta \\ + m r s \cos \alpha - m s s' \cos(\alpha + \alpha') = 0, \\ 2 m \xi \eta + r(s \sin \alpha - s' \sin \alpha') \xi - (m^2 + r s \cos \alpha + r s' \cos \alpha') \eta \\ - m r s \sin \alpha + m s s' \sin(\alpha + \alpha') = 0. \end{aligned}$$

Bilden wir nun wieder die Bedingungen, unter denen die Substitution 21) der Gleichung 24) identisch genügt, so führt die Rechnung einerseits auf die selbstverständliche Forderung, es müsse $l = l'$ und im Uebrigen die Figur so beschaffen sein, dass die Punkte S und S' zusammentreffen können. Davon abgesehen ergibt sich ein einziger Fall, in welchem die linke Seite von 24) identisch verschwindet; derselbe wird defnirt durch:

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha' = 0, \quad s = s', \\ \eta = 0, \quad \xi^2 - m \xi + r s - s^2 = 0, \\ l^2 = \xi^2, \quad l'^2 = (m - \xi)^2, \quad \varrho^2 = s^2. \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung für ξ bestimmt zwei auf OO' liegende Punkte G_1 , G_2 . Construiren wir dann ein Knie mit den Scheukeln

$$SK = OG_1, \quad S'K = O'G_1,$$

so entsteht ein übergeschlossener Mechanismus, indem wir K mit G_1 durch das Glied $G_1K = s$ verbinden.

Machen wir noch auf RR' die Strecke $R\mathfrak{G}_1 = OG_1$, so wird

$$\mathfrak{G}_1K = r - s,$$

und wir erhalten einen Brennpunktmechanismus, der aus Figur 4 hervorgeht, wenn $m = n$, $r = r'$ ist. Dann folgt nämlich aus Gleichung 17):

$$\varepsilon'(1 - \varepsilon')m^2 = \varepsilon(1 - \varepsilon)r^2;$$

setzen wir nun $\varepsilon'm = \xi$, $\varepsilon r = s$ und vertauschen die Buchstaben T , \mathfrak{X} bez. mit G_1 , \mathfrak{G}_1 , so liefern die Gleichungen 18) bis 20) die soeben angegebenen Werthe für OG_1 , $R\mathfrak{G}_1$, l , l' , G_1K , \mathfrak{G}_1K .

Im vorliegenden Falle besteht die Curve k_2 aus dem Kreise k'_2 um G_1 mit dem Radius s und aus einer tricircularen Curve sechster Ordnung k''_2 mit den Focalcentren F_1 , F_2 , G_2 . Dieselbe berührt den Kreis in seinen

beiden Schnittpunkten mit OO' und hat überdies auf OO' zwei Doppelpunkte, ist also wiederum keine Koppelcurve. Die Curve k_1 zerfällt in den doppelt zählenden Kreis k'_2 und die doppelt zählende unendlich ferne Gerade.

Der Sylvester'sche und der Brennpunktmechanismus erscheinen hier als diejenigen Sonderfälle der Figur 7, in denen das dort gezeichnete Parallelogramm $OO'R'R$ zugleich als Antiparallelogramm bewegt werden kann. Aber der in Figur 7 dargestellte Mechanismus ist nicht, wie jene beiden, auf das allgemeine Gelenkviereck übertragbar.

10. Die Untersuchung des Gelenkvierecks, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, hat somit nur zu solchen übergeschlossenen Mechanismen geführt, die unter den in Artikel 5 und 6 angegebenen bereits enthalten sind. Wir können hieraus einige Schlüsse ziehen für den allgemeinen Fall, dass die Seiten des Vierecks $OO'R'R$ keinerlei Beschränkungen unterliegen. Zunächst folgt, dass es keinen allgemeineren übergeschlossenen Mechanismus giebt, der den Sylvester'schen oder den Brennpunktmechanismus als speciellen Fall enthält; dabei kommen selbstverständlich immer nur solche Mechanismen in Betracht, die sich aus dem Gelenkviereck durch Einfügung eines viergliedrigen Gelenks bilden lassen.

Unter den vier Mechanismen, welche der soeben behandelte Sonderfall geliefert hat, befindet sich nur einer, bei welchem die Punktgruppen ORS $O'R'S'$ nicht gleichsinnig ähnlich sind, und dieser (Fig. 8) ist offenbar nur dem Antiparallelogramm eigenthümlich. Bei der Betrachtung des allgemeinen Gelenkvierecks werden wir deshalb von vornherein voraussetzen, es sei $\triangle ORS$ gleichsinnig ähnlich mit $\triangle O'R'S'$.

Für $m = n$, $r = r'$ stellt ferner Figur 7 den einzigen Mechanismus dar, bei welchem im Anschlusspunkte T nur ein Focalcentrum der Curve k liegt und der Kreis um T einen einfach zählenden Bestandtheil der Kniecurve bildet. Sind nun bei einem übergeschlossenen Mechanismus die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $OO'R'R$ nicht einander gleich, so wird jener Kreis um den Anschlusspunkt T als Bestandtheil der zerfallenden Kniecurve immer doppelt zählen. Dies ist sofort ersichtlich, wenn wir das Viereck so wählen, dass die Glieder OR , $O'R'$ nicht volle Umdrehungen machen können, sondern zwischen gewissen Grenzlagen zu beiden Seiten von OO' hin- und herschwingen. Um demnach aus dem allgemeinen Gelenkviereck weitere übergeschlossene Mechanismen zu bilden, werden wir von vornherein über die Grössen ε , α , l , l' so verfügen, dass irgend zwei Focalcentra der Curve k mit einander zusammenfallen.

Der Vereinigung von F_1 und F_2 , oder von F_1 und H_1 , oder von G_1 und H_1 entsprechen bez. die Figuren 8, 2, 4. Die Forderung, dass G_1 und G_2 zusammenfallen, führt bereits beim Antiparallelogramm zu keinem neuen übergeschlossenen Mechanismus. Wir betrachten weiter den Fall,

dass F_1 mit G_1 identisch ist — immer unter der Voraussetzung, es sei ΔORS gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O'R'S'$. Hierfür ergibt sich aus Gleichung 7) die Bedingung

$$(1 - \varepsilon e^{-i\alpha})[(1 - \varepsilon e^{-i\alpha})(m^2 - r^2) + \varepsilon e^{-i\alpha}(n^2 - r'^2)] = 0$$

und dieser wird, wenn nicht $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$ oder $m = r$, $n = r'$ ist, nur genügt durch:

$$25) \quad \alpha = 0, \quad (1 - \varepsilon)(m^2 - r^2) + \varepsilon(n^2 - r'^2) = 0.$$

Dann wird zugleich \mathfrak{S}_2 identisch mit einem der Punkte \mathfrak{G} , und nun fragt es sich, ob wir durch geeignete Wahl der Glieder l , l' die Curve k in einen Kreis um F_1 und eine gewisse andere Curve spalten können. Die Betrachtung des Sonderfalles $m = n$, $r = r'$ giebt gegenwärtig keinen Aufschluss, denn sie führt in Verbindung mit der letzten Gleichung auf die Forderung $m = r$, und unter dieser Annahme zerfällt die Kniecurve, wie am Schluss des Artikels 7 gezeigt wurde, für beliebige Werthe von ε , l , l' . Es bleibt demnach nur übrig, zu untersuchen, wann die Substitution 21):

$$y^2 = -x^2 + 2\varepsilon mx - \varepsilon^2 m^2 + q^2$$

der Gleichung 6) identisch genügt; in dieser ist nach 25) zu setzen:

$$\varepsilon q^2 = m^2 - (1 - 2\varepsilon)r^2.$$

Die Rechnung liefert sofort als erste Bedingung $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und damit nach 25):

$$m^2 + n^2 = r^2 + r'^2.$$

Wir gelangen demnach zu dem in Figur 6 dargestellten Mechanismus, bei welchem die Diagonalen des Vierecks $OO'R'R$ aufeinander senkrecht stehen. Eine zweite Lösung ergibt sich nicht.

Es wäre endlich noch der Fall zu untersuchen, dass H_1 mit H_2 identisch wird. Nach Gleichung 8) vereinigt sich H_1 mit H_2 und gleichzeitig \mathfrak{S}_1 mit \mathfrak{S}_2 , wenn

$$(l \pm l')^2 = m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{i\alpha}$$

ist, das heisst, einerseits für

$$26) \quad m = n, \quad (l \pm l')^2 = m^2,$$

andererseits für

$$27) \quad \alpha = 0, \quad (l \pm l')^2 = m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2).$$

Die Bedingungen 26) führen zu dem Mechanismus in Figur 7 für den speciellen Fall, dass der Anschlusspunkt T auf der Geraden OO' liegt. Die so entstehende Figur genügt für $\alpha = 0$ und für beliebige Werthe von l und ε zugleich der Gleichung 27); es scheint aber immerhin fraglich, ob nicht diese letzte Bedingung für bestimmte Werthe von l und ε noch einen übergeschlossenen Mechanismus liefert, bei welchem das Viereck $OO'R'R$ kein Parallelogramm zu sein braucht.

Um hierüber Auskunft zu erhalten, sind wir von einem Viereck ausgegangen, in welchem zweimal zwei folgende Seiten einander gleich sind

etwa $r = m$, $r' = n$. Bei diesem kann das Glied OR mit dem festen Gliede OO' zur Deckung gebracht werden; bezeichnen wir mit F_1 die zugehörige Lage des Punktes S , so bilden die Punkte O' , F_1 , K , S' ein Gelenkviereck und die Kniecurve k zerfällt in den doppelt zählenden Kreis k_1 um F_1 und eine Curve achter Ordnung k_2 . Der Punkt G_1 fällt gegenwärtig mit F_1 zusammen und die Curve k_2 hat die Focalcentra F_2 , G_2 , H_1 , H_2 ; dabei ist

$$OG_2 = \frac{(1 - \varepsilon)m^3}{(1 - \varepsilon)m^2 + \varepsilon n^2},$$

und wenn die Punkte H_1 und H_2 sich vereinigen sollen, nach 27):

$$OH_1 = OH_2 = \xi = \frac{ml}{l \pm l'}.$$

Bilden wir nun die Gleichung der Curve k_2 , machen wieder die Substitution

$$y^2 = -x^2 + 2\xi x - \xi^2 + \rho^2$$

und setzen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x nach einander gleich Null, so erhalten wir nur die unbrauchbare Lösung $m = n$, die auf den bereits erwähnten speciellen Fall von Figur 7 zurückführen würde. Es entspricht also auch der Vereinigung von H_1 und H_2 , zunächst unter der Voraussetzung $r = m$, $r' = n$ und dann offenbar ebenso im allgemeinen Falle, kein neuer übergeschlossener Mechanismus.

XV.

Die Beschleunigungspole der kinematischen Kette.

Von

Prof. F. WITTENBAUER

in Graz.

Hierzu Tafel X und XI Fig. 1—17.

Eines der wichtigsten und interessantesten Probleme der modernen Kinematik ist die constructive Ermittlung des Beschleunigungszustandes kinematischer Ketten. Bis jetzt sind auf diesem Gebiete noch geringe Erfolge erzielt worden: ausser wenigen einfachen Specialfällen kinematischer Ketten, für welche elegante Constructionen der Beschleunigung gefunden wurden, kennt man keine allgemeine Methode für die Lösung des Problems: die Beschleunigung jedes Punktes einer kinematischen Kette in Bezug auf jedes beliebige Glied derselben zu construiren.

Ich habe in zwei Abhandlungen: „Die Wendepole der kinematischen Kette“ und „Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung“ versucht, die Lösung dieses Problems vorzubereiten und hoffe, dass es mir mit vorliegender Abhandlung, welche hauptsächlich die bisher wenig beachteten Tangentialpole untersucht, gelungen ist, diese Lösung selbst zu finden, indem ich zeige, wie man die Beschleunigungspole einer kinematischen Kette mit Hilfe von Constructionen, die hauptsächlich aus projectiven Beziehungen hervorgegangen sind und zu ihrer Ausführung nur das Ziehen von Parallelen und Senkrechten bedürfen, bestimmen kann.

Allerdings liefert der Beschleunigungspol nur die Richtung der Beschleunigung eines Systempunktes; allein der nächste Schritt, die Bestimmung der Grösse der Beschleunigung, ist ein verhältnissmässig sehr einfacher.

1. Bei jeder Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems in seiner Ebene giebt es in jedem Augenblicke der Bewegung vier wichtige Punkte (Fig. 1): den Drehpol O , den Wendepol J , den Tangentialpol II und den Beschleunigungspol G .

An die Eigenschaften dieser Punkte möge hier kurz erinnert werden.

Bezeichnet d den Durchmesser des über OJ beschriebenen Kreises, des Wendekreises, e den Durchmesser des über OH beschriebenen Kreises, des Tangentialkreises, ω und λ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit bzw. Winkelbeschleunigung des Systems, so gilt die Beziehung

$$d\omega^2 = e\lambda;$$

die momentane Bewegung des Systems ist eine Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω ; gleichzeitig tritt um den auf der Poltangente OH liegenden Tangentialpol H die Winkelbeschleunigung λ auf und verändert ω .*

Der Beschleunigungspol liegt in der Senkrechten, die von O auf JH gefällt wird. Um ihn gruppieren sich die Beschleunigungen der Systempunkte in ähnlicher Weise, wie die Geschwindigkeiten der Systempunkte um den Drehpol.

Aus den drei Punkten OJH lässt sich die Beschleunigungsrichtung jedes Systempunktes auf lineare Weise construiren.

2. Um den Beschleunigungspol irgend eines Gliedes einer kinematischen Kette in Bezug auf irgend ein anderes Glied derselben zu bestimmen, giebt es nach Obigem folgenden Weg: Man bestimme die drei Punkte OJH der relativen Bewegung der Glieder; dann ist G der Fusspunkt der Geraden $OG \perp JH$.

Die Bestimmung des Drehpoles O hat nach den bekannten Grundsätzen über die Polbestimmung kinematischer Ketten zu erfolgen.**

Die Ermittlung des Wendepoles J habe ich in der Abhandlung: „Die Wendepole der kinematischen Kette“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik 40. Jahrgang) gezeigt.

Es bleibt somit noch die Construction des Tangentialpoles H , mit welcher sich diese Abhandlung vornehmlich beschäftigen soll. Es giebt eine directe Methode, sämtliche Tangentialpole einer zwangsläufigen kinematischen Kette zu bestimmen. Da nun auch die Wendepole jeder solchen Kette auf selbstständige Weise und nach ganz anderer Methode zu ermitteln sind, wie ich gezeigt habe, so hat man in dem Kriterium

$$\sphericalangle JOH = 90^\circ$$

stets ein werthvolles Mittel, sich von der Richtigkeit der Theorie zu überzeugen und andererseits die Genauigkeit der durchgeführten Constructionen zu prüfen.

3. Es seien 1, 2, 3, 4 vier ebene Systeme, deren gegenseitige Bewegung studirt werden soll. Die Polconfiguration derselben $O_{12} O_{23} O_{13} O_{14} O_{24} O_{34}$ (Fig. 2) sei gegeben, ebenso von drei der gegenseitigen Bewegungen

* Vergl. W. Schell: „Ueber den Beschleunigungszustand des ebenen unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik XIX. Bd.).

** L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“ I. Bd. S. 430.

die Wendepole $J_{12}J_{23}J_{14}$ und die Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{14}$; dann sind nach Obigem auch die zugehörigen Beschleunigungspole $G_{12}G_{23}G_{14}$ bestimmt. In der früher erwähnten Arbeit: „Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung“ habe ich gezeigt, wie die übrigen Wendepole, Tangentialpole und Beschleunigungspole zu finden sind; man erhält mit Hilfe der dort geschilderten Constructionen

$$\begin{aligned} \text{aus } O_{12}O_{23}O_{13}, \quad J_{12}J_{23}, \quad H_{12}H_{23} \text{ die Punkte } J_{13}H_{13}, \\ \text{„ } O_{21}O_{14}O_{24}, \quad J_{21}J_{14}, \quad H_{21}H_{14} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad J_{24}H_{24}, \\ \text{„ } O_{31}O_{14}O_{34}, \quad J_{31}J_{14}, \quad H_{31}H_{14} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad J_{34}H_{34}. \end{aligned}$$

Wurde richtig construirt, so können nun wieder

$$\text{aus } O_{24}O_{43}O_{23}, \quad J_{24}J_{43}, \quad H_{24}H_{43} \text{ die Punkte } J_{23}H_{23},$$

welche gegeben waren, zurückerhalten werden. Bezüglich der Stellenzeiger sei daran erinnert, dass z. B. J_{mn} der Wendepol der resultirenden Bewegung eines geführten Systems n ist, welches die Bewegung eines führenden Systems m mitzumachen gezwungen wird. Durch die Umkehrung der Bewegung, das heisst, durch die Vertauschung der Führerrolle der beiden Systeme, verändern die Drehpole und Tangentialpole ihre Lage nicht, es ist also allgemein

$$O_{mn} = O_{nm}, \quad H_{mn} = H_{nm},$$

hingegen wird der Wendepol J_{mn} durch die Umkehrung der Bewegung ein anderer J_{nm} und zwar wird die Strecke $J_{mn}J_{nm}$ durch den Drehpol $O_{mn} = O_{nm}$ halbirte.

Auf diese Weise wurden in der Figur die übrigen Wendepole und Tangentialpole construirt; da jedoch diese Constructionen ohne besonderen Einfluss auf die weitere Untersuchung sind, so wurden sie in der Zeichnung nicht weiter angedeutet.

Von Wichtigkeit für alles Nachfolgende ist die Configuration der Tangentialpole H , deren Eigenschaften wir nun studiren wollen (Fig. 3). Fällt man von einem der Tangentialpole, z. B. H_{13} , auf die in O_{13} sich schneidenden Polgeraden $O_{12}O_{23}$ und $O_{14}O_{43}$ (oder kürzer: O_{123} und O_{143}) die Senkrechten bis zu den Schnitten mit den Geraden $H_{12}H_{23}$ und $H_{14}H_{43}$, so gelten für diese Schnittpunkte A^2_{13} und A^4_{13} die barycentrischen Ausdrücke:

$$\lambda_{13} \cdot A^2_{13} = \lambda_{12} \cdot H_{12} + \lambda_{23} \cdot H_{23},$$

$$\lambda_{13} \cdot A^4_{13} = \lambda_{14} \cdot H_{14} + \lambda_{43} \cdot H_{43},$$

das heisst, A^2_{13} theilt die Strecke $H_{12}H_{23}$ im umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Winkelbeschleunigungen $\lambda_{12}\lambda_{23}$, oder A^2_{13} ist der Schwerpunkt der Tangentialpole $H_{12}H_{23}$, wenn in diesen die Winkelbeschleunigungen $\lambda_{12}\lambda_{23}$ als Gewichte angebracht werden. Dabei bestehen zwischen den Gewichten oder Winkelbeschleunigungen die Beziehungen:

oder

$$\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} = \lambda_{14} + \lambda_{43},$$

$$\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{31} = \lambda_{14} + \lambda_{43} + \lambda_{31} = 0.$$

Bezeichnet man allgemein die Entfernung zweier Drehpole $O_{mn} O_{np}$ mit a_{mnp} , so sind die Strecken

$$H_{13} A_{13}^2 = \frac{a_{213} \cdot a_{132}}{a_{123}} \cdot \frac{\omega_{13}^2}{\lambda_{13}},$$

$$H_{13} A_{13}^4 = \frac{a_{413} \cdot a_{134}}{a_{143}} \cdot \frac{\omega_{13}^2}{\lambda_{13}},$$

wie ich ebenfalls in der früher angezogenen Abhandlung bewiesen habe; es ist somit

$$\frac{H_{13} A_{13}^2}{H_{13} A_{13}^4} = \frac{a_{213} \cdot a_{132} \cdot a_{143}}{a_{413} \cdot a_{134} \cdot a_{123}}.$$

Wenn ein Dreieck $O_{13} O_{23} O_{43}$ von einer Geraden $O_{12} O_{24} O_{14}$ geschnitten wird, so besteht die Beziehung:

$$\frac{a_{213} \cdot a_{143} \cdot a_{423}}{a_{123} \cdot a_{413} \cdot a_{243}} = 1.$$

Nach Division der letzten Gleichungen bleibt

$$\frac{H_{13} A_{13}^2}{H_{13} A_{13}^4} = \frac{a_{132} \cdot a_{243}}{a_{134} \cdot a_{423}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

oder

$$H_{13} A_{13}^2 \cdot \sin \alpha = H_{13} A_{13}^4 \cdot \sin \beta,$$

das heisst, die Verbindungslinie der Theilungspunkte $A_{13}^2 A_{13}^4$ steht auf der Verbindungslinie der Drehpole $O_{13} O_{24}$ senkrecht.

Sucht man ausserdem noch die Theilungspunkte A_{14}^2 und A_{34}^2 , indem man von H_{14} und H_{34} die Senkrechten auf die Polgeraden O_{124} bzw. O_{234} errichtet bis zum Schnitte mit den Verbindungslinien $H_{12} H_{24}$ bzw. $H_{23} H_{24}$, so gelten für diese Punkte die barycentrischen Ausdrücke:

$$\lambda_{34} \cdot A_{34}^2 = \lambda_{32} \cdot H_{32} + \lambda_{24} \cdot H_{24},$$

$$\lambda_{41} \cdot A_{41}^2 = \lambda_{42} \cdot H_{42} + \lambda_{21} \cdot H_{21}.$$

Hierzu kommt von früher

$$\lambda_{13} \cdot A_{13}^2 = \lambda_{12} \cdot H_{12} + \lambda_{23} \cdot H_{23}.$$

Beachtet man, dass stets

$$H_{mn} = H_{nm}, \quad A_{mn}^p = A_{nm}^p, \quad \lambda_{mn} = -\lambda_{nm},$$

so liefert die Addition obiger drei Ausdrücke:

$$\lambda_{13} \cdot A_{13}^2 + \lambda_{34} \cdot A_{34}^2 + \lambda_{41} \cdot A_{41}^2 = 0,$$

das heisst, die drei Theilungspunkte $A_{13}^2 A_{34}^2 A_{41}^2$ liegen in einer Geraden; jeder von ihnen theilt die Strecke zwischen den anderen im umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Winkelbeschleunigungen.

Die drei genannten Theilungspunkte verhalten sich also wie die Drehpole dreier Systeme 1, 3, 4, deren Winkelgeschwindigkeiten den Winkelbeschleunigungen $\lambda_{13} \lambda_{34} \lambda_{41}$ proportional sind.

Sucht man ferner noch in Figur 3 die Theilungspunkte A^1_{24} und A^3_{24} , indem man von H_{24} auf die Polgeraden O_{124} und O_{234} die Senkrechten errichtet bis zum Schnitte mit den Geraden $H_{12}H_{14}$ bezw. $H_{23}H_{34}$, so schneiden sich die Verbindungslinien $A^2_{13}A^1_{24}$ und $A^4_{13}A^3_{24}$ in einem Punkte S der Geraden $H_{23}H_{14}$. Denn es ist nach der Bestimmungsweise von S :

$$S \equiv u \cdot A^2_{13} + v \cdot A^1_{24} = x \cdot A^4_{13} + y \cdot A^3_{24};$$

da nun die vier Theilungspunkte die Ausdrücke besitzen:

$$\lambda_{13} \cdot A^2_{13} = \lambda_{12} \cdot H_{12} + \lambda_{23} \cdot H_{23},$$

$$\lambda_{13} \cdot A^4_{13} = \lambda_{14} \cdot H_{14} + \lambda_{43} \cdot H_{43},$$

$$\lambda_{24} \cdot A^1_{24} = \lambda_{21} \cdot H_{21} + \lambda_{14} \cdot H_{14},$$

$$\lambda_{24} \cdot A^3_{24} = \lambda_{23} \cdot H_{23} + \lambda_{34} \cdot H_{34},$$

so wird:

$$u = x = \lambda_{13}, \quad v = y = \lambda_{24}$$

und es bleibt

$$S \equiv \lambda_{13} \cdot A^2_{13} + \lambda_{24} \cdot A^1_{24} = \lambda_{13} \cdot A^4_{13} + \lambda_{24} \cdot A^3_{24},$$

oder

$$S \equiv \lambda_{23} \cdot H_{23} + \lambda_{14} \cdot H_{14},$$

das heisst, der Punkt S theilt die Strecke $H_{23}H_{14}$ im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{23} \lambda_{14}$ und beide Strecken $A^2_{13}A^1_{24}$, $A^4_{13}A^3_{24}$ im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{13} \lambda_{24}$.

Ebenso kann gezeigt werden, dass die Verbindungslinien der Theilungspunkte $A^3_{12}A^1_{34}$ und $A^4_{12}A^2_{34}$ sich in einem Punkte S_1 derselben Geraden $H_{23}H_{14}$ schneiden. Man gewinnt nämlich auf analogem Wege für S_1 die Ausdrücke:

$$S_1 \equiv \lambda_{12}A^3_{12} + \lambda_{34} \cdot A^1_{34} = \lambda_{12} \cdot A^4_{12} + \lambda_{34} \cdot A^2_{34},$$

$$S_1 = \lambda_{32} \cdot H_{32} + \lambda_{14} \cdot H_{14}.$$

Die Punkte S und S_1 theilen die Strecke $H_{23}H_{14}$ harmonisch, wie ihre Ausdrücke lehren.

4. Die im vorigen Artikel behandelten vier ebenen Systeme besitzen sechs Tangentialpole H und zwölf Theilungspunkte A . Diese 18 Punkte bilden eine interessante Configuration; sie wurde in Figur 4 in anderer Anordnung vollständig gezeichnet.

Die Eigenschaften dieser Configuration ergeben sich aus den soeben abgeleiteten Sätzen und lassen sich in Folgendem zusammenfassen:

- a) Jede Verbindungsgerade zweier Tangentialpole $H_{mn}H_{np}$ (mit gemeinsamer Ziffer n im Stellenzeiger) trägt einen Theilungspunkt A^n_{mp} ; derselbe theilt ihre Strecke im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mn} \lambda_{np}$.
- b) Jede Gerade $H_{mp}A^n_{mp}$ steht auf der Polgeraden O_{mnp} senkrecht. Die Geraden $H_{mp}A^n_{mp}$, $H_{pn}A^n_{pn}$, $H_{nm}A^n_{nm}$ sind somit parallel.

- c) Jede Verbindungsgerade zweier Theilungspunkte mit gleichen unteren Stellenzeigern A_{mp}^n und A_{mq}^n steht senkrecht zur Verbindungslinie der Pole $O_{mp} O_{nq}$.

Die Geraden $A_{mp}^n A_{mq}^n$ und $A_{nq}^m A_{mp}^m$ sind somit parallel.

- d) Je drei Theilungspunkte mit gleichen oberen Stellenzeigern liegen auf einer Geraden. So liegen z. B. die Theilungspunkte $A_{mp}^n A_{pq}^n A_{qm}^n$ auf der Geraden a^n . Sie liegen auf derselben wie die Drehpole dreier Systeme mpq , deren Winkelgeschwindigkeiten den Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mp} \lambda_{pq} \lambda_{qm}$ proportional sind.

- e) Die Verbindungsgeraden $A_{mp}^n A_{nq}^m$ und $A_{mq}^n A_{mp}^m$ schneiden sich in einem Punkte S , der beide Strecken im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mp} \lambda_{nq}$ theilt.

Die Verbindungsgeraden $A_{mq}^n A_{np}^m$ und $A_{mp}^n A_{nq}^m$ schneiden sich in einem Punkte S_1 , der beide Strecken im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mq} \lambda_{np}$ theilt.

Die Punkte S und S_1 liegen auf der Verbindungsgeraden der Tangentialpole $H_{mn} H_{pq}$ und theilen diese Strecke harmonisch im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mn} \lambda_{pq}$.

5. Die Configuration der Punkte H und A kann zur Lösung einiger Fragen benützt werden, welche für die kinematische Kette Bedeutung haben.

Ist die Configuration der sechs Drehpole O gegeben, so dürfen vier Tangentialpole H beliebig angenommen werden. Dann sind zwei Gerade bestimmbar, in denen die beiden übrigen Tangentialpole liegen müssen. Die hier möglichen Fälle lassen sich alle auf folgende zwei zurückführen:

- a) Es sind die Tangentialpole $H_{mn} H_{np} H_{pm}$ (Poldreieung) und noch ein beliebiger vierter Tangentialpol gegeben; oder

- b) Es sind die Tangentialpole $H_{mn} H_{np} H_{pq} H_{qm}$ (Polvierung) gegeben.

Von den 15 verschiedenen Annahmen der vier unter sechs Tangentialpolen tritt der Fall a) elfmal, der Fall b) viermal ein.

a) Die Poldreieung. In Figur 5 seien ausser der Configuration der Drehpole O die Tangentialpole $H_{12} H_{23} H_{31}$ und H_{24} gegeben. Zieht man $H_{13} A_{13}^2 \perp O_{123}$ bis zum Schnitte mit $H_{12} H_{23}$, ferner $H_{13} A_{13}^4 \perp O_{134}$ und $A_{13}^2 A_{13}^4 \perp O_{13} O_{24}$, so gewinnt man den Theilungspunkt A_{13}^4 . Auf gleiche Weise wurden in Figur 5 die Theilungspunkte A_{12}^4 und A_{23}^4 construirt. Diese drei Punkte liegen in der Geraden a^4 . Verbindet man nun A_{12}^4 und A_{23}^4 mit H_{24} , so erhält man zwei Gerade $h_{14} h_{34}$, in denen die noch übrigen Tangentialpole H_{14} bzw. H_{34} liegen müssen. Nimmt man einen derselben an, so muss der andere auf der Geraden $H_{14} H_{34} A_{13}^4$ liegen und ist somit eindeutig bestimmt.

Die Punkte H_{14} und H_{34} liegen auf ihren Trägern h_{14} und h_{34} in projectivischen Punktreihen, die perspectivische Lage haben.

Fällt H_{14} mit H_{24} zusammen, so liegt daselbst auch H_{34} . Man kann also die sechs Tangentialpole derart annehmen, dass $H_{mn} H_{mp} H_{mq}$ zu

sammenfallen; dann sind die drei anderen Tangentialpole noch beliebig wählbar.

b) Die Polvierung. In Figur 6 seien ausser der Configuration der Drehpole O die Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{34}H_{41}$ gegeben. Sucht man den Schnitt H''_{13} der Linien $H_{12}H_{23}$ und $H_{34}H_{41}$, zieht ferner $ab \perp O_{13}O_{24}$, $ac \perp O_{134}$, $bc \perp O_{123}$, so ist $H''_{13}c$ eine Gerade h_{13} , in welcher der Tangentialpol H_{13} liegen muss. Denn, denkt man sich das Dreieck abc derart ähnlich veränderlich, dass die Eckpunkte auf ihren durch H''_{13} gehenden Trägern bleiben und die Seiten des Dreiecks ihre Richtung beibehalten, so entsprechen die Punkte a und b jederzeit zwei Theilungspunkten A^4_{13} und A^2_{13} (vergl. Fig. 4) und somit c dem zugehörigen Tangentialpole H_{13} .

Eine analoge Construction mit Hilfe des Dreieckes def führt zur Geraden $H''_{24}f$ oder h_{24} , in welcher der sechste Tangentialpol H_{24} liegen muss.

Nimmt man nun H_{24} auf h_{24} beliebig an, so irt H_{13} bestimmt. Denn, zieht man $H_{24}H_{23}$, ferner

$$H_{34}A^2_{34} \perp O_{234}, \quad H_{34}A^1_{34} \perp O_{134}, \quad A^1_{34}A^2_{34} \perp O_{12}O_{34},$$

so schneidet die Linie $A^1_{34}H_{41}$ die Linie h_{13} in H_{13} . Ebenso wurde in Figur 6 zu H'_{24} der zugehörige Tangentialpol H'_{13} construiert. Die entsprechenden Punkte H_{24} und H_{13} durchlaufen auf ihren Trägern projectivische Punktreihen.

Dem Punkte H''_{24} entspricht H''_{13} . In diesem besonderen Falle bilden die sechs Tangentialpole eine gewöhnliche Drehpol-Configuration, bei welcher an Stelle der Winkelgeschwindigkeiten ω um die Drehpole, die Winkelbeschleunigungen λ um die Tangentialpole treten.

Ausser den beiden soeben behandelten Fällen verdienen noch folgende zwei Erwähnung, da sie bei der Construction der Beschleunigungspole kinematischer Ketten zur Anwendung kommen:

c) Gegeben seien ausser der Configuration der Drehpole die Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{31}$ (Poldreieug) und drei Gerade $h_{14}h_{24}h_{34}$, in denen die drei übrigen Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}$ liegen. Man suche dieselben.

Zunächst ermittle man wie in a) die drei in einer Geraden a^4 liegenden Punkte $A^4_{12}A^4_{23}A^4_{31}$. Sodann bleibt nur die Aufgabe zu lösen (Fig. 7): durch diese drei Punkte drei Gerade zu ziehen, die sich paarweise auf den drei gegebenen Geraden h schneiden.

Die von A^4_{13} ausgehenden Strahlen schneiden h_{14} und h_{34} in perspectivisch liegenden Punktreihen, die, von A^4_{12} und A^4_{23} projectirt, auf der Geraden h_{24} zwei coniectivische Punktreihen erzeugen. Die beiden Doppelpunkte dieser Punktreihen müssen der gestellten Aufgabe genügen. Nun ist aber der Schnittpunkt D von h_{24} mit a^4 bereits einer dieser Doppelpunkte. Um den anderen zu finden, benöthigt man die den unendlich

fernen Punkten der projectivischen Punktreihen entsprechenden Gegenpunkte G' und G , welche durch die Linienzüge $A^4_{12} 1 3 G'$, $A^4_{23} III I G$ gewonnen werden; hierbei ist

$$A^4_{12} 1 \mid A^4_{23} III \parallel h_{24}.$$

Macht man noch $DG = G'H_{24}$, so ist in H_{24} der zweite Doppelpunkt und einer der gesuchten Tangentialpole gefunden; die beiden anderen $H_{14}H_{34}$ werden jetzt im Schnitte von $H_{24}A^4_{12}$ und $H_{24}A^4_{23}$ mit h_{14} bzw. h_{34} gewonnen.

d) Gegeben seien (Fig. 8) ausser der Configuration der Drehpole die Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}$ (welche keine Poldreieung bilden) und drei Gerade $h_{12}h_{23}h_{31}$, in denen die drei noch übrigen Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{31}$ liegen. Man suche dieselben.

Nimmt man auf h_{13} einen beliebigen Punkt h_{13} als Tangentialpol an, so ist aus ihm und den gegebenen Tangentialpolen nach a) eine Gerade bestimmt, welche die Gerade h_{12} im entsprechenden Punkte h_{12} schneidet. Aus den gegebenen Tangentialpolen und den einander entsprechenden Punkten $h_{12}h_{13}$ ist nun auch der sechste Tangentialpol h'_{23} vollständig bestimmt.

Beschreibt der Punkt h_{13} die Gerade h_{13} , so durchläuft h_{12} die Gerade h_{12} in projectivischer Punktreihe; ebenso beschreibt h'_{23} eine Gerade h'_{23} in projectivischer Punktreihe.

Um letztere zu bestimmen, beachte man Folgendes:

Wenn der Punkt h_{13} auf seine Geraden h_{13} nach m rückt, das ist in den Schnitt von h_{13} mit $H_{14}H_{34}$, so rückt der entsprechende Punkt h_{12} nach n , das ist in den Schnitt von h_{12} mit $H_{14}H_{24}$; denn es fallen dann die Theilungspunkte $A^3_{14}A^2_{14}$ mit H_{14} zusammen. Die sechs Tangentialpole bilden dann eine gewöhnliche Drehpol-Configuration [vergl. b) und Fig. 6] und es liegt der letzte der sechs Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}mnp$ im Schnitte von mn mit $H_{24}H_{34}$. p ist somit bereits ein Punkt der Geraden h'_{23} .

Um einen zweiten Punkt q zu erhalten, suche man jene einander entsprechenden Punkte $h_{13}h_{12}$, für welche die Winkelbeschleunigung λ_{14} verschwindet. Dann liegen die zugehörigen Theilungspunkte a^4_{13} und a^4_{12} in H_{34} bzw. H_{24} . Man zieht also $H_{34}h_{13} \perp O_{134}$ bis zum Schnitte mit h_{13} , sodann

$$h_{13}a^2_{13} \perp O_{123}, \quad a^4_{13}a^2_{13} \perp O_{13}O_{24},$$

damit ist a^2_{13} gewonnen; ferner ebenso $H_{24}h_{12} \perp O_{124}$ bis zum Schnitte mit h_{12} , sodann

$$h_{12}a^3_{12} \perp O_{123}, \quad a^4_{12}a^3_{12} \perp O_{12}O_{34},$$

damit ist a^3_{12} gewonnen; verbindet man nun a^2_{13} mit h_{12} , a^3_{12} mit h_{13} , so liefert der Schnitt q dieser Geraden einen zweiten Punkt von h'_{23} . Wo sich h_{23} und h'_{23} treffen, liegt der gesuchte Tangentialpol H_{23} .

Die beiden noch übrigen Tangentialpole $H_{12}H_{13}$ sind entweder direct wie H_{23} zu bestimmen, oder mit Hilfe des eben gefundenen Tangentialpoles H_{23} nach der unter a) angeführten Construction aus der Poldreieung $H_{23}H_{34}H_{42}$.

6. Untersucht man die gegenseitige Bewegung von mehr als vier, z. B. von n ebenen Systemen, so findet man auf ähnlichem Wege ausser einer Configuration von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Drehpolen O eine gleiche Anzahl Tangentialpole H und ausserdem $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Theilungspunkte A . Die Configuration dieser $\frac{1}{2}n(n-1)^2$ Punkte H und A besitzt naturgemäss dieselben Eigenschaften, wie sie in Artikel 4 für $n=4$ mitgetheilt wurden. Insbesondere seien folgende Eigenschaften der allgemeinen Configuration hervorgehoben:

- a) Alle Theilungspunkte mit gleichem unteren Stellenzeiger bilden eine Gruppe von $n-2$ Punkten A^r_{pq} , welche um den Tangentialpol H_{pq} derart angeordnet sind, dass

$$H_{pq}A^r_{pq} \perp O_{pqr} \quad \text{und} \quad A^r_{pq}A^s_{pq} \perp O_{pq}O_{rs}$$

(vergl. in Figur 9 den Tangentialpol H_{24} mit seiner Gruppe von $6-2=4$ Theilungspunkten).

- b) Alle Theilungspunkte mit gleichem oberem Stellenzeiger bilden eine gewöhnliche Drehpol-Configuration von $n-1$ Systemen.

Die Configuration der Punkte A zerfällt also in n verschiedene Drehpol-Configurationen zu je $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Polen.

Figur 9 stellt eine sechsgliedrige, zwangsläufige kinematische Kette dar; dieselbe besitzt 15 Tangentialpole H und 60 Theilungspunkte A . Die Configuration der letzteren zerfällt in sechs Drehpol-Configurationen zu je zehn Polen; in Figur 9 sind die Configurationen A^5 und A^6 vollständig gezeichnet.

7. Geht man von der gegenseitigen Bewegung von n ebenen Systemen zu der einfacheren Bewegung einer aus n Gliedern bestehenden ebenen kinematischen Kette über, so wird die Untersuchung bedeutend erleichtert. In allen jenen Punkten nämlich, die man als Gelenke der Kette bezeichnet, und in welcher zwei Glieder p und q der Kette in dauernder Verbindung verharren, fallen die vier Punkte: Drehpol O_{pq} , Wendepol J_{pq} , Tangentialpol H_{pq} , und somit auch Beschleunigungspol G_{pq} , stets in einen und denselben Punkt zusammen. Solche ausgezeichnete Punkte sollen in der Folge stets nur mit den Ziffern pq bezeichnet werden.

Es sind somit die r gegebenen Gelenke ebenso viele gegebene Tangentialpole.

Bei einer zwangsläufigen kinematischen Kette genügt die Annahme der Beschleunigung eines einzigen Punktes eines Gliedes p in Bezug auf ein fremdes Glied q , um die Beschleunigung jedes Punktes eines anderen Gliedes r in Bezug auf jedes fremde Glied s zu bestimmen. Da aber aus jener angenommenen Beschleunigung, dem Drehpol O_{pq} und dem Wende-

pol J_{pq} jener Glieder p und q , sowohl der Beschleunigungspol G_{pq} als auch der Tangentialpol H_{pq} konstruiert werden kann, so genügt offenbar (ausser den durch die Gelenke gegebenen Tangentialpolen) die Annahme eines einzigen Tangentialpoles, um sämtliche übrigen zu bestimmen.

Die Annahme dieses einen Tangentialpoles darf nicht beliebig, sondern muss auf der betreffenden Poltangente erfolgen, welche durch die Lage des Drehpoles und des Wendepoles, also durch die geometrische Configuration der Kette, bestimmt ist. Auf dieser Tangente jedoch darf der Tangentialpol beliebig angenommen werden. Für jede angenommene Lage desselben giebt es entsprechende Lagen aller anderen Tangentialpole auf ihren Poltangenten. Nach den Untersuchungen des Artikel 5 kann der Satz ausgesprochen werden:

Alle einander entsprechenden Tangentialpole einer zwangsläufigen kinematischen Kette liegen in projectivischen Punktreihen auf ihren Poltangenten.

Sollen zwei nicht durch Gelenke mit einander verbundene Glieder p und q der Kette keine Winkelbeschleunigung λ_{pq} gegeneinander besitzen, so muss H_{pq} unendlich fern sein; die übrigen Tangentialpole entsprechen in diesem Falle dem unendlich fernen Punkte der Poltangente t_{pq} .

8. Im Folgenden sollen Anwendungen der bisher beschriebenen Constructionen der Tangentialpole auf einige wichtigere kinematische Ketten gemacht werden.

Um für das einfache Kurbelviereck 12, 23, 34, 41 (Fig. 10) die zum Drehpol O_{13} gehörige Poltangente linear zu construiren, genügt es eine beliebige Gerade $mn \perp O_{13}O_{24}$ anzunehmen und

$$pn \perp 134, \quad pm \perp 123$$

zu ziehen; dann ist p ein Punkt der Poltangente t_{13} . In ähnlicher Weise kann die Poltangente t_{24} linear konstruiert werden.

Nimmt man nun auf t_{13} den Tangentialpol H_{13} beliebig an, so findet man den sechsten Tangentialpol H_{24} in folgender Weise:

Man verbindet H_{13} mit 12, zieht

$$23A^1_{23} \perp 123, \quad 23A^4_{23} \perp 234, \quad A^1_{23}A^4_{23} \perp 23, \quad 41$$

und verbindet 34 mit A^4_{23} ; der Schnitt dieser Geraden mit t_{24} ist der gesuchte Tangentialpol H_{24} .

Oder: Man verbindet H_{13} mit 34, zieht

$$41A^3_{41} \perp 134, \quad 41A^2_{41} \perp 124, \quad A^3_{41}A^2_{41} \perp 41, \quad 23$$

und verbindet 12 mit A^2_{41} ; der Schnitt dieser Geraden mit t_{24} ist ebenfalls H_{24} . Ebenso könnte H_{24} noch auf zwei andere Arten gefunden werden, wenn man statt 12 und 41 die übrigen zwei Gelenke 23 und 34 benützt.

Die Punktreihen $H_{13}H_{24}$ auf den Poltangente $t_{13}t_{24}$ sind projectivisch; $O_{13}O_{24}$ sind entsprechende Punkte. Projectirt man beide Punktreihen von diesen Punkten aus, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel, die den Strahl $O_{13}O_{24}$ entsprechend gemein haben; die Büschel schneiden sich also in einer Geraden.

Man kann zeigen, dass diese Schnittlinie s durch den Schnittpunkt S der Diagonalen 12, 34 und 23, 41 des Kurbelviereckes geht und auf der Linie $O_{13}O_{24}$ senkrecht steht. Denn, wenn man die Punktreihen $H_{13}H_{24}$ durch Parallelstrahlenbüschel $h_{13}h_{24}$ senkrecht zu $O_{13}O_{24}$ projectirt, so liegen diese in Involution, wie später gezeigt werden soll, und es entsprechen die durch O_{13} und O_{24} gehenden Strahlen $h_{13}^0h_{24}^0$ doppelt einander. Da ihr Schnitt der Geraden s angehören muss, so steht s zu $O_{13}O_{24}$ senkrecht.

Projectirt man die Punktreihen H_{13} und H_{24} auf t_{13} und t_{24} aus 12 und 34, so sind diese Büschel projectivisch; in den vier projectivischen Büscheln:

$$O_{13}(t_{24}), \quad 34(t_{24}), \quad 12(t_{13}), \quad O_{24}(t_{13})$$

entsprechen einander folgende Strahlen:

$$O_{13}O_{24}, \quad 34O_{24}, \quad 12O_{13}, \quad O_{24}O_{13},$$

$$O_{13}34, \quad 34O_{13}, \quad 12O_{24}, \quad O_{24}12.$$

Projectirt man ebenso die Punktreihen H_{13} und H_{24} auf t_{13} und t_{24} aus 23 und 41, so entsprechen in den vier projectivischen Büscheln

$$O_{13}(t_{24}), \quad 23(t_{24}), \quad 41(t_{13}), \quad O_{24}(t_{13})$$

einander folgende Strahlen:

$$O_{13}23, \quad 23O_{13}, \quad 41O_{24}, \quad O_{24}41.$$

Es entsprechen somit in den Büscheln $O_{13}(t_{24})$ und $O_{24}(t_{13})$ den Strahlen

$$O_{13}O_{24}, \quad O_{13}34, \quad O_{13}23$$

die Strahlen:

$$O_{24}O_{13}, \quad O_{24}12, \quad O_{24}41.$$

Somit entsprechen sich auch die Strahlen $O_{13}S$ und $O_{24}S$, da diese zu den früher genannten harmonisch liegen. Demnach ist auch S ein Punkt der Geraden s .

Diese Bemerkung liefert eine einfache Construction des Tangentialpoles H_{24} aus H_{13} (Fig. 11). Man verbinde H_{13} mit O_{24} bis zum Schnitte S_1 mit der Linie s , die im Schnitte S der Diagonalen des Kurbelviereckes senkrecht auf $O_{13}O_{24}$ errichtet wird; dann liefert S_1O_{13} im Schnitte mit t_{24} den Punkt H_{24} .

Sollen die Glieder 2 und 4 in dem betreffenden Augenblicke keine Winkelbeschleunigung λ_{24} gegen einander besitzen, so muss H_{24} im Unendlichen liegen; den zugehörigen Tangentialpol H_{13}^∞ der Glieder 1 und 3 bekommt man, wenn man $O_{13}S_2 \parallel t_{24}$ zieht und S_2 mit O_{24} verbindet; im Schnitte von S_2O_{24} mit t_{13} liegt H_{13}^∞ .

Auf demselben Wege findet man H_{24}^∞ , wenn die Glieder 1 und 3 keine relative Winkelbeschleunigung λ_{13} besitzen sollen. Die Punkte H_{13}^∞ und H_{24}^∞ liegen in einer Senkrechten auf $O_{13}O_{24}$, nämlich in dem Centralstrahl der oben erwähnten involutorischen Parallel-Strahlenbüschel $h_{13}h_{24}$.

Die Punkte $A_{24}^1 A_{13}^2 A_{24}^3 A_{13}^4$ in Figur 10 haben für das Kurbelviereck besondere Bedeutung. Wir wollen sie in Figur 12 mit $B_1 B_2 B_3 B_4$ bezeichnen; sie liegen auf jenen Gliedern, welche ihr Stellenzeiger anzeigt. Diese Punkte B geben ein ausgezeichnetes Bild über die Vertheilung der gegenseitigen Winkelbeschleunigungen der Glieder des Kurbelviereckes. Sie besitzen, wie in Artikel 3 gezeigt wurde, die barycentrischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\lambda_{42} \cdot B_1 &= \lambda_{41} \cdot O_{41} + \lambda_{12} \cdot O_{12}, & \lambda_{13} \cdot B_2 &= \lambda_{12} \cdot O_{12} + \lambda_{23} \cdot O_{23}, \\ \lambda_{24} \cdot B_3 &= \lambda_{23} \cdot O_{23} + \lambda_{34} \cdot O_{34}, & \lambda_{31} \cdot B_4 &= \lambda_{34} \cdot O_{34} + \lambda_{41} \cdot O_{41}.\end{aligned}$$

Ferner lassen sich leicht folgende Eigenschaften nachweisen:

Es ist jederzeit

$$B_1 B_3 \parallel B_2 B_4 \perp O_{13} O_{24}.$$

Die Verbindungslinien $B_1 B_2$ und $B_3 B_4$, sowie $B_1 B_4$ und $B_2 B_3$ schneiden sich auf den Diagonalen des Kurbelviereckes $O_{14} O_{23}$ bzw. $O_{12} O_{34}$; die Ausdrücke dieser Schnittpunkte T und R sind nämlich:

$$\begin{aligned}R &\equiv \lambda_{12} O_{12} - \lambda_{34} O_{34} \equiv \lambda_{13} B_2 - \lambda_{24} \cdot B_3 \equiv \lambda_{42} B_1 - \lambda_{31} \cdot B_4, \\ T &\equiv \lambda_{23} \cdot O_{23} - \lambda_{41} \cdot O_{41} \equiv \lambda_{24} \cdot B_3 - \lambda_{31} \cdot B_4 \equiv \lambda_{13} \cdot B_2 - \lambda_{42} \cdot B_1.\end{aligned}$$

Hieraus und aus oben stehenden Ausdrücken ergeben sich für die zwischen den vier Gliedern vorhandenen sechs verschiedenen Winkelbeschleunigungen λ folgende 15 Verhältnisse:

$$\begin{aligned}O_{12} O_{23} : O_{23} B_2 : B_2 O_{12} &= \lambda_{31} : \lambda_{12} : \lambda_{23}, \\ O_{23} O_{34} : O_{34} B_3 : B_3 O_{23} &= \lambda_{42} : \lambda_{23} : \lambda_{34}, \\ O_{34} O_{41} : O_{41} B_4 : B_4 O_{34} &= \lambda_{13} : \lambda_{34} : \lambda_{41}, \\ O_{41} O_{12} : O_{12} B_1 : B_1 O_{41} &= \lambda_{24} : \lambda_{41} : \lambda_{12}, \\ O_{12} R : R O_{34} &= \lambda_{34} : -\lambda_{12}, \\ O_{23} T : T O_{41} &= \lambda_{41} : -\lambda_{23}, \\ B_1 B_3 : B_2 B_4 &= \lambda_{13} : \lambda_{24}.\end{aligned}$$

Die Geraden $B_1 B_3$ und $B_2 B_4$ für alle möglichen Beschleunigungszustände des Kurbelviereckes bilden zwei involutorische Parallel-Strahlenbüschel b_{13} und b_{24} ; denn für

$$\begin{aligned}\lambda_{23} = 0 &\text{ fällt } B_2 \text{ nach } O_{12}, \quad B_3 \text{ nach } O_{34}, \\ \lambda_{14} = 0 &\text{ " } B_1 \text{ " } O_{12}, \quad B_4 \text{ " } O_{34};\end{aligned}$$

die Geraden b' der beiden Büschel entsprechen also einander doppelt. Ebenso entsprechen sich jene Strahlen doppelt, welche durch O_{23} und O_{41} , sowie durch O_{24} und O_{13} gehen.

Die Parallelstrahlenbüschel b_{13} und b_{24} stehen mit den Parallelstrahlenbüscheln h_{13} und h_{24} , welche früher erwähnt wurden, in der Beziehung, dass b_{13} ähnlich mit h_{13} , b_{24} ähnlich mit h_{24} ist (vergl. Fig. 10).

Die im Endlichen gelegenen Doppelstrahlen der ähnlichen Strahlenbüschel sind $b_{13}^0 h_{13}^0$ bezw. $b_{24}^0 h_{24}^0$. Schneidet man die vier Parallelstrahlenbüschel $h_{13} b_{13}$, $h_{24} b_{24}$ durch die Gerade $O_{13} O_{24}$ in vier Punktreihen und sind $P_{13} Q_{13}$, $P_{24} Q_{24}$ je zwei entsprechende Punkte derselben, so ist aus dem Dreiecke mnp :

$$O_{13} P_{13} : O_{13} Q_{13} = \cos(\alpha + \alpha_1) : \cos \alpha \cos \alpha_1$$

und analog

$$O_{24} P_{24} : O_{24} Q_{24} = \cos(\beta + \beta_1) : \cos \beta \cos \beta_1.$$

Wählt man P_{13} in O_{24} , P_{24} in O_{13} und setzt $O_{13} O_{24} = a$, so ist

$$O_{13} Q_{13} = a \cdot \frac{\cos \alpha \cos \alpha_1}{\cos(\alpha + \alpha_1)}, \quad O_{24} Q_{24} = a \cdot \frac{\cos \beta \cos \beta_1}{\cos(\beta + \beta_1)}.$$

Die Parallelstrahlenbüschel $b_{13} b_{24}$ schneiden die Gerade $O_{13} O_{24}$ in zwei involutorischen Punktreihen; sollen $Q_{13} Q_{24}$, $R_{13} R_{24}$ entsprechende Punkt-paare dieser Involution sein, so muss die Bedingung erfüllt werden:

$$\frac{O_{13} R_{13}}{O_{24} R_{13}} : \frac{O_{13} Q_{13}}{O_{24} Q_{13}} = \frac{O_{24} R_{24}}{O_{13} R_{24}} : \frac{O_{24} Q_{24}}{O_{13} Q_{24}}.$$

Wählt man $R_{13} R_{24}$ dort, wo die durch 12 und 34 gehenden Strahlen der involutorischen Strahlenbüschel $b_{13} b_{24}$ die Gerade $O_{13} O_{24}$ treffen, so ist

$$O_{13} R_{13} : R_{13} O_{24} = \tan \beta : \tan \alpha_1,$$

$$O_{24} R_{24} : R_{24} O_{13} = \tan \alpha : \tan \beta_1;$$

dazu kommt von oben:

$$O_{13} Q_{13} : O_{24} Q_{24} = \frac{\cos \alpha \cos \alpha_1}{\cos(\alpha + \alpha_1)} : \frac{\cos \beta \cos \beta_1}{\cos(\beta + \beta_1)}.$$

Diese drei Proportionen erfüllen aber die oben stehende Bedingung der Involution und es sind somit $Q_{13} Q_{24}$ doppelt entsprechende Punkte derselben. Damit ist aber bewiesen, dass $O_{13} O_{24}$ doppelt entsprechende Punkte der Punktreihen $P_{13} P_{24}$ sind, und dass die Parallelstrahlenbüschel $h_{13} h_{24}$ thatsächlich involutorisch sind.

9. In Figur 13 ist eine sechsgliedrige kinematische Kette dargestellt (Watt'scher Mechanismus nach Burmester). Es sollen die Tangentialpole derselben bestimmt werden, wenn einer derselben, z. B. H_{13} , gegeben ist.

Der Tangentialpol H_{24} wird aus dem Kurbelviereck 1234 nach vorigem Artikel bestimmt.

Um H_{45} zu ermitteln, benütze man das Schema:

$$H_{24} H_{43} H_{32} (\text{Poldreieung}) H_{35} \dots h_{45},$$

das heisst, nach Artikel 5a wird folgendermassen construirt:

Man verbinde H_{24} mit 23, errichte in 34 eine Senkrechte auf O_{234} bis zum Schnitte A^2_{34} mit jener Verbindungslinie, ziehe

$$34A^5_{34} \perp 345, \quad A^2_{34}A^5_{34} \perp 34O_{25},$$

dann ist $A^5_{34}35$ eine Linie h_{45} , in welcher H_{45} liegt.

Ferner liegt H_{45} auch in der Poltangente t_{45} ; diese wird entweder auf bekannte Weise durch Winkelübertragung gewonnen oder oft zweckmässiger und linear durch Fällung dreier Senkrechten:

$$mn \perp O_{45}O_{36}, \quad mp \perp 345, \quad np \perp 456,$$

dann ist p ein Punkt der Poltangente t_{45} .

Kennt man H_{45} als Schnittpunkt der Linien h_{45} und t_{45} , so kann H_{36} aus dem Kurbelviereck 3456 nach der im vorigen Artikel beschriebenen Methode construirt werden (in Figur 13 nicht durchgeführt).

Um den Tangentialpol H_{15} zu ermitteln, benütze man das Schema:

$$\left. \begin{array}{l} H_{14}H_{43}H_{31} \text{ (Poldreieung) } H_{35} \dots h_{15} \\ H_{12}H_{24}H_{41} \text{ (Poldreieung) } H_{45} \dots h'_{15} \end{array} \right\} H_{15}.$$

Man ziehe also $H_{13}A^4_{13} \perp 134$ bis zum Schnitte mit 14, 34, ferner

$$H_{13}A^5_{13} \perp 135, \quad A^4_{13}A^5_{13} \perp O_{13}O_{45},$$

so ist $35A^5_{13}$ eine den Punkt H_{15} tragende Gerade h_{15} .

Endlich ziehe man $14A^2_{14} \perp 124$ bis zum Schnitte mit 12 H_{24} ,

$$14A^5_{14} \perp 145, \quad A^2_{14}A^5_{14} \perp 14O_{25},$$

so ist $H_{45}A^5_{14}$ eine zweite durch H_{15} gehende Gerade h'_{15} . Im Schnitte von h_{15} und h'_{15} liegt H_{15} .

In ähnlicher Weise werden die noch übrigen Tangentialpole bestimmt.

Figur 14 stellt eine andere sechsgliedrige kinematische Kette (Stephenson-Mechanismus nach Burmester) dar. Von den Tangentialpolen sei H_{24} auf der Poltangente t_{24} gegeben. Um hieraus irgend einen anderen Tangentialpol zu construiren, bediene man sich der in Artikel 5a) und b) mitgetheilten Constructionen. Z. B. zur Bestimmung des Tangentialpoles H_{45} benütze man das Schema:

$$\left. \begin{array}{l} H_{12}H_{24}H_{41} \text{ (Poldreieung) } H_{25} \dots h_{45} \\ H_{24}H_{46}H_{65}H_{52} \text{ (Polvierung) } \dots h'_{45} \end{array} \right\} H_{45}.$$

Man zieht also $H_{24}A^1_{24} \perp 124$ bis zum Schnitte mit 12, 14, sodann

$$H_{24}A^5_{24} \perp 245, \quad A^1_{24}A^5_{24} \perp O_{24}O_{15};$$

dann ist $25A^5_{24}$ eine Gerade h_{45} [Construction a)].

Ferner ziehe man

$$ab \perp O_{45}O_{26}, \quad ac \perp 245, \quad bc \perp 456,$$

dann ist die Verbindungslinie von c mit dem Schnitte d der Geraden 56, 46 und $25H_{24}$ eine Gerade h'_{45} . Im Schnitte von h_{45} und h'_{45} liegt der gesuchte Tangentialpol H_{45} .

In analoger Weise werden die übrigen Tangentialpole bestimmt.

Für die meisten kinematischen Ketten werden die oben erwähnten Constructionen a) und b) zur Bestimmung der Tangentialpole ausreichen. Eine interessante Ausnahme behandelt der folgende Artikel.

10. Um die Tangentialpole der in Figur 15 und 16 dargestellten achtgliedrigen kinematischen Kette (Dreispannmechanismus nach Burmester, Interferenzkurbelkette nach Rittershaus) zu bestimmen, wenn z. B. der Tangentialpol H_{13} gegeben (und somit nach Artikel 8 auch H_{28} bekannt) ist, schlage man folgenden Weg ein.

Zunächst ermittle man nach Artikel 5a aus den Tangentialpolen:

$$\begin{array}{llll} H_{12} H_{23} H_{31} \text{ (Poldreijung) } H_{15} & \text{ die Geraden } h_{25} h_{35}, \\ H_{12} H_{23} H_{31} & \text{ " } H_{26} \text{ " " } h_{36} h_{16}, \\ H_{12} H_{23} H_{31} & \text{ " } H_{37} \text{ " " } h_{17} h_{27}, \end{array}$$

worin, wie bisher, h_{mn} eine Gerade bedeutet, in welcher der Tangentialpol H_{mn} liegen muss.

Nimmt man nun auf der Geraden h_{16} einen beliebigen Punkt h_{16} als Tangentialpol an, so lässt sich der zugehörige Tangentialpol h_{14} in folgender Weise bestimmen. Es ergibt sich nach Artikel 5a) aus

$$h_{16} H_{62} H_{21} \text{ (Poldreijung) } H_{46} \text{ eine Gerade } a_{16}^4, 46$$

und nach Artikel 5b) aus

$$h_{16} H_{64} H_{45} H_{51} \text{ (Polvierung) eine Gerade } c, s;$$

der Schnitt beider ist h_{14} . Durchläuft h_{16} alle Punkte der Geraden h_{16} , so beschreibt h_{14} ebenfalls eine Gerade h_{14} , welche durch den Schnittpunkt d der Geraden 15, 54 und 26, 64 gehen muss; denn, fällt h_{16} mit 26 zusammen, so fällt a_{16}^4 nach 26 und s nach d . Es ist also dh_{14} eine Gerade, auf welcher der Tangentialpol H_{14} liegen muss.

In analoger Weise kann man aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{27} H_{73} H_{32} \text{ (Poldreijung) } H_{47} \\ h_{27} H_{74} H_{46} H_{62} \text{ (Polvierung) } \end{array} \right\} \text{ eine Gerade } h_{24}$$

und aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{36} H_{62} H_{23} \text{ (Poldreijung) } H_{46} \\ h_{36} H_{64} H_{47} H_{73} \text{ (Polvierung) } \end{array} \right\} \text{ eine Gerade } h_{34}$$

bestimmen, auf welcher die Tangentialpole H_{24} bzw. H_{34} liegen. Hierbei geht h_{24} durch den Schnitt e der Geraden 26, 64 und 37, 74, h_{34} durch den Schnitt f der Geraden 37, 74 und 15, 54. Aus den drei Geraden $h_{14} h_{24} h_{34}$ und den gegebenen Tangentialpolen 12, 23, H_{13} kann man nun nach der in Artikel 5c) mitgetheilten einfachen Construction mit Hilfe der auf einer Geraden a^4 liegenden Punkte $A_{12}^4 A_{23}^4 A_{31}^4$ die Tangentialpole $H_{14} H_{24} H_{34}$ finden.

Uebrigens kann jeder dieser Punkte auch für sich ermittelt werden. Um z. B. H_{14} zu finden, suche man die Gerade h_{14} , wie oben, sodann in gleicher Weise aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{25} H_{51} H_{12} H_{45} \\ h_{25} H_{54} H_{46} H_{62} \end{array} \right\} \text{eine Gerade } h'_{14};$$

im Schnitte von h_{14} und h'_{14} liegt H_{14} . Hierbei ist h_{25} ein beliebiger Punkt der Geraden h_{25} .

Um die Tangentialpole $H_{56} H_{67} H_{75}$ zu ermitteln, suche man zunächst drei durch sie gehende Gerade $h_{56} h_{67} h_{75}$ (Fig. 16). Jede von ihnen, z. B. h_{56} , wird nach derselben Methode zu bestimmen sein, wie früher h_{14} . Man nehme auf der Geraden h_{15} einen beliebigen Punkt h_{16} als Tangentialpol an, bestimme nach Artikel 5a) aus

$$h_{16} H_{62} H_{21} \text{ (Poldreieung) } H_{51} \text{ eine Gerade } a^{56}, 15$$

und nach Artikel 5b) aus

$$h_{16} H_{64} H_{45} H_{51} \text{ (Polvierung) eine Gerade } c, s.$$

Der Schnitt beider Geraden liefert den zu h_{16} gehörigen Tangentialpol h_{56} . Durchläuft h_{16} alle Punkte der Geraden h_{16} , so beschreibt h_{56} ebenfalls eine Gerade h_{56} , welche durch den Schnitt d der Verbindungslinien 15, 26 und 45, 46 gehen muss; denn, fällt der Tangentialpol h_{16} nach 26, so liegt daselbst auch a^{56} und s fällt nach d . Es ist also $d h_{56}$ die gesuchte Gerade h_{56} .

In anderer Weise könnte h_{56} nach dem Schema

$$\left. \begin{array}{l} h_{25} H_{51} H_{12} H_{62} \\ h_{25} H_{54} H_{46} H_{62} \end{array} \right\} h_{56}$$

ermittelt werden. Analog finden wir die Gerade h_{67} aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{27} H_{73} H_{32} H_{62} \\ h_{27} H_{74} H_{46} H_{62} \end{array} \right\} h_{67},$$

oder aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{35} H_{62} H_{25} H_{73} \\ h_{35} H_{64} H_{47} H_{73} \end{array} \right\} h_{67}$$

und endlich die Gerade h_{75} aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{35} H_{51} H_{15} H_{73} \\ h_{35} H_{54} H_{47} H_{73} \end{array} \right\} h_{75},$$

oder aus

$$\left. \begin{array}{l} h_{17} H_{73} H_{31} H_{51} \\ h_{17} H_{74} H_{46} H_{51} \end{array} \right\} h_{75}.$$

Die Geraden $h_{56} h_{67} h_{75}$ liefern nun im Vereine mit den drei gegebenen Tangentialpolen 45, 46, 47 nach der in Artikel 5d) beschriebenen Con-

struction die drei Tangentialpole $H_{56}H_{67}H_{75}$. Man könnte übrigens jeden derselben auch auf indirectem Wege finden.

So ist z. B. H_{56} nach dem Schema

$$\left. \begin{array}{l} H_{14}H_{45}H_{51} \text{ (Poldreieug)} H_{46} \\ H_{24}H_{46}H_{62} \text{ (Poldreieug)} H_{45} \end{array} \right\} H_{56}$$

vollständig bestimmt.

Die Bestimmung der noch übrigen Tangentialpole H_{25} , H_{35} , H_{36} , H_{16} , H_{17} , H_{27} , sowie $H_{48}H_{53}H_{68}$ unterliegt jetzt keinen Schwierigkeiten mehr; die Construction bietet nichts Neues. Für die sechs ersterwähnten Punkte sind überdies schon sechs Gerade $h_{25}h_{35}$ etc. bekannt, auf denen sie liegen.

11. Mit Hilfe der in Artikel 5 mitgetheilten und in den Artikeln 7—10 auf kinematische Ketten angewendeten Constructionen lässt sich nun, wie bereits angedeutet wurde, die Aufgabe lösen: Den Beschleunigungspol G_{pq} der relativen Bewegung irgend zweier Glieder p und q einer zwangsläufigen kinematischen Kette zu finden, wenn der Beschleunigungspol G_{rs} irgend zweier anderen Glieder r und s gegeben ist (Gelenke ausgenommen).

Man bestimme nämlich den Drehpol O_{pq} , ferner den Wendepol J_{pq} und den Tangentialpol H_{pq} in der von mir angegebenen Weise; dann liegt der Beschleunigungspol G_{pq} im Fusspunkte der Senkrechten von O_{pq} auf $J_{pq}H_{pq}$.

Die Bestimmung der Punkte J_{pq} und H_{pq} kann völlig unabhängig von einander erfolgen, was für die Controle und Genauigkeit der Construction auch zu empfehlen sein wird; der Winkel $J_{pq}O_{pq}H_{pq}$ muss dann ein rechter sein.

Sollte die Ermittlung des Wendepoles J_{pq} umständlich sein, wie dies in wenigen Ausnahmefällen vielleicht eintritt, so wird doch stets auf bequeme Weise eine Gerade i_{pq} anzugeben sein, auf welcher J_{pq} liegen muss; dann ist J_{pq} aus O_{pq} und H_{pq} leicht zu ermitteln.

Analoges gilt, wenn der Tangentialpol H_{pq} umständliche Constructionen erfordert, was wohl selten eintreten wird.

Meistens sind sowohl J_{pq} und H_{pq} bequem direct zu construiren.

Figur 17 zeigt eine sechsgliedrige kinematische Kette, von welcher der Beschleunigungspol G_{13} der Glieder 1 und 3 gegeben ist; es wurden auf dem soeben beschriebenen Wege die Beschleunigungspole G_{24} , G_{45} , G_{51} , G_{36} ermittelt und eingezeichnet.

XVI.

Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind.

Von

Dr. A. WIMAN,

Docent an der Universität in Lund.

1. In den folgenden Entwicklungen beabsichtige ich darzulegen, dass die Resultate, welche Steiner* bezüglich der obigen Aufgabe gegeben hat, nur zum Theil richtig sind. Doch sind die Steiner'schen Ergebnisse seither von Herrn Sporer** wieder abgeleitet.

Nach Sporer bestimmt man nun die Anzahl Kegelschnitte, welche zu a Punkten, b Tangenten und c Normalen, wo

$$a + b + c = 5,$$

gehören, in der folgenden Weise. Man betrachte das System Kegelschnitte, welche durch a Punkte, b Tangenten und nur $c - 1$ Normalen bestimmt sind. Es sei schon bekannt, dass durch jeden Punkt α Kegelschnitte dieses Systems gehen, und dass jede Gerade von β Kegelschnitten berührt wird. Dann ergibt sich unmittelbar der Satz, dass, wenn der Berührungspunkt einer Tangente T eines Kegelschnittes des Systems auf einer festen Geraden G liegt, so ist die Enveloppe der Tangente T eine Curve von der Klasse $\alpha + \beta$ mit G als β -facher Tangente. Hieraus wird nun die Folgerung gezogen, dass $\alpha + \beta$ Kegelschnitte des durch a Punkte, b Tangenten und $c - 1$ Normalen bestimmten Systems eine neue Normale G besitzen. Die Erledigung der Fälle mit c Normalen wird somit auf diejenigen mit $c - 1$ Normalen zurückgeführt, und man braucht von vornherein das Problem nur für den Fall, wo keine bestimmende Normalen auftreten, gelöst zu haben.

Hinsichtlich dieser Methode bemerke ich, dass die uneigentlichen Lösungen mit Vorsicht ausgeschieden werden sollen. Herr Sporer scheint aber nicht bemerkt zu haben, dass in den Fällen, wo drei oder mehr bestimmende Normalen gegeben sind, immer uneigentliche Lösungen auf-

* Gesammelte Werke Bd. 2 S. 683.

** Diese Zeitschrift 1890 35. Jahrgang S. 237.

treten. Als Beispiel nehme ich den durch zwei Punkte und drei Normalen bestimmten Fall. Es ist einleuchtend, dass man hier die uneigentliche Lösung von der Verbindungsgeraden der beiden Punkte und der unendlich fernen Geraden erhält. Ferner enthält das System Kegelschnitte, welches durch einen Punkt und drei Normalen bestimmt ist, ∞^1 uneigentliche Lösungen, welche aus der unendlich fernen Geraden und je einer Geraden durch den gegebenen Punkt bestehen; diese Lösungen gelten aber auch noch, falls eine vierte bestimmende Normale hinzukommt. Ebenso finden wir, dass ∞^2 uneigentliche Kegelschnitte fünf gegebene Geraden zu Normalen haben, nämlich diejenigen, welche aus der unendlich fernen Geraden und je einer beliebigen Geraden in der Ebene bestehen. Somit tritt die Eigenthümlichkeit ein, dass Steiner für die Fälle mit vier oder fünf Normalen ausser den eigentlichen Lösungen auch eine gewisse Anzahl uneigentliche mitgenommen hat, da es doch deren unendlich viele giebt.

Die besprochene Methode kann indessen leicht dahin modificirt werden, dass ihre Giltigkeit in allen Fällen beibehalten wird. Von den α Kegelschnitten eines Systems, welche durch einen unendlich fernen Punkt gehen, mögen γ in der obigen Weise nothwendig zerfallen, so dass nur $\alpha - \gamma$ eigentlich sind. Die Enveloppe von der Klasse $\alpha + \beta$ der Tangenten der Systemkegelschnitte, welche auf einer festen Geraden G berühren, hat somit die unendlich ferne Gerade als γ -fache Tangente, und man ersieht leicht, dass im Allgemeinen die bezügliche Enveloppe von der unendlich fernen Geraden weder in G noch in dem in Bezug auf die imaginären Kreispunkte conjugirten Punkt berührt wird. Durch den letzterwähnten Punkt gehen somit

$$\alpha + \beta - \gamma$$

andere Tangenten, welche also eben so vielen eigentlichen Kegelschnitten angehören, welche die Gerade G senkrecht durchschneiden.

2. Die Anzahl Kegelschnitte, welche durch fünf Punkte, vier Punkte und eine Tangente, drei Punkte und zwei Tangenten, zwei Punkte und drei Tangenten, einen Punkt und vier Tangenten, fünf Tangenten bestimmt sind, werden bekanntlich durch die bezüglichen Zahlen 1, 2, 4, 4, 2, 1 angegeben. Dabei können höchst zwei der bestimmenden Punkte unendlich entfernt liegen. Man erhält so unmittelbar die Anzahl Kegelschnitte, welche eine Gerade senkrecht durchschneiden, wenn sie übrigens durch vier Punkte, drei Punkte und eine Tangente, zwei Punkte und zwei Tangenten, einen Punkt und drei Tangenten, vier Tangenten bestimmt sind, nämlich 3, 6, 8, 6, 3, wobei ein bestimmender Punkt in unendlicher Entfernung liegen darf. Weiter finden wir für zwei Normalen und drei Punkte, zwei Punkte und eine Tangente, einen Punkt und zwei Tangenten, drei Tangenten die zugehörigen Zahlen 9, 14, 14, 9.

Um die Anzahl Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte P_1, P_2 gehen und drei Gerade N_1, N_2, N_3 zu Normalen haben, zu finden, gehen wir zu den vier Zahlen zurück, welche aussagen, wie viele Kegelschnitte durch P_1, P_2 und die unendlich fernen Punkte $N_1^\infty, N_2^\infty, N_3^\infty$ gehen, bez. durch $P_1, P_2, N_1^\infty, N_2^\infty$ gehen und N_3 berühren, bez. durch P_1, P_2, N_1^∞ gehen und N_2, N_3 berühren, bez. durch P_1, P_2 gehen und N_1, N_2, N_3 berühren. Wir erhalten für die eigentlichen Lösungen die Zahlen 0, 2, 4, 4. Dann suchen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche N_3 senkrecht durchschneiden, durch P_1, P_2 gehen und entweder durch N_1^∞, N_2^∞ gehen, oder durch N_1^∞ gehen und N_2 berühren, oder endlich N_1 und N_2 berühren; wir finden 2, 6, 8. Nun bestimmen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche N_2 und N_3 zu Normalen haben, durch P_1 und P_2 gehen und entweder durch N_1^∞ gehen oder N_1 berühren, und zwar erhalten wir 8, 14. Die Anzahl Kegelschnitte, welche durch P_1, P_2 gehen und N_1, N_2, N_3 zu Normalen haben, ist somit

$$8 + 14 = 22.$$

Das Bildungsgesetz ist evident:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 4 \\ & 2 & 6 & 8 \\ & & 8 & 14 \\ & & & 22. \end{array}$$

Um die Anzahl Kegelschnitte zu bestimmen, welche durch einen Punkt P_1 gehen, eine Gerade T_1 berühren und drei Normalen N_1, N_2, N_3 besitzen, suchen wir in derselben Weise zuerst die Anzahl Kegelschnitte, welche durch P_1 gehen, T_1 berühren und sich zu N_1, N_2, N_3 wie im vorhergehenden Falle verhalten; wir erkennen als Ausgangszahlen 0, 4, 4, 2 und bilden hieraus in gewohnter Weise:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 4 & 2 \\ & 4 & 8 & 6 \\ & & 12 & 14 \\ & & & 26. \end{array}$$

26 Kegelschnitte besitzen somit die verlangte Eigenschaft.

Nun suchen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche zwei Gerade berühren und drei Gerade zu Normalen haben. Wir gehen wie in den vorhergehenden Fällen zu den vier Ausgangszahlen 0, 4, 2, 1 zurück und bilden daraus:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 2 & 1 \\ & 4 & 6 & 3 \\ & & 10 & 9 \\ & & & 19. \end{array}$$

Die Zahl der Lösungen ist somit 19.

Es stellt sich so die Frage auf, wie viele Kegelschnitte durch einen Punkt P_1 gehen und vier Gerade N_1, N_2, N_3, N_4 zu Normalen haben. Hier müssen wir fünf Ausgangszahlen suchen, wo die N_i und ihre unendlich fernen Punkte die analoge Rolle wie in den schon erörterten Fällen spielen. Wir erhalten leicht für diese Zahlen 0, 0, 4, 4, 2 und bilden daraus:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ & 0 & 4 & 8 & 6 \\ & & 4 & 12 & 14 \\ & & & 16 & 26 \\ & & & & 42. \end{array}$$

Also ist die gesuchte Anzahl 42.

Ebenso bestimmen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche eine Gerade T_1 berühren und vier Gerade N_1, N_2, N_3, N_4 zu Normalen haben. Diese Zahl ist 33 und wird in der folgenden Weise gebildet:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ & 0 & 4 & 6 & 3 \\ & & 4 & 10 & 9 \\ & & & 14 & 19 \\ & & & & 33. \end{array}$$

Es erübrigt noch die Anzahl Kegelschnitte zu bestimmen, welche fünf gegebene Gerade N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 zu Normalen haben. Aus den sechs Zahlen 0, 0, 0, 4, 2, 1 erhalten wir:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ & 0 & 0 & 4 & 6 & 3 \\ & & 0 & 4 & 10 & 9 \\ & & & 4 & 14 & 19 \\ & & & & 18 & 33 \\ & & & & & 51. \end{array}$$

Zu fünf gegebenen Normalen hat man somit 51 Kegelschnitte.

Für die Lösungen in den hier erörterten Fällen mit 3, 4, 5 Normalen hatte Steiner die Zahlen

23, 28, 23, 51, 51, 102
gegeben.

Bezeichnen wir die Anzahl endlicher Punkte mit P , unendlicher Punkte mit P^∞ , Tangenten mit T und Normalen mit N , so ergibt sich uns für die durch die bezüglichen Bedingungen bestimmten Kegelschnitte die Anzahl L der Lösungen durch folgendes Schema:

Nr.	P	P^∞	T	N	L	Nr.	P	P^∞	T	N	L
1	4	.	.	1	3	15	1	.	2	2	14
2	2	2	.	1	2	16	.	1	2	2	10
3	3	.	1	1	6	17	.	.	3	2	9
4	1	2	1	1	4	18	2	.	.	3	22
5	2	.	2	1	8	19	1	1	.	3	16
6	.	2	2	1	4	20	.	2	.	3	4
7	1	.	3	1	6	21	1	.	1	3	26
8	.	.	4	1	3	22	.	1	1	3	14
9	3	.	.	2	9	23	.	.	2	3	19
10	2	1	.	2	8	24	1	.	.	4	42
11	1	2	.	2	4	25	.	1	.	4	18
12	2	.	1	2	14	26	.	.	1	4	33
13	1	1	1	2	12	27	.	.	.	5	51
14	.	2	1	2	4						

Doch kann in den Fällen 1, 3, 5, 7 ein gegebener Punkt P in unendlicher Entfernung liegen. Das Bildungsgesetz möchte ich noch einmal hervorheben:

Die Anzahl Kegelschnitte, welche durch a endliche und a_1 unendliche Punkte gehen, b Gerade berühren und c Gerade zu Normalen haben, wo

$$a + a_1 + b + c = 5,$$

ist gleich der Anzahl Kegelschnitte, welche durch a endliche und $a_1 + 1$ unendliche Punkte gehen, b Gerade berühren und $c - 1$ Gerade zu Normalen haben, zusammengenommen mit der Anzahl Kegelschnitte, welche durch a endliche und a_1 unendliche Punkte gehen, $b + 1$ Gerade berühren und $c - 1$ Gerade zu Normalen haben.

3. Das Kegelschnittsystem bestehe nun aus Parabeln, das heisst, die unendlich ferne Gerade sei gemeinsame Tangente. Das System sei von der Beschaffenheit, dass α Parabeln durch einen beliebigen Punkt P gehen und β eine beliebige Gerade G berühren. Es soll die Anzahl Parabeln bestimmt werden, welche die beliebige Gerade G senkrecht durchschneiden. Die Enveloppe einer Tangente eines Kegelschnitts des Systems, deren Berührungspunkt auf der Geraden G liegt, ist natürlich auch hier von der Klasse $\alpha + \beta$ mit G als β -facher Tangente.

Wir nehmen an, dass durch den unendlich fernen Punkt G^∞ der Geraden G , α_1 eigentliche Parabeln nebst einer Zahl zerfallender Kegelschnitte gehen. Von G^∞ gehen an die erwähnte Enveloppe G als β -fache Tangente und die unendlich ferne Gerade als α -fache Tangente. Man ersieht aber leicht, dass die Enveloppe in G^∞ in α_1 Zweigen berührt wird, entsprechend

den α_1 genannten Parabeln, so dass für einen anderen Punkt auf der unendlich fernen Geraden diese Gerade nur als $(\alpha - \alpha_1)$ -fache Tangente auftritt und somit $\alpha_1 + \beta$ andere Tangenten der Enveloppe davon ausgehen. Die Zahl der Parabeln, welche die Gerade G zur Normalen haben, ist somit $\alpha_1 + \beta$ und auf dieselbe Weise zusammengesetzt, wie im Falle eines allgemeinen Kegelschnittsystemes.

Wir erhalten nun leicht in Bezug auf die Lösungen der Parabeln, welche durch Punkte P , Achsenrichtung P^∞ , Tangenten T und Normalen N bestimmt sind, das folgende Schema:

Nr.	P	P^∞	T	N	L	Nr.	P	P^∞	T	N	L
1	3	.	.	1	5	9	1	1	.	2	2
2	2	1	.	1	2	10	1	.	1	2	6
3	2	.	1	1	6	11	.	1	1	2	1
4	1	1	1	1	2	12	.	.	2	2	3
5	1	.	2	1	4	13	1	.	.	3	8
6	.	1	2	1	1	14	.	1	.	3	1
7	.	.	3	1	2	15	.	.	1	3	4
8	2	.	.	2	8	16	.	.	.	4	5

Kleinere Mittheilungen.

XXIII. Zur Transformation eines Systemes linearer partieller Differentialgleichungen.

Bezeichnen wir zur Abkürzung:

$$A(z) = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

$$B(z) = b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

wo die Grössen $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind, so sei zur Integration das System von m -linearen partiellen Differentialgleichungen gegeben:

$$A(z) = 0, \quad B(z) = 0, \dots, M(z) = 0.$$

Sind nun

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \beta_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \beta_{n-1} = g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

die $n-1$ verschiedenen Lösungen der Gleichung $B(z) = 0$, so lassen sich die übrigen Differentialgleichungen durch Einführung der Grössen

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

als unabhängige Variable für die Grössen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} transformiren. Da die $n-1$ β -Lösungen von $B(z) = 0$ sind, so wird jede beliebige Function derselben eine Lösung von $B(z)$ sein, z. B. $\Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$. Es besteht nun die Aufgabe, diejenige Function Φ zu finden, welche die Gleichungen

$$A(z) = 0, \quad C(z) = 0 \dots M(z) = 0$$

zugleich befriedigt. Betrachten wir der Einfachheit wegen nur die erste Gleichung $A(z) = 0$, und führen wir darin die Function Φ ein, so geht dieselbe über in

$$a_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1} + a_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_2} + \dots + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} = 0.$$

Setzen wir

$$a_1 \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} = A(\beta_i),$$

so erhalten wir

$$2) \quad A(\beta_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + A(\beta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2} + \dots + A(\beta_{n-1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0.$$

Führt man in $A(\beta_1), \dots, A(\beta_{n-1})$ für die x_1, \dots, x_{n-1} die Variablen $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ mittelst der Gleichungen 1) ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung mit den Variablen $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}, x_n$. Unter besonderen Bedingungen fällt die Variable x_n bei dieser Transformation heraus. So fällt sie heraus, wenn $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$ ein Jacobi'sches System bilden, das heisst,

$$AB(z) - BA(z) = 0$$

eine Identität ist. Ferner fällt die Variable x_n heraus, wenn $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$ ein vollständiges System bilden, das heisst, wenn

$$AB(z) - BA(z) = 0$$

wird vermöge der Gleichungen $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$. Es ist nun noch der Fall möglich, dass x_n , oder eine Function von x_n , als Factor in

$$A(\beta_1), A(\beta_2) \dots A(\beta_{n-1})$$

auftritt. Alsdann würde die Differentialgleichung 2) nach Division ihrer beiden Seiten durch x_n , oder die betreffende Function von x_n , ebenfalls von x_n frei sein, und man hätte dann eine Differentialgleichung mit $n-1$ Variablen erhalten. Dieser Fall soll hier genau untersucht werden.

Ist β irgend eines aus der Reihe $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$, so ist

$$A(\beta) = a_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = l(x_1, x_2 \dots x_n),$$

wenn wir für β die betreffende Function aus dem Systeme 1) einsetzen. Drücken wir jetzt die $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ mittelst des Systems 1) als Functionen von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, x_n$ aus, und setzen wir diese erhaltenen Functionen für $x_1 \dots x_{n-1}$ ein, so möge $l(x_1, x_2 \dots x_n)$ übergehen in

$$\psi(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}, x_n).$$

Diese Function ψ soll nun die Form haben:

$$g(x_n) \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}),$$

wog $g(x_n)$ eine bestimmte Function von x_n , und φ eine solche von $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ ist. Setzen wir in $g(x_n) \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ für die β die betreffenden Functionen g des Systems 1), so wird die Gleichung

$$l(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n) = g(x_n) \varphi[g_1, g_2, \dots, g_{n-1}]$$

eine Identität. Hierbei ist zu beachten, dass g_1, g_2, \dots, g_{n-1} Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ sind. Differentiiren wir diese Identität nach x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial x_1} &= g(x_n) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1} \right] \\ \frac{\partial l}{\partial x_2} &= g(x_n) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_2} \right] \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}} &= g(x_n) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_{n-1}} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right].\end{aligned}$$

Multiplizieren wir jetzt der Reihe nach die Gleichungen mit

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_n}, \quad \dots \quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$$

und addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \\ &= g(x_n) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_n} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist Null, da sämmtliche

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_n}$$

Null sind. Setzen wir nämlich in irgend einer Gleichung des Systemes 1), z. B. $\beta = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, für die x_1, x_2, \dots, x_{n-1} die aus 1) gewonnenen Ausdrücke ein, so wird $\beta = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Identität. Es sollen nun $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, x_n$ unabhängige Variable sein, mithin muss, wenn wir nach x_n diese Identität differentiiren, die Gleichung bestehen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_n}.$$

Es ist also

$$3) \quad \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial l}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Denken wir uns jetzt in $l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ für die x_1, x_2, \dots, x_{n-1} die betreffenden Functionen von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, x_n$ eingesetzt und alsdann nach x_n differentiirt, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial l}{\partial x_n} + \frac{\partial l}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$$

wo $\left(\frac{\partial l}{\partial x_n} \right)$ bedeutet, dass die x_1, x_2, \dots, x_{n-1} als Functionen von

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

und x_n angesehen werden sollen. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist bis auf das erste Glied Null, und dementsprechend ist:

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial l}{\partial x_n},$$

das heisst, durch die Substitutionen der Functionen von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, x_n$ für x_1, x_2, \dots, x_{n-1} wird kein neues x_n eingeführt. Dieses Resultat lässt sich durch folgenden Satz ausdrücken:

„Substituirt man in dem Ausdrücke (x_1, x_2, \dots, x_n) für die x_1, x_2, \dots, x_{n-1} die sich aus dem System

$$\beta_1 = g_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\beta_2 = g_2(x_1, \dots, x_n),$$

$$\beta_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

ergebenden Functionen von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, x_n$, so wird durch diese Substitution kein neues x_n eingeführt, das heisst, es ist

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial l}{\partial x_n}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich Schlüsse über die Form von $l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ziehen, wenn nach der Transformation dieser Ausdruck in ein Product zerfallen soll, dessen einer Factor eine Function von x_n und dessen anderer Factor eine Function von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ ist.

1. Ist
$$l(x_1, \dots, x_n) = g(x_n)\psi(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}),$$

wo die g die Functionen des Systemes 1) sind, so wird nach Substitution der betreffenden Ausdrücke für die x_1, \dots, x_{n-1} der Ausdruck l übergehen in $g(x_n)\psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$. In diesem Falle braucht man für die g nur die betreffenden β zu setzen, um den transformirten Ausdruck zu erhalten.

2. Soll $l(x_1, \dots, x_n)$ in das betreffende Product zerfallen, so darf der andere Factor kein x_n enthalten. Es muss also l in der Form sich darstellen lassen:•

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_n)\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Wenn wir nämlich für x_1, x_2, \dots, x_{n-1} die betreffenden Functionen von $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, x_n$ einführen, so wird nach dem vorhergehenden Satz kein neues x_n eingeführt. Es wird dann $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ übergehen in $\varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$. Enthielte nun $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ x_n explicit, so würde auch $\varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ dieses x_n explicit enthalten. Dies widerspricht unserer Annahme, also muss l schon vor der Transformation in das Product $g(x_n)\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ zerfallen, wo $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ kein x_n explicit enthält.

3. Soll $l(x_1, \dots, x_n)$ nicht in ein Product zerfallen, und ist der erste Fall ausgeschlossen, so wird nach der Transformation kein x_n oder keine Function von x_n als Factor sich absondern lassen, da ja durch die Transformation kein neues x_n eingeführt wird.

Dieses Ergebniss lässt sich durch folgenden Satz wiedergeben:

„Ist der Ausdruck

$$A(\beta) = a_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = l(x_1, x_2 \dots x_n)$$

gegeben, wo die a Functionen von $x_1, x_2 \dots x_n$ sind und wo

$$\beta = g(x_1, \dots x_n)$$

eine Gleichung des Systemes

$$\beta_1 = g_1(x_1 \dots x_n), \quad \beta_2 = g_2(x_1 \dots x_n), \quad \dots \quad \beta_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots x_n)$$

ist, sollen die $x_1 \dots x_{n-1}$ durch Functionen von $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}, x_n$ ersetzt werden, welche sich aus dem gegebenen System ergeben, und soll $A(\beta)$ die Form

$$g(x_n) \varphi(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1})$$

annehmen, so ist dies nur möglich, wenn $l(x_1 \dots x_n)$ schon die Form

$$g(x_n) \psi(x_1 \dots x_{n-1})$$

besitzt, oder

$$l(x_1 \dots x_n) = g(x_n) \varphi(g_1, g_2, \dots g_{n-1})$$

ist, wo $g_1, g_2 \dots g_{n-1}$ die Functionen des gegebenen Systemes sind.“

Aus der Form, in welcher $l(x_1, x_2 \dots x_n)$ sich darstellen lässt, ersehen wir, dass stets diejenige Variable x als unabhängige neben den $\beta_1, \dots \beta_{n-1}$ genommen werden muss, welche selbst oder deren Function als Factor in dem Ausdruck $l(x_1 \dots x_n)$ auftritt. Ist nun

$$A(\beta_1) = g(x_n) \varphi_1(\beta_1 \dots \beta_{n-1}),$$

$$A(\beta_2) = g(x_n) \varphi_2(\beta_1 \dots \beta_{n-1}),$$

$$A(\beta_{n-1}) = g(x_n) \varphi_{n-1}(\beta_1 \dots \beta_{n-1}),$$

so geht die Differentialgleichung 2) nach Division ihrer beiden Seiten durch $g(x_n)$ über in:

$$\varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2} + \dots + \varphi_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0.$$

Es ist also die gegebene Differentialgleichung $A(z) = 0$ mittelst der $n-1$ Lösungen der gegebenen Differentialgleichung $B(z) = 0$ übergeführt in eine Differentialgleichung mit $n-1$ unabhängigen Variablen, ohne dass beide Gleichungen ein Jacobi'sches oder ein vollständiges System bilden. Dafür tritt die Bedingung ein, dass die $n-1$ Ausdrücke $A(\beta)$ einen gemeinsamen Factor $g(x_n)$ haben. Das, was wir bei $A(z) = 0$ vorausgesetzt haben, können wir auch bei den übrigen $m-2$ Differentialgleichungen

$$C(z) = 0, \quad D(z) = 0, \dots M(z) = 0$$

annehmen. Alsdann gelangen wir zu dem Satz:

„Ist ein System aus m -linearen partiellen Differentialgleichungen gegeben von der Form:

$$A(z) = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$B(z) = b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M(z) = m_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + m_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

und sind die $n-1$ verschiedenen Lösungen von $B(z)=0$ bekannt, so lassen sich die übrigen Differentialgleichungen in solche mit $n-1$ Variabeln transformiren, ohne dass die Differentialgleichungen mit $B(z)=0$ die Jacobi'sche Bedingung erfüllen, sobald die

$$A(\beta_1) \dots A(\beta_{n-1}); C(\beta_1) \dots C(\beta_{n-1}), \dots M(\beta_1), \dots M(\beta_{n-1})$$

die Formen annehmen:

$$g_c(x_i) \varphi_{1,c}(\beta_1 \dots \beta_{n-1}),$$

$$g_c(x_i) \varphi_{2,c}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \dots g_c(x_i) \varphi_{n-1,c}(\beta_1 \dots \beta_{n-1}) \dots$$

$$g_m(x_k) \varphi_{1,m}(\beta_1 \dots \beta_{n-1}) \dots g_m(x_k) \varphi_{n-1,m}(\beta_1 \dots \beta_{n-1}).^4$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Functionen g für die Systeme

$$A, C, D, \dots M$$

und deren Argumente verschieden sein können, wir werden stets folgendes System von Differentialgleichungen mit $n-1$ Variabeln erhalten:

$$3) \left\{ \begin{array}{l} A'(\Phi) = \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \dots + \varphi_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0, \\ C'(\Phi) = \varphi_{1,c} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \dots + \varphi_{n-1,c} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ M'(\Phi) = \varphi_{1,m} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \dots + \varphi_{n-1,m} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0. \end{array} \right.$$

Wollen wir mit diesem Systeme 3) dieselbe Transformation vornehmen, und soll das System kein Jacobi'sches oder vollständiges sein, so müssen

$$A'(\Phi), g'(\Phi), \dots M'(\Phi)$$

bestimmte Formen annehmen. Es seien die $n-2$ verschiedenen Lösungen von $C(\Phi)=0$ bekannt:

$$4) \left\{ \begin{array}{l} \beta'_1 = g'_1(\beta_1 \dots \beta_{n-1}), \\ \beta'_2 = g'_2(\beta_1 \dots \beta_{n-1}), \\ \dots \dots \dots \\ \beta'_{n-1} = g'_{n-2}(\beta_1 \dots \beta_{n-1}). \end{array} \right.$$

Es lassen sich aus diesem Systeme $n-2$ β als Functionen der

$$\beta'_1 \dots \beta'_{n-2} \text{ und } \beta_{n-1}$$

ausdrücken. Alsdann geht $A'(\Phi)$ über in:

$$A'(\beta'_1) \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_1} + A'(\beta'_2) \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_2} + \dots + A'(\beta'_{n-2}) \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_{n-2}} = 0,$$

wo die $A'(\beta')$ Functionen von

$$\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2}, \beta_{n-1}$$

sind. Soll nun die Differentialgleichung nur $n - 2$ Variable enthalten, und soll die Jacobi'sche Bedingung nicht erfüllt werden, so muss β_{n-1} , oder eine Function von β_{n-1} in jedem $A'(\beta')$ als Factor auftreten, das heisst, es muss $A'(\beta')$ von der Form

$$g'(\beta_{n-1}) \varphi'(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2})$$

sein. Hierdurch geht die Differentialgleichung über in:

$$\varphi'_1 \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_1} + \varphi'_2 \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_2} + \dots + \varphi'_{n-2} \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_{n-2}} = 0.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass $A'(\beta')$ proportional $A(\beta')$ ist. Nach unserer Annahme ist nämlich:

$$a_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} = g(x_n) \varphi_1(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}),$$

$$a_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \beta_2}{\partial x_n} = g(x_n) \varphi_2(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}),$$

.....

$$a_1 \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_n} = g(x_n) \varphi_{n-1}(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}).$$

Multipliciren wir jetzt der Reihe nach die Gleichungen mit

$$\frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_{n-1}}$$

und addiren sie, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_1 \left\{ \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_{n-1}} \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_1} \right\} + \dots \\ + a_{n-1} \left\{ \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_{n-1}} + \dots + \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_{n-1}} \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right\} + \dots \\ + a_n \left\{ \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_{n-1}} \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_n} \right\} \\ = g(x_n) \left\{ \varphi_1 \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_1} + \varphi_2 \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_2} + \dots + \varphi_{n-1} \frac{\partial \beta'_1}{\partial \beta_{n-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke innerhalb der Klammern auf der linken Seite sind die partiellen Differentialquotienten der β' nach x , wenn wir uns die β' als Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n ausgedrückt denken. Gemäss unserer Bezeichnungsweise wird dann die linke Seite $A(\beta'_1)$. Der Ausdruck innerhalb der Klammer auf der rechten Seite ist nach unserer Bezeichnungsweise $A'(\beta'_1)$.

Wir haben also erhalten:

$$A(\beta'_1) = g(x_n)A'(\beta'_1).$$

Dasselbe lässt sich auch für die anderen β' nachweisen, so dass allgemein

$$A(\beta') = g(x_n)A'(\beta')$$

ist. Diese Gleichung wird zu einer Identität, wenn auf der rechten Seite für die β die Functionen von $x_1 \dots x_n$ aus dem Systeme 1) eingeführt werden. Soll jetzt $A'(\beta')$ in das Product zerfallen

$$g'(\beta_{n-1})\varphi'(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}),$$

so wird

$$A(\beta') = g(x_n)g'(\beta_{n-1})\varphi'(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}).$$

Führen wir für die $\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2}$ die $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ mittelst des Systemes 4) ein, so wird in Folge des vorhin bewiesenen Satzes

$$A(\beta') = g(x_n)g'(\beta_{n-1})\psi'(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-2}).$$

Diese Gleichung wird zu einer Identität, wenn rechts die $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ durch die Functionen von $x_1 \dots x_n$ ersetzt werden. Damit die angesagte Transformation möglich ist, müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$A(\beta'_1) = g(x_n)g'(g_{n-1})\varphi'_{1,1}(\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2})$$

$$A(\beta'_{n-2}) = g(x_n)g'(g_{n-1})\varphi'_{n-2,1}(\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2})$$

$$D(\beta'_1) = g_d(x_n)g'_d(g_{n-1})\varphi'_{1,d}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2})$$

$$D(\beta'_{n-2}) = g_d(x_n)g'_d(g_{n-1})\varphi'_{n-2,d}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2})$$

$$M(\beta'_n) = g_m(x_n)g'_m(g_{n-1})\varphi'_{1,m}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2})$$

$$M(\beta'_{n-2}) = g_m(x_n)g'_m(g_{n-1})\varphi'_{n-2,m}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}),$$

wo g_{n-1} die betreffende Function des Systemes ist.

Man kann nun die Transformation des Systemes mit $m - 2$ Gleichungen weiter führen, wenn man die $n - 3$ verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$D(\beta'_1) = \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_1} + D(\beta'_2) \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_2} + \dots + D(\beta'_{n-2}) \frac{\partial \psi}{\partial \beta'_{n-2}} = 0$$

zu Hilfe nimmt. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die bei den

$$A(\beta'), C(\beta'), D(\beta') \dots$$

aufretenden Factors bei den späteren $A(\beta^{(k)})$ sich stets wiederholen.

Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob es solche Coefficienten α giebt, dass $A(\beta)$ die verlangte Form

$$g(x_n)\varphi(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1})$$

annimmt. Es lassen sich stets $n - 1$ α so bestimmen, dass die $A(\beta)$ die verlangte Form erhalten, man muss sich hierbei nur erinnern, dass die β

die $n - 1$ verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung sind, und mithin ihre Functional-Determinante niemals Null sein kann.

Die Methode, die Lösungen einer Differentialgleichung zur Transformation anderer zu benutzen, in der von uns angenommenen Form, finden wir schon bei Boole (Mansion: Partielle Differentialgleichungen). Boole setzt hier ein vollständiges System voraus, um eine Variable bei der Transformation herausfallen lassen zu können. Es geschieht dies durch die Jacobi'sche Bedingung: $AB(z) - BA(z) = 0$,

welche identisch erfüllt werden kann, oder vermöge der Gleichungen $A(z) = 0$ und $B(z)$ befriedigt wird. Ist nun β eine Lösung von $B(z) = 0$, so muss vermöge dieser Bedingung $A(\beta)$ auch eine Lösung von $B(z) = 0$ sein. Es ist nämlich $A[B(\beta)] = B[A(\beta)]$, $B(\beta) = 0$,

also ist $B[A(\beta)] = 0$, das heisst, $A(\beta)$ ist eine Lösung von $B(z) = 0$. Diese Bedingung fällt bei der von uns beschriebenen Methode fort, und wird ersetzt durch die Bedingung, dass eine Variable oder eine Function von ihr bei der Transformation sich absondern lässt, so dass die $A(\beta)$ die Form

$$g(x_n)\varphi(\beta_1 \dots \beta_{n-1})$$

annehmen. Die Jacobi'sche Bedingung wird aber auch in unserem Fall erfüllt, das heisst, das System wird ein vollständiges, wenn $g(x_n)$ sich auf 1 oder auf eine Constante reducirt. Um dies zu zeigen, stellen wir uns die Aufgabe, $BA(\beta)$ zu berechnen, wenn

$$A(\beta) = g(x_n)\varphi(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1})$$

ist. Es ist

$$\frac{\partial A(\beta)}{\partial x_1} = g(x_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1}; \dots \frac{\partial A(\beta)}{\partial x_{n-1}} = g(x_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_{n-1}},$$

$$\frac{\partial A(\beta)}{\partial x_n} = g(x_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} + \varphi(\beta_1 \dots \beta_{n-1}) \frac{\partial g}{\partial x_n}.$$

Bilden wir nun die Differentialgleichung $BA(\beta) = 0$, so erhalten wir:

$$b_1 g(x_n) \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1} + b_2 g(x_n) \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_2} + \dots + b_n g(x_n) \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} + b_n \varphi \frac{\partial g}{\partial x_n} = BA(\beta).$$

Ordnen wir jetzt auf andere Weise, so erhalten wir:

$$g(x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \left\{ b_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial \beta_1}{\partial x_n} \right\} + \dots + g(x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_{n-1}} \left\{ b_1 \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial \beta_{n-1}}{\partial x_n} \right\} + b_n \varphi \frac{\partial g}{\partial x_n} = BA(\beta).$$

Da die $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}$ Lösungen von $B(z) = 0$ sind, so sind die Ausdrücke in den Klammern Null, und es wird

$$BA(\beta) = b_n \varphi \frac{\partial g}{\partial x_n}.$$

Soll jetzt die Jacobi'sche Bedingung erfüllt werden, also $A(\beta)$ eine Lösung von $B(z) = 0$ sein, so muss

$$b_n \varphi \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

sein. Dies ist nur möglich, wenn $\frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$ ist, was bedeutet, dass g eine Constante sein muss, denn g ist nur eine Function von x_n . In jedem anderen Falle tritt bei der Transformation x_n auf. Wir haben hier beiläufig bewiesen, dass, wenn in einem vollständigen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen die verschiedenen Lösungen der einen von ihnen zur Transformation benutzt werden, das System auf ein solches mit $n-1$ Variablen sich reducirt. Wir sind also zu folgendem wichtigen Resultat gelangt:

„Ist ein System von m -linearen partiellen Differentialgleichungen mit n -unabhängigen Variablen gegeben, deren zweites Glied Null ist, so lässt sich dieses System unter Benutzung der $n-1$ verschiedenen Lösung einer diesem System angehörenden Differentialgleichung in ein System von $m-1$ Gleichungen mit $n-1$ Variablen transformiren, ohne dass die Jacobi'sche Bedingung

$$AB(z) - A'B(z) = 0$$

erfüllt wird, wenn bei der Transformation eine Variable oder eine Function von ihr als Factor heraustritt. Reducirt sich diese Function auf eine Constante, so ist das System ein vollständiges, und die Jacobi'sche Bedingung wird erfüllt.“

Diese Transformation lässt sich auf das neu erhaltene System von $m-1$ Gleichungen anwenden. Es fällt die eine Variable heraus, sobald diese oder eine Function von ihr als Factor auftritt, oder wenn die Gleichungen ein vollständiges System bilden. Soll ein System von m -Gleichungen ein vollständiges sein, so sind $\frac{m(m-1)}{2}$ Bedingungen zu erfüllen. Erfüllen in dem gegebenen System von m -Gleichungen nur k -Gleichungen die $\frac{k(k-1)}{2}$ Bedingungen eines vollständigen Systemes, so bleiben

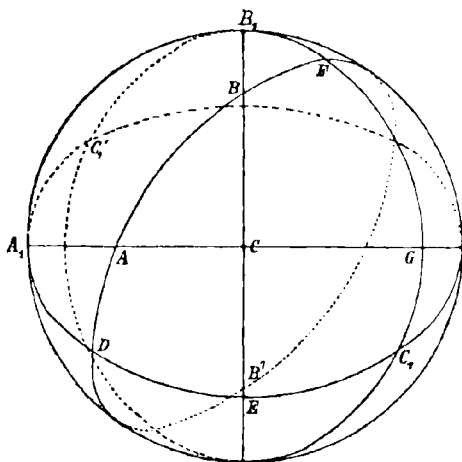
$$\frac{m(m-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}$$

Bedingungen unerfüllt. Diese werden ersetzt durch die Bedingung des Absonderns. In diesem Falle hat das System der m partiellen Differentialgleichungen eine gemeinsame Lösung, obgleich es kein vollständiges ist, was nach Früherem nicht der Fall zu sein schien.

XXIV. Der dem Pythagorischen Lehrsatz entsprechende Satz der Sphärik.

Der Satz lautet:

„Verlängert man bei einem rechtwinkligen Kugeldreiecke, von dessen Seiten keine ein Quadrant oder grösser als ein Quadrant ist, die Seiten bis zum Durchschnitte mit den Seiten des reciproken Dreiecks, so entsteht über jeder Seite ein durch sie, die Verlängerungen der anstossenden und die ihr entsprechende Seite des reciproken Dreiecks gebildetes Viereck. Von diesen Vierecken ist dasjenige über der Hypotenuse der Summe derer über den Katheten gleich.“



(Entsprechende Seiten zweier reciproker Dreiecke sind diejenigen, die zu derselben Höhenlinie gehören; bezeichnet man als Höhenlinien diejenigen Hauptkreise, die durch die Ecken eines Dreiecks senkrecht zu den gegenüber liegenden Seiten gezogen sind, so sind, wie leicht zu ersehen, die Höhenlinien eines Dreiecks gleichzeitig die seines reciproken.)

Beweis. Im Dreiecke ABC sei C ein Rechter, dann ist im reciproken Dreiecke, $A_1B_1C_1$, die Seite A_1B_1 ein Quadrant.

Durch Verlängerung der Seiten von ABC entsteht über AB das Viereck ABB_1A_1 , über CB das Viereck CBB_1C_1 , und über AC endlich das Viereck $ACED$.

C ist der Pol von A_1B_1 , also ist A_1CB_1 ein Oktant, dessen Inhalt gleich ω , somit

$$1) \quad A_1B_1BA + \Delta ABC = \omega.$$

Drücken wir die Winkel BAC und ABC nach Rechten aus, so dass

$$\sphericalangle BAC = \alpha \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle ABC = \beta \cdot \frac{\pi}{2} \text{ ist,}$$

so ist, weil A der Pol von EG , B der von DE ,

$$\Delta FAG = \alpha \cdot \omega, \text{ d. h. } FBCG + \Delta ABC = \alpha \cdot \omega;$$

$$\Delta DBE = \beta \cdot \omega, \text{ d. h. } DACE + \Delta ABC = \beta \cdot \omega; \text{ addirt:}$$

$$a) \quad FBCG + DACE + 2\Delta ABC = (\alpha + \beta)\omega.$$

Nun ist der sphärische Excess des Dreiecks ABC gleich

$$(\alpha + \beta - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ somit}$$

$$b) \quad \Delta ABC = (\alpha + \beta - 1) \omega$$

und durch Subtraction dieser Gleichung von a):

$$2) \quad FBCG + DACE + \Delta ABC = \omega.$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$A_1 B_1 BA = FBCG + DACE.$$

Kreuznach.

Dr. AUGUST WILHELM VELTEN.

XXV. Die Schraubenflächen constanter mittlerer Krümmung.

Verleiht man jedem Punkt einer in der $[xz]$ -Ebene gelegenen Curve $z = f(x)$ eine schraubenförmige Bewegung um die z -Achse, so ergeben sich die Coordinaten der so erzeugten Schraubenfläche in folgender Form als Functionen zweier Veränderlichen:

$$x = v \cdot \cos u, \quad y = v \cdot \sin u, \quad z = g \cdot u + f(v).$$

Die Curven $v = \text{constans}$ geben die Schraubenlinien auf der Fläche, die Curven $u = \text{constans}$ sind Verticalschnitte; g ist die Constante der schraubenförmigen Bewegung, deren 2π -faches Multiplum die Ganghöhe derselben liefert.

Die mittlere Krümmung der Schraubenfläche ergibt sich in folgender Gestalt:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = - \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dv} \left\{ \frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2 + v^2 + v^2 f'(v)^2}} \right\}^*.$$

Wir fordern nun, dass die Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien in allen Punkten der Fläche gleich einer Constanten $-\frac{2}{a}$ sei.

Die erste Integration ergibt unter Einführung der Constanten b :

$$\frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2 + v^2 + v^2 f'(v)^2}} = \frac{v^2 + ab}{a}.$$

* Enneper schreibt irrthümlicher Weise:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = v \cdot \frac{d}{dv} \left\{ \frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2 + v^2 + v^2 f'(v)^2}} \right\}.$$

Dieser Irrthum ist jedoch für das bei ihm Folgende belanglos; cf. Enneper: Analytisch-geometrische Untersuchungen in dieser Zeitschrift, Jahrg. 1864 S. 11.

Die linke Seite, also auch $f^1(v)$, wird gleich Null für den Werth $v^2 = -ab$; für diesen Werth von v^2 ist die Tangente der Curve $z = f(x)$ vertical gerichtet. Kann dies wirklich eintreten, so müssen a und b ungleiche Zeichen haben. Wir unterscheiden demnach zunächst die beiden Fälle:

$$1) \ a > 0 > b; \quad 2) \ b > 0 > a.$$

Die Annahme 3) $b = 0$ veranlasst bedeutende Vereinfachung des Schlussresultates.

Setzen wir 4) $\frac{1}{a} = 0$, so erhalten wir die Minimalfläche unter den Schraubenflächen, für die bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = 0$$

charakteristisch ist.

Die Voraussetzung 5) $\frac{1}{a} = b = 0$ zieht nach sich:

$$f^1(v) = 0, \quad f(v) = \text{const};$$

sie ergibt also die Schraubenfläche mit Leitebene (*à plan directeur*), welche gebildet wird durch die Binormalen einer Schraubenlinie, welche sämmtlich die z -Achse rechtwinklig schneiden. Als Minimalfläche ist dieselbe seit Meusnier (*Mém. sur la courb. des surf. 1776*) bekannt.

6) Als letzten Fall werden wir den behandeln, dass die Constante g der Schraubenbewegung gleich Null gesetzt wird, wodurch wir zu den Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung gelangen.

$$1) \ \text{Es sei } a > 0 > b.$$

Die obige Gleichung ergibt nach Anwendung der Substitution $v^2 = w$:

$$f(v) = \frac{1}{2} \int \frac{(w + ab)(w + g^2) dw}{w \sqrt{(w + g^2)(a^2 w - [w + ab]^2)}}.$$

Da $v = \sqrt{w}$ ist, so dürfen wir nur positive Werthe für w zulassen. Da alsdann $w + g^2$ stets positiv ist, so ist zur Reellität der Wurzel im Nenner erforderlich, dass der Factor

$$a^2 w - [w + ab]^2 = - (w - \alpha)(w - \beta) > 0$$

ist. Damit diese Bedingung erfüllt sei, muss eine der Ungleichungen

$$\alpha \geq w \geq \beta$$

richtig sein, je nachdem $\alpha \geq \beta$ ist. Hier bedeuten:

$$\alpha = \frac{a^2 - 2ab + a\sqrt{a^2 - 4ab}}{2}, \quad \beta = \frac{a^2 - 2ab - a\sqrt{a^2 - 4ab}}{2}.$$

In der Erwägung, dass $a > 0$, $b < 0$ ist, erkennen wir leicht, dass α und β reell und positiv sind, dass ferner $\alpha > \beta$ ist, der Werthbereich der Variablen w also vollständig festgelegt ist.

Um das vorliegende elliptische Integral für $f(v)$ auf die Normalform zu bringen, benutzen wir die Substitution:

$$w = \frac{\beta + g^2 k^2 \varrho}{1 - k^2 \varrho}, \quad k^2 = \frac{\alpha - \beta}{g^2 + \alpha},$$

die so geartet ist, dass den Werthen $-g^2$, β , α , ∞ von w die Werthe ∞ , 0 , 1 , $\frac{1}{k^2}$ von ϱ entsprechen.

Wir stellen fest, dass k^2 , der Modul des zu erwartenden elliptischen Integrals in der Normalform, positiv ist und die Einheit nicht erreicht. Folgendes Ergebniss hat die erwähnte Substitution:

$$f(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g^2 + \beta}{\sqrt{g^2 + \alpha}} \int \frac{1}{\sqrt{\varrho(1-\varrho)(1-k^2\varrho)}} + \frac{ab}{\beta + g^2 k^2 \varrho} d\varrho;$$

die weitere Substitution $\varrho = \sin^2 \varphi$ erzeugt folgende Gestalt:

$$f(v) = \frac{g^2 + \beta}{\sqrt{g^2 + \alpha}} \int \frac{d\varphi}{\Delta \varphi \cdot \Delta^2 \varphi} + \frac{\sqrt{\alpha}(g^2 + \beta)}{\sqrt{\beta}(g^2 + \alpha)} \cdot \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \Delta \varphi} = I + II,$$

wenn

$$\Delta^2 \varphi = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

und

$$n = \frac{g^2 k^2}{\beta}$$

ist. Das Zeichen der Wurzeln ist in Erwägung der Gleichung

$$\sqrt{\alpha\beta} = ab$$

zu wählen. Die weitere Behandlung dieser Integrale besteht in der Einführung der Jacobi'schen Bezeichnungen für die elliptischen Functionen und deren Darstellung durch die Θ -Function. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = \psi,$$

so dass $\varphi = am\psi$ ist,

$$\text{Dann wird:} \quad E(\psi) = \int \Delta^2 am\psi d\psi.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^2 \varphi \cdot \Delta \varphi} = -\frac{k^2}{k'^2} \cdot \frac{\sin am\psi \cos am\psi}{\Delta am\psi} + \frac{E(\psi)}{k'^2},$$

(cf. Durège: Theorie der elliptischen Functionen, 4. Aufl. § 19, S. 74 und 75),
worin k' den zu k gehörigen complementären Modul bedeutet.

Wir bezeichnen nun mit K bzw. K' das vollständige Integral erster Gattung für den Modul k bzw. k' , mit E das vollständige Integral zweiter Gattung für den Modul k .

Ferner definiren wir in bekannter Weise:

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad q' = e^{-\pi \cdot \frac{K}{K'}},$$

$$\Theta(\psi) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} n (-1)^n q^{(n^2)} \cos \frac{n \pi \psi}{K},$$

$$H(\psi) = 2 \sum_1^{\infty} n (-1)^n \sqrt{q^{(2n+1)^2}} \sin \frac{(2n+1) \cdot \pi \psi}{2K}.$$

(cf. Durège, l. c. §§ 54, 65, 68). Dann besteht die Gleichung:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta \varphi \cdot \Delta^2 \varphi} = - \frac{\sqrt{\alpha - \beta} \sqrt{g^2 + \alpha}}{g^2 + \beta} \cdot \frac{H(\psi)H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)}$$

$$+ \frac{g^2 + \alpha}{g^2 + \beta} \cdot \frac{E}{K} \psi + \frac{g^2 + \alpha}{g^2 + \beta} \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

Dabei bedeutet Θ' den Differentialquotienten von Θ nach ψ . Wir erhalten also:

$$I = - \sqrt{\alpha - \beta} \frac{H(\psi)H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)} + \sqrt{g^2 + \alpha} \cdot \frac{E}{K} \psi$$

$$+ \sqrt{g^2 + \alpha} \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

In dem Integral dritter Gattung in II kann n jeden Werth von 0 bis ∞ annehmen. Um von der Legendre'schen Normalform zur Jacobi'schen zu gelangen, setzen wir:

$$n = \frac{g^2 k^2}{\beta} = -k^2 \sin^2 am i \omega = k^2 \tan^2 am(\omega, k'),$$

woraus sich $\sin am(\omega, k')$ und $\Delta am(\omega, k')$ leicht berechnen lassen.

Bezeichnen wir das Integral dritter Gattung in der Jacobi'schen Normalform mit $II(\psi)$, so ergibt sich im vorliegenden Falle:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \Delta \varphi} = \psi + \frac{g \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{g^2 + \alpha}}{\sqrt{\alpha} \cdot (g^2 + \beta)} i II(\psi, i \omega)$$

(cf. Durège, l. c. § 69).

Führen wir nunmehr auch hier (unter Benutzung der Gleichungen Durège § 67,1 und § 71,1) die Θ -Functionen ein, so kommt:

$$i II(\psi, i \omega) = - \frac{g \cdot \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{g^2 + \alpha}} \psi + \frac{\pi \cdot \psi \omega}{2K K'} + \frac{\Theta'(\omega, k')}{\Theta(\omega, k')} \psi$$

$$+ \frac{1}{2} i \log \frac{\Theta(\psi - i \omega)}{\Theta(\psi + i \omega)}.$$

Berücksichtigen wir nun die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Theta(\psi \pm i\omega) &= \left[1 + \sum_1^{\infty} n(-1)^n q^{(n^2)} \cos \frac{n\pi\omega}{K} \left(e^{-\frac{n\pi\omega}{K}} + e^{\frac{n\pi\omega}{K}} \right) \right] \\ &\mp i \sum_1^{\infty} n(-1)^n q^{(n^2)} \sin \frac{n\pi\omega}{K} \cdot \left(e^{-\frac{n\pi\omega}{K}} - e^{\frac{n\pi\omega}{K}} \right) \\ &= A \mp iB; \\ \frac{1}{2} i \log \frac{A + iB}{A - iB} &= - \operatorname{arc tang} \frac{A}{B}, \end{aligned}$$

so heisst unser zweiter Term:

$$II = \psi \left[\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{g^2 + \alpha}} + \frac{g\pi\omega}{2KK'} + \frac{g\Theta'(\omega, k')}{\Theta(\omega, k')} \right] - g \operatorname{arc tang} \frac{A}{B}.$$

Unser Schlussresultat ist das folgende:

$$\begin{aligned} f(v) = I + II &= \psi \left(\sqrt{g^2 + \alpha} \cdot \frac{E}{K} + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{g^2 + \alpha}} + \frac{g\pi\omega}{2KK'} + \frac{g\Theta'(\omega, k')}{\Theta(\omega, k')} \right) \\ &- \sqrt{\alpha - \beta} \cdot \frac{H(\psi)H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)} + \sqrt{g^2 + \alpha} \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)} - g \operatorname{arc tang} \frac{A}{B}. \end{aligned}$$

Der Gang der numerischen Rechnung ist folgender:

Nachdem α und β (bezw. a und b), sowie g als Data der Aufgabe festgelegt sind, nimmt man für ω einen zwischen α und β liegenden Werth an, berechnet mit Hilfe desselben zunächst ϱ , dann φ .

Alsdann liefert die Gleichung

$$\psi = F(\varphi, k)$$

den Werth für ψ . Da nun ferner

$$\operatorname{sin am}(\omega, k) = \sqrt{\frac{g^2}{g^2 + \beta}} = \operatorname{sin} \sigma$$

ist, so folgt:

$$\omega = F(\sigma, k').$$

Die so gefundenen Werthe sind in die Schlussformel einzusetzen.

$$2) \text{ Es sei } b > 0 > a.$$

Die Behandlung dieses Falles ist der des vorhergehenden genau analog. Es besteht aber die Ungleichung $\beta > \alpha$. Deshalb ist überall die Stellung von α und β zu vertauschen.

$$3) \text{ Es sei } b = 0,$$

Das zu transformirende Integral nimmt die Form an:

$$f(v) = \frac{1}{2} \int \frac{(g^2 + \omega)d\omega}{\sqrt{\omega(g^2 + \omega)(a^2 - \omega)}}.$$

Die Wurzel bleibt reell, so lange die stets positive Veränderliche w in den Grenzen 0 und a^2 sich bewegt. Da nun für $b = 0$ die im Falle 1) mit α und β bezeichneten Grenzen des Werthbereiches von w in a^2 und 0 übergehen, so ist die hier anzuwendende Substitution aus der allgemeinen durch $b = 0$ herzuleiten.

Wir erhalten somit auch ein richtiges Ergebniss, wenn wir in der Schlussformel $b = 0$ setzen:

$$f(v) = \sqrt{g^2 + a^2} \cdot \frac{E}{K} \psi - a \frac{H(\psi)H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)} \\ + \sqrt{g^2 + a^2} \cdot \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

$$4) \text{ Es sei } \frac{1}{a} = 0.$$

Die Differentialgleichung der Minimalschraubenfläche lautet:

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = -\frac{1}{v} \frac{d}{dv} \left\{ \frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2 + v^2} + v^2 f'(v)^2} \right\} = 0.$$

Da $\frac{1}{v}$ nicht allgemein 0 sein kann, so ergibt sich nach Einführung einer Integrationsconstante b :

$$f(v) = b \int \frac{1}{v} \sqrt{\frac{v^2 + g^2}{v^2 - b^2}} dv + c \\ = b \int \frac{v dv}{\sqrt{(v^2 + g^2)(v^2 - b^2)}} \\ + b g^2 \int \frac{dv}{v \sqrt{(v^2 + g^2)(v^2 - b^2)}} + c \\ = b(P + g^2 Q) + c.$$

Zur Ausrechnung des Integrals P verhilft die Substitution $v^2 = t$:

$$P = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{(v^2 + g^2)} + \sqrt{v^2 - b^2}}{\sqrt{(v^2 + g^2)} - \sqrt{v^2 - b^2}}.$$

Von diesem Werthe unterscheidet sich nur durch die additive Constante

$$\log \sqrt{g^2 + b^2},$$

quod licet, der folgende:

$$P = \log [\sqrt{v^2 + g^2} + \sqrt{v^2 - b^2}].$$

Die Substitution $v^2 = t$ verhilft auch zur Auswerthung von Q .

$$Q = \frac{1}{gb} \operatorname{arc tang} \frac{v^2 + \sqrt{(v^2 + g^2)(v^2 - b^2)}}{gb}.$$

Von diesem Werthe unterscheidet sich nur durch die additive Constante

$$g \cdot \operatorname{arctang} \frac{b}{g},$$

quod licet, der folgende:

$$Q = g \operatorname{arctang} \frac{g}{b} \sqrt{\frac{v^2 - b^2}{v^2 + g^2}}.$$

Wir erhalten also:

$$f(v) = b \log (\sqrt{v^2 + g^2} + \sqrt{v^2 - b^2}) \\ + g \operatorname{arctang} \frac{v^2 + \sqrt{(v^2 + g^2)(v^2 - b^2)}}{gb} + c.$$

Durch die obigen Bemerkungen ist die (bis auf Entstellungen durch Druckfehler) völlige Uebereinstimmung unseres Ergebnisses mit denen von Enneper [diese Zeitschrift, Jahrgang IX, 1864, S. 111] und von Scherk (Crelle 13, Jahrgang 1834) nachgewiesen.

Letzterer fand seinen Werth durch Integration der Differentialgleichung der Minimalflächen, ersterer auf eine der vorliegenden entsprechende Art.

Aus der Differentialgleichung der die Minimalfläche erzeugenden Curve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b}{x} \sqrt{\frac{x^2 + g^2}{x^2 - b^2}}$$

ist ersichtlich, dass die Tangentenwerthe im Intervall

$$b < x < \infty$$

reell und positiv sind, aber von ∞ bis 0 abnehmen. Somit entfernt sich die Curve immer weiter von der x -Achse, der sie die concave Seite zuwendet.

$$5) \text{ Es sei } \frac{1}{a} = b = 0.$$

Dieser Fall ist schon oben erledigt.

$$6) \text{ Es sei } g = 0.$$

Für die Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{v f'(v)}{1 + f''(v)^2} = \frac{v^2 + ab}{a}.$$

Hier greifen nun bezüglich der beiden Constanten a und b dieselben Erwägungen Platz, wie bei den Schraubenflächen. In jedem Falle ist das Integral

$$f(v) = \frac{1}{2} \int \frac{w + ab}{\sqrt{-w(w - \alpha)(w - \beta)}} dw$$

zu transformiren, in welchem

$$\alpha \geq w \geq \beta$$

sein muss, je nachdem $\alpha \geq \beta$ ist. Die Werthe von α und β sind nicht geändert.

Das Ergebniss lautet im ersten Falle:

$$f(v) = \psi \left(\sqrt{\alpha} \cdot \frac{F}{K} + \sqrt{\beta} \right) - \sqrt{\alpha - \beta} \frac{H(\psi)H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)} \\ + \sqrt{\alpha} \cdot \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

Das Ergebniss des zweiten Falles ergibt sich wiederum durch Vertauschung von α und β .

Für $b = 0$ erhalten wir:

$$f(v) = \int \frac{v dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = -\sqrt{a^2 - v^2} \text{ (Kugel).}$$

Für $\frac{1}{a} = 0$ ergibt sich:

$$f(v) = \int \frac{b dv}{\sqrt{v^2 - b^2}} = \pm \log [\sqrt{v^2 - b^2} \pm v].$$

(Rotationsfläche der Kettenlinie).

Sobernheim.

Dr. HECKHOFF.

XVII.

Homocentrische Brechung des Lichtes durch die Linse.

Von

Dr. L. BURMESTER.

Professor an der Technischen Hochschule in München.

Hierzu Tafel XIII und XIV Fig. 1—17.

I. Brechung der Lichtstrahlen an der Kugelfläche.

In Anschluss an die Untersuchung der homocentrischen Brechung des Lichtes durch das Prisma* wollen wir die Beziehungen ableiten, welche bei der homocentrischen Brechung des Lichtes durch die Linse auftreten, weil diese homocentrische Brechung, wie es scheint, in ihrer Allgemeinheit noch nicht erkannt wurde. Die Grundlage unserer Darlegungen bildet der aus der geometrischen Optik entlehnte Satz: Einem einfallenden astigmatischen Strahlenbündel, welches an der Trennungsfläche zweier Medien gebrochen wird, entspricht im Allgemeinen ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel, und wenn insbesondere das einfallende Strahlenbündel ein unendlich dünnes centrales ist, so entspricht auch diesem im Allgemeinen ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel.

Wir betrachten zuerst die Brechung eines unendlich dünnen, centralen Strahlenbündels, dessen Strahlen von einem Punkt ausgehen, oder nach einem Punkt gerichtet sind, an einer Kugelfläche als Trennungsfläche zweier brechender Medien, um in dem gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel die beiden Brennpunkte und die beiden Bildpunkte zu bestimmen, welche dem Lichtpunkt des einfallenden Strahlenbündels entsprechen. Gehen in Figur 1 Tafel XIII die Strahlen eines unendlich dünnen, centralen Strahlenbündels von einem Punkt A aus, und ist $a\Theta$ der Hauptstrahl dieses

* Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1895. Bd. 40. S. 65.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 40 Jahrg. 1895. 6. Heft.

Strahlenbündels, der die Kugelfläche K in einem Punkt Θ trifft, so erfolgt die Brechung des Hauptstrahles $a\Theta$ in einer durch $a\Theta$ und dem Mittelpunkt M der Kugelfläche gelegten Ebene, die wir als Zeichnungsebene nehmen. Diese Ebene schneidet die Kugelfläche K in einem grössten Kreis, den wir ebenfalls mit K bezeichnen. Um zu dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ den entsprechenden Hauptstrahl $\Theta\alpha$ des gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels zu erhalten, nehmen wir an, es sei n der Brechungsindex von dem Medium der einfallenden Strahlen gegen das Medium der gebrochenen Strahlen, beschreiben um M die Kreise z , ζ , deren Radien resp. gleich $M\Theta \cdot n$ und $M\Theta : n$ sind. Hierauf ziehen wir von dem Schnittpunkt Z , den der Kreis z mit dem verlängerten Hauptstrahl $a\Theta$ bildet, den Radius ZM , der den Kreis ζ in dem Punkt Z trifft, dann ist ΘZ der gebrochene Hauptstrahl $\Theta\alpha$.

Zum Beweise dieser Construction, die von Weierstrass* stammt, bezeichnen wir mit e den Einfallswinkel $N\Theta a$ und mit ε den Brechungswinkel $M\Theta\alpha$. Die Dreiecke $M\Theta Z$, $MZ\Theta$ sind ähnlich, weil sie bei M einen gemeinsamen Winkel haben und

$$\frac{MZ}{M\Theta} = n = \frac{M\Theta}{MZ}$$

ist. Demnach ist der Winkel $MZ\Theta = e$ und $MZ\Theta = \varepsilon$; folglich ergibt sich

$$\frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = \frac{MZ}{M\Theta} = n,$$

oder

$$\frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = \frac{M\Theta}{MZ} = n.$$

Wir betrachten nun (Fig. 2) in dem von einem Lichtpunkt A ausgehenden, unendlich dünnen Strahlenbündel den Strahlenfächer, der in der Einfallsebene $a\Theta\alpha$ liegt und in derselben gebrochen wird. Denken wir uns in der Einfallsebene einen von A ausgehenden Strahl angenommen, der mit dem Hauptstrahl $a\Theta$ einen unendlich kleinen Winkel bildet, so schneidet der entsprechende, gebrochene Strahl den Hauptstrahl $\Theta\alpha$ in einem Punkt A_1 , in dem sich die gebrochenen Strahlen vereinen, die dem einfallenden Strahlenfächer entsprechen. Der Punkt A_1 ist dann der erste Bildpunkt und die in A_1 auf der Ebene $a\Theta\alpha$ senkrechte Gerade ist die erste Brennlinie in dem gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel. Der erste Bildpunkt A_1 , der einem Lichtpunkt A entspricht, ist in mannig-

* Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht 1889 Bd. 2 S. 135 erwähnt Schellbach, dass diese Construction von Weierstrass mitgetheilt wurde im Bericht der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Wien 1856, Druckjahr 1858. Dasselbst ist nur angeführt, dass Weierstrass einen Vortrag „Dioptrische Constructionen“, gehalten hat.

faltiger Weise bestimmt worden*; und wir wollen hier noch eine kinematische Ableitung einer neuen Construction des ersten Bildpunktes mittheilen. Denken wir uns einen einfallenden Strahl $\alpha\Theta$ in der Einfallsebene als Tangente an einer Curve i bewegt, dann umhüllt der zugehörige gebrochene Strahl $\Theta\alpha$ eine Curve ι . Während einer unendlich kleinen Bewegung dreht sich der Strahl $\alpha\Theta$ um den Berührungspunkt A und der gebrochene Strahl $\Theta\alpha$ um den Berührungspunkt A_1 . Nehmen wir nun an, es habe während dieser unendlich kleinen Bewegung der Punkt Z auf dem Kreise ζ eine Geschwindigkeit gleich ZM , die wir aus ihrer Richtung um Z nach ZM , also um einen rechten Winkel drehen und in dieser Lage als lothrechte Geschwindigkeit des Punktes Z bezeichnen**, dann bewegt sich der Punkt Z auf dem Kreise ξ mit der lothrechten Geschwindigkeit ZM . Ziehen wir zu MZ die Parallele ΘU , welche die Centrale AM in dem Punkt U trifft, und auf AZ die Senkrechte UV , die $M\Theta$ in V schneidet, so ist ΘV die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt Θ auf dem Kreise K bewegt. Der Punkt A_1 , in welchem der Strahl $\Theta\alpha$ die Curve ι berührt, ergibt sich demnach, wenn wir auf $\Theta\alpha$ die Senkrechte VW bis an ΘU , und die Gerade WM ziehen, welche auf dem Strahl $\Theta\alpha$ den Punkt A_1 bestimmt.

Nach dieser Construction entspricht einer Reihe von Lichtpunkten $A\dots$ auf einem einfallenden Hauptstrahl $\alpha\Theta$ eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $A_1\dots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$, und diese beiden projectiven Punktreihen befinden sich in perspectiver Lage, weil im Punkt Θ zwei entsprechende Punkte zusammen fallen. Demnach gehen die Verbindungsgeraden AA_1, \dots der entsprechenden Punkte durch einen Punkt G . Nehmen wir den Punkt Z auf $\alpha\Theta$ als virtuellen Lichtpunkt, so ist nach der Construction der Punkt Z der entsprechende erste Bildpunkt. Dies folgt auch aus der allgemeineren Beziehung, dass allen auf die Kugelfläche K treffenden Strahlen, die nach dem Punkt Z gerichtet sind, gebrochene Strahlen entsprechen, welche sich in dem Punkt Z schneiden.

Bezeichnen wir mit D , Δ_1 die Fusspunkte der von M auf $\alpha\Theta$, $\Theta\alpha$ gefällten Senkrechten und nehmen wir den Fusspunkt D auf dem Hauptstrahl $\alpha\Theta$ als einen virtuellen Lichtpunkt, so entspricht demselben gemäss der Construction der Fusspunkt Δ_1 auf $\Theta\alpha$ als erster Bildpunkt. Diese Beziehung ergibt sich auch, wenn wir annehmen, der Punkt Θ bewege sich

* De l'Hospital, Analyse des infiniment petits. 2. Ed. Paris 1716. p. 121. — Reusch, Poggendorfs Annalen 1867. Bd. 130 S. 497. — Hermann, Ueber schiefen Durchgang der Strahlenbündel durch Linsen. 1874. S. 10. — Lippich, Denkschriften der k. k. Akademie, Wien 1877. Bd. 38 S. 8. — Kessler, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1884. Bd. 29 S. 67. Gleichen, Die Hapterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes. 1889. S. 31. Mannheim, Géométrie cinématique. Paris 1894. p. 66.

** L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888. Bd. 1 S. 64.

auf dem Kreise K und der Hauptstrahl $a\Theta$ berühre in D einen um M beschriebenen Kreis, dann berührt auch der Hauptstrahl $\Theta\alpha$ in Δ_1 einen um M beschriebenen Kreis. Die Geraden ZZ , $D\Delta_1$ schneiden sich also in dem genannten Punkt G .

Es ist der Winkel $DM\Delta_1 = Z\Theta Z$, ferner

$$\frac{MD}{M\Delta_1} = \frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = n, \quad \frac{\Theta Z}{\Theta Z} = \frac{MZ}{M\Theta} = n,$$

also

$$\frac{MD}{M\Delta_1} = \frac{\Theta Z}{\Theta Z}.$$

Demnach sind die Dreiecke $MD\Delta_1$, ΘZZ ähnlich und folglich ist die Gerade $D\Delta_1$ senkrecht auf der Geraden MZ .

Diese Beziehung führt zu der folgenden bekannten Construction des ersten Bildpunktes. Ist zu einem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der entsprechende gebrochene Hauptstrahl $\Theta\alpha$ in der angegebenen Weise construirt, dann ziehen wir von dem Mittelpunkt M auf $a\Theta$ oder $\Theta\alpha$ eine Senkrechte, z. B. auf $a\Theta$ die Senkrechte MD , fallen von D auf MZ die Senkrechte DG und ziehen die Gerade AG , welche auf $\Theta\alpha$ den zum Lichtpunkt A gehörenden ersten Bildpunkt A_1 bestimmt.

Um den Punkt G rechnerisch zu bestimmen, ziehen wir zu $\Theta\alpha$ die Parallele GA_{t1} , zu $a\Theta$ die Parallele GA_{u1} und bezeichnen mit r den Radius der Kugelfläche K . Es ist die Strecke

$$\Theta A_{t1} = A_{u1}G = GZ \frac{\sin e}{\sin(e-\varepsilon)} = MZ \frac{\sin e \cos^2 e}{\sin(e-\varepsilon)} = \frac{M\Theta}{n} \frac{\sin e \cos^2 e}{\sin(e-\varepsilon)},$$

also

$$1) \quad \Theta A_{t1} = \frac{r \sin \varepsilon \cos^2 e}{\sin(e-\varepsilon)}.$$

Ferner ist die Strecke

$$\Theta A_{u1} = A_{t1}G = GZ \frac{\sin \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)} = MZ \frac{\sin \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)} = M\Theta \cdot n \frac{\sin \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)},$$

also

$$2) \quad \Theta A_{u1} = \frac{r \sin e \cos^2 \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)}.$$

Setzen wir $\Theta A = x_1$, $\Theta A_1 = \chi_1$, $\Theta A_{t1} = f$, $\Theta A_{u1} = \varphi_1$, und nehmen wir die Strecken x_1 , f_1 entgegen der Richtung des einfallenden Hauptstrahles $a\Theta$ positiv, die Strecken χ_1 , φ_1 in der Richtung des gebrochenen Hauptstrahles $\Theta\alpha$ positiv, so erhalten wir:

$$3) \quad \frac{f_1}{x_1} + \frac{\varphi_1}{\chi_1} = 1.$$

Betrachten wir in dem von einem Lichtpunkte A ausgehenden unendlich dünnen Strahlenbündel den Strahlenfächer, dessen Ebene durch den Hauptstrahl $a\Theta$ geht und auf der Ebene $a\Theta\alpha$ senkrecht steht, so entspricht diesem einfallenden Strahlenfächer ein gebrochener Strahlenfächer, dessen Ebene durch den Hauptstrahl $\Theta\alpha$ geht, senkrecht auf der Ebene $a\Theta\alpha$ steht, und dessen Strahlen sich in dem Schnittpunkt A_2 des Hauptstrahles $\Theta\alpha$

und der Centralen AM vereinen. Der Punkt A_2 auf dem Hauptstrahl $\Theta\alpha$ ist hiernach der zweite Bildpunkt und die in der Einfallsebene $a\Theta\alpha$ liegende Centrale MA_2 ist die zweite Brennlinie des gebrochenen, astigmatischen Strahlenbündels.

Einer Reihe von Lichtpunkten $A\dots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entspricht demnach eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $A_2\dots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$, weil die Verbindungsgeraden $AA_2\dots$ durch den Mittelpunkt M gehen. Ziehen wir zu $\Theta\alpha$ die Parallele $MA_{s,2}$, ferner zu $a\Theta$ die Parallele $MA_{v,2}$, so ergibt sich, weil $M\Theta = r$ gesetzt wurde,

$$4) \quad \Theta A_{s,2} = A_{v,2} M = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)},$$

$$5) \quad \Theta A_{v,2} = A_{s,2} M = \frac{r \sin e}{\sin(e - \varepsilon)}.$$

Setzen wir $\Theta A = x_2$, $\Theta A_2 = \chi_2$, $\Theta A_{s,2} = f_2$, $\Theta A_{v,2} = \varphi_2$, nehmen wir die Strecken x_2 , f_2 , sowie die Strecken χ_2 , φ_2 in gleichem Sinne positiv, wie die Strecken x_1 , f_1 und χ_1 , φ_1 in Gleichung 3), so erhalten wir:

$$6) \quad \frac{f_2}{x_2} + \frac{\varphi_2}{\chi_2} = 1.$$

Nehmen wir auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ eine Reihe von Lichtpunkten $A\dots$ an, dann entsprechen derselben eine projective Reihe erster Bildpunkt $A_1\dots$ und eine projective Reihe zweiter Bildpunkte $A_2\dots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$. Diese beiden Reihen von ersten Bildpunkten $A_1\dots$ und zweiten Bildpunkten $A_2\dots$ sind demnach projectiv und haben auf dem Hauptstrahl $\Theta\alpha$ die Doppelpunkte Θ , Z . Wenn wir von dem Doppelpunkt Θ absehen, in welchem der Lichtpunkt mit den beiden zugehörigen ersten und zweiten Bildpunkten identisch ist, so ist auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der Punkt Z der einzige Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt Z auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$ entspricht; denn im Punkt Z fällt der entsprechende erste Bildpunkt mit dem entsprechenden zweiten Bildpunkt zusammen. Setzen wir $x_1 = x_2$, dann folgt aus den Gleichungen 3) und 6) für die projectiven Punktreihen $A_1\dots$ und $A_2\dots$ die Gleichung

$$7) \quad \frac{f_1}{1 - \frac{\varphi_1}{\chi_1}} = \frac{f_2}{1 - \frac{\varphi_2}{\chi_2}}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich auch jene Doppelpunkte, wenn wir $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ setzen; denn dann erhalten wir erstens den Werth $\chi = 0$, durch welchen der Doppelpunkt Θ bestimmt wird, und zweitens den Werth

$$8) \quad \chi = \frac{f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1}{f_1 - f_2} = \Theta Z,$$

durch welchen der Doppelpunkt Z auch bestimmt wird.

Ist der Hauptstrahl $a\Theta$ senkrecht auf die Kugelfläche K gerichtet, dann sind die Winkel $e=0$, $\varepsilon=0$ und die Ausdrücke:

$$9) \quad f_1 = \frac{r \sin \varepsilon \cos^2 e}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad \varphi_1 = \frac{r \sin e \cos^2 \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)},$$

$$10) \quad f_2 = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad \varphi_2 = \frac{r \sin e}{\sin(e - \varepsilon)},$$

welche die Formen $\frac{0}{0}$ erhalten, liefern, wenn wir $\sin \varepsilon = \frac{\sin e}{n}$ einsetzen, hierauf Zähler und Nenner nach e differenzieren, oder auch einfacher

setzen* $\sin e = e, \quad \sin \varepsilon = \varepsilon, \quad n\varepsilon = e$

$$11) \quad f_1 = \frac{r}{n-1}, \quad \varphi_1 = \frac{rn}{n-1},$$

$$12) \quad f_2 = \frac{r}{n-1}, \quad \varphi_2 = \frac{rn}{n-1}.$$

Hiernach ist $f_1 = f_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, es fällt also der Punkt G mit dem Mittelpunkt M der Kugelfläche K zusammen und dies ergibt sich auch unmittelbar aus der Construction des Punktes G . Die beiden Punktreihen $A_1 \dots$ und $A_2 \dots$ sind demnach in diesem Falle identisch und jedem Lichtpunkt auf einem central einfallenden Hauptstrahl entspricht ein homocentrischer Bildpunkt. Einer Reihe von Lichtpunkten $A \dots$ auf einem central einfallenden Hauptstrahl entspricht eine projective Reihe von homocentrischen Bildpunkten $A \dots$, und es sind die Punkte Θ , M Doppelpunkte dieser beiden projectiven Punktreihen.

Um entsprechende Punkte dieser beiden projectiven Punktreihen $A \dots$ und $A' \dots$ zu erhalten, ziehen wir in Figur 3 durch den Eintrittspunkt Θ und den Mittelpunkt M die Senkrechten $\Theta\alpha$, Mm auf den centralen Hauptstrahl aM und nehmen auf der Senkrechten Mm die Punkte P , Π , so dass $MP : M\Pi = n : 1$ ist. Dann ergibt sich zu einem Punkt A der entsprechende Punkt A , indem wir die Gerade AP ziehen, welche die Senkrechte $\Theta\alpha$ im Punkt \mathfrak{A} schneidet, und ferner die Gerade $\Pi\mathfrak{A}$ ziehen, die den entsprechenden Punkt A bestimmt.** Ebenso erhalten wir zu dem Punkt A' den entsprechenden Punkt A' durch die Geraden $P\mathfrak{A}'$, $\Pi\mathfrak{A}'$. Zu dem unendlich fernen Punkt A_v^∞ der Punktreihe $A \dots$ ergibt sich durch die zu aM Parallele $P\mathfrak{A}_v$ und die Gerade $\Pi\mathfrak{A}_v$ der entsprechende Punkt, der Brennpunkt A_v . Ebenso erhalten wir zu dem unendlich fernen Punkt

* A. Gleichen, Die Hapterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes. 1889. S. 44.

** G. Ferraris, Die Fundamental-Eigenschaften der dioptrischen Instrumente. Deutsch von F. Lippich. 1879. S. 7.

A_s^∞ der Punktreihe $A\dots$, indem wir $\Pi\mathcal{U}_s$ parallel aM und die Gerade $P\mathcal{U}_s$ ziehen, den entsprechenden Punkt, den Brennpunkt A_s ; und es ist

$$\Theta A_s = f_1 = \frac{r}{n-1}, \quad \Theta A_v = \varphi_1 = \frac{rn}{n-1}.$$

Um noch eine andere Construction auszuführen, nehmen wir an, es sei der eine der Brennpunkte, z. B. A_v , gegeben. Wir ziehen durch Θ eine beliebige Gerade Θa_0 und zu derselben die Parallele $A_v\mathcal{M}$, welche jene Senkrechte Mm im Punkt \mathcal{M} trifft. Wenn wir dann durch die Punkte $AA'A_s\dots$ Senkrechte auf $a\Theta$ ziehen, welche die Gerade Θa_0 in den Punkten $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}'_0, \mathcal{U}_s\dots$ schneidet, dann liefern die Geraden $\mathcal{M}\mathcal{U}_0, \mathcal{M}\mathcal{U}'_0, \mathcal{M}\mathcal{U}_s\dots$ die entsprechenden Punkte $AA', A_s^\infty\dots$

II. Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch die Linse.

Zwei in Figur 4 gegebene Kugelflächen K, K' , deren Mittelpunkte M, M' sind, bilden die bei der Strahlenbrechung in Betracht kommende Begrenzung einer Linse. Die Verbindungsgerade MM' dieser Mittelpunkte heisst die Linsenachse und eine durch dieselbe gelegte Ebene heisst eine Meridianebene der Linse. Eine Meridianebene schneidet die beiden Kugelflächen K, K' in zwei grössten Kreisen, die wir ebenfalls mit K, K' bezeichnen. Wir nehmen in einer Meridianebene einen einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ an, diesem entspricht der in der Linse gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Theta'$, der auch mit α bezeichnet ist, und der austretende Hauptstrahl $\Theta'a'$. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die Medien an beiden Seiten der Linse verschieden sind. Wir bezeichnen den Brechungsindex vom Medium der einfallenden Strahlen gegen die Linse mit n und vom Medium der austretenden Strahlen gegen die Linse mit n' . Ferner sei r der Radius der Kugel K und r' der Radius der Kugel K' .

Um den in der Linse gebrochenen Hauptstrahl α und den austretenden Hauptstrahl a' in der angegebenen Weise zu construiren, beschreiben wir um M die Kreise ε, ζ mit den Radien $r \cdot n$ und $r : n$, ebenso um M' die Kreise ε', ζ' mit den Radien $r' \cdot n'$ und $r' : n'$. Der einfallende Hauptstrahl a bestimmt auf dem Kreis ε den Punkt Z , und die Gerade ZM liefert auf dem Kreis ζ den Punkt Z und dadurch den in der Linse gebrochenen Hauptstrahl ΘZ resp. α . Dieser Hauptstrahl α schneidet den Kreis ζ' in dem Punkt Z' , und die Gerade $M'Z'$ bildet mit dem Kreis ε' den Schnittpunkt Z' , durch welchen der austretende Hauptstrahl $\Theta'Z'$ resp. a' bestimmt wird.

Gehen nun von einem Lichtpunkt A des Hauptstrahles a die Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels aus, so entspricht diesem ein in der Linse gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel, dessen zweite, in der Meridianebene liegende Brennlinie die Gerade MAA_2 ist, welche auf dem

Hauptstrahl α den zweiten Bildpunkt A_2 bestimmt, und dessen erste auf der Meridianebene senkrechte Brennlinie durch den ersten Bildpunkt A_1 geht. Indem wir $M\Delta_1$ senkrecht auf α und Δ_1G senkrecht auf MZ ziehen, ergibt sich durch die Gerade AG auf dem Hauptstrahl α der erste Bildpunkt A_1 .

Dem in der Linse gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel entspricht ein austretendes astigmatisches Strahlenbündel, dessen zweite in der Meridianebene liegende Brennlinie die Gerade $M'A'_2A_2$ ist, welche auf dem Hauptstrahl a' den zweiten Bildpunkt A'_2 bestimmt, und dessen erste auf der Meridianebene senkrechte Brennlinie durch den ersten Bildpunkt A'_1 geht. Indem wir $M'\Delta'_1$ senkrecht auf α und Δ'_1G' senkrecht auf $M'Z'$ ziehen, erhalten wir durch die Gerade $G'A_1$ auf dem Hauptstrahl a' den ersten Bildpunkt A'_1 . Hiernach entspricht einem einfallenden unendlich dünnen Strahlenbündel, dessen Strahlen von einem Lichtpunkt A ausgehen oder nach demselben gerichtet sind, ein austretendes astigmatisches Strahlenbündel mit dem ersten Bildpunkt A'_1 und den zweiten Bildpunkt A'_2 . Gemäss der Bestimmung dieser beiden Bildpunkte gehört zu einer Reihe von Lichtpunkten $A \dots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl a eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $A'_1 \dots$ und eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $A'_2 \dots$ auf dem entsprechenden austretenden Hauptstrahl a' . Wenn nun diese beiden projectiven Punktreihen $A'_1 \dots$ und $A'_2 \dots$ zwei reelle Doppelpunkte A'_p, A'_q besitzen, so entsprechen diesen in der Punktreihe $A \dots$ zwei Lichtpunkte A_p, A_q , denen die Doppelpunkte A'_p, A'_q als homocentrische Bildpunkte entsprechen. Ebenso ergibt sich, wenn wir auf dem Hauptstrahl a' eine Reihe von Punkten $A' \dots$ als Lichtpunkte betrachten, dass derselben eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $A_1 \dots$ und eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $A_2 \dots$ auf dem Hauptstrahl a entspricht. Wir erhalten demnach auch jene beiden Lichtpunkte A_p, A_q als die Doppelpunkte der beiden projectiven Punktreihen $A_1 \dots$ und $A_2 \dots$. Hieraus folgt der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch eine Linse giebt es auf einem in einer Meridianebene einfallenden Hauptstrahl zwei Lichtpunkte, denen je ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht; diese beiden Lichtpunkte, sowie diese beiden homocentrischen Bildpunkte sind Doppelpunkte je zweier projectiver Punktreihen, und können als solche reell, imaginär sein, oder zusammenfallen.

Diese Beziehung können wir auf beliebig viele Kugelflächen $K, K', K'' \dots$, deren Mittelpunkte $M, M', M'' \dots$ in einer Geraden liegen, erweitern und demnach gilt dieser Satz auch für die Brechung durch beliebig viele centrirte Linsen oder für die Brechung durch beliebig viele Medien, die durch Kugelflächen getrennt sind, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen. Den bekannten Fall, dass jedem Lichtpunkt auf der Achse MM'' ein homo-

centrischer Bildpunkt entspricht, oder insbesondere, dass jedem Lichtpunkt auf der Achse einer Linse ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, lassen wir hier ausser Beachtung.

Nehmen wir in der schematischen Figur 5 auf dem Hauptstrahl a' drei beliebige Punkte A'_x, A'_y, A'_z an, so entsprechen diesen auf dem Hauptstrahl α die Punkte $A_{x1}A_{y1}A_{z1}$ und $A_{x2}A_{y2}A_{z2}$, denen ferner auf dem Hauptstrahl a die Punkte $A_{x1}A_{y1}A_{z1}$ und $A_{x2}A_{y2}A_{z2}$ entsprechen. Durch diese drei Paare entsprechender Punkte sind die beiden projectiven Punktreihen $A_1\dots$ und $A_2\dots$ bestimmt. Da der Punkt A'_y der Vereinfachung wegen identisch mit Punkt Θ' und der Punkt A'_z auf der Geraden $M'G'$ angenommen wurde, so fallen die beiden Punkte A_{y1}, A_{y2} mit Θ und die beiden Punkte A_{z1}, A_{z2} in einem Punkt zusammen.

Um die Doppelpunkte A_p, A_q dieser beiden projectiven Punktreihen zu construiren, ziehen wir von einem beliebigen Punkt O Gerade nach den Punkten $A_{x1}A_{y1}A_{z1}A_{x2}A_{y2}A_{z2}$ und beschreiben einen durch O gehenden Kreis \dagger , der diese Geraden resp. in den Punkten $\mathfrak{X}_{x1}\mathfrak{X}_{y1}\mathfrak{X}_{z1}\mathfrak{X}_{x2}\mathfrak{X}_{y2}\mathfrak{X}_{z2}$ schneidet. Die drei Schnittpunkte $\Psi_{xy}, \Psi_{yz}, \Psi_{xz}$ der Gegenseiten des Sechsecks $\mathfrak{X}_{x1}\mathfrak{X}_{y2}\mathfrak{X}_{z1}\mathfrak{X}_{x2}\mathfrak{X}_{y1}\mathfrak{X}_{z2}$ liegen nach dem Pascal'schen Satze in einer Geraden ψ , welche mit dem Kreise \dagger zwei Schnittpunkte $\mathfrak{X}_p, \mathfrak{X}_q$ bildet. Die Geraden $O\mathfrak{X}_p, O\mathfrak{X}_q$ bestimmen dann auf dem Hauptstrahl a die Doppelpunkte A_p, A_q und diesen entsprechen als Lichtpunkte die homocentrischen Bildpunkte A'_p, A'_q auf dem Hauptstrahl a' , die wir erhalten, wenn wir durch G die Geraden A_pA_{p1}, A_qA_{q1} , durch G' die Geraden $A_{p1}A'_p, A_{q1}A'_q$ ziehen, oder, wenn wir durch M die Geraden A_pA_{p2}, A_qA_{q2} , durch M' die Geraden $A_{p2}A'_p, A_{q2}A'_q$ ziehen. Die Doppelpunkte A_p, A_q sind reell, imaginär, oder fallen zusammen, je nachdem die Gerade ψ den Kreis \dagger schneidet, nicht schneidet oder berührt.

Diese Construction ist ein specieller Fall der bekannten Construction der beiden in Figur 6 gezeichneten Vierecke $A_pA_{p1}A'_pA_{p2}, A_qA_{q1}A'_qA_{q2}$, deren Seiten resp. durch vier gegebenen Punkte G, G', M', M gehen und deren Ecken resp. auf vier gegebenen Geraden $\alpha, \alpha, \alpha', \alpha_2$ liegen.* Denn, lassen wir die Gerade α_2 mit der Geraden α zusammenfallen, so erhalten wir den obigen Fall, der bei der homocentrischen Brechung durch eine Linse auftritt.

Wir wollen noch eine andere Construction der Doppelpunkte jener projectiven Punktreihen $A_1\dots$ und $A_2\dots$ angeben, von der wir vorzugsweise Gebrauch machen werden bei der Construction der Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen.

Bestimmen wir in Figur 7 auf dem Hauptstrahl a zu dem unendlich fernen Punkt $A_{\infty 1}$ der Punktreihe $A_1\dots$ den entsprechenden Punkt $A_{\infty 2}$ der

* Jacob Steiner's Gesammelte Werke. 1881. Bd. 1 S. 285 und 303.

Punktreihe $A_2 \dots$, indem wir durch die Punkte G, G', M', M resp. die Geraden $A_{u1}^\infty A_{u1}, A_{u1} A'_u, A'_u A_{u2}, A_{u2} A_{u2}$ ziehen; bestimmen wir ferner zu dem unendlich fernen Punkt A_{v2}^∞ der Punktreihe $A_2 \dots$ den entsprechenden Punkt A_{v1} der Punktreihe $A_1 \dots$, indem wir durch die Punkte M, M', G', G resp. die Geraden $A_{v2}^\infty A_{v2}, A_{v2} A'_v, A'_v A_{v1}, A_{v1} A_{v1}$ ziehen, dann sind A_{v1}, A_{u2} die Gegenpunkte der beiden projectiven Punktreihen $A_1 \dots$ und $A_2 \dots$. Nehmen wir nun noch einen beliebigen Punkt A'_y auf dem Hauptstrahl a' an, zu dem wir in der angegebenen Weise die beiden entsprechenden Punkte A_{y1}, A_{y2} auf dem Hauptstrahl a ermitteln, so sind die beiden projectiven Punktreihen durch die drei Paar entsprechenden Punkte $A_{u1}^\infty A_{y1}, A_{v1}$ und $A_{u2} A_{y2} A_{v2}^\infty$ bestimmt. Am einfachsten erhalten wir die zwei entsprechenden Punkte A_{y1}, A_{y2} , wenn wir A'_y im Punkt Θ' annehmen; denn dann ergeben sich durch die Geraden $\Theta'G, \Theta'M$ die Punkte A_{y1}, A_{y2} auf dem Hauptstrahl a .

Um nun die Doppelpunkte A_p, A_q zu construiren, ziehen wir durch die Gegenpunkte A_{v1}, A_{u2} Senkrechte $A_{v1}O_1, A_{u2}O_2$ auf dem Hauptstrahl a und durch die Punkte A_{y1}, A_{y2} zwei beliebige auf einander senkrechte Gerade $A_{y1}O_1, A_{y2}O_2$, welche die Senkrechten $A_{v1}O_1, A_{u2}O_2$ resp. in den Punkten O_1, O_2 schneiden; dann beschreiben wir über O_1O_2 als Durchmesser einen Kreis \mathfrak{k} und dieser schneidet den Hauptstrahl a in den beiden Doppelpunkten A_p, A_q , die also symmetrisch zur Mitte der Strecke $A_{v1}A_{u2}$ liegen. Werden die beiden auf einander senkrechten Geraden $A_{y1}O_1, A_{y2}O_2$ so gezogen, dass sie mit dem Hauptstrahl a einen Winkel von 45° bilden, dann ist $A_{v1}O_1 = A_{v1}A_{y1}$ und $A_{u2}O_2 = A_{u2}A_{y2}$. Die Doppelpunkte A_p, A_q sind reell, imaginär, oder fallen zusammen, je nachdem der Kreis \mathfrak{k} den Hauptstrahl a schneidet, nicht schneidet oder berührt.

Liegen in Figur 8 die Punkte M, G auf einer durch Θ' gehenden Geraden und die Punkte M', G' auf einer durch Θ gehenden Geraden, sind ferner die Punkte M, G und M', G' so gelegen, dass einem Punkte A'_x auf dem Hauptstrahl a' ein einziger Punkt A_x auf dem Hauptstrahl a entspricht, schneiden sich also die Geraden A_xG, A'_xG' in einem Punkt A_{x1} auf a und schneiden sich ebenso die Geraden A_xM, A'_xM' in einem Punkte A_{x2} auf a , dann sind die beiden Punktreihen $A_1 \dots$ und $A_2 \dots$ identisch. Denn den Punkten A'_x, A'_y, A'_z auf dem Hauptstrahl a' entsprechen die Punkte A_x, A_y, A_z auf dem Hauptstrahl a und in jedem der Punkte A_x, A_y, A_z sind je zwei entsprechende Punkte der Punktreihen $A_1 \dots, A_2 \dots$ vereint. In diesem Falle entspricht jedem Lichtpunkte auf dem Hauptstrahl a ein homocentrischer Bildpunkt auf dem Hauptstrahl a' .

Wenn dieser theoretisch mögliche Fall physikalisch verwirklicht werden kann, so giebt es ausser dem mit der Linsenachse coincidirenden Hauptstrahl noch unendlich viele andere Hauptstrahlen, auf denen jedem Lichtpunkt ein homocentrischer Bildpunkt bei der Brechung durch eine Linse entspricht.

In Figur 9 (Tafel XIV) ist eine biconvexe Linse KK' mit einem einfallenden Hauptstrahl a und den entsprechenden gebrochenen Hauptstrahlen α , α' in einer Meridianebene gezeichnet. Hierbei, sowie in allen folgenden Zeichnungen wird unbeschadet der Allgemeinheit angenommen, dass an beiden Linsenseiten sich dasselbe Medium befindet, und der Brechungsindex $n = n' = \frac{3}{2}$ gesetzt. Es sind M , M' die Mittelpunkte der Kugelflächen K , K' , und ferner sind die zugehörigen Punkte G , G' in der angegebenen Weise, wie die Zeichnung zeigt, bestimmt. Um nun auf dem einfallenden Hauptstrahl a die beiden Lichtpunkte A_p , A_q zu construiren, denen homocentrische Bildpunkte A'_p , A'_q auf dem austretenden Hauptstrahl α' entsprechen, bestimmen wir auf a die Gegenpunkte A_{v1} , A_{u2} und zwei entsprechende Punkte A_{v1} , A_{v2} . Wir ziehen durch G und M zu a die Parallelen, die den Hauptstrahl α in den Punkten $A_{u1}A_{v2}$ treffen, dann die Gerade $A_{u1}G'$, durch ihren Schnittpunkt A'_u auf α' die Gerade $M'A'_u$ bis A_{u2} und die Gerade MA_{u2} , welche auf a den Gegenpunkt A_{u2} bestimmt. Ferner ziehen wir die Gerade $A_{v2}M'$, von ihrem Schnittpunkt A'_v auf α' die Gerade A'_vG' bis A_{v1} und die Gerade $A_{v1}G$, welche auf a den Gegenpunkt A_{v1} liefert. Durch die Geraden $\Theta'G$, $\Theta'M$ erhalten wir auf a zwei entsprechende Punkte A_{v1} , A_{v2} . Die Doppelpunkte A_p , A_q sind mittelst des Kreises \mathfrak{k} , wie vorhin in Figur 7 angegeben wurde, construirt. Ist einer der Gegenpunkte A_{v1} , A_{u2} , oder sind beide unzugänglich, dann muss man die in Figur 5 angegebene Construction der Doppelpunkte anwenden.

Durch die Gerade MA_p , welche α in A_p trifft, und durch die Gerade $M'A_p$ ergibt sich der zum Lichtpunkt A_p gehörende homocentrische Bildpunkt A'_p auf dem austretenden Hauptstrahl α' . Ebenso erhalten wir durch die Gerade MA_q , welche α in A_q schneidet, und die Gerade $M'A_q$ bestimmt, zu dem Lichtpunkt A_q den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt A'_q .

Die von dem Lichtpunkt A_p ausgehenden Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels vereinigen sich nach der Brechung durch die Linse in dem Bildpunkt A'_p , und die nach dem Lichtpunkte A_q gerichteten Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels vereinigen sich nach der Brechung in dem Bildpunkt A'_q .

Wenn bei der biconvexen Linse die Mittelpunkte zusammenfallen, die Kugelflächen K , K' also concentrisch sind, oder die Linse in eine Vollkugel übergeht, so tritt doch keine wesentliche Vereinfachung der Construction der Lichtpunkte A_p , A_q ein. Werden in diesen besonderen Fällen auf allen in einer Meridianebene liegenden Hauptstrahlen, die in einem Punkt Θ einfallen, die Lichtpunkte A_p , A_q bestimmt, dann bilden diese Lichtpunkte eine Curve, die wir Homocentroide nennen. Die Homocentroide ist in diesen speciellen Fällen für alle Eintrittspunkte Θ dieselbe. Ist die Homo-

centroide z. B. für einen Punkt Θ einer Vollkugel construiert, so kann man mittelst derselben zu einem beliebig angenommenen Lichtpunkt die zugehörigen einfallenden Hauptstrahlen und austretenden Hauptstrahlen bestimmen, und auf diesen letzteren die homocentrischen Bildpunkte construiren, welche dem angenommenen Lichtpunkt entsprechen. Dadurch gelangen wir zur Bestimmung der homocentrischen Verwandtschaft zwischen den Lichtpunkten und entsprechenden homocentrischen Bildpunkten bei der Brechung durch eine Vollkugel.

In dem geometrischen Grenzfall, der eintritt, wenn in Figur 10 der einfallende Hauptstrahl a den Linsenrand der biconvexen Linsen in einem Punkt Θ trifft, haben die beiden projectiven Punktreihen $A_1\dots$ und $A_2\dots$ in Θ einen Doppelpunkt A_q . Der andere Doppelpunkt A_p ergibt sich dann, nachdem die Gegenpunkte A_{v1} , A_{v2} in der angegebenen Weise bestimmt sind, indem wir auf dem Hauptstrahl a die Strecke

$$A_p A_{v2} = A_{v1} A_q$$

machen. Zu dem Lichtpunkt A_p erhalten wir durch die Gerade MA_p , die den Hauptstrahl a in A_p schneidet, und die Gerade $M'A_p$ den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt A'_p auf dem Hauptstrahl a' . Auf allen einfallenden Hauptstrahlen, die nach einem Randpunkt Θ gehen, ist dieser Randpunkt ein Lichtpunkt, mit dem der entsprechende homocentrische Bildpunkt coincidirt.

In Figur 11 sind bei einer biconcaven Linse KK' die beiden Lichtpunkte A_p , A_q auf einem einfallenden Hauptstrahl a und die zugehörigen homocentrischen Bildpunkte A'_p , A'_q auf dem austretenden Hauptstrahl a' , ebenso wie bei der biconvexen Linse in Figur 9, mit gleicher Bezeichnung bestimmt.

Nehmen wir in Figur 12 eine biconcave Linse KK' , bei welcher sich die beiden Kugelflächen K , K' im Punkt Θ berühren, dann entspricht nach der ausgeführten Construction jedem nach dem Berührungspunkt Θ gehenden, einfallenden Hauptstrahl a , der mit der Linsenachse einen Winkel bildet, geometrisch ein austretender Hauptstrahl a' , der mit a zusammenliegt. In diesem Falle coincidiren die beiden Doppelpunkte A_p , A_q der projectiven Punktreihen $A_1\dots$ und $A_2\dots$ im Punkt Θ . Diesem Punkt als Lichtpunkt entspricht ein mit Θ identischer homocentrischer Bildpunkt. Demnach giebt es auf einem solchen einfallenden Hauptstrahl ausser dem Punkt Θ keinen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht.

Zu einem auf dem Hauptstrahl a angenommenen Lichtpunkt A erhalten wir durch die Gerade GA , die den Hauptstrahl a in A trifft, und durch die Gerade A_1G' , die den Hauptstrahl a' in A'_1 schneidet den entsprechenden ersten Bildpunkt A'_1 . Ebenso ergibt sich durch die Gerade MA , welche auf dem Hauptstrahl a den Punkt A_2 liefert, und durch die Gerade A_2M' auf dem Hauptstrahl a' der entsprechende zweite Bildpunkt A'_2 .

Einer Reihe von Lichtpunkten A auf dem Hauptstrahl a entspricht eine projective Reihe von ersten Bildpunkten A', \dots und eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten A'', \dots auf dem austretenden Hauptstrahl a' ; und die Doppelpunkte dieser drei projectiven Punktreihen sind im Punkte Θ vereint.

Bei der biconvexen Linse in Figur 13 ist der einfallende Hauptstrahl a nach dem Mittelpunkt M der Kugelfläche K gerichtet, also senkrecht zu derselben. Der Hauptstrahl α in der Linse liegt dann mit a zusammen. Um zu dem in Z' befindlichen Punkt A_p auf α nach der Construction in Figur 3 den entsprechenden Punkt A_p auf a zu bestimmen, errichten wir im Mittelpunkt M und im Eintrittspunkt Θ die Senkrechten $MP, \Theta\alpha$ auf a , nehmen auf der Senkrechten MP die Punkte P, Π , so dass

$$MP : M\Pi = n : 1 = 3 : 2$$

ist, ziehen die Gerade $A_p\Pi$, welche die Senkrechte $\Theta\alpha$ in \mathfrak{U}_p schneidet, dann ergibt sich durch die Gerade $P\mathfrak{U}_p$ der entsprechende Punkt A_p . Dem Lichtpunkt A_p auf dem Hauptstrahl a entspricht nach der Brechung an der Kugelfläche K der mit Z' coincidirende homocentrische Bildpunkt A_p auf dem Hauptstrahl α . Betrachten wir nun A_p als Lichtpunkt, so entspricht diesem nach der Brechung an der Kugelfläche K' der mit Z' coincidirende homocentrische Bildpunkt A'_p auf dem Hauptstrahl a' . Demnach gehört zu dem Lichtpunkte A_p auf dem senkrecht zur Kugelfläche K einfallenden Hauptstrahl a der homocentrische Bildpunkt A'_p auf dem austretenden Hauptstrahl a' .

Bestimmen wir so auf jedem nach dem Mittelpunkt M gerichteten Hauptstrahl den Lichtpunkt, welchen ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, dann bilden die Lichtpunkte in einer Meridianebene eine Curve \mathfrak{z}' und die zugehörigen homocentrischen Bildpunkte liegen auf dem Kreis \mathfrak{s}' . Die nach M gerichteten einfallenden Hauptstrahlen, welche den Kreis \mathfrak{z}' berühren, begrenzen die Curve \mathfrak{z}' und die entsprechenden austretenden Hauptstrahlen begrenzen als geometrische Grenzlagen auf dem Kreis \mathfrak{s}' das Bogenstück, welches die homocentrischen Bildpunkte erfüllen. Für die Curve \mathfrak{z}' , deren geometrische Fortsetzung nicht gezeichnet ist, erhält man eine Gleichung vom vierten Grade, wie sich durch einfache Rechnung ergibt. Allen Lichtpunkten auf der Rotationsfläche, welche durch Drehung der begrenzten Curve \mathfrak{z}' um die Linsenachse entsteht, entsprechen homocentrische Bildpunkte auf einer Kugelhaube.

Durch die Gerade $\Pi\Theta'$, welche $\Theta\alpha$ in \mathfrak{U}_q schneidet, und durch die Gerade $P\mathfrak{U}_q$ ergibt sich zu dem Punkt Θ' auf dem Hauptstrahl α der entsprechende Punkt A_q auf dem Hauptstrahl a . Demnach entspricht dem Lichtpunkt A_q auf dem einfallenden Hauptstrahl a der mit Θ' coincidirende homocentrische Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl a' und es ergibt sich eine punktirt gezeichnete Curve \mathfrak{f}' vom vierten Grade, auf welcher

alle Lichtpunkte liegen, denen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreis K' entsprechen. Durch Drehung dieser Curve \mathfrak{f}' um die Linsenachse entsteht eine Rotationsfläche, die alle Lichtpunkte enthält, deren homocentrische Bildpunkte sich auf einer Kugelhaube der Kugelfläche K' befinden.

Bei dem speciellen Fall einer planconvexen Linse KK' in Figur 14 sind alle einfallende Hauptstrahlen senkrecht zu der Ebene K gerichtet und zu dem mit Z' coincidirenden Punkt A_p des Hauptstrahles α ergibt sich der entsprechende Punkt A_p auf dem einfallenden Hauptstrahl α , indem wir den Punkt A_p so bestimmen, dass $\Theta A_p : \Theta A_p = n : 1 = 3 : 2$ ist. Die Curve \mathfrak{z}' ist dann affin zu dem Kreis ζ' in Bezug auf die Gerade K als Affinitätsachse und demnach ist das physikalisch zur Geltung kommende Curvenstück $c\mathfrak{z}'d$ eine halbe Ellipse, deren grosse Achse cd parallel zu K und gleich dem Durchmesser des Kreises ζ' ist. Allen Lichtpunkten in einer Meridianebene auf der halben Ellipse $c\mathfrak{z}'d$ entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Halbkreis \mathfrak{z}' .

Ferner ergibt sich, wenn wir den Punkt A_q so bestimmen, dass $\Theta \Theta' : \Theta A_q = n : 1 = 3 : 2$, ein Stück \mathfrak{f}' einer Ellipse, welche zu dem Kreis K' affin ist in Bezug auf K als Affinitätsachse und allen Lichtpunkten in einer Meridianebene auf dem Ellipsenstück \mathfrak{f}' entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreis K' . Durch Drehung der halben Ellipse \mathfrak{z}' und des Ellipsenstückes \mathfrak{f}' um die Linsenachse wird resp. ein halbes Rotationsellipsoid und eine Haube eines anderen Rotationsellipsoides erzeugt.

Bei einer biconcaven Linse KK' in Figur 15 gehen die einfallenden Hauptstrahlen von dem Mittelpunkt M der Kugelfläche K aus. Die Curven \mathfrak{z}' und \mathfrak{f}' sind in gleicher Weise, wie in Figur 13 bei der biconvexen Linse, construirt und sind vom vierten Grade. Den Lichtpunkten in einer Meridianebene auf der begrenzten Curve \mathfrak{z}' entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreisbogen \mathfrak{z}' und den Lichtpunkten auf der begrenzten Curve \mathfrak{f}' entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreis K' . Für eine planconcave Linse ergeben sich die analogen Beziehungen, wie bei der planconvexen Linse in Figur 14.

Wenn der einfallende Hauptstrahl mit der Linsenachse einen kleinen Winkel bildet, werden die Lagenbeziehungen für die Construction der Lichtpunkte A_p , A_q und der entsprechenden homocentrischen Bildpunkte A'_p , A'_q ungünstig, weil dann ungenaue Schnittpunkte auftreten. Zwar kann man durch projective Hilfsconstructions die erforderlichen Schnittpunkte meist genauer erhalten; aber die Construction wird dadurch umständlich. Wir wollen deshalb noch die Formel ableiten, durch welche man die Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, rechnerisch bestimmen kann; aber die erforderliche Rechnung ist sehr umständlich. Sind in Figur 16 die schiefen Coordinaten des Punktes G mit f_1 , φ_1 und des Punktes M mit f_2 , φ_2 , ferner die Strecken ΘA_1 , ΘA_1 , ΘA_2 , ΘA_2

resp. mit x_1, χ_1, x_2, χ_2 bezeichnet und beziehungsweise positiv in den Richtungen $\Theta a, \Theta \alpha$, dann ist nach Gleichung 3) und 6):

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{\varphi_1}{\chi_1} = 1, \quad \frac{f_2}{x_2} + \frac{\varphi_2}{\chi_2} = 1.$$

Sind analog die schiefen Coordinaten des Punktes G' mit f'_1, φ'_1 , und des Punktes M' mit f'_2, φ'_2 , ferner die Strecken $\Theta'A'_1, \Theta'A_1, \Theta'A'_2, \Theta'A_2$ resp. mit $x'_1, \chi'_1, x'_2, \chi'_2$ bezeichnet und beziehungsweise positiv in den Richtungen $\Theta'a', \Theta'\alpha$, dann erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{f'_1}{x'_1} + \frac{\varphi'_1}{\chi'_1} = 1, \quad \frac{f'_2}{x'_2} + \frac{\varphi'_2}{\chi'_2} = 1.$$

Setzen wir die Strecke $\Theta\Theta' = \delta$, dann ist $\chi_1 + \chi'_1 = \delta$ und $\chi_2 + \chi'_2 = \delta$. Hiernach ergibt sich:

$$13) \quad \frac{\varphi_1}{1 - \frac{f_1}{x_1}} + \frac{\varphi'_1}{1 - \frac{f'_1}{x'_1}} = \delta,$$

$$14) \quad \frac{\varphi_2}{1 - \frac{f_2}{x_2}} + \frac{\varphi'_2}{1 - \frac{f'_2}{x'_2}} = \delta.$$

Nehmen wir die Punkte A'_1, A'_2 in einem Punkt A' vereint, also $x'_1 = x'_2 = x'$, und eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen x' , dann ergibt sich für die beiden projectiven Punktreihen $A_1 \dots$ und $A_2 \dots$ auf dem Hauptstrahl \tilde{a} die folgende Gleichung:

$$15) \quad \begin{cases} x_1 x_2 [f'_1(\varphi_1 - \delta)(\varphi_2 + \varphi'_2 - \delta) - f'_2(\varphi_2 - \delta)(\varphi_1 + \varphi'_1 - \delta)] \\ - x_1 [\delta f_2 f'_2(\varphi_1 + \varphi'_1 - \delta) + f'_1 f_2(\varphi_1 - \delta)(\varphi'_2 - \delta)], \\ + x_2 [\delta f_1 f'_1(\varphi_2 + \varphi'_2 - \delta) + f_1 f'_2(\varphi'_1 - \delta)(\varphi_2 - \delta)], \\ - \delta f_1 f'_1 f_2(\varphi'_2 - \delta) + \delta f_2 f'_2 f_1(\varphi'_1 - \delta) = 0. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$P = f'_1(\varphi_1 - \delta)(\varphi_2 + \varphi'_2 - \delta) - f'_2(\varphi_2 - \delta)(\varphi_1 + \varphi'_1 - \delta)$$

$$Q_1 = \delta f_2 f'_2(\varphi_1 + \varphi'_1 - \delta) + f'_1 f_2(\varphi_1 - \delta)(\varphi'_2 - \delta)$$

$$Q_2 = \delta f_1 f'_1(\varphi_2 + \varphi'_2 - \delta) + f_1 f'_2(\varphi'_1 - \delta)(\varphi_2 - \delta)$$

$$R = \delta f_1 f'_1 f_2(\varphi'_2 - \delta) - \delta f_2 f'_2 f_1(\varphi'_1 - \delta),$$

dann erhalten wir:

$$15a) \quad x_1 x_2 P - x_1 Q_1 + x_2 Q_2 = R.$$

Um die Doppelpunkte der beiden projectiven Punktreihen $A_1 \dots$ und $A_2 \dots$ rechnerisch zu bestimmen, setzen wir $x_1 = x_2 = x$, dann ergibt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$16) \quad x^2 P - x(Q_1 - Q_2) = R.$$

$$17) \quad x = \frac{Q_1 - Q_2 \pm \sqrt{4PR + (Q_1 - Q_2)^2}}{2P}.$$

Sind in Figur 17 die Radien r, r' der Kugelfläche K, K' und die Linsendicke $JJ' = d$ gegeben, ist der Abstand $\Theta H = h$ des Eintrittspunktes Θ von der Linsenachse und der Einfallswinkel e des Hauptstrahles a angenommen, dann wird der Brechungswinkel ε in der Linse an der Kugelfläche K nach $n \cdot \sin \varepsilon = \sin e$ berechnet; ferner wird der Brechungswinkel ε' in der Linse an der Kugelfläche K' und der Austrittswinkel e' des Hauptstrahles a' nach $\sin e' = n \sin \varepsilon'$ berechnet.

Nach den Formeln 9) und 10) ist:

$$f_1 = \frac{r \sin \varepsilon \cos^2 e}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad \varphi_1 = \frac{r \sin e \cos^2 \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad f_2 = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad \varphi_2 = \frac{r \sin e}{\sin(e - \varepsilon)},$$

$$f'_1 = \frac{r \sin \varepsilon' \cos^2 e'}{\sin(e' - \varepsilon')}, \quad \varphi'_1 = \frac{r' \sin e' \cos^2 \varepsilon'}{\sin(e' - \varepsilon')}, \quad f'_2 = \frac{r' \sin \varepsilon'}{\sin(e' - \varepsilon')}, \quad \varphi'_2 = \frac{r' \sin e'}{\sin(e' - \varepsilon')}.$$

Durch diese Werthe erhalten wir nach Einsetzung aus 17) die beiden Werthe für x und damit auf dem einfallenden Hauptstrahl a die beiden Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte auf dem austretenden Hauptstrahl a' entsprechen. Die Bildpunkte ergeben sich dann durch Rechnung aus 13) oder 14).

Je nachdem

$$4PR + (Q_1 - Q_2)^2 \gtrless 0$$

ist, sind die Lichtpunkte reell, imaginär oder fallen zusammen.

XVIII.

Construction der Focalcurve aus sechs gegebenen Punkten.

Von

Dr. R. MÜLLER,

Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig

Hierzu Tafel XV Fig. 1—7.

Die Focalcurve ist bekanntlich eine circulare Curve dritter Ordnung von der besonderen Beschaffenheit, dass ihr Focalcentrum — das heisst der reelle Schnittpunkt ihrer imaginären Asymptoten — auf der Curve selbst liegt. Sie wird am einfachsten construirt als Erzeugniss eines Kreisbüschels und eines ihm projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen.* Der Mittelpunkt dieses Strahlenbüschels ist ihr Focalcentrum; die Mittelpunkte der Kreise liegen auf einer Geraden, die zur reellen Asymptote parallel ist und den Abstand zwischen dieser und dem Focalcentrum halbirt. Wir bezeichnen dieselbe als die Mittellinie, die — reellen oder imaginären — Grundpunkte des Kreisbüschels als die Grundpunkte der Curve.

Die Focalcurve kann ferner definiert werden als der geometrische Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar; sie ist demnach auch der Ort eines Punktes, welcher die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits durch eine symmetrische Involution projicirt. In der Kinematik der starren ebenen Systeme begegnen wir ihr als Kreispunktcurve, das heisst als dem Orte derjenigen Systempunkte, die in vier auf einander folgenden Systemlagen sich auf einem Kreise befinden.** In dieser Bedeutung spielt sie z. B. in der Lehre von der angenäherten Geradführung eine wichtige Rolle.

* Vergl. Schröter, über eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung (Mathematische Annalen Bd. 6 S. 60). Durège, über die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet (daselbst S. 83).

** Burmester: Kinematik I S. 616.

Unter den ebenen Curven dritter Ordnung nimmt die Focalcurve eine ähnlich ausgezeichnete Stellung ein, wie der Kreis unter den Kegelschnitten. Es dürfte deshalb von Nutzen sein, diese specielle Curve eingehender zu untersuchen. Im Folgenden beschränken wir uns immer auf die Betrachtung des allgemeinen Falls, dass die Curve keinen Doppelpunkt hat. Wir beginnen mit der Construction der Focalcurve aus sechs beliebig gewählten Punkten; dazu bedarf es aber zunächst der Ableitung einiger Hilfssätze über circulare Curven dritter Ordnung im Allgemeinen.

§ 1. Construction des Focalcentrums einer durch sieben Punkte gegebenen circularen Curve dritter Ordnung.

Durch sieben beliebig gegebene Punkte $1, 2, \dots, 7$ ist eine circulare Curve dritter Ordnung c eindeutig bestimmt. Beschreibt man durch irgend zwei dieser Punkte, z. B. durch 1 und 2 , ein Kreisbüschel, so schneidet jeder solche Kreis die Curve — von den imaginären Kreispunkten I, J abgesehen — noch in zwei weiteren Punkten, und die Verbindungslinie derselben geht bekanntlich durch einen festen Punkt P der c , den Gegenpunkt der vier Punkte $1, 2, I, J$. Dann ist die c das Erzeugniss des Kreisbüschels $1\ 2(3\ 4\dots)$ und des ihm projectiven Strahlenbüschels $P(3\ 4\dots)$, mithin ist das Doppelverhältniss der vier von P nach $3, 4, 5, 6$ gehenden Strahlen gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Kreise des Büschels $1\ 2$, und der Punkt P liegt demnach auf dem Kegelschnitte, der durch $3, 4, 5, 6$ geht und das Doppelverhältniss $1\ 2(3\ 4\ 5\ 6)$ fasst. Ebenso befindet sich P auf dem Kegelschnitte, der über den Punkten $4, 5, 6, 7$ das Doppelverhältniss $1\ 2(4\ 5\ 6\ 7)$ fasst; folglich kann P als der vierte Schnittpunkt beider Kegelschnitte in bekannter Weise linear construirt werden.

Ein Kreis des Büschels zerfällt in die unendlich ferne Gerade der Ebene und in die Gerade $1\ 2$. Der entsprechende Strahl des Büschels P schneidet die Curve c in ihrem reellen unendlich fernen Punkte U und in einem auf $1\ 2$ liegenden Punkte Q . Um die zum Punkte U gehörende Asymptote u zu erhalten, betrachte man P und Q als Grundpunkte eines neuen Kreisbüschels und construire zu P, Q, I, J den Gegenpunkt S in derselben Weise, wie vorher den Punkt P als Gegenpunkt von $1\ 2\ I\ J$. Nun schneidet der in die Geraden PQ und IJ zerfallende Kreis die Curve c noch in zwei Punkten, die beide mit U zusammenfallen. Die Verbindungslinie derselben ist die Asymptote u , und diese geht also durch den Punkt S . Wählt man demnach zur Erzeugung der Curve c ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte auf einer Parallelen zur reellen Asymptote liegen, so ist der Mittelpunkt des zugehörigen Strahlenbüschels der Asymptotenschnittpunkt S .*

* In anderer Weise abgeleitet von Durège, diese Zeitschrift Bd. 14 S. 368.

Ist die Parallele zu u , welche die Grundpunkte des erzeugenden Kreisbüschels verbindet, unendlich benachbart zur unendlich fernen Geraden, so sind die Grundpunkte selbst unendlich benachbart zu den imaginären Kreispunkten I, J , und das Kreisbüschel verwandelt sich in ein Büschel concentrischer Kreise um das Focalcentrum F der Curve c . Dann folgt aus dem vorhergehenden Satze: Jeder Kreis um das Focalcentrum F schneidet die Curve c in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Asymptotenschnittpunkt S geht. Oder: Die Mittelsenkrechten aller Sehnen, welche die Curve c auf den durch den Asymptotenschnittpunkt S gehenden Strahlen abschneidet, gehen durch das Focalcentrum F .*

Sind demnach die Punkte P, Q, S ermittelt, so fülle man auf irgend zwei Strahlen des Büschels S , z. B. auf $S3, S4$, Lothe aus den Mittelpunkten der entsprechenden Kreise $PQ3, PQ4$; dieselben schneiden sich im Focalcentrum F .

Die Curve c construirt man am einfachsten als Erzeugniß des Kreisbüschels PQ und des ihm projectiven Strahlenbüschels S , wobei die Strahlen von S senkrecht sind auf den Geraden, die den Punkt F mit den Mittelpunkten der entsprechenden Kreise verbinden.

§ 2. Sätze über Büschel von circularen Curven dritter Ordnung.

Acht Punkte $I, J, 1, 2, \dots, 6$ bestimmen ein Büschel von Curven dritter Ordnung; durch Angabe der Tangente in einem der Grundpunkte, z. B. in I , wird eine bestimmte Curve c des Büschels eindeutig definit. Ordnet man demnach in den Strahlenbüscheln um I und J immer zwei solche Strahlen i und j einander als entsprechend zu, die in diesen Punkten dieselbe Curve c berühren, so sind die Strahlenbüschel projectiv auf einander bezogen, und der Schnittpunkt F von i und j beschreibt einen durch die Punkte I und J gehenden Kegelschnitt f (Fig. 1). Fallen nun die Punkte I und J mit den imaginären Kreispunkten zusammen, so wird c eine circular Curve dritter Ordnung, F ihr Focalcentrum, und dann ergibt sich der Satz: Die Focalcentra eines Büschels von circularen Curven dritter Ordnung erfüllen einen Kreis f .

In Figur 1 geht durch jeden Punkt U der Geraden I, J eine bestimmte Curve c des Büschels. Hierdurch wird die in der Geraden I, J liegende Punktreihe U, U', U'', \dots projectiv bezogen auf das Büschel i, i', i'', \dots der zugehörigen Tangenten in I und folglich auch auf die Punktreihe F, F', F'', \dots , deren Träger der Kegelschnitt f ist. Lässt man den Punkt U mit I zusammenfallen, so berührt die zugehörige Curve c die Gerade I, J in I ,

* Auf andere Weise erhalten von Eckardt, diese Zeitschrift Bd. 10 S. 321.

also wird i identisch mit IJ und E' identisch mit J . Wird andererseits der Punkt J der Reihe $UU'U''\dots$ zugewiesen, so entspricht ihm in $F'F'F''\dots$ der Punkt I . Bezeichnet man demnach mit U_1 den vierten harmonischen Punkt zu I, J, U , mit F'_1 den entsprechenden Punkt auf f , so sind auch J, I, F, F'_1 vier harmonische Punkte, folglich geht die Gerade FF'_1 durch den Pol der Geraden IJ in Bezug auf f . — Seien jetzt wieder I, J die imaginären Kreispunkte der Ebene. Dann liegen die Punkte F, F'_1 auf einem Durchmesser des Kreises f , und die Punkte U, U_1 gehören zu zwei circularen Curven c, c_1 , deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Das heisst: In dem Büschel von circularen Curven dritter Ordnung haben je zwei Curven, deren Asymptoten einen rechten Winkel einschliessen, zu Focalcentren immer zwei Gegenpunkte des Kreises f .

Verbindet man endlich in Figur 1 einen beliebigen Punkt F_0 des Kegelschnitts f mit entsprechenden Punkten der Punktreihen $UU'U''\dots$ und $F'F'F''\dots$, so erhält man zwei projective Strahlenbüschel, in denen die Strahlen F_0I, F_0J einander doppelt entsprechen; die beiden Büschel bilden demnach eine Involution, von welcher F_0I, F_0J ein Paar entsprechende Strahlen sind. In dem besonderen Falle, wo I und J die imaginären Kreispunkte darstellen, ist diese Involution symmetrisch, weil ihre Doppelstrahlen durch I und J harmonisch getrennt werden. Hieraus folgt: Die Geraden, welche die reellen unendlich fernen Punkte, sowie die entsprechenden Focalcentra des Büschels von circularen Curven dritter Ordnung mit einem beliebigen Punkte F_0 des Kreises f verbinden, sind die Paare einer symmetrischen Involution.

§ 3. Die Focalcurve als Sonderfall der circularen Curve dritter Ordnung. Ein charakteristischer Kreis.

Schreibt man die Gleichung einer circularen Curve dritter Ordnung c für rechtwinklige Coordinaten in der Form:

$$1) \quad (ax + by)(x^2 + y^2) + cx^2 + dxy + ey^2 + fx + gy + h = 0,$$

so erhält man die Coordinaten ξ, η des Focalcentrums F , indem man ausdrückt, dass jede der Geraden, die F mit den imaginären Kreispunkten verbinden, nur einen endlichen Punkt mit der c gemein hat; dann ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$2) \quad \xi = -\frac{a(c-e) + bd}{2(a^2 + b^2)}, \quad \eta = -\frac{b(c-c) + ad}{2(a^2 + b^2)}.$$

Die Curve c ist eine Focalcurve, wenn sie durch den Punkt F hindurchgeht, wenn also die Coordinaten ξ, η der Gleichung 1) identisch genügen. Nun ist nach 2):

$$c\xi^2 + d\xi\eta + e\eta^2 = \frac{(\alpha^2 c + \alpha b d + b^2 e) \{ (c - e)^2 + d^2 \}}{4(\alpha^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 c + \alpha b d + b^2 e}{\alpha^2 + b^2} (\xi^2 + \eta^2),$$

mithin:

$$(\alpha\xi + b\eta)(\xi^2 + \eta^2) + c\xi^2 + d\xi\eta + e\eta^2 = \frac{c + e}{2} (\xi^2 + \eta^2).$$

Die Gleichung 1) stellt also eine Focalcurve dar, sobald der Ausdruck

$$\frac{c + e}{2} (\xi^2 + \eta^2) + f\xi + g\eta + h$$

verschwindet; oder, anders ausgedrückt, die circulare Curve dritter Ordnung c ist eine Focalcurve, wenn der Kreis k

$$3) \quad \frac{c + e}{2} (x^2 + y^2) + fx + gy + h = 0$$

durch ihr Focalcentrum geht.

Die Curve c und der Kreis k stehen in einer einfachen geometrischen Beziehung. Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung die linken Seiten der Gleichungen 1) und 3) bez. mit \mathfrak{C} und \mathfrak{K} und setzt

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{K} = \mathfrak{D} = (\alpha'x + b'y)(x^2 + y^2) + c'x^2 + d'xy + e'y^2 + fx + gy + h',$$

so ist $\alpha' = \alpha$, $b' = b$, $c' = \frac{c - e}{2}$, $d' = d$, $e' = \frac{e - c}{2}$; $f' = g' = h' = 0$, $c' + e' = 0$,

$c' - e' = c - e$. Dann wird durch die Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ eine circulare Curve dritter Ordnung d dargestellt, die im Coordinaten-Anfangspunkte einen Doppelpunkt hat, deren reelle Asymptote parallel ist zur reellen Asymptote von c und deren Focalcentrum zufolge der Gleichungen 2) mit F zusammenfällt. Dieselbe ist überdies eine Focalcurve, denn es ist:

$$\frac{c' + e'}{2} (\xi^2 + \eta^2) + f'\xi + g'\eta + h' = 0.$$

Die Curven c und d schneiden sich, von den unendlich fernen Punkten abgesehen, noch in vier endlichen Punkten, und diese liegen sämmtlich auf dem Kreise k .

Man kann nun zu jedem Punkte P der Ebene eine Focalcurve d construiren, die in P einen Doppelpunkt besitzt, und die mit der gegebenen Curve c das Focalcentrum F , sowie den reellen unendlich fernen Punkt gemein hat; und zwar wird durch diese $3 + 5 + 1$ Bedingungen die Curve d eindeutig bestimmt. Hierdurch wird aber auch jedem Punkte P in Bezug auf die Curve c ein bestimmter Kreis k zugeordnet, der die vier endlichen Schnittpunkte von c und d enthält und der immer dann und nur dann durch das Focalcentrum F geht, wenn die c eine Focalcurve ist. Der so definirte Kreis k soll im Folgenden als der dem Punkte P in Bezug auf die Curve c zugeordnete Kreis bezeichnet werden.

Liegt der Punkt P auf c , so zählt er für zwei Schnittpunkte der Curven c und d , und dann berührt der zugeordnete Kreis k die Curve c in P . In diesem Falle ergibt sich eine einfache Construction des Kreises k . Wählt man nämlich den Punkt P zum Coordinaten-Anfangspunkt und zieht die y -Achse parallel zur reellen Asymptote u von c , so hat man für die Curve c , die Asymptote u und den Kreis k bez. die Gleichungen:

$$x(x^2 + y^2) + cx^2 + dxy + ey^2 + fx + gy = 0,$$

$$x + e = 0,$$

$$\frac{c + e}{2}(x^2 + y^2) + fx + gy = 0$$

und für den Punkt F wird

$$\xi = -\frac{c - e}{2}.$$

Sind nun Q und R bez. die Schnittpunkte der y -Achse mit c und k , V der Schnittpunkt der x -Achse mit u , so ist:

$$PQ = -\frac{g}{e},$$

$$PR = -\frac{2g}{c + e},$$

$$PV = -e,$$

also

$$QR = \frac{g(c - e)}{e(c + e)}$$

und

$$\frac{PR}{QR} = -\frac{2e}{c - e} = -\frac{PV}{\xi}.$$

Kennt man demnach von der Curve c des Focalcentrum F , die Asymptote u , auf einer Parallelen zu u die Punkte P und Q und in P die Tangente p — was zur eindeutigen Bestimmung von c gerade ausreicht — so ziehe man PV senkrecht zu u , PG senkrecht zu PQ , QW parallel und gleich zu FG (Fig. 2). Dann geht der gesuchte Kreis k durch den Schnittpunkt R von VW mit PQ und berührt in P die Gerade p .

Die Coefficienten der Gleichung 3) sind linear zusammengesetzt aus den Coefficienten der Gleichung 1). Bestimmt man also zum Punkte P in Bezug auf zwei circulare Curven dritter Ordnung $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{C}' = 0$ die zugeordneten Kreise $\mathfrak{K} = 0$ und $\mathfrak{K}' = 0$, so entspricht demselben Punkte P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{C} - \lambda \mathfrak{C}' = 0$ der Kreis $\mathfrak{K} - \lambda \mathfrak{K}' = 0$. Hieraus folgt: Die einem Punkte P in Bezug auf ein Büschel von circularen Curven dritter Ordnung zugeordneten Kreise bilden gleichfalls ein Büschel.

§ 4. Construction der Focalcurve aus sechs beliebig gewählten Punkten.

Sechs beliebig gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmen ein Büschel von circularen Curven dritter Ordnung $c, c', c'' \dots$ und einen Kreis f als Ort der zugehörigen Focalcentra $F, F', F'' \dots$. Construirt man für irgend einen Punkt P der Ebene in Bezug auf $c, c', c'' \dots$ die zugeordneten Kreise $k, k', k'' \dots$, so ist das entstehende Kreisbüschel projectiv bezogen auf die Punktreihe $FF'F'' \dots$. Verbindet man also einen beliebigen Punkt F_0 des Kreises f mit $F, F', F'' \dots$, so ist auch das Strahlenbüschel $F_0(F'F''F''')$ projectiv zu dem Kreisbüschel $kk'k'' \dots$, und dann erzeugen beide eine circulare Curve dritter Ordnung z . Dieselbe schneidet den Kreis f in F_0 und überdies in drei endlichen Punkten F_I, F_{II}, F_{III} , und diese gehören als Focalcentra zu drei bestimmten Curven c_I, c_{II}, c_{III} des Büschels $cc'c'' \dots$. Nun ist F_I als Punkt der Curve z der eine Schnittpunkt des Strahls F_0F_I mit dem entsprechenden Kreise k_I des Büschels $kk'k'' \dots$; dem Punkt P wird also in Bezug auf c_I ein Kreis k_I zugeordnet, der durch das zugehörige Focalcentrum F_I geht, mithin ist c_I nach einem der vorher abgeleiteten Sätze eine Focalcurve. Hieraus folgt: Durch sechs gegebene Punkte gehen im Allgemeinen drei Focalcurven.

Die Construction der Focalcurven c_I, c_{II}, c_{III} erfordert demnach die Bestimmung des Kreises f und der Curve z . Um einen Punkt von f zu erhalten, füge man zu den sechs gegebenen Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 einen siebenten Punkt U beliebig hinzu und construire für die so bestimmte Curve c das Focalcentrum F . Dabei lässt man den Punkt U zweckmässig zusammenfallen mit dem unendlich fernen Punkte einer Geraden, die zwei der gegebenen Punkte verbindet. Sei etwa U der unendlich ferne Punkt der Geraden 12, so lege man durch die Punkte 1 und 2 das Kreisbüschel 12(3456 U) und bestimme zunächst den Punkt S , in welchem die Curve c ihre Asymptote u schneidet. Nach § 1 ergibt sich S als der vierte Schnittpunkt zweier Hyperbeln v und w , die bez. durch die Punkte 3, 4, 5, U und 3, 4, 6, U gehen und die Doppelverhältnisse 12(345 U) und 12(346 U) fassen. Die Ausführung dieser Construction gestaltet sich in folgender Weise (Fig. 3).

Errichtet man zu den Geraden 13, 14, 15, 16 bez. Lothe in den Punkten 3, 4, 5, 6 und bestimmt ihre Schnittpunkte 3', 4', 5', 6' mit einer durch 2 senkrecht zu 12 gezogenen Geraden, so liegen die Punkte 3', 4', 5', 6' bez. auf den Kreisen 123, 124, 125, 126, folglich ist das Doppelverhältniss

$$12(345U) = (3'4'5'\infty) = \frac{3'5'}{4'5'}$$

Man ziehe nun durch 5 zu 12 eine Parallele, welche 34 in 5_0 schneidet, mache auf einer durch 3 beliebig gelegten Geraden, z. B. auf 13, die Strecken

$$34'' = 3'4', \quad 35'' = 3'5',$$

bestimme den Schnittpunkt \mathfrak{S} von $44''$ und $5_05''$ und ziehe die Gerade $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ parallel zu 13 bis 34. Dann ist das Doppelverhältniss

$$(345_0\mathfrak{B}) = (34''5''\infty) = \frac{3'5'}{4'5'} = 12(345U),$$

mithin ist die Gerade $\mathfrak{B}U$ eine Asymptote der Hyperbel \mathfrak{v} .

Macht man ferner auf 13 die Strecke $36'' = 3'6'$ und zieht 6_06_0 parallel zu 12 bis 34, darauf $6_06''$ bis \mathfrak{Z} auf $44''$ und $\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ parallel zu 13 bis 34, so bestimmen die Punkte 3, 4, 6, U mit der Asymptote $\mathfrak{B}U$ die Hyperbel \mathfrak{w} .

Um jetzt den vierten Schnittpunkt S der Hyperbeln \mathfrak{v} und \mathfrak{w} zu ermitteln, construire man zunächst den zweiten Schnittpunkt 6^* der Geraden 36 mit \mathfrak{v} , sowie den zweiten Schnittpunkt 5^* von 45 mit \mathfrak{w} . In dem der Hyperbel \mathfrak{v} eingeschriebenen Fünfeck $345U6^*$ schneidet die Tangente des Punktes U die gegenüberliegende Seite 34 in \mathfrak{B} ; treffen sich also 36 und $5U$ in \mathfrak{Q} , so ist $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$ die Pascal'sche Gerade, und dann geht $U6^*$ durch den Schnittpunkt \mathfrak{R} von 45 und $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$. Ebenso findet man 5^* durch folgende Construction:

$$\mathfrak{Q}' = 45, \quad 6U; \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{B}\mathfrak{Q}', \quad 36; \quad 5^* = 45, \quad U\mathfrak{R}'.$$

Die Hyperbeln \mathfrak{v} und \mathfrak{w} bestimmen nun ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten 3, 4, U , S . Legt man durch zwei derselben, etwa 3 und 4, einen festen Kegelschnitt, z. B. das Geradenpaar 36 , 45 , so schneidet dieser alle Kegelschnitte des Büschels noch in Punktpaaren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt \mathfrak{P} der Geraden US gehen. Die Hyperbeln \mathfrak{v} und \mathfrak{w} treffen jenen festen Kegelschnitt bez. in 6^* und 5 , sowie in 6 und 5^* ; demnach ist \mathfrak{P} der Schnittpunkt von 6^*5 und 65^* , und dann liegt S auf der zu 12 parallelen Geraden $\mathfrak{P}U$, d. h. $\mathfrak{P}U$ ist die reelle Asymptote u der Curve c . Ein dritter Kegelschnitt des Büschels wird dargestellt durch das Geradenpaar $3U$, $4S$. Bezeichnet man also mit \mathfrak{N} und \mathfrak{N}' bez. die Schnittpunkte von $3U$ und 45 , sowie von $4S$ und 36 , so geht die Gerade $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'$ gleichfalls durch \mathfrak{P} , folglich ist

$$\mathfrak{N}' = 36, \quad \mathfrak{P}\mathfrak{N}; \quad S = \mathfrak{P}U, \quad 4\mathfrak{N}'.$$

Mit Hilfe des Asymptotenschnittpunktes S erhält man unmittelbar das gesuchte Focalcentrum F der Curve c . Die Geraden $13'$, $14'$ schneiden nämlich die Mittelsenkrechte der Strecke 12 bez. in den Mittelpunkten \mathfrak{M}_3 , \mathfrak{M}_4 der Kreise 123, 124. Fällt man von \mathfrak{M}_3 , \mathfrak{M}_4 bez. Lothe auf $S3$, $S4$, so treffen sich dieselben nach § 1 im Punkte F .

Man construire nun in ganz derselben Weise das Focalcentrum F' der circularen Curve dritter Ordnung c' , die durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6,

sowie durch den unendlich fernen Punkt U' der Geraden 13 geht. Nach dem letzten Satze in § 2 bilden die Strahlen, welche F und U , F' und U' mit irgend einem Punkte des Kreises f , z. B. mit dem zu F unendlich benachbarten Punkte verbinden, zwei Paare einer symmetrischen Involution. Zieht man also durch F' die Gerade t so, dass der Winkel $F'Ft$ gleich ist dem Winkel UFU' , so berührt t in F den Kreis f , der durch F , F' , t demnach bestimmt ist.

Um zweitens die Curve z zu ermitteln, ersetzt man zweckmässig den vorher mit P bezeichneten Punkt durch einen der sechs gegebenen Punkte, z. B. durch 1. Dann sind zunächst die dem Punkte 1 in Bezug auf die Curven c , c' , c'' ... zugeordneten Kreise k , k' , k'' ... zu construiren. Fällt man in Figur 3 von F' auf $S1$ ein Loth, welches die Mittelsenkrechte der Strecke 12 in \mathfrak{M}_1 schneidet, so gehört zu dem Mittelpunkte \mathfrak{M}_1 ein Kreis, der die Curve c im Punkte 1 berührt; zieht man also durch 1 die Gerade p senkrecht zu $1\mathfrak{M}_1$, so ist dieselbe die Tangente der c im Punkte 1. Aus den Punkten F , 1, 2 und den Geraden u und p ergibt sich nach Figur 2 der Kreis k .

Construirt man ebenso für die Curve c' im Punkte 1 die Tangente p' und den Kreis k' , so bestimmen k und k' den zweiten Grundpunkt des Kreisbüschels $kk'k''$...

Sei ferner U'' der unendlich ferne Punkt der Geraden 14, c'' die durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, U'' gehende circulare Curve dritter Ordnung. Dann findet man auf dem Kreise f das zugehörige Focalcentrum F'' , indem man den Winkel $F'F'F''$ gleich macht dem Winkel $U''F'U'$. Fällt man von 2 und 3 Lothe auf die Geraden, welche F'' bez. mit den Mittelpunkten der Kreise 124 und 134 verbinden, so treffen sich dieselben im Asymptotenschnittpunkte S'' , und nun ergibt sich wie vorhin die Tangente p'' der Curve c'' im Punkte 1.

Von den beiden projectiven Strahlenbüscheln $F'(tF'F''...)$ und $1(pp'p''...)$ kennt man somit drei Paare entsprechender Strahlen. Dadurch wird aber auch das Strahlenbüschel $F'(tF'F''...)$ projectiv bezogen auf das Kreisbüschel $kk'k''$..., und dann erzeugen beide die Curve z , welche den Kreis f in den Punkten F , F_I , F_{II} , F_{III} durchschneidet.

Es ist endlich die Focalcurve selbst zu construiren, die z. B. den Punkt F_I zum Focalcentrum hat. Macht man den Winkel $U'F'U_I$ gleich dem Winkel $F_I F' F''$, so liefert die Gerade FU_I den unendlich fernen Punkt U_I der gesuchten Curve c_I . Man könnte nun den zugehörigen Asymptotenschnittpunkt S_I nach § 1 bestimmen aus der Bedingung, dass das Strahlenbüschel $S_I(F_I 1 2 3 U_I)$ projectiv sein muss einem Büschel concentrischer Kreise, die um den Punkt F_I bez. mit den Radien Null, $F_I 1$, $F_I 2$, $F_I 3$, $F_I U_I = \infty$ beschrieben werden; dann würde man S_I in analoger Weise wie vorher den Punkt S erhalten als den vierten Schnittpunkt zweier Hyperbeln, welche bereits die Punkte F_I , 1, U_I mit einander ge-

mein haben. Einfacher ist es aber, statt des Punktes S_I die Mittellinie m_I der Curve c_I zu construiren, nach einem Verfahren, das im folgenden Paragraphen abgeleitet wird.

**§ 5. Construction der Focalcurve aus dem Focalcentrum,
dem reellen unendlich fernen Punkt und drei beliebigen
anderen Punkten.**

Von einer Focalcurve, die wir jetzt wieder kurz mit c bezeichnen, seien gegeben das Focalcentrum F , der reelle unendlich ferne Punkt U und drei beliebige andere Punkte 1, 2, 3 (Fig. 4). Der Punkt U bestimmt die Richtung der unbekanntenen Mittellinie m . Versteht man unter M_1, M_2, M_3 bez. die Schnittpunkte der Geraden $F1, F2, F3$ mit m , so schneiden sich die Kreise, welche M_1, M_2, M_3 zu Mittelpunkten haben und bez. durch 1, 2, 3 gehen, in den beiden reellen oder imaginären Grundpunkten der Curve c ; sie haben also jedenfalls eine gemeinschaftliche Chordale m .

Man ziehe nun in der Richtung nach U , aber sonst beliebig, die Geraden q, r, \dots , bestimme ihre Schnittpunkte $Q_1, R_1, \dots, Q_2, R_2, \dots, Q_3, R_3, \dots$ bez. mit den Geraden $F1, F2, F3$ und beschreibe um die Punkte der ersten Punktreihe Kreise durch 1, ebenso um jeden Punkt der zweiten und dritten Punktreihe einen Kreis bez. durch 2 und 3. Dadurch entstehen drei projective Kreisbüschel mit je zwei in 1, 2, 3 vereinigten Grundpunkten. Es seien ferner q_1, r_1, \dots bez. die Chordalen der Kreise um Q_1 und Q_3 , um R_1 und R_3, \dots , sowie q_2, r_2, \dots die Chordalen der Kreise um Q_2 und Q_3, R_2 und R_3, \dots . Würden dann z. B. q_1 und q_2 mit einander zusammenfallen, so wären sie identisch mit der Geraden m , und q wäre die Mittellinie der Curve c .

Haben zwei projective Kreisbüschel die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, so bilden die Chordalen entsprechender Kreise ein Strahlenbüschel, das zu den Kreisbüscheln projectiv ist. Denn die beiden Kreisbüschel erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung, und jeder Kreis des einen Büschels schneidet dieselbe in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt der Curve geht. Diese Verbindungslinie ist aber die Chordale, welche der Kreis mit dem entsprechenden Kreise des anderen Büschels gemein hat. — Im vorliegenden Falle sind also die Parallelstrahlenbüschel $q_1 r_1, \dots$ und $q_2 r_2, \dots$ projectiv zu dem Kreisbüschel $3(Q_3 R_3, \dots)$ und folglich auch projectiv zu dem Parallelstrahlenbüschel qr, \dots . Dem durch F gehenden Strahle des letzteren entsprechen drei concentrische Kreise um F , und diese haben die unendlich ferne Gerade zur gemeinschaftlichen Chordale; die Büschel $q_1 r_1, \dots$ und $q_2 r_2, \dots$ sind demnach einander ähnlich.

Um den endlichen Doppelstrahl m derselben zu construiren, genügt die Kenntniss von zwei Strahlenpaaren $q_1 q_2$ und $r_1 r_2$. Wählt man als q die unendlich ferne Gerade, so gehen q_1, q_2 bez. durch die Schnittpunkte des

in 3 zu $F3$ errichteten Lothes mit den Geraden, die in 1 und 2 bez. auf $F1$, $F2$ senkrecht stehen. Schneiden r_1 , r_2 die Gerade r in \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 , und q_1 , q_2 irgend eine Parallele v zu r in \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 , so geht die Gerade m durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{R}_1\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{R}_2\mathfrak{B}_2$.

Das Parallelstrahlenbüschel $m q_1 r_1 \dots$ trifft die Gerade r in der Punktreihe $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1 \dots$, und diese ist projectiv zu der Punktreihe $M_3 Q_3 R_3 \dots$, in welcher das Parallelstrahlenbüschel $m q r \dots$ die Gerade $F3$ schneidet. Dabei entspricht dem Punkte F der zweiten Punktreihe der unendlich ferne Punkt der ersten, und da auch der Punkt Q_3 unendlich fern ist, so sind \mathfrak{Q}_1 und F die Gegenpunkte beider Reihen. Dann geht die perspective Achse x der Punktreihen durch \mathfrak{R}_1 parallel zu $\mathfrak{Q}_1 F$; zieht man also $\mathfrak{M}F$ bis X auf x und durch X die Gerade $X M_3$ parallel zu r , so ist $X M_3$ die gesuchte Mittellinie m .

Beschreibt man um M_3 einen Kreis durch den Punkt 3, so bestimmt derselbe ein Kreisbüschel, das m zur Chordale hat. Dasselbe erzeugt die Curve c in Verbindung mit dem Strahlenbüschel F , dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen.

§ 6. Die Focalcurven durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits.

In Figur 5 sind AA' , BB' , CC' die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits. Construiert man für jedes der Dreiecke ABC , $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ den umschriebenen Kreis, so schneiden sich diese vier Kreise bekanntlich in einem Punkte F_I , dem Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Dann erfüllen die Brennpunkte aller dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte eine Focalcurve c_I , welche durch die sechs Eckpunkte geht, den Punkt F_I zum Focalcentrum hat und deren Mittellinie m_I die Mittelpunkte der drei Diagonalen AA' , BB' , CC' verbindet.* Wir bezeichnen dieselbe im Folgenden als die Brennpunktscurve des gegebenen Vierseits.

Jede Seite des Vierseits bildet mit dem Kreise, der durch die drei nicht auf ihr liegenden Eckpunkte geht, eine ausgeartete Curve des Büschels von circularen Curven dritter Ordnung, welches A , A' , B , B' , C , C' zu Grundpunkten hat. Demnach liegen die Mittelpunkte der vier Kreise mit dem Punkte F_I auf dem Kreise f , der nach § 2 die Focalcentra aller Curven des Büschels enthält, und dieser ist also im vorliegenden Falle ohne Weiteres bekannt. Da ferner durch den Punkt F_I bereits fünf Curven des Büschels gehen, so ist derselbe der neunte Grundpunkt des Büschels. Mithin ergibt sich der Satz: Alle circularen Curven dritter Ordnung, welche durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits gehen, enthalten auch den Brennpunkt der dem Vier-

* Durège, Mathematische Annalen Bd. 5 S. 90.

seit eingeschriebenen Parabel. Diejenige Curve des Büschels, die diesen Brennpunkt zum Focalcentrum hat, ist die Brennpunktscurve des Vierseits.

Gegenwärtig ist also von den drei Lösungen der in § 4 behandelten Aufgabe die eine, nämlich die Curve c_I , direct gegeben, und es ist demnach zu erwarten, dass auch die beiden noch fehlenden Lösungen c_{II} und c_{III} sich in weit einfacherer Weise werden construiren lassen, als in dem vorher betrachteten allgemeinen Falle. In der That ergibt sich eine solche Construction mit Hilfe einiger Sätze, die wir im nächsten Paragraphen ableiten werden.

Vorher möge noch ein interessanter Sonderfall erwähnt werden, in welchem alle drei Lösungen unmittelbar vorliegen. Derselbe tritt ein, wenn zweimal zwei Seiten des gegebenen Vierseits auf einander senkrecht stehen. Sind in Figur 6 die Geraden $A'B$ und $A'B'$ bez. senkrecht auf AB und $A'B$, so ist B' der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABA' , also auch BB' senkrecht auf AA' . Dann gehen die vier Kreise ABC , $A'B'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ durch den Schnittpunkt von AA' und BB' ; derselbe ist folglich das Focalcentrum F_I der Brennpunktscurve c_I . Unter den durch F_I gehenden Strahlen schneiden zwei die Curve c_I bez. in A, A' und B, B' , und die beiden Kreise über den Durchmessern AA' , BB' treffen sich in C und C' ; mithin sind C, C' die Grundpunkte der c_I . Construirt man nun die c_I in bekannter Weise aus dem Kreisbüschel CC' und dem Strahlenbüschel F_I , so entspricht dem Kreise $CC'F_I$ der Durchmesser $F_I S_I$, der die c_I in F_I berührt und in S_I schneidet. Die Punkte F_I und S_I haben aber gleiche Entfernungen von der Mittellinie der Curve, mithin geht durch S_I die reelle Asymptote u_I .

Zwei Kreise über den Durchmessern AB' und $A'B$ schneiden sich in C' und F_I , folglich ist der Punkt C das Focalcentrum einer zweiten Focalcurve c_{II} mit den Grundpunkten C' und F_I . Ebenso wird die dritte Focalcurve c_{III} bestimmt durch das Focalcentrum C' und die Grundpunkte C und F_I ; der früher mit f bezeichnete Kreis geht demnach durch die Punkte C, C', F_I und hat zum Mittelpunkte den Schnittpunkt der Mittellinien m_I, m_{II}, m_{III} . Construirt man zu den Punkten C und C' bez. die Gegenpunkte S_{II} und S_{III} , so sind die Asymptoten u_I, u_{II}, u_{III} die Höhen des Dreiecks $S_I S_{II} S_{III}$; sie schneiden sich also in einem Punkte.

§ 7. Die drei Systeme von conjugirten Punkten auf einer zweitheiligen Focalcurve.

Wenn aus einem Punkte Q einer Curve dritter Ordnung c vier reelle Tangenten an dieselbe gehen, so ist die Curve zweitheilig und der Punkt Q befindet sich auf dem unpaaren Zuge derselben. Die zugehörigen Berührungspunkte P, P', P'', P''' werden als ein Punktquadrupel der c bezeichnet. Nennt man ferner zwei Punkte der c einander con-

conjugirt, wenn sie denselben Tangentialpunkt besitzen, so können die Punkte jenes Quadrupels auf drei verschiedene Arten zu Paaren conjugirter Punkte zusammengefasst werden. Aus jedem solchen Paare erhält man neue Paare derselben Art, indem man das Paar aus beliebigen Punkten der Curve auf dieselbe projicirt. Auf diese Weise entstehen aus den Paaren PP' , PP'' , PP''' drei verschiedene Systeme von conjugirten Punkten. Die Geraden, welche die Paare desselben Systems mit irgend einem Punkte der Curve verbinden, bilden bekanntlich eine Involution.

Ist c eine Focalcurve, so sind die imaginären Kreispunkte I, J ein Paar conjugirte Punkte mit dem Focalcentrum als Tangentialpunkt. Dann werden alle Paare desjenigen der drei Systeme, zu welchem das Paar I, J gehört, aus jedem Curvenpunkte durch eine symmetrische Involution projicirt. Dieses System nimmt also gegenüber den beiden anderen Systemen eine ausgezeichnete Stellung ein; wir bezeichnen es im Folgenden kurz als das symmetrische System von conjugirten Punkten.

Bilden nun wieder die Punkte P, P', P'', P''' ein Quadrupel der Focalcurve c , so geht dieselbe auch durch die Diagonalepunkte Q, Q'', Q''' des vollständigen Vierecks $PP'P''P'''$. Entspricht dem Punkte P in dem symmetrischen System etwa der Punkt P' , so ist $P''P'''$ ein Paar derselben Art, und dann werden alle Paare dieses Systems aus dem Schnittpunkte Q' der Geraden PP' und $P''P'''$ durch eine symmetrische Involution projicirt, welche PP' und $P''P'''$ zu Doppelstrahlen hat; mithin steht PP' senkrecht auf $P''P'''$. Bei jeder Focalcurve bilden demnach die Punkte eines Quadrupels ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten einen rechten Winkel einschliessen. Die beiden Paare des Quadrupels, deren Verbindungslinien auf einander senkrecht stehen, gehören zu dem symmetrischen System conjugirter Punkte. Umgekehrt findet man leicht: Wenn bei einer Focalcurve zwei Paare von conjugirten Punkten des symmetrischen Systems Verbindungslinien haben, die auf einander senkrecht stehen, so bilden die beiden Paare ein Punktquadrupel. Und ferner: Wenn eine circulare Curve dritter Ordnung ein Quadrupel besitzt, von welchem zwei Gegenseiten einen rechten Winkel einschliessen, so ist die Curve im Allgemeinen eine Focalcurve. Ist nämlich PP' senkrecht auf $P''P'''$, so existirt immer eine Focalcurve, aus deren Punkten die Paare PP' und $P''P'''$ durch eine symmetrische Involution projicirt werden, und diese geht auch durch die Diagonalepunkte Q', Q'', Q''' des gegebenen Vierecks. Andererseits ist durch die sieben Punkte $P, P', P'', P''', Q', Q'', Q'''$ eine circulare Curve dritter Ordnung im Allgemeinen eindeutig bestimmt — wenn nicht diese sieben Punkte mit den imaginären Kreispunkten die Grundpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung bilden. Wir kommen auf diesen Ausnahmefall weiter unten wieder zurück.

Eine Focalcurve ist bekanntlich eintheilig oder zweitheilig, je nachdem ihre Grundpunkte imaginär oder reell sind. Wird in Figur 7 eine zweitheilige Focalcurve c gegeben durch das Focalcentrum F und die Grundpunkte G und H , so ist ihre reelle Asymptote u senkrecht auf GH ; dieselbe schneidet c in dem Gegenpunkte S des Punktes F auf dem durch F, G, H gehenden Kreise. Betrachtet man die c als Erzeugniß des Strahlenbüschels F und des ihm projectiven Kreisbüschels GH , so entspricht dem Strahl SG der Kreis des Büschels, dessen Mittelpunkt auf FG liegt, und dieser berührt die c in G ; folglich ist SG die Tangente der Curve in G . Dasselbe gilt vom Punkte H , und da auch die Gerade SF die Curve in F berührt, so bilden die Punkte F, G, H und der reelle unendlich ferne Punkt U ein Quadrupel mit dem Tangentialpunkt S . Nun ist die Gerade GH senkrecht auf FU ; mithin sind GH, FU zwei Paare des symmetrischen Systems conjugirter Punkte, d. h.: Bei jeder zweitheiligen Focalcurve sind die beiden Grundpunkte und ebenso das Focalcentrum und der reelle unendlich ferne Punkt zwei Paare conjugirter Punkte von derselben Art, wie die imaginären Kreispunkte.

Legt man aus einem Punkte einer Curve dritter Ordnung die vier Tangenten an die Curve, so bleibt das Doppelverhältniß derselben bekanntlich constant, wenn der Punkt auf der Curve fortrückt. Im Falle der Focalcurve findet man, wie hier nur beiläufig erwähnt werden soll, für die aus dem Punkte S an die Curve gehenden Tangenten das Doppelverhältniß:

$$S(GHFU) = \frac{\sin GSF}{\sin HSF} : \frac{\sin GSU}{\sin HSU} = \left(\frac{\sin GSF}{\sin HSF} \right)^2 = \left(\frac{FG}{FH} \right)^2.$$

Dieses invariante Doppelverhältniß eines Tangentenquadrupels ist also gleich dem Quadrat des Verhältnisses der Entfernungen des Focalcentrums von den Grundpunkten der Focalcurve.

Aus dem unendlich fernen Punkte U gehen an die Curve c vier Tangenten, deren Berührungspunkte T, T', T'', T''' als die Scheitel der Curve bezeichnet werden.* Nach einem bekannten Satze bilden die drei Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks $TT'T''T'''$ mit dem Punkte U ein neues Quadrupel der c ; dieselben sind folglich identisch mit den Punkten F, G, H . Sind im Scheitelquadrupel die Paare $TT', T''T'''$ von derselben Art wie die imaginären Kreispunkte, ist also TT' senkrecht auf $T''T'''$, so schneiden sich die Geraden $T'T''$ und $T'T'''$, sowie $T'T'''$ und $T'T''$ in zwei conjugirten Punkten derselben Art, d. h. in G und H . Demnach ist F' der Schnittpunkt der Geraden $T'T'$ und $T''T'''$. Dann ergibt sich aber aus der bekannten Erzeugung der Focalcurve, dass die Punkte G und H

* Eckardt a. a. O.

auf einem Kreise liegen, der die Strecke TT' zum Durchmesser hat; mithin ist auch TT'' senkrecht auf $T'T'''$ und $T'T'''$ senkrecht auf $T'T''$. Die vier Scheitel einer Focalcurve bilden also ein Quadrupel von der speciellen Beschaffenheit, dass alle drei Gegenseitenpaare desselben rechte Winkel einschliessen. Die Diagonalpunkte desselben sind das Focalcentrum und die beiden Grundpunkte der Curve. Jeder der vier Scheitel ist demnach gleichweit entfernt von den Seiten des aus dem Focalcentrum und den beiden Grundpunkten gebildeten Dreiecks.

Hieraus folgt, dass die Punkte T, T', T'', T''' auch das Scheitelquadrupel einer zweiten Focalcurve darstellen, die G zum Focalcentrum, H und F zu Grundpunkten hat, sowie das Scheitelquadrupel einer dritten Focalcurve mit dem Focalcentrum H und den Grundpunkten F und G . Die sieben Punkte $F, G, H, T, T', T'', T'''$ bilden demnach mit den imaginären Kreispunkten die Grundpunkte eines Büschels von circularen Curven dritter Ordnung.

In Figur 6 sind c_I, c_{II}, c_{III} die drei Focalcurven, die durch ein vorgeschriebenes Scheitelquadrupel bestimmt werden; dasselbe ist dort mit A, A', B, B' bezeichnet.

Aus den letzten Darlegungen ergeben sich noch die folgenden Sätze: Auf jeder Focalcurve bilden die vier Scheitel das einzige Quadrupel, bei welchem alle drei Gegenseitenpaare rechte Winkel einschliessen. Durch ein Punktquadrupel, bei welchem nur zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, ist eine Focalcurve eindeutig bestimmt. Stehen aber zwei, und folglich auch das dritte Paar von Gegenseiten senkrecht auf einander, so gehören zu diesem Quadrupel drei Focalcurven.

Bei der Focalcurve c , welche F zum Focalcentrum, G und H zu Grundpunkten hat, wird in Figur 7 das symmetrische System conjugirter Punkte dargestellt durch die Paare $GH, FU, TT', T''T'''$; dagegen gehören zu demselben der beiden nicht symmetrischen Systeme die Paare $GU, HF, TT'', T'T'''$. Die Paare des letzten Systems werden aus dem Punkte G durch eine Involution projicirt, deren Doppelstrahlen $GT'T''$ und $GT'T'''$ sind, und da diese auf einander senkrecht stehen, so ist die betrachtete Involution symmetrisch. Das System kann aber aus keinem zweiten Punkte durch eine symmetrische Involution projicirt werden, denn sonst würden die imaginären Kreispunkte ein Paar desselben bilden. — Projicirt man dasselbe System aus H , so ist HG senkrecht auf HU, HT senkrecht auf HT'' , und man erhält demnach eine rechtwinklige Involution. Hieraus folgt der Satz: Die Paare eines jeden der beiden nicht symmetrischen Systeme werden aus einem einzigen Curvenpunkte durch eine symmetrische Involution projicirt, nämlich aus demjenigen der beiden Grundpunkte, der mit dem

reellen unendlich fernen Punkt der Curve ein Paar dieses Systems bildet. Aus dem anderen Grundpunkte wird das betreffende System durch eine rechtwinklige Involution projectirt.

§ 8. Die Focalcurven durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits.

Für jede Focalcurve, welche durch die sechs Eckpunkte des in Figur 5 dargestellten Vierseits geht, bilden die drei Gegeneckenpaare AA' , BB' , CC' drei Paare von conjugirten Punkten derselben Art. Verlangt man nun, dass diese Paare dem symmetrischen System angehören sollen, so giebt es nur eine Focalcurve, welche dieser Forderung genügt, nämlich die Brennpunctscurve c_I des Vierseits, und diese ist durch das bereits gefundene Focalcentrum F_I und die Mittellinie m_I vollkommen bestimmt.

Man kann aber auch nach derjenigen Focalcurve fragen, von welcher AA' , BB' , CC' drei Paare eines nicht symmetrischen Systems sind. Von einer solchen Curve ist nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen der Punkt F_I ein Grundpunct, denn dieser sendet nach den drei Gegeneckenpaaren die Strahlen einer symmetrischen Involution. Als zweiter Grundpunct ergibt sich nach dem angeführten Satze derjenige Punkt der Ebene, welcher dieselben Paare durch eine rechtwinklige Involution projectirt. Beschreibt man daher Kreise über den Durchmesser AA' , BB' , CC' , so schneiden sich dieselben in zwei reellen oder imaginären Punkten G_{II} und G_{III} , und dann sind F_I und G_{II} , sowie F_I und G_{III} bez. die Grundpunkte von zwei Focalcurven c_{II} und c_{III} , die gleichfalls durch die sechs gegebenen Punkte gehen.

Die Mittellinien m_I , m_{II} , m_{III} der Curven c_I , c_{II} , c_{III} schneiden sich in einem Punkte, denn sie sind die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks $F_I G_{II} G_{III}$.

Das Focalcentrum F_{II} der Curve c_{II} liegt auf dem Kreise f . Bezeichnet man mit F_0 einen beliebigen Punkt von f , mit U_I und U_{II} die unendlich fernen Punkte der Geraden m_I und m_{II} , so ist nach § 2: $\angle F_I F_0 F_{II} = \angle U_{II} F_0 U_I = \angle F_I G_{II} G_{III}$. Fällt man also von dem zweiten Schnittpunkte des Kreises f und der Geraden $F_I G_{II}$ ein Loth auf m_I , so trifft dasselbe f in F_{II} . — In derselben Weise ergibt sich das Focalcentrum F_{III} der c_{III} .

Die Aufgabe, durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits eine Focalcurve zu legen, besitzt hiernach drei Lösungen, von denen aber nur eine nothwendig reell ist. Die stets reelle Curve c_I kann reelle oder imaginäre Grundpunkte haben, d. h. zweitheilig oder eintheilig sein. Die beiden anderen Curven c_{II} und c_{III} sind, wenn überhaupt reell, stets zweitheilig.

XIX.

Zur homocentrischen Brechung des Lichtes im Prisma.

Von

Dr. WILSING

in Potsdam

In der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895, Heft 2, hat Herr Prof. Burmester einen interessanten Aufsatz über „Homocentrische Brechung des Lichtes durch das Prisma“ veröffentlicht, in welchem derselbe darauf hinweist, dass das Ergebniss der Helmholtz'schen Untersuchungen über diesen Gegenstand, welches sich bei endlicher Entfernung des leuchtenden Punktes nur auf den besonderen Fall bezieht, dass die Strahlenlänge im Prisma verschwindet, also der Strahl durch die brechende Kante des Prismas geht, zuweilen einer missverständlichen Auffassung begegnet. Diese Begrenzung der Aufgabe durch Vernachlässigung der Strahlenlänge im Prisma, deren Bedeutung dadurch charakterisirt wird, „dass die beiden Strahlen auf ihrem unendlich kurzen Wege durch das Prisma als merklich parallel angesehen werden können, was selbstverständlich der Fall sein muss, wenn ihre Convergenzpunkte im Vergleich zu ihrem Wege im Prisma unendlich weit entfernt sind“ (v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. 2 S. 167), tritt in der Fassung, welche Helmholtz dem Resultat seiner Untersuchung giebt, nicht unmittelbar hervor. „Ein unendlich dünnes Bündel homocentrischer Strahlen, welches von einem endlich entfernten Punkte ausgeht, bleibt nach dem Durchtritt durch ein Prisma also nur dann homocentrisch, wenn es im Minimum der Ablenkung durchgetreten ist, das heisst, wenn es in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene verläuft, und gegen beide Prismenflächen unter gleichen Winkeln geneigt ist.“ Wenn hiernach eine irrthümliche Auffassung der Ergebnisse der Helmholtz'schen Abhandlung, wenigstens bei oberflächlicher Durchsicht, nicht ausgeschlossen erscheint, so ist doch die weitere Bemerkung des Herrn Prof. Burmester, dass die Vereinigung der austretenden Strahlen nur in dem besonderen Falle erkannt sei, wo die Strahlen im Minimum der Ablenkung dicht an der brechenden Kante durch das Prisma gehen, insofern nicht ganz zutreffend, als die exacten Gleich-

ungen, welche die astigmatische Differenz der Strahlen des Sagittal- und Tangentialschnittes bestimmen, wenigstens für solche Strahlenbündel, die im Hauptschnitt liegen, bereits in den Arbeiten von S. Czapski (Winkelmann, Handbuch der Physik S. 159) und A. Gleichen (Ueber die Brechung des Lichtes in Prismen, Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 34 S. 169) abgeleitet sind, ohne dass sich allerdings die von Herrn Prof. Burmester auf geometrischem Wege gefundenen Sätze ausdrücklich angegeben finden. Bezeichnet man nämlich mit Herrn Czapski die Strecke vom leuchtenden Punkt bis zur Vorderfläche des Prismas mit a , mit s' und t' die Entfernungen der Vereinigungsweiten von Sagittal- und Tangentialstrahlen, von der Rückfläche des Prismas gemessen, mit d die Länge des Hauptstrahls im Prisma, endlich mit n , i , r , i' , r' Brechungsexponent, Einfallswinkel und Brechungswinkel des Hauptstrahles an den beiden Flächen des Prismas, so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$1) \quad \begin{cases} s' = a - \frac{d}{n} \\ t' = \frac{\cos i'^2}{\cos r'^2} \left(\frac{\cos r^2}{\cos i^2} a - \frac{d}{n} \right). \end{cases}$$

Bei homocentrischem Durchgange des Strahlenbündels wird $s' = t' = b$, so dass in diesem Falle die Entfernungen a und b der Strahlenlänge im Prisma direct proportional sind. Hieraus ergeben sich sofort die von Herrn Prof. Burmester a. a. O. abgeleiteten Sätze, dass auf jedem in einer Normalenebene einfallenden Hauptstrahl im Allgemeinen nur ein einziger Lichtpunkt existirt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, dass die betreffenden auf parallelen Hauptstrahlen befindlichen Licht- resp. Bildpunkte in geraden Linien liegen, welche durch die Kante des Prismas gehen, und dass Lichtpunkten, welche auf einer parallelen Linie zu der erwähnten geraden Linie liegen, gleiche astigmatische Differenzen entsprechen. Geht der Strahl aber im Minimum der Ablenkung durch das Prisma, sind also $i = i'$, $r = r'$ zu setzen, so existiren nur in dem von Helmholtz behandelten Falle, wo der Strahl die Kante des Prismas trifft, also $d = 0$ ist, endliche und gleiche Werthe für a und b , so dass dann jedem Punkt des Strahles ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. Die entsprechenden Sätze für den Durchgang des Hauptstrahles im Normalschnitt durch eine Reihe von Prismen, deren brechende Kanten parallel sind, ergeben sich gleichfalls aus den von Herrn Czapski mitgetheilten Gleichungen (a. a. O. S. 158). Bisher nicht behandelt ist jedoch der von Herrn Prof. Burmester mit Hilfe geometrischer Betrachtungen abgeleitete Fall homocentrischer Brechung, bei welchem die Strahlen das Prisma schief durchsetzen. In den folgenden Ausführungen ist nun kurz angedeutet, wie sich diese Sätze aus den Helmholtz'schen Gleichungen auf analytischem Wege ergeben. Helmholtz hat seinen Untersuchungen das Princip der optischen Länge zu Grunde

gelegt, das besonders für die Behandlung des letzterwähnten Falles, bei welchem die Strahlen schief durch das Prisma gehen, geeignet ist. Werden die Weglängen des Strahles im ersten, zweiten Mittel u. s. w. mit $r_1 r_2$ etc. bezeichnet, die entsprechenden Brechungs-Coefficienten mit $n_1 n_2$, so ist die optische Länge \mathcal{P} : $\mathcal{P} = n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3$ etc.

Der Weg des Strahles wird dadurch bestimmt, dass die optische Länge zwischen einem ihm angehörigen Punkte im ersten und letzten Mittel ein Maximum oder Minimum sein muss, während die Homocentricität eines unendlich dünnen Strahlenbündels verlangt, dass auch die zweite Variation der optischen Länge zwischen Licht und Bildpunkt verschwindet. Der brechende Winkel des Prismas möge φ sein, r_0 die Länge des Strahles vor dem Prisma, r_1 und r_2 die Längen im Prisma und hinter dem Prisma bis zum Bildpunkte. Ferner sollen die Grössen m, μ, ν durch die Beziehungen definirt werden:

$$\cos m_1 = n \cos m, \quad \cos \mu_1 = n \cos \mu, \quad \cos \nu_1 = n \cos \nu,$$

wo m_1 und ν_1 die Winkel sind, welche der einfallende Strahl mit der in der ersten brechenden Fläche, senkrecht auf der brechenden Kante des Prismas stehenden Y -Achse resp. mit der brechenden Kante selbst oder der Z -Achse einschliesst, und wo μ_1 dieselbe Bedeutung für den austretenden Strahl hat, wie m_1 für den einfallenden. Endlich sollen die Coordinaten des Einfalls- resp. Austrittspunktes des Hauptstrahles mit y und z resp. v und ξ bezeichnet werden, die Coordinaten eines beliebigen Strahles des unendlich dünnen Bündels entsprechend mit

$$y + \Delta y, \quad z + \Delta z, \quad v + \Delta v, \quad \xi + \Delta \xi.$$

Die Helmholtz'schen Gleichungen, welche für beliebige Werthe Δy und Δz erfüllt sein müssen, sind dann die folgenden:

$$2) \left\{ \begin{array}{l} [\sin m^2 \Delta y - \cos m \cos \nu \Delta z - (\cos \varphi + \cos m \cos \mu) \Delta v + \cos m \cos \nu \Delta \xi] r_0 \\ \quad + \frac{1}{n} [(1 - n^2 \cos m^2) \Delta y - n^2 \cos m \cos \nu \Delta z] r_1 = 0, \\ [-\cos m \cos \nu \Delta y + \sin \nu^2 \Delta z - \cos \mu \cos \nu \Delta v - \sin \nu^2 \Delta \xi] r_0 \\ \quad + \frac{1}{n} [-n^2 \cos m \cos \nu \Delta y + (1 - n^2 \cos \nu^2) \Delta z] r_1 = 0, \\ [- (\cos \varphi + \cos m \cos \mu) \Delta y - y \cos \mu \cos \nu \Delta z + \sin \mu^2 \Delta v + \cos \mu \cos \nu \Delta \xi] r_2 \\ \quad + \frac{1}{n} [(1 - n^2 \cos \mu^2) \Delta v + n^2 \cos \mu \cos \nu \Delta \xi] r_1 = 0, \\ [\cos m \cos \nu \Delta y - \sin \nu^2 \Delta z + \cos \mu \cos \nu \Delta v + \sin \nu^2 \Delta \xi] r_2 \\ \quad + \frac{1}{n} [n^2 \cos \mu \cos \nu \Delta v + (1 - n^2 \cos \nu^2) \Delta \xi] r_1 = 0. \end{array} \right.$$

Setzt man $r_1 = 0$, so reducirt sich das vorstehende System, da die zweite und vierte Gleichung identisch werden, auf nur drei Gleichungen.

Haben die Quotienten $\frac{r_1}{r_0}$ und $\frac{r_2}{r_0}$ dagegen endliche Werthe, was stets der

Fall ist, wenn der Strahl bei endlicher Entfernung des leuchtenden Punktes nicht zugleich durch die Kante des Prismas geht, so muss man von den vollständigen Gleichungen 2) ausgehen. Aus den beiden ersten dieser Gleichungen erhält man Δv und $\Delta \zeta$ ausgedrückt durch Δy und Δz :

$$r_0 [\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu] \Delta v = \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \sin v^2 - (r_0 + n r_1) \cos m^2 \right] \Delta y \\ + r_1 \left(\frac{1}{n} - n \right) \cos m \cos v \Delta z.$$

$$r_0 [\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu] \Delta \zeta = - \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \cos \mu + (r_0 + n r_1) \cos m \cos \varphi \right] \cos v \Delta y \\ + \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) (\cos m \cos \mu + \cos \varphi) - (r_0 + n r_1) \cos \varphi \cos v^2 \right] \Delta z.$$

Substituirt man die Werthe von Δv und $\Delta \zeta$ in die beiden letzten Gleichungen 2), so müssen die Coefficienten von Δy und Δz verschwinden, da die Gleichungen 2) für beliebige Werthe der Δy und Δz erfüllt sein sollen. Die Entfernungen r_0 , r_1 und r_2 müssen also, wenn das Strahlenbündel homocentrisch bleiben soll, den folgenden vier homogenen Gleichungen zweiten Grades genügen:

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 0 = - (\cos \varphi + \cos m \cos \mu) [\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu] r_0 r_2 \\ \quad + \left[\sin \mu^2 r_2 + \frac{1}{n} (1 - n^2 \cos \mu^2) r_1 \right] \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \sin v^2 - (r_0 + n r_1) \cos m^2 \right] \\ \quad - (r_2 + n r_1) \cos \mu \cos v^2 \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \cos \mu + (r_0 + n r_1) \cos m \cos \varphi \right], \end{array} \right. \\ \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 0 = \cos m \cos v [\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu] r_0 r_2 \\ \quad + (r_2 + n r_1) \cos \mu \cos v \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \sin v^2 - (r_0 + n r_1) \cos m^2 \right] \\ \quad - \cos v \left[\sin v^2 r_2 + \frac{1}{n} (1 - n^2 \cos v^2) r_1 \right] \\ \quad \quad \times \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \cos \mu + (r_0 + n r_1) \cos m \cos \varphi \right], \end{array} \right. \\ \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} 0 = - \cos \mu \cos v [\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu] r_0 r_2 \\ \quad + r_1 \left(\frac{1}{n} - n \right) \cos m \cos v \left[\sin \mu^2 r_2 + \frac{1}{n} (1 - n^2 \cos \mu^2) r_1 \right] \\ \quad + (r_2 + n r_1) \cos \mu \cos v \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) \right. \\ \quad \quad \left. - r_1 \left(n - \frac{1}{n} \right) \cos \varphi \cos v^2 \right], \end{array} \right. \\ \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 0 = - \sin v^2 [\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu] r_0 r_2 \\ \quad + (r_2 + n r_1) r_1 \left(\frac{1}{n} - n \right) \cos m \cos \mu \cos v^2 \\ \quad + \left[\sin v^2 r_2 + \frac{1}{n} (1 - n^2 \cos v^2) r_1 \right] \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) \right. \\ \quad \quad \left. - r_1 \left(n - \frac{1}{n} \right) \cos \varphi \cos v^2 \right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Liegt der Hauptstrahl im Normalschnitt des Prismas, ist also

$$\cos \nu_1 = \cos \nu = 0,$$

so verschwindet die zweite und dritte der vorstehenden Gleichungen, während die erste und vierte in die folgenden übergehen:

$$0 = - [\cos \varphi + \cos m \cos \mu]^2 r_0 r_2 + \left[\sin \mu^2 r_2 + \frac{1}{n} (1 - n^2 \cos \mu^2) r_1 \right] \\ \times \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) - (r_0 + n r_1) \cos m^2 \right], \\ 0 = [\cos \varphi + \cos m \cos \mu] \left[-r_0 r_2 + \left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \left(r_2 + \frac{r_1}{n} \right) \right].$$

Beachtet man, dass zwischen den Grössen m, μ, ν die Gleichung besteht:

$$\sin \varphi^2 \sin \nu^2 = \cos m^2 + 2 \cos m \cos \mu \cos \varphi + \cos \mu^2,$$

so ergibt sich, dass

$$\cos \varphi + \cos m \cos \mu = \pm \sin m \sin \mu$$

nur mit m oder μ verschwindet. Aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen folgt daher:

$$r_1 [n(r_0 + r_2) + r_1] = 0,$$

während sich die erste Gleichung, wenn man

substituirt, in

$$(\cos \varphi + \cos m \cos \mu)^2 = \sin m^2 \sin \mu^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 \left[\frac{n \sin m^2}{1 - n^2 \cos m^2} r_0 + \frac{n \sin \mu^2}{1 - n^2 \cos \mu^2} r_2 + r_1 \right] \\ = r_1 \left[\frac{n \cos r^2}{\cos i^2} r_0 + \frac{n \cos r'^2}{\cos i'^2} r_2 + r_1 \right] = 0 \end{array} \right.$$

verwandelt, da

$$n \cos m = \sin i, \quad \sin m = \cos r, \\ n \cos \mu = \sin i', \quad \sin \mu = \cos r'$$

ist. Diese Gleichungen werden identisch mit den Gleichungen 1), wenn $r_0 = -a, r_1 = d, r_2 = +b$ gesetzt wird.

Der allgemeinere von Herrn Prof. Burmester behandelte Fall homocentrischer Brechung, bei welchem der einfallende Hauptstrahl gegen den Normalschnitt des Prismas geneigt ist, also $\cos \nu$ und $\cos \nu_1$ von Null verschieden sind, ergibt sich auf folgende Weise. Multiplicirt man die Gleichungen 3a) und 3b) mit $\cos \nu$ resp. $\cos \mu$, ebenso die Gleichungen 3c) und 3d), und addirt beide Male, so erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \left\{ -\cos \varphi (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) r_0 r_2 \right. \\ \quad \left. + \left(r_2 + \frac{r_1}{n} \right) \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \cos \varphi (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) \right. \right. \\ \quad \left. \left. + r_1 \left(\frac{1}{n} - n \right) \cos m (\cos m + \cos \mu \cos \varphi) \right] \right\} \cos v, \\ 0 = -\cos \mu (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) r_0 r_2 \\ \quad + \left(r_2 + \frac{r_1}{n} \right) \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n} \right) \cos \mu (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) \right. \\ \quad \left. + r_1 \left(\frac{1}{n} - n \right) \cos v^2 (\cos m + \cos \mu \cos \varphi) \right]. \end{array} \right.$$

Multiplicirt man ferner die erste dieser Gleichungen mit $\cos \mu$, die zweite mit $\cos \varphi \cos v$ und subtrahirt, so kommt:

$$r_1 \left(r_2 + \frac{r_1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - n \right) \cos v (\cos m + \cos \mu \cos \varphi) (\cos m \cos \mu - \cos v^2 \cos \varphi) = 0.$$

Andererseits erhält man aus den Gleichungen 4) durch Multiplication mit $\cos v$ resp. $\cos m$ und Subtraction:

$$\frac{r_1}{n} \left(r_0 + r_2 + \frac{r_1}{n} \right) (\cos \varphi \sin v^2 + \cos m \cos \mu) (\cos m \cos \mu - \cos v^2 \cos \varphi) = 0.$$

Beiden Gleichungen ist also genügt, sobald der ihnen gemeinsame Factor:

$$5) \quad \cos \varphi \cos v^2 - \cos m \cos \mu = 0$$

ist. Aus dieser Bedingung, welcher die Winkel m , μ , v genügen müssen, lassen sich in Verbindung mit der Gleichung:

$$6) \quad \sin \varphi^2 \sin v^2 = \cos m^2 + 2 \cos m \cos \mu \cos \varphi + \cos \mu^2$$

für jedes m entsprechende Werthe v finden, und zwar ergibt sich für $\cos v^2$ eine quadratische Gleichung. Zu jedem m gehören zwei symmetrisch zum Hauptschnitt liegende Strahlen, deren Winkel mit der brechenden Kante durch v und $180 - v$ bestimmt werden. Genügen m und v den vorstehenden Gleichungen, so können aus den beiden Gleichungen 3a) und 3c) die Quotienten $\frac{r_0}{r_1}$ und $\frac{r_2}{r_1}$ berechnet werden, und zwar ergibt sich, da diese Gleichungen linear werden, für jedes r_1 nur ein Paar zusammengehöriger Werthe r_0 und r_2 . Auf jedem Strahl, der einer Mantellinie des durch die Gleichungen 5) und 6) definirten Kegelmantels parallel ist, existirt also ein Punkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. Dies ist der von Herrn Prof. Burmester mit Hilfe geometrischer Betrachtungen gefundene Satz.

Bei dieser Gelegenheit möge noch darauf hingewiesen werden, dass die Methode, das Bild einer ebenen Figur mit Hilfe eines Prismas in seiner Ebene zu drehen, bei endlicher Objectentfernung in optischer Beziehung

gleichfalls an dem Uebelstande leidet, dass die Strahlen nach ihrem Durchgang durch das Prisma nicht mehr homocentrisch bleiben. Für den Normalchnitt lässt sich dies bereits aus den oben angeführten Gleichungen 1) ersehen. Der Gang eines vom leuchtenden Punkt P ausgehenden Strahles, der an der Grundfläche des Prismas reflectirt wird, bevor er die Rückfläche trifft, sei wieder durch die Bedingung bestimmt, dass die erste Variation der optischen Länge:

$$\Psi = r_0 + n(r_1 + r_2) + r_3$$

verschwinden muss. Die Schnittpunkte des Strahles mit den Flächen des Prismas mögen auf drei Coordinatensysteme bezogen werden, deren X -Achsen mit den Seiten des Querschnitts des rechtwinklig angenommenen Prismas zusammenfallen, deren Y -Achsen den Kanten parallel sind, und deren positive Z -Achsen nach aussen gerichtet sind. Die Coordinaten in diesen Systemen mögen mit $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ bezeichnet werden, $a_0 b_0 c_0$ die Coordinaten des leuchtenden Punktes, $a_2 b_2 c_2$ die Coordinaten eines im austretenden Strahle gelegenen Punktes sein. Dann hat man:

$$r_0^2 = (x_0 - a_0)^2 + (y_0 - b_0)^2 + c_0^2,$$

$$r_1^2 = (x_1' - x_1)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_1'^2,$$

$$r_2^2 = (x_2' - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z_2'^2,$$

$$r_3^2 = (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 + c_2^2,$$

wenn

$$x_1' = L - \frac{x_0}{\sqrt{2}}, \quad z_1' = \frac{x_0}{\sqrt{2}}, \quad x_2' = \frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \quad z_2' = \frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

und L die Länge der Hypotenuse des Prismenquerschnittes ist. Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} = \frac{x_0 - a_0}{r_0} - \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{L - \frac{x_0}{\sqrt{2}} - x_1}{r_1} + \frac{n}{2} \frac{x_0}{r_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -n \frac{L - \frac{x_0}{\sqrt{2}} - x_1}{r_1} - n \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} - x_1}{r_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -\frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} - x_1}{r_2} - \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{r_2} + \frac{x_2 - a_2}{r_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_0} = \frac{y_0 - b_0}{r_0} - n \frac{y_1 - y_0}{r_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = n \frac{y_1 - y_0}{r_1} - n \frac{y_2 - y_1}{r_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = n \frac{y_2 - y_1}{r_2} + \frac{y_2 - b_2}{r_3} = 0$$

ergibt sich durch Elimination:

$$\frac{x_0 - a_0}{r_0} + \frac{n}{2} \frac{x_0}{r_1} = \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{r_2} - \frac{x_2 - a_2}{r_3}$$

$$\frac{y_0 - b_0}{r_0} + \frac{y_2 - b_2}{r_3} = 0, \quad \text{oder da: } \frac{x_0}{\sqrt{2} r_1} = \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{r_2} = \sin p,$$

wenn p den Einfallswinkel an der Grundfläche bedeutet, und da ferner:

$$\cos(r_0 x_0) = \frac{x_0 - a_0}{r_0}, \quad \cos(r_3 x_2) = \frac{x_2 - a_2}{r_3},$$

$$\cos(r_0 y_0) = \frac{y_0 - b_0}{r_0}, \quad \cos(r_3 y_0) = \frac{y_2 - b_2}{r_3},$$

$$\cos(r_0 z_0) = \frac{c_0}{r_0}, \quad \cos(r_3 z_2) = \frac{c_2}{r_2} \text{ ist,}$$

$$\cos(r_0 x_0) = -\cos(r_3 x_2), \quad \cos(r_0 y_0) = -\cos(r_2 y_2), \quad \cos(r_0 z_0) = \cos(r_3 z_2).$$

Die Winkel (lr_0) und (lr_3) , welche der einfallende und austretende Strahl mit einer im Normalschnitt parallel der Grundfläche gezogenen Linie l bildet, werden nun bestimmt durch:

$$\cos(lr_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(r_0 x_0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(r_0 z_0),$$

$$\cos(lr_3) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(r_3 x_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(r_3 z_2),$$

so dass mit Rücksicht auf die vorstehenden Bedingungsgleichungen:

$$\cos(lr_0) = \cos(lr_3)$$

wird. Bei einer Drehung des Prismas um l als Achse bleibt also der Winkel zwischen austretendem Strahl und Achse constant.

Die Bedingungen für die Homocentricität der Strahlenbündel ergibt sich durch Variation der optischen Länge:

$$\mathcal{W} = r_0 + n(r_1 + r_2) + r_3.$$

Werden die x und y Coordinaten der Schnittpunkte eines im Normalschnitt liegenden Hauptstrahles mit den Seitenflächen des Prismas mit:

$$x_0 = \beta_0, \quad x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2, \quad y_0 = y_1 = y_2 = 0$$

bezeichnet, und entsprechend die Coordinaten der Schnittpunkte eines beliebigen Strahles des unendlich dünnen Bündels mit:

$$x_0 = \beta_0 + \xi_0, \quad x_1 = \beta_1 + \xi_1, \quad x_2 = \beta_2 + \xi_2,$$

$$y_0 = \eta_0, \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2,$$

endlich die Entfernungen $r_0 r_1 r_2 r_3$ für den Hauptstrahl mit $\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$, so ergeben sich zunächst als Bedingungsgleichungen für die Homocentricität des Bündels:

$$\frac{\eta_0}{\varrho_0} - n \frac{\eta_1 - \eta_0}{\varrho_1} = 0, \quad n \frac{\eta_1 - \eta_0}{\varrho_1} - n \frac{\eta_2 - \eta_1}{\varrho_2} = 0,$$

$$n \frac{\eta_2 - \eta_1}{\varrho_2} + \frac{\eta_2}{\varrho_3} = 0,$$

welchen nur genügt wird, wenn zwischen den Entfernungen ϱ die Bedingung besteht:

$$7) \quad n \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + n \varrho_3 = 0.$$

Ferner müssen für beliebige Werthe von ξ_0 noch die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 = 0, \quad b_0 \xi_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 = 0,$$

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = 0,$$

wo die Grössen a und b sind:

$$a_0 = \frac{1}{\varrho_0} \cos i^2 + \frac{n}{\varrho_1} - \frac{\sin i^2}{n \varrho_1}, \quad a_1 = \frac{n}{\sqrt{2} \varrho_1} - \frac{\sin p \sin i}{\varrho_1},$$

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \varrho_1} - \frac{\sin p \sin i}{n \varrho_1}, \quad b_1 = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{\sin p^2}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} - \frac{\sin p^2}{\varrho_2},$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2} \varrho_2} - \frac{\sin p \sin i}{n \varrho_2},$$

$$c_1 = \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{1}{\varrho_2} - \frac{\sin p \sin i}{\varrho_2}, \quad c_2 = \frac{n}{\varrho_2} - \frac{\sin i^2}{n \varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} - \frac{\sin i^2}{\varrho_3},$$

und i und p die Einfallswinkel des Hauptstrahles an der ersten und zweiten Fläche des Prismas sind. Diese Gleichungen führen zu der Bedingung:

$$\left\{ \begin{aligned} & \{n^2 \varrho_0 - \sin i^2 (\varrho_0 + n \varrho_1) + n \varrho_1\} \{ \varrho_1 - \sin p^2 (\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_2 \} \{ n \varrho_2 - \sin i^2 (n \varrho_2 + \varrho_3) + n^2 \varrho_3 \} \\ & - \left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} - \sin p \sin i \right\}^2 \{ \varrho_1 \varrho_3 [n^2 \varrho_0 - \sin i^2 (\varrho_0 + n \varrho_1) + n \varrho_1] \\ & + \varrho_0 \varrho_2 [n \varrho_2 - \sin i^2 (n \varrho_2 + \varrho_3) + n^2 \varrho_3] \} = 0, \end{aligned} \right.$$

welche in:

$$n \cos i^2 \varrho_1 \varrho_2 \{ (\varrho_1 + \varrho_2) n \cos p^2 \cos i^2 + (\varrho_0 + \varrho_3) \cos p^2 (n^2 - \sin i^2) \} = 0,$$

oder, wenn der Brechungswinkel r eingeführt wird in:

$$8) \quad \cos i^2 (n^2 - \sin i^2) \cos p^2 \varrho_1 \varrho_2 \left\{ n \varrho_0 + \frac{\cos i^2}{\cos r^2} (\varrho_1 + \varrho_2) + n \varrho_3 \right\} = 0$$

übergeht.

Die beiden Gleichungen 7) und 8) können aber bei endlicher Entfernung von Bild und Object nur dann neben einander bestehen, wenn der Einfallswinkel i gleich dem Brechungswinkel r ist, also bei senkrechter Incidenz des Bündels. In diesem Falle, in welchem überhaupt keine Brechung stattfindet, entspricht jedem Punkte des einfallenden Strahles ein homocentrischer Bildpunkt.

XX.

Ueber eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten.

Von

Dr. H. THIEME

in Posen.

I.

Sind in einer Ebene zwei Punkte P_1 und P_2 und eine gerade Linie L gegeben, so giebt es bekanntlich auf L drei Punkte, deren Verbindungslinien mit P_1 und P_2 gegen L gleich geneigt sind. Es sind dies der unendlich ferne Punkt P_∞ von L , der Schnittpunkt P von L mit der Geraden P_1P_2 und ein ebenso bekannter Punkt Q ; sind P_1Q_1 und P_2Q_2 die Lothe von P_1 und P_2 auf L , so theilt dieser Punkt Q die Strecke Q_1Q_2 im Verhältniss $P_1Q_1 : P_2Q_2$. P und Q bilden mit Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte.

Sucht man alle Punkte der Ebene, welche mit P_1 und P_2 Verbindungslinien liefern, die gegen L gleich geneigt sind, so erhält man als geometrischen Ort die unendlich ferne Gerade der Ebene, die Gerade P_1P_2 und eine gleichseitige Hyperbel. Das letztere ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Hat man in der Ebene einen beliebigen Punkt X von der verlangten Eigenschaft, so erhält man ersichtlich einen weiteren derartigen Punkt, wenn man an P_1X und P_2X auf entgegengesetzten Seiten dieser Strahlen gleiche Winkel anträgt. Der gesuchte Ort ist mithin das Erzeugniss zweier gleichen Strahlenbüschel von entgegengesetztem Drehungssinn. Das Erzeugniss zweier solcher Büschel ist aber eine gleichseitige Hyperbel.* Diese Hyperbel geht durch P_1 und P_2 , ihr Mittelpunkt ist P_0 , die Mitte von P_1P_2 , die eine Asymptote ist die Parallele zu L durch P_0 , die andere das Loth von P_0 auf L . Also:

Der Ort der Punkte, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten P_1 und P_2 gegen eine gegebene Gerade L gleich geneigt sind, ist eine gleichseitige Hyperbel.

* Steiner-Schroeter, Kegelschnitte, 2. Aufl., S. 112.

In den besonderen Fällen, wo L auf P_1P_2 senkrecht steht oder zu P_1P_2 parallel ist, zerfällt die gleichseitige Hyperbel in die Gerade P_1P_2 und die Mittelsenkrechte von P_1P_2 .

II.

Sind im Raume zwei Punkte P_1 und P_2 und eine beliebige Ebene E gegeben, so kann man ebenso nach der Fläche fragen, deren Punkte mit P_1 und P_2 Verbindungslinien liefern, die gegen E gleich geneigt sind.

Die Bestimmung der Ordnung der Fläche bietet keine Schwierigkeit.

Sind P_1Q_1 und P_2Q_2 die Lothe von P_1 und P_2 auf E , und ist X ein beliebiger Punkt des gesuchten Ortes, so bilden P_1X und P_2X nicht nur mit E , sondern auch mit P_1Q_1 und P_2Q_2 gleiche Winkel. Die Gesamtheit der Geraden durch P_1 , die gegen E unter einem bestimmten Winkel geneigt sind, bildet einen Rotationskegel mit der Achse P_1Q_1 , ebenso die Gesamtheit der Geraden durch P_2 , die gegen E unter demselben Winkel geneigt sind, einen Rotationskegel mit der Achse P_2Q_2 . Ertheilt man dem Winkel alle Werthe von 0° bis 90° , so erhält man in P_1 und P_2 zwei projective Büschel von congruenten und parallelen Rotationskegeln. Der gesuchte Ort ist das Erzeugniss dieser beiden Büschel.

Eine beliebige Gerade g wird von jedem dieser beiden Büschel in einer Involution geschnitten. Zwei derartige Involutionen haben, wie man bekanntlich mit Hilfe eines beliebigen mit g derselben Ebene angehörigen Kegelschnitts beweist, vier gemeinsame Punkte. Einer der gemeinsamen Punkte ist der unendlich ferne Punkt von g , da die Parallelen zu g von P_1 und P_2 aus gegen P_1Q_1 und P_2Q_2 gleich geneigt sind, also einem Paar entsprechender Kegel angehören. Der gesuchte Ort besteht also aus der unendlich fernen Ebene und einer Fläche dritter Ordnung. Lassen wir die unendlich ferne Ebene als Theil des Ortes unberücksichtigt, so haben wir das Resultat:

Der Ort der Punkte des Raumes, deren Verbindungslinien mit zwei Punkten P_1 und P_2 gegen eine Ebene E gleich geneigt sind, ist eine Fläche dritter Ordnung F^3 .

Dieser Fläche F^3 gehört ersichtlich die Gerade P_1P_2 an, dann aber auch g_∞ , die unendlich ferne Gerade von E . Als entsprechende Kegel der beiden Büschel sind nämlich auch die doppelt zu zählenden Ebenen anzusehen, die durch P_1 und P_2 gehen und zu E parallel sind; ihr Schnitt, nämlich die Gerade g_∞ , gehört also dem ganzen aus F^3 und der unendlich fernen Ebene bestehenden Orte doppelt an, jedem Theile des Ortes einfach.

III.

In einfacher Weise lassen sich die Schnitte von F^3 mit Ebenen bestimmen, welche durch die Gerade P_1P_2 oder g_∞ gehen.

Betrachten wir zunächst die Ebene $P_1Q_1P_2Q_2$, so müssen die Geraden dieser Ebene, welche gegen E gleich geneigt sind, auch gegen die Ge-

rade $Q_1 Q_2$ gleich geneigt sein. Die Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ schneidet also nach I den Ort F^3 (ausser in der Geraden $P_1 P_2$) in einer gleichseitigen Hyperbel, die durch P_1 und P_2 geht und ihren Mittelpunkt in P_0 , der Mitte von $P_1 P_2$, hat, während ihre Asymptoten die Parallele und die Senkrechte durch P_0 zu $Q_1 Q_2$ sind.

Aehnlich gestaltet sich die Untersuchung für eine beliebige andere durch $P_1 P_2$ gehende Ebene G .

Fällt man nämlich auf die Schnittlinie dieser Ebene G und der Ebene E von Q_1 und Q_2 die Lothe $Q_1 S_1$ und $Q_2 S_2$, und ist X ein Punkt auf $S_1 S_2$, welcher dem Ort F^3 angehört, so ist

$$\frac{P_1 X}{P_2 X} = \frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2},$$

weil $\sphericalangle P_1 X Q_1 = P_2 X Q_2$ ist, und

$$\frac{P_1 S_1}{P_2 S_2} = \frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2},$$

weil $\sphericalangle P_1 S_1 Q_1 = P_2 S_2 Q_2$ ist; also ist

$$\frac{P_1 X}{P_2 X} = \frac{P_1 S_1}{P_2 S_2}$$

und, da noch $\sphericalangle P_1 S_1 X = P_2 S_2 X = 90^\circ$ ist, $\Delta P_1 S_1 X \sim \Delta P_2 S_2 X$, mithin sind $P_1 X$ und $P_2 X$ gegen $S_1 S_2$ gleich geneigt.

Ist X ein Punkt des Schnittes von F^3 und G , der nicht auf $S_1 S_2$ liegt, so kann man durch X zu E eine parallele Ebene E' legen, und es würde sich in derselben Weise wie soeben zeigen lassen, dass $P_1 X$ und $P_2 X$ gegen die Schnittlinie der Ebene E' und der Ebene G gleich geneigt sind. Da diese Schnittlinie aber zu $S_1 S_2$ parallel ist, so sind $P_1 X$ und $P_2 X$ auch gegen $S_1 S_2$ gleich geneigt. Die Punkte der Ebene G , welche der Fläche F^3 angehören, bilden mithin nach I wieder eine gleichseitige Hyperbel. Die Asymptoten sind hier die Parallele und die Senkrechte von P_0 zu $S_1 S_2$. Also:

Eine beliebige Ebene durch $P_1 P_2$ schneidet F^3 ausser in der Geraden $P_1 P_2$ in einer gleichseitigen Hyperbel.

In dem besonderen Falle, wo die Ebene G auf der Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ senkrecht steht, wo also auch die Schnittlinie von G und E auf $P_1 P_2$ senkrecht steht, zerfällt die gleichseitige Hyperbel in die Gerade $P_1 P_2$ und die Gerade h , die in P_0 auf $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ senkrecht steht; h ist parallel zu E und steht natürlich auch auf $P_1 P_2$ senkrecht.

Die Fläche F^3 enthält drei reelle gerade Linien, die Verbindungslinie von P_1 und P_2 , die unendlich ferne Gerade g_∞ von E und die Gerade h , welche auf $P_1 P_2$ in P_0 senkrecht steht und zu E parallel ist.

Da in dem Schnitt, in welchem F^3 von der durch P_1P_2 und h gehenden Ebene getroffen wird, P_1P_2 doppelt zu rechnen ist, so wird F^3 von dieser Ebene längs P_1P_2 in einer Geraden berührt.

IV.

Aus der angegebenen Construction der Asymptoten der in III behandelten gleichseitigen Hyperbeln erkennen wir zugleich den Charakter des Schnitts von F^3 mit der unendlich fernen Ebene.

Die eine der Asymptoten erhielten wir, wenn wir durch P_0 , die Mitte von P_1P_2 zu S_1S_2 , die Parallele zogen; der unendlich ferne Punkt dieser Parallelen ist Punkt der Hyperbel. Die unendlich fernen Punkte aller dieser Parallelen bilden die unendlich ferne Gerade g_∞ von E , von der wir schon in II erkannt hatten, dass sie F^3 angehört.

Die zweite Asymptote erhielten wir, wenn wir von P_0 auf S_1S_2 das Loth fällten. Beschreibt die in III betrachtete Ebene G das Büschel P_1P_2 , so beschreibt die Gerade S_1S_2 in E das Strahlenbüschel, dessen Scheitel P_0 der Schnittpunkt von E mit P_1P_2 ist. Die Lothe von P_0 auf die Geraden dieses Büschels bilden einen orthogonalen Kegel. Der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit diesem orthogonalen Kegel bildet mit g_∞ zusammen den Schnitt von F^3 mit der unendlich fernen Ebene. Der so construirte orthogonale Kegel mit dem Scheitel P_0 ist der Asymptotenkegel der Fläche F^3 . Die Geraden des Asymptotenkegels haben mit F^3 ausser P^0 und dem unendlich fernen, doppelt zu rechnenden Berührungspunkt keinen weiteren Punkt gemeinsam. Der unendlich ferne Kegelschnitt von F^3 geht durch den unendlich fernen Punkt von P_1P_2 und den unendlich fernen Punkt von P_1Q_1 und P_2Q_2 ; seine Beziehung zum unendlich fernen Kreise ergibt sich aus dem Charakter des Kegels als orthogonalen.

V.

Die Ebene E schneidet F^3 ausser in g_∞ noch in einem Kreise; ein Durchmesser dieses Kreises verbindet den Schnittpunkt P der Ebene E und der Geraden P_1P_2 mit dem Punkt Q , welcher Q_1Q_2 im Verhältniss

$$P_1Q_1 : P_2Q_2$$

theilt.* Für jeden Punkt X dieses Kreises ist

$$Q_1X : Q_2X = P_1Q_1 : P_2Q_2,$$

also $\sphericalangle P_1XQ_1 = P_2XQ_2$.

Für eine beliebige mit E parallele Ebene gilt dasselbe wie für E , sie enthält ebenso einen Kreis, dessen Punkte mit P_1 und P_2 verbunden Geraden liefern, welche gegen diese parallele Ebene und damit auch gegen E gleich geneigt sind. Also:

* Vergl. Thieme, Lehrsätze und Aufgaben der Stereometrie, S. 11 Nr. 105 Leipzig 1885. B. G. Teubner.

Eine Ebene, welche zu E parallel ist, schneidet F^3 in einem Kreise.

Geht im Besonderen die parallele Ebene durch P_1 oder durch P_2 , so schrumpft dieser Kreis in einen Punkt zusammen, oder vielmehr der Schnitt einer solchen Ebene besteht aus den beiden imaginären Geraden, welche P_1 bzw. P_2 mit den Schnittpunkten des unendlich fernen Kreises und der Ebene E verbinden. Geht die zu E parallele Ebene durch P_0 , die Mitte von P_1P_2 , so zerfällt der Kreis in die unendlich ferne Gerade g_∞ und die Gerade h , die in P_0 auf P_1P_2 senkrecht steht und zu E parallel ist. Da in diesem Schnitt der Ebene mit F^3 die Gerade g_∞ doppelt vorkommt, so berührt diese parallele Ebene die Fläche F^3 in g_∞ längs einer Geraden. F^3 wird also in P_1P_2 und in g_∞ von je einer Ebene berührt; die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen ist die Gerade h .

VI.

Bei der Bestimmung der Ordnung des untersuchten Ortes in II erhielten wir F^3 zunächst als Erzeugniss zweier projectiven Büschel von parallelen und congruenten Rotationskegeln. Da die Achsen der Kegel, P_1Q_1 und P_2Q_2 , parallel sind und je zwei entsprechende Kegel gleiche Winkelöffnung haben, so schneiden sich dieselben in einem der unendlich fernen Ebene angehörenden Kegelschnitt. Die beiden Kegel müssen sich demnach noch in einem zweiten Kegelschnitt durchdringen.

Die Lagenverhältnisse dieses zweiten Schnitts ergeben sich aus folgender Betrachtung.

Die mehrfach betrachtete Ebene $P_1Q_1P_2Q_2$ ist Symmetrie-Ebene beider Kegel, also auch eine Symmetrie-Ebene ihres Schnittes. Legt man durch P_1P_2 eine beliebige andere Ebene G_1 , so schneidet sie jeden der beiden Kegel in einem Geradenpaar; das Paar des einen Kegels ist dem des anderen parallel. Die beiden Paare paralleler Geraden bilden ein Parallelogramm, in dem P_1 und P_2 zwei gegenüberliegende Ecken sind; die beiden anderen Ecken X_1 und Y_1 sind Punkte des zweiten Schnitts der beiden Kegel. Legt man durch P_1P_2 die Ebene G_2 , welche für die Ebene $P_1Q_1P_2Q_2$ zu G_1 symmetrisch liegt, so erhalten wir ebenso zwei Punkte X_2 und Y_2 , welche dem zweiten Schnitt der beiden Kegel angehören. Die Ebene, welche durch drei der Punkte X_1, X_2, Y_1, Y_2 geht, enthält auch den vierten und ist die Ebene des zweiten Schnitts der beiden Kegel. Da $P_1Q_1P_2Q_2$ zu den beiden Kegeln und zu dem Ebenenpaar G_1 und G_2 Symmetrie-Ebene ist, so liegen auch die Punkte X_2 und Y_2 für $P_1Q_1P_2Q_2$ zu X_1 und Y_1 symmetrisch und die Geraden X_1X_2 und Y_1Y_2 stehen auf $P_1Q_1P_2Q_2$ senkrecht. Daraus folgt, dass die Ebene $X_1X_2Y_1Y_2$ durch h , die Gerade, die in P_0 auf $P_1P_2Q_1Q_2$ senkrecht steht, hindurchgeht. Die Linien X_1Y_1 und X_2Y_2 werden als Parallelogrammdiagonalen von P_1P_2 in P_0 halbirt; P_0 ist daher Mittelpunkt des zweiten Schnittes der beiden Rotationskegel. Also:

Eine beliebige Ebene durch die dem Orte F^3 angehörige Gerade h schneidet F^3 in einem Kegelschnitt, der in P_0 seinen Mittelpunkt hat.

Die Punkte P_1 und P_2 haben für diese Kegelschnitte eine besondere Bedeutung. Bei einem Kegelschnitt ist der Ort der Focalpunkte, der Punkte, deren Verbindungslinien mit den Punkten des Kegelschnitts einen geraden Kegel bilden, wieder ein Kegelschnitt.* Die Punkte P_1 und P_2 sind für alle Kegelschnitte der Fläche F^3 , welche mit h in einer Ebene liegen, Focalpunkte.

VII.

Auf Grund der gefundenen Eigenschaften lässt sich F^3 nunmehr auch als Erzeugniss eines Ebenenbüschels und eines projectiven Büschels von Kegeln zweiter Ordnung nachweisen.

Betrachten wir die Schnitte der Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ mit den beiden projectiven Büscheln von parallelen Rotationskegeln, so erhalten wir zwei projective Strahlensysteme (Strahleninvolutionen zweiter Ordnung), deren entsprechende Strahlenpaare parallel sind. Diese sind aber im Grunde nichts Anderes als die in III betrachteten Strahlenbüschel P_1 und P_2 von entgegengesetztem Drehungssinn. Das Erzeugniss der beiden Strahleninvolutionen setzt sich aus der unendlich fernen Geraden der Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$, der Geraden $P_1 P_2$ und der gleichseitigen Hyperbel zusammen, in der F^3 von $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ geschnitten wird.

Ein Paar entsprechender Kegel wird von $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ in zwei Paaren von parallelen Strahlen geschnitten, die wieder ein Parallelogramm bilden. Zwei der Ecken sind wieder P_1 und P_2 , die beiden anderen seien X und Y . Die Gerade XY ist Durchmesser jener gleichseitigen Hyperbel, X und Y die Endpunkte desselben. Durchlaufen die entsprechenden Rotationskegel die ganzen Büschel, so erhalten wir in P_1 und P_2 die Strahleninvolutionen, während die Gerade XY das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_0 beschreibt. Dies Büschel ist nach einem bekannten Satze über Kegelschnitte zu jenen Strahleninvolutionen projectiv. Daraus folgt auch, dass das Büschel der Ebenen, die durch h und XY gehen, zu jedem der beiden Büschel von Rotationskegeln projectiv ist, und F^3 ergibt sich als Erzeugniss des Büschels der Ebenen und eines Büschels von Rotationskegeln. Also:

F^3 ist das Erzeugniss eines Ebenenbüschels und eines projectiven Büschels von Rotationskegeln; die Achse des Ebenenbüschels steht auf der gemeinsamen Achse der Rotationskegel senkrecht.

Diese Erzeugungweise liefert uns noch zwei weitere imaginäre Geraden von F^3 . Der Ebene durch h , welche zu $P_1 Q_1$ parallel ist, entspricht in dem Kegelbüschel P_1 der Kegel, dessen Winkelöffnung 0^0 beträgt, der

* Schroeter, Oberflächen, S. 598.

also nur aus der Achse oder richtiger aus den beiden imaginären Ebenen besteht, die $P_1 Q_1$ mit den Schnittpunkten von E und dem unendlich fernen Kreise verbinden; die Schnittlinien dieses imaginären Ebenenpaares mit der entsprechenden Ebene durch h gehören der Fläche F^3 an. Also:

Die Ebene durch h , welche zu $P_1 Q_1$ parallel ist, schneidet F^3 in drei Geraden, einer reellen und zwei imaginären.

Die beiden imaginären Geraden haben in dem unendlich fernen Punkte von $P_1 Q_1$ einen reellen Punkt.

VIII.

F^3 besitzt in P_1 und P_2 Doppelpunkte. Eine Gerade g durch P_1 bestimmt mit $P_1 P_2$ eine Ebene, welche F^3 ausser in $P_1 P_2$ nur noch in einer auch durch P_1 gehenden Hyperbel schneidet; g hat also mit F^3 höchstens noch einen Punkt gemeinsam; dasselbe gilt für eine Gerade durch P_2 .

Die Kegel in P_1 und P_2 , deren Winkelöffnungen $\sphericalangle P_2 P_1 Q_1$ und $\sphericalangle P_1 P_2 Q_2$ sind, schneiden sich ausser im Unendlichen nur in der Geraden $P_1 P_2$. Die Geraden dieser Kegel treffen also F^3 nur in P_1 bzw. P_2 ; diese Rotationskegel sind also die beiden Tangentialkegel in den Doppelpunkten P_1 und P_2 . Die beiden Tangentialkegel berühren sich längs $P_1 P_2$. Die gemeinsame Tangentialebene ist die Ebene durch $P_1 P_2$ und durch h .

Nach V schneiden die Ebenen, welche der Ebene E parallel sind, die Fläche F^3 in Kreisen. Diese Kreise gehen sämtlich durch dieselben beiden Punkte im Unendlichen, die Schnittpunkte der Ebene E mit dem unendlich fernen Kreise. Daraus folgt, dass F^3 in diesen beiden imaginären Punkten auch Doppelpunkte besitzt. Dass die Verbindungslinien dieser Punkte mit P_1 und P_2 der Fläche F^3 angehören, wurde schon in V. gezeigt.

Als Gesamtergebnis haben wir somit erhalten:

Der Ort der Punkte, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten P_1 und P_2 gegen eine Ebene E gleich geneigt sind, ist eine Fläche dritter Ordnung, welche in P_1 und P_2 reelle und in den Schnittpunkten von E mit dem unendlich fernen Kreise imaginäre Doppelpunkte besitzt; von den neun Geraden der Fläche sind drei reell, zwei Gegenkanten des durch die Doppelpunkte bestimmten Tetraeders und die diese Gegenkanten schneidende Gerade.

IX.

Zum Schluss möge noch die Gleichung der untersuchten Fläche angegeben werden.

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems sei die Mitte P_0 von $P P_2$, die Z -Achse das Loth von P_0 auf E , die Y -Achse die Parallele durch P_0 zu $Q_1 Q_2$ und die X -Achse das Loth auf $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ in P_0 .

Die Coordinaten seien

$$\begin{aligned} \text{von } P_1 & \dots 0, b, c, \\ \text{, } P_2 & \dots 0, -b, -c. \end{aligned}$$

Die Verbindungslinien eines Punktes mit den Coordinaten x, y, z und der Punkte P_1 und P_2 bilden mit der Z -Achse Winkel, deren cosinus

$$\begin{aligned} & \frac{z - c}{\sqrt{x^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}} \\ \text{bezw.} & \frac{c + z}{\sqrt{x^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2}} \end{aligned}$$

sind. Setzt man diese gleich, so erhält man als Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2 + y^2 + b^2}{z^2 + c^2} = \frac{by}{cz}.$$

Posen, im October 1895.

Kleinere Mittheilungen.

XXVI. Ueber die conforme Abbildung der Lemniscatenfläche.

Es sind bekannte Elementaraufgaben, das Innere einer eintheiligen Lemniscate oder aber das Innere der einen Hälfte einer Bernoulli'schen bezw. zweitheiligen Lemniscate auf das Innere eines Kreises conform abzubilden. Doch scheint mir bisher der continuirliche Uebergang von der ersten zur zweiten Abbildung nicht behandelt zu sein, dessen Eigenart eben darin begründet liegt, dass das Anfangs einfache Flächenstück in zwei Theile zerfällt, also seinen Zusammenhang verliert. Ich habe gefunden, dass trotzdem bei zweckmässiger Normirung die abbildenden Functionen bei diesem Grenzübergang, ohne eine Unstetigkeit zu erleiden, continuirlich in einander übergehen. Dies sei im Folgenden kurz dargelegt:

Wir gehen in der Ebene des Argumentes z von der allgemeinen eintheiligen Curvenform mit den Brennpunkten $z = \pm 1$ aus. Wir wollen das Innere der Curve derart auf die Fläche des Einheitskreises in der w -Ebene abbilden, dass dem Scheitelpunkt $z = +\alpha$ der Punkt $w = +1$ und dem Brennpunkt $z = +1$ der Mittelpunkt $w = 0$ entspricht. Diese Aufgabe wird übersichtlich durch die successive Anwendung der folgenden Abbildungen gelöst:

$$z_1 = z^2,$$

$$z_2 = \frac{z_1}{z_1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)},$$

$$z_3 = \sqrt{(\alpha^2 - 1) \cdot z_2},$$

$$w = \frac{z_3 - \alpha'}{1 - \alpha' z_3},$$

wo

$$\alpha' = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)}}$$

ist. Die Function z_1 bildet die Lemniscatenfläche bekanntlich auf eine doppelt überdeckt zu denkende Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $z_1 = 1$ und dem Radius $\alpha^2 - 1$ ab, deren beide Blätter im Punkte $z_1 = 0$ als einem Windungspunkte erster Ordnung zusammenhängen. Die lineare Substitution z_2 führt dann die Kreisfläche in eine analoge über, deren

Windungspunkt jetzt jedoch im Mittelpunkt $z_2 = 0$ liegt, während der Radius des neuen begrenzenden Kreises $\frac{1}{\alpha^2 - 1}$ beträgt. Die Function z_3 führt ferner diese neue Kreisfläche in die schlichte Fläche des Einheitskreises über. Schliesslich ist in den letzten der obigen Gleichungen nochmals eine lineare Substitution ausgeführt, welche den Einheitskreis in sich transformirt, jedoch seinen Mittelpunkt jetzt dem Punkte $z = +1$ entsprechen lässt. Durch Substitution der einzelnen Functionen ergibt sich daher als die gewünschte abbildende Function:

$$w = \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{z \cdot \sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)} - \sqrt{z^2 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)}}{\sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)} \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)} - (\alpha^2 - 1) \cdot z}.$$

In der That lässt dieselbe den Punkten $z = \alpha$ bzw. $z = +1$ die Punkte $w = +1$ bzw. $w = 0$ entsprechen. Wie man sich ferner leicht überzeugt, sind bei der Ausrechnung für alle Wurzelwerthe positiv reelle Bestandtheile zu wählen.

Lassen wir nun die allgemeine Lemniscate in die Bernoulli'sche Form (mit denselben Brennpunkten) übergehen, so haben wir einfach $\alpha^2 = 2$ zu setzen. Die abbildende Function nimmt für die Werthe z mit positiv reellem Theile zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, ihr wahrer Werth ergibt sich jedoch als:

$$w = z^2 - 1.$$

Dies ist aber gerade die Function, welche die rechte Hälfte der Bernoulli'schen Lemniscatenfläche auf den Einheitskreis in angegebener Weise abbildet. Für alle Werthe von z mit negativ reellem Theile dagegen wird $\lim w = -1$. Dies entspricht dem Umstande, dass die linke Hälfte der Lemniscatenfläche, ehe noch α^2 völlig gleich 2 geworden ist, sich auf die nächste Umgebung des Punktes -1 im Einheitskreis der w -Ebene abbildet. Der weitere continuirliche Uebergang zu der Abbildung des rechten Ovals der zweitheiligen Lemniscate bietet keine neue Schwierigkeit. Wir erhalten das Schlussergebniss:

Lässt man die Lemniscate mit den Brennpunkten ± 1 in die Bernoulli'sche Form übergehen, so findet keinerlei Singularität bei dem entsprechenden Grenzübergange derjenigen Function statt, welche die Fläche der Lemniscate auf das Innere des Einheitskreises in der Art abbildet, dass dem Scheitelpunkt $+\alpha$ der Lemniscate der Punkt $+1$, dem Brennpunkte $z = +1$ aber der Mittelpunkt des Einheitskreises entspricht, obwohl sich in der Grenzlage die linke Hälfte der Fläche völlig abgeschnürt hat.

Aachen.

FR. SCHILLING.

XXVII. Bemerkungen über doppelt-centrische Vierecke.

1.

J^2 sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte M_i . e, f seien zwei Tangenten dieses Kreises in den Punkten E, F . Construiren wir einen Kreisbogen G, H , dessen Centriwinkel supplementär zu $\sphericalangle EM_iF$ ist, so bilden die resp. Tangenten g, h in G, H mit ef ein Kreisviereck $ABCD$. U^2 sei der umschriebene Kreis. M_u sei der Mittelpunkt.

Eine beliebige Tangente q von J^2 treffe U^2 in den zwei Punkten Q, T . Wir ziehen durch dieselben je die zweite Tangente r, t an J^2 . Ihre resp. zweiten Schnittpunkte mit U^2 seien R, S . Dann muss die Verbindungslinie s dieser Punkte den Kreis J^2 berühren, weil im Kreisviereck $QRST$ der Winkel, welchen s mit der Tangente r bildet, zum Winkel der Tangenten qt supplementär ist. Folglich muss auch $QRST$ dem Kreise J^2 umschrieben sein.

Zu jeder Tangente q von J^2 gehört ein solches Kreisviereck und also auch eine gegenüberliegende Seite s . Diese Zuordnung ist eine vertauschbare. Wir schliessen daher:

Liegen zwei Kreise so, dass der eine J^2 einem Viereck eingeschrieben und der andere U^2 demselben umschrieben ist, so giebt es unendlich viele Vierecke, welche U^2 umschrieben und J^2 eingeschrieben sind. Die gegenüberliegenden Seiten dieser Vierecke sind einander involutorisch zugeordnet. Sie schneiden sich also in Punkten einer Geraden p . Die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte gehen durch einen festen Punkt P . P und p sind folglich Pol und Polare in Bezug auf J^2 . Mithin gehen die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken der Vierecke ebenfalls durch P . Daraus folgt weiter, dass P und p auch Pol und Polare in Bezug auf U^2 sind. Daher liegt P auf der Centrale c beider Kreise und wird von p sowohl durch die Punkte J_1J_2 auf J^2 als durch die Punkte U_1U_2 auf U^2 harmonisch getrennt.

2.

Zu einem gegenüberliegenden Seitenpaare eg eines Vierecks (siehe die nebenstehende Figur) gehört ein zweites gegenüberliegendes Paar fh . Weil diese Zuordnung vertauschbar ist, sind die Geraden EG, FH , welche die Berührungspunkte von $e, g; f, h$ verbinden, entsprechende Strahlen einer Involution J , am Scheitel P . Wir können beweisen, dass diese Involution rechtwinklig sein muss. Es ist nämlich:

$$\sphericalangle EGF = \frac{1}{2} \sphericalangle EM_iF \quad \text{und} \quad \sphericalangle HFG = \frac{1}{2} \sphericalangle HM_iG.$$

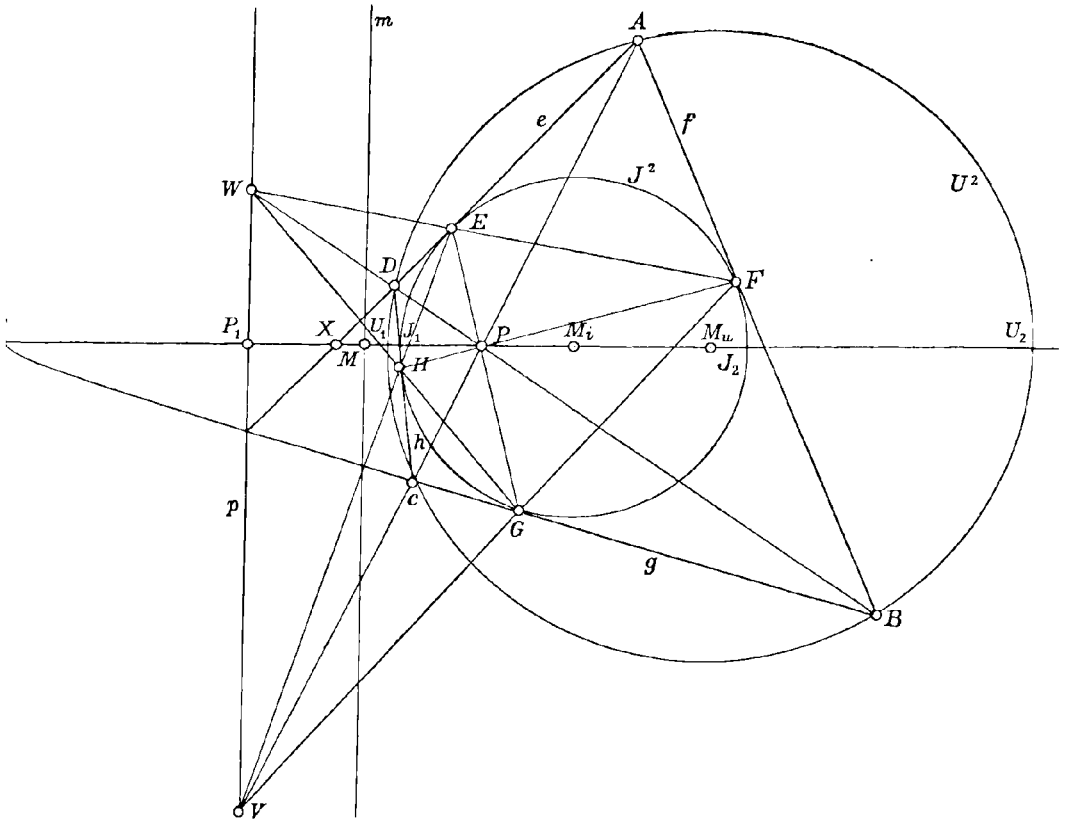
Nun ist

$$\sphericalangle EM_iF = 180^\circ - \sphericalangle HM_iG, \text{ also } \sphericalangle EFG = 90^\circ - \sphericalangle HFG.$$

Daraus folgt, dass

$$\sphericalangle GPF = 90^\circ, \text{ das heisst } HF \perp GE.$$

Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken AC, BD des Vierecks $ABCD$ sind ein Paar der Involution harmonischer Polaren um P in Bezug auf J^2 . Wir zeigen, dass dieses Paar durch das Rechtwinkelpaar



EG, HF der Involution J_b harmonisch getrennt wird. AC trifft nämlich p im Pole V von BD und BD schneidet aus p den Pol W von AC . Die Polare von V , das heisst BD muss aber auch durch den in p liegenden Diagonalpunkt des Vierecks $EFGH$ gehen, in welchem sich die Geraden EF, GH schneiden. Also ist W dieser Diagonalpunkt. In analoger Weise folgt, dass V der Schnittpunkt der Geraden EH, FG ist. Folglich sind AC, BD zwei Diagonalen des Vierecks $EFGH$ und werden durch die Seiten EG, HF harmonisch getrennt.

Diese Beziehungen gelten für jedes Viereck, welches J^2 eingeschrieben und U^2 umschrieben ist. Wir schliessen daher:

Ziehen wir durch P ein Paar xx_1 der Involution harmonischer Polaren in Bezug auf J^2 , so schneidet dieses aus U^2 die Ecken eines Vierecks, welches J^2 umschrieben ist. Die zu einander senkrechten Geraden durch P , welche mit XX_1 eine harmonische Gruppe bilden, treffen J^2 in den Berührungspunkten der vier Seiten des Vierecks.

3.

Construiren wir durch einen Punkt X der Centrale c die zwei Tangenten ee_1 an J^2 , so sind diese zu c orthogonal symmetrisch. Folglich müssen auch die zwei Vierecke, welche zu ee_1 gehören, orthogonal symmetrisch zu c liegen. Daher schneiden sich die Seiten gg_1 , welche den resp. Seiten ee_1 gegenüberliegen, in einem Punkte x_1 auf c . Ziehen wir durch x_1 die Tangenten gg_1 , so gehören zu ihnen dieselben Vierecke wie zu ee_1 . Folglich wird durch diese Vierecke eine Involution J auf c bestimmt. c schneidet die gegenüberliegenden Seiten der Vierecke in Paaren von J .

Der Involution J gehören die Schnittpunkte J_1J_2 von c mit J^2 an; denn, tritt x an Stelle von J_1 , so gehört zu der Tangente i_1 in J_1 ein Viereck, welches zu c orthogonal symmetrisch liegt. Folglich muss die Seite, welche in diesem Viereck i_1 gegenüberliegt, den Kreis J^2 in J_2 berühren. Aus der orthogonal symmetrischen Lage des erwähnten Vierecks folgt noch, dass die zwei weiteren gegenüberliegenden Seitenpaare sich in c schneiden. Diese zwei Schnittpunkte, von denen der eine P ist und der andere P_1 in p liegt, sind also Doppelpunkte von J .

Ein ferneres Paar der Involution J sind die Schnittpunkte U_1U_2 von c mit U^2 . Um dies zu zeigen, benutzen wir einen bekannten Satz, nach welchem eine Gerade aus den gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks und aus den Kegelschnitten, welche dem Viereck umschrieben sind, Paare einer Involution schneidet. In unserem Falle hat diese Involution mit J zwei auf den gegenüberliegenden Seiten des Vierecks liegende Paare gemeinsam. Folglich ist sie mit J identisch.

Die zwei Paare J_1J_2 , U_1U_2 bestimmen J . Diese liegen so, dass stets das eine Paar U_1U_2 das andere J_1J_2 einschliesst. Daraus folgt, dass J immer hyperbolisch ist. Der Mittelpunkt M von J liegt in der Potenzlinie m der zwei Kreise J^2U^2 .

Fassen wir das Bewiesene zusammen, so ergibt sich:

Die Centrale der Kreise J^2U^2 schneidet die gegenüberliegenden Seiten der Vierecke und die Kreise J^2U^2 in Paaren einer hyperbolischen Involution, deren Mittelpunkt M in der Potenzlinie beider Kreise liegt. Die Viereckseiten, welche J^2

nicht berühren, schneiden sich in einem Doppelpunkte P der Involution.

Eine andere Ausdrucksweise dieses Satzes ist folgende:

Construiren wir über den Schnittpunkten der Centrale mit den gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks Kreise, so schneiden diese sich mit J^2 und U^2 in denselben zwei imaginären Punkten auf der Potenzlinie dieser Kreise. Sie bilden mit J^2U^2 ein Büschel.

Dr. BEVEL.

XXVIII. Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen.

Im 38. Jahrgange dieser Zeitschrift habe ich die partiellen Differentialgleichungen behandelt, denen die symmetrischen Functionen R der Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$1) \quad x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \dots \pm c_n = 0$$

genügen. Dabei hatte ich die Brioschi'schen Formeln in zwei Serien getheilt,

$$2) \quad \sum_{\lambda=1}^n x_{\lambda}^i \frac{\partial R}{\partial x_{\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^n (s_i c_{\lambda-1} - s_{i+1} c_{\lambda-2} + \dots) \frac{\partial R}{\partial c_{\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} s_{\lambda} s_{\lambda+i-1} \frac{\partial R}{\partial s_{\lambda}},$$

$$3) \quad \sum_{\lambda=k}^n c_{\lambda-k} \frac{\partial R}{\partial c_{\lambda}} = (-1)^{k-1} k \frac{\partial R}{\partial s_k}, \quad (i, k = 1, 2, 3 \dots),$$

hatte einen sehr einfachen Beweis für 2) und einen etwas ferner liegenden für 3) gegeben und dabei erwähnt, dass 3) nur unter Beobachtung gewisser Vorsichtsmassregeln verwendet werden dürfe, ohne dieselben aber unrichtig sei. Ich komme hier auf die Formelreihe 3) zurück, um in die l. c. ausgesprochene Bemerkung, „dass es im Wesentlichen nur n solcher Formeln gebe“, auch die in 3) enthaltenen hineinzuziehen, um für dieselben zugleich einen Beweis zu liefern, der dem für 2) gegebenen analog ist, und der zugleich 3) in der Weise vervollständigt, dass er den Werth beider Seiten auch durch Differentiationen darstellt, die nach den x_{λ} ausgeführt sind.

Statt der Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n führe ich, unter i eine positive ganze Zahl verstehend, die Werthe

$$4) \quad x_1 + \frac{x_1^i}{f'(x_1)} t, \quad x_2 + \frac{x_2^i}{f'(x_2)} t, \dots, x_n + \frac{x_n^i}{f'(x_n)} t$$

ein und untersuche, wie sich hierdurch erstens die Potenzsummen und zweitens die Coefficienten der Gleichung ändern. An die Stelle von s_x tritt

$$\sum_{\lambda=1}^n \left(x_{\lambda}^x + x \frac{x_{\lambda}^{x+i-1}}{f'(x_{\lambda})} t + \dots \right).$$

Wir wollen hier und im Folgenden stets die höheren Potenzen von t vernachlässigen, also alle Ausdrücke nur modulo t^2 betrachten. Die Eulerschen Formeln zeigen dann, dass für $\kappa + i - 1 < n - 1$ der Coefficient von t zu Null und für $\kappa + i - 1 = n - 1$ zu Eins wird. Ferner folgt mit Berücksichtigung von 1):

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^n}{f'(x_{\lambda})} &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{c_1 x_{\lambda}^{n-1} - c_2 x_{\lambda}^{n-2} + \dots}{f'(x_{\lambda})} \\ &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{C_{n-1}^{(n-1)} x_{\lambda}^{n-1} - C_{n-2}^{(n-2)} x_{\lambda}^{n-2} + \dots}{f'(x_{\lambda})} = C_{n-1}^{(n-1)}, \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^{n+1}}{f'(x_{\lambda})} &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{(c_1^2 - c_2) x_{\lambda}^{n-1} - (c_1 c_2 - c_3) x_{\lambda}^{n-2} + \dots}{f'(x_{\lambda})} \\ &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{C_{n+1}^{(n-1)} x_{\lambda}^{n-1} - C_{n+1}^{(n-2)} x_{\lambda}^{n-2} + \dots}{f'(x_{\lambda})} = C_{n+1}^{(n-1)}, \\ &\dots \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^{n+\alpha-1}}{f'(x_{\lambda})} &= \dots = C_{n+\alpha-1}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Grössen $C_{\alpha}^{(n)}$ habe ich vor Kurzem (Monats-Hefte für Mathematik und Physik) dargelegt, so dass ich hier nicht darauf einzugehen brauche und sie als bekannt voraussetzen darf. Es gehen also die s_{α} über, wenn man $C_{n-1}^{(n-1)} = 1$ setzt, in die Grössen:

$$5) \left\{ \begin{aligned} s_1, s_2, \dots, s_{n-i-1}, s_{n-i} + (n-i) C_{n-1}^{(n-1)} t, s_{n-i+1} + (n-i+1) C_{n-1}^{(n-1)} t, \\ s_{n-i+2} + (n-i+2) C_{n+1}^{(n-1)} t, \dots, s_{\alpha} + \alpha C_{n+i-1}^{(n-1)} t, \dots \end{aligned} \right.$$

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Coefficienten, welche an die Stelle der c treten. Es gehen

$$\begin{aligned} c_1 \text{ in } c_1 + \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^i}{f'(x_{\lambda})} t, \\ c_2 \text{ in } c_2 + \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^i (x_{\lambda+1} + \dots + x_{\lambda-1})}{f'(x_{\lambda})} t &= c_2 + \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^i (-x_{\lambda} + c_1)}{f'(x_{\lambda})} t \\ &= c_2 - \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^{i+1} - c_1 x_{\lambda}^i}{f'(x_{\lambda})} t, \\ c_3 \text{ in } c_3 + \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^i (x_{\lambda+1} x_{\lambda+2} + \dots)}{f'(x_{\lambda})} t &= c_3 + \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^i (x_{\lambda}^2 - c_1 x_{\lambda} + c_2)}{f'(x_{\lambda})} t \\ &= c_3 + \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^{i+2} - c_1 x_{\lambda}^{i+1} + \dots}{f'(x_{\lambda})} t, \\ &\dots \end{aligned}$$

über. So lange der höchste Exponent im Zähler des Bruches unter dem letzten Summenzeichen $< n - 1$ ist, verschwindet nach dem Euler'schen Satze die Summe. An Stelle von c_{n-i} erhält man:

$$c_{n-i} + (-1)^{n-i-1} \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^i (x_{\lambda}^{n-i-1} - c_1 x_{\lambda}^{n-i-2} + \dots + c_{n-i-1})}{f'(x_{\lambda})} t = c_{n-i} + (-1)^{n-i-1} t.$$

Für c_{n-i+1} ergibt sich mit Berücksichtigung von 1):

$$\begin{aligned} c_{n-i+1} + (-1)^{n-i} \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^n - c_1 x_{\lambda}^{n-1} + \dots \pm c_{n-i} x_{\lambda}^i}{f'(x_{\lambda})} t \\ = c_{n-i+1} \pm \sum_{\lambda=1}^n \frac{c_{n-i+1} x_{\lambda}^{i-1} + \dots}{f'(x_{\lambda})} t = c_{n-i+1} \end{aligned}$$

und in gleicher Weise für c_{n-i+2} :

$$\begin{aligned} c_{n-i+2} \pm \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}^{n+1} - c_1 x_{\lambda}^n + \dots \pm c_{n-i+1} x_{\lambda}^i}{f'(x_{\lambda})} t \\ = c_{n-i+2} \pm \sum_{\lambda=1}^n \frac{c_{n-i+2} x_{\lambda}^{i-1} + \dots}{f'(x_{\lambda})} t = c_{n-i+2}, \end{aligned}$$

und nach derselben Art setzt sich die Berechnung bis c_n fort. Es tritt also an die Stelle von

$$6) \quad \begin{cases} c_{\alpha} \text{ wieder } c_{\alpha} \text{ (wenn } \alpha \text{ von } n-i \text{ verschieden ist),} \\ c_{n-i} \text{ dagegen } c_{n-i} + (-1)^{n-i-1} t. \end{cases}$$

Denkt man sich nun eine symmetrische Function R durch die x , durch die c und durch die s ausgedrückt, führt statt der x die Grössen 4) und folglich statt der c und der s die Grössen 6) und 5) ein und vergleicht in den Entwicklungen von R nach t die Coefficienten der ersten Potenzen von t , so entsteht

$$7) \quad \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_{\lambda}}{f'(x_{\lambda})} \frac{\partial R}{\partial x_{\lambda}} = (-1)^{n-i-1} \frac{\partial R}{\partial c_{n-i}} = \sum_{k=n-i}^{\infty} k C_{k+i-1}^{(n-1)} \frac{\partial R}{\partial s_k}.$$

Diese Formelserie tritt als neu neben die Brioschi'schen. Neu ist sie freilich genau wie 3) gegen 2) nur ihrer Form, nicht ihrem Inhalte nach.

Man kann nämlich den Bruch $\frac{x_{\lambda}^i}{f'(x_{\lambda})}$ auf die Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_{\lambda} + \alpha_2 x_{\lambda}^2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{\lambda}^{n-1}$$

bringen, und dadurch geht die linke Seite von 7) in

$$\sum_{\lambda=1}^n (\alpha_0 + \alpha_1 x_{\lambda} + \dots + \alpha_{n-1} x_{\lambda}^{n-1}) \frac{\partial R}{\partial x_{\lambda}}$$

über. Dieser Ausdruck lässt sich nun aus den n Formeln 2) für $i=0, 1, \dots, n-1$ zusammensetzen. Bildet man dasselbe Aggregat für die mittlere

Form von 2), so muss der mittlere Ausdruck von 7) entstehen; denn sonst hätte man durch Subtraction die für jedes R geltende Gleichung:

$$\varphi_1(s, c) \frac{\partial R}{\partial c_1} + \varphi_2(s, c) \frac{\partial R}{\partial c_2} + \dots + \varphi_n(s, c) \frac{\partial R}{\partial c_n} = 0,$$

welche dann aber für $R = c_1, c_2, \dots, c_n$ das identische Verschwinden aller φ anzeigen würde. Für die Ausdrücke rechts in 2) und 7) gelten dieselben Schlüsse.

So erhält man z. B. für $n = 2$ aus 2):

$$8) \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial x_2} = 2 \frac{\partial R}{\partial c_1} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_2}, \\ x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial R}{\partial x_2} = c_1 \frac{\partial R}{\partial c_1} + 2 c_2 \frac{\partial R}{\partial c_2}; \end{cases}$$

und ferner ist

$$\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{2x_1 - c} = \frac{2x_1 - c_1}{c_1^2 - 4c_2}, \quad \frac{x_1}{f'(x_1)} = \frac{c_1 x_1 - 2c_2}{c_1^2 - 4c_2}.$$

Multiplieirt man also die erste der Gleichungen 8) mit $\frac{-c_1}{c_1^2 - 4c_2}$ und die zweite mit $\frac{2}{c_1^2 - 4c_2}$, ferner auch die erste mit $\frac{-2c_2}{c_1^2 - 4c_2}$ und die zweite mit $\frac{c_1}{c_1^2 - 4c_2}$, dann entstehen nach Addition die Resultate:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'(x_1)} \frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{1}{f'(x_2)} \frac{\partial R}{\partial x_2} &= - \frac{\partial R}{\partial c_2}, \\ \frac{x_1}{f'(x_1)} \frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{x_2}{f'(x_2)} \frac{\partial R}{\partial x_2} &= + \frac{\partial R}{\partial c_1}, \end{aligned}$$

und das stimmt mit 7) überein.

Wir wollen nun die Gleichungen 7) unter einander verbinden. Es besteht für die $C_k^{(2)}$ die Formelreihe:

$$\begin{aligned} C_k^{(n-1)} - c_1 C_{k-1}^{(n-1)} &= - C_{k-1}^{(n-2)}, \\ C_k^{(n-1)} - c_1 C_{k-1}^{(n-1)} + c_2 C_{k-2}^{(n-1)} &= + C_{k-2}^{(n-3)}, \\ C_k^{(n-1)} - c_1 C_{k-1}^{(n-1)} + c_2 C_{k-2}^{(n-1)} - c_3 C_{k-3}^{(n-1)} &= - C_{k-3}^{(n-4)}; \dots \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Formeln entsprechend die aus 7) für $i = 0, 1$ stammenden Gleichungen combiniren, dann die für $i = 0, 1, 2$ u. s. w., so entsteht:

$$9) \quad \begin{cases} (-1)^{n-2} \left(\frac{\partial R}{\partial c_{n-1}} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_n} \right) = (n-1) \frac{\partial R}{\partial s_{n-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} (n+k) C_{n+k-1}^{(n-2)} \frac{\partial R}{\partial s_{n+k}}, \\ (-1)^{n-3} \left(\frac{\partial R}{\partial c_{n-2}} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_{n-1}} + c_2 \frac{\partial R}{\partial c_n} \right) = (n-2) \frac{\partial R}{\partial s_{n-2}} \\ \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (n+k) C_{n+k-1}^{(n-3)} \frac{\partial R}{\partial s_{n+k}}, \\ \dots \end{cases}$$

und gleichzeitig entnimmt man aus 7), dass diese Ausdrücke entsprechend gleich

$$9a) \quad \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_\lambda - c_1}{f'(x_\lambda)} \frac{\partial R}{\partial x_\lambda}, \quad \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_\lambda^2 - c_1 x_\lambda + c_2}{f'(x_\lambda)} \frac{\partial R}{\partial x_\lambda}, \dots$$

sein werden. Dies sind die correcten Beziehungen, welche an die Stelle von 3) zu setzen sind. Aus 9a) geht hervor, was sich ohne Schwierigkeit auch direct nachweisen lässt, dass die Substitution von

$$x_\alpha + \frac{x_\alpha^i - c_1 x_\alpha^{i-1} + c_2 x_\alpha^{i-2} - \dots \pm c_\alpha}{f'(x_\alpha)} t \text{ statt } x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

die Gleichungen 9), 9a) hervorbringt.

Die erhaltenen Gleichungen 9), 9a) vereinfachen sich zu den Brioschi'schen, sobald man die dort unausgesprochene Voraussetzung macht, dass R als Function der s lediglich durch s_1, s_2, \dots, s_n ausgedrückt werde. Dann entsteht die ergänzte Brioschi'sche Formel:

$$10) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^n \frac{x_\lambda^i - c_1 x_\lambda^{i-1} + c_2 x_\lambda^{i-2} - \dots \pm c_i}{f'(x_\lambda)} \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} &= (-1)^{n-i-1} \sum_{k=n-i}^n c_{k-n+i} \frac{\partial R}{\partial c_k} \\ &= (n-i) \frac{\partial R}{\partial s_{n-i}}. \end{aligned} \right.$$

In meiner früheren Arbeit habe ich gezeigt, dass die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems 2) durch die Beziehungen:

$$11) \quad S_\lambda = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_n = n)$$

gegeben wird, sobald an die Stelle der c die Grössen C_1, C_2, \dots, C_n treten, die aus den S so abgeleitet werden, wie die c aus den s . Für die Darstellung der C durch die x_1, \dots, x_n habe ich die symbolische Form

$$12) \quad \mu! C_\mu = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{(\mu)}$$

gegeben, in welcher die symbolische Potenz $x_\alpha^{(\mu)}$ durch x_α^μ und

$$a_\alpha^{(u)} \text{ durch } a_\alpha(a_\alpha - 1)(a_\alpha - 2) \dots (a_\alpha - \mu + 1)$$

zu ersetzen ist. Es ist vielleicht nicht überflüssig, den Beweis für diese Darstellungsart anzugeben. Die Ableitung des Ausdrucks von c_μ durch die s_μ geschieht am einfachsten durch die Formel:

$$1 - c_1 x + c_2 x^2 - \dots \pm c_n x^n = e^{-s_1 x} e^{-\frac{s_2 x^2}{2}} e^{-\frac{s_3 x^3}{3}} \dots$$

Demgemäss haben wir hier zu setzen:

$$1 - C_1 x + C_2 x^2 - \dots \pm C_n x^n \mp \dots = e^{-S_1 x} e^{-\frac{S_2 x^2}{2}} e^{-\frac{S_3 x^3}{3}} \dots$$

und folglich nach 11):

$$= e^{\sum_{\lambda=1}^n a_\lambda \log(1 - x_\lambda x)}$$

$$13) \quad 1 - C_1 x + \dots \pm C_n x^n \mp \dots = (1 - x_1 x)^{a_1} (1 - x_2 x)^{a_2} \dots (1 - x_n x)^{a_n}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten ergibt:

$$C_\mu = \sum_{(x)} \binom{a_1}{x_1} \binom{a_2}{x_2} \dots \binom{a_n}{x_n} x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n},$$

wobei die Summe über alle positiven ganzen x erstreckt wird, für die

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \mu$$

ist. Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \mu! C_\mu &= \sum_{(x)} \frac{\mu!}{x_1! x_2! \dots x_n!} a_1(a_1-1) \dots (a_1-x_1+1) x_1^{x_1} \dots \\ &= \sum_{(x)} \frac{\mu!}{x_1! x_2! \dots x_n!} a_1^{(x_1)} x_1^{x_1} a_2^{(x_2)} x_2^{x_2} \dots \\ &= (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Aus 13) erkennt man noch unmittelbarer als aus 12), dass die Forderung, alle C_μ sollen verschwinden, sobald $\mu > n$ ist, nur durch ganzzahlige positive Werthe von a_1, a_2, \dots, a_n erfüllt werden kann, und da die Summe der a gleich n ist, nur durch

$$S_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \dots + x_n^\mu$$

und durch die hieraus entstehenden Specialisirungen, in denen einige der x einander gleich gesetzt werden.

Die Differentialgleichungen 10) werden häufig mit Vortheil dazu benutzt, die numerischen Coefficienten von symmetrischen Functionen zu berechnen, deren litteraler Theil vorliegt. Ist z. B.:

$$s_4 = u_0 c_1^4 + u_1 c_1^2 c_2 + u_2 c_1 c_3 + u_3 c_2^2 + u_4 c_4$$

gegeben, wobei die u noch unbekannte numerische Grössen bedeuten, dann liefert 10):

$$\begin{aligned} -4 \frac{\partial s_4}{\partial s_4} &= -4 = u_4, & 3 \frac{\partial s_4}{\partial s_3} &= 0 = u_2 c_1 + u_4 c_1, \\ -2 \frac{\partial s_4}{\partial s_2} &= 0 = (u_1 c_1^2 + 2u_2 c_2) + u_2 c_1^2 + u_4 c_2, \\ +1 \frac{\partial s_4}{\partial s_1} &= 0 = (4u_0 c_1^3 + 2u_1 c_1 c_2 + u_2 c_3) + (u_1 c_1^2 + 2u_3 c_2) c_1 + u_2 c_1 c_2 + u_4 c_3. \end{aligned}$$

Das System von linearen Gleichungen

$$u_4 = 4, \quad u_2 + u_4 = 0, \quad u_1 + u_2 = 0, \quad 2u_3 + u_4 = 0,$$

$$4u_0 + u_1 = 0, \quad 2u_1 + 2u_3 + u_2 = 0, \quad u_2 + u_4 = 0$$

ergibt dann die Werthe:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = -4, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = -4;$$

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 4c_1 c_3 + 2c_2^2 - 4c_4.$$

Die Benutzung dieser Methode fordert als Berechtigungsnachweis noch, dass gezeigt wird, die Gleichungen 10) reichen wirklich stets zur Auffindung

sämmtlicher Coefficienten u aus, wie auch immer die Function R beschaffen sei. Ich will diesen Beweis, so einfach er auch ist, hier geben, da ich ihn noch nirgends gefunden habe. Es ist also vorausgesetzt, dass R einmal in seinem litteralen Theile durch c_1, c_2, \dots, c_n mit unbekanntem Coefficienten u ausgedrückt ist, andererseits, was sich ja leicht durchführen lässt, durch die s_1, s_2, \dots, s_n . Bilden wir nun zunächst

$$(-1)^{n-1} n \frac{\partial R}{\partial s_n} = \frac{\partial R}{\partial c_n},$$

so treten auf die rechte Seite alle und nur diejenigen Coefficienten u , welche zu Aggregaten $u c_1^\alpha c_2^\beta c_3^\gamma \dots c_n^\varepsilon$ gehören, bei denen der Exponent ε von c_n einen von Null verschiedenen Werth hat. Alle diese u sind nach der Differentiation mit verschiedenen Aggregaten der c multiplicirt, und jedes dieser u kommt nur einmal vor. Stellt man die linke Seite daher gleichfalls durch die c dar und vergleicht, so giebt dies eine eindeutige Bestimmung aller dieser Coefficienten. Ist das erledigt, dann gehen wir zu

$$(-1)^{n-2} (n-1) \frac{\partial R}{\partial s_{n-1}} = \frac{\partial R}{\partial c_{n-1}} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_n}$$

über. Als unbekannt Coefficienten u können nur solche auftreten, die der erste Summand rechts enthält, und das sind alle diejenigen, welche in Aggregaten $u c_1^\alpha c_2^\beta \dots c_{n-1}^\delta c_n^\varepsilon$ vorkommen, in denen δ einen von Null verschiedenen Werth hat. Jeder derselben kommt nur einmal vor und es können verschiedene u nicht gleichen Aggregaten angehören. Ein Vergleich der rechten mit der durch die c ausgedrückten linken Seite giebt demnach die eindeutige Bestimmung aller dieser noch unbekannt Coefficienten. Es können in $\frac{\partial R}{\partial c_{n-1}}$ auch bereits bekannte Coefficienten eingehen, nämlich die aller Aggregate mit $\delta, \varepsilon \neq 0$; die hierdurch sich ergebenden Beziehungen sind widerspruchsfrei, wie das aus der Existenz des Systems 10) folgt. Auf diese Art kann man fortfahren und so der Reihe nach sämtliche Coefficienten u bestimmen.

Giessen.

EUGEN NETTO.

XXIX. Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte eines Kegelschnitts und einer Curve dritten Grades.

I.

1. Sind irgend drei Geraden L und zwei Punkte a, b gegeben, so ist dadurch ein Büschel von Curven C^3 bestimmt, die alle durch die Punkte a, b gehen und die Geraden L zu Asymptoten haben und zwar gehen alle diese Curven C^3 noch durch einen weiteren auf ab gelegenen Punkt c . Legen wir durch ab einen Kegelschnitt C^2 , so bestimmt jede C^3 auf diesem Kegelschnitt vier weitere Punkte p und der Ort der Seiten

des Vierecks dieser vier Punkte p ist eine Curve der dritten Klasse K^3 , indem durch jeden Punkt auf C^2 nur eine C^3 geht und von ihm also auch nur drei solche Vierecksseiten ausgehen. Unter den Curven C^3 ist aber auch eine solche, die in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und in die Gerade ab zerfällt und von den sechs Seiten des zugehörigen Vierecks fallen vier auf G_∞ , während zwei die Asymptoten des Kegelschnitts C^2 sind. Die Curve K^3 hat also die Gerade G_∞ zur Doppeltangente und die Asymptoten des Kegelschnitts C^2 zu einfachen Tangenten.

2. Liegt weiter die Mitte einer Sehne de des Kegelschnitts C^2 auf einer Geraden G , so ist ihr Ort eine Parabel P^2 , die ebenfalls die Asymptoten von C^2 berührt. Die beiden Curven K^3 und P^2 haben aber ausser G_∞ und diesen beiden Asymptoten noch zwei weitere Tangenten gemein, das heisst, auf der Geraden G liegen zwei Punkte, die Mitten von Sehnen de sind, die zugleich zu Seiten obiger Vierecke werden; oder wir finden:

Jede der Curven C^3 bestimmt auf dem Kegelschnitt C^2 vier Punkte p und der Ort der Mitten der sechs Seiten des Vierecks der Punkte p ist ein Kegelschnitt K^2 und da der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts K^2 zugleich Schwerpunkt der Ecken jedes einzelnen Vierecks ist, so haben also die vier Punkte, die eine C^3 auf C^2 bestimmt, einen festen Punkt zum Schwerpunkt und ebenso haben auch alle sechs Punkte (ab und $4p$), die auf C^2 und irgend einer Curve C^3 gelegen sind, einen festen Punkt s zum Schwerpunkt.

3. Ist ferner irgend eine Curve C^3_1 gegeben, die dem obigen Büschel nicht angehört, dagegen die gleichen Geraden L zu Asymptoten hat, welche mit dem Kegelschnitt C^2 unter Anderem zwei Punkte r und t gemein hat, so können wir unter den obigen Curven C^3 zunächst diejenige auswählen, die durch den Punkt r geht. Durch die Punkte a und r ist dann ein neues Büschel von Curven C^3 mit den Asymptoten L bestimmt und die sechs Punkte, welche eine Curve dieses Büschels auf C^2 bestimmt, haben den gleichen Punkt s zum Schwerpunkt, indem eine Curve zugleich beiden Büscheln angehört. Von diesem zweiten Büschel können wir übergehen zu einem Büschel durch r und t und finden, dass auch die Curven dieses Büschels auf C^2 je sechs Punkte mit dem Punkte s als Schwerpunkt bestimmen und da diesem Büschel die Curve C^3_1 angehört, so folgern wir daraus, dass überhaupt jede Curve dritten Grades, welche die Geraden L zu Asymptoten hat, mit C^2 sechs Punkte gemein hat, die einen festen Punkt s zum Schwerpunkt haben, und da die drei Asymptoten selbst als eine solche Curve aufgefasst werden können, so haben wir, wenn wir noch berücksichtigen, dass die Abschnitte einer Geraden, welche die Asymptoten eines Kegelschnitts und den Kegelschnitt selbst ausschneiden, dieselbe Mitte haben:

Der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kegelschnitts C^2 und einer Curve dritten Grades ist der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte der Asymptoten der ersten Curve mit den Asymptoten der zweiten Curve und dieser Schwerpunkt bleibt derselbe, wenn wir die beiden Curven beliebig verändern, jedoch ihre Asymptoten beibehalten, und soll also der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte beider Curven bestimmt werden, so können wir eine oder beide Curven durch ihre Asymptoten ersetzen.*

II.

1. Die Polarkegelschnitte C^2 einer Basis C^3 für Pole auf der unendlich fernen Geraden bilden ein Büschel durch vier Grundpunkte. Jeder dieser Kegelschnitte schneidet eine Asymptote in zwei zugeordneten Punkten einer Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte der Kegelschnitte des Büschels sind, die die Asymptote berühren. Einer dieser Berührungspunkte ist aber der unendlich ferne Punkt der Asymptote selbst, in dem für diesen als Pol der zugehörige Kegelschnitt die Basis und somit auch die Asymptote selbst in diesem Punkt berührt. Der andere Berührungspunkt auf der Asymptote ist also Mitte der Strecke zwischen je zwei zusammengehörigen Punkten der Involution; oder, die Polaren C^2 für Pole auf G_∞ in Bezug auf eine Basis des dritten Grades bestimmen auf jeder Asymptote der letzteren Sehnen, die eine gemeinsame Mitte haben. Wir folgern daraus aber, dass die sechs Punkte, welche einer der obigen Polarkegelschnitte mit den Asymptoten gemein hat, einen festen Schwerpunkt haben, oder wir finden folgenden von Chasles gegebenen Satz:

Jeder Polarkegelschnitt C^2 eines Pols p auf der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Basis des dritten Grades C^3 hat mit dieser sechs Punkte gemein, die einen festen Punkt s zum Schwerpunkt haben, oder, ziehen wir an eine Basis des dritten Grades irgend sechs parallele Tangenten, so haben deren sechs Berührungspunkte einen festen Punkt s zum Schwerpunkt.

Der Punkt s ist zudem Schwerpunkt des Asymptotendreiecks der Curve C^3 .

2. Drehen wir eine Curve C^3 um einen Pol p um einen Winkel von 180° , so liegen von den gemeinsamen neun Punkten der beiden Lagen der Curve C^3 drei auf der unendlich fernen Geraden G_∞ und die übrigen sechs

* Dieser Satz gilt, wie wir a. a. O. gezeigt haben, ganz allgemein für zwei beliebige Curven des m ten und n ten Grades. Mit geringer Aenderung lässt er sich auf Kegelschnitte und Curven n ten Grades ausdehnen, doch versagt diese Art des Beweises für den allgemeinen Fall; und wir haben es deshalb auch unterlassen, die in II. gez. Resultate auf eine beliebige Basis auszudehnen.

sind Endpunkte von drei solchen Sehnen aa_1 , bb_1 und cc_1 der Basis, die ihre Mitte in p haben. Die Endpunkte dieser Sehnen liegen dann allemal auf einem Kegelschnitt J^2 , der „inneren Polare“ des Punktes p in Bezug auf die Basis C^3 . Ziehen wir weiter von p an die Basis C^3 die sechs Tangenten, so liegen die sechs Berührungspunkte derselben auf der „Äusseren Polare A^2 “ (ersten Polare) von p in Bezug auf dieselbe Basis.* Die unendlich fernen Punkte der letzteren sind aber die unendlich fernen Punkte der beiden Geraden L und L_1 durch p , die mit der Basis je drei Punkte gemein haben, deren Schwerpunkt p ist. Der Schwerpunkt der sechs Punkte a , a_1 , b , b_1 und c , c_1 ist aber ebenfalls der Mittelpunkt p von J^2 und nach Obigem bleibt dieser derselbe, wenn wir die Polare J^2 durch deren Asymptoten ersetzen. Daraus folgt aber, dass die Asymptoten ebenfalls mit der Basis je drei Punkte gemein haben müssen, die in p ihren Schwerpunkt haben, da nur dann p Schwerpunkt der sechs gemeinsamen Punkte der Asymptoten mit der Basis sein kann. Die Asymptoten von J^2 sind also die Geraden L und L_1 , oder wir finden: Die Polaren J^2 und A^2 haben parallele Asymptoten (Steiner a. a. O.).

* Diese Bezeichnung rührt von Steiner her.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

40. Jahrgang.



Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1895.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

	Seite
Historische Miscellen II. Von Armin Wittstein	1
Die abgekürzte Multiplication. Von Maximilian Curtze	7
Aus Manuscripten und einer früheren Publication. Von Armin Wittstein 121, 223	
Zur Geschichte des „Sinus“. Von Julius Ruska	126
Anonyme Abhandlung über das Quadratum Geometricum. Von Maximilian Curtze	161
Ptolemäus de Analemmate. Von J. L. Heiberg (Supplementheft)	1
Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert. Von Maximilian Curtze (Supplementheft)	32
Die Handschrift No. 14836 der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München. Von Maximilian Curtze (Supplementheft)	75
Eine Autobiographie von Gotthold Eisenstein. Mit ergänzenden biographischen Notizen. Herausgegeben von F. Rudio (Supplementheft)	142
Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern. Herausgegeben von A. Hurwitz und F. Rudio (Supplementheft)	169
Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij. Rede, gehalten bei der feierlichen Versammlung der kaiserlichen Universität Kasan. Am 22. October 1893. Von Professor A. Wassiljef . Aus dem Russischen übersetzt von Professor Friedrich Engel (Supplementheft)	205

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Vivanti , Il concetto d'infinitesimo. Von M. Cantor	52
Günther , Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum. Von M. Cantor	53
Korteweg , Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland. Von M. Cantor	53
Berthold , Der Magister Johann Fabricius und die Sonnenflecken. Von M. Cantor	54
Becker , Die geometrische Entwicklung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionsbeweis bei Archimed. Von M. Cantor	54
Carra de Vaux , Les mécaniques ou l'élevateur de Héron d'Alexandrie. Von M. Cantor	55
Bierens de Haan , Bouwstoffen. Von M. Cantor	56
Schlesinger , Die Geometrie von René Descartes. Von M. Cantor	57
Riessen , Ein ungedrucktes Rechenbuch. Von M. Cantor	58
Graf , Professor Dr. Rudolf Wolf. Von M. Cantor	59
Rudio , Erinnerung an Moritz Abraham Stern. Von M. Cantor	60
Robel , Die Sirenen II. und III. Von M. Cantor	61. 221
Klussmann , Systematisches Verzeichniss von Abhandlungen. Von M. Cantor	61

	Seite
Todhunter, A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time. Von B. Nebel	81
Weyrauch, Kleinere Schriften und Briefe von Robert Mayer. Von B. Nebel	84
Smith (Henry John Stephen), Collected mathematical papers. Von M. Cantor	104
Herschel, Frontinus. Von M. Cantor	106
Obenrauch, Monge II. Von M. Cantor	106
Haas, Apparate zur Demonstration der Präcession. Von M. Cantor	129
Manitius, Hipparchus in Arati et Eudoxi Phaenomena. Von M. Cantor	130
Boll, Studien über Claudius Ptolemaeus. Von M. Cantor	130
Pistelli, Jamblichus in Nicomachi arithmeticae introductionem. Von M. Cantor	132
Stäckel, Abhandlungen über Variationsrechnung von 1696 bis 1837. Von M. Cantor	132
Eggenberger, Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals. Von M. Cantor	133
Heiberg, Euclidis Optica. Von M. Cantor	134
v. Szily und Heller, Die Arithmetik des Magisters Georgius de Hungaria aus dem Jahre 1499. Von M. Cantor	135
Rudol, Georg Philipp Harsdörfer. Von M. Cantor	136
Weyer, Ueber die parabolische Spirale. Von M. Cantor	137
Wangerin, Abhandlungen über Kartenprojection von 1772 bis 1822. Von M. Cantor	137
Schenkel, Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunction und Euler'schen Integrale. Von M. Cantor	138
Fink, Lazare Nicolas Marguerite Carnot. Von M. Cantor	139
Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens der Gesellsch. chem. Stud. d. Eidgen. polyt. Schule in Zürich. Von M. Cantor	139
Fermat, Oeuvres II. Von G. Wertheim	140
Silberberg, Sefer ha-mispar, das Buch der Zahl. Von G. Wertheim	142
Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia II. Von M. Cantor	218
Wohlwill, Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek. Von M. Cantor	219
Cajori, A history of Mathematics. Von M. Cantor	220
Descartes, Géométrie und Comte, Géométrie analytique. Von M. Cantor	222
Annuaire du Bureau des longitudes 1893—1895. Von M. Cantor	64, 222

Logik und logischer Calcul.

Peano, Notations de logique mathématique. Von M. Cantor	51
Burali-Forti, Logica matematica. Von M. Cantor	52
Hullmann, Die Wissenschaft und ihre Sprache. Von M. Cantor	101
Wundt, Logik. Von M. Cantor	101

Arithmetik, Zahlentheorie, Analysis, Algebra.

Lie, Theorie der Transformationsgruppen III. Von W. Fr. Meyer	14
Byerly, An elementary treatise on Fourier's series etc. Von R. Fricke	35
Stringham, Uniplanar Algebra. Von R. Fricke	37
Grünfeld, Ueber adjungirte Systeme simultaner linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängig veränderlichen Grösse. Von M. Meyer	44
Schwering, Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra. Von F. Schütte	45

	Seite
Bardey, Algebraische Gleichungen. Von F. Schütte	49
Jordan, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für (centesimale) Theilung. Von F. Schütte	49
Rohrbach, Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Von M. Cantor	62
Kobald, Ueber das Versicherungswesen der Bergwerks-Bruderladen II. Von M. Cantor	62
Thannabaur, Berechnung von Renten und Lebensversicherungen. Zinseszinsen und Rententafeln. Von M. Cantor	64
Fitz-Patrick et Chevrel, Exercices d'arithmétique Von M. Cantor	65
Lucas, Récréations mathématiques III. und IV. Von M. Cantor	66
Goursat (Maser), Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von W. Fr. Meyer	71
Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet. Von W. Fr. Meyer	86
Gravellius, Lehrbuch der höheren Analysis. Von W. Fr. Meyer	91
Demartres, Cours d'Analyse I. und II. Von W. Fr. Meyer	93
Ultramaré, Essai sur le calcul de la généralisation. Von W. Fr. Meyer	94
Stegemann-Kiepert, Integralrechnung. Von M. Cantor	103
Kronecker (Netto), Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale. Von G. Landsberg	144
Bachmann, Zahlentheorie II. Von W. Fr. Meyer	149
De Seguiér, Formes quadratiques et multiplication complexe. Von R. Fricke	152
Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von L. Heffter	166
Weber, H., Lehrbuch der Algebra. Von R. Fricke	179
Féaux, Buchstabenrechnung und Algebra nebst Übungsaufgaben. Von E. Jahnke	195
Epstein, Die vier Rechnungsoperationen der Besselschen Functionen. Von E. Jahnke	195
Kämpfe, Tafel des Integrals $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$. Von E. Jahnke	196
Fuchberger, Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. Von M. Meyer	196
Albrecht, Vierstellige Logarithmentafel. Von M. Meyer	198
Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. II. Von W. Fr. Meyer	201
Méray, Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale. Von W. Fr. Meyer	212
Arnoux, Arithmétique graphique. Von W. Fr. Meyer	214
Fenkner, Arithmetische Aufgaben. Von M. Meyer	215
Schubert, Arithmetische Lehrbücher. Von M. Meyer	217

Synthetische und analytische Geometrie. Trigonometrie.

Königs, Leçons de l'agrégation classique de mathématiques. Von H. Willgrod	29
Huber, Die Kegelfocalen. Von H. Brunn	31
Lemoine, La géométrie graphique. Von Beyel	34
Karagiannides, Die nichteuklidische Geometrie. Von M. Meyer	37
Klein, The Evanston Colloquium. Von R. Fricke	41
Hercher, Stereometrie und Grundlehren von den Kegelschnitten. Von M. Meyer	44

	Seite
Schwering, Trigonometrie. Von F. Schütte	46
Martus, Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. Von F. Schütte	47
Lenganer, Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Von F. Schütte	47
Bürklen, Vorunterricht in der Geometrie. Von F. Schütte	48
Thomae, Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung. Von F. Schütte	50
Hagen, Synopsis der höheren Mathematik II. Von M. Cantor	63
Lie-Scheffers, Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Von W. Fr. Meyer	67
Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Von W. Fr. Meyer	95
Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von W. Fr. Meyer	98
Fort-Heger, Analytische Geometrie der Ebene. Von M. Cantor	102
Ganter und Rudio, Analytische Geometrie der Ebene. Von M. Cantor	102
Molenbroek, Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie. Von E. Jahnke	156
Sickenberger, Planimetrie. Von E. Jahnke	157
Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Von P. Muth	184
Holzmüller, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik I und II. Von E. Jahnke	192
Kölmel, Ableitung der verschiedenen Formen der Curven dritter Ordnung durch Projection und Classification derselben. Von M. Meyer	215
Adam, Geometrische Analysis und Synthesis. Von M. Meyer	216
Brückner, Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berück- sichtigung der Polytope. Von M. Meyer	216
Spieker, Lehrbücher der Geometrie und Trigonometrie. Von M. Meyer	217
Lorber, Das Nivelliren. Von B. Nebel	76

Mechanik. Physik.

Neumann, C., Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Von B. Nebel	76
Hahn, Die Brechung des Lichtes in einer Ebene. Von B. Nebel	76
Watson, A treatise on the kinetic theory of gases. Von B. Nebel	77
Ziwet, An elementary treatise on theoretical mechanics. Von B. Nebel	77
Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity. Von B. Nebel	81
Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität. Von B. Nebel	82
Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes. Von B. Nebel	82
Fletscher, Die optische Indicatrix. Von B. Nebel	83
Hecht, Anleitung zur Krystallberechnung. Von B. Nebel	83
Wilk, Grundbegriffe der Meteorologie. Von B. Nebel	83
Scheffler, Die Aequivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Welt- gesetz. Von B. Nebel	85
Molenbroek, Over de toepassing der quaternionen op de mechanica en de natuurkunde. Von E. Jahnke	157
Bibliographie. Seite 39, 78, 107, 158, 199, 224	
Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1894 109	
" "	1. Juli bis 31. December 1894 226

Historisch-literarische Abtheilung.

Historische Miscellen II.

Von

Dr. ARMIN WITTSTEIN.

1. Da ich über einen von Dorn erklärten arabischen Himmelsglobus des 13. Jahrhunderts leider nur in einem sehr kurzen Anhängsel zu meinen Historisch-astronomischen Fragmenten berichten konnte und vermute, dass die „Transactions of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland“, in deren zweitem Bande Dorn seine Beschreibung veröffentlicht hat, nicht jedem Leser meiner Zeilen leicht zugänglich sind, so will ich hier zunächst, an Stelle jenes ungenügenden Citates, eine etwas ausführlichere Mittheilung treten lassen. Der vollständige Titel der angezogenen Abhandlung lautet in getreuer Copie: Description of an Arabic celestial globe, belonging to Major-General Sir John Malcolm, deposited in the Museum of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. By Dr. Bernhard Dorn. (London, 1829. Gr. 4^o. Mit zwei Figurentafeln.) — Der Globus ist von Messing und „augenscheinlich persische Arbeit“, wie der Verfasser aus verschiedenen Merkmalen schliessen zu können glaubt. Sein Durchmesser wird zu 9½ Zollen angegeben; hat man darunter englische zu verstehen, so wären dies etwa 230 mm. Die Schrift-Charaktere sind kufische. In der Nähe des Südpoles findet sich die Inschrift:

صنعه الفقير الى الله تعالى محمد
بن هلال المنجم الموصلى في سنة
خعد هجرية

„Der vor Gott dem Höchsten ganz
Niedrige Mohammed ben Hilâl, Astro-
nom von Mösul [am Tigris in Mesopo-
tamien], hat ihn im Jahre 674 der
Flucht verfertigt.“

Das Jahr 674 der Hegra begann (jul.) am 25. Juni 1275.

2. Die Entscheidung der berüchtigten, noch immer schwebenden Streitfrage nach dem wahren Entdecker der dritten Mond-Ungleichheit ist vor ungefähr zwei Jahren durch die grosse kritische Untersuchung, L'Almageste d'Abu'l Wéfa Albúzdjani, des Herrn Baron Carra de Vaux, im 19. Bande des „Journal Asiatique“ (Huitième série. Paris, 1892), in ein

Stadium gelangt, das man versucht sein möchte, ein abschliessendes zu nennen; zum Mindesten aber mussten ihre Ergebnisse auf die Anhänger des jüngeren Sédillot eine sehr ernüchternde Wirkung ausüben. Ich halte es geradezu für meine Pflicht — auch schon deshalb, weil ich mich in diesen Blättern selbst offen zur Meinung L. Am. Sédillot's bekannt habe — die Aufmerksamkeit der Astronomen und Mathematiker, die sich nicht mit der Lektüre philologischer Zeitschriften befassen, auf diese bedeutsame Arbeit des französischen Gelehrten zu lenken, und um so mehr glaube ich mich hierzu berufen, als meines Wissens bis jetzt von anderer Seite Nichts der Art geschehen ist.

Ausser der Einleitung, die übrigens keine Sylbe davon enthält, dass man irgend eine Entdeckung zu erwarten habe, zerfällt der „Almagest“ des Abû'l Wefâ in drei Theile: 1. Ebene und sphärische Trigonometrie. 2. Anwendung der trigonometrischen Formeln auf Beobachtungen. 3. Theorie der Bewegung der Planeten. Hiervon umfasst der erste Theil das Beste, während der dritte, der eigentlich den Kern des Werkes bilden sollte, viel gelitten hat; „er entspricht durchaus nicht Dem, was der erste erwarten lässt, und rechtfertigt in keiner Weise das Ansehen, dessen sich Abû'l Wefâ als Beobachter erfreute“.

„Die noch immer fortbestehenden Dunkelheiten im 10. Abschnitte des Kapitels vom Monde [التالت الذى يوجد للقمر المسمى اختلاف المحاذاة] فى الا اختلاف und Ungleichheit mohâdât heisst] müssen auf einer nachtheiligen Textveränderung beruhen, die, wie wir an mehreren Stellen Gelegenheit hatten zu betonen, überhaupt die ganze dritte Abtheilung von Abû'l Wefâ's Almagest in schädlicher Weise beeinflusst hat. Gleichwohl scheint der in Rede stehende Abschnitt ganz besonders gelitten zu haben. Der Styl krankt an seltener Schwerfälligkeit, die Exposition ist ungemein weitschweifig; bald bezieht sich der Verfasser auf ein voraufgehendes Kapitel über denselben Gegenstand, bald äussert er sich so, als käme er nun zu Etwas, das bisher noch nicht erklärt worden sei.“..... „Geben wir daher Jedem, was ihm gebührt: Tyge Brahe den vollen Ruhm, da er niemals ein Schriftstück eines arabischen Astronomen vor Augen haben konnte, welches die erste Entdeckung der Variation enthielt; Ptolemaeus oder seinen Vorgängern die Ehre einer genaueren Theorie, als man im Allgemeinen anzunehmen geneigt ist, die den Keim der dritten Mond-Ungleichheit in sich trug; Abû'l Wefâ und seinen Landsleuten endlich sehr wenig in der bewussten Angelegenheit, höchstens das Verdienst fortgesetzter, aber unfruchtbarer Beobachtungen, insofern diese nämlich nur fähig waren, die Wissenschaft zu erstarken, nicht aber deren Fortschritt im Gefolge zu haben.“ — Diese Schlussworte anzuführen, schien mir nöthig; doch glaube ich kaum, dass ein Astronom, dem die Geschichte seiner Wissenschaft nicht ganz fremd ist, sie in allen

Punkten wird unterschreiben können. Derlei Bedenken haben jedoch mit der Hauptsache, auf die es hier ankommt, nichts zu thun, und kann daher ihre Begründung, die sich in Kürze nicht wohl würde erledigen lassen, füglich unterbleiben.

3. Ein Zufall setzt mich in den Stand, über die Lebenszeit des Mathematikers 'Omar Alhajjami Angaben machen zu können, die vielleicht als hinreichend erachtet werden dürften und, wenn ich recht unterrichtet bin, bis zur Gegenwart vermisst wurden, selbst bei Historikern, wie Franz Woepcke (*L'algèbre d'Omar Alkhayyami etc.* Paris, 1851) und Moritz Cantor (im I. Bande seiner „Vorlesungen“), die der Würdigung seiner Leistungen im vollen Maasse gerecht werden. Er hat jedenfalls in dem Zeitraume von 1056 bis 1123 unter den Lebenden gewelt, später aber nicht mehr; denn im letztgenannten Jahre starb er. — Dazu hat das Excerpt aus einem persischen Codex verholffen, welches Hyde in seinem tiefgelehrten Werke über die Religion der alten Perser* glücklicherweise der Nachwelt überliefert hat, von dem aber nur der Anfang uns hier interessirt: In Libro *Persico D. Bunlei*, Num. 44, de Morte Celebrissimi *Astronomi Omar Cheiyam*, sequente modo legitur;

وتاریخ قد مذکور و مسطور
است که وفات ملکن الحکما سلطان العلم
قدوة الفضلاء علام خواجه عمر خیام در سنة
سبع عشر و خمس مایه بوده است در
نیشابور و در تمام علوم و حکمیات یکانه
واعلم زمانه بود خواجه نظامی عروضی
سمرقندی که اعلم وقت خود بود.
ویکی از شاگردان خواجه عمر بوده u. s. w.

In Chronico memoratum & exaratum est, quodd Mors Regis Sapientum & Principis Doctorum atque Exemplaris Excellentium, Doctissimi Chogja Omar Cheiyam accidit anno 517 in Urbe Neishabur. Atque in omnibus Scientiis ac Sapientii unicus & scientissimus sui temporis fuit Chogja Nezami Versificator Samarcondensis, qui sui temporis Doctissimus atque unus ex Discipulis dici Chogja Omar fuit: et is mortem Chogja Omar sequente modo narrat.

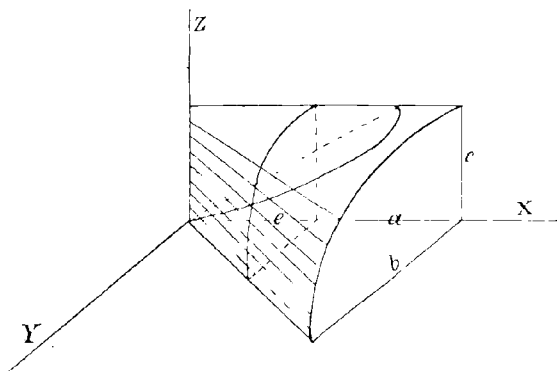
Der Anfang des Jahres 517 d. H. fällt (jul.) auf den 27. Februar 1123. — Da der Hôga (Lehrer, Meister) 'Omar im Jahre 1076 zum *anni persici reformator* erwählt worden war, so musste er damals, auch wenn er der Monge seiner Zeit gewesen wäre, doch etwa 20 Jahre gezählt haben. Nischabur, wo er aus dem Leben schied, liegt im nordöstlichen Persien ungefähr unter $36\frac{1}{4}^{\circ}$ Nordbreite.

4. Schleifen bildende Curven, ganz besonders ihr Prototyp, die Lemniscate, hat das Alterthum eben so zweifellos gekannt, wie deren

* *Veterum Persarum et Parthorum et Medorum Religionis Historia.* (Autor est Thomas Hyde, S. T. D. Linguae Hebraicae in Universitate Oxon. Professor Regius, & Linguae Arabicae Professor Laudianus.) Editio secunda. Oxonii, MDCCLX. 4^o. S. 529.

mathematische Discussion dazumal unterblieb, vielleicht auch unterbleiben musste, und erst sehr spät, im August 1638, also zu einer verhältnissmässig gar nicht so weit hinter uns liegenden Zeit, begegnen wir einer solchen, nämlich der des sogenannten „Cartesischen Blattes“; von dieser Curve sagt M. Cantor („Vorlesungen“, II. Bd. S. 781), „dass sie vermuthlich eine der ersten, wenn nicht die erste Schleifenlinie gewesen sei, mit der man sich beschäftigt habe“.

Die Lemniscate oder, wenn man lieber will, die Hippopede des Eudoxus* definirte vor ca. 2000 Jahren Heron von Alexandria als Schnitt eines wulstartigen Rotationskörpers ($\sigma\pi\epsilon\iota\lambda\alpha$) mit einer Ebene, und nirgends ist angegeben, dass dieselbe jemals als ebener Schnitt einer Regelfläche betrachtet worden wäre, die sich auch schon den Alten fast von selbst hätte darbieten können. Es ist, wenn ich mich so ausdrücken darf, ein Mittel Ding zwischen dem geraden Cylinder und Kegel, das ich meine, d. h. eine Fläche, bei der die erzeugende Gerade, statt wie beim Kegel, durch den Mittelpunkt eines Basis-Kreises des Cylinders hindurchzugehen, sich längs eines Durchmessers dieses Kreises bewegt, wodurch zwei mit der Schneide an einander stossende keilförmige Gebilde oder Conoide entstehen, aus denen die Lemniscate sammt ihrer allgemeinen Gestalt, die jetzt Cassini'sche Curve heisst, durch ebenen Schnitt hervorgeht, wie das Folgende durch eine



höchst einfache Entwicklung, auf nur ein wenig allgemeinerer Grundlage, zeigen wird.

Eine Ellipse, von den Halbachsen b und c , sei so situirt, dass ihr Mittelpunkt auf der Achse der X , in der Entfernung $x = a$ vom Ursprunge, liegt, und ihre beiden Achsen resp. parallel

den Achsen der Y und der Z sind. Eine zur Ebene der XY parallele Gerade möge nun gleichzeitig die Ellipse und die Achse der Z treffen;

* Die neueste, der Untersuchung der Hippopede gewidmete Schrift ist betitelt: „Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. I. Theil: Lebensbeschreibung des Eudoxos, Ueberblick über seine astronomische Lehre und geometrische Betrachtung der Hippopede von Hans Künssberg. (Programm zum Jahresbericht der viercursigen Königl. Realschule Dinkelsbühl pro 1888.)“ 8°. Mit einer Figurentafel.

dann ist der geometrische Ort aller Lagen der erzeugenden Geraden die windschiefe Regelfläche

$$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Schneidet man diese Fläche durch eine Ebene, welche durch die Achse der Y gelegt und gegen die XY -Ebene um den Winkel α geneigt ist, und nimmt, um die wahre Schnittfigur zu erhalten, eine leichte Coordinaten-Transformation vor, so ergibt sich

$$\frac{x_0}{y_0}(c - x_0 \sin \alpha) \cdot \frac{x_0}{y_0}(c + x_0 \sin \alpha) = \left(\frac{ac}{b \cos \alpha} \right)^2,$$

eine Gleichung, die sofort den Lemniscaten-Charakter der betreffenden Curve verräth. Letztere schneidet die neue Achse der X in $x_0 = 0$ und $x_0 = \pm c \cdot \operatorname{cosec} \alpha$, oder im Coordinaten-Anfang und in zwei Punkten, in denen die Tangente senkrecht auf der Achse der X steht. Im ersten wird ihre Neigung durch $\pm \frac{b}{a} \cos \alpha$ bestimmt, d. h. die Neigung der beiden hier möglichen Tangenten; denn der Anfangspunkt der Coordinaten erscheint als ein Doppelpunkt, wenn auch nicht im allgemeinen Sinne. Weiter besitzt die Curve in

$$\left(x_0 = \pm \frac{c \cdot \operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = \pm \frac{bc}{2a} \cdot \operatorname{cotg} \alpha \right)$$

Maximalpunkte, in denen die Tangenten parallel der Achse der X sind. Führt man in die obige Gleichung die Polarcoordinaten r , γ ein und berücksichtigt, dass $r \cos^2 \gamma = r_1$, so folgt:

$$r_1 = \pm \frac{\sqrt{(b^2 c^2 \cos^2 \alpha - a^2 c^2) + (b^2 c^2 \cos^2 \alpha + a^2 c^2) \cos 2\gamma}}{b \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Ist nun $\cos \alpha = \frac{a}{b}$, so erhält man die gemeine Lemniscate:

$$r_1 = - \frac{\pm c}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \cdot \sqrt{\cos 2\gamma},$$

die im Coordinaten-Anfange, ihrem Inflexionspunkt, unter 45° mit concaver Krümmung ansteigt, und bei der die halbe Entfernung ihrer Brennpunkte

$$\frac{c}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}$$

beträgt. Ein solcher Schnitt ist aber nur dann reell, wenn $a < b$, d. h., wenn die beiden Geraden $(ay - bx)(ay + bx) = 0$, die Spuren unserer Fläche in der alten XY -Ebene, einen Winkel mit einander einschliessen, der grösser als 90° ist, oder wenn die Fläche eine grosse Apertur besitzt.

Jede, zur Ebene der YZ parallele Ebene, z. B. die in der Entfernung $x = e$ vom Anfangspunkte, schneidet das Conoïd nach einer Ellipse. Der körperliche Inhalt des keilförmigen Raumes zwischen Schnittellipse und Achse der Z wird, wenn man bei der Integration von einem der immer gleichschenkelige Dreiecke liefernden Querschnitte parallel der Ebene der XY ausgeht:

$$V = \frac{e^2 b}{ac} \int_{-c}^{+c} \sqrt{c^2 - z^2} dz = \frac{e^2}{2a} \cdot c b \pi.$$

Eine Tangentenebene

$$\xi x^2 b^2 + \eta y a^2 c^2 + \xi x (z^2 - c^2) b^2 - x^2 z^2 b^2 = 0$$

an die Fläche (welche für $b = c$ in den cono-cuneus von Wallis übergeht) schneidet sie nach einer Erzeugenden und einer Linie dritter Ordnung.

Wird endlich in der voraufgehenden Lemniscaten-Gleichung der Factor der Wurzelgrösse im Zähler der Einheit gleich, so nimmt das die Länge des Lemniscaten-Quadranten darstellende elliptische Integral erster Gattung die Form an:

$$\int_0^1 \frac{dr_1}{\sqrt{1 - r_1^4}}.$$

Die abgekürzte Multiplication.

Von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

Es unterliegt ja keinem Zweifel, dass in der freilich nur handschriftlich erhaltenen Arithmetica von Jost Bürgi die abgekürzte Multiplication gelehrt ist, und dass dieses Werk kurz nach 1592 geschrieben wurde. Aber Jost Bürgi ist nicht der Einzige, welcher auf diesen Rechnungsvortheil gelangt ist, und zwar geschah dies etwa um dieselbe Zeit oder etwas später. Vor mir liegt eine Handschrift, welche den Titel führt: „Georgii Joachimi Rhetici Canon Triangulorum. Johannes Praetorius Joachimicus Canonem hunc olim ab authore acceptum, descripsit Cracoviae, Anno 1569. Idem denuo differentiis et sinu verso auctum, eundem depinxit Anno 1599 Mense Julio, Altorfij.“*

Dem eigentlichen Canon ist auf den folgenden leeren Blättern mancherlei hinzugefügt unter dem Gesamttitel: „Varii Generis Miscellanea Congesta a Johan. Praetorio Joachimico.“ Diese Miscellanea enthalten nach einander: „I. Methodus constructionis Magni Canonis Rhetici.“ „II. Recentiorum quaedam inuenta, ad compendiosam Canonis constructionem spectantia.“ „III. Compendiosa multiplicatio duorum inter se sinuum, quando factus per 1000 etc. diuidendus est“, und daran anschliessend steht dann Folgendes:

<i>Possunt et in multiplicatione duorum sinuum,</i>	237401 5
<i>vel quorumcumque aliorum numerorum, praeteriri</i>	184710 2
<i>superuacaneae notae, quae alias per diuisionem sinus</i>	237401 5
<i>totius resecari solent.</i>	189920 8

Si multiplicari debent nostri propositi, ducatur primus inferioris, velut 1, in omnes superiores. postea hac inferiore nota, cum postrema superioris scilicet 5 deleta, subsequens inferioris, scilicet 8, in residuas superioris multiplicetur.	9496 0
Rursus 8 cum penultima superioris, scilicet 1, deletis sequens inferioris, scilicet 9, in residuas superioris etc. Sed sciendum,	1661 8
si factus diuidi debet per sinum totum, qui habet unitati postpositas tot zyphras, quot sunt notae in inferiore numero multiplicato:	23 7
	4
	438504

* Codex latinus Monacensis Nr. 24101, früher ZZ 1101. In gross Folio.

quod ultima linea adhuc amputari debet, ut vides in exemplo. ad id tamen prodest, ut ultima nota quoti nostri eo exactior definiri possit.

484809 6	Item sinus 29 gr scilicet sit ducendus in sinum 1 gr
124324	484809 6
481809	124524
339360	scilicet, et factus diuidendus in 10000000. Hic in inferiore sunt
96960	6 notae et tamen propter 10000000 7 ultimae notae ampu-
19392	tandae. Ergo tollatur de superiore ordine ultima nota, ut vides.
2420	Ratio per se manifesta est.
96	
16	
60369	

Aliter. Vel ordine inverso, ut ultima inferior in primam superiorem, postea penultima inferioris in duas priores superioris: item antepenultima

484809 6	inferioris in tres priores su-
124824	perioris etc. et hic modus
16	vulgaris multiplicationis or-
96	dinem seruat.
2420	
19392	
96960	
484809	
60369	

Si sinus 7503415 multiplicari debet in 57320 et factus in 10000000 dividi. Siquidem superior numerus plene loca sinus explet, inferior deficit:

75034 15	sic collocato: et amputatis
57320	superioribus quoque duabus
375170	notis, perficiatur ut antea
52521	multiplicatio.
2250	
15,0	
43009	

Item si 508071 ducendum sit in 3421, et factus in 10000000 dividendus. Quia maior numerus 0508071 et amputatis tribus superioribus abundantibus notis pro radio dato plenus non est, 3421 supra inferiorem modo solita deberet enim habere 7 notas ab initio, defectum exple adposita 0 hoc modo:

1529	
200	
10	
173	

Sit 45082 ducendus in 425 et partiendus in 100000. Maiorem video notas pleni sinus habere, sic igitur collocandi:

$$\begin{array}{r}
 45\ 0\ 82 \\
 42\ 5\ \overline{) } \\
 \hline
 180\ 0 \\
 9\ 0 \\
 2\ 0 \\
 \hline
 \text{Fac. } 191\ \overline{) }
 \end{array}$$

Sit 7538 multiplicandus in 7041 et factus in 100000 dividendus. Neuter horum pleni sinus notas habet. Sic ergo notabis.

$$\begin{array}{r}
 075\ 3\ \underline{)8} \\
 704\ 1\ \overline{) } \\
 \hline
 527\ 1 \\
 2\ 8 \\
 \hline
 530\ \overline{) }
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{Proba: } 7538 \\
 7041 \\
 \hline
 7538 \\
 3\ 0152 \\
 \hline
 527\ 66 \\
 \hline
 \text{Fac.: } 530\ \overline{) }
 \end{array}$$

Multiplicetur 50384 in 70342 et factus diuidatur in 10000000. Sumo alterutrum et quidem maiorem.

$$\begin{array}{r}
 0070\ 3\ \underline{)42} \\
 5038\ 4 \\
 \hline
 351\ 5 \\
 2\ 1 \\
 \hline
 \text{Fac.: } 353\ \overline{) }
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Possit el aliter fieri,} \\
 \text{sed haec collocatio est ex-} \\
 \text{pedita.}
 \end{array}$$

Solent hypotenusae et quaedam tangentes pleno sinu esse abundantiores, si ergo cum aliis multiplicandi: vide exempla sequentia. Quoties sinus plenus in abundantiore numerum multiplicandus, prior regula observetur, ut:

$$\begin{array}{r}
 75387\ 9 \\
 3010\ 4 \\
 \hline
 226163\ 4 \\
 753\ 8 \\
 30\ 0 \\
 \hline
 226947\ \overline{) }
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Divisore existente} \\
 100000.
 \end{array}$$

Si uterque aequaliter abundans, superiori tot zyphras adponito, quot sunt notae abundantes. Ut datis 3204534 et 3204534. Cum radius sumatur 100000, duae utrinque notae ultra sinum perfectum abundant, ergo duabus. Zyphris superior augeatur.

$$\begin{array}{r}
 32045340 \\
 320453\ 4 \\
 \hline
 96136020 \\
 64090680 \\
 128181\ 2 \\
 16022\ 5 \\
 961\ 2 \\
 128\ 0 \\
 \hline
 102690381\ \overline{) }
 \end{array}$$

Idem fiat, si alter in duabus notis reliquus in una abundat. Ut si
 257312 0 dati sint 257312 et 25030.
 2503 0 Divisore posito 10000.

$$\begin{array}{r} 514624 \overline{)0} \\ 128656 \overline{)0} \\ 771 \overline{)9} \\ \hline 644052 \overline{) } \end{array}$$

Si unus abundat, alter deficit, de abundante tot amputentur notae,
 quot in reliquo deficiunt et observatur regula. Ut datis:
 320 5 $\overline{)7}$ 32057 et 734. Divisor autem
 73 4 sit 10000. Minori ad pleni-
 2243 $\overline{)5}$ tudinem una nota deest, ergo
 96 0 abundanti una auferenda nota.
 12 8

$$\hline 2352 \overline{) }$$

Item dati sint 3201251 et 352. Divisoris 100 000. Quia minor duabus
 a pleno notis deficit: ergo
 3201 2 $\overline{)51}$ de maiore duae amputandae
 35 2 notae, si numerus is sit plenus
 9603 6 siue abundans.

$$\hline 1600 5$$

$$\hline 64 0$$

$$\hline 11268 \overline{) }$$

Si duo abundantes aequaliter, tot maiori Zyphras subiungantur, quot in alterutro abundant.

Si inaequaliter abundat uterque, tot maiori 0 adiungantur, quot notae in minore abundant.

- Si multi-
plicandus
- I. Plenus in plenum: servatur generalis regula;
 - II. Plenus in abundantem: eadem teneatur regula. abundante superiore loco collocato;
 - III. Plenus in deficientem vel diminutum: tot amputantur notae de maiore, quot deficiunt in minore;
 - III. Abundans in abundantem: tot. 0. maiori adiciantur, quot abundant in minore;
 - V. Abundans in deficientem: de abundante tot auferantur notae, quot deficiunt in minore;
 - VI. Deficiens in deficientem: de maiore tot notae auferantur, quot deficiunt in minore et subscribatur minor.

De quo vero numero una vel plures notae amputantur is semper superiori loco collocetur, reliquus ei subscribatur.

Dass hier für die abgekürzte Multiplication von Decimalbrüchen, denn nur um solche handelt es sich ja, alles geleistet ist, was an Fällen überhaupt vorkommen kann, ist klar. Praetorius hat für alle anderswoher entnommenen Regeln, ja selbst Beispiele, stets den Verfasser derselben angegeben — er nennt z. B. Otho, Rheticus, Pitiscus, Adrian van Romen, Ludolph von Coeln u. A. —, so dass anzunehmen erlaubt ist, dass er alles nicht mit solchem Hinweis Versehene als sein Eigenthum in Anspruch nimmt. Es ist daher wohl nicht mehr als billig, wenn man ihm für die Erfindung und Verbreitung dieser wichtigen Rechnungsart neben Jost Bürgi als Hauptbewerber nennt. An das eben Mitgetheilte schliesst sich als

IV. die vollständige Auflösung der rechtwinkligen und der schiefwinkligen sphaerischen Dreiecke sehr übersichtlich in Tabellenform gebracht.

Am Schlusse derselben findet sich folgende für die Geschichte wichtige Bemerkung:

„Johan. Wernerus Norimbergensis, in suis IIII de triangulis libris ut plurimum occupatus fuit in demonstratione qualitatis arcus quaesiti vel anguli, quae comitatur qualitatem datorum. Eos libros **Weneri Rheticus habuit, sed manuscriptos, necdum puto excusos.** In quarto libro duos illos casus pertractat, quorum regulas proximis duabus paginis exposuimus, sed aliquanto prolixior est, opus enim habet duabus operationibus.“

Es ist dies jedenfalls diejenige Stelle, auf welche sich Doppelmayr* als in einem Manuskripte des Praetorius befindlich bezieht. Nach einigen leeren Blättern folgt dann folgende:

Cubi duplatio practica. Joh. Pr.

In quadrante sit bc arcus hexagoni, et bifariam secetur in d . Rursus arcus dc bifariam in e et iterum de in f , et connectatur af , et producatur db , af quousque libet. Detur iam latus cubi ag et erigatur perpendicularum gh . Et erit ah latus cubi, qui duplus est prioris differentia insensibili. Ad demonstratiuam autem praecisionem angulus fab in modico iusto maior est, non tamen duorum primorum scrupulorum unius gradus intervallo, quod perceptu difficile est. Ad sensum fiet probatio, si ah aequalis fiet ai , et ductu perpendiculari ik fiat huic aequalis al . Et rursus ducta perpendiculari lf fiat af aequalis am , et perpendicularis tandem erigatur mn . Manifestum est ag , ai , al , am deinceps analogos esse sicut et ah , ak , af , an . Item gh , ik , lf , mn . Quando igitur am dupla depraehendetur ipsius ag , vel an dupla ah , vel tandem gh dimidium ipsius mn , certum erit propositum. Ex diligenti autem descriptione hoc fieri

* Doppelmayr, Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern. Nürnberg 1730. Fol. S. 34, Anm. cc.

Johann Otto* hatte Praetorius im August 1573 zu Wittenberg mitgetheilt, dass der Umfang des Kreises grösser sei als

$$6 \frac{4247779609}{15000000000} : 2, \text{ aber kleiner als } 6 \frac{4247779611}{15000000000} : 2.$$

Praetorius rechnet das um in

$$3,1415926536\frac{1}{2} < \pi < 3,1415926537.**$$

Derselbe Otho hatte ihm damals noch gesagt: „Et contracte admodum proximum esse rationem ut 355 ad 113 et vere propiorem quam ea qua Ptolemaeus usus est, media scilicet inter Archimedis terminos videlicet et 377 ad 120.“***

Rheticus hatte seinen Werth aus dem sinus $1'' = 4848136811 : 10^{15}$ gewonnen, das heisst, aus der halben Seite des 648000ecks, während Ludolph von Cöln bis zum 167772160eck gegangen war. Nachdem Praetorius auch die beiden π einschliessenden Werthe Ludolph's gegeben hat, setzt er hinzu:

„Quid putas deberi ei, qui adhuc 10 vel 100 latera hisce adinuenit? Respondeo: Minus quam 0“,

und mit dieser sicherlich für das vortreffliche Verständniss ihres Verfassers zeugenden Bemerkung will ich diese vielleicht schon zu lange Notiz schliessen.

* Johann Otto muss heissen Valentin Otho. Man sehe meine kleine Note: „Zur Biographie des Rheticus“ (Altpreuussische Monatsschrift XXXI, 5. u. 6. Heft, S. 491—496), wo ich weitläufiger über diese Notizen gehandelt habe.

** Hiervon ist offenbar die erste Behauptung falsch, da
 $\pi < 3,1415926536$
 ist.

*** Damals (1573) war also der Näherungswerth $\frac{355}{113}$ für π schon bekannt, von welchem Adrian Metius sagt, sein Vater habe ihn in einer Streitschrift wider Duchesne zuerst veröffentlicht. Diese Streitschrift kann doch aber vor 1583 resp. 1586, in welchen Jahren die Schriften des Duchesne erschienen sind, nicht herausgekommen sein, somit müsste also Otho als der Erfinder dieses bequemen Verhältnisses angesehen werden. Die Entstehungsart

$$\frac{355}{113} = \frac{377 - 22}{120 - 7}$$

ist ja wohl an sich klar. Es ist der sogenannte Correspondenzsatz mit Subtraction auf die näherungsweise richtige Proportion

$$\frac{377}{320} \sim \frac{22}{7}$$

angewendet worden.

Recensionen.

SOPHUS LIE. *Theorie der Transformationsgruppen*. Dritter und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von FRIEDRICH ENGEL. Leipzig 1893. B. G. Teubner. XXV u. 830 S.

Das grosse Werk über die von Herrn Lie begründete Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen — man vergleiche die in dieser Zeitschrift (Bd. 34 1889 S. 191 u. flg., Bd. 39 1894 S. 95 u. flg.) erschienenen Besprechungen der beiden vorausgegangenen Bände — liegt mit dem dritten Bande nunmehr abgeschlossen vor.

Man darf wohl schon jetzt behaupten, dass dieses Werk in der Geschichte der mathematischen Literatur eine bleibende Stelle einnehmen wird.

Was die Wirkung auf die nächste Zukunft angeht, so sind wir überzeugt, dass gerade der vorliegende Schlussband wegen der mannigfachen Anwendungen auf Geometrie und Invariantentheorie viele Fachgenossen veranlassen wird, das Studium der grundlegenden beiden ersten Bände nachzuholen.

Andererseits liegt es in der Natur der Sache, dass einmal eine Reihe von Anwendungen aus dem specifischen Bereiche der Gruppentheorie nicht heraustreten, andere wiederum (so auf die Theorie der complexen Zahlen, Differentialinvarianten, Mechanik) hier nicht berücksichtigt werden konnten.

Vorab sei hervorgehoben, dass ein sorgfältiges, von Herrn Engel ausgearbeitetes Namen- und Sachregister dem Leser eine nicht unwesentliche Erleichterung in der Orientirung gewährt. Viele werden auch den Herausgebern Dank wissen für das ausführliche Schlusskapitel über die gruppentheoretischen Untersuchungen anderer Forscher, welches damit zugleich die Leistungen von Herrn Lie selber in das richtige Licht rückt.

Der Inhalt lässt sich im Wesentlichen in vier verschiedene Theile zerlegen.

Im ersten Theile werden die endlichen continuirlichen Gruppen (von Punkttransformationen) im Gebiete der Geraden, der Ebene und des Raumes, unter ihnen wiederum insbesondere die projectiven Gruppen, klassificirt nach „Typen“, aufgestellt.

Während diese Entwicklungen eine gewisse Vollständigkeit erreichen, stösst die Ausdehnung derselben auf den n -fach ausgedehnten Raum auf solche Schwierigkeiten, dass — im zweiten Theile — eine Beschränkung auf einzelne Klassen besonders wichtiger Gruppen eintritt.

Dagegen lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der endlichen continuirlichen Gruppen mit verhältnissmässiger Leichtigkeit auf den Fall übertragen, wo die Transformationen derselben rein reell sind; insbesondere erfährt dadurch der erste Theil eine wesentliche Ergänzung.

Der dritte Theil erörtert eingehend eine der vorzüglichsten Anwendungen, die Herr Lie überhaupt von seiner Theorie gemacht hat, nämlich auf die Grundlagen der Geometrie, soweit dieselben eben den Mitteln der Gruppentheorie überhaupt zugänglich sind.

Im letzten Theile werden allgemeine Betrachtungen über endliche continuirliche Gruppen entwickelt, die eine Ergänzung zu den beiden ersten Bänden des Werkes bilden, namentlich insofern, als sie eine rein begriffliche Auffassung von den Beweisen der Hauptsätze ermöglichen.

Des Schlusskapitels ist bereits gedacht worden.

Bei der überreichen Fülle des Stoffes muss von vornherein auf eine gleichmässige Besprechung der einzelnen Kapitel verzichtet werden; da es sich überdies vorwiegend um Fruchtbarmachung von früher entwickelten Methoden handelt, mag es uns um so eher gestattet sein, nur die wichtigsten Ergebnisse, sowie den Standpunkt, den die Herausgeber bei den einzelnen Problemen einnehmen, zu skizziren.

Da ist denn gleich zu Anfang der grundlegende Satz zu betonen, dass die verschiedenen Gruppentypen der Geraden, das ist der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit — sofern immer alle Gruppen zu einem und demselben Typus gerechnet werden, die sich durch Ausübung irgend welcher Transformationen der Variablen in einander überführen lassen — auf die Normalform von projectiven Gruppen gebracht werden können. Es sind nur drei Typen, welche repräsentirt werden durch die allgemeine projective Gruppe auf der Geraden nebst den beiden Untergruppen von ihr, welche zwei Punkte resp. einen Punkt auf der Geraden festlassen. Dieser Befund mag Manchem sehr plausibel scheinen, ist aber keineswegs so sehr leicht beweisbar. Von den drei völlig verschiedenen Beweisen, welche dafür erbracht werden, mag etwa der zweite, als besonders durchsichtig, gekennzeichnet werden.

Die infinitesimale Transformation einer r -gliedrigen, das heisst von r und nicht weniger Parametern abhängende Gruppe in einer Variablen x hat die Gestalt:

$$\{e_1 \xi_1(x) + e_2 \xi_2(x) + \dots + e_r \xi_r(x)\} \frac{df}{dx} = \xi(x) \frac{df}{dx},$$

wo f eine beliebige Function, die ξ_i gewisse Functionen von x , und die e_i willkürliche Constante bezeichnen. Der Factor $\xi(x)$ kann als die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^r \xi}{dx^r} + \alpha_1(x) \frac{d^{r-1} \xi}{dx^{r-1}} + \dots + \alpha_{r-1}(x) \frac{d \xi}{dx} + \alpha_r(x) \xi = 0$$

angesehen werden, und umgekehrt definiert eine solche Gleichung eine r -gliedrige Gruppe in x , sobald ihr die charakteristische Eigenschaft zu-

kommt, dass stets irgend zwei Lösungen ξ , η eine dritte $\xi\eta' - \eta\xi'$ bedingen.

Die genannte Forderung führt fast unmittelbar zu einer Reihe von Identitäten zwischen den α , welche erstens zeigen, dass r nur der Werthe 1, 2, 3 fähig ist; zweitens, dass in diesen drei Fällen die bez. Gleichungen lauten müssen:

$$\xi' + \alpha\xi = 0, \quad \xi'' + \alpha\xi' + \alpha'\xi = 0, \quad \xi''' + 2\alpha\xi'' + \alpha'\xi' = 0;$$

drittens, dass jede dieser Gleichungen — ganz gleichgiltig, welche Function man für $\alpha(x)$ nimmt — immer nur einen einzigen Gruppentypus definiert.

Wählt man den speciellen Werth $\alpha = 0$, so resultirt gerade die projective Normalform für die drei Gruppentypen:

$$1) \xi = e_1, \quad 2) \xi = e_1x + e_2, \quad 3) \xi = e_1x^2 + e_2x + e_3,$$

oder, in endlicher Darstellung:

$$1) x_1 = x + a, \quad 2) x_1 = ax + b, \quad 3) x_1 = \frac{ax + b}{1 + cx},$$

wo die a , b , c Parameter bedeuten.

Hieran knüpft sich sofort die besondere, aber nicht minder wichtige Aufgabe, die verschiedenen Typen projectiver Gruppen auf der Geraden anzugeben, wo nunmehr alle die Gruppen zu einem und demselben Typus zu rechnen sind, welche durch projective Transformationen in einander übergehen.

Mit Hilfe der zu der „allgemeinen“ projectiven Gruppe 3) adjungirten Gruppe und einer geeigneten geometrischen Deutung derselben findet man, dass zu den obigen drei projectiven Typen jetzt nur noch eine hinzutritt; die eingliedrige Gruppe 1) spaltet sich nämlich in zwei, von denen die eine zwei getrennte, die andere zwei zusammenfallende Punkte auf der Geraden festlässt. Während die letztere eben durch 1) repräsentirt wird, wird es die erstere durch:

$$1') \quad x_1 = ax.$$

Die eben erörterte Aufgabe erweitert sich abermals zu der, alle Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in zwei Variablen:

$$4) \quad x_1 = a_1x + a_2y; \quad y_1 = a_3x + a_4y$$

zu bestimmen.

Die Durchführung stützt sich wesentlich darauf, dass diese Gruppe eine — durch die Bedingung $a_1a_4 - a_2a_3 = 1$ charakterisirte — invariante Untergruppe besitzt, welche mit der allgemeinen projectiven Gruppe 3) holoeidrisch isomorph ist.

Im Ganzen ergeben sich elf Untergruppen von 4), von denen zwei dreigliedrig, vier zweigliedrig, fünf endlich eingliedrig sind.

Die Verfasser wenden sich nunmehr zu der ungleich schwierigeren Bestimmung aller Typen von endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene.

Die Lösung erfolgt stufenweise; erst werden die primitiven Gruppen erledigt, das sind solche, bei denen keine einzige Curvenschaar $\varphi(x, y) = \text{const.}$

invariant bleibt, sodann die imprimitiven Gruppen, diese wieder in gewisse Klassen eingetheilt.

Ob eine Gruppe G der Ebene primitiv ist oder nicht, lässt sich fast unmittelbar entnehmen aus den Anfangsgliedern der Reihenentwicklung, welche für die infinitesimale Transformation der einen beliebigen Punkt der Ebene in Ruhe lassenden Untergruppe von G besteht.

Hieraus wird, mit Hilfe früherer Sätze, ohne Weiteres das merkwürdige Ergebniss hergeleitet, dass nur drei primitive Typen existiren, die sich wieder auf eine projective Normalform bringen lassen:

$$5) \quad x_1 = \frac{ax + by + c}{gx + hy + 1}, \quad y_1 = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + 1},$$

$$6) \quad x_1 = ax + by + c, \quad y_1 = dx + ey + f,$$

$$7) \quad \text{dito mit der Bedingung } ae - bd = 1.$$

Sie heissen die allgemeine projective Gruppe (der Ebene), die lineare und die specielle lineare Gruppe, und führen resp. gerade acht, sechs, fünf Parameter mit sich.

Bei einer imprimitiven Gruppe G existirt mindestens eine invariante Curvenschaar $\varphi(x, y) = \text{const}$; führt man also an Stelle von x, y zwei neue Veränderliche ein, deren eine φ ist, so giebt es eine zu G isomorphe Gruppe G' , welche die eine Variable φ für sich transformirt. Daher sind vier Fälle zu unterscheiden, da, wie wir wissen, φ nur drei-, oder zwei-, oder ein-, oder nullgliedrig (in letzterem Falle nämlich gar nicht) transformirt werden kann.

Eine eingehende Untersuchung der vier Fälle führt zunächst zu einem Systeme von Gruppentypen, welche sicher alle überhaupt möglichen Typen imprimitiver Gruppen umfassen.

Weiter handelt es sich darum, zu entscheiden, welche der so gewonnenen Typen etwa noch mit einander äquivalent sind.

Dies durchaus nicht so einfache Problem ist auch dadurch von Interesse, als es auf ein anderes, schon von Laguerre, Halphen, und weiterhin von englischen Mathematikern behandeltes Problem zurückführbar ist, nämlich festzustellen, welche invarianten Eigenschaften einer linearen Differentialgleichung gegenüber gewissen Transformationen beider Variablen zukommen.

Die wirkliche Lösung der Aufgabe geschieht indessen auf einem directeren Wege: man wird die imprimitiven Gruppen der Ebene noch einmal in Klassen einzutheilen suchen, jetzt aber derart, dass jede Gruppe einer und nur einer Klasse angehört.

Dazu dient die Zahl der bei einer Gruppe invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven; je nachdem diese Zahl gleich 1, oder 2, oder ∞^1 , oder aber ∞^∞ ist, hat man vier Hauptklassen von Gruppen zu unterscheiden.

Die gemeinte Eintheilung lässt sich rein begrifflich durchführen und erlaubt dann, aus der kurz zuvor erwähnten Tabelle imprimitiver Typen die überflüssigen auszuschneiden; die Ermittlung der jeweils invarianten Curvenschaaren erfolgt aber auch auf analytischem Wege, sodass man die Differentialgleichungen erster Ordnung für jene Schaaren wirklich hinschreiben kann.

Die endlichen continuirlichen Gruppen von Punkt-Transformationen lassen sich auch als reducible Gruppen von Berührungs-Transformationen auffassen; da andererseits bereits im zweiten Bande des Werkes alle Typen irreducibler Gruppen von Berührungs-Transformationen aufgestellt waren, so ist man nunmehr im Besitze eines jedenfalls vollständigen Systems der Gruppen von Berührungs-Transformationen in der Ebene. Auch hier bedarf es wieder einer ergänzenden Untersuchung, welche überflüssige Typen beseitigt.

Es erübrigt für das Gebiet der Ebene noch die Lösung der — Algebraiker, Geometer und Zahlentheoretiker in erster Linie interessirenden — Aufgabe, alle projectiven Gruppen in Typen einzutheilen.

Dieselben ordnen sich von selbst so an, dass entweder einem Typus der dualistische gegenüber steht, oder aber ein Typus zu sich selbst dualistisch ist.

Es ist beachtenswerth, dass die Entwicklungen dieses Kapitels unabhängig von den vorhergehenden gehalten sind, so dass ihr Verständniss nur die einfachsten Sätze aus der Gruppentheorie und der neueren Geometrie erfordert.

Zunächst werden die verschiedenen Typen von eingliedrigen projectiven Gruppen in Angriff genommen; es geschieht das auf Grund der Thatsache, dass jede projective Transformation der Ebene, also auch jede infinitesimale, mithin auch jede eingliedrige projective Gruppe mindestens einen Punkt und eine durch ihn gehende Gerade — oder, wie man kürzer sagt, ein „Linienelement“ — in Ruhe lässt. Verlegt man die Gerade in's Unendliche, so wird damit für eine infinitesimale projective Transformation von vornherein eine einfache canonische Gestalt gewonnen. Deren Discussion liefert fünf verschiedene Typen eingliedriger Gruppen; jeder von ihnen ist zu sich selbst dualistisch, und kann vollkommen dadurch charakterisirt werden, dass er je ein bestimmtes, aus Punkten und Geraden zusammengesetztes Gebilde invariant lässt.

Eine unmittelbare Anwendung davon wird gemacht auf die Behandlung der zuerst von F. Klein und Lie gelösten Aufgabe, diejenigen ebenen Curven zu bestimmen, welche (eine oder mehrere) infinitesimale projective Transformationen in sich zulassen.

Abgesehen von den Geraden und Kegelschnitten sind das nur die Curven $y = e^x$ und $y = x^\alpha$, wo der Parameter α von 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2 — 1 verschieden anzunehmen ist, und diese gestatten auch nur je eine einzige infinitesimale projective Transformation.

Von den fünf Typen eingliedriger Gruppen wird für die Fortführung der Aufgabe am wichtigsten der anderswo bei Lie auch als „Elation“ bezeichnete, welcher alle Punkte einer Geraden und zugleich alle Strahlen eines auf ihr liegenden Punktes invariant lässt. Untersucht man nämlich eine projective Gruppe daraufhin, ob und wieviel Elationen sie enthält, so gelangt man zu dem wichtigen Ergebniss, dass — mit Ausnahme der allgemeinen projectiven Gruppe, sowie der dreigliedrigen, welche einen (eigentlichen) Kegelschnitt invariant lässt — jede projective Gruppe mindestens einen Punkt, oder aber dualistisch eine Gerade in Ruhe lässt.

Man kann sich daher auf die Gruppen beschränken, bei denen ein Punkt in Ruhe bleibt, und man wird dieselben nunmehr in Klassen einteilen, je nach der Art und Weise, wie die Gruppe die ∞^1 Richtungen durch den festgehaltenen Punkt unter sich transformirt.

So ergeben sich im Ganzen 35 verschiedene Typen projectiver Gruppen, deren infinitesimale Transformationen in einer Tabelle vereinigt werden.

Referent möchte hier die principielle Bemerkung einschalten, dass die Herausgeber vielen Fachgenossen, denen es vorerst weniger darum zu thun ist, sich die Methoden der Gruppentheorie anzueignen, als ihre Anwendungen kennen zu lernen, einen Dienst erwiesen haben würden, hätten sie ihrer symbolischen Tabelle der infinitesimalen Transformationen eine zweite reale an die Seite gestellt, mit den Gleichungen der Gruppen in der geläufigen endlichen Gestalt.

Herr Lie und seine Schüler werden zwar einwenden, dass es im einzelnen Falle nicht so schwer sei, die infinitesimale Form der Gruppe in die endliche umzusetzen; Referent muss aber persönlich gestehen, dass es bei ihm langdauernder Uebung bedurft hat, um eine derartige „Transponirung“ anstandslos vornehmen zu können. So naturgemäss das Rechnen mit den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe ist, so lange über die Natur der Coefficienten in den endlichen Gleichungen gar keine Beschränkungen vorliegen, die Sachlage gestaltet sich ganz anders, wenn besondere Probleme — beispielsweise die Klassifikation algebraischer Differentialgleichungen bei *Vessiot* — eine functionentheoretische oder zahlen-theoretische Präcisirung der Coefficienten erheischen.

Einem Coefficienten a der infinitesimalen Transformation kann in der endlichen Gleichung der Gruppe je nachdem wiederum ein Coefficient α entsprechen, oder aber e^a , oder auch $l\alpha$ u. s. f.

Für die speciell hier in Betracht kommenden projectiven Gruppen der Ebene bieten die endlichen Gleichungen auch noch den nicht zu unterschätzenden Vortheil, dass man, von ihnen ausgehend, die Differentialinvarianten und invarianten Differentialgleichungen der Gruppen viel directer bestimmen kann, und zugleich so, dass ihre geometrische Bedeutung erhellt.

Es wäre übrigens für die Geometer eine dankbare Aufgabe, zunächst die projectiven Gruppen von Neuem zu bestimmen, ohne von den speci-fischen Methoden der allgemeinen Gruppentheorie Gebrauch zu machen.

Die Lie'sche Tabelle der projectiven Gruppen der Ebene dient ihrer-seits wiederum als Grundlage zur Aufstellung einer entsprechenden Tabelle für die linearen, homogenen Gruppen in drei Veränderlichen, die nicht nur von Wichtigkeit ist für die Klassification der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkt-Transformationen des Raumes, sondern auch für die Zwecke der Zahlentheorie Bedeutung gewinnen wird. Es tritt jetzt die Aufgabe heran, die für Gerade und Ebene erlangten Resultate auf den Raum auszudehnen. Da die vollständige Ausführung dieses schwierigen Problems, wie sich erwarten lässt, einen ungemeinen Aufwand von Zeit und Raum beanspruchen würde, so begnügen sich die Herausgeber damit — sowohl im Falle der endlichen continuirlichen Gruppen überhaupt, wie in dem der projectiven Gruppen —, gewisse hervorragende Kategorien von Gruppen wirklich aufzustellen, und im Uebrigen den Weg zu bezeichnen, auf dem der Leser die in Rede stehenden Fragen erschöpfen kann.

Unter den endlichen continuirlichen Gruppen des Raumes verdienen die meiste Beachtung die primitiven unter ihnen, bei denen also weder eine ∞^1 Schaar von Flächen, noch eine ∞^2 Schaar von Curven invariant bleibt.

Die Natur einer solchen Gruppe G hängt in erster Linie von der-jenigen Untergruppe ab, welche einen beliebig gewählten Punkt P fest lässt, oder auch von der mit letzterer isomorphen Gruppe G' , welche die ∞^2 Richtungen durch P transformirt. Diese Gruppen G' sind ja identisch mit den projectiven Gruppen der Ebene. Wirkliche Schwierigkeiten bereitet nur der Fall, wo G' einen (eigentlichen) Kegel zweiten Grades invariant lässt, oder, analytisch ausgedrückt, eine partielle Differentialgleichung in drei Variablen, erster Ordnung und zweiten Grades.

Unter Zuziehung der Monge'schen Charakteristikentheorie reducirt sich dann die Aufgabe auf die andere, alle die Berührungs-Transformationen der Ebene (von einer gewissen Parameterzahl) zu finden, welche eine gewisse Curvenschaar der Ebene invariant lassen.

Derartige Ueberlegungen haben das beachtenswerthe Ergebniss zur Folge, dass es nur acht verschiedene Typen von primitiven (endlichen continuirlichen) Raumgruppen giebt, als deren canonische Repräsentanten man wählen kann:

1. die allgemeine projective Gruppe,
2. die affin-projective Gruppe,
3. diejenige Untergruppe von 2., welche zugleich alle Volumina un-
verändert lässt,
4. die Gruppe eines (eigentlichen) linearen Complexes,
5. die Gruppe einer (eigentlichen) Fläche zweiten Grades,
6. die Gruppe aller Bewegungen,

7. die Gruppe aller Bewegungen und Aehnlichkeits-Transformationen,
 8. die Gruppe aller Transformationen durch reciproke Radien.

Einzeln genommen waren diese Gruppen den Geometern bekannt; das Wesentliche ist hier aber, dass sie zusammen ein „volles System“ primitiver Raumgruppen ausmachen.

Die imprimitiven Gruppen werden in drei Klassen eingeordnet, von denen die beiden ersten vollständig discutirt werden, nämlich einmal diejenigen Gruppen, bei denen eine Schaar von ∞^1 Flächen invariant bleibt, die sich aber nicht in eine invariante Schaar von ∞^2 Curven zerlegen lassen soll, sodann gerade umgekehrt diejenigen, welche eine ∞^2 Schaar von Curven in Ruhe lassen, ohne dass sich dieselben in eine invariante Schaar von ∞^1 Flächen zusammenfassen lassen.

Ist die Flächenschaar dargestellt durch $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, die Curvenschaar durch $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, $\psi(x, y, z) = \text{const}$, so kommt die Untersuchung (analog einem obenerwähnten Falle) darauf hinaus, zu ermitteln, wie die Mannigfaltigkeit der φ resp. der φ und ψ unter sich transformirt wird.

Hinsichtlich der noch fehlenden imprimitiven Gruppen werden wenigstens Methoden entwickelt, welche die ganze Aufgabe in eine grosse Anzahl einzelner Aufgaben zerlegen, deren jede unabhängig von den andern erledigt werden kann. Der Leser soll dadurch in den Stand gesetzt werden, sich jede Kategorie imprimitiver Raumgruppen, deren Kenntniss ihm gerade wünschenswerth ist, ohne principielle Schwierigkeiten zu verschaffen.

Herr Lie hat übrigens die erforderlichen Rechnungen schon vor längerer Zeit (wenn auch auf weniger einfachem Wege) durchgeführt und ist dabei zu dem theoretisch sehr wichtigen Ergebniss gelangt, dass jede transitive Raumgruppe, das heisst eine solche, welche zwei (innerhalb eines gewissen Bereiches) beliebig gewählte Punkte in einander überführen kann, sich auf eine solche canonische Form bringen lässt, dass die Coefficienten der infinitesimalen Transformation ganze rationale Functionen von x, y, z und von gewissen Exponentialausdrücken $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots$ werden, wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ganze lineare Functionen von x, y, z bedeuten.

Ob ein ähnliches Gesetz für die transitiven Gruppen des n -fach ausgedehnten Raumes gilt, steht noch dahin.

Auch die Frage nach den (projectivisch) verschiedenen Typen projectiver Raumgruppen wird unter der Einschränkung behandelt, dass nur die primitiven unter ihnen nebst ihren sämtlichen Untergruppen vollständig erforscht werden. Es sind das gerade die sieben ersten der oben mitgetheilten Tabelle.

Als Mittel zur Untersuchung dient die Frage nach den Curven und Flächen, welche eine Gruppe projectiver Transformationen in sich gestatten; für die vorliegenden Zwecke genügt die Annahme, dass die gemeinten Gruppen von mindestens drei Parametern abhängen.

Von Curven gehören hierher: Gerade, Kegelschnitt und cubische Raumcurve, von Flächen: Ebene, Kegel zweiter Ordnung, die Abwickelbare einer cubischen Raumcurve, die Fläche zweiten Grades und die Cayley'sche Linienfläche dritter Ordnung.

Im Interesse der Geometrie und Invariantentheorie möchte man es bedauern, dass die Herausgeber die in Rede stehende Frage nicht erschöpft haben, und im Zusammenhange damit, dass sie nicht wenigstens eine Tafel sämtlicher eingliedriger projectiver Raumgruppen aufgestellt haben. Denn auf eine Fläche oder Curve (quaternäre Form oder Formenschaar), die infinitesimale projective Transformationen in sich zulässt, ist die übliche Invariantentheorie nicht ohne Weiteres anwendbar, so dass eben an dieser Stelle, wie Herr Lie in der Vorrede stark betont, der Invariantentheorie eine wesentliche Lücke auszufüllen bleibt. Die Vertreter dieses Gebietes würden, wie wir glauben, den ihnen gemachten Vorwurf geduldiger auf sich nehmen, wenn Herr Lie seine bittere Pille mit folgendem Zusatze etwa versüsst hätte: „Ihr habt allerdings eine wesentliche Lücke gelassen, aber ich kann es Euch nicht so übel nehmen, denn die Vorfrage, jene Formen — zunächst im quaternären Gebiete, wo die Sache überhaupt erst acut wird — selbst aufzustellen, ist eine gruppentheoretische und zwar keineswegs ganz leichte; meine Mittel indessen erlaubten mir deren Aufstellung: hier habt Ihr sie, verwendet sie nun fruchtbar und füllet jetzt mit Euren Mitteln Eure Lücke aus.“ Neben dieser drastischen Abschweifung sei noch eine andere damit verwandte Bemerkung pro domo gestattet.

In seiner Vorrede weist Herr Lie gelegentlich darauf hin, wie die mannigfaltigen Differentiationsprocesse, deren sich die projective Invariantentheorie bedient, nichts Anderes als Differentialinvarianten gegenüber gewissen projectiven Gruppen seien. Referent hat sich nun gerade in seinem „Berichte über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie, von 1892“ bemüht, zu zeigen, wie der gemeinte Gesichtspunkt vor Allem bei Study zur Geltung kommt.

Von den primitiven projectiven Gruppen kommt für die metrische Geometrie neben der Gruppe der Bewegungen vor Allem noch die „der Bewegungen und Aehnlichkeits-Transformationen“ in Betracht, welche dadurch definirt ist, dass sie einen Kegelschnitt, den Kugelkreis, invariant lässt. Die einzigen (reellen) Flächen, welche bei dieser Gruppe gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen, sind die Kugeln; andererseits die einzigen Curven, welche der nämlichen Bedingung entsprechen, die Geraden.

Dies ist die Quelle der Erscheinung, dass die Plücker'sche Liniengeometrie und die neuere, von Lie so sehr geförderte Kugelgeometrie unter den Versinnlichungen eines vierfach ausgedehnten Raumes eine ausgezeichnete Stellung einnehmen.

Die imprimitiven projectiven Raumgruppen lassen sämtlich je eine gewisse Punktfigur invariant. Zuerst werden die wenigen Gruppen bestimmt,

bei denen die Figur keine ebene ist, sodann werden Methoden entwickelt, wie man zu den übrigen, welche also einen Punkt, oder eine Gerade, oder eine Ebene in Ruhe lassen, gelangen kann.

Das folgende Kapitel dehnt die bisher besprochenen Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen aus.

Was vor Allem die Erweiterungen auf den Raum R_n von n -Dimensionen angeht, so besteht vorläufig noch gar keine Aussicht auf Methoden, die die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen, oder etwa blos der primitiven unter ihnen im R_n auch nur principiell erledigten.

Die Herausgeber begnügen sich daher mit einigen besonderen Untersuchungen, die, so zu sagen, als Muster dienen sollen. So über Gruppen des R_n , welche in gewissem Sinne analog sind den drei, früher an erster Stelle erwähnten projectiven Typen des R_3 , ferner über solche, die möglichst transitiv sind, weiter solche, die einen Differentialausdruck zweiten Grades $D \equiv \sum f_{ik}(x) dx_i dx_k$, oder die Gleichung $D = 0$ invariant lassen.

Stehen schon die beiden letztgenannten Untersuchungen in nahem Zusammenhange mit denen über die Grundlagen der Geometrie, so gilt das in noch höherem Maasse von dem Kapitel über reelle Gruppen, das übrigens auch eine spezifische Wichtigkeit für sich hat.

Es kommt darauf an, unter welchen Modificationen die allgemeinen Begriffe und Sätze der Gruppentheorie auf „reelle“ Gruppen übertragbar sind, also auf solche, für die sämtliche auftretenden Grössen (Variable, Parameter, Coefficienten, Zusammensetzungs-Constante u. s. f.) nur reelle Werthe annehmen sollen.

Sind $x'_i = f_i(x, a)$ die Gleichungen einer reellen Gruppe g (wo die a die Parameter bedeuten), so macht es einen wesentlichen Unterschied, ob die f_i analytische Functionen ihrer Argumente, also auch für complexe Werthe derselben definiert sind, oder nicht.

Im ersteren Falle ist die Discussion der Gruppeneigenschaften verhältnissmässig einfach, zu g gehört eben stets eine zweite Gruppe G , die entsteht, wenn man für die Variablen und Parameter complexe Werthe zulässt, und man hat nur festzustellen, worin G und g übereinstimmen, und worin sie sich unterscheiden. So z. B. sind beide Gruppen stets gleichzeitig transitiv resp. intransitiv, dagegen kann sehr wohl die eine primitiv sein, die andere imprimitiv u. s. f.

Die Uebertragung der Fundamentalsätze geht glatt von Statten.

Verwickelter ist es im zweiten Falle, wenn die f reelle, nicht analytische Functionen der x und a sind. Hier ist es nöthig, tiefer liegende Untersuchungen von Cauchy und Lipschitz über die Lösungen reeller, nicht analytischer Differentialgleichungen heranzuziehen, wobei besondere Voraussetzungen über die Existenz erster und zweiter Ableitungen der f nach den x und a erforderlich sind. Die Beweise der Sätze werden nur angedeutet.

Als besonders merkwürdig und wichtig sei ein Theorem mitgetheilt, wonach es bei transitiven reellen Gruppen erlaubt ist, sich auf analytische Functionen f zu beschränken.

Die oben erwähnten Entwicklungen über Gruppen mit invarianter Gleichung $D = \sum f_{ik}(x) dx_i dx_k = 0$ werden jetzt noch einmal für reelle Gruppen und reelle Ausdrücke D durchgeführt. In gleichem Sinne werden die in den ersten Kapiteln erhaltenen Listen von Gruppen auf der Geraden und in der Ebene ergänzt, wobei nur wenige Gruppen als neu aufzunehmen sind.

Wir müssen uns beeilen, zu einem der hervorragendsten Kapitel überzugehen, welches die Grundlagen der Geometrie vom gruppentheoretischen Standpunkte aus beleuchtet.

Bekanntlich hat zuerst Lobatschewski 1829 auf indirectem Wege dargethan, dass bei Preisgebung des elften Euklid'schen Axioms ausser der Euklid'schen Geometrie noch eine zweite existire. Sodann wies Riemann 1854 mit analytischen Hilfsmitteln — indem er vor Allem das Axiom zu Grunde legt, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei — nach, dass bei gewissen Forderungen, über die Natur des Bogenelements, über die freie Beweglichkeit einer Linie ohne Aenderung ihrer Länge, und anderen, ausser der Euklid'schen Geometrie noch zwei andere möglich seien, von denen die eine eben die Lobatschewski'sche ist, während die andere mit der auf der Kugeloberfläche zusammenfällt. Die Riemann'schen Beweise sind 1870 von Lipschitz geprüft und vervollständigt worden.

von Helmholtz hat weiter in einer sehr bekannt gewordenen Arbeit von 1868 versucht, zu den Riemann'schen Ergebnissen zu gelangen, indem er die Riemann'schen Axiome durch elementarere und anschaulichere ersetzte, vor Allem unter Ausschluss solcher über unendlich benachbarte Punkte.

F. Klein wies Lie 1869 darauf hin, dass der Riemann-Helmholtz'schen Behandlung der Frage ein gruppentheoretisches Problem implicite zu Grunde liege. Lie hat dann 1884 mit seinen Mitteln die angeregte Untersuchung durchgeführt und dieselbe in zwei Arbeiten 1886 (ohne Beweise) und vollständig 1890 veröffentlicht.

Das fragliche Problem, hier schlechtweg als das „Riemann-Helmholtz'sche“ bezeichnet, wird wörtlich formulirt (S. 397) wie folgt: „Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schaar der euklidischen, als den beiden Schaaren von nichteuklidischen Bewegungen zukommen, und durch die diese drei Schaaren vor allen anderen möglichen Schaaren von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind.“

Unter Schaaren von Bewegungen sind hier allgemeine Schaaren von Ortsveränderungen oder Punkt-Transformationen im R_n zu verstehen; da es indessen naturgemäss erscheint, davon auszugehen, dass die Zusammen-

setzung zweier eigentlicher Bewegungen stets wieder eine Bewegung liefert, so wird das Problem gleich im Anfange näher dahin präcisirt, dass unter einer Schaar von Bewegungen von vornherein eine „Gruppe“, das heisst eine reelle, continuirliche Gruppe von paarweise inversen Punkt-Transformationen gemeint sein soll. Wir werden uns im Wesentlichen auf den gewöhnlichen Raum, den R_3 , beschränken.

Im Uebrigen sollen die gesuchten charakteristischen Eigenschaften für die Gruppen der drei Bewegungen in engerem Sinne — oder kürzer: für die drei „Urgruppen“ — geometrischer und zwar möglichst einfacher Natur sein.

Dass das Riemann'sche Axiom des Raumes als einer Zahlenmännigfaltigkeit hier adoptirt ist, ist ja selbstverständlich, da die Lie'sche Gruppentheorie ein rein analytisches Gebäude ist.

Auch jetzt ist das gestellte Problem noch sehr verschiedener Lösungen fähig, je nach der Auswahl der zu treffenden Merkmale. Lie hat wohl zuerst betont, dass derartige Merkmale für Bewegungen in zwei wesentlich getrennte Klassen zerfallen, je nachdem sie sich auf die infinitesimale Umgebung eines Punktes beziehen, oder aber auf endlich von einander entfernte Punkte.

Demgemäss wird die Aufgabe auch doppelt behandelt, so, dass einmal nur Eigenschaften der ersten Klasse, das andere Mal nur solche der zweiten benutzt werden, und zwar jedesmal ein System von nicht nur hinreichenden, sondern auch wirklich nothwendigen Eigenschaften der drei Urgruppen.

Das erstere Problem, bei dem nur unendlich benachbarte Punkte in Betracht kommen, erweist sich als das leichtere.

Es wird der neue Begriff der „freien Beweglichkeit im Infinitesimalen“ eingeführt: bei Festhaltung eines (reellen) Punktes P und eines (reellen) durch P gehenden Linienelementes p soll noch continuirliche Bewegung möglich sein, hingegen nicht mehr, wenn ausserdem noch ein durch P und p gehendes (reelles) Flächenelement π festgehalten wird.

Das Hauptresultat lautet dann, dass jede Raumgruppe, welche in einem (reellen) Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, vermöge einer (reellen) Punkt-Transformation stets in eine der drei Urgruppen überführbar ist.

Der Kernpunkt des Beweises ist, dass man die Eigenschaften der fraglichen Gruppen, welche offenbar transitiv und sechsgliedrig sind, zurückführt auf die der dreigliedrigen projectiven Gruppe, welche die (reellen) Linienelemente durch P transformirt, wobei ein (imaginärer) Kegel von Linienelementen

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

invariant bleibt. Alle (reellen) sechsgliedrigen Gruppen der Art sind aber, nach einer früheren Rechnung, gerade unsere drei Urgruppen.

Im R_n ($n > 3$) gestaltet sich die Sache ganz analog; nur in der Ebene reicht die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen noch nicht hin zur Charakterisirung der drei Urgruppen.

Die zweite Lösung des Riemann-Helmholtz'schen Problems sollte nur Merkmale der zweiten Klasse benöthigen, also solche, die sich auf endlich entfernte Punkte beziehen.

Dass in der That zwischen den Merkmalen beider Klassen ein tiefgehender Unterschied herrscht, wird durch eine Reihe auffälliger Erscheinungen illustriert.

So folgt z. B. aus der Annahme, dass bei einer (etc. continuirlichen) Gruppe zwei endlich entfernte Punkte im R_n stets eine und nur eine Invariante besitzen sollen, durchaus noch nicht das Gleiche für zwei benachbarte Punkte, sondern nur, dass solchen mindestens eine Invariante zukommt.

Ferner kann dabei (wie auch durch ein Beispiel belegt wird) der besondere Fall eintreten, dass eben diese Invarianten von zwei benachbarten Punkten alle homogen von nullter Ordnung in den dx sind. Da aber der Ausdruck für das Riemann'sche Bogenelement homogen von erster Ordnung in den dx ist, so kann also aus der Existenz einer Invariante zweier endlich entfernter Punkte, oder, wie man sagt, einer „Abstandsfunktion“, durchaus noch nicht mit Sicherheit auf die Existenz eines Bogenelementes geschlossen werden.

Die zweite Lösung des Problems verlangt von der fraglichen „Gruppe“ nur, dass sich, nach Festhaltung eines Punktes P , irgend ein anderer, endlich von P entfernter Punkt Q noch auf einer, nicht durch P gehenden Fläche (oder doch zum Mindesten auf einem irreducibeln Theile derselben) völlig frei bewegen können soll, also so, dass Q in jeden anderen Punkt der Fläche noch continuirlich überführbar ist. Dass die Fläche nicht durch P hindurchgehen soll, verhütet, dass jemals zwei endlich entfernte Punkte in zwei benachbarte übergehen.

Eine solche Gruppe G erweist sich wiederum als transitiv, und zwei endlich entfernte Punkte haben bei ihr eine und nur eine Invariante; ferner ist sie als reelle Gruppe primitiv, weiter endlich und sechsgliedrig; endlich werden die Linienelemente durch einen Punkt P durch eine dreigliedrige Gruppe g transformirt.

Aus früheren Rechnungen lässt sich dann wiederum entnehmen, dass die einzig möglichen Gruppen G die drei Urgruppen sind.

Der Beweis für den Raum von mehr als drei Dimensionen ist entsprechend; nur bleibt hier immerhin die Möglichkeit offen, dass die analogen Axiome noch überflüssige Bestandtheile enthalten.

Man kann nunmehr auch noch verlangen, dass die drei Urgruppen selber durch rein gruppentheoretische Merkmale von einander geschieden werden.

Dies ist in der That ausführbar: beschränken wir uns wieder auf den gewöhnlichen Raum, so enthält die Gruppe der Euklid'schen Bewegungen eine „invariante“ (reelle) Untergruppe, die beiden anderen Gruppen nicht; andererseits besitzen die letzteren (reelle) viergliedrige Untergruppen, die im Falle der Lobatschewski'schen Geometrie „integrabel“ sind, im Falle der Riemann'schen nicht.

Die Helmholtz'schen Deductionen werden von Lie einer eingehenden Kritik unterzogen; als Haupteinwand ist anzuführen, dass von Helmholtz Eigenschaften endlich entfernter Punkte auf unendlich benachbarte Punkte überträgt, was, wie schon oben betont, nicht ohne Weiteres zulässig ist.

Lie hat sich damit aber nicht begnügt, sondern hat die Helmholtz'sche Arbeit — ähnlich, wie Lipschitz die Riemann'sche — in positiver Richtung ergänzt.

Hält man nämlich ausschliesslich an den vier Helmholtz'schen Axiomen fest, und versucht, deren Forderungen gruppentheoretisch zu präcisiren, so ergibt sich, dass die drei ersten Axiome bereits gerade hinreichen zur Charakterisirung der drei Urgruppen, dass also dann das vierte, das sogenannte „Monodromie-Axiom“, überflüssig wird.

Der Lie'sche Ansatz besteht darin, dass sich ein Theil der Helmholtz'schen Forderungen mit einer bestimmten gruppentheoretischen Frage deckt. Bezeichnet man nämlich eine Invariante, welche r Punkte des gewöhnlichen Raumes einer Gruppe gegenüber besitzen mögen, dann als „wesentlich“, wenn sie sich nicht durch Invarianten von weniger als r Punkten ausdrücken lässt, so besagt die fragliche Formulirung, dass die drei Urgruppen jedenfalls solche sein müssen, für die je zwei Punkte stets eine einzige Invariante, mehr als zwei Punkte dagegen keine wesentliche Invariante haben.

Die Durchführung der Aufgabe, alle derartigen Gruppen zu ermitteln, führt auf elf Gruppentypen, von denen aber acht nachträglich in Wegfall kommen, da sie die weiteren Forderungen der drei ersten Helmholtz'schen Axiome nicht befriedigen.

Gegen die durch Riemann und Lipschitz vertretene Auffassung wird im Wesentlichen nur eingewandt, dass Begriffe, wie Bogenelement und a fortiori Länge einer Curve nicht elementar genug seien, um gerade bei den Grundlagen der Geometrie als Bausteine verwendbar zu sein.

Ähnlich wird allerdings Mancher auch die erste Lösung von Herrn Lie selber ansehen, denn die Vorstellung unendlich benachbarter Punkte ist schliesslich ebenso wenig „elementar“, das heisst in diesem Falle so viel als anschaulich.

Am Schlusse seiner Entwicklungen wirft Herr Lie selber die Frage auf, welchen Nutzen dieselben für die Gesamterkenntniss der Grundlagen der Geometrie gewähren. Denn das letzte Ziel aller derartigen Bestrebungen müsse doch sein, die Geometrie auf einem „vollen“ Systeme möglichst ein-

facher geometrischer Axiome aufzubauen, nämlich einem solchen, das zu dem Zwecke hinreichend sei, aber auch keine überflüssigen Bestandtheile enthalte.

Da ist denn nun die Meinung von Herrn Lie, dass seine beiden Lösungen des Problems je ein volles System von Axiomen involviren, nur dass das Axiom von der Zahlenmannigfaltigkeit des Raumes eben kein geometrisches (und einfaches) sei.

Es würde sich demnach weiterhin darum handeln müssen, das letztgenannte Axiom seinerseits durch ein äquivalentes System elementargeometrischer Axiome zu ersetzen, das zusammen mit den übrigen gruppentheoretischen Axiomen ein definitives volles System der gewünschten Art lieferte.

Einen Weg dazu giebt er nicht an, erwähnt auch die in dieser Richtung liegenden verdienstvollen Untersuchungen Neuerer, vor Allem von F. Klein, mit keinem Worte.

Unseres Erachtens müsste man zu dem Behufe den von Lie eingeschlagenen Weg consequent rückwärts verfolgen und seine Gruppentheorie selbst, wie schon oben bei dem Beispiele der projectiven Gruppen der Ebene bemerkt, rein geometrisch zu begründen versuchen.

Die grössten Schwierigkeiten würden hierbei voraussichtlich die Voraussetzungen machen, welche Herr Lie den reellen Gruppen zu Grunde legen musste, nämlich über die Existenz erster und zweiter Differentialquotienten der die Gruppe darstellenden Functionen.

Eben dieser Umstand macht die Lie'schen Axiome weit weniger einfach, als es auf den ersten Blick erscheint.

Herr Lie übt wiederholt an verschiedenen Fachgenossen eine sehr scharfe Kritik vom gruppentheoretischen Standpunkte aus. Es würde dem Referenten nicht anstehen, eine Kritik seinerseits wieder kritisiren zu wollen; es darf denn aber wohl doch nicht unerwähnt bleiben, dass z. B. eine Aeussereung (Vorrede S. XII) wie „das Verdienst der damit zusammenhängenden Untersuchungen des Herrn F. Klein über nichteuklidische Geometrie liege wesentlich darin, dass in ihnen die Resultate seiner Vorgänge popularisirt würden“, auf starken Widerspruch stossen wird und muss.

Das letzte Kapitel bringt eine Reihe werthvoller Ergänzungen zu den beiden ersten Bänden: besonders instructiv für den Leser dürfte eine neue Redaction der Beweise für die grundlegenden Sätze der Theorie sein, welche den begrifflichen Kern der analytischen Operationen deutlich hervortreten lässt.

Möchten diese Zeilen an ihrem Theile zu einer unbefangenen Würdigung der Lie'schen Schöpfung beitragen.

Die selbstlose Hingabe des Mitarbeiters, Herrn F. Engel, die das Gelingen des ganzen Werkes erst ermöglichte, sei noch einmal rühmend hervorgehoben.

W. Fr. MEYER.

Leçons de l'agrégation classique de mathématiques par G. KÖNIGS, maître de conférences à l'École normale supérieure et à la Sorbonne, professeur remplaçant au Collège de France. Paris 1892. A. Hermann. In 4^o lith. 208 pag. 10 Frs.

„Vielleicht ist es angemessen, für diejenigen unter unseren Lesern, welche mit den französischen Unterrichtsverhältnissen nicht vertraut sind, hier zu erwähnen, dass die „agrégation de mathématiques“ eine Prüfung ist, welche denjenigen, die sie bestehen, die Berechtigung verleiht, (Titular-) Professoren der Mathematik an einem staatlichen Gymnasium zu werden. Diese Prüfung umfasst verschiedene Theile von recht bedeutender Art, unter denen auch Lehrvorträge auftreten, die vor einer staatlichen Commission über Themata stattfinden, welche auf den Gymnasialunterricht Bezug haben und ein Jahr vorher bekannt gegeben werden. Diese Themata sind in den Lehrbüchern gewöhnlich sehr unvollständig behandelt und eben das ist einer der Gründe, sie zu wählen: sie sind natürlich der Gegenstand, mit dem sich vorzugsweise diejenigen beschäftigen, die, wie Herr Königs, damit beauftragt sind, die Candidaten anzuleiten, die sich zur Prüfung vorbereiten. Aus dieser Beschäftigung ist das Buch hervorgegangen, das wir besprechen.“ (Aus einer Recension des Herrn J. Tannery im „Bulletin des sciences mathématiques.“)

Jedoch ist nicht der ganze Band diesen Themen gewidmet; er zerfällt vielmehr in zwei Theile, die allerdings äußerlich nicht von einander geschieden sind: der eine (S. 5—108) enthält „einige der schwierigsten Themen, die für die Prüfung des Jahres 1892 aufgestellt sind“, und der zweite (S. 108—208) beschäftigt sich mit den anallagmatischen Curven und Flächen. Der Zweck dieses Theiles ist der, „die Studirenden mit einem der schönsten Kapitel der Geometrie bekannt zu machen, welches ihnen so schwer zugänglich geworden ist, seitdem das Buch des Herrn Darboux „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des Imaginaires“ (1873) vergriffen ist.*

Was an dem ersten Theile besonders angenehm auffällt und die Lectüre desselben zu einem wahren Genuss macht, ist die klare Durchführung aller dieser an sich ja einfacheren Probleme, der echt pädagogische Geist, der das Ganze durchweht, der alles Unnötige bei Seite lässt, den Gedanken aber, der ausgearbeitet werden soll, bis zu seinen letzten Consequenzen durchführt, so dass Nichts unklar bleibt, und es wäre nur zu wünschen, dass eine ganze Reihe solcher Themen auch bei uns in ähnlichen Musterarbeiten erschienen; es könnte das nur von bestem Einfluss auf die Gedeihenheit der Arbeiten unserer Candidaten sein.

* Dem Referenten ist dieses Werk leider nicht bekannt, so dass er eine Vergleichung mit demselben, die gewiss recht interessant gewesen wäre, nicht durchführen kann.

Die einzelnen Theile sind:

Schnitt zweier Flächen zweiten Grades in dem Falle, in welchem dieser Schnitt zerfällt. Auf der einen Fläche werden die Parameter λ und μ der geradlinigen Erzeugenden als Variable genommen; jeder Gleichung zwischen λ und μ entspricht eine Curve auf dieser Fläche, welche vom zweiten Grade in λ , sowie auch in μ ist, wenn die Curve durch eine zweite Fläche zweiten Grades ausgeschnitten wird. Jedem möglichen Falle der Zerlegung dieser Gleichung wird die geometrische Interpretation gegeben. — Ueber die metrischen Eigenschaften eines Büschels von Kegelschnitten. — Achsen eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiten Grades. Um dieselben zu bestimmen, wird das Maximum und das Minimum des Quadrates eines Radius vector in dem Schnitte gesucht, mit seinem Mittelpunkt als Anfangspunkt. (Der parabolische Schnitt ergibt sich als Grenzfall.) — Die Flächen zweiten Grades in Ebenencoordinaten. — Ueber die Zahlen e und π . Dieser einzige rein analytische Aufsatz hat Herrn Tannery zum Verfasser. In demselben ist der Beweis der Transcendenz beider Grössen nach den Arbeiten von Hermite, Lindemann, Weierstrass und Molk geliefert und eine aus diesen Beweisen hervorgehende Bestimmung beider Grössen gegeben. — Von den Kugeln, welche vier gegebene Ebenen berühren. — Von den Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren. Es wird diese Aufgabe als Verallgemeinerung der vorhergehenden behandelt und dabei die Gergonne'sche Lösung noch vervollständigt. — Ueber die Gleichung in λ . Mit λ ist hier der variable Parameter eines Kegelschnittbüschels bezeichnet, so dass $f + \lambda g = 0$ die Gleichung desselben ist, wenn $f = 0$ und $g = 0$ zwei Kegelschnitte des Büschels sind. Die behandelte Gleichung ist diejenige dritten Grades, deren erstes Glied die Discriminante der Form $f + \lambda g$ ist.

Damit endet der erste Theil, in welchem am Schlusse vieler Aufsätze noch auf die Literatur hingewiesen ist, die dabei nachgelesen werden kann.

Im zweiten Theile werden nach einer Einleitung über Inversion und Systeme von Kugeln im Raume die anallagmatischen Flächen und Curven als sich selbst inverse Flächen bez. Curven behandelt, die anallagmatischen Flächen besonders als die Enveloppen einer Kugelschaar, die zu einer gegebenen Kugel orthogonal sind. Je nachdem die Kugeln von einem oder von zwei Parametern abhängig sind, beschreibt der Mittelpunkt derselben ein Curve oder eine Fläche. Die anallagmatischen Flächen der ersten Art werden von jeder Kugel in einer kreisförmigen Krümmungslinie berührt und ihre Rückkehrkanten (nach der erweiterten Definition des Herrn Darboux) sind die allgemeinsten anallagmatischen Curven. Die Flächen der zweiten Art werden von den Kugeln nur in je zwei Punkten berührt. — Unter den anallagmatischen Curven beanspruchen diejenigen ein erhöhtes Interesse, bei welchen die erzeugende Schaar von Kugeln sich

auf eine reducirt. Wir erhalten dadurch die sphärischen anallagmatischen Curven, die durch stereographische Projection in ebene übergehen.

Nach einigen Bemerkungen über die Anwendung der Inversion auf die Systeme von Kugeln beschränkt sich der Herr Verfasser auf den Fall, dass die Systeme von Kugeln bez. von Kreisen vom zweiten Grade sind, also auf diejenigen Enveloppen, die cyclische Flächen bez. Curven genannt werden. Die cyclischen Curven auf der Kugel und in der Ebene theilt er in drei Arten ein, je nachdem sie keinen Doppelpunkt, einen Doppelpunkt mit verschiedenen Tangenten oder einen Rückkehrpunkt besitzen. Die Eigenschaften dieser Curven, besonders auch die Focaleigenschaften, werden geometrisch abgeleitet und die Gleichungen vierten und dritten Grades discutirt, welche sie darstellen.

Den Schluss bildet die Behandlung der cyclischen Flächen, der Cykliden im allgemeineren Sinne, bei welchen der Mittelpunkt der erzeugenden Kugel eine Curve bez. eine Fläche zweiten Grades beschreibt; die Bearbeitung ist eine eingehende, doch muss wegen der grossen Zahl der verschiedenen Fälle auf die auch in diesem Theile sehr klar und anschaulich geschriebene Originalabhandlung verwiesen werden.

Dr. WILLGROD.

Die Kegelfocalen. Von Prof. Dr. G. HUBER. Bern 1893. Buchdruckerei Karl Stämpfli und Cie. 56 Quartseiten. Mit einer Figurentafel.

Es seien a , b , c drei positive Zahlen, $a > b$, und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung \mathfrak{K} in gewöhnlichen Coordinaten. Kegelfocale nennt der Verfasser den Brennpunktsort C der Curven, nach welchen \mathfrak{K} geschnitten wird durch die Ebenen eines Büschels, dessen Kante K auf der Hauptebene (a , c) des Kegels senkrecht steht (in einem Punkte O). Die zum Theil auch imaginären und räumlichen Curven, welche das Analogon bei den Hauptebenen (ab) und (bc) bilden würden, werden nicht erwähnt. Die Focalen sind Curven vierter Ordnung in der Ebene (ac). Ihre Gleichung hängt ausser von a , b , c noch von den Parametern p , s ab, den cartesischen Coordinaten des Punktes O , gemessen resp. auf den Achsen (c) und (a) als Coordinatenachsen. Wegen Symmetrie genügt die Discussion positiver Werthe p , s . Die Kegelerzeugenden f_1 , f_2 in der Ebene (ac) („Focalerzeugende“) sind Asymptoten aller doppelt unendlich viel Focalen. Berühren sich K und \mathfrak{K} in einem Punkte von f_1 (oder f_2), so zerfällt C in f_1 (oder f_2) und eine „Berührungsfocale“ dritter Ordnung mit Oval. $s = 0$ giebt die Schaar der zur Achse (c) symmetrischen „Achsenfocalen“, $p = 0$ die zur Achse (a) symmetrischen „Scheitelfocalen“, $s = \infty$ und $p = \infty$ geben Schaaren von Geradenpaaren. O ist Doppelpunkt der Curve; und zwar verwandelt sich derselbe aus einem isolirten über einen Selbst-

berühr-* in einen Knotenpunkt und weiter über einen Rückkehr- in einen isolirten Punkt, wenn s^2 von ∞ über $\frac{a^2 p^2}{c^2}$ und weiter über $p^2 \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}$ gegen 0 abnimmt. Der Kegelscheitel S ist stets Knotenpunkt der Focalen vierter Ordnung; die Berührungsfocalen berühren sich in S ; alle Achsenfocalen haben in S das nämliche Paar Tangenten. Die Focallinien des Kegels tangiren alle C , umhüllen die Systeme $p = const$, und $s = const$, ihre von der Achse (c) durchzogenen Winkel sind von Zweigen der Focalen unbetreten. Das Geschlecht der Focalen ist 1, die Coordinaten ihrer Punkte sind also durch elliptische Functionen eines Parameters u darstellbar:

$$x = sn u \cdot \frac{c^2 s s n u - a^2 p c n u + a \sqrt{b^2 + c^2} (p s n u - s c n u) d n u}{c^2 s n^2 u - a^2 c n^2 u}$$

$$y = cn u \cdot \frac{c^2 s s n u - a^2 p c n u + a \sqrt{b^2 + c^2} (p s n u - s c n u) d n u}{c^2 s n^2 u - a^2 c n^2 u}$$

[Coordinaten-Anfang O , X parallel der Achse (a), Y der Achse (c)]. Die auf einer Geraden $\frac{y}{x} = \cot g a m u$ ausser O liegenden Curvenpunkte heissen „conjugirt“. Die Mitten ihrer Verbindungsstrecken liegen auf einer Hyperbel bei den Focalen vierter, auf einer Geraden bei denen dritter Ordnung. Specialisirungen werden für die Cylinderfocalen unter Ankündigung einer Dissertation von F. Stähli am Schlusse des Kapitels I angedeutet, für die Kreiskegelfocalen in Kapitel II ausgeführt. Für diese ist $b = a$ und erscheint ein dritter Knotenpunkt A im Schnitt der Achse (c) mit ihrer durch K gehenden Normalebene; das Geschlecht wird 0, „rationale“ Darstellung möglich:

$$x = \frac{(c^2 s - a^2 p \operatorname{tg} \varphi) + a^2 m (p - s \operatorname{tg} \varphi) \sin \varphi}{c^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$y = \frac{(c^2 s - a^2 p \operatorname{tg} \varphi) + a^2 m (p - s \operatorname{tg} \varphi) \sin \varphi}{c^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

$$(0 < \varphi < 2\pi), \quad \left(m = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a}\right),$$

oder:

$$x = \frac{-\{c^2 s \lambda^2 + 2 a p (a m + a) \lambda + s (a m + a)^2\} (1 - \lambda^2)}{[c^2 \lambda^2 - (a m + a)^2] (1 + \lambda^2)},$$

$$y = \frac{-2\{c^2 s \lambda^2 + 2 a p (a m + a) \lambda + s (a m + a)^2\} \lambda}{[c^2 \lambda^2 - (a m + a)^2] (1 + \lambda^2)},$$

$$(-\infty \leq \lambda < +\infty).$$

Die Focalen gehen durch die imaginären Kreispunkte im Unendlichen, die zugehörigen Tangenten durch O . Eine Gerade durch O schneidet noch

* Zwischen einer Geraden und einer Curve dritter Ordnung.

zwei Curvenpunkte aus, für deren Parameter $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ ist; analog ist beim Doppelpunkt S giltig:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + c^2} + a}{c} \right)^2.$$

Der Ort der Berührungspunkte der von A an die Kreiskegelfocalen gehenden Tangenten ist sechster Ordnung und wird discutirt.

Die folgenden Abschnitte: Wendepunktsgleichung, Wendekegelschnitt, Doppeltangenten und Doppeltangentenkegelschnitt bei Kreiskegelfocalen stellen eine Anwendung der von Brill (Math. Ann. Bd. 12) gegebenen allgemeinen Formeln für rationale Curven vierter Ordnung dar. Die Wendepunktsgleichung sechsten Grades ist nur für specielle Fälle bequem zu discutiren. Die reellen Wendepunkte liegen bei Achsen- und Berührungsfocalen für $s = \text{const}$, bei Scheitelfocalen für $p = \text{const}$ auf geraden Linien; der Wendekegelschnitt kann Ellipse, Hyperbel, Parabel sein, für Achsenfocalen wird er eine Hyperbel, welche die Curve in zwei reellen Punkten schneidet, für Scheitelfocalen ein Kreis, dessen Radius von s allein abhängt. Allgemein hat die Kreiskegelfocale zwei, einen, keinen reellen Wendepunkt, je nachdem k den Kegel schneidet, berührt oder gar nicht trifft. Reelle Doppeltangenten sind nicht vorhanden, abgesehen davon, dass Achsen- und Scheitelfocalen einen Selbstberührungspunkt besitzen, dessen Tangente senkrecht zur Achse (c) steht oder mit ihr zusammenfällt. Die Mittelpunkte der Doppeltangenten-Kegelechnitte für ein System $p = \text{const}$ oder $s = \text{const}$ liegen auf einer Curve fünfter Ordnung, welche discutirt wird.

Kapitel III bringt Specialisirungen des vorhergehenden auf den Kreiscylinder. Wir erwähnen nur, dass als Berührungsfocale die Strophoïde oder logocyclische Curve von Booth auftritt. Capitel IV giebt eine directe Darstellung der Coordinaten eines Punktes der Kreiskegelfocale durch rationale Functionen eines Parameters, Kapitel V die verhältnissmässig einfache Quadratur der Schleife bei Berührungs- und Achsenfocale.

Dies im Grossen und Ganzen der Inhalt der Broschüre, welche Studirenden, die in Ermangelung eines eigenthümlichen Gedankens die Discussion einer algebraischen Curve oder eines Systems solcher Curven als Arbeit sich vornehmen wollen, zum Muster dienen kann.

Im Interesse der Aufstellung einer unzweideutigen Terminologie möchten wir darauf hinweisen, dass in dem ersten Satze der Abhandlung drei verschiedene Bedeutungen des Wortes Achse durcheinander spielen: Achsengerade, positiver Achsenparameter, Hauptachse. Die positiven Grössen a , b , c beim Kegel und entsprechend überhaupt bei Flächen zweiter Ordnung, welche sicher eine eigene Wortbezeichnung verdienen, scheinen dieselbe, nach verschiedenen der gebräuchlichsten Lehrbücher zu schliessen, noch nicht gefunden zu haben. Von „Längen“ der Achsen und Halbachsen kann man glattweg doch nur beim Ellipsoid sprechen. Vielleicht findet der oben gebrauchte Ausdruck „positiver Achsenparameter“ Anklang; von den Kegelachsen die eine als Hauptachse, die anderen als Nebenachsen zu bezeichnen, liegt ungemien nahe. H. BRUNN.

La géométrie ou l'art des constructions géométriques par EMILE LEMOINE. Paris 1893. Gauthier-Villars.

In den geometrischen Untersuchungen unserer Tage wird das geometrische Ding an sich oft mit Formeln zugedeckt oder aus dem dreidimensionalen Raume hinausprojicirt. Bei dieser Art der Betrachtung ist es eine überflüssige Aufgabe für die Werthung von geometrischen Constructionen einen Maassstab zu schaffen. Wer aber gezwungen ist, nicht nur mit dem Munde zu construiren, sondern seine geometrischen Gedanken mit dem Stifte zu fixiren, der wird die Lösung dieser Aufgabe freudig begrüßen. Ein Versuch dazu liegt in einem Büchlein von E. Lemoine vor, welches „Géométrie“ betitelt ist.

Der Verfasser lässt alle Constructionen durch folgende fünf Grundoperationen entstehen:

- 1°. Man legt das Lineal bei einem Punkte an. Op. (R_1).
- 2°. Man zieht eine gerade Linie. Op. (R_2).
- 3°. Man setzt eine Zirkelspitze auf einen bestimmten Punkt. Op. (C_1).
- 4°. Man setzt eine Zirkelspitze auf irgend einen Punkt einer Linie. Op. (C_2).
- 5°. Man beschreibt einen Kreis. Op. (C_3).

Jede Construction kann durch Wiederholungen der Grundoperationen ausgeführt werden. Die Gesamtheit der Operationen wird durch die Formel bestimmt.

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$$

Aus dieser Formel werden zwei Coefficienten zur Beurtheilung der Constructionen abgeleitet. Der eine ist $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ und heisst die Einfachheit (S , simplicité) der Construction. Der andere Coefficient ist $l_1 + m_1 + m_2$ und wird Genauigkeit (E , exactitude) genannt. l_2 giebt die Anzahl der gezogenen Geraden, m_3 die Anzahl der Kreise oder Kreisbogen an.

Der Verfasser wendet diese Grundsätze auf eine Reihe von Aufgaben der Elementargeometrie an und gelangt zu dem überraschenden Resultate, dass viele als „klassisch“ geltende Constructionen weit davon entfernt sind die einfachsten zu sein. Der Grund dieser Erscheinung liegt meistens darin, dass der Geometer die Aufgaben mit dem geringsten Aufwande von Gedanken und Worten zu lösen sucht, während der Constructeur die Lösung vorzieht, welche die kleinste Zahl von Linien fordert. Es ist nicht leicht, beiden Gesichtspunkten gleichzeitig gerecht zu werden. Aber es ist schon viel erreicht, wenn der theoretisirende Geometer die Bedürfnisse des Constructeurs zu berücksichtigen sucht und bedenkt, dass für Viele die Geometrie eigentlich doch nur um des Construirens willen da ist.

Lemoine deutet selbst an, dass die von ihm aufgestellten Grundsätze für die darstellende Geometrie und die graphische Statik noch einiger Erweiterungen bedürfen, welche sich auf das Zeichnen mit Winkeln

beziehen. Dann aber wäre ein Maassstab geschaffen, nach dem Lösungen derselben Aufgabe auf ihre constructive Einfachheit hin verglichen werden können.

Es wird nicht an Einwendungen gegen die Grundsätze von Lemoine fehlen und besonders die vollständige Gleichstellung des Kreises mit der Geraden erregt Bedenken theoretischer Art. Aber abgesehen davon wird jeder Geometer das Büchlein mit Freude und Nutzen lesen und vielleicht dadurch veranlasst werden, von seinen Constructionen einige Linien abzuschneiden. Er wird sich dadurch den Dank aller Derer erwerben, welche diese Linien wirklich zeichnen müssten.

Dr. BEVEL.

An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics with applications to problems in mathematical physics, by WILLIAM ELWOOD BYERLY (Harvard University). Boston 1893. Ginn & Comp. 8°. 287 p.

Das in der Ueberschrift genannte Werk gehört einer namentlich in England und Amerika cultivirten Richtung an, welche vornehmlich auf die Technik des Rechnens und auf die leichte Verwendbarkeit mathematischer Entwicklungen zur Lösung von Aufgaben Gewicht legt, während ein tiefer gehendes Erfassen der behandelten Gegenstände, zumal im Sinne der modernen Functionentheorie, durchaus zurücktritt. Es zeigt sich dies einmal darin, dass der Herr Verfasser gegen die neue zum grossen Theil mit geometrischen Anschauungen arbeitende Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in keiner Weise Stellung nimmt, und dass er andererseits (in Ansehung der älteren Theorie) Convergencebetrachtungen gar zu sehr in den Hintergrund zurückdrängt. Der Hauptinhalt des Buches besteht vielmehr in der formal analytischen Behandlung von Reihen- und Integral-Darstellungen der in der Ueberschrift angedeuteten Functionen, die theils direct durch ihre analytischen Ausdrucksformen, theils mittelbar als Integrale wohlbekannter Differentialgleichungen eingeführt werden. Die letzteren anlangend, so handelt es sich um die Differentialgleichungen der Potentialtheorie, der Wärmeleitung, der schwingenden Saiten u. s. w.; doch giebt der Herr Verfasser jeweils nur die physikalische Bedeutung der einzelnen Differentialgleichung an, ohne auf deren Entwicklung einzugehen. Betreffs der Stoffanordnung bringt es eine geringe Erschwerung mit sich, dass in dem einleitenden Kapitel bereits mehrere Untersuchungen gegeben werden, welche zweckmässiger vielleicht erst bei den späteren Ausführungen gebracht wären; besonders macht sich dieser Umstand bei der Behandlung der Kugelfunctionen geltend. Bezugnahme auf die Originalliteratur wird im Verlaufe des Textes fast überall vermieden; doch muss es als besonders werthvoll hervorgehoben werden, dass im letzten Kapitel eine von Herrn Dr. M. Böcher (Harvard-University) verfasste historische Skizze über die

im Buche behandelten Gegenstände beigegeben ist. Im Uebrigen ist sehr anzuerkennen, dass die physikalischen Anwendungen jederzeit durch Ausführung zahlreicher Einzelbeispiele noch weiter erläutert werden. Doch ist, hiervon abgesehen, eine Aufnahme des in Rede stehenden Werkes bei dem deutschen mathematischen Publikum wohl schon deshalb weniger empfehlenswerth, weil wir in den Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen, in denjenigen F. Neumann's über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen, vor allem in Heine's Kugelfunctionen u. s. w. Werke besitzen, welche die nämlichen Gegenstände in einer vielseitigere Anforderungen befriedigenden Weise behandeln.

Im Einzelnen ist die Stoffanordnung die folgende. Im einleitenden Kapitel I werden einige Angaben über Integration der Differentialgleichungen, speciell der linearen homogenen, entwickelt und besondere Ausführungen über Integration durch Reihen gegeben. Hieran schliesst sich gleich die Behandlung eines besonderen Problems aus der Wärmeleitung zur Einführung der Fourier'schen Reihen, sowie die Behandlung einer besonderen Potentialfunction zur Einführung der gewöhnlichen Kugelfunctionen $P_m(x)$, $Q_m(x)$ (Surface Zonal Harmonics) und endlich die Besprechung der schwingenden kreisförmigen Platten zur Einführung der Bessel'schen Functionen (Cylindrical Harmonics). Es folgen weitere allgemeine Erörterungen zur Integration der linearen Differentialgleichungen.

Im zweiten und dritten Kapitel sind die Fourier'schen Reihen behandelt; doch werden in Betreff der Convergenz derselben im Wesentlichen nur einige Resultate ohne Ableitung angegeben. Bemerkenswerth ist, dass in Einzelbeispielen das Zustandekommen des Summenwerthes durch wirkliches Zusammenfügen der einzelnen Sinuscurven geometrisch erläutert wird.

Kapitel IV bringt zahlreiche Anwendungen der Fourier'schen Reihen auf Probleme der Physik, und zwar vor Allem auf das Problem der Wärmeleitung; es wird ferner das Problem der Strömung der Elektrizität in einer unendlichen Ebene und die Vibration quadratischer Platten behandelt.

Das fünfte Kapitel ist den Kugelfunctionen erster und zweiter Art $P_m(x)$ und $Q_m(x)$ (Zonal Harmonics) gewidmet, die gleich in der ersten Hälfte des Kapitels wieder zu einer Reihe physikalischer Anwendungen benützt werden. Es folgen einige elegante analytische Ausführungen über Kugelfunctionen, welche im Wesentlichen die bekannte Darstellung gegebener Functionen in Reihen nach Kugelfunctionen zum Ziele haben.

In entsprechender Weise behandeln die drei folgenden Kapitel die allgemeinen Laplace'schen Kugelfunctionen (Spherical Harmonics), die Bessel'schen Functionen und endlich die Lamé'schen Functionen (Ellipsoidal Harmonics). In einem Anhang sind Tafeln über die numerischen Werthe der mehrfach genannten Functionen beigegefügt.

R. FRICKE.

Uniplanar Algebra, being part I of the propaedeutic to the higher mathematical analysis, by IRVING STRINGHAM (University of California). San Francisco 1893. Berkeley press. 8°. 141 p.

Das vorliegende Buch hat einen ausgesprochen didactischen Charakter und ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche Herr Stringham an der University of California zur Einführung in das höhere mathematische Studium gehalten hat. Es ist das auch in England stark verbreitete Studium des Euklid, welches hier nach Denkweise, Methodik und Form der Darstellung von bestimmendem Einfluss war. Scharfe logische Fundirung und präzise Abgrenzung des dargebotenen Stoffes zeichnen die Darstellung aus. Uebrigens ist von geometrischer Denkweise ausgedehnter Gebrauch gemacht, und das Buch schliesst sich in seiner ganzen Eigenart den bekannten englischen Elementarbüchern „Syllabus of Plane Geometrie“ und „Text-Book of Euclid's Elements“ an.

Etwas apart ist die Stringham'sche Definition „einer“ Algebra. Ein bei gewissen wohldefinierten Operationen sich immer wiedererzeugendes System von Zahlen, das man in Verallgemeinerung einer bekannten Sprechweise einen Zahlenkörper nennen würde, bezeichnet der Herr Verfasser als eine „Gruppe“ und fährt dann fort „such a group is an algebra“, obwohl unter den anzuwendenden Operationen auch Logarithmirung und Exponentiation sich finden.

Die Darstellung beginnt mit Euklid's Lehre von den Proportionen, entwickelt sodann die Regeln der algebraischen Grundoperationen, die Eigenschaften der Logarithmen, Exponentialfunctionen, der goniometrischen und hyperbolischen Functionen. Es folgt die Erweiterung der bisherigen Entwicklungen auf complexe Grössen, und es ist endlich ein Kapitel über conforme Abbildung, sowie eines über den Fundamentalsatz der Algebra gegeben.

R. FRICKE.

Die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Eine historisch-kritische Studie von Dr. A. KARAGIANNIDES. Berlin 1893. In Kommission bei Mayer & Müller.

In dem ersten Abschnitte des Werkes werden diejenigen Mathematiker des Alterthums besprochen, welche sich mit der Begründung des Parallelenaxioms beschäftigten. Den Gegenstand des zweiten Abschnittes bilden die Untersuchungen von Gauss, Lobatchefsky und Riemann, während der dritte sich mit den Arbeiten der Herren Helmholtz, Klein und Poincaré beschäftigt. Eine eigentliche Geschichte der nichteuklidischen Geometrie ist das vorliegende Werk nicht, da dasselbe nicht ein Gesamtbild des Schaffens der in demselben behandelten Autoren bietet. Der Werth desselben besteht vielmehr in der scharfen und treffenden Kritik, die es der nichteuklidischen Geometrie zu Theil werden lässt. Um den Standpunkt des Verfassers zu charakterisiren und zugleich eine Probe seines

eigenthümlichen bilderreichen Styls zu geben, seien hier einige Stellen aus der Recapitulation angeführt:

1. Es giebt nur einen einzigen Raum, in welchem alle Menschen leben und denken, und in welchem eine Klasse von Mathematikern nach eigenem Geschmack und eigener Willkür ihre besonderen Räume construirt hat und construirt. — Dass es mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten giebt, bestreitet Niemand; der Raum aber hat drei Dimensionen.

2. Diejenigen Mathematiker, welche einen Raum durch reine Zahlen construiren, gleichen denjenigen Menschen, welche ihr Millionenvermögen im Traume construiren. — Die beiden Gebiete Arithmetik und Geometrie helfen sich einander, aber nie erzeugt das eine Gebiet das andere, oder ersetzt es vollständig. Wir operiren in der analytischen Geometrie z. B. mit Gleichungen, aber wir dürfen nicht vergessen, dass wir zugleich Coordinaten gebrauchen; und diese Coordinaten müssen wir erst haben.

3. Diejenigen Geometer, welche die Definition der Parallelen, das fünfte Postulat und den daraus folgenden Satz der Winkelsumme im geradlinigen Dreiecke fallen lassen und synthetisch eine ebene Geometrie construiren wollen, die entsprechen genau, kann man sagen, denjenigen Arithmetikern, welche das Axiom der Gleichheit fallen lassen und ihre algebraischen Probleme nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen auflösen wollen.

M. MEYER.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1894.

Periodische Schriften.

- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von OHRTMANN, herausgegeben von E. LAMPE. 23. Band. Jahrgang 1891. Heft 3 (Schluss). Berlin, G. Reimer. 12 Mk.
- Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. III. Theil. Herausgegeben von C. BÖRGEN. Berlin, Mittler & Sohn. 2 Mk. 50 Pf.
- Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen zu Potsdam in den Jahren 1890 und 1891. Berlin, Asher. 10 Mk.
- Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der königl. preuss. Landesaufnahme. Band 8 (Schluss). Berlin, Mittler & Sohn. 10 Mk.
- Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Beobachtungssystem des Königreichs Sachsen. XI. Jahrgang. Herausgegeben von P. SCHREIBER. Chemnitz 1893. Bülz. 10 Mk.
- Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts; Jahrgang 1894. 1. Heft. Herausgegeben von W. von BEZOLD. Berlin, Asher. 2 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

- GRASSMANN, R., Die Folgelehre oder Functionenlehre in strenger Formelentwicklung. Stettin, R. Grassmann. 3 Mk. 50 Pf.
- BOCHER, M., Die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit Vorwort von F. KLEIN. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.
- GRAF, H., Einleitung in die Theorie der Gammafunctionen und der Euler'schen Integrale. Bern, Wyss. 1 Mk.
- SEGNIER, S. J., Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après KRONECKER. Berlin, Dames. 12 Mk.
- WEYER, E., Die parabolische Spirale. Eine Monographie. Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk.
- GILLE, A., Lehrbuch der Geometrie. I. Theil. Ebene Geometrie. Halle a. S., Buchhandlung des Waisenhauses. 1 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

- OLBERS, W., Gesammelte Werke. Herausgegeben von C. SCHILLING. 1. Band.
Berlin, Springer. 16 Mk.
- HENKE, R., Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. Zweite vermehrte
Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk.
- LASKA, W., Lehrbuch der Vermessungskunde. Stuttgart, Maier. 10 Mk.
- KARSTENS, K., Neue Berechnung der mittleren Tiefen der Oceane nebst
Kritik der bisherigen Rechnungsmethoden. Gekrönte Schrift. Kiel,
Lipsius & Tischer. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

- LOHSE, O., Planetographie. Leipzig, Weber. 3 Mk. 50 Pf.
- POINCARÉ, H., Mathematische Theorie des Lichts; deutsche Ausgabe von
E. GÜMLICH und W. JÄGER. Berlin, Springer. 10 Mk.
- STRICKER, S., Ueber strömende Elektrizität (Schlussheft). Wien, Deuticke.
1 Mk. 25 Pf. (compl. 3 Mk. 75 Pf.).
- HELM, G., Grundzüge der mathematischen Chemie. Energetik der chemischen
Erscheinungen. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

The Evanston Colloquium. Lectures on mathematics, delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893 at Northwestern University Evanston, Ill. by FELIX KLEIN, reported by ALEXANDER ZIWET. New-York 1894. Macmillan and Co. 8°. 109 p.

Ueber die Entstehung dieses Buches sind folgende Bemerkungen vor auszuschicken. Herr Prof. F. Klein hatte sich während der Universitätsferien im Herbst 1893 im Auftrage der königl. preuss. Regierung nach Chicago begeben, um bei dem dortselbst während der Zeit vom 21. bis 27. August tagenden Mathematiker-Congress als Vertreter der deutschen Mathematik zu fungiren. Nach Abschluss des Congresses hat Herr Klein aus eigener Initiative vor einem grösseren Zuhörerkreise in der Northwestern University zu Evanston (bei Chicago) eine Reihe weiterer Vorträge gehalten und dieselben zu einem Colloquium ausgestaltet. Diese Vorlesungen wurden von Prof. Ziwet (Ann Arbor) ausgearbeitet und in dem in der Ueberschrift genannten Buche publicirt.

Herr Klein hat in den in Rede stehenden Vorlesungen einen summarischen Ueberblick über diejenigen Theile der modernen Mathematik gegeben, in welche er selbst fortbildend und umgestaltend eingegriffen hat. In vierein unter den zwölf Vorlesungen ist überdies Bericht erstattet über die Untersuchungen anderer deutscher Forscher, welche Herrn Klein wissenschaftlich besonders nahe stehen. In allen Vorlesungen ist Nachdruck darauf gelegt, dass die Grundgedanken und Hauptgesichtspunkte der einzelnen vorgetragenen Theorien möglichst lebhaft in Evidenz treten. Es erscheint diesorhalb das vorliegende Buch auch für deutsche Leser sehr werthvoll, und es wird ein kurzes Referat über den Inhalt der Vorlesungen gewiss willkommen sein. Nur wolle man bei der Beurtheilung dieses Inhalts bemerken, dass sich das Evanston Colloquium unmittelbar an den Congress anschloss, und dass daher Gegenstände, welche im Congress bereits ausführliche Berücksichtigung fanden (wie z. B. die Gruppentheorie) im Colloquium dementsprechend in den Hintergrund gestellt wurden.

Die erste Vorlesung ist Clebsch gewidmet. Im Anschluss an eine Charakteristik seiner wissenschaftlichen Eigenart werden, unter vorläufiger Zurückschiebung seiner geometrischen Arbeiten, als seine hauptsächlichsten

Leistungen diejenigen in der Invariantentheorie und in der Verknüpfung der Abel'schen Functionen mit der Geometrie genannt. Es knüpft sich hieran eine kritisch gehaltene Gegenüberstellung Riemann's und seiner modernen Fortsetzer einerseits, sowie von Clebsch und seiner Schule andererseits. Als weitere von Clebsch inaugurierte Untersuchungsrichtungen werden genannt, einmal die Untersuchungen über algebraische Functionen mehrerer Veränderlichen, die durch Noether, Picard, Poincaré u. A. fortgesetzt sind, sodann die mit den Differentialgleichungen erster Ordnung enge verbundene Theorie der Connexe.

In der zweiten und dritten Vorlesung wird Bericht erstattet über einen Theil der Forschungen von Sophus Lie. Es handelt sich hierbei aber nicht um die allgemeinen gruppentheoretischen Principien, von welchen die neueren Werke Lie's und seiner Schüler handeln, sondern Prof. Klein bespricht die rein geometrischen Ergebnisse, welche einer früheren Forschungsperiode Lie's angehören. An Stelle des Punktes, der Ebene, der Geraden benutzt Lie die Kugel als Raumelement und gründete hierauf eine „Kugelgeometrie“ nach dem Modell der Plücker'schen Liniengeometrie, mit welcher erstere in höchst interessantem Zusammenhange steht. Ein anderer Gedanke Lie's ist es, an Stelle der Kugel in gleichem Sinne ein nach Lage und Richtung orientirtes „Flächenelement“ zu setzen. Die hier entspringende Geometrie steht in engster Beziehung zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese, sowie auch die Beziehung zu den Berührungs-Transformationen wird in der dritten Vorlesung erläutert.

Die folgende Vorlesung, über die reellen Züge der algebraischen Curven und Flächen, giebt in ihrem ersten Theile eine historische Uebersicht über die hier in Betracht kommenden Arbeiten. Newton's „enumeratio linearum tertii ordinis“ steht natürlich voran; den gleichen Gegenstand behandelt 1852 Möbius mit rein geometrischen Mitteln. Es folgt ein Bericht über Clebsch's Modell der Diagonalfäche, sowie über die sich anschliessenden eigenen Arbeiten Klein's und diejenigen Rodenberg's über die Gestalten der Flächen dritter Ordnung; es werden ferner Rohn's Arbeiten über Flächen vierter Ordnung ausführlich charakterisirt. Die Untersuchung der reellen Züge algebraischer Curven ist für die vierte Ordnung von Zeuthen geleistet, allgemeinere Ansätze für beliebige Ordnungen sind von Harnack, Hilbert, sowie in eigenen Arbeiten Klein's entwickelt; die letzteren basiren auf der Heranziehung symmetrischer Riemann'scher Flächen, welche am Schlusse der Vorlesung etwas ausführlicher behandelt werden.

Eine weitere Vorlesung ist Schwarz' Theorie der Dreiecksfunctionen gewidmet, jedoch nicht innerhalb der beschränkten, von Schwarz selbst eingehaltenen Grenzen. Vielmehr entwickelt Klein die geometrische Theorie der Kreisbogendreiecke in solcher Allgemeinheit, dass

sie für die Gesamtheit der hypergeometrischen Functionen eine ausreichende Grundlage bietet.

Demnächst entwickelt Prof. Klein seine Ueberzeugungen über „den mathematischen Charakter der Raumanschauung und die Beziehung der reinen Mathematik zu anderen Wissenschaften, in denen sie Verwendung findet“. An der Hand interessanter Beispiele wird der Unterschied zwischen „naiver“ und „begrifflich geläuterter“ Raumanschauung entwickelt. Ein ganz entsprechendes Sachverhältniss findet bei der innerhalb der Physik, Astronomie etc. angewandten Mathematik einerseits und der für sich entwickelten abstracten Mathematik auf der anderen Seite statt.

Die siebente und achte Vorlesung behandeln zahlentheoretische Gegenstände, nämlich die erstere ist im wesentlichen ein Referat über Hilbert's Beweis der Transcendenz von e und π , die letztere entwickelt die Gittertheorie der binären ganzzahligen quadratischen Formen. Dieselbe basirt auf einer von Gauss herrührenden geometrischen Interpretation der binären quadratischen Formen und ist von Herrn Klein dazu benutzt, die Composition der Formen, sowie die Eigenart der idealen Zahlen quadratischer Körper geometrisch verständlich zu machen.

In der neunten Vorlesung, die Auflösung der höheren algebraischen Gleichungen, entwickelt Klein seine Auffassung vom Grundproblem der Algebra; seine Arbeiten über die Gleichungen fünften Grades, sowie über diejenigen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen geben hier die Richtung an.

Auch die folgende Vorlesung, über einige neuere Fortschritte bei den hyperelliptischen und Abel'schen Functionen, giebt zusammenhängenden Bericht über eine längere Forschungsperiode Klein's und seiner damaligen Schüler Burkhardt, Pascal, Wirtinger u. A. Die Tendenz kann man kurz dahin angeben, dass die hergebrachte Lehre von den genannten Functionen in lebhaftere Wechselbeziehung gesetzt wird zu den neueren Theorien der Invarianten, der projectiven Geometrie, der Gruppen u. s. w.

In der elften Vorlesung, die neuesten Untersuchungen über nicht-euklidische Geometrie, ist nach einer allgemeineren Einleitung erstlich über Lie's bezügliche Untersuchungen (zumal betreffend Helmholtz' Monodromieaxiom) Bericht erstatten, sodann wird über Clifford's Ideen gesprochen, welche durch Klein's eigene Arbeiten allgemeiner bekannt geworden sind.

Ein Vortrag über „das Mathematikstudium in Göttingen“, sowie der Wiederabdruck eines von Klein verfassten Artikels „Die Entwicklung der Mathematik an den deutschen Universitäten“ aus der Lexis'schen Festschrift „Die deutschen Universitäten“ beschliessen das Buch.

R. FRICKE.

4*

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien. Nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Dr. BERNHARD HERCHER, ordentlichem Lehrer am grossherzoglichen Gymnasium zu Jena. Drittes Heft. Enthaltend: Stereometrie und Grundlehren von den Kegelschnitten (Lehraufgabe der Prima). Leipzig 1893. Verlag von Carl Jacobsen. Preis 1 Mk. 10 Pf.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Für höhere Schulen von Dr. BERNHARD HERCHER. Erweiterter Sonderabdruck aus dem Lehrbuch der Geometrie von demselben Verfasser. Preis 75 Pf.

Im ersten Theil bietet das vorliegende Buch eine leicht verständliche Darstellung des wichtigsten Lehrstoffes aus dem Gebiete der Stereometrie. Der zweite Theil enthält einen Grundriss der analytischen Geometrie, welchem in einem Anhang noch die Cubatur des Rotations-Ellipsoids hinzugefügt ist. Von diesem zweiten Theil hat der Verfasser noch einen erweiterten Sonderabdruck erscheinen lassen. Die Erweiterungen bestehen in der Einführung der Polar-Coordinationen, der Ableitung der Polar-Gleichungen für die Kegelschnitte und der Dreitheilung des Winkels.

M. MEYER.

Ueber adjungirte Systeme simultaner linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängig veränderlichen Grösse. Von Dr. E. GRÜNFELD. Nikolsburg 1893. Druck von A. Rosenau.

Herr Frobenius hat im 77. Bande des „Journals“ für die reine und angewandte Mathematik merkwürdige Determinantenbeziehungen gefunden, welche zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung und denen ihrer Lagrange'schen Adjungirten bestehen. Der Verfasser stellt analoge Beziehungen für adjungirte Systeme simultaner linearer homogener Differentialgleichungen erster Ordnung auf und beweist, dass die Integrale des einen Systems die integrierenden Factoren des anderen sind. Ferner zeigt er, wie sich ein System linearer nicht homogener Differentialgleichungen mit Hilfe der Integrale des zugehörigen homogenen und seines adjungirten Systems integrieren lässt und wie man andererseits die Integration eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen auf die Integration eines nicht homogenen Systems, welches eine Unbekannte und daher eine Gleichung weniger enthält und auf eine Quadratur zurückführen kann; die Integration dieses letzteren Systems erreicht der Verfasser auch durch Anwendung der Theorie des „letzten Multiplifiers“. Die gewonnenen Resultate werden fast durchweg auf dasjenige specielle System angewendet, aus welchem die lineare (homogene resp. nicht homogene) Differentialgleichung n^{ter} Ordnung hervorgeht.

M. MEYER.

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten.

Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von KARL SCHWERING, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. Freiburg i. Br. 1893. Herdersche Verlagsbandlung. 79 S. 8°. Preis: broschirt 1 Mk., gebunden 1 Mk. 80 Pf.

Die tiefsinnigen und fruchtbaren neueren Forschungen eines Lipschitz, Dedekind, G. Cantor und anderer über die Grundlagen der Arithmetik sind von solcher Bedeutung, dass sie nicht ohne Einfluss auf die Elementar-Mathematik bleiben können. Es fragt sich nun, was und wie viel davon für die Schule zu verwenden sei. Offenbar nur dasjenige, was den bisherigen Gang einfacher, klarer und zusammenhängender macht. So hat der Verfasser des vorliegenden Buches es gehalten, und dadurch, indem er weise Maass hielt, strenge Wissenschaftlichkeit und Klarheit mit praktischer Brauchbarkeit gepaart. Darin und in der Berücksichtigung des Geistes der neuen Lehrpläne beruht das Neue und Originelle des Buches. In der althergebrachten Weise ein neues Lehrbuch zu schreiben, hat der Verfasser mit Recht wohl für überflüssig gehalten. Der Inhalt ist in drei Lehrgänge getheilt; der erste umfasst etwa das Lehrpensum der Untertertia, der zweite das der Obertertia und Untersecunda eines Gymnasiums, der dritte enthält einerseits die Erweiterung derjenigen Gebiete, die im zweiten nur mit Berücksichtigung des Allernöthigsten und Wichtigsten behandelt sind, andererseits die schwierigeren Partien und auch solche, die durch die Lehrpläne nicht vorgeschrieben werden. So werden im zweiten Lehrgange z. B. der Begriff des Logarithmus und die logarithmischen Sätze nur an der Basis „10“ erläutert — ein sehr glücklicher und höchst praktischer Griff — um dann im dritten ihre Verallgemeinerung und Erweiterung zu erfahren. Die Regeln über die Bruchrechnung und die negativen Zahlen, ein wunder Punkt in vielen Lehrbüchern, entspringen hier lediglich der Permanenz der Multiplicationsgesetze. Hierin diese Einfachheit und befriedigende Klarheit geschaffen zu haben ist ein besonderes Verdienst des Verfassers. Neu ist ferner eine näherungsweise Auflösung der Gleichung $x^n = a$ und die Lösung der Gleichungen vierten Grades, sowie eine Reihe kleinerer Bemerkungen.

Alles Künstliche und wissenschaftlich Werthlose, wie negative und gebrochene Wurzelexponente, die ja selbst dem Fachmanne nicht vorkommen, ist ausgeschieden. Die Einführung neuer Sätze etc. geschieht unter steter Vergleichung mit dem gewöhnlichen Zahlenrechnen; es gilt dem Verfasser als Princip: „Keine Rechnung ohne Probe, kein Satz ohne Zahlenbeispiel“.

Wir sind überzeugt, dass das Buch, wenn es mit Einsicht und Geschick verwendet wird, nicht nur ungemein brauchbar, sondern auch sehr fruchtbar sich zeigen wird. Zum Selbstunterrichte würde es sich dagegen nicht empfehlen, womit wir aber keineswegs einen Tadel aussprechen, sondern nur eine das Buch charakterisirende Bemerkung machen wollen.

Zum Selbststudium ist es nämlich so zu sagen nicht „langstielig“ genug; es wäre zu knapp, wissenschaftlich, vornehm exclusiv. — Der Druck ist tadellos, das Papier gut.

F. SCHÜTTE.

Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von KARL SCHWERING, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. Mit 16 Figuren. Freiburg i. Br. 1893. Herdersche Verlagshandlung. 52 S. 8°. Preis: broschirt 80 Pf., gebunden 1 Mk. 10 Pf. — Hiervon getrennt und einzeln käuflich der erste Lehrgang u. d. T. Anfangsgründe der Trigonometrie für die sechste Stufe höherer Lehranstalten nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. gr. 8°. 12 S. Preis: 20 Pf.

In der vorliegenden Trigonometrie ist das Lehrgebäude nicht, wie bisher üblich, wissenschaftlich systematisch aufgebaut, sondern den neuen Lehrvorschriften entsprechend methodisch concentrisch. Wir wollen den hübschen Bauplan kurz skizziren. Ohne einleitenden Pomp und Festgepränge wird sogleich der erste Stein gelegt: Die Aufgabe, aus den Seiten eines Dreiecks den Inhalt zu berechnen (Heronische Formel). Daran schliesst sich: Man berechne die Höhen. Ein Zahlenbeispiel verankert die Steine. Die Aufgabe, die Winkel aus den Seiten zu berechnen, liefert den einen Eckstein, Sinus, und eine zweite Lösung derselben Aufgabe den anderen, Cosinus. Die bekannte Aufgabe, eine senkrechte Höhe zu bestimmen, liefert die übrigen Ecksteine Tangens und Cotangens. Zahlenbeispiele, Proben und Uebungen sorgen dafür, dass die Steine fest und richtig liegen. Nach der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks folgt die des gleichschenkligen, und das Fundament und der Unterbau ist fertig.

Der Cosinus-Satz — bemerkenswerth ist die Einführung seiner allgemeinen Gültigkeit —, der Sinus-Satz und die Beziehungen zum Radius des eingeschriebenen Kreises, der Tangens-Satz, geometrisch abgeleitet, bilden den Oberbau. Dass die Tangens-Formeln für die halben Winkel und die Beziehungen zu den Radien des ein- und der angeschriebenen Kreise mit eingemauert werden, dient dem Gebäude nicht nur zur Schönheit, sondern auch zu praktischem Nutzen. Gleichzeitig wird unten noch ausgebaut: die Beziehungen der vier Functionen unter einander. Nun ist der Bau schon so fest, dass wir uns darin einrichten, zum Schrecken derer, die da erst Verputz und Stuckarbeit angebracht wissen wollen. Wir machen schon schöne Berechnungen von Stücken am Dreiecke, Vierecksaufgaben und Berechnung von regelmässigen Vielecken.

Dann erst (dritter Lehrgang) arbeiten wir die Einzelheiten des Unterbaues aus: Additions-, Multiplications- und Divisionstheoreme; die ersteren führen uns zu Verallgemeinerungen. Nöthig haben wir noch die Functionen kleiner Winkel; die Berechnung von π dient mehr zur Zierde. So baut man leicht, und es macht allen viel Freude, so den Bau erstehen zu lassen.

Eine Reihe von Aufgaben, geometrische und analytische, zeigen uns, dass der Bau gut, solid und praktisch hergestellt ist, und zeigen uns, wo wir noch bequemere Einrichtungen, Erweiterungen, Verzierungen und Verschönerungen anbringen können.

F. SCHÜTTE.

Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. Von Prof. H. MARTUS, Director des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. I. Theil: Ebene Figuren. 96 S. gr. 8^o. II. Theil: Dreiecksrechnung und Körperlehre. 138 S. gr. 8^o. Bielefeld und Leipzig 1893. Verlag von Velhagen & Klasing.

In diesem Leitfaden bringt uns der Verfasser einen vollständigen, etwa auf die Hälfte des Umfanges beschränkten Auszug seines ausführlichen Lehrbuches „Raumlehre für höhere Schulen“. Er enthält an Lehrsätzen und Uebungen alles das, was zum Aufbau des Systems nothwendig ist. Die Einrichtung und Anordnung ist genau die des grösseren Werkes, so dass es leicht ist, den Inhalt des Leitfadens nach jenem zu ergänzen und weiter auszubauen. Das grössere Werk haben wir im 4. Hefte des 37. Jahrganges und im 6. Hefte des 37. Jahrganges ausführlich besprochen und wir weisen auf diese Besprechungen hierdurch hin. Alle die Eigenthümlichkeiten und Vorzüge, die wir da dem Hauptwerke beigelegt haben, haften auch dem vorliegenden Leitfaden an, unter anderen die musterhaft klare und verständliche Darstellung und Anordnung, die Vermeidung fremdsprachlicher Ausdrücke und deren glückliche Verdeutschung, die vielen schönen der Praxis entnommenen Zahlenbeispiele, und bei der Körperlehre insbesondere die perspectivisch richtigen und sauberen Figuren, wodurch das Buch fast einzig in seiner Art dasteht, schliesslich die vorzügliche Ausstattung. Von dem grösseren Werke haben wir behauptet, dass es zu den besten seiner Art gehöre; wir können auch von diesem kürzeren Auszuge dasselbe sagen.

F. SCHÜTTE.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Uebungsaufgaben von JOS. LENGANER, Professor am königl. alten Gymnasium zu Würzburg. Vierte, umgearbeitete Auflage der „Ebenen Geometrie“ von A. STEGMANN. Kempten 1893. Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung. 180 S. 8^o.

Vorliegendes Lehrbuch unterscheidet sich von den meisten ähnlichen Büchern in Bezug auf Inhalt, Darstellung, Anordnung und Behandlung des Stoffes, welche die schon vor Menschenaltern übliche ist, im Ganzen so wenig, dass man hierüber nichts sagen kann. Der Lehrstoff ist noch recht umfangreich; der Uebungsstoff ist zwar erweitert, aber, dass Petersens „Methoden und Theorien“ von Einfluss darauf gewesen seien, wie es in der Vorrede heisst, davon merkt man leider nicht viel. Denn weder sind

die Aufgaben nach jenen Methoden geordnet, noch auch treten die Ideen der Auflösung irgendwo prägnant hervor. Ueberhaupt merkt man nicht viel von modernem Zuschnitt. Auch der Umstand, dass das Werk in Frakturschrift gedruckt ist, während man doch jetzt fast allgemein für derartige Sachen Antiqua verwendet, muthet einen etwas altmodisch an. Loben wollen wir, dass die Constructionsaufgaben mit Zahlenbeispielen versehen sind; unglücklicherweise liefern aber die meisten dieser Zahlen als Millimeter genommen sehr winzige Dreieckchen, während sie als Centimeter genommen viel zu gross für die Ausführung auf Papier sind. Sonst giebt es nicht viel zu loben noch auch zu tadeln; das Buch ist eben zu wenig originell. Auch die Figuren sind nur mittelmässig schön. F. SCHÜTTE.

Methodisches Hilfsbuch für den **Vorunterricht in der Geometrie** und das geometrische Zeichnen. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und Fortbildungsschulen. Von O. BÜRKLEN, Professor am Reallyceum in Schw. Gmünd. Stuttgart 1893. Verlag von Ad. Bonz & Comp. 48 S. 8^o.

Die in diesem Buche befolgte Methode ist so trefflich dem kindlichen Geiste angepasst, dass sie sicher die schönsten Früchte tragen und dem Schüler Freude an Geometrie bekommen lassen wird. — Was erklärt werden soll, wird vorher gezeichnet und kommt so durch das Auge zunächst in die Anschauung. Handelt es sich um die Congruenz von Figuren, so werden sie auf Carton gezeichnet, ausgeschnitten und wirklich zur Deckung gebracht, so sind Irrthümer und Unklarheit ganz ausgeschlossen. Die Fundamentalaufgaben (man möchte wünschen, dass sie auch typographisch hervorgehoben würden) sind sorgfältig behandelt und werden durch vielerlei Wiederholungen befestigt. Die Constructionsaufgaben sind einfach und leicht, und die gegebenen Stücke sind in bestimmten Maassen, Centimetern, angegeben. Dies erleichtert dem Schüler, der das Concrete mehr liebt, als das Allgemeine, die Aufgabe und übt sein Auge, es erleichtert dem Lehrer die Controle und schützt vor ungünstigen Fällen und Zeichnungen, die das zu Erweisende nicht deutlich erkennen lassen. Besondere Freude werden dem Schüler die Zeichnungen machen, namentlich die einfachen und doch so hübschen Ornamente. Sie geben auch der Phantasie Nahrung, wecken den Schönheitssinn, und es hat für den Schüler hohen Reiz, die Construction selbstständig, oder nach leichten Andeutungen zu finden. So lernt er spielend eine Reihe geometrischer Wahrheiten kennen und zugleich anwenden, und spielend lernt doch das Kind am liebsten. Wir möchten dem Verfasser sogar rathen, die Zahl derartiger Figuren noch zu vermehren und sie passend durch das ganze Buch hin zu vertheilen. Gerne gestehen wir ein, dass wir selten ein Werkchen gefunden, das so sehr seinem Zwecke entsprechend wäre wie dieses kleine Hilfsbuch.

F. SCHÜTTE.

Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von Dr. ERNST BARDEY. Vierte Auflage. Leipzig 1893. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 378 S. 8°. Preis: brosch. 6 Mk.

Dieses ausgezeichnete Werk, das nicht nur theoretisch interessant, sondern auch für den Lehrenden in vieler Hinsicht praktisch verwendbar ist, liegt nunmehr in vierter Auflage vor. Es dürfte bei den Fachgenossen wohl allgemein so bekannt sein, dass eine kurze Charakteristik hier genügen wird. Das Buch enthält etwa 1000 Gleichungen nach bestimmten Principien geordnet nebst ihren Lösungen, und zwar quadratische Gleichungen und solche höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen, namentlich solche, die interessant in der Form, elegant und überraschend in der Lösung, einfach in den Resultaten sind, dann solche mit ausgezeichneten oder leicht erkennbaren Wurzeln. Die Durcharbeitung dieses Buches schärft den Blick ungemein für die Erkennung der Zurückführbarkeit einer Gleichung und die Art und Weise wie sie anzugreifen ist. Ferner werden Gleichungen mit mehreren Unbekannten behandelt, die in ähnlicher Weise bemerkenswerth sind. Die meisten Gleichungen erscheinen in allgemeiner Form, nur wenige in Zahlenwerthen.

In dieser neuen Auflage sind Druckfehler ausgemerzt, einzelne Theile verbessert, einige Lösungen erweitert; die Veränderungen sind jedoch keine wesentlichen.

F. SCHÜTTE.

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Theilung mit sechs Decimalstellen. Von W. JORDAN, Professor an der königl. technischen Hochschule zu Hannover. Stuttgart 1894. Verlag von Konrad Wittwer. 420 S. Royal-Octav. Preis 10 Mk.

Diese Tafeln enthalten zunächst die Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen von 1 bis 100000 auf sechs Stellen; dann folgen die Logarithmen der trigonometrischen Functionen. Bei der hier zu Grunde liegenden Kreistheilung ist ein Quadrant gleich 100 Graden, ein Grad gleich 100 Minuten, eine Minute gleich 100 Secunden. Bezeichnung: $1^\circ = 100^c = 10000^{cc}$. Von 0° bis 20° sind die Logarithmen angegeben von je 10 zu 10^{cc} , von $20^\circ - 50^\circ$ von jedem 1^c ($20^\circ = 18^\circ$ alter Theilung). Das kleinere Intervall am Anfange der Tafel ist nothwendig wegen der sehr grossen und ungleichen Differenz von $\log \sin$ und $\log \tg$. Es hätte ausgereicht, mit dem kleineren Intervall bis zu 5° zu gehen, im Interesse der Bequemlichkeit ist weiter gegangen, und soll in späteren Auflagen das kleinere Intervall von 10^{cc} bis ans Ende der Tafel fortgeführt werden. Dies ist jedenfalls viel bequemer, denn nichts ist lästiger bei derartigen Rechnungen, als das langweilige Interpoliren, das man wegen grosser Differenzen nicht im Kopfe machen kann. Für ganz kleine Winkel sind auch die bekannten Zahlen S und T , wie z. B. bei Bremiker und Schrön unten angebracht.

Der Mangel an sechsstelligen Tafeln — und eine solche ist für den Landmesser nöthig — für die neue Theilung hat den Verfasser zur Herausgabe dieses Werkes veranlasst. Benutzt wurde eine grosse achtstellige Tafel, die 1891 in Paris erschien, jedoch hat der Verfasser zur Controle 100 Werthe des *log sin* und *log cos* auf 15 Stellen selbstständig berechnet, sowie eine Anzahl Zwischenwerthe. Die Tafel ist in verschiedener Weise so controlirt, dass Fehler so gut wie ausgeschlossen sind.

Die technische Anordnung ist wohl gelungen und übersichtlich, der Druck sehr correct. Eine Verbesserung möchten wir vorschlagen. Da die erste Tafel auf jeder Seite 60 Zeilen hat, also nicht rund abschliesst, so möchte jedes 10000 durch einen auffallenderen, dickeren oder doppelten Querstrich hervorgehoben werden. Das Papier ist hervorragend schön und dauerhaft.

F. SCHÜTTE.

Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung. Von JOH. THOMAE in Jena. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten und 16 lithographirten Figurentafeln. Halle a. S. 1894. Verlag von Louis Nebert. 181 S. 8°. Preis 6 Mk.

Der Verfasser hatte im Jahre 1873 unter dem Titel „Geometrie der Lage“ ein Werk über Gebilde erster und zweiter Ordnung veröffentlicht, dessen Inhalt diesem neuen Werke einverleibt und insbesondere in den Kegelschnitten, Kegelschnittbüscheln und Scharen in weit ausführlicherer Weise behandelt ist. Vor allem sind die Grundaufgaben auch für die Fälle gelöst, in denen ideale Gebilde in dieselben eingehen. Diese sind in dem berühmten Werke von Reye nicht berücksichtigt. Von den ähnlichen Werken der Herren Zech, Cremona, Rulf und den Steiner-Schröterschen Vorlesungen unterscheidet sich das vorliegende Werk vornehmlich durch die Reinheit der Methode. Es sind sämtliche Ableitungen und Beweise rein projectiv erbracht. Dadurch gewährt es dem Lernenden einen reinen und in hohem Grade befriedigenden Genuss. Denn nicht mit Unrecht bemerkt der Verfasser in der Vorrede: „Wie ein schriller Piff in eine harmonische Musik tönt es herein, wenn z. B. in Schröter's Abhandlung über die Clebsch'sche Configuration, die im Allgemeinen projectiv gehalten ist, plötzlich eine quadratische Gleichung aufgelöst wird.“ — Von hohem Interesse sind die einleitenden Erklärungen über die Unmöglichkeit einer reinen Geometrie der Ebene ohne den Raum, über den Begriff des Punktes, der Linie, und der Continuität, die Eigenschaften der Geraden, Adjunction des uneigentlichen Punktes, und der uneigentlichen Geraden einer Ebene, das Lineal als Constructions mittel, Dualität u. A. Ebenso ist bemerkenswerth das Schlusskapitel über Maassverhältnisse. Ausser den spezifischen Kapiteln über die idealen Elemente enthält das Buch an vielen Stellen Neues oder schon Bekanntes in neuer Beleuchtung, wie dies ja bei einem so einheitlich und individuell-eigenartig durchgearbeiteten Buche nicht

ausbleiben kann. Die Darstellung ist dabei klar und sorgfältig, so dass sie auch dem weniger Geübten keine Schwierigkeiten bietet. Hervorheben wollen wir noch die reiche Anzahl von Figuren auf Tafeln und im Texte, denn mit Recht hält Verfasser es für nützlich, von Figuren einen ausgedehnten Gebrauch zu machen, da es eine zu grosse Unterstützung der Vorstellung ist, deren sich nur wenige entschlagen möchten.

F. SCHÜRTE.

Notations de logique mathématique par G. PEANO, professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin. Introduction au Formulaire de mathématique publié par la Rivista di Matematica. Turin 1894. 52 pag.

Wenn unter dem Namen eines Mathematikers ein solcher Gelehrter verstanden werden müsste, dem alle Theile der Mathematik gleich geläufig wären, so erzwänge diese Forderung das Eingeständniss, dass in der Gegenwart Niemand mehr auf diesen Namen Anspruch erheben könnte. Mindestens in gleichem Maasse, wie in irgend einer Wissenschaft, hat in der Mathematik die Arbeitstheilung sich eingestellt. Und dennoch sind alle Einzelgebiete so mit einander verbunden, dass kein Bearbeiter des Einen Kenntniss der Anderen entbehren kann. Aus diesem Dilemma kann man auf zwei Arten sich erretten. Die eine Art besteht in Rathserholung bei einem Fachmanne im engeren Sinne des Wortes. Der seit Anfang 1894 in Paris erscheinende „*Intermédiaire des mathématiciens*“ hat sich die Aufgabe gestellt, solche Anfragen und ihre Beantwortung zu vermitteln, ein, wie uns scheint, sehr glücklicher Gedanke, insbesondere deshalb glücklich, weil die Fragen, wenn auch von einem Einzelnen gestellt, meistens Vielen aus der Seele gesprochen sind, und weil deshalb die Antworten erst recht auf allgemeineres Interesse rechnen können. Die andere Art, das dem weniger Bewanderten Nothwendige zu beschaffen, besteht in dem Nachschlagen in eigens zu solchem Zwecke hergestellten Sammelwerken. Ein solches Werk ist Herrn Hagen's *Synopsis*, und ähnliche Zwecke soll das „*Formulaire de mathématique*“ erfüllen, dessen Herausgabe die „*Rivista di matematica*“ unternommen hat. Will eine solche Sammlung der bekannten Sätze ihren vollen Nutzen gewähren, so muss sie Vollständigkeit mit Uebersichtlichkeit verbinden, und Letztere hat die Leitung der „*Rivista di matematica*“ dadurch zu erreichen gesucht, dass sie bei der Drucklegung die wesentlich abkürzenden Zeichen der mathematischen Logik in Anwendung bringt. Ein Missstand findet hier allerdings statt, der nämlich, dass nicht jeder Mathematiker die Schrift zu lesen im Stande ist! Aber wohl oder übel wird man es lernen müssen, die Zeichen zu verstehen, welche die allgemeine Schrift Leibnizens zur Wahrheit machen sollen. Fangen doch wenigstens in Italien auch Schriftsteller ausserhalb der „*Rivista di matematica*“ an, sich ihrer zu bedienen, wie z. B. Herr Francesco Giudice in den

„*Atti*“ der Turiner Akademie vom 31. December 1893. Freilich bedarf es zur Erlernung einer Sprache der Hilfsmittel. Eine Sprachlehre, ein Wörterbuch müssen vorhanden sein, und als solche hat das kleine Buch zu gelten, von dessen Erscheinen wir unseren Lesern Kenntniss geben. Dass Herr Peano mehr als irgend ein Anderer dazu berufen war, eine solche Anleitung zur Kenntniss der Symbole der mathematischen Logik zu verfassen, bedarf nicht erst der Begründung, und ein Blick in die Schrift selbst wird Jedem die Ueberzeugung beibringen, dass der Berufene in diesem Falle auch der richtig Ausgewählte war. Wird die neue Schriftsprache in der That das leisten, was Leibniz beabsichtigte und erwartete? Wird sie mehr sein als eine Kurzschrift? Wird sie das Denken unterstützen, das Erfinden erleichtern? Diese Fragen zu beantworten ist es noch nicht an der Zeit. Erfolg oder Misserfolg werden darüber entscheiden.

CANTOR.

Logica Matematica (Manuale Hoepli). C. BURALE-FORTI, Professore nella R. Accademia Militare di Torino. Milano 1894. Ulrico Hoepli. VI, 158 pag.

In der gleichen Stadt, in welcher Herr Peano wirkt, und in ähnlicher Richtung wie er, ist auch Herr Burale-Forti thätig. Er hat an der Turiner Universität Vorlesungen über mathematische Logik gehalten und dieselben zu einem ganz kurzen Leitfaden verdichtet. Nur die mathematisch-logische Symbolik gestattete ihm so kurz sich auszudrücken, nur wer jene vollständig beherrscht, wird die kleine Schrift zu lesen im Stande sein, welche allerdings eine Erklärung der gebrauchten Zeichen vorausschickt, so dass sie selbst dem Leser ermöglicht, jene Aneignung der Symbole sich zu verschaffen.

CANTOR.

GIULIO VIVANTI. **Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica.** Saggio storico. Mantova 1894. Bei G. Mondovi, 134 S.

Herr Vivanti hat in dem ungemein fesselnd geschriebenen Buche, welches wir durch diese Zeilen zu empfehlen wünschen, eine in dieser Form neue Aufgabe sich gestellt. Er ist dem Begriffe des Unendlichen, und zwar sowohl des Unendlichgrossen als des Unendlichkleinen, in seiner geschichtlichen Entwicklung von den ältesten Zeiten bis zu Cauchy nachgegangen, während er die Geschichte des Operirens mit dem Unendlichen, das heisst die verschiedenen Methoden der Infinitesimalrechnung als nebensächlich, wenn nicht schon als bekannt bei Seite schiebt. Dadurch sind zwar nicht wesentlich neue, von Vorgängern des Verfassers nie behandelte Dinge zur Sprache gebracht, aber die Anordnung ist eine eigenartige und lässt das Behandelte in neuer Beleuchtung erscheinen. Wir zweifeln nicht, dass Leser, welche philosophische Betrachtungen den geschichtlich erzählenden vorziehen, dem uns vorliegenden Buche eine besondere Anziehungs-

kraft nachrühmen werden. Aber auch solche Leser, welche gleich dem Referenten der entgegengesetzten Geschmacksrichtung huldigen, werden weder ohne Vergnügen, noch ohne Nutzen Herrn Vivanti's Auseinandersetzungen folgen. Ist doch jeder Historiker bis zu einem gewissen Grade insoweit von seinem Wohnorte abhängig, als ihm nicht überall alle Schriftsteller gleich bekannt und deren Werke gleich zugänglich sein können. Herr Vivanti z. B. beherrscht die italienische Literatur in einem Maasse, wie es bei Forschern aus anderer Heimath unmöglich wäre, und wir persönlich haben Mancherlei bei ihm gelernt.

CANTOR.

Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER, ord. Professor an der technischen Hochschule München. Separatabdruck aus dem „Handbuch der klassischen Alterthumswissenschaft“. 2. Aufl. Bd. V, 1. Abtheilung. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung (Oskar Beck) in München. 1893. S. 231—313.

Es war eine schwere, fast unlösbare Aufgabe, auf den Raum von 78 Druckseiten (S. 309—313 sind durch die Erklärung benutzter Abkürzungen und durch ein alphabetisches Register in Anspruch genommen) die Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im klassischen Alterthume zusammen zu drängen. Zu ihrer bloßen Inangriffnahme gehörte eine Beherrschung des Stoffes und ein Talent zu übersichtlicher Anordnung, wie sie nur wenigen Persönlichkeiten eigen sind. Herr Günther hat gerade diese beiden Eigenschaften schon wiederholt an den Tag gelegt, und so auch bei dieser Gelegenheit. Ueber eine so kurz gefasste und dennoch verhältnissmässig vollständige Darstellung zu berichten, will kaum angehen. Wir begnügen uns damit, zu erklären, dass wir an dem mathematischen Theile des Abrisses — über den naturwissenschaftlichen Theil zu urtheilen fühlen wir wir uns nicht befugt — nichts Wesentliches auszusetzen haben, und dass der Leserkreis des Handbuches sich um so vertrauensvoller dort Rath holen kann, als Herr Günther nicht versäumt hat, überall diejenigen Schriften anzuführen, in welchen die Einzelheiten weitläufigere Behandlung gefunden haben.

CANTOR.

Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland. Vortrag, gehalten am 8. Januar 1894, Gedenktage der Amsterdamer Universität durch D. J. KORTEWEG. 20 S.

Als Blüthezeit der holländischen Mathematik bezeichnete der Festredner die Jahrzehnte von dem Auftreten Simon Stevin's in Leiden bis zu Huygens, diesen mit eingeschlossen. Es ist einleuchtend, dass von einer solchen Zeit und den grossen Dingen, welche sie hervorbrachte, auf einem Druckbogen (4 Seiten sind durch Anmerkungen in Anspruch genommen)

kaum die Umrisse gezeichnet werden konnten. Niemand weiss das besser als Herr Korteweg selbst, der schon vor mehreren Jahren einen 45 Seiten starken Aufsatz im XXII. Bande des *Archives Néerlandaises* veröffentlichte, welcher ausschliesslich mit Constantin Huygens dem Vater sich beschäftigt, mithin nur einen winzigen Theil des Inhaltes der Festsrede behandelt. Aber Herr Korteweg hat es verstanden, jene Umriss mit fester Hand zu entwerfen, so dass sie seinen Zuhörern sich gewiss zu bleibender Erinnerung eingepägt haben. Ganz beiläufig hat er bei dieser Gelegenheit eine Entdeckung veröffentlicht. Das Geburtsjahr von Johannes Hudde, welches man nicht kannte, fällt auf 1624. In einem Kirchenregister ist nämlich die am 26. Januar 1673 vollzogene Trauung Hudde's eingetragen und bemerkt, er sei damals 49 Jahre alt gewesen.

CANTOR.

Der Magister Johann Fabricius und die Sonnenflecken nebst einem Excurs über David Fabricius. Eine Studie von GERHARD BERTHOLD. Leipzig 1894. Veit & Comp. 60 S.

Am 9. März 1611 hat Johann Fabricius die Sonnenflecken entdeckt. Zur Herbstmesse des gleichen Jahres erschien dessen Narratio, die gedruckte Beschreibung der auffallenden Erscheinung. Am 21. October 1611 begann Christoph Scheiner seine Beobachtungen, welche er im Januar 1612 im Drucke veröffentlichte. Galilei endlich stellte seine Beobachtungen der Sonnenflecken seit dem 5. April 1612 an. Scheiner und Galilei nennen Fabricius nie in den Schriften, in welchen sie sich gegenseitig die Entdeckung streitig machten. Gleichwohl konnten sie, um nicht zu sagen mussten sie Kenntniss von dessen älteren Rechten haben. Johann Fabricius starb zwischen dem 9. März 1616 und dem 7. Mai 1617. Diese, soweit es um Fabricius sich handelt, durchaus neue Daten stellt Herr Berthold in seiner sehr werthvollen Abhandlung fest, welche 20 Seiten Text, 8 Seiten Anmerkungen umfasst. Die letzten 32 Seiten sind durch Abdrücke ungewein seltener, theilweise nur noch in einem einzigen Exemplare auffindbar gewesen Schriften erfüllt, von welchen die Narratio des Fabricius von 1611 besonderes Interesse erwecken dürfte.

CANTOR.

Die geometrische Entwicklung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionsbeweis bei Archimed und ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie und die Schule. Von HERMANN BECKER, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahresbericht des königl. Gymnasiums zu Insterburg für 1893—1894 [Programm-Nummer 6], 26 S.

Sobald die geometrische Betrachtung sich den Aufgaben zuwandte, welche heute mit Hilfe der Infinitesimalrechnung behandelt werden, konnte sie dieser ähnliche Auffassungen nicht missen. Ihnen entsprang die

Exhaustionsmethode der Griechen, welche namentlich von Archimed mit grosser Kunstfertigkeit gehandhabt wurde. Herr Becker hat sich der Aufgabe unterzogen, sämtliche Beispiele der Exhaustion in Archimed's Schriften aufzusuchen und in moderner Sprache zusammenzustellen. CANTOR.

Les mécaniques ou l'élévateur de Héron d'Alexandrie publiées pour la première fois sur la version arabe de Qosta ibn Lûqa et traduites en français par M. le Baron CARRA DE VAUX. Extrait du Journal Asiatique, Paris 1894. Imprimerie Nationale. 309 p.

Der hochinteressante Band besteht aus 36 S. Einleitung, 115 S. arabischem Texte und 158 S. französischer Uebersetzung. Vermöge unserer vollständigen Unkenntniß des Arabischen waren wir nur im Stande mit dem in französischer Sprache Gedruckten uns zu beschäftigen, und müssen wir uns wegen der Richtigkeit der Uebersetzung auf die anderwärts erprobte Zuverlässigkeit des Herausgebers verlassen. Er selbst ist indessen weit davon entfernt, überall mit gleicher Sicherheit aufzutreten. An den verschiedensten Stellen finden sich Fussnoten, welche die Verstümmelung und Unverständlichkeit des Textes bedauern, ein Umstand, mit welchem man wohl rechnen muss, bevor man aus einzelnen Sätzen weitgehende Folgerungen zieht. Wenn z. B. auf S. 73 „Posidonius der Stoiker“ als Gewährsmann angeführt wird, wenn daran sich anschliesst, Archimed habe eine von diesem ausgehende Erklärung gespalten, wenn eine Fussnote dazu bemerkt, der Name Posidonius sei zweifelhaft, und die Bezeichnung als Stoiker nicht minder, da es auch heissen könnte „ein Maler“, so möchten wir den Schluss, Heron müsse also noch 90 vor Christi Geburt gelebt haben, weil damals erst Posidonius von Rhodos blühte, weniger leicht unterschreiben als den anderen, die hier genannte Persönlichkeit sei eben nicht Posidonius von Rhodos. Jene Uebersetzung würde der Herausgeber wahrscheinlich auch nicht in seinen Text aufgenommen haben, wenn er nicht mit Herrn Diels der Ansicht wäre, die Meinung, die seit Martin sich eingebürgert hat, Heron von Alexandrin habe seine Blüthezeit um 100 vor Christi Geburt gehabt, müsse wieder verlassen werden, indem Heron erst in einer Zeit lebte, zu welcher römische Kunstausrücke in die griechische Sprache eingedrungen waren, etwa im zweiten nachchristlichen Jahrhunderte. Selbstverständlich würde diese Verschiebung von Heron's Lebenszeit die wesentlichsten Veränderungen in der Geschichte der Mathematik bedingen. Die unbestreitbaren Uebereinstimmungen zwischen römischer, griechischer, arabischer Feldmessung würden auf eine andere Urquelle als auf das grosse Werk Heron's zurückgeführt werden müssen. Ein Anonymus, den man aber doch nur als Alexandriner sich denken könnte, träte an die Stelle Heron's und dieser selbst verlöre an der Werthschätzung, die man ihm entgegenzubringen sich gewöhnt hat. Gerade diese letztere

Nothwendigkeit würde uns persönlich, wir können fast sagen, schmerzen und macht uns widerwillig, die Gründe ohne Weiteres anzuerkennen, welche Heron an das Ende eines Zeitraums versetzen, als dessen Lehrer wir ihn betrachteten. Auch die durch Herrn Carra de Vaux einem grösseren Leserkreise erschlossene Mechanik stimmt zu der Bewunderung, welche wir für Heron besaßen, und zeigt ihn im schönsten Lichte. In dieser Beziehung ist übrigens der Herausgeber durchaus gleicher Meinung mit uns, und er hebt in seiner sehr schönen Einleitung hervor, wie Heron, gestützt auf die mechanischen Schriften eines Aristoteles und Archimedes, von welchen er Letzteren wiederholt nennt, während man den Namen des Ersteren vergebens sucht, einen erheblichen Fortschritt bezeichnet. Lesern, die nicht selbst Untersuchungen anzustellen beabsichtigen, ist die Einleitung ganz besonders zu empfehlen, da sie ihnen erspart, sich durch den mitunter, wie wir bereits erwähnt haben, recht dunklen und bruchstückartigen Text hindurch zu arbeiten. Unser Bericht würde eine wesentliche Lücke lassen, wenn wir nicht erwähnten, dass Herr Carra de Vaux S. 21—22 der Einleitung nachzuweisen sucht, Heron müsse nach Vitruvius und nach Plinius, also nicht vor dem Ende des ersten nachchristlichen Jahrhundert gelebt haben, weil er eine Art Presse mit Hilfe der Schraube beschreibe, von welcher Plinius berichte, dass sie in seiner eigenen Lebenszeit erfunden worden sei. Aber auch dieser Schluss gleich den anderen, welche dazu bestimmen sollen die Lebenszeit Heron's wesentlich später zu setzen, als man es seither that, beruht auf einer Annahme: dass nämlich die Mechanik nicht ähnliche Einschiebungen erlebte, wie sie in den geometrischen Schriften Heron's nachweisbar sind. Dieser, wie uns scheint, sehr schwerwiegende Einwurf ist von Herrn Huitsch in dem „Literarischen Centralblatt“ vom 14. April 1894 S. 554—555 gemacht.

CANTOR.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden door D. BIERENS DE HAAN. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie, Deel II. No. 1) met 5 Kaarten. Amsterdam 1893. Joh. Müller. 60 S.

Wer mit Geschichte der Mathematik sich beschäftigt, kennt und schätzt die Funde, welche Herr Bierens de Haan in den verschiedensten niederländischen Archiven gemacht hat und welche in der That als werthvolles Baumaterial bezeichnet werden können, nicht immer vollkommen zubehauen und geglättet, um ohne Weiteres in ein Mauerwerk eingefügt werden zu können, aber stets verwendbar und von festem inneren Gefüge. Die gleichen Eigenschaften kommen auch der neuesten Veröffentlichung unseres bewährten Fachgenossen zu Gute. Quetelet hat in seiner *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Brüssel 1864) sich auf S. 247—253 mit Michael Florentius van Langren beschäftigt, der von etwa 1600

bis etwa 1660 gelebt habe, dessen Mondkarte als diejenige bezeichnet wird, welche wahrscheinlich zuerst die heute noch gebräuchlichen Namen der einzelnen Erhöhungen und Vertiefungen enthielt, der auch Verbesserungen des Hafens von Ostende vorschlug und überhaupt die Sicherung dieser letzteren Festung sich angelegen sein liess, wie sein Briefwechsel mit Bouillaud erweise. Eben dieser Langren ist es, dem die neuen Forschungen des Herrn Bierens de Haan gewidmet sind. Er kam im Jahre 1600 in Begleitung seiner Eltern nach Brüssel, lebte also damals schon. Er starb im Mai 1675 in Brüssel als königlicher Kosmograph. Er sah eine lohnende Aufgabe darin, die Versandung von Seehäfen zu verhindern und, wo sie bereits begonnen hatte, ihr entgegenzutreten. Allerdings widersprachen seine Theorien den hergebrachten Meinungen der Wasserbaupraktiker, und deshalb wurden sie bezüglich des Hafens von Mardyck gründlich unterschätzt, bis dieser unfähig war Kriegsschiffe in genügender Anzahl zu fassen, was den Verlust von Dünkirchen für den König von Spanien zur Folge hatte. Um so lebhafter drang Langren auf die Entsandung des Ostender Hafens. Dieselbe Absicht wollte ein gewisser Pierre de Roberti, Vorsteher der Befestigungsarbeiten, mit wesentlich anderen Mitteln erreichen, welche bedeutend kostspieliger waren und statt Nutzen nur Schaden brachten. Unter Langren's Freunden, welche seine Pläne im Grossen und Ganzen billigten, war auch Constantin Huygens der Vater, und Langren beging die Taktlosigkeit, zwei Briefe desselben einer seiner Streitschriften einzuverleiben, worüber Jener sich dann bitter beschwerte. Stand es doch dem Rathe Friedrich Heinrichs von Oranien übel an, öffentlich als Gewährsmann in einer Sache zu erscheinen, welche, wenn auch wissenschaftlicher Natur, dem Könige von Spanien Nutzen zu bringen geeignet war. Herr Bierens de Haan hat die auf die Ostender Hafenarbeiten bezüglichen Acten nebst den dazu gehörigen Karten fast vollständig zum Abdrucke gebracht, so dass es nunmehr möglich ist, sich ein eigenes Urtheil über Langren's Theorien zu bilden.

CANTOR.

Die **Geometrie von René Descartes**, deutsch herausgegeben von LUDWIG SCHLESINGER. Mit zwei Figurentafeln. Berlin 1894. Mayer & Müller. X, 116 S.

Die älteste Ausgabe der Descartes'schen Geometrie von 1637, sowie deren lateinische Uebersetzung von 1649 dürften zu den grössten bibliographischen Seltenheiten gehören. Häufiger begegnet man in antiquarischen Katalogen dem zweiten Abdrucke der lateinischen Uebersetzung von 1659. Das französische Original ist seitdem dreimal neu aufgelegt worden: im Jahre 1728 in der Cousin'schen Gesamtausgabe der Descartes'schen Werke Band V und im Jahre 1886. Herr Schlesinger hat nun auch eine deutsche Uebersetzung der nach so manchen Richtungen bahnbrechenden Schrift angefertigt, welche ihm bei Uebungen zur analytischen Geometrie im Anschluss

an Descartes diente, die er an der Berliner Universität im Sommer 1893 abhielt, und ein Verleger fand sich bereit, diese Uebersetzung der allgemeinen Benutzung zugänglich zu machen. Möge ihr Erscheinen dazu beitragen, dass unsere heutigen Mathematiker jenes unsterbliche Werk mehr also nur dem Namen nach oder aus kurzen Auszügen kennen lernen. Niemand, dessen sind wir überzeugt, wird die darauf verwandte Zeit nachträglich bereuen. Die Uebersetzung ist, so weit wir uns mit derselben näher bekannt gemacht haben, recht treu und lesbar, letzteres sogar noch etwas mehr als das Original, in welchem Descartes mitunter absichtlich dunkle Redewendungen bevorzugte. 44 angefügte Anmerkungen erleichtern das Verständniß.

CANTOR.

Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676 von Oberlehrer RIESSEN.

Programmbeilagen aus Glückstadt. [1893: Programm Nr. 280 und 1894: Programm Nr. 279.] 26 und 24 S.

Im Jahre 1647 gab Arnold Möller, Rechenmeister zu Lübeck, den *Gülden Lehrschatz* heraus. Im Jahre 1719 veröffentlichte Paul Haleke sein *Mathematisches Sinnenconfect*. Zwischen beide Schriften fällt das Rechenbuch, welches Heinrich tho Aspern (1631—1695), der seit 1667 an der Schule in Neuendorf in Holstein thätig war, im Jahre 1676 verfasste, und welches sich handschriftlich im Besitze der Familie tho Aspern erhalten hat. Die Zwischenstellung ist keine bloß äusserliche. Herr Riessen, der in zwei aufeinander folgenden Jahresprogrammen sich der dankenswerthen Mühe unterzog, über jenes ungedruckte Rechenbuch zu berichten, hat sichergestellt, dass Heinrich tho Aspern einerseits Haleke's Lehrer war, andererseits Möller's Vorlage mit Vortheil benutzte. Insbesondere ist die vielfach gereimte Form, sind einzelne Aufgabengattungen, auch einzelne bestimmte Aufgaben sammt ihren Zahlen von dem einen Verfasser zum anderen und zum dritten zu verfolgen gewesen. Ein theils beabsichtigter, theils unfreiwilliger Humor ist in allen diesen Schriften wahrnehmbar, der namentlich dann, wenn er in plattdeutsche Verse sich kleidet, geradezu erfrischend wirkt. Tho Aspern's Rechenbuch zerfällt in vier Klassen und einem Lustgärtlein. Die I. Klasse lehrt die vier gemeinen Rechnungsarten an ganzen Zahlen, die II. Klasse an Brüchen. Die III. Klasse hat es mit der Regeldetri zu thun, die IV. Klasse mit Vermischungsrechnungen (*Regula Alligationis*), unbestimmten Aufgaben (*R. Virginum*) und dem falschen Ansatz (*R. Falsi*). Das Lustgärtlein geht über diese Aufgaben dann noch hinaus. In seinen Beeten — so heissen die einzelnen Kapitel — wachsen Ausziehungen von Wurzeln zweiten bis neunten Grades, Auflösung von Gleichungen bis zum dritten Grade einschliesslich, Untersuchungen über figurirte Zahlen. Herr Riessen hat überall Anmerkungen beigelegt, welche dem heutigen Leser das Verständniß erleichtern.

CANTOR.

Professor Dr. Rudolf Wolf 1816—1893. Der Bernischen naturforschenden Gesellschaft zum Andenken beim 50jährigen Jubiläum ihrer „Mittheilungen“ gewidmet von Professor Dr. J. H. GRAF. Mit dem Portrait von Professor R. WOLF. Bern 1894. Bei K. J. Wyss. [Separat-abdruck aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft von Bern.]

Mit 23 Jahren wurde Rudolf Wolf (1839) in Bern an der Realschule angestellt; acht Jahre später (1847) trat er an die Spitze der dortigen Sternwarte; wieder acht Jahre später (1855) berief ihn sein Heimatscanton Zürich als Lehrer der Mathematik an das Gymnasium und als Lehrer der Astronomie an das neu gegründete Polytechnikum; Ende 1864 bezog er die nach Semper'schen Plänen erbaute neue schöne Sternwarte, als deren Director er noch 29 Jahre wirkte. Dem Berner Aufenthalt gehört Wolf's bahnbrechende Entdeckung von dem Zusammenfallen der Sonnenfleckenperiode von $11\frac{1}{2}$ Jahren mit einer genau ebenso langen Periode der Declinationsvariationen der Magnetonadel an, einem Zusammenfallen in dem Sinne, dass die Maxima beider Erscheinungen und ebenso ihre Minima stets gleichzeitig auftreten. Ebendort begann Wolf mit den Würfelversuchen, durch deren Anstellung er das Gebiet der Wahrscheinlichkeit a priori mit dem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in Verbindung brachte. In Zürich setzte er beide Untersuchungsreihen fort, Sonnenfleckenbeobachtungen und Würfelversuche beschäftigten ihn bis in seine letzte Lebenszeit, aber daneben trat eine neue Geistesrichtung Wolf's glänzend hervor, die historische. Die „Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz“ (1858—1862), das „Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie“ (1872), die „Geschichte der Astronomie“ (1877), die „Geschichte der Vermessungen in der Schweiz“ (1879), das „Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur“ (1890—1893) sind geschichtliche Leistungen allerersten Ranges, mit welchen zu wetteifern fast unmöglich ist, insbesondere, wenn man die Raschheit der Aufeinanderfolge und die Gründlichkeit der Schriften nebeneinander beachtet. In Zürich begann Wolf auch die Veröffentlichung seiner werthvollen „Astronomischen Mittheilungen“, welche er bis zur 82. Nummer brachte; die 83. Nummer liess er redactionell vollendet zurück; für die weitere Fortsetzung des verdienstlichen Unternehmens sorgte er testamentarisch. Diese nackten Thatsachen entnehmen wir theils dem uns vorliegenden warm geschriebenen kleinen Buche, theils eigener Erinnerung. Niemals wird aus dieser die liebenswürdige Persönlichkeit Wolf's verschwinden, wie er in seinen Briefen, wie er in der mündlichen Unterredung sie offenbarte. Wieder genau den gleichen Eindruck gewinnen wir aus einem Nekrologe, den Herr Wolfer, des Verstorbenen Nachfolger an der Sternwarte, in der „Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft“ Jahrgang 29 Heft I veröffentlicht hat.

CANTOR.

5*

Erinnerung an Moritz Abraham Stern von FERDINAND RUDIO. Zürich 1894.

Am 2. Februar 1894 wurde in Zürich die Leiche eines 86½jährigen Greises der Erde übergeben, der gewiss keinen Feind, wohl aber zahlreiche ihn verehrende Schüler und Freunde zurückgelassen hat. Wie konnte man auch anders, als mit hochschätzender Liebe an ihm hängen, dem selbst so liebevollen, dienstwilligen, zuvorkommenden Manne, an dem die Jahre spurlos vorüber zu gehen schienen bis auf die Spuren geistiger Thätigkeit, die er selbst in die wissenschaftliche Geschichte jener Jahre eintrug. Herr Rudio hat an Stern's Grab als jüngerer Fachgenosse warme Worte gesprochen.* Dem Referenten persönlich war Stern mehr als das. Ich hatte die Freude, in den Jahren 1849—1851 seine Vorlesungen in Göttingen als aufmerksamer Zuhörer zu besuchen und an dem mustergiltigen Vortrage des Lehrers mich zu bilden. Es sei gestattet, aus meinen Erinnerungen an jene Zeit wenige ergänzende Striche zu dem von Herrn Rudio Gesagten hinzuzufügen. Im Sommersemester 1850 las Stern über Elementarmathematik, eine Vorlesung, welche unter den in Anmerkung 4 genannten nicht enthalten ist. Vielleicht gehörte sie nicht zu seinem gewöhnlichen Kreislauf der Gegenstände, aber jedenfalls war die Vorlesung hochinteressant und gab Stern Gelegenheit, nach zwei Richtungen sich breiter zu fassen, als es ihm in seinen anderen Vorlesungen möglich war. Er verweilte bei den philosophischen Grundlagen der Mathematik und bei deren geschichtlichem Wachsen. In beiden Dingen kann ich mich nur seinen dankbaren Schüler nennen. Stern gehört die Auffassung der Mathematik als Erfahrungswissenschaft an, welche ich in meinen „Grundzügen einer Elementararithmetik“ (Heidelberg 1855) an die Spitze stellte, bei Stern entwickelte sich meine Neigung zu Forschungen über die Geschichte der Wissenschaften. Seine Vortragsweise war klar, anspruchslos, einfach, wie der ganze Mann, und auch der humoristische Zug, den man noch auf der Photographie zu erkennen vermag, fehlte nicht. Stern sprach meistens ganz frei. Nur wenn es sich um ein bestimmtes Beispiel handelte oder um Fortsetzung einer Erörterung, welche in der vorhergehenden Stunde nicht zu Ende hatte geführt werden können, zog er einen bei seinen Zuhörern sprichwörtlich gewordenen kleinen Zettel aus der Westentasche, dem er die nöthigen Aufzeichnungen anvertraut hatte. Er rechnete an der Tafel mit grosser Sicherheit. Kam es ja einmal vor, dass er sich irrte, so war ihm Nichts lieber, als dass man ihn unterbrach, um den Irrthum so früh als möglich verbessern zu können. Während meines Aufenthaltes in Göttingen wurde das dortige mathematische Seminar eingerichtet, in dessen Leitung Stern sich mit Ulrich theilte. Gerade diese Theilung war geeignet, uns erkennen

* Die Grabrede ist ausser in dem uns vorliegenden besonderen Drucke nochmals in der Vierteljahrsschrift der Züricher naturwissenschaftlichen Gesellschaft, Jahrgang 39 Heft 2, erschienen.

zu lassen, was wir an Stern besaßen. Nur Wenige mögen mit mir sich der damaligen Zeit erinnern, unter ihnen jedenfalls Richard Dedekind. Aber die noch Vorhandenen haben ohne Zweifel an jene Zeit und an unseren Lehrer ein treues Gedächtniss sich bewahrt.

CANTOR.

Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Akustik, Theil II. Die Arbeiten deutscher Physiker über die Sirene in dem Zeitraume von 1830 bis 1856. Von Dr. ERNST ROBEL, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1894. [Programm Nr. 98.] Berlin 1894. R. Gaertner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 31 S.

Für den I. Theil der Untersuchungen verweisen wir auf Bd. XXXVII dieser Zeitschrift, Historisch-literarische Abtheilung S. 71. Der II. nicht minder interessante Theil ist der Hauptsache nach den Arbeiten von Opelt, Seebeck, Dove, v. Helmholtz, Ohm gewidmet. Dieselben sind theils experimenteller, theils mathematisch-theoretischer Natur gewesen, theils haben sie die Aufgabe nach beiden Richtungen hin behandelt und gefördert, wie es in der persönlichen Richtung der einzelnen Forscher begründet lag. Die drei zuerst Genannten waren die experimentell arbeitenden, der an letzter Stelle Erwähnte der in mathematischen Entwicklungen geübte Akustiker. Helmholtz vereinigte in sich die beiden Begabungen. Opelt hat auf seine Versuche eine Musiklehre aufgebaut. Seebeck hat unter Anderem die Interferenz der Töne einfach nachweisbar zu machen gewünscht. Dove vervollkommnete die sogenannte mehrstimmige Sirene, so dass sie zur Hervorbringung von Combinationstönen geeigneter wurde. v. Helmholtz brachte die Lehre von diesen Combinationstönen durch Versuche und mathematische Entwicklungen in's Reine. Ohm hat zuerst den Gedanken ausgesprochen, dass jede beliebige periodische schwingende Bewegung nach dem Fourier'schen Theoreme entwickelt werden kann, und dass dann jeder der Coefficienten dieser Reihe die Amplitude eines einzelnen wahrgenommenen Tones darstellt. Bei dem Widerspruch Seebeck's gegen die Anwendung dieses Gedankens auf die Sirene bricht die Abhandlung ab.

CANTOR.

Systematisches Verzeichniss der Abhandlungen, welche in den Schulschriften sämmtlicher an dem Programmatausche theilnehmenden Lehranstalten erschienen sind. Bearbeitet von Dr. RUDOLF KLUSSMANN. Nebst zwei Registern. II. Band 1886—1890. Leipzig 1893. Bei B. G. Teubner. VII, 285 S.

Wie viele Gelehrsamkeit steckt doch in unseren Schulprogrammen, wie viele Arbeit ruht dort vergraben, manchmal auch begraben! Der geregeltere Programmatausch hat zwar einige Abhilfe getroffen. Lehrern derjenigen

Anstalten, welche an dem Tausche theilnehmen, dürfte nicht leicht der Titel eines Programmes unbekannt bleiben, welches ihn interessiren kann. Aber Privatgelehrten und Universitätslehrern kommt gerade umgekehrt nur selten ein für sie wichtiges Programm zur Kenntniss, es sei denn, dass der Verfasser es ihnen zuschicke. Herstellung eines systematischen Verzeichnisses solcher Abhandlungen war deshalb geradezu ein Bedürfniss, und Herr Klussmann hat die Aufgabe der Anfertigung dieses Verzeichnisses vortrefflich gelöst. Die Anordnung ist nach Fächern und innerhalb jedes Faches nach der alphabetischen Folge des Verfassernamens. Am Schlusse ist ein Verzeichniss nach dem Orte der betreffenden Anstalt, ein zweites nach dem Namen der Verfasser angelegt, so dass das Auffinden gesuchter Programme wesentlich erleichtert ist.

CANTOR.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. Zusammengestellt von C. ROHRBACH, Dr. phil., Oberlehrer am Gymnasium Ernestinum zu Gotha. Gotha 1893. Verlag von E. F. Thienemann. 32 S.

Vierstellige Logarithmen, das scheint bis auf Weiteres die Forderung der Mittelschulpädagogik geworden zu sein. Im 38. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 69) zeigten wir solche von Herrn E. R. Müller an, die in Stuttgart gedruckt waren, heute liegen uns solche aus Gotha vor. Druck und Ausstattung dürften bei beiden Tafeln gleich gut sein, auch der Preis ist der gleiche. Als Vorzug der Rohrbach'schen Tafeln können wir hervorheben, dass am Schlusse eine graphische Darstellung der goniometrischen Functionen beigegeben ist, das heisst die Zeichnung der auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogenen Curven $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$. Die Curven wurden, wie das Vorwort mittheilt, im doppelten Maassstabe gezeichnet und photographisch reducirt.

CANTOR.

Ueber das Versicherungswesen der Bergwerks-Bruderladen und ähnlicher Kasseneinrichtungen. Von Dr. E. KOBALD, ordentlichem Professor an der kaiserl. königl. Bergakademie zu Leoben. Zweiter Theil: Die Wittwen- und Waisenversicherung, mit einem Anhang über die Krankenversicherung und über das Begräbnissgeld. [Sonderabdruck aus dem Berg- und Hüttenmännischen Jahrbuch etc., XLI. Bd.] Leoben 1893. Bei Ludwig Nüssler. 48 S.

Wir haben im 38. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 70) den ersten Theil der Kobald'schen Untersuchungen besprochen. Wenn wir ihm die klare Weise nachrühmen durften, in welcher der Verfasser die zusammengesetzten Fragen, um welche es sich handelte, in ihre Bestand-

theile zu zerlegen wusste, so können wir das gleiche Lob auch der Fortsetzung ertheilen. Die Frage der Wittwenversicherung ist hier behandelt, und dabei mussten zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem der Mann, welcher als arbeitstüchtig in die Ehe trat — denn nur dann gewähren die österreichischen Bruderladen Wittwenversorgung —, als arbeitstüchtig verstorben ist oder früher invalid wurde, also selbst schon Unterstützung bezog. Die Waisenversicherung kommt nur im Titel des Heftes vor, im Texte ist von ihr so gut wie nicht die Rede. Bezüglich der anhangsweise behandelten Krankenversicherung hegen wir einiges Bedenken. Die in Tagen ausgedrückte Krankheitsdauer während eines Jahres fasst Herr Kobald als eine Function des Alters x auf und bezeichnet sie mit $K(x)$. Ist das wohl richtig? Dass die Lebensdauer von dem Alter abhängt, wird von Jedem bereitwilligst zugestanden werden. Auch die Lebensgefährlichkeit gewisser bestimmter Krankheiten dürfte Function des Alters sein. Ob aber das Gleiche von der Krankheitsdauer behauptet werden darf, scheint uns zweifelhaft.

CANTOR.

Synopsis der höheren Mathematik. Von JOHANN G. HAGEN, S. J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington, D. C., II. Band: Geometrie der algebraischen Gebilde. Berlin 1894. Verlag von Felix L. Dames. IV, 416 S.

Als wir im XXXVII. Bande (Histor.-liter. Abthlg. S. 151—152) den I. Band der Synopsis unseren Lesern empfahlen, nannten wir ihn den Anfang eines ganz grossartig angelegten Werkes. Wir dürfen bei der Anzeige des II. Bandes, der dem ersten in der fast unglaublich kurzen Zeit von nur drei Jahren nachfolgte, nicht bereuen, jenes Ausdruckles uns bedient zu haben, denn die Fortsetzung ist des Anfanges, so weit zahlreiche Stichproben zu einem Urtheile befähigen, in jeder Weise würdig. Die dreizehn Abschnitte des II. Bandes führen die Ueberschriften: I. Die Grundlagen der Geometrie. II. Die projectivische Geometrie. III. Die Coordinatensysteme. IV. Die linearen und quadratischen Liniensysteme. V. Die Ausdehnungslehre. VI. Die ebenen Curven im Allgemeinen. VII. Die ebenen Gebilde ersten und zweiten Grades. VIII. Die ebenen Curven dritten Grades. IX. Die ebenen Curven vierten Grades. X. Die Raumgebilde im Allgemeinen. XI. Die Raumgebilde ersten und zweiten Grades. XII. Die Flächen dritten Grades. XIII. Die Flächen vierten Grades. Man wird aus diesen Ueberschriften eingermassen den Umfang des behandelten Stoffes ermessen können. Herr Hagen hat auch in diesem Bande eine über nahezu alle Zeiträume der mathematischen Literatur sich erstreckende staunenswerthe Belesenheit an den Tag gelegt, und wir gestehen gern ein, dass wir bei der Durchsicht des Bandes wiederholt an Dinge erinnert wurden, welche wir in unseren Vorlesungen über Geschichte der Mathematik mit Stillschweigen übergangen hatten, kleine Lücken lassend, welche bei nächster Gelegenheit

ausgefüllt werden sollen. Als der Druck des Bandes schon ziemlich weit vorgeschritten war, fand Herr Hagen einen ebenbürtigen Mitarbeiter in Herrn Franz Meyer (Clausthal), dessen Mitwirkung in der Vorrede als sehr fruchtbar gerühmt wird. Unsere eigene Kenntniss Meyer'scher Arbeiten lässt uns an das Verdienst dieses Lobes nicht zweifeln, und bleibt diese Mitwirkung auch für den III. Band erhalten, so können wir dessen Erscheinen nur mit um so höher gespannten Hoffnungen erwarten. Ohne Herrn Hagen's grossen Verdiensten irgend zu nahe treten zu wollen, bleibt es doch immer wahr, dass bei einem Sammelwerke vier Augen noch mehr sehen als deren zwei.

CANTOR.

Berechnung von Renten und Lebensversicherungen an der Hand von Beispielen erläutert von JOS. THANNABAUR, kais. königl. Oberrealschul-Professor in Olmütz. Wien 1893. Verlag von Karl Graeser. 132 S.

Zinseszinsen- und Renten-Tafeln. Von JOS. THANNABAUR. Wien 1893. Verlag von Karl Graeser. 78 S.

Wir vereinigen in dieser kurzen Anzeige zwei Bücher, welche der gleiche Verfasser zu gleicher Zeit in demselben Verlage erscheinen liess, denn wiewohl als getrennte Werke dem Verkaufe ausgesetzt, gehören sie doch eigentlich zusammen. In dem einen umfangreicheren Bändchen sind in etwas breitspuriger, leichtverständlicher Weise die verschiedenen Formeln abgeleitet, welche bei Renten und Lebensversicherungen Anwendung finden, in dem weniger starken Hefte sind Tafeln abgedruckt, die auf Grundlage jener Formeln hergestellt, auch von solchen Persönlichkeiten benutzt werden können, welche um die Begründung sich nicht kümmern können oder wollen. In dem dogmatischen wie in dem praktischen Theile ist mit gleicher Ausführlichkeit wie der gewöhnliche Fall einer Verzinsung am Ende eines Termes auch der der anticipativen Verzinsung behandelt, bei welcher der Zins zum Voraus abgezogen wird. Wir können den Zweck dieser Behandlung eines rechtmässig nicht vorkommenden Falles nicht einsehen.

CANTOR.

Annaire du Bureau des Longitudes avec des Notices scientifiques. Paris 1893 und 1894. Gauthier-Villars et fils.

Indem wir den beiden letzten Jahrgängen des berühmten Jahresbuchs einige Worte der Anzeige widmen, dürfen und müssen wir uns darauf beschränken, die Ueberschriften der dem eigentlichen Jahrbuch angehängten wissenschaftlichen Mittheilungen zur Kenntniss zu bringen. Das Jahrbuch für 1893 enthielt: J. Janssen, Das Observatorium auf dem Mont Blanc. Cornu, Ueber die Wechselbeziehung zwischen den Erscheinungen der ruhenden und der bewegten Elektrizität, und über elektrische Einheiten. Tisserand, Rede bei der Beerdigung von Ossian Bonnet. Faye,

Bouquet de la Grye, Loewy, Reden bei der Beerdigung des Admiral Mouchez. J. Janssen, Rede bei der Einweihung eines Denkmals des General Perrier. Dem Jahrbuche für 1894 sind beigegeben: Poincaré, Licht und Elektrizität nach Maxwell und Hertz. Fleuriais, Ursprung und Gebrauch des sogenannten Compasses. J. Janssen, Vier Beobachtungstage auf dem Mont Blanc. Faye, Bouquet de la Grye, Fleuriais, Reden bei der Beerdigung des Admiral Paris. Tisserand, Cornu, Mouchez, Reden bei der Einweihung des Arago-Denkmal. CANTOR.

Exercices d'arithmétique. Enoucés et solutions par J. FITZ-PATRICK, ancien professeur de mathématiques et GEORGES CHEVREL, Directeur de l'institution Charlemagne à Tours. Avec une préface de M. JULES TANNERY, Sous-Directeur des études scientifiques à l'école normale supérieure. Paris 1893. Librairie scientifique. A. Hermann. IX, 483 pages.

Das uns vorliegende Werk kann als Lehrbuch in Aufgabenform bezeichnet werden, indem alle 465 behandelten Aufgaben mit so ausführlichen Auflösungen versehen sind, dass kaum ein wichtiger Lehrsatz oder eine Regel der Arithmetik vermisst werden dürfte. Die 16 Kapitel, in welche die Aufgaben vertheilt sind, führen folgende Ueberschriften: 1. Einleitende Bemerkungen und Numeration; 2. Addition und Subtraction; 3. Multiplication; 4. Division; 5. Theilbarkeit der Zahlen; 6. Gemeintheiler ganzer Zahlen; 7. Primzahlen; 8. Brüche; 9. Decimalbrüche und Decimalzahlen; 10. Verhältnisse und Proportionen; 11. Zahlensysteme; 12. Quadrate und Quadratwurzeln; 13. Cuben und Cubikwurzeln; 14. Progressionen; 15. Verschiedene Aufgaben; 16. Anfangsgründe der Zahlentheorie. Als Anhang ist ein von Herrn Matrot herrührender Beweis des Satzes, dass jede ganze Zahl als Summe von höchstens vier Quadratzahlen sich darstellen lasse, abgedruckt.

Wenn ein Gelehrter von dem Range des Herrn Jules Tannery es der Mühe werth erachtet, zu einem Buche, dessen Inhalt, wie wir sehen, nicht über die Anfangsgründe sich erhebt, eine Vorrede zu schreiben, wenn er die Aufgaben selbst als insgesamt lehrreich und viele derselben als neu und geistvoll bezeichnet, so kann dieser Umstand bereits ein höchst angenehmes Vorurtheil erwecken, und bei genauerer Kenntnissnahme bildete sich uns neben dem Vorurtheile ein selbstständiges Urtheil, welches nicht minder günstig ausfiel, als das des Herrn Tannery.

Es ist ja nur natürlich, dass bei einer so grossen Menge von Aufgaben auch Irrthümer sich einschleichen. Wenn z. B. auf S. 248—249 in Aufgabe 306 aus $n^2 - 4n < N < n^2 - 2n$ der Schluss $n - 2 < \sqrt{N} < n - 1$ gezogen wird, so ist das entschieden falsch, wie $n = 5$, $N = 7$ erkennen lässt. Der sofort in die Augen springende Grund des Irrthums besteht darin, dass man aus der ursprünglichen Ungleichung zwar $N < n^2 - 2n + 1$,

aber keineswegs $n^2 - 4n + 4 < N$ zu folgern berechtigt ist. Hätte uns die Zeit zu Gebote gestanden, sämtliche Aufgaben zu prüfen, so wären wir vermuthlich auf mehrere solcher Flüchtigkeiten gestossen; allein sie sind weit entfernt, den Gesamteindruck zu beeinträchtigen.

Die Verfasser haben es in der That verstanden, eine Sammlung von Aufgaben zu vereinigen, deren Auswahl es gestattet, bei ihrer Auflösung eine Gesamtwiederholung aller arithmetischen Lehren, welche dem Mittelschulunterricht angehören, zu veranstalten. Jeder Lehrer, auch in Deutschland, wird von der Sammlung erwünschten Gebrauch machen können. Er darf nicht fürchten, Allzuleichtes und Alltägliches zu finden, im Gegentheil! Manche Aufgaben machen an den Scharfsinn dessen, der sie lösen soll, recht bedeutende Ansprüche, und alle, die wir wenigstens näher ansahen, sind interessant genug, zur Anstrengung des Scharfsinnes zu reizen.

CANTOR.

Recréations mathématiques par M. EDOUARD LUCAS. Tome III. Paris 1893.

Gauthier-Villars et fils. 200 pag. Tome IV. Paris 1894. 266 pag.

Der II. Theil der mathematischen Erholungen ist 1883 erschienen und im 29. Bande dieser Zeitschrift angezeigt. Ermuntert durch den Beifall, mit welchem die beiden Theile aufgenommen worden waren, sammelte Lucas den Inhalt eines III. und IV. Theiles, als 1891 ein vorzeitiger Tod ihn wegraffte. Engbefreundeten Fachgenossen, den Herren H. Delannoy, C. A. Laisant, E. Lemoine wurde von der französischen mathematischen Gesellschaft der Auftrag, das von Lucas vorbereitete der Oeffentlichkeit zu übergeben, und sie haben ihre Aufgabe pflichtgetreu erfüllt. Volle Gleichförmigkeit der behandelten Gegenstände darf man in den beiden neuen Theilen so wenig suchen, als in den beiden früheren. Der Hauptsache nach hat Lucas allerdings Verstandesspiele untersucht, in welchen mit Combinatorik verbundene Zahlentheorie die Auflösung systematisch finden lässt, aber er hat sich das Uebergreifen auf andere mathematische Dinge nicht versagt.

Im III. Theile haben die Herausgeber zu den beiden ersten Erholungen (1. Le calcul digital; 2. Machines arithmétiques) volksthümliche Vorlesungen benutzt, welche Lucas 1885 in Paris, 1884 in Blois hielt. Wir haben selten oder nie einen gleich ernsten, um nicht zu sagen trockenen Gegenstand mit mehr Witz und sprudelndem Humore erörtert gesehen. Die fünf anderen Erholungen des Bändchens beziehen sich alle auf Spiele, welche bald mit dem Taquin, bald mit dem Mühlspiel, bald mit dem Bacarat verwandt sind.

Die acht Erholungen des IV. Theiles sind dem ewigen Kalender, der Kugelarithmetik, der Stäbenarithmetik, dem Mühlspiel, den Zauberquadraten Fermat's, den Gittern, dem Vierfarbensatze geographischer Karten, der Gehmaschine gewidmet. Die erste Erholung gehört also der Chronologie, die sechste und siebente der Geometrie der Lage, die achte (es

handelt sich um eine Gelenkvorrichtung) der Mechanik an. Aber Lucas war seiner Begabung nach vorzugsweise Zahlentheoretiker, und so hat er auch in den nicht arithmetischen Erholungen Anknüpfungen an zahlen-theoretische Aufgaben gefunden. Man würde ihm freilich Unrecht thun, wenn man nicht hervorhabe, dass er auch umgekehrt in die arithmetischen Erholungen Geometrisches hineinzuflechten wusste. Der Geschichtsforscher vermöchte allerdings in beiden Theilen Stoff zur Bemängelung ohne grosse Schwierigkeit aufzufinden, aber diese kleinen Unrichtigkeiten muss man eben in den Kauf nehmen.

Der alte Dichter wollte durch erregtes Lachen auf die Sitten wirken, *ridendo castigat mores*. Lucas wollte einen Leserkreis, der erstem Nachdenken nicht viel Geschmack entgegenbringt, dadurch für die Zahlentheorie gewinnen, dass er deren Anwendbarkeit auf Spiele u. s. w. in anmüthiger Weise zeigte. Er hat dadurch die mathematische Literatur um vier reizende Bändchen bereichert.

CANTOR.

SOPHUS LIE, **Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen.** Bearbeitet und herausgegeben von GEORG SCHEFFERS. Leipzig 1883. B. G. Teubner. XII u. 810 S.

Den „Vorlesungen von S. Lie über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen“, Leipzig 1891 — vergl. diese Zeitschrift Bd. 38 S. 95 und 185 — hat der Herausgeber nach Ablauf von zwei Jahren einen weiteren, noch umfangreicheren Band folgen lassen. Ganz unabhängig von dem ersten soll derselbe eine Einleitung in die Lie'sche Theorie überhaupt sein und dadurch das Studium des bekannten grossen Werkes von Lie-Engel vorbereiten (vergl. die Besprechungen desselben in dieser Zeitschrift Bd. 34 S. 171, Bd. 39 S. 95, Bd. 40 S. 14). Die Lie'sche Lehre nimmt heutzutage eine eigenthümliche Stellung ein; einer Schaar von begeisterten Anhängern steht eine nicht geringe Partei Solcher gegenüber, die sich sceptisch und abwartend verhalten, und die von derjenigen Tragfähigkeit und Fruchtbarkeit, die Herr Lie selber seinem Systeme zuschreibt, nicht ohne Weiteres überzeugt sind.

Diese „Indifferenten“ gehen wohl noch weiter und glauben, dass das rapide Anschwellen der Lehrbuchliteratur über eben diesen Gegenstand der Förderung der Theorie eher schädlich als nützlich sei.

Selbst Referent kann sich der Meinung nicht ganz verschliessen, dass eine knappe Zusammenfassung des von Lie und seinen Anhängern auf dem Gebiete der Transformationsgruppen Geleisteten eher am Platze sein möchte.

Der ganzen Anlage nach ist der vorliegende Band, wie auch der vorangegangene, in erster Linie für einen Studirenden in mittleren Semestern bestimmt. Der Text wird durch zweckmässige Beispiele, wo es angeht,

leichter verständlich gemacht, und es wird eine behagliche Breite in der Darstellung beliebt.

Was die Vorkenntnisse des Lesers angeht, so ist Eines auffällig; während eine tüchtige Vorbildung in der Analysis, einschliesslich der formalen Theorie der Differentialgleichungen beansprucht wird, hält es der Herausgeber für nöthig, die einfachsten Begriffe und Sätze aus der projectiven Geometrie der Ebene ausführlich darzulegen.

Da der Hauptinhalt des Buches dem — vom Referenten bereits auf das Eingehendste besprochenen — dritten Bande des Lie-Engel'schen Werkes gemeinsam ist, so wird es genügen, auf Einiges aufmerksam zu machen, was bei Scheffers charakteristisch hervortritt.

Das Ganze lässt sich in drei Hauptabschnitte eintheilen. Der erste behandelt die verschiedenen Typen von projectiven Gruppen der Ebene, sowie darüber hinaus die der endlichen continuirlichen Gruppen in zwei Variablen. Im zweiten Abschnitte werden die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie in n Variablen erörtert, woran sich Untersuchungen über Zusammensetzung von Gruppen anschliessen.

Der letzte Abschnitt bringt eine Auswahl von sehr verschiedenartigen, unter einander kaum im Zusammenhange stehenden Anwendungen.

Was die projectiven Transformationen der Ebene angeht, so lassen sich dieselben, wie schon Möbius im Wesentlichen erkannte, als diejenigen Punkt-Transformationen definiren, welche Gerade stets wieder in Gerade überführen.

Von den zwei hierfür erbrachten Beweisen ist insbesondere der zweite, rein analytische von Interesse und zugleich für den Charakter des Buches bezeichnend.

Die Geraden der Ebene sind nämlich die Integralcurven der Differentialgleichung $y''=0$. Soll also eine Punkt-Transformation

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y)$$

jede Gerade wieder in eine solche überführen, so muss die Gleichung $y''_1=0$ vermöge $y''=0$ identisch befriedigt werden.

Drückt man y''_1 durch y', y'' und durch die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von φ und ψ nach x und y aus, so führt die gestellte Forderung auf vier partielle Differentialgleichungen, durch deren directe Integration Herr Scheffers in der That darauf geführt wird, dass φ und ψ linear gebrochene Functionen von x und y mit demselben Nenner sein müssen.

Die linken Seiten jener Gleichungen bleiben bei Ausübung einer allgemeinen projectiven Transformation bis auf Factoren ungeändert, das heisst, sie sind „Differentialinvarianten“ der allgemeinen projectiven Gruppe, jedoch — was nicht erwähnt wird — in dem Sinne, dass x und y als unabhängige Veränderliche fungiren, während bei den sonst im Werke vor-

kommenden Differentialinvarianten stets y als die unabhängige, x als die abhängige Veränderliche anzusehen ist.

Eine noch verwickeltere Analyse erfordert die rechnerische Verification des begrifflich so einfach einzusehenden Satzes, dass die aus einer projectiven infinitesimalen Transformation erzeugte eingliedrige Gruppe aus lauter projectiven Transformationen besteht. Für die neun Coefficienten jener Gruppe wird ein System von ebenso vielen linearen homogenen Differentialgleichungen aufgestellt, deren Lösungen sie sind.

Auf ein ähnliches, nur einfacheres Ergebniss wird man geführt, wenn man sich von vornherein auf die „allgemeine lineare“ Gruppe G_1 beschränkt; man gelangt nämlich hier zur Aufgabe der Integration eines „d'Alembert'schen“ Systems:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1, \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2,$$

mit constanten Coefficienten.

Rechnet man je zwei eingliedrige „lineare“ Gruppen zu demselben Typus, wenn sie vermöge einer „linearen“ Transformation in einander überführbar sind, so ergibt eine Discussion, dass gerade acht solcher Typen existiren.

Es ist nun instructiv zu sehen, wie die d'Alembert'sche Integrationsmethode des obigen Systems (bei Berücksichtigung aller Ausnahmefälle) geradezu äquivalent ist mit der Zurückführung jener acht eingliedrigen Gruppen auf einfache canonische Formen.

Bei Gelegenheit der wichtigen Aufgabe, die endlichen Gleichungen einer beliebigen r -gliedrigen Gruppe bei Kenntniss ihrer r infinitesimalen Transformationen und deren eingliedrigen Gruppen zu construiren, wird ein von Lie und Maurer zugleich gefundenes praktisches Princip in Anwendung gebracht, das einfach darin besteht, jene r eingliedrigen Gruppen hintereinander auszuüben.

An den Beweis des Hauptsatzes, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen U_1, \dots, U_r dann und nur dann eine r -gliedrige Gruppe erzeugen, wenn sich jeder Klammerausdruck (U_i, U_k) linear aus den U zusammensetzt, knüpft sich in ungezwungener Weise die wichtige Theorie der Differentialinvarianten an, das sind aus $x, y, y', y'' \dots$ gebildete Ausdrücke, die der Gruppe gegenüber absolut invariant sind.

Alle Differentialinvarianten der Gruppe sind aus zweien ableitbar, die als Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen erscheinen.

So elegant und allgemein diese Methode als rein theoretische ist, so ist sie doch in praxi kaum verwendbar: man wird da vielmehr von den endlichen Gleichungen der Gruppe ausgehen.

Bei Aufstellung der verschiedenen Typen projectiver Gruppen der Ebene erweist sich die Einführung des Dualitätsbegriffes als unumgänglich.

Hier scheint es dem Referenten, als ob ein zu weit getriebenes Streben nach Allgemeinheit eine an sich einfache Sache schwierig machen könne. Erst wird ein Kriterium dafür aufgestellt, dass eine Curvenschaar eine Gruppe gestattet, und dieses dann auf den ganz speciellen Fall angewandt, dass die ∞^2 Schaar der Geraden in der Ebene vermöge einer projectiven Gruppe in sich übergeht.

Als Endergebniss tritt der bekannte elementare Satz auf, dass die Gesammtheit aller Projectivitäten und Dualitäten wiederum eine Gruppe constituirt.

Wir müssen uns beeilen, noch Einiges über die „Anwendungen“ des dritten Abschnittes mitzuthellen.

Für den Geometer von besonderem Interesse ist die Frage, wie man am Einfachsten theoretisch entscheiden kann, ob zwei Curven oder Flächen congruent, das ist, durch Bewegung in einander überführbar oder auch, ob sie vermöge der Gruppe der Bewegungen mit einander äquivalent sind.

Es ist von vornherein klar, dass die Aufgabe nur dann eine befriedigende Lösung finden wird, wenn sich das gemeinte Kriterium nur solcher mathematischer Bildungen bedient, die der Bewegungsgruppe gegenüber invariant sind, und das werden hier nur Differentialinvarianten sein können.

In der That ergibt sich für ebene Curven, dass sie im Allgemeinen congruent sind, wenn die Ableitung $\frac{dr}{ds}$ des Krümmungsradius nach der Bogenlänge bei beiden Curven dieselbe Function von r ist; bei Raumcurven tritt noch die Torsion hinzu. Aehnliches gilt für Flächen, wo übrigens nur die Grundlagen gegeben werden.

Das Bemerkenswerthe sind aber gerade die Ausnahmefälle, wenn nämlich eine der Differentialinvarianten ihre Bedeutung verliert, das heisst, einen constanten Werth annimmt.

Beschränken wir uns auf die Ebene, so kommt, abgesehen von den trivialen Fällen der Kreise und (allgemeinen) Geraden, nur der Fall der „Minimalgeraden“ $y \pm ix = const$ in Betracht.

Hier tritt die merkwürdige Erscheinung ein, dass die Geraden jeder dieser beiden Schaaren nur unter sich congruent sind, dass man also nicht schlechthin sagen darf, dass zwei Gerade stets miteinander congruent sind.

Im Raume spielen die „Minimalcurven“ eine ähnliche Rolle. Wenn übrigens im Texte behauptet wird, dass nicht nur die Lösung des Problems, sondern selbst die Formulirung desselben ganz neu seien, so dürfte das wenigstens hinsichtlich der ebenen Curven nicht zutreffend sein, denn, abgesehen von den Ausnahmefällen, findet man das oben angegebene Kriterium in etwas anderer Fassung z. B. bei Hoppe.

Referent möchte ferner noch hinzufügen, dass er durch Prof. F. Klein auf dem Chicagoer Congress 1893 eine Tafel der Differentialinvarianten aller projectiven Gruppen der Ebene hat vorlegen lassen, womit das Material

gewonnen ist, um ein analoges Aequivalenzkriterium für alle jene Gruppen aufzustellen.

Eine für die Arithmetiker interessante Anwendung findet die Gruppentheorie auf die sogenannten höheren complexen Zahlensysteme. Es handelt sich um die Frage, welche Arten von Multiplication bei complexen Zahlen von der Form $x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_n x_n$ (wo die e_i Einheiten, die x_i gewöhnliche Zahlen bedeuten) noch möglich sind, wenn ausser dem distributiven und associativen Gesetze (nicht aber dem commutativen) nur noch verlangt wird, dass die Division ausführbar ist.

Wesentlich als Folge des associativen Gesetzes stellt die Multiplication $z = xy$ eine erste oder eine zweite Gruppe dar, je nachdem man die x_i resp. die y_i als die ursprünglichen Veränderlichen, dabei die y_i resp. die x_i als die Parameter und beide Mal die z_i als die neuen Veränderlichen auffasst.

Vermöge ihrer Bildungsweise kommen diesen Gruppen besonders einfache Eigenschaften zu.

Auf Grund dieses Ansatzes lässt sich die Aufgabe, für einen gegebenen Werth von n alle Typen von Zahlensystemen zu ermitteln, auf rein gruppentheoretische Principien zurückführen und bis incl. $n = 5$ explicite ausrechnen.

Ausser einem ausführlichen Referat über die älteren Untersuchungen solcher Zahlensysteme wird besonders auf die neueren Arbeiten von Study und vom Herausgeber eingegangen; die nicht unwichtige Abhandlung von Molien ist etwas kurz weggekommen.

Als eine weitere Anwendung sei noch das Kapitel über binäre Invariantentheorie hervorgehoben: wenn auch die Ergebnisse nicht eigentlich neu sind, so ist es doch lehrreich zu sehen, wie sich die üblichen Operationen in diesem Gebiete in die Kategorien der Gruppentheorie einreihen.

Der einschlägigen Arbeiten von Study (vergl. besonders seine „Ternären Formen“) wird nicht gedacht; auch der historische Bericht des Referenten von 1892 ist einer Erwähnung nicht für würdig erachtet worden, trotzdem daselbst der ganze Stoff — durchaus nicht zur Zufriedenheit der specifischen Vertreter der Invarianten-Disciplin — nach gruppentheoretischen Massnahmen gegliedert ist. — — — — — W. FRANZ MEYER.

E. GOURSAT. Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Bearbeitet von C. BOURLET. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. Leipzig 1893. B. G. Teubner. VIII und 416 S.

Da den im Jahre 1891 erschienenen Original-Vorlesungen von Goursat in dieser Zeitschrift keine Besprechung zu Theil geworden ist, so möge eine solche aus Anlass der vorliegenden deutschen Uebersetzung nachgeholt werden.

An sich zwar scheint dem Referenten eine derartige Uebersetzung um so weniger ein dringendes Bedürfniss zu sein, als sich gerade das französische Idiom zur exacten und dabei doch eleganten Darstellung schwieriger mathematischer Entwicklungen besonders eignet: man möchte aus diesem Grunde eher umgekehrt wünschen, dass manche deutsche Lehrbücher ins Französische übersetzt würden.

Doch wollen wir hier mit dem Uebersetzer nicht weiter rechten, insofern seine Leistung eine gute ist, und er den anerkannten Werth des Originals durch Anfügung einer Anzahl instructiver Aufgaben und deren Lösung erhöht hat.

Das Buch verfolgt hauptsächlich den Zweck, der formellen Integrations-theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie sie in neuerer Zeit durch A. Mayer und namentlich durch Lie geschaffen ist, weiteren Eingang zu verschaffen.

In der That bildet das Buch eine werthvolle Ergänzung zu dem zweiten Bande des Lie-Engel'schen Werkes über Transformationsgruppen, insofern die partiellen Differentialgleichungen dort nur eine secundäre Rolle spielen und der Leser von der Anwendung der Berührungs-Transformationen auf dieselben keine deutliche Vorstellung erhält (vergl. diese Zeitschrift Bd. 39 S. 95).

Herr Goursat beginnt mit einer functionentheoretischen Einleitung, nämlich mit dem vereinfachten Kowalewsky'schen Beweise für die Existenz von Integralen eines Systems von m partiellen Differentialgleichungen für m Functionen von n Variablen; unter gewissen Entwickelbarkeitsbedingungen für die Coefficienten hat in der That, wie schon Cauchy behauptet hatte, ein solches System in der Umgebung gewisser Anfangswerthe ein und nur ein System von Lösungen, die man dann weiterhin dem Princip der analytischen Fortsetzung unterwerfen kann.

Den „Integralen“ dieses „Existenzsatzes“ kommt die charakteristische Eigenschaft zu, dass in der Nachbarschaft eines solchen stets unendlich viele Integrale des gegebenen Gleichungssystems existiren; ausser diesen kann es aber noch sogenannte „singuläre“ Integrale geben, deren Möglichkeit auf verschiedene Weisen dargethan wird.

Die Hauptaufgabe, welche die partiellen Differentialgleichungen hier darbieten, besteht in der Zurückführung ihrer Integration auf die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, eine Aufgabe, welche für die Gleichungen erster Ordnung völlig gelöst ist.

Es werden zunächst die linearen Gleichungen in Angriff genommen. Dieselben werden durch den Klammerprocess beherrscht. Bekanntlich versteht man, wenn zwei lineare homogene partielle Gleichungen $X_i(f) = 0$, $X_k(f) = 0$ vorliegen, unter dem „Klammerausdruck“ $(X_i X_k)$ die ebenfalls lineare und homogene Bildung

$$X_i \{ X_k(f) \} - X_k \{ X_i(f) \}.$$

Ein System von m solcher Gleichungen $X_i=0$ heisst ein „vollständiges“, wenn jeder der Klammerausdrücke $(X_i X_k)$ eine lineare Function der X_i ist: ist ein System von $q < m$ Gleichungen kein vollständiges, so lässt es sich doch durch Aufnahme neuer, mittelst Klammeroperation zu bildender Gleichungen zu einem vollständigen Systeme ergänzen. Man darf sich also von vornherein auf letztere beschränken.

Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist eine zweifach invariante — ganz wie bei den Combinanten der projectiven Invariantentheorie — einmal der Gruppe aller Transformationen der unabhängigen Veränderlichen x gegenüber, sodann aber auch gegenüber der Gruppe aller linearen Transformationen der X (mit Coefficienten, die im Allgemeinen noch von den x abhängen).

Wegen der letzteren Eigenschaft darf man sich ein vollständiges System von m Gleichungen nach m der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i=1, 2, \dots, m$) aufgelöst und hinterher wieder Alles auf die linke Seite geschafft denken; in dieser canonischen Form heisst das System ein „Jacobi'sches“ und lässt sich auch dadurch charakterisiren, dass alle $(X_i X_k)$ identisch verschwinden.

Für ein Jacobi'sches System — und damit zugleich für jedes vollständige System — von m Gleichungen mit $m+n$ Veränderlichen x lässt sich der Hauptsatz nachweisen, dass es n verschiedene Integrale $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ besitzt.

Um dieselben zu finden, hat A. Mayer ein besonders einfaches und zugleich elegantes Verfahren eingeschlagen.

Vermöge einer geeigneten Transformation der m ersten x wird die Aufsuchung der φ zurückgeführt auf die von n Integralen einer einzigen linearen Gleichung, und diese Aufgabe reducirt sich wiederum nach bekannter Methode auf die Integration von n gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form:

$$1) \quad dy_i = A_i dx_{m+i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

wo die A_i (ausser den x) noch $m-1$ Grössen $y_2 \dots y_m$ als Parameter mit sich führen. Noch mehr, schon die Kenntniss eines ersten Integrales von 1) führt zu der eines ersten Integrales des gegebenen Systems.

Nennt man eben diese Ermittlung eines ersten Integrales von n Gleichungen 1) — und damit ist bereits der Fundamental-Process gewonnen, der die ganze Theorie durchzieht — eine „Operation von der Ordnung n “, so hat man danach successive je eine Operation der Ordnungen $n, n-1, \dots, 1$ auszuführen, um die ursprüngliche Aufgabe zu erledigen.

Die eben gestreifte Reciprocität zwischen der Integration einer einzelnen linearen partiellen Gleichung und der eines gewissen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen kann auf ein vollständiges System aus-

gedehnt werden, nur dass das gewöhnliche System die Bedingung erfüllen muss, „vollständig integrirbar“ zu sein, das ist, dass die Anfangswerthe sämtlicher Variablen willkürlich angenommen werden dürfen. Ist dann $f = c$ ein Integral dieses Systems, so ist auch f ein Integral des vollständigen Systems und umgekehrt.

Nunmehr wendet sich der Verfasser zu beliebigen partiellen Gleichungen erster Ordnung. Nach Lagrange werden drei Kategorien von Integralen eingeführt, das „vollständige“, das „allgemeine“, und das „singuläre“ und gezeigt, wie zwischen den beiden ersten ein wesentlicher Unterschied nicht besteht.

Lagrange gab im Falle von drei Variablen x, y, z eine, später von Charpit vervollkommnete Methode an, um eine beliebige partielle Gleichung erster Ordnung auf eine lineare zurückzuführen.

Die entsprechende Erweiterung auf den Fall von n Variablen gelang erst viel später Jacobi, dessen Verfahren von Mayer vervollkommen wurde.

Die erste allgemeine und zugleich directe Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung war aber inzwischen von Pfaff gegeben worden.

Indem er das Problem als besondern Fall eines allgemeineren erkannte, führte er die Lösung des letzteren auf die vollständige Integration mehrerer Systeme von simultanen Differentialgleichungen von der Ordnung $1, 3, \dots, 2n - 3, 2n - 1$ zurück.

Unabhängig davon hat bald darauf Cauchy eine weit einfachere Methode angegeben, die mit dem ersten der Pfaff'schen Systeme allein auskommt.

Mit Hilfe der verallgemeinerten Klammersausdrücke gelangte Jacobi, wiederum ohne Cauchy zu kennen, zu einer Integrationsmethode, die im Grunde mit der Cauchy'schen identisch ist.

Endlich rührt von Lie eine Methode her, die gewissermassen die Zusammenfassung der übrigen ist, die aber zugleich vermöge einer naturgemässen Erweiterung des Integralbegriffs dahin ausgedehnt werden kann, dass sie zugleich alle Ausnahmefälle mit umfasst.

Bei Cauchy steht der Begriff der „Charakteristik“ im Mittelpunkte des Ganzen, und hieraus ist wiederum die Lie'sche Theorie erwachsen.

Um hiervon eine Vorstellung zu geben, beschränken wir uns auf drei Variable x, y, z und benützen geometrische Redeweise. Sei

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

dann heisse „Element“ die aus einem Punkte (x, y, z) und einer durch ihn gehenden Ebene mit den Richtungscoefficienten p, q gebildete Figur.

Eine partielle Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ ordnet dann jedem Elemente von $F = 0$ eine bestimmte Curve, eben die Charakteristik zu, die dieses Element berührt.

Diese Curven hängen von drei willkürlichen Parametern ab, das ist, sie bilden einen Curvencomplex, und jede Integralfäche von $F=0$ wird durch die nach einem bestimmten Gesetze einander associirten Curven dieses Complexes erzeugt.

Die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die Bestimmung ihrer Charakteristiken sind zwei äquivalente Probleme.

Während nun Jacobi und Mayer die Integration einer (oder mehrerer) partiellen Differentialgleichung auf die eines „Involutionssystems“ (die Verallgemeinerung eines Jacobi'schen Systems) und diese wieder auf die eines Jacobi'schen Systems zurückführen, gelingt Lie mittelst der Charakteristiken der Nachweis, dass die Integration eines solchen Involutionssystems zurückkommt auf die einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung mit einer grösseren Anzahl von Variabeln.

Die bereits angedeutete Verallgemeinerung von Lie, durch welche die ganze Theorie einen gewissen Abschluss erfahren hat, vollzieht sich auf Grund des Begriffes „Element“.

Als „Integral“ einer Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ ist danach jedes doppelt unendliche System von Elementen zu verstehen, welches neben $F=0$ der Relation $dz = p dx + q dy$ genügt. Es kommen daher nicht nur Integralfächen, wie früher, sondern auch Integralcurven und Integralpunkte in Betracht.

Da andererseits auch (vergl. das bez. Referat) die Lie'sche Theorie der Berührungs-Transformationen aus dem Begriffe des Elementes hervorgegangen ist, so lässt sich erwarten, dass eben die Berührungs-Transformationen dazu dienen werden, die partiellen Differentialgleichungen auf einfache canonische Formen zu bringen.

Dies ist in der That der Fall, und zwar auf Grund des fundamentalen Satzes, dass der verallgemeinerte Klammersausdruck einer Berührungs-Transformation gegenüber invariant bleibt, und zwar auch dann noch, wenn weder die partiellen Differentialgleichungen, noch die angewandten Berührungs-Transformationen die abhängige Variable enthalten.

Referent hat geglaubt, dass diese Skizzirung einiger Hauptmomente dem Leser mehr nützt als eine Kritik im Einzelnen, die sich bei der Vortrefflichkeit des Werkes doch nur auf unwesentlichere Punkte richten könnte.

Bei der knappen Darstellung ist es wohl nicht zu verwundern, wenn der Leser hier und da nach Abschluss einer Entwicklung (z. B. S. 103) nicht ohne Weiteres erkennt, inwiefern damit die ursprünglich gestellte Aufgabe gelöst ist.

Eines glaubt Referent, namentlich im Interesse der Physiker, bedauern zu müssen, dass mit einer einzigen Ausnahme (S. 135—136) jede Anwendung der vorgetragenen Methoden auf die partiellen Differentialgleichungen der Mechanik unterdrückt worden ist. W. FRANZ MEYER.

Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Elementare Darstellung der durch Möbius, Gauss und Bessel begründeten Theorie. Von C. NEUMANN. Mit Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig 1893. Verlag von B. G. Teubner. 42 S.

Die vorliegende Auflage besteht aus einem Neudruck des im Jahre 1866 zum ersten Mal erschienenen Werkes; nur in dem Vorwort sind einige historische Irrthümer ausgemerzt worden. Nach einer kurzen Einleitung, welche das allgemeine, der Lösung zu unterziehende Problem behandelt, folgt das erste Kapitel, das nur dem Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche gewidmet ist. Nachdem zu dem auffallenden Strahl der gebrochene sammt den beiden Brennpunkten gefunden ist, wird die Construction des gebrochenen Strahls erläutert, woran sich die conjugirten Punkte und Ebenen anschliessen. In dem zweiten Kapitel, das den Durchgang des Lichtes durch beliebig viele brechende Flächen verfolgt, wird man mit der Wichtigkeit der Haupt-, Brenn- und Knotenpunkte und deren experimentellen Bestimmung vertraut gemacht. Das Werkchen soll allen angehenden Optikern aufs Wärmste empfohlen werden, zumal ausser Trigonometrie keine höheren Anforderungen in Bezug auf Mathematik gestellt werden.

B. NEBEL.

Die Brechung des Lichtes einer Ebene. Wissenschaftliche Beilage zum siebenten Jahresbericht über die Margarethenschule zu Berlin von HERMANN HAHN. Berlin 1893. R. Gärtner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 10 S.

Der wesentliche Inhalt der kleinen Schrift giebt einen Vortrag wieder, welchen der Verfasser schon im Januar 1889 in dem Verein zur Förderung des physikalischen Unterrichts in Berlin gehalten hat. Die Brechung des Lichtes in einer Ebene wird auf rein geometrische Weise, die mit der sogenannten neueren Geometrie verwandt ist, durchgeführt im Gegensatz zu den analytischen Methoden.

B. NEBEL,

Das Nivelliren. Von FRANZ LORBER. Mit 97 in den Text gedruckten Figuren. Zugleich neunte neu bearbeitete Auflage der theoretischen und praktischen Anleitung zum Nivelliren von S. STAMPFER. Wien 1894. Verlag von Carl Gerold's Sohn. 608 S. Preis: gebunden 15 Mk.

Die vorliegende Auflage weist gegenüber den früheren wesentliche Erweiterungen bezw. Umarbeitungen auf. Eingeschaltet sind die drei Abschnitte, welche sich auf die Genauigkeit und Ausgleichung der Nivellements, auf das Präcisions-Nivellement in der österreichisch-ungarischen Monarchie und auf den Einfluss der Aenderungen der Schwere auf Nivellements beziehen. Eine Vermehrung wurde dem Abschnitt über die optischen Bestandtheile der Nivellir-Instrumente zu Theil, an welcher Professor

Dr. Kobald einen hervorragenden Antheil hat. Die Darstellung ist so eingehend, dass Jeder, der mit der Geometrie bekannt ist, das Buch mit Leichtigkeit lesen kann; dazu kommen noch die vielen praktischen Winke und die Tabellen und Formeln im Anhang, so dass der junge Geometer in diesem Werke einen treuen Berather findet. Die Verlagsbuchhandlung hat sich ein grosses Verdienst erworben, indem sie für einen sehr schönen Druck und für gute Figuren besorgt war.

B. NEBEL.

A Treatise on the Kinetic Theory of Gases by HENRY WILLIAM WATSON.
Second Edition. Oxford 1893. At the Clarendon Press. 87 p.

Der Umfang dieser zweiten Auflage ist derselbe, wie der der ersten, wohl aber ist ein besonderer Werth auf die Behandlung des Stoffes gelegt worden, damit der Anfänger von dem Vorgetragenen vollständig überzeugt ist. Im Wesentlichen folgt der Verfasser den Methoden Boltzmann's mit gewissen Einschränkungen, so namentlich bezüglich des Begriffes des Molecul. Wir theilen den Wunsch des Verfassers, dass durch die einheitliche, leichtfassliche Darstellung der grundlegenden Untersuchungen auf dem Gebiete der kinetischen Gastheorie neue jugendliche Arbeitskräfte für den Weiterbau dieses Zweiges der mathematischen Physik gewonnen werden möchten.

B. NEBEL.

An elementary treatise on theoretical mechanics by ALEXANDER ZIWET.
Part I: Kinematics — 181 p.; Part II: Introduction to dynamics; statics — 183 p. New-York 1893. Macmillan and Co. and London.

Nach des Verfassers Urtheil bestehe unter den zahllosen Werken der theoretischen Mechanik, die in Deutschland, Frankreich und England vorhanden sind, keines, welches den amerikanischen Studienverhältnissen angepasst sei, wo das Studium der Mechanik erst aufgenommen wird, nachdem der Studirende sich die Elemente der höheren Mathematik angeeignet hat. Das ganze Werk soll drei Bände von nahezu gleicher Stärke umfassen, wovon die beiden ersten erschienen sind. Der erste Band umfasst die Kinematik, während der zweite zunächst die Einführung in die Dynamik im Allgemeinen zum Gegenstand hat und sodann die Statik behandelt. Der dritte Band, welcher im Laufe des Jahres 1894 erscheinen soll, sei der Kinematik gewidmet. Obwohl das Werk in erster Linie als eine Einführung in die theoretische Mechanik als solche anzusehen ist, so war der Verfasser doch bestrebt, den Bedürfnissen der künftigen Ingenieure Rechnung zu tragen, indem er die allgemeinen Theorien durch besondere Probleme und Beispiele nutzbar verwendet hat, mit deren Lösung sich der Studirende befassen soll. Um die vorgesetzten Grenzen nicht zu überschreiten, hat der Verfasser auf die schwierigeren Gebiete der Mechanik von vornherein verzichtet, hat aber doch eine Reihe von Kapiteln aufgenommen, die bei

dem ersten Studium überschlagen werden können. Im Anhang finden sich die Lösungen der im Text eingestreuten Aufgaben. Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der Geometrie der Bewegung, während erst in dem überwiegend grösseren zweiten Kapitel die eigentliche Kinematik zur Geltung kommt, also diejenigen geometrischen Bewegungserscheinungen, bei welchen durch die Einführung der Zeit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auftreten. Während in Deutschland die Mechanik gewöhnlich in Statik und Dynamik eingetheilt wird, bezeichnet der Verfasser die Lehre von den Kräften mit Dynamik und theilt diese in Statik und Kinetik ein. Ein Hauptgewicht legt der Verfasser auf die geometrischen Methoden und graphischen Constructionen, weil dieselben für diesen Gegenstand am besten geeignet sind.

B. NEBEL.

Bibliographie

vom 1. December 1894 bis 28. Februar 1895.

Periodische Schriften.

- Verhandlungen der deutschen Naturforscher und Aerzte. 66. Versammlung in Wien, 24. bis 28. September 1894. I. Theil. Die allgemeinen Sitzungen. Leipzig, Vogel. 4 Mk.
- Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 3. Bd. 1892 bis 1893. Berlin, G. Reimer. 16 Mk.
- Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1894, II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.
- Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie. Mathematische Classe. 1894, 2. und 3. Heft. München, Franz. 2 Mk. 40 Pf.
- Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 18. Bd. München, Franz. 10 Mk.
- im Jahre 1893. 49. Jahrgang. I. Abthlg. Physik der Materie; von R. BÖRNSTEIN. Ebendasselbst. 20 Mk.
- Sitzungsberichte der kaiserl. Wiener Akademie. Mathem.-naturw. Classe. Abthlg. II a. 6. und 7. Heft. Wien, Tempsky. 7 Mk. 90 Pf.
- Astronomisches Jahrbuch für 1897. Herausgegeben von der Berliner Sternwarte unter Leitung von F. TRIETZEN. Berlin, Dümmler. 12 Mk.
- Katalog der astronomischen Gesellschaft. I. Abthlg. Sterne bis zur neunten Grösse zwischen 80° nördl. und 2° südl. Declin. für d. Aequin. 1875. Leipzig, Engelmann. 33 Mk.
- Astronomischer Kalender für Wien 1895. Neue Folge. 14. Jahrg. Wien, Gerold's Sohn. 2 Mk.

- Deutsche Meeresuntersuchungen. Herausgegeben im Auftr. d. königl. preuss. Ministerien. Neue Folge. 1. Bd. 1. Heft. Kiel, Lipsius & Tischer. 30 Mk.
- Annalen d. Physik und Chemie. Herausgegeben v. G. u. E. WIEDEMANN. Neue Folge. 53. Bd. 5. Heft, oder Jahrg. 1894, 13. Heft. Leipzig, Barth. 5 Mk.
- Fortschritte der Physik im Jahre 1888. Dargestellt von d. physikal. Gesellschaft in Berlin. 44. Jahrgang. 3. Abthlg. Physik der Erde; von R. ASSMANN. Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.
- Meteorolog. Jahrbuch der Wetterwarte der Magdeburger Zeitung. Jahrg. 1893. Herausgegeben von W. GRÜTZMACHER. Magdeburg, Faber. 6 Mk.
- Zeitschrift f. physikal. Chemie. 15. Bd. 1.—3. Heft. Leipzig, Engelmann. 11 Mk.
- Publicationen der Kuffner'schen Sternwarte in Wien. 3. Bd. Herausgegeben von L. DE BALL. Wien, W. Frick. 20 Mk.
- Beobachtungen des astron.-physik. Observatoriums in O Gyalla. Bd. XV und XVI aus den Jahren 1892 und 1893. Herausgegeben von N. v. KONKOLY. Halle a. S., Schmidt. 10 Mk.
- Annalen des physik. Centralobservatoriums in Petersburg. Jahrgang 1893, I. Herausgegeben von H. WILD. Leipzig, Voss. 10 Mk. 20 Pf.
- Bulletin de l'académie des sc. de St. Petersburg. 5. série, tome I, No. 1 et 2. Leipzig, Voss. 5 Mk.
- Mémoires de l'académie de St. Petersburg. VII. série, tome 42, No. 7—11. Ebendasselbst. 45 Mk.

Reine Mathematik.

- LIE, S., Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen. (Aus den Abhandl. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch.) Leipzig, Hirzel. 5 Mk.
- SCHLESINGER, L., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bände. Leipzig, B. G. Teubner. 16 Mk.
- WEBER, H., Lehrbuch der Algebra. 1. Theil. Braunschweig, Vieweg. 16 Mk.
- MUCH, P., Die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. Mit Begleitwort von M. PASCH. Leipzig, B. G. Teubner. 3 Mk.
- ZERMELO, E., Untersuchungen zur Variationsrechnung (Dissertation). Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk. 50 Pf.
- CWOJZDZINSKI, T., Anwendung der Fuchs'schen Theorie auf die Gauss'sche hypergeometrische Reihe. Brody, West. 1 Mk.
- GROISSL, J., Die Absolutorial-Aufgaben aus d. Mathem. u. Physik an den humanist. Gymn. Bayerns. 2 Theile. München, Zipperer. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

- LAMBERT, J., Zur Entwerfung von Land- und Himmelskarten (1772). Herausgegeben von A. WANGERIN (aus Ostwald's Klassikern). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 60 Pf.
- LAGRANGE (1779) und GAUSS (1822), Abhandlungen über Kartenprojection. Herausgegeben von A. WANGERIN (aus Ostwald's Klassikern). Ebendasselbst. 1 Mk. 60 Pf.

- ROHRBACH, C., Sternkarten zum Einzeichnen von Meteorbahnen, Zodiakallicht etc. Berlin, Dümmler in Comm. 1 Mk.
- MESSER, Bewegliche Karte des Sternhimmels. Petersburg, Ricker. 5 Mk.
- DRACH, A. v., Die Globusuhr Wilhelms IV. von Hessen. Marburg, Elwert. 3 Mk. 60 Pf.
- WISLICENUS, F., Astronomische Chronologie. Leipzig, B. G. Teubner. 5 Mk.
- Die königl. preuss. Landstriangulation. Hauptdreiecke. 6. Theil. Hannöversächs. Dreiecksnetze. Berlin, Mittler & Sohn. 12 Mk.
- GUT, A., Wandtafeln zur Projectionslehre m. Text. Wiesbaden, Bechtold & Co. 15 Mk.
- WITSACK, P., Einführ. i. d. Festigkeitslehre. Hildburgh., Kesselring. 4 Mk.
- LAND, R., Einfluss der Schubkräfte auf die Biegung und Berechnung von Trägern. Anh.: Schwerpunktsbestimmungen von Trapezen und Vierecken. Berlin, Ernst & Sohn. 1 Mk.

Physik und Meteorologie.

- BLAGDEN, CH., Die Gesetze der Ueberkaltung u. Gefrierpunktserniedrigung (1788). Herausgegeben von A. VON OETTINGEN (aus Ostwald's Klassikern). Leipzig, Engelmann. 80 Pf.
- FAHRENHEIT (1724), RÉAUMUR (1730 u. 1733), CELSIUS (1742), Abhandlungen über Thermometrie. Herausgegeben von A. VON OETTINGEN (aus Ostwald's Klassikern). Ebendasselbst. 2 Mk. 40 Pf.
- GUERICKE, O. v., Neue Magdeburgische Versuche über den leeren Raum (1672), übersetzt v. F. DANNEMANN (aus Ostwald's Klassikern). Ebendas. 2 Mk.
- VOIGT, W., Compendium der theoretischen Physik. 1. Bd.: Mechanik und Wärmelehre. Berlin, Veit & Co. 14 Mk.
- ABERCROMBY, R., Das Wetter in populärer Darstellung. Deutsch von M. FERNIER. Freiburg i. Br., Herder. 5 Mk.
- Handbuch der Physik. 23. und 24. Lieferung (Encyklopädie der Naturw. III. Abthlg.). Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.
- OSTWALD, W., Elektrochemie. 5. Lieferung. Leipzig, Veit. 2 Mk.
- DRUDE, P., Die Theorie in d. Physik. Antrittsvorlesung. Leipzig, Hirzel. 80 Pf.
- BAUER, A., Zur Kenntniss des Wesens der Säcularvariation des Erdmagnetismus (Dissertation). Berlin, Mayer & Müller. 3 Mk.
- BEZOLD, W., Gedächtnissrede auf H. v. HELMHOLTZ (mit Porträt). Leipzig, Barth. 1 Mk. 50 Pf.
- BIESE, A., Neuer Typus optisch. Instrumente. Berlin, Fussinger. 2 Mk.
- LORENTZ, A., Versuche der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden, Brill. 2 Mk. 50 Pf.
- SAUBERT, B., Der Erdmagnetismus; Ursache und Bedeutung desselben für die Wetterprognose. Hannover, Helwing. 1 Mk. 60 Pf.
- TYNDALL, J., Fragmente. Neue Folge. Uebers. von ANNA v. HELMHOLTZ und ESTELLE DU BOIS-REYMOND. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

A treatise on the mathematical theory of elasticity. By A. E. H. LOVE.

Volume II. Cambridge: At the university press. 1893. 327 Seiten.

Durch eine geschichtliche Einleitung wird nicht nur diejenige des ersten Bandes wieder aufgenommen und fortgesetzt, sondern wir bemerken auch mit Vergnügen darin, dass der Autor die deutsche Literatur durchaus kennt und würdigt, eine Eigenschaft, die man bisher vielfach bei den Engländern vermisste. — Der Inhalt dieses zweiten Bandes erstreckt sich im Wesentlichen auf die Untersuchungen solcher Körper, bei denen eine Dimension sehr klein ist im Verhältniss zu den anderen, wie z. B. dünne Stäbe, dünne Platten, dünne Glocken u. s. w. Im Uebrigen sei auf die Besprechung des ersten Bandes verwiesen, dem der zweite in Nichts nachsteht.

B. NEBEL.

A history of the theorie of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time. By the late ISAAC TODHUNTER.

Edited and completed for the syndics of the university press by KARL PEARSON. Volume II. Saint-Venant to Lord Kelvin. Part. I. 762 Seiten. Part. II. 546 Seiten nebst 12 Seiten Ergänzungen des 1. Bandes. Cambridge: As the university press. 1893.

Sieben Jahre sind seit dem Erscheinen des ersten Bandes verflossen, dem nunmehr der zweite Band in Gestalt zweier stattlicher Theile folgt. Dass eine solche Pause aussergewöhnlich lang ist, fühlte auch der Verfasser; denn in seinem Vorwort sucht er sich zu entschuldigen. Nur der Fachmann allein weiss es völlig zu würdigen, welcher Bienenfleiss bei der Herausgabe eines solchen Werkes nöthig ist und welche Energie ein Mann an den Tag legen muss, wenn er neben seinem anstrengenden Berufe als Lehrer sich einer solchen Aufgabe unterzieht. Dazu kommt, dass gerade die Zeit von 1850—1860 für die Theorie der Elasticität ganz besonders fruchtbringend war; ferner, dass entgegen dem ursprünglichen Plan von Todhunter neben der rein mathematischen Seite der Theorie auch die physikalischen und technischen Berührungspunkte mit der Theorie eingehend berücksichtigt worden sind. Mit dem Verfasser freuen wir uns über die Vollendung des Werkes; denn es ist für das Weiterarbeiten absolut nothwendig, dass die sehr oft zusammenhanglosen und weit-

zerstreuten Arbeiten von Zeit zu Zeit zu einem Ganzen vereinigt werden. Das erste Kapitel des zweiten Bandes ist den Untersuchungen Saint-Venant's gewidmet, auf die die kleineren Untersuchungen seiner Zeitgenossen folgen. Der zweite Theil des zweiten Bandes beginnt mit den Arbeiten von Franz Neumann, Kirchhoff und Clebsch, während die beiden noch folgenden Kapitel Boussinesq und Sir William Thomson (Lord Kelvin) zufallen. Ein sorgfältig aufgestelltes, alphabetisch geordnetes Inhaltsverzeichniss gestattet, in kürzester Zeit das Gewünschte aus der reichen Fülle herauszufinden, was für den Fachmann von unschätzbarem Werth ist.

B. NEBEL.

Die Lehre von der Elektrizität. Von GUSTAV WIEDEMANN. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Erster Band. Mit 298 Holzschnitten und zwei Tafeln. Braunschweig. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1893. 1023 Seiten. Preis 26 Mk.

Seit dem Erscheinen des ersten Bandes der ersten Auflage im Jahre 1882 hat die Lehre von der Elektrizität ganz gewaltige Fortschritte zu verzeichnen, die bis zum Fundament des riesigen Baues reichen. Fallen doch in diese Periode die grossartigen experimentellen Entdeckungen von Herz. Da das Werk den Umfang von fünf Bänden nicht überschreiten soll, so galt es schon bei dem ersten Band, alles Ueberflüssige auszuscheiden oder in Fussnoten unterzubringen; auch die Gruppierung des Inhaltes ist eine etwas andere geworden. Aus dem früheren zweiten Band sind die Elektrisir- und Influenzmaschinen noch in den jetzigen ersten aufgenommen worden. Die Literatur wurde bis zum Ende des Jahres 1892 fortgeführt und soll am Schluss des Werkes noch durch Nachträge ergänzt werden. Nach des Verfassers Angabe soll das Manuskript grössten Theils druckbereit sein, so dass wir hoffen dürfen, in nicht zu ferner Zeit dieses für den Forscher unentbehrliche Handbuch der Elektrizitätslehre bis auf die Gegenwart vervollständigt zu sehen. Dass die äussere Ausstattung allen Anforderungen entspricht, dafür bürgt schon der Name Friedrich Vieweg & Sohn.

B. NEBEL.

Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes.

Von LUDWIG Boltzmann. II. Theil. Verhältniss zur Fernwirkungstheorie, specielle Fälle der Elektrostatik, stationären Strömung und Induction. Mit Figuren im Text und zwei Tabellen. Leipzig. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 1893. 166 Seiten Preis 5 Mk.

Mit Freuden sei dieser zweite Theil der Vorlesungen Boltzmann's über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes begrüsst, tragen

sie doch wesentlich zur rascheren Verbreitung und zum leichteren Verständniss der Maxwell'schen Abhandlungen bei. Durch Beibehaltung der Maxwell'schen Buchstaben zeigt sich schon äusserlich des Verfassers Bestreben, die für die Weiterforschung unumgänglich nothwendigen Lehren Maxwell's so rasch wie möglich, dem Leser in Fleisch und Blut überzuführen. Auch hier ist, wie im ersten Theil, der Inhalt in 14 Vorlesungen eingekleidet, in denen den alten Vorstellungen ihr Platz in der Maxwell'schen Theorie angewiesen wird. Mögen diesem zweiten Theil noch weitere folgen! Der Verleger sei auf den Druckfehler seines Vornamens auf dem Titelblatt aufmerksam gemacht.

B. NEBEL.

Die optische Indicatrix. Eine geometrische Darstellung der Lichtbewegung in Krystallen von L. FLETSCHER. Uebersetzt von H. AMBRONN und W. KÖNIG. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 69 Seiten. Preis 3 Mk.

Die Uebersetzer haben geglaubt, nur den Theil des Werkes des Verfassers, der gerade im deutschen Leserkreise Interesse zu erwecken vermag, ins Deutsche zu übertragen; er besteht aus dem zweiten und vierten Kapitel des Originals. Es handelt sich hier um das als Indicatrix bezeichnete Hilfsellipsoid, dem dreiachsigen gegenüber dem Rotationsellipsoid, aus welchem ersteren unter ausschliesslicher Anwendung dieser Hilfsfläche alle Sätze über Strahlen und Wellenebenen und ihre gegenseitigen Beziehungen in zweiachsigen Krystallen abgeleitet werden. Es ist dies gerade für den Anfänger von grosser Wichtigkeit; denn bei der Benutzung mehrerer Hilfsflächen ist eine Verwirrung in den meisten Fällen nicht zu vermeiden. Die einfache Darstellung wird ganz besonders zur Verbreitung in Deutschland beitragen.

B. NEBEL.

Anleitung zur Krystallberechnung. Von BENNO HECHT. Mit einer Figurentafel und fünf auf Pauspapier gedruckten Hilfsprojectionen. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 76 Seiten. Preis 3 Mk.

Mit Hilfe der Determinanten, einiger goniometrischer und krystallographischer Hilfssätze nebst der stereographischen bzw. Parallel-Projection ist der Verfasser im Stande, jede Krystallberechnung auszuführen. An einer Reihe von Beispielen wird die Fruchtbarkeit der Methode auseinander gesetzt. Die mathematischen Hilfsmittel sind an die Spitze gestellt und dürften einem Gymnasialabiturienten keinerlei Schwierigkeiten machen.

B. NEBEL.

Grundbegriffe der Meteorologie für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. Zusammengestellt von E. WILK. Zweite Auflage. Mit

fünf Karten und acht in den Text gedruckten Figuren. Leipzig. Verlag von Jul. Budeker. 1892. 58 Seiten. Preis 1 Mk.

Das Büchelchen, dessen zweite Auflage eine etwas andere Gruppierung des Stoffes aufweist, hat seine Entstehung lokalen Unterrichtsvorschriften zu verdanken. Statt einer Sammlung empirischer Regeln finden wir den ganzen Inhalt im Zusammenhang dargestellt als nothwendige Folgerung der Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Zuhilfenahme der physikalischen Unterschiede zwischen Erde und Wasser und der der Erde eigenthümlichen Gestalt, so dass der Schüler von der Meteorologie den Eindruck einer Wissenschaft erhält. Mit dem Verfasser bedauern wir aufs Lebhafteste, dass die Karten bei ihrer Kleinheit nicht in Farben erschienen sind, was bei einer Neuauflage sehr zu berücksichtigen wäre. Auch dem Laien, der sich etwas über die Witterungsverhältnisse auf unserer Erde in Kürze orientiren will, sei dieses Büchlein empfohlen. B. NEBEL.

Kleinere Schriften und Briefe von Robert Mayer. Nebst Mittheilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von JAKOB J. WEYRAUCH. Mit zwei Abbildungen. Stuttgart 1893. Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolger. 503 Seiten. Preis 10 Mk.

Der Herausgeber, welcher auch die dritte Auflage von Robert Mayer's Mechanik der Wärme besorgt hat, war bestrebt, in diesem Werke nicht nur die kleineren, in Zeitschriften zerstreuten Aufsätze Mayer's zusammenzustellen, sondern auch Mayer's Correspondenz und Alles, was sich auf sein Leben bezieht, mit grosser Sorgfalt zu sammeln, damit der Nachwelt ein möglichst getreues Bild des genialen Entdeckers des mechanischen Wärmeäquivalentes überliefert werde. Dies ist um so wichtiger, weil anfänglich die Fachgelehrten aus Mangel an Verständniss Mayer derart zusetzten, dass seine Kraft diesem Hohn (vergl. Seyffer) nicht gewachsen war, und weil unmittelbar darauf ein heftiger Prioritätsstreit drohte, ihm die Früchte seiner Arbeit und der damit verbundenen Kämpfe zu entreissen. Durch das muthige und thatkräftige Eintreten des grossen englischen Gelehrten John Tyndall war es Mayer vergönnt, die ihm unstreitig gebührende Anerkennung erleben zu dürfen. Mit grossem Bedauern erfüllt es uns, dass es in Folge der schweren Erkrankung Tyndall's nicht gelungen ist, diesen ebenso wichtigen, als interessanten Theil des Briefwechsels vollständig wiederzugeben. Aus dem Eifer, mit welchem der Herausgeber dieses grosse Sammelwerk durchgeführt und durch entsprechende Vorbemerkungen zu einem ganzen vereinigt hat, dürfen wir schliessen und hoffen, dass er nicht nachlassen wird, diesen Theil noch zu ergänzen. Der Vollständigkeit wegen wurde auch der schon im Jahre 1889 von Prof. Preyer herausgegebene Briefwechsel zwischen Mayer

und Griesinger nach den Originalen hier wieder aufgenommen. Durch die Einsicht in die feinfühligsten Familienbriefe, durch das Bildniss Mayer's und durch die Abbildung seines Wohnhauses wird dem Leser die Persönlichkeit des grossen Schwabenforschers aufs Lebhafteste vor Augen geführt, für den schon zu Lebzeiten auch seine engeren Landsleute theilweise eingetreten sind (erinnert sei an das mannhafte Auftreten Siegmund Schott's in der württembergischen Kammer), so dass hier nicht ganz zutrifft das etwas harte Wort eines schwäbischen Dichters:

Es wurde stets in Schwaben
Für einen Dichter was gethan,
Sowie man ihn begraben.

B. NEBEL.

Die Aequivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz.

Von Dr. HERMANN SCHEFFLER. Leipzig 1893. Verlag von Friedrich Förster. 585 Seiten. Preis 9 Mk.

Wer den Nachruf liest, mit welchem der Verfasser dieses Buch dem Andenken seiner früh verklärten Tochter widmet, der wird aus innerster Seele mitempfinden, wie schwer das Schicksal den Verfasser getroffen hat, und wie sehr dadurch das harmonische, häusliche Lebensglück desselben gestört worden ist. Es würde zu weit führen, wenn hier auch nur annähernd auf den reichen Inhalt dieses rein philosophischen Werkes eingegangen werden soll; der Leser muss somit auf das Original verwiesen werden. Die Vorrede beschäftigt sich dagegen in ihrem ersten Theil mit dem auf Faraday's Anschauungen aufgebauten Werke Maxwell's über Elektrizität und Magnetismus, das dem Verfasser erst nach Beendigung des vorliegenden Werkes in die Hände gelangt ist und deshalb nicht mehr in demselben verarbeitet werden konnte. Auf Grund angeführter Schriften nimmt der Verfasser die Priorität für sich in Anspruch, den Aether als das vermittelnde Medium hingestellt zu haben. Wir haben die feste Ueberzeugung, dass sich solche Ansprüche auch noch bei früheren Autoren auffinden lassen, wofern wir nur recht emsig suchen, dass demnach die Priorität noch älteren Datums ist. Damit ist es aber nicht gethan, es kommt vielmehr darauf an, aufzufinden, in welcher Weise eine solche Vermittelung stattfindet. Für die Physik war es daher ein fundamentaler Schritt, als die Existenz elektrischer Wellen auf experimentellem Wege erhärtet wurde. Wie Viele haben früher vereinzelt und erst in neuerer Zeit in grösserer Zahl ausgesprochen, dass die Gravitation auf eine ähnliche Wellenbewegung zurückzuführen sei! Wohl mag durch solche Aussprüche die Philosophie gefördert werden, die praktische Physik dagegen ist durch solche, wenn auch vielleicht berechnete Behauptungen, die aber des experimentellen Beweises noch ermangeln, um keinen Schritt weiter gekommen. Die Physiker werden daher erst Denjenigen, welcher dereinst das Räthsel der

Gravitation auf experimentellem Wege löst, zu ihren grössten Sternen rechnen, zu denen sie nunmehr auch den Entdecker der elektrischen Wellen zählen. Die Fernwirkung von Theilchen zu Theilchen wird auch heute im Allgemeinen nicht gelehrt, wohl aber die unvermittelte Fernwirkung von einem Theilchen zu einem in endlicher Entfernung befindlichen, ohne dass die dazwischen gelegenen Theilchen in Mitleidenschaft gezogen werden.

B. NEBEL.

Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. DEDEKIND. Vierte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1894. VIII und 657 Seiten.

Ein so anerkanntes Lehrbuch, wie das vorliegende, von Neuem rühmen zu wollen, scheint dem Referenten überflüssig zu sein.

Es kann sich nur darum handeln, die Fortschritte hervorzuheben, welche die neue Auflage des Werkes der vorangegangenen gegenüber aufweist. Referent kann sich hierbei wohl um so kürzer fassen, als er in den „Göttinger Anzeigen“ die fraglichen Veränderungen auf das Eingehendste analysirt hat.

Eine wesentliche Umgestaltung hat nur das letzte Supplement „Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen“ erfahren; es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass der Inhalt dieses Supplementes bereits in der dritten Auflage die eigenste Schöpfung des Herausgebers war.

Das Ziel dieser Untersuchungen ist folgendes. Schon Gauss hatte erkannt, wie die „ganzen complexen Zahlen“ $x + iy$, wo x, y alle ganzzahligen Werthe durchlaufen, eine Theorie zulassen, die der gewöhnlichen rationalen Zahlentheorie in allen wesentlichen Zügen parallel läuft. Der Grund dafür ist wesentlich der, dass auch für die ganzen complexen Zahlen ein Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers existirt, der von dem Euklidischen Algorithmus nur darin abweicht, dass die „Grösse“ einer ganzen Zahl $x + iy$ durch deren „Norm“ $x^2 + y^2$ gemessen wird.

Man könnte nun versucht sein, die Theilbarkeitsgesetze der ganzen, rationalen wie complexen Zahlen, auf die Gesamtheit aller „ganzen algebraischen“ Zahlen ϑ auszudehnen, das heisst solcher, die einer Gleichung von der Form:

$$1) \quad \vartheta^n + a_1 \vartheta^{n-1} + a_2 \vartheta^{n-2} + \dots + a_{n-1} \vartheta + a_n = f(\vartheta) = 0$$

mit ganzzahligen Coefficienten a genügen.

Eine solche „ganze“ Zahl, wie sie kurzweg genannt wird, wird „theilbar“ durch eine zweite heissen, wenn der Quotient wiederum eine ganze Zahl ist. Sind zwei ganze Zahlen gegenseitig durch einander theilbar oder „associirt“, so ist ihr Quotient eine „Einheit“, das ist eine Zahl,

welche einer Gleichung (1) mit dem letzten Coefficienten $+1$ oder -1 genügt und umgekehrt.

Lassen sich nun auch manche Analogien mit der gewöhnlichen Theilbarkeitstheorie aufstellen, so tritt doch sehr bald eine wesentliche Verschiedenheit ein; während nämlich eine ganzrationale Zahl nur auf eine einzige Weise in Factoren zerlegbar ist, findet jetzt eine unbeschränkte Zerlegbarkeit statt.

Der innere Grund dafür ist bald zu erkennen. Eine Primzahl p im rationalen Zahlengebiete besitzt sowohl die Eigenschaft, nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar zu sein, als auch die andere, dass ein Product von zwei durch p nicht theilbaren Zahlen gleichfalls durch p untheilbar ist.

Diese beiden Eigenschaften treten aber — als „Primzahl-Charakter“ und als „Unzerlegbarkeit“ im Gebiete aller ganzen Zahlen auseinander.

Anders wiederum verhält es sich mit dem Begriffe des Relativprimseins zweier Zahlen α , β , der im rationalen Gebiete sowohl dadurch erklärt werden kann, dass α und β ausser der Einheit keinen gemeinsamen Theiler haben, als auch dadurch, dass die Gleichung $\alpha x + \beta y = 1$ in ganzen Zahlen x , y lösbar sein soll; hier ist es auch bei allgemeinen ganzen Zahlen von vornherein wahrscheinlich, dass die eine Erklärung die andere zur Folge hat, es fehlt aber dazu vorläufig jeder Ansatz eines Beweises.

Beide Umstände drängen darauf hin, sich vor der Hand auf ein engeres Gebiet von ganzen Zahlen zu beschränken, nämlich ein solches, das einer ganz bestimmten vorgelegten Gleichung (1) entspringt, ähnlich wie die ganzen complexen Zahlen aus der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hervorgehen.

Um aber den Umfang eines solchen Gebietes ganzer Zahlen deutlicher zu übersehen, ist es zweckmässig, zunächst von einem umfassenderen Gebiet auszugehen, und eine irreducible Gleichung (1) mit gebrochenen rationalen Coefficienten zu Grunde zu legen; eine Wurzel ϑ derselben heisst eine „gebrochene algebraische Zahl“, die n Wurzeln ϑ , ϑ_1 , ... ϑ_{n-1} der Gleichung heissen conjugirt.

Aus einer solchen Zahl ϑ denke man sich vermöge der vier rationalen Grundoperationen ein Zahlensystem $R(\vartheta)$ gerade so hergeleitet, wie die rationalen Zahlen aus der Eins. Das System $R(\vartheta)$ bildet einen „Körper“, das heisst, seine Individuen gehen durch die vier Species ineinander über, und zwar einen „endlichen Körper n^{ten} Grades“, da je $n + 1$ seiner Zahlen durch eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten miteinander verknüpft sind.

Vertauscht man ϑ mit einer conjugirten Wurzel von (1), so geht auch der Körper $R(\vartheta)$ in einen conjugirten über, derart, dass dabei alle

zwischen den Zahlen von $R(\vartheta)$ bestehenden rationalen Beziehungen unverändert bleiben.

Auf welche Weise lassen sich nun alle „ganzen“ Zahlen eines solchen Körpers arithmetisch darstellen?

Ist ω eine solche ganze Zahl, so ist leicht zu sehen, dass auch jede Zahl h_ω von der Form $h_0 + h_1\omega + h_2\omega^2 + \dots + h_{n-1}\omega^{n-1}$ mit willkürlichen ganzrationalen Coefficienten h wiederum eine ganze Zahl des Körpers ist. Von der grössten Bedeutung ist nun aber die Frage nach der Umkehrung, ob sich auch stets eine ganze Zahl ω des Körpers so auswählen lässt, dass jede andere ganze Zahl des Körpers in die Form h_ω gebracht werden kann.

Für einen Körper nämlich, wo das der Fall ist, ist die ganze Theorie der Theilbarkeit, wie Zolotareff und Dedekind nachgewiesen haben, auf das Verhalten gewisser höherer Congruenzen [deren linke Seite die Form $f(\vartheta)$ in 1) ist] zurückführbar.

Indessen gelang Dedekind 1878 der wichtige Beweis dafür, dass Körper existiren, bei denen die gemeinte Annahme durchaus unzulässig ist; um also eine ausnahmslose Theorie aufzubauen, bedarf es ganz anderer und tiefer liegender Hilfsmittel.

Solche bietet nun in weitestem Umfange die Dedekind'sche Idealtheorie.

Es lässt sich in jedem endlichen Körper an Stelle der Potenzen von ω eine „Basis“ von n ganzen Zahlen $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ so auswählen, dass die lineare Form $\mathfrak{o} = h_0\omega_0 + h_1\omega_1 + \dots + h_{n-1}\omega_{n-1}$ (bei gleicher Bedeutung der h) in der That die oben geforderte Eigenschaft besitzt, also für variable Werthe der h sämtliche ganze Zahlen des Körpers, und zwar jede nur einmal, darstellt.

Allgemein nennt man ein Zahlensystem von der Form $\sum_0^{n-1} h_i \omega_i$, auch

wenn die ω irgend welche n Zahlen sind, einen „endlichen Modul“ mit der Basis $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$: derselbe besitzt offenbar die Eigenschaft, dass seine Individuen durch Addition und Subtraction ineinander übergehen. Als Zeichen dient $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}]$.

Unser System \mathfrak{o} hat aber überdies noch die Eigenheit, dass, wenn ω' irgend eine ganze Zahl des Körpers ist, das Product $\omega' \cdot \sum h_i \omega_i$ wiederum dem Systeme \mathfrak{o} angehört: ein derartiger endlicher Modul heisst ein „Ideal“ (des Körpers).

Wie man leicht bemerkt, enthält der Körper ausser \mathfrak{o} noch unendlich viele andere Ideale; z. B. das System aller, durch eine feste ganze Zahl ω' des Körpers theilbaren ganzen Zahlen des Körpers ist stets ein solches Ideal.

An diese letzteren Ideale lassen sich, wie verschiedene Beispiele von Körpern zeigen, die Theilbarkeitsgesetze unmittelbar anknüpfen. So im

einfachsten Falle des rationalen Zahlengebietes. Eine Zerlegung $m = np$ lässt sich auch ersetzen durch die Productgleichung für Ideale $[m] = [n] \cdot [p]$, deren Inhalt, genauer betrachtet, ein doppelter ist: einmal gelangt man stets zu einer Zahl in $[m]$, wenn man irgend eine Zahl in $[n]$ mit irgend einer Zahl in $[p]$ multiplicirt, und zwar bleibt hierbei keine Zahl in $[m]$ ausgeschlossen; andererseits sind alle Zahlen des Systems $[m]$ in dem Systeme $[n]$ (oder auch $[p]$) enthalten. Die erstere Eigenschaft wird man dahin ausdrücken, dass $[m]$ das „Product“ der beiden „Factoren“ ist, die zweite dagegen dahin, dass $[m]$ ein „Vielfaches“ von $[n]$ oder auch $[n]$ ein Theiler von $[m]$ ist.

Weitere Beispiele, wie das eines „Kreistheilungskörpers“, lassen aber auch erkennen, dass selbst in dem Falle, wo die Zerlegung einer Zahl in Primfactoren erst durch Aufnahme Kummer'scher „idealer Factoren“ als eine eindeutige hergestellt werden kann, als rein reales Aequivalent die Zerlegung von einem Ideal in Prim-Ideale eintritt; hierbei kommen der Gesamtheit der durch einen idealen Factor theilbaren wirklichen ganzen Zahlen des Körpers genau wieder die beiden oben bezeichneten Eigenschaften eines Ideales zu, so dass dieselben von jetzt ab umgekehrt ein Ideal definiren. Es entsteht somit — da die blosse Verwendung idealer Factoren auf unübersteigbare Hindernisse führen würde — in erster Linie die Aufgabe, für alle endlichen Körper ohne Ausnahme den Fundamentalsatz zu erhärten, dass jedes Ideal eines gegebenen Körpers auf eine und nur eine Art als Product von Prim-Idealen (das heisst solche, die nur durch sich selber und durch das Gesamtgebiet \mathfrak{o} theilbar sind) dargestellt werden kann.

Und dies hängt in der Hauptsache davon ab, dass in der That bei Idealen allgemein die Begriffe Vielfaches und Product zur Deckung gebracht werden können, so dass also stets, wenn ein Ideal m durch ein anderes n theilbar ist, das heisst, die Zahlen von m sämmtlich in n enthalten sind, ein drittes Ideal p existirt, so dass $m = np$ ist, in dem Sinne, dass durch Multiplication irgend einer Zahl in n mit irgend einer in p der Reihe nach sämmtliche Zahlen in m entstehen.

Um zu diesem Angelpunkte der ganzen Theorie vorzudringen, wird man zuvörderst eine selbstständige Theorie der endlichen Moduln entwickeln, wobei auf das Sorgsamste zu sondern ist, was hier die Begriffe des Vielfachen und des Productes gemein haben und was nicht. Erst dann wird man erkennen können, weshalb bei den besonderen Moduln, welche Ideale eines und desselben Körpers sind, beide Begriffe äquivalent werden. Und eben hierin liegt das Hauptverdienst der Neubearbeitung der Theorie seitens seines Schöpfers, dass der fragliche Angelpunkt gleich im Anfange der Idealtheorie klargestellt wird, während das in der

vorigen Auflage nur auf einem mühsamen Umwege und nicht ohne Heranziehung fremdartiger Hilfsmittel erreicht wurde.

Der Fortschritt der neuen Auflage ist in erster Linie einer wesentlichen Vertiefung der Begriffe der Modultheorie zu verdanken; man beachte in dieser Hinsicht den merkwürdigen Dualismus zwischen „grössten gem. Theiler“ und „kleinstem gem. Vielfachen“ von Moduln, die Begriffe des „Quotienten“, des „eigentlichen Moduls“, der „Ordnung“ und „der Hülle einer ganzen algebraischen Zahl“. Vor Allem aber ist es der Satz in § 173 VI über die Umformung algebraischer Moduln, auf dessen Grund erst die Entwicklung der eigentlichen Idealtheorie in ihrer vornehmen Schönheit ermöglicht wird.

In zweiter Linie ist die Umarbeitung der Körpertheorie zu erwähnen, wengleich dieselbe als solche eine noch viel durchgreifendere geworden ist, als die der Modultheorie.

Es handelt sich hier weniger um neue Einzelergebnisse, als um die principielle Anordnung des Stoffes; mit einem Worte, der im Obigen skizzirte Weg der dritten Auflage wird jetzt gerade in umgekehrter Richtung durchlaufen. Während dort auf Grund einer einzelnen vorgegebenen Gleichung 1) allmählich die allgemeinen Eigenschaften des zugehörigen endlichen Körpers erschlossen werden, nicht ohne Vermeidung von Rechnungen, wird jetzt von ganz beliebigen Körpern ausgegangen; die Begriffe eines Theilers oder Unterkörpers, einer eindeutigen Abbildung, der Reducibilität im allgemeinsten Weise aufgestellt und combinirt. Der Grad n , die Norm, die Discriminante und so fort erscheinen von vornherein als Invarianten von Körpern, das heisst Bildungen, die von einer speciellen Darstellung der letzteren ganz unabhängig sind.

Ein endlicher Körper tritt als solcher auf, der nur eine endliche Anzahl von Theilern besitzt, er besitzt den Grad n , wenn je $n + 1$ Zahlen desselben ein reducibles System bilden, während sich immer n irreducible Zahlen des Körpers auswählen lassen; ein solcher Körper enthält dann immer unendlich viele algebraische Zahlen, die je einer irreducibeln Gleichung von der Form 1) genügen, wodurch der frühere Ausgangspunkt wieder erreicht ist.

Dabei können die Coefficienten von 1) selbst einem beliebigen Körper (nicht nur dem der rationalen Zahlen) angehören und so fort. Unzweifelhaft ist das eine Stufe der Darstellung und Verarbeitung, die an wissenschaftlicher Höhe kaum noch überboten werden möchte; die Kraft der Begriffe und Sätze reicht denn auch weit über das zunächst gesteckte Ziel, die Theilbarkeitsgesetze für die ganzen Zahlen eines endlichen Körpers, hinaus.

Wo so viel Licht ist, wird freilich auch der Schatten nicht fehlen, und der liegt, wie dem Referenten scheint, vor Allem auf der pädagogi-

sehen Seite. So wenig spezifische mathematische Kenntnisse vom Leser verlangt werden, um so grösser ist der Anspruch an sein Abstraktionsvermögen und an seine Ausdauer. Von der im Uebrigen nahe verwandten Untersuchungsrichtung Kronecker's unterscheidet sich die Dedekind'sche wesentlich darin, dass Ersterer als ideale Divisoren von vornherein gebrochene (algebraische) Zahlen zulässt, während Dedekind sich principiell auf die Verwendung ganzer Zahlen und zwar nur solcher des jeweils vorliegenden endlichen Körpers beschränkt.

Bei dem ganzen wissenschaftlichen Standpunkte des Herausgebers ist es erklärlich, weshalb fremdartige Forschungen der neueren Zeit keine Berücksichtigung gefunden haben.

Mancher Leser wird freilich ein gewisses Gefühl der Enttäuschung nicht zurückhalten, wenn er von dem grossartigen Aufschwunge, welchen z. B. die ganze Theorie der quadratischen Formen auf Grund geometrisch-functionentheoretischer Methoden erhalten hat, Nichts erfährt.

Andererseits will Referent durchaus nicht in Abrede stellen, dass eine Methode, die den verschiedensten Richtungen zugleich gerecht werden will, zumal für einen jüngeren Studirenden mit manchen Gefahren verbunden ist, und dass dem gegenüber ein so consequent festgehaltener Standpunkt, wie er uns in den „Vorlesungen“ entgegentritt, einen ungemein erzieherischen Werth hat.

Nach der unmassgeblichen Meinung des Referenten wäre ein gewisser Mittelweg das Richtige; ohne der Systematik Etwas zu vergeben, könnte doch die „gemischte“ Methode als historisches, heuristisches und vergleichendes Princip mit gutem Erfolge zur Anwendung kommen.

W. FRANZ MEYER.

Lehrbuch der höheren Analysis. I. Band. Lehrbuch der Differentialrechnung. Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Universitäten und technischen Hochschulen. Von H. GRAVELIUS. Berlin. F. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 1893. VIII und 323 Seiten.

Es ist immer etwas Missliches, über den ersten Band eines grösseren Werkes zu urtheilen, zumal wenn sich wie hier der Verfasser über Plan und Anlage des Ganzen völlig in Stillschweigen hüllt. Es kann leicht als Fehler angesehen werden, was sich möglicher Weise, wenn erst das Werk abgeschlossen vorliegt, in einen Vorzug umwandelt.

Auf die Gefahr hin, solche Irrthümer zu begehen, muss Referent die hier gebotene „Differentialrechnung“ als eine selbstständige Schrift ansehen.

Unzweifelhaft hat dieselbe mancherlei Vorzüge.

Die Ausstattung seitens der Verlagsbuchhandlung ist im Verhältniss zu dem wohlfeilen Preise geradezu eine tadellose.

Was die Anordnung des Stoffes anbelangt, so war es das Bestreben des Verfassers, den Studirenden gleich auf der ersten Stufe mit einer Reihe von Verfeinerungen bekannt zu machen, welche die Theorie in den letzten Jahrzehnten erfahren hat; es braucht in dieser Hinsicht ja nur an Namen wie Weierstrass, Dedekind, G. Cantor, Stolz, Dini, Pringsheim erinnert zu werden.

Wenn man noch hinzunimmt, dass der Verfasser eine Uebersicht über die Elementarbegriffe der räumlichen Liniensysteme mit aufgenommen hat, so darf man wohl sagen, dass das Lehrbuch des Herrn Gravelius mit Vortheil als Ergänzung zu anderen Lehrbüchern geringeren Umfanges benutzt werden kann, um so mehr, als die Darstellung des zum Theil abstracten Stoffes im Grossen und Ganzen ein entschiedenes Geschick verräth.

Hierüber hinaus möchte indessen Referent nicht gehen, er möchte eher einen ungeübten Leser vor einer ausschliesslichen Benutzung des Buches warnen.

Denn das Bestreben des Verfassers, dem Leser die Schärfe und Präcision der neueren Richtung vor Augen zu führen, wird nicht selten durch einen lückenhaften und unpräcisen Vortrag vereitelt.

Noch schlimmer ist ein Mangel, der freilich auch nur als ein äusserlicher aufgefasst werden kann: Das Buch wimmelt geradezu von sinnstörenden Druckfehlern, und was das gerade bei einer „Differentialrechnung“ für einen jungen Studirenden besagen will, weiss jeder Mathematiker aus eigener Erfahrung.

So fehlen Seite 12 Zeile 4 die oberen Indices o , auf Seite 13 ist wiederholt das Zeichen $<$ durch \leq zu ersetzen, auf Seite 42 Zeile 1 von unten fehlt die Einschaltung „positive“, Seite 156 letzte Zeile hat es „ $<$ “ statt „ $>$ “ zu heissen und so fort.

An manchen Stellen ist es zweifelhaft, ob man da noch von einem Druckfehler sprechen kann. Auf Seite 41 ist bei der Erklärung der singulären Stellen von dem Verhalten an der Stelle $x = \infty$ keine Rede, Seite 164 wird eine bedingt convergente Reihe als eine „semiconvergente“ bezeichnet und so weiter.

Die Art und Weise, wie citirt wird, unterliegt auch manchen Bedenken. Die G. Cantor'sche Theorie des Irrationalen wird Heine zugeschrieben (mit dem Citat Crelle's Journ. Band 74), während Heine daselbst ausdrücklich betont, dass sie von Cantor herrühre; bei Gelogenheit des „Schnittes“ wird nur auf das Lehrbuch von Stolz verwiesen, so dass der Leser glauben muss, letzterer habe diesen wichtigen Begriff eingeführt, während man denselben bekanntlich Dedekind verdankt. Und so weiter.

Trotzdem ist Referent der Ueberzeugung, dass eine zweite Auflage des Buches, vorausgesetzt, dass ihr eine sorgfältige Correctur vorangegangen ist, den angestrebten Zweck erfüllen wird.

Referent will gern bekennen, dass er einer milderen Auffassung Raum gegeben haben würde, hätte er nicht gerade anderswo eine Besprechung vorgefunden, die durch ihre masslosen Lobeserhebungen abstossen musste.

W. FRANZ MEYER.

Demartres. Cours d'Analyse. Première Partie. Fonctions de Variables réelles. Deuxième partie. Propriétés des fonctions analytiques. Rédigés par E. LEMAITRE. Paris. A. Hermann. 1892. 192 resp. 168 Seiten.

Die französischen Professoren der höheren Analysis sind in der angenehmen Lage, bei ihren Zuhörern eine hinreichende Kenntniss der Elemente der Differential- und Integralrechnung voraussetzen zu dürfen. Das spiegelt sich denn auch in den französischen Lehrbüchern wieder. Während die deutschen Werke über Analysis der keineswegs leichten Aufgabe zu genügen haben, sich vorab mit der Arithmetik und Algebra abzufinden, können die französischen sofort in medias res übergehen und den Begriff der allgemeinen Functionen an die Spitze stellen.

Die vorliegenden autographirten Hefte (ein drittes ist seit längerer Zeit in Aussicht gestellt, aber noch nicht erschienen) geben Vorlesungen wieder, die der Verfasser an der faculté des sciences zu Lille über den in Rede stehenden Gegenstand gehalten hat. Man darf wohl den Rückschluss machen, dass die Zuhörer nicht diejenigen Elitetruppen gewesen sind, wie sie Paris aufzuweisen hat. Denn der Verfasser bütet sich geflissentlich, in ausgedehnte abstracte Erörterungen der modernen Subtilitäten einzugehen, er hat vielmehr die Absicht, aus dem grossen Gebiete der Functionen reeller und complexer Variabeln das Wesentlichste, zugleich mit interessanten Anwendungen, herauszuheben, und die organische Verbindung aufzudecken, in der die Fundamentalbegriffe zu einander stehen.

Diese Aufgabe hat der Verfasser zweifellos glücklich gelöst; es ist erstaunlich, was Alles auf gedrängtem Raume zur Behandlung kommt.

Das erste Heft gliedert sich in vier Abschnitte. Für eine resp. mehrere unabhängige reelle Variable werden die Differentialquotienten und Differentiale der Functionen entwickelt; besondere Anregung gewährt dem Leser ein Excurs über Functionaldeterminanten.

Der zweite Abschnitt behandelt die Taylor'sche und Mac-Laurin'sche Reihe und im Anschluss hieran Variationen, sowie Maxima und Minima. Der dritte und vierte Abschnitt beschäftigt sich mit den unbestimmten und bestimmten Integralen. Hierbei werden die Grundzüge der elliptischen und hyperelliptischen Integrale, sowie der trigonometrischen Reihen mit erörtert.

Das zweite Heft zerfällt wiederum in vier Abschnitte. Zuerst wird der Leser mit den analytischen Functionen im Allgemeinen bekannt gemacht; als interessante Anwendung erscheint die Theorie der Kugelfunctionen und das Dirichlet'sche Problem.

Der zweite Abschnitt wendet sich den eindeutigen analytischen Functionen zu, wobei auch die neueren Untersuchungen von Weierstrass und Mittag-Leffler über Primfunctionen berücksichtigt werden.

Als wichtigste Anwendung giebt der dritte Abschnitt die Grundzüge der Theorie der doppelperiodischen Functionen, wobei den verschiedenen Richtungen möglichst gleichmässig Rechnung getragen wird.

Der letzte Abschnitt ist den mehrdeutigen Functionen gewidmet.

Wenn das Werk auch nicht auf hervorragende Eigenart Anspruch macht, so ist es doch sicher als eines der besseren in dem fraglichen Gebiete anzusehen und zu empfehlen.

W. FRANZ MEYER.

H. OLTRAMARE. *Essai sur le calcul de la généralisation.* Genève. Stafelmohr. 1893. 132 Seiten.

Es handelt sich um jene eigenthümliche, von Liouville gelegentlich bemerkte, vom Verfasser noch weiter ausgedehnte Verallgemeinerung der Analysis, welche Differentiationen und Integrationen mit gebrochenem Index construirt.

Liouville geht von der gewöhnlichen Differentiationsformel $\frac{d^\mu e^{\alpha u}}{du^\mu} = \alpha^\mu e^{\alpha u}$ (α constant) aus. Multiplicirt man noch mit einer weiteren Constanten A_α und bildet eine Summe von der Art: $\Sigma A_\alpha e^{\alpha u}$, so ist die μ^{te} Ableitung nicht nur eine ganz analog gebaute Summe, sondern man kann dieser neuen Bildung unmittelbar auch dann einen Sinn beilegen, wenn μ eine beliebige (nicht nur ganze positive) Zahl ist.

Nicht jede gegebene Function von u lässt sich natürlich in Form einer solchen (eventuell auch unbegrenzten) Summe schreiben. Um den Bereich der hierher gehörigen Functionen zu erweitern, betrachtet der Verfasser allgemeine Summen von der Form $\Sigma A_\alpha e^{\alpha u} \psi(\alpha)$, wo die Function ψ von der Variablen u unabhängig ist. Der so entstandene Ausdruck heisst „aus $e^{\alpha u}$ durch Verallgemeinerung entstanden“.

Anstatt uns hier auf die abstracten Eigenthümlichkeiten eines solchen Operations-Calculs tiefer einzulassen, erwähnen wir lieber einige Anwendungen.

Jede Identität, die eine unbestimmte Grösse u enthält, kann durch „Verallgemeinerung“ in eine Identität übergeführt werden, welche eine willkürliche Function enthält, die also einen erheblich erweiterten Inhalt besitzt. Dies Princip wird im Besonderen angewandt auf die Theorie der bestimmten Integrale, und man kann nicht leugnen, dass der Verfasser

auf diesem Wege zu einer Reihe theils bekannter, theils neuer, merkwürdiger Relationen gelangt, deren Herleitung nach den sonstigen Methoden sehr viel mehr Mühe verursacht.

Die Integration linearer Differentialgleichungen (mit constanten oder auch variablen Coefficienten) kann auf die Werthbestimmung solcher Summenausdrücke, wie sie oben erwähnt wurden, zurückgeführt werden; man kann bald erkennen, dass es gerade die Theorie der linearen Differentialgleichungen gewesen ist, die den Verfasser zu seiner Symbolik geführt hat.

Erweist sich so die Methode des Verfassers als eine heuristisch recht fruchtbare, so ist freilich einzuwenden, dass die Anwendungen wesentlich formaler Natur sind. Ueber den Giltigkeitsbereich der erzielten Formeln, über die Einschränkungen, denen die vorkommenden Functionen genügen müssen, damit z. B. die resultirenden Reihen-Entwickelungen convergiren, differenzirbar sind u. dergl., erfahren wir keinen Aufschluss.

Es wäre sehr zu wünschen, dass die heutzutage so weit ausgebildete Functionentheorie die unstreitig sinnreichen Ansätze des Verfassers in der angedeuteten Richtung ergänzte. _____ W. FRANZ MEYER.

W. KILLING. **Einführung in die Grundlagen der Geometrie.** Erster Band. Paderborn. Schöningh. 1893. X und 357 Seiten.

Mit Recht sagt der Verfasser in der Vorrede: „Es trifft sich sehr schön, dass der vorliegende Band gerade zum hundertjährigen Geburtstage Lobatschewsky's erscheinen kann.“

Denn trotz der wichtigen und weitgreifenden Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, welche nun schon Jahrzehnte zurückreichen, gab es noch kein* Werk, welches diese neue Disciplin der Mathematik im Zusammenhange behandelt hätte. Und doch ist hierbei nicht nur die Fachwissenschaft interessirt, sondern auch die Pädagogik, die Philosophie, die Naturwissenschaft. Wer will andererseits leugnen, dass gerade über die Grundbegriffe und Ziele dieses Wissenszweiges, über das Wesen der nicht-euklidischen Geometrie, des mehrdimensionalen Raumes, die seltsamsten Missverständnisse, sogar bei sonst sehr nüchternen Leuten, weit verbreitet sind?

Freilich dürfte der Grund für die bezeichnete Lücke in der Literatur wohl darin zu finden sein, dass einer gesammelten Darstellung des Gegenstandes weit erheblichere Schwierigkeiten entgegenstehen, als bei irgend einem anderen Gebiete. Einmal ist es nämlich nicht leicht, ein bestimmtes Maass von Vorkenntnissen für den Leser zu präcisiren, insofern aus Geometrie und Analysis Sätze und Begriffe zu entlehnen sind, welche keineswegs zu den Elementen gehören.

* Das neuerdings erschienene Buch von Herrn Veronese verfolgt wesentlich andere Ziele.

Der Verfasser hat sich bemüht, dem Leser das Verständniss des oft schwierigen Textes möglichst zu erleichtern; einmal wird jeder Gegenstand von principieller Bedeutung von den verschiedensten Punkten aus beleuchtet, sodann wird am Schlusse jedes Hauptabschnittes ein fasslicher Ueberblick über die gewonnenen Ergebnisse gegeben. Auch das den Schluss bildende Literaturregister ist sehr dankenswerth.

Die Darstellung des Textes ist im Ganzen anzuerkennen, wenn sie auch, wie es dem Referenten scheinen möchte, vielfach klarer sein dürfte.

Der Stoff wird auf vier grössere Abschnitte vertheilt, welche der Reihe nach die Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen, die projective Geometrie, den mehrdimensionalen Raum und die Clifford-Klein'schen Raumformen behandeln.

Der Ausgang ist, wie sich erwarten lässt, das sogenannte elfte Axiom Euklid's, was indessen bei Euklid selbst als eines (das fünfte) seiner Postulate (*αἰτήματα*) auftritt. Diese (fünf) Postulate werden wörtlich mitgetheilt, leider in deutscher Uebersetzung. Mag das aus Rücksicht auf Nicht-Kenner des Griechischen geschehen sein, warum muthet der Verfasser einem solchen Leser wenige Zeilen später zu, unter dem *ἄλληλα ε'* eben dieses fünfte Postulat zu verstehen? Es hätte doch wohl auch auf die verschiedenen, in wesentlichen Punkten voneinander abweichenden Euklid-Ausgaben, denen ja in der neuen kritischen Ausgabe von Heiberg Rechnung getragen ist, einige philologische Rücksicht genommen werden sollen.

Es wird nöthig sein, den Leser wenigstens mit den Grundideen des Ganzen bekannt zu machen.

Euklid beweist den Satz der Ebene: Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, und die Summe der beiden inneren, an derselben Seite gelegenen Winkel zwei Rechte beträgt, so sind sie parallel, das heisst, sie können sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag. Die Umkehrung konnte er jedoch nicht beweisen, und nahm sie daher als das obige Postulat auf.

Alle Versuche, die seither gemacht wurden, diese Umkehrung zu beweisen, das heisst, sie aus den übrigen Voraussetzungen Euklid's herzuleiten, haben sich als unzulänglich erwiesen.

Man wird somit darauf geführt, die Begriffe der Euklid'schen Geometrie durch andere Begriffe zu ersetzen, für welche ebenfalls alle übrigen Euklid'schen Voraussetzungen gelten, das fünfte Postulat aber nicht mehr.

Es gelingt das in mehrfacher Weise, z. B., wenn man statt der Geraden der Ebene die kürzesten Linien einer Fläche constanter negativer Krümmung zu Grunde legt: die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt dann weniger als zwei Rechte. Es ist das die Lobatschewsky'sche

„Raumform“. Während aber diese noch die Annahme Euklid's festhält, dass die Gerade unendlich sei, kann man auch hiervon abstrahiren. Es bieten sich dann zwei Möglichkeiten: entweder gehen alle von einem Punkte ausgehenden „Geraden“ noch durch einen zweiten Punkt (wie z. B. die Grosskreise auf einer Kugel) oder nicht, dem entsprechend gilt die Riemann'sche resp. Klein'sche Raumform.

Ein ansehnlicher Theil der Sätze Euklid's gilt für alle diese Raumformen gemeinsam, erst dann entwickelt sich jede selbstständig. Theoretisch sind sie alle gleichberechtigt, die Naturerklärung wird allerdings das Euklid'sche System als das einfachste bevorzugen.

Alle die bisher entwickelten Gesetze — auch die noch nicht erwähnte Begründung der projectiven Geometrie — haften an einem begrenzten Raumgebiet, und die Frage steht noch gänzlich offen, wie sich die einzelnen Theile des Raumes zu einem Ganzen vereinigen. Um dies zu übersehen, betrachte man die Bewegung eines starren Körpers K . Für jeden, mit K durch weitere Körper verbundenen Körper K' wird eine neue Bewegung vermittelt. Nimmt man nun in üblicher Weise an, dass diese neue Bewegung von der Art der Verbindung beider Körper K , K' unabhängig sei, so ergibt sich nichts Neues; nimmt man aber mit Clifford und Klein das Gegentheil an — was zunächst auffallend, aber theoretisch berechtigt ist — so wird man zu einer grossen Mannigfaltigkeit neuer Raumformen geführt, deren Mechanik allerdings noch wenig studirt worden ist.

Besonders lesenswerth, gerade für Schulmänner, scheint dem Referenten der dritte Abschnitt über den mehrdimensionalen Raum. Ohne sich auf metaphysische Speculationen einzulassen, begnügt sich der Verfasser mit dem Nachweis, dass ein solcher Raum begrifflich möglich und gerechtfertigt sei, und ausserdem für den Mathematiker ein methodisch äusserst werthvolles Instrument.

Gleich im Anfange, wo es sich um Feststellung des Begriffes „Dimension“ handelt, wird der Leser mit den neueren scharfsinnigen Untersuchungen von G. Cantor, Netto, Peano u. A. bekannt gemacht, wonach mit Leichtigkeit zwei Räume verschiedener Dimension punktweise ein-eindeutig aufeinander abgebildet werden können — wenn man nur auf die Stetigkeit der Zuordnung Verzicht leistet.

Im Uebrigen bemüht sich der Verfasser mit Erfolg, den mannigfachen Vorurtheilen und falschen Ansichten, die gerade dieses Gebiet zu einem Tummelplatze von Streitigkeiten von jeher gemacht haben, entgegen zu treten.

Der zweite Band des Werkes, der demnächst erscheinen wird, wird einmal auf die Begründung der projectiven Geometrie näher eingehen,

sodann aber vor Allem auf die wichtigen Beziehungen der nicht-euklidischen Geometrie zur Theorie der continuirlichen Transformations-Gruppen. Aus dem, was bereits hier über den letzteren Gegenstand vorgebracht wird, möge herausgegriffen werden, welche Wichtigkeit die Erforschung der Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe (der Ebene und des Raumes) für die Bewegung innerhalb der nicht-euklidischen Räume besitzt. Durch neuere Publicationen ist ja die Kenntniss dieser Untergruppen wesentlich erweitert worden.

W. FRANZ MEYER.

K. ROHN und E. PAPPERITZ. **Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** In zwei Bänden. Erster Band. Leipzig. Veit & Comp. 1893. XVIII und 381 Seiten.

Wir besitzen eine Reihe von Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, deren jedes eigenthümliche Vorzüge hat, und von denen doch keines als ausschliessliche Grundlage des Unterrichtes dienen könnte.

Man darf den Verfassern — von denen sich insbesondere der Erstgenannte durch eine Reihe scharfsinniger, echt geometrischer Arbeiten bereits rühmlichst bekannt gemacht hat — nur zu Dank verpflichtet sein, wenn sie dem bezeichneten Mangel abhelfen wollen.

Die darstellende Geometrie nimmt heutzutage eine eigenartige Stellung ein. Auf der einen Seite soll sie in hergebrachter Weise die praktischen Bedürfnisse der Techniker befriedigen, sodann aber ist sie auch bestimmt — und selbst die Universitäten verschliessen sich dieser Einsicht immer weniger — die Studirenden der Mathematik und Naturwissenschaften in der Raumanschauung auszubilden, und speciell den ersteren das Verständniss der Geometrie der Lage zu erleichtern.

Diesen drei Momenten, dem praktischen, dem pädagogischen und dem wissenschaftlichen hat ein Lehrbuch der gedachten Disciplin zugleich gerecht zu werden, ein solches hat demnach nicht gewöhnliche Schwierigkeiten zu überwinden, um so mehr, wenn es auch ein selbstständiges Ganzes sein will.

Was den praktischen Gesichtspunkt angeht, so ist vor Allem zu betonen, dass die zahlreichen Aufgaben mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit durchgeführt sind; bei vielen sind mehrere Lösungen angegeben. Dabei ist ein Hauptwerth darauf gelegt worden, dass die zeichnerische Behandlung eine zweckentsprechende ist, das heisst, dass die Ergebnisse bequem und deutlich vor Augen liegen.

Die directen Anwendungen auf die Technik sind wohl für den zweiten Band vorbehalten worden.

Der pädagogische Charakter des Buches zeigt sich in dem Bestreben, die darstellende Geometrie als directe Fortsetzung der schulmässigen

Stereometrie erscheinen zu lassen. Die Entwicklung der Raumanschauung ist so sehr ein Hauptziel des Werkes, dass die Figuren des Textes mehr eine Beihilfe sein sollen, wenigstens möchte sich Referent so die Thatsache zurechtlegen, dass der Maasstab der Figuren, verglichen z. B. mit französischen Werken, ein stark reducirter ist. Im Uebrigen ist die Ausstattung tadellos.

Die eingeführten Bezeichnungen und Kunstausdrücke erfreuen sich einer gesunden Systematik. Mit Einzelnem ist Referent freilich nicht einverstanden, z. B. mit der Worthildung „Paralldrehung“ (S. 56), für die nicht einmal eine formelle Definition gegeben wird.

Der Styl des Textes kann im Ganzen nur als präcis erklärt werden, wenn er auch von einer gewissen Trockenheit nicht völlig freizusprechen ist.

Von dem pädagogischen Moment ist das wissenschaftliche kaum zu trennen. Auch hier tritt das ausgesprochene Bestreben hervor, ausschliesslich im Raume selbst zu operiren, das heisst, beispielsweise gleich im Anfange die Hilfssätze über Aehnlichkeit und Affinität ebener Figuren durch Projection im Raume herzuleiten. Freilich mag dabei die wissenschaftliche Systematik auf Kosten der Pädagogik ausgebildet sein, denn Referent möchte bezweifeln, ob sich ein Schüler, ohne Anleitung eines sehr guten Vortrages, durch den gemeinten ersten Abschnitt durcharbeiten würde.

Besser würde er vermuthlich mit dem zweiten Abschnitte, der Orthogonalprojection, beginnen und sich diese soweit zu eigen machen, bis er ohne die Heranziehung der Aehnlichkeit und Affinität nicht mehr weiter kommt. Sehr gefallen hat dagegen dem Referenten der Schluss des zweiten Abschnittes, der eine Reihe wichtiger stereometrischer Aufgaben durch Projectionsmethoden, also wirklich constructiv löst, während beim elementaren Unterrichte die Constructionen nur gedacht werden.

Der dritte Abschnitt bringt auf wenigen Seiten, und in anregender Form, das Wichtigste über die ebenflächigen Gebilde, und dringt bereits bis zu den Schlagschatten und Eigenschatten der Vielfache vor.

Der folgende vierte Abschnitt handelt von der Centralprojection einer Ebene auf eine andere mit Einschluss des Grenzfalles, dass beide Ebenen coincidiren (Perspectivität in einer Ebene).

Die harmonische Lage von vier Punkten wird, wie es hier die Systematik verlangt, begründet durch Centralprojection einer Strecke, ihres Mittelpunktes und des unendlich fernen Punktes, und erst hieraus die Eigenschaften des vollständigen Vierseits hergeleitet.

Schon in diesem Abschnitt und noch mehr in den folgenden nimmt das Buch, abgesehen von einigen Einschaltungen über Schatten u. dergl., mehr und mehr den Charakter eines Lehrbuches der neueren Geometrie

an, unterscheidet sich aber von den üblichen Werken darüber zu seinem Vortheile darin, dass es einmal in zweckmässiger Weise die älteren mit den neueren Methoden combinirt, andererseits sich sehr gründlich mit dem Unendlich-Kleinen abfindet.

Der erstgenannte Gesichtspunkt tritt besonders deutlich in dem nächsten, wichtigen Abschnitte über die Kegelschnitte hervor, die in erster Linie als Centralprojectionen eines Kreises, und erst hinterher als Erzeugnisse projectiver Grundgebilde auftreten. Den Ausgang bildet die Aufgabe, zwei Kreise in einer Ebene perspectiv aufeinander zu beziehen. Der Grenzfall, dass beide Kreise zusammenfallen, führt sofort zur Theorie von Pol und Polare, dem Pascal'schen Sechseck, und so fort.

Geht man durch Drehung in den Raum zurück, so gelangt man in Kürze zu den metrischen Eigenschaften eines beliebigen Koiskegels (Symmetrie-Ebenen, Wechselschnitte u. dergl.), und von hier aus zu den Eigenschaften der Kegelschnitte.

Besondere Erwähnung verdient die elegante Behandlung der Krümmung der Kegelschnitte.

Bei Gelegenheit der stereographischen Projection hätte wohl auf die schönen Anwendungen auf Kartenprojection, Krystallographie u. A. hingewiesen werden können.

Nunmehr folgt ein Abschnitt über die Curven der Ebene und des Raumes im Allgemeinen (die Schreibweise des Textes: „Ebene und Raumcurven“ scheint nicht gerade empfehlenswerth zu sein). Als Grundlage dient eine knappe (in manchen Punkten wohl zu knappe) Erörterung der mit dem Unendlich-Kleinen zusammenhängenden Begriffe.

Ein letzter Abschnitt beschäftigt sich eingehend mit Kugel, Cylinder und Kegel, ihren Projectionen und Durchdringungen, Eigen- und Schlagshadowen.

Das Buch birgt eine so ausserordentliche Fülle von Stoff auf verhältnissmässig begrenztem Raume, dass es dem Referenten, falls er den Vorwurf parteilicher Liebhaberei vermeiden will, nicht möglich ist, auf die vielen Fortschritte hinzuweisen, die sich im Einzelnen vorfinden. Darüber kann ja auch nur mit Fug Jemand urtheilen, der das Buch seinem Unterrichte in darstellender Geometrie zu Grunde gelegt und es jahrelang durchgeprüft hat.

Aus persönlichen Mittheilungen weiss der Referent, dass so manche ältere Vertreter der Geometrie in wesentlichen Punkten anderer Meinung sind, als die Verfasser. Aber gerade diese Eigenartigkeit des Werkes veranlasst den Referenten, dasselbe, seiner unmassgeblichen Meinung nach, für eine Zierde der geometrischen Literatur zu erklären. Auf den zweiten Band darf man mit Recht gespannt sein.

W. FRANZ MEYER.

Die Wissenschaft und ihre Sprache. Eine zeitgemässe Abhandlung von Prof. K. HULLMANN, Grossherzogl. Oldenburgischer Oberlehrer der Mathematik z. D. Leipzig 1894. Ferdinand Hirt & Sohn. 40 S.

Der Verfasser wünscht, man solle, ebenso wie in der Umgangssprache, auch in der Sprache der Wissenschaft jedes überflüssige Fremdwort vermeiden. Wir sind längst der gleichen Ueberzeugung und glauben in unseren Schriften ziemlich ausschliesslich deutsche Ausdrücke zur Verwendung gebracht zu haben. Herr Hullman ist nicht Reindeutschler um jeden Preis. Er sieht ein, dass gewisse Fremdwörter kaum zu entfernen sein dürften, nachdem sie, und sie allein, bestimmte wissenschaftliche Begriffe festzulegen erfunden sind. Wie wollte man beispielsweise „partielle Differentialgleichungen“, wie „complexe Grössen“, wie „Determinanten“ verdeutschen? Aber gerade diese gezwungene Folgewidrigkeit bringt es mit sich, dass über das Maass des Gebotenen und des Erlaubten verschiedene Meinungen sich bilden können. Manche Verdeutschung des Herrn Hullmann sagt uns sehr zu, andere scheinen uns weit über das Ziel hinauszuschliessen. Doch gleichviel, der Grundgedanke der kleinen Streitschrift — denn als solche ist sie zu bezeichnen — ist gewiss richtig und verdient auch die Beachtung derer, die es weniger streng mit unserer Sprache nehmen. Wir glauben und hoffen, dass schliesslich eine Einigung sich dahin werde erzielen lassen, die deutsche Sprache um so unvermengter mit fremden Beigaben zu gebrauchen, je einfacher die Gegenstände sind, welche man behandelt. Die Anfänge der Zahlenlehre, wie der Raumlehre, können und sollen ohne Fremdwörter gelehrt werden. Je höher dagegen der Gegenstand einer Abhandlung oder eines Buches ist, je beschränkter in Folge davon sein Leserkreis im eigenen Lande, je nothwendiger es für die Druckschrift wie für die Wissenschaft wird, ihr in der ganzen wissenschaftlichen Welt Eingang zu verschaffen, um so unentbehrlicher werden Kunstausdrücke aus den alten Sprachen sein, die keiner neuen Sprache und deshalb allen angehören.

CANTOR.

Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. Von WILHELM WUNDT. Zwei Bände. Zweiter Band. Methodenlehre. Erste Abtheilung. 2. umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1894. Bei Ferdinand Encke. XII und 590 S. Zweiter Abschnitt. Von der Logik der Mathematik. S. 87—259.

In der 1. Auflage von 1883, welche wir im XXIX. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 196—198) angezeigt haben, füllte die Logik der Mathematik 145 Seiten. In der neuen Auflage ist der gleiche Abschnitt auf 172 Seiten angewachsen. Allerdings ist die Zunahme nur eine scheinbare und durch etwas weitläufigeren Druck bedingt. Die Veränderungen, welche bei der Umarbeitung des Werkes die Kapitel erfahren

haben, welche wir heute wie 1883 als diejenigen betrachteten, über welche allein wir uns ein Urtheil gestatten, sind ganz minimale, und so gilt auch heute noch, was wir über die erste Auflage sagten. CANTOR.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bearbeitet von O. FORT und O. SCHLÖMICH. Erster Theil. Analytische Geometrie der Ebene. Von O. FORT, weil. Professor am königl. sächs. Polytechnikum zu Dresden. Sechste Auflage. Besorgt von R. HEGER in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1893. Bei B. G. Teubner. VIII und 264 S.

Vier Auflagen dieser bekannten analytischen Geometrie der Ebene hat der ursprüngliche Verfasser herausgeben dürfen, zwei Auflagen besorgte dessen Nachfolger, im Ganzen von dem einmal vorgezeichneten und durch 30jährige Brauchbarkeit bewährten Plane kaum abweichend, wenn auch im Einzelnen ergänzend und neu bearbeitend. 30 Jahre bringen eben eine gewaltige Aenderung der geistigen Höhenverhältnisse hervor. Was man damals dem angehenden Polytechniker noch nicht zuzumuthen wagte, darf und muss man ihm heute bieten. Das hat Herr Heger eingesehen, und dem entsprechend hat er gehandelt. In die neueste 6. Auflage hat er Einiges aus der projectiven Geometrie hineinverarbeitet. Ob er daran Recht that, darüber lässt sich streiten. Praktisch wird die Sache sich so verhalten, dass für jene Anstalten, an welchen neben der analytischen Geometrie auch synthetische Geometrie im neueren Sinne des Wortes gelehrt wird, jene neuen Paragraphen theils überflüssig, theils ungenügend erscheinen, während man für den Gebrauch an anderen Anstalten, die jenen Doppelunterricht nicht kennen, das entgegengesetzte Urtheil fällen wird.

CANTOR.

Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen von Dr. H. GANTER, Professor an der Cantonschule in Aarau, und Dr. F. RUDIO, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 54 Figuren im Text. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1894. Bei B. G. Teubner. VI und 168 S.

Bei Anzeige der ersten Auflage im XXXV. Band dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 37—38) wünschten wir dem hübschen Buche zahlreiche Käufer und Leser. An Beiden hat es ihm nicht gefehlt, denn, wenn bei der Unzahl ähnlicher Schriften, welche jährlich vermehrt die Literatur des Gegenstandes ausmachen, nach sechs Jahren bereits ein Neudruck nothwendig wird, so ist dieses ein Zeugniß für den lebhaften Beifall, den das Buch verdientermassen gefunden hat. Die Verfasser glaubten deshalb ihrem Plane getreu bleiben zu sollen und Form wie Inhalt

im Ganzen so, wie sie in der ersten Auflage waren, gestalten zu müssen. Die Verbesserungen beziehen sich nur auf einzelne Ausdrücke und Schlussfolgerungen, die noch klarer und strenger geworden sind. Wir zweifeln nicht daran, dass der Vertrieb auch der zweiten Auflage ein günstiger sein werde.

CANTOR.

Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Theil. Integralrechnung. Von Dr. M. STEGEMANN, weil. Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. Fünfte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage mit 137 Figuren im Texte. Herausgegeben von Dr. LUDWIG KIEPERT, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Hannover. Hannover 1894. Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. XVI und 597 S.

Die im XXXI. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 227 bis 228) empfohlene vierte Auflage bestand aus 446 Seiten. Die Vermehrung besteht demnach aus 151 Seiten oder reichlich einem Drittel. Die Umarbeitung ist eine in der That vollständige, wie das Titelblatt es ausspricht. Eine grundlegende Abänderung ist beispielsweise folgende. In der 4. Auflage waren zuerst sämtliche Integralformeln abgeleitet, worauf die geometrischen Anwendungen folgten. In der 5. Auflage dagegen sind zuerst die einfachsten Integrationen vorgenommen. Diese sind sodann geometrisch angewandt. Hierauf folgen erst die Integrationen gebrochener rationaler, irrationaler und transcendenten Functionen.

Weshalb ist diese Umordnung eingetreten? Die Vorrede giebt kurze Auskunft darüber. Sie sagt uns, wenn auch nicht mit den von uns gebrauchten Worten, Herr Kiepert habe die gleiche Erfahrung gemacht, die sich in jeder Vorlesung über Differential- und Integralrechnung wiederholt, dass es in der ganzen Mathematik für Lehrer und Lernende nichts Langweiligeres giebt, als die Ableitung sämtlicher Integralformeln, und dass es darum eine didaktische Nothwendigkeit ist, diesen Gegenstand durch interessantere Zwischenbetrachtungen zu unterbrechen, mag auch die dogmatische Einheit darunter leiden. Wir sind darin mit Herrn Kiepert durchaus gleicher Meinung, gehen aber noch einen ziemlichen Schritt über ihn hinaus. Dem Beispiele folgend, in welchem bewährte Lehrer unser Vorbild waren, nehmen wir die einfachen Integrationen mit den Differentiationen zugleich vor und ersparen dadurch Zeit und Langeweile. Die Vorlesung zerfällt somit allerdings nicht in einen ersten ausschliesslich der Differentialrechnung und einen zweiten ausschliesslich der Integralrechnung gewidmeten Abschnitt, die Zeichen d und \int kommen, sobald die Einleitung abgehandelt ist, in jeder Vorlesung gemeinschaftlich vor, aber Verwirrung entsteht dadurch keineswegs, vielmehr hilft das Integriren fortwährend die Differentiationsformeln einzuprägen und umgekehrt. Aehnlich,

denken wir, sollte auch ein wesentlich didaktische Zwecke verfolgendes Lehrbuch verfahren. Vielleicht entschliesst sich Herr Kiepert, in einer nächsten Auflage die beiden Bände in der angedeuteten Weise ineinander zu verarbeiten. — Wir haben ausführlicher von einer Veränderung gesprochen, welche die 5. von der 4. Auflage unterscheidet. Wolten wir die einzelnen Kapitel durchgehen, so wären in jedem Abänderungen, wir können getrost sagen, Verbesserungen hervorzuheben. Gerade dadurch kennzeichnet sich aber die 5. Auflage als Vorbote einer künftigen 6., denn das Kiepert'sche Lehrbuch wird in der neuen Gestaltung nur noch mehr an den Universitäten sich einbürgern, ohne seine Verwendbarkeit an technischen Hochschulen einzubüssen.

CANTOR

The collected mathematical papers of HENRY JOHN STEPHEN SMITH, M. A., F. R. S., late Savilian Professor of geometry in the university of Oxford, edited by J. W. L. GLAISHER, Sc. D., F. R. S., Fellow of Trinity Colloge, Cambridge. With a mathematical introduction by the editor, biographical sketches and a portrait. In two volumes. Oxford at the Clarendon press 1894. XCV, 603 and VII, 719 pages.

„Wenn 13 Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von 16 Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades bilden.“ So lautete der wesentlichste Satz einer im Jahre 1866 von der Berliner Akademie ausgeschriebenen Preisfrage. Unter vier einlaufenden Bearbeitungen wurden im Juli 1868 in Folge eines von Kummer erstatteten Berichtes zwei als gleich werthvoll mit je der Hälfte des ausgesetzten Preises belohnt. Die Verfasser waren Herr Hermann Kortum und Henry John Stephen Smith. Man wird kaum einen Irrthum begehen, wenn man behauptet, damals sei der Name des am 2. November 1826 geborenen englischen Mathematikers zum ersten Male in Deutschland bekannt geworden. Nicht als ob Smith fast 42 Jahre alt geworden wäre, ohne einen Beweis seiner schöpferischen Geisteskraft der Oeffentlichkeit zu übergeben, aber nahezu Alles, was aus seiner Feder bis dahin gedruckt wurde, steht in den *Proceedings of the Royal Society*, in den *Proceedings of the London mathematical Society*, in den *Reports of the British Association*, und diese haben sämmtlich auf dem europäischen Festlande, in Deutschland wie nicht minder in den anderen Ländern, einen äusserst beschränkten Leserkreis. Das zeigte sich am Deutlichsten, als die Pariser Akademie als Preisfrage für das Jahr 1882 die Zerlegung einer Zahl in fünf ganzzahlige Quadrate forderte und dabei die Bewerber auf Lehrsätze von Eisenstein hinwies, welche 1847 ohne Beweis im XXXV. Bande von Crelle's Journal ausgesprochen worden waren. Was

nämlich die Pariser Akademie 1882 verlangte, war seit 15 Jahren vorhanden. In den Proceedings of the Royal Society von 1867 stand die Abhandlung von Smith: *On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates*, und in ihr war, allerdings wieder nicht mit ganz erschöpfendem Beweise, die Zerlegungsaufgabe gelöst. Wollte also die Akademie nur die letzte Lücke ausgefüllt haben, so musste in dem Preisausschreiben neben Eisenstein auch Smith genannt werden, und dass dieses nicht geschah, verbürgt, dass man die Abhandlung von Smith nicht kannte. Die Bestätigung liefert ausserdem ein im Februar 1882 zwischen Smith und Herrn Hermite geführter Briefwechsel. Smith machte darin auf seine Zerlegung sowohl in fünf als in sieben Quadrate aufmerksam, Herr Hermite erklärte mit Bedauern, kein Mitglied der mit der Vorbereitung der Preisfrage betrauten Commission habe von jenen Arbeiten eine Ahnung besessen. Smith beeilte sich nun, die noch ausstehenden Beweise genauer auszuführen und wurde noch gerade bis zu dem für die Einreichung der Bewerbungen gestellten Zeitpunkt damit fertig. Am 2. April 1883 fand die Preisverkündigung statt. Von drei eingereichten Bearbeitungen der gestellten Aufgabe wurden zwei als des Preises gleich würdig erkannt und gekrönt. Ihre Verfasser waren Smith und ein damals noch blutjunger Student in Königsberg, Herr Minkowski. Smith hat diesen Tag nicht mehr erlebt. Der 9. Februar 1883 war sein Todestag. Wir haben in den beiden Preisschriften, welche erwähnt werden konnten, Muster aus scheinbar sehr weit voneinander entlegenen Gebieten des mathematischen Denkens kennen gelernt, und dennoch kann man sagen und hat der Herausgeber seiner Werke mit Recht gesagt, dass Smith vor allen Dingen Zahlentheoretiker war. Auch die geometrische Abhandlung ist als eine Uebersetzung algebraischer, wenn nicht zahlentheoretischer Gedanken auf die Curvenlehre anzusehen, wie der Berichterstatter über dieselbe vor der Berliner Akademie zum besonderen Lobe zu betonen in der Lage war. Zum Vortheil für ihren wissenschaftlichen Werth, sagte Kummer, lässt die Arbeit fast überall erkennen, dass der Verfasser zu seinen umfassenderen Untersuchungen durch algebraische Betrachtungen gelangt ist. Als Zahlentheoretiker ersten Ranges bewährte er sich in den fünf Berichten: *On the theory of numbers*, welche er 1859—1863 veröffentlichte. Es ist gewissermassen eine Zusammenstellung dessen, was seit Gauss und Legendre geleistet worden war, systematisch geordnet, mit Aufdeckung der da und dort noch vorhandenen Lücken, zum Theil mit deren Ausfüllung. Voller Beziehungen auf Zahlentheorie sind endlich auch die Arbeiten über elliptische Transcendenten, über Modulargleichungen, über Theta- und Omega-Functionen, mit welchen Smith sein Heimathsrecht auf noch einem mathematischen Gebiete bethätigte. Die letztgenannte Abhandlung brachte Smith in enge Verbindung mit Herrn Glaisher, und diesem die Ehre, die Schriften

des verstorbenen Freundes sammeln und herausgeben zu dürfen. Er hat sich dieser Ehre durch eine nach Form und Inhalt vortreffliche Einleitung würdig erwiesen. Es steht zu erwarten, dass die nunmehr in der schönen Ausstattung, welchen englischen Ausgaben zum regelmässigen Lobe gereichen, vereinigten Schriften des lange Zeit zu wenig bekannten hervorragenden englischen Mathematikers vielfach gelesen werden, vielfach als Anknüpfungspunkt für neue Forschungen dienen.

CANTOR.

Frontinus and his two books on the water supply of the city of Rome, A. D. 97. A Lecture delivered before the engineering students of Cornell University, February 2 d, 1894. By CLEMENS HERSCHEL, hydraulic engineer of New York, N. Y. Ithaca, N. Y. 1894. 40 pag.

Philologen und Mathematiker haben sich wiederholt mit Frontinus, dem berühmten, vielseitig schriftstellerischen Techniker des ersten nachchristlichen Jahrhunderts beschäftigt. Es konnte nicht fehlen, dass ihre Untersuchungen sich gegenseitig ergänzten, wenn gleich immer noch eine Lücke blieb. Beide waren nämlich nicht befähigt, den eigentlich wasserbautechnischen Inhalt der Bücher über die Wasserleitungen richtig zu würdigen, beziehungsweise einen sachgemässen Auszug aus ihnen zu veranstalten. Dieser Aufgabe hat nun Herr Herschel sich unterzogen, und wenn sein dem Drucke übergebener Vortrag auch in erster Linie für Fachgenossen des Wasserbaues bestimmt war, so ist er doch so allgemein verständlich gehalten, dass auch Laien auf jenem Gebiete ihn lesen können und gewiss gleich uns die Erläuterungen dankbar entgegennehmen werden.

CANTOR.

Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-historische Studie von Prof. FERDINAND JOS. OBENRAUCH. Fortsetzung. 20 S. Brünn 1894.

Den ersten Abschnitt haben wir Band XXXIX. (Histor.-liter. Abthlg. S. 187—188) angezeigt. In der uns heute vorliegenden Fortsetzung schildert der Verfasser Monge's mathematische Leistungen, soweit sie in dessen *Géométrie descriptive* enthalten sind. In Anmerkungen werden die Parallelen deutscher, besonders österreichischer Werke angegeben, welche dem Inhalte der einzelnen Kapitel bei Monge entsprechen. Ein noch zu erwartender dritter Abschnitt wird die *Applications de l'Analyse à la Géométrie* behandeln.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. März bis 30. April 1895.

Periodische Schriften.

- Sitzungsberichte der mathematischen Klasse der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 4. Heft. München 1894. Franz. 1 Mk. 20 Pf.
- Abhandlungen der mathem.-physik. Klasse der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 21. Bd. Leipzig, Hirzel. 27 Mk.
- Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. 61. Bd. Wien, Tempsky. 71 Mk.
- Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. 103. Bd. IIa. Ebendasselbst 4 Mk. 40 Pf.
- Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 29. Jahrgang. 3. und 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.
- Abhandlungen der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. 18. Bd. 4. Heft. Frankfurt a. M., Diesterweg. 12 Mk.
- Annalen der Schweizerischen meteorologischen Centralanstalt. Jahr 1892. Zürich, Fäsi & Beer. 18 Mk.
- Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 12. Bd. 1. Hälfte, redigirt von FRÖHLICH. Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. 4 Mk.
- Astronomische Beobachtungen und Resultate aus den Jahren 1890 und 1891, erhalten in Kaiserslautern auf der Privatsternwarte von FAUTH. Kaiserslautern, Gotthold. 15 Mk.
- Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 5 Heft, redigirt von KÖPCKE. Leipzig, B. G. Teubner. 80 Pf.
- Astronomische Arbeiten des kaiserl. königl. Gradmessungs-Bureaus. 6. Bd. Längenbestimmungen. Wien, Tempsky. 10 Mk.
- Meteorologisches Jahrbuch der deutschen Seewarte für das Jahr 1893. Hamburg, Friedrichsen & Co. 13 Mk.
- Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theils des preussischen Normalkalenders für 1896. Berlin, Verlag des statistischen Bureaus. 5 Mk.
- Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. LAMPE. 24. Bd. Jahrgang 1892. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

- Fortschritte der Physik im Jahre 1889. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 45. Jahrgang. I. Abtheilung. Braunschweig, Vieweg. 22 Mk. 50 Pf.
- Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. 5. Jahrgang. 1894. Herausgegeben von J. KLEIN. Leipzig, H. Mayer. 7 Mk.

Reine Mathematik.

- PUCHBERGER, E., Allgemeinerer Integration der Differentialgleichungen. 2. Heft. Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.
- SPECKMANN, G., Ueber unbestimmte Gleichungen. Dresden, Koch. 50 Pf.
- GUNDELFINGER, S., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Herausgegeben von F. DINGELDEY. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.
- EBERHARD, V., Die Grundgebilde der ebenen Geometrie. 1. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. 14 Mk.
- BÜTZBERGER, F., Kurzer Lehrgang der ebenen Trigonometrie mit vielen Anwendungen. Bern, Wyss. 1 Mk. 20 Pf.
- HOLZMÜLLER, G., Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 3. Theil (Schluss). Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk. 80 Pf.
- WECKWERTH, M., Sammlung von Aufgaben aus der niederen Mathematik. Leipzig, Seemann. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

- HERZ, N., Kepler's Astrologie. Wien, Gerold. 3 Mk.
- AMBRONN, L., Breitenbestimmungen zur See; im Auftrag der Direction der deutschen Seewarte bearbeitet. Hamburg, Friedrichsen & Co. 3 Mk.

Physik und Meteorologie.

- HELMHOLTZ, H. v., Wissenschaftliche Abhandlungen. 3. Bd. Leipzig, Barth. 18 Mk.
- HERTZ, H., Gesammelte Werke. 1. und 2. Bd. Ebendasselbst. 18 Mk.
- RECKLINGHAUSEN, M. v., Ueber das neue Quecksilberthermometer für Temperaturen bis 550° C. (Dissertation). Heidelberg, Hörning. 80 Pf.
- KOLBE, B., Einführung in die Elektrizitätslehre. 2. Bd. Dynamische Elektrizität. München, Oldenbourg. 3 Mk.
- BRANDT, G., Schulphysik für Gymnasien. Erster Theil für Obertertia und Untersecunda. Berlin, Simion. 1 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1894.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. On a special conformation of areas. A. R. Forsyth. Quart. Journ. mat. XXVI, 145.

Absolute Geometrie.

2. Sur le principe fondamental de la géométrie Riemannienne. De Tilly. Mathesis Série 2, IV, 180.
3. Zur Volumbestimmung in der Lobatschewsky'schen Geometrie. M. Simon. Mathem. Annal. XLII, 471.

Analytische Geometrie der Ebene.

4. Paradoxe dans la théorie des développées. Barisien. Mathesis Série 2, IV, 250. — P. Mansion *ibid.* 250.
5. Ueber geradlinige Asymptoten algebraischer Curven. A. Himstedt. Grun. Archiv 2. R. XII, 357.
6. Geometrische Oerter bei Curvensystemen. H. Ekama. Grun. Archiv 2. R. XII, 23.
7. Enveloppe d'une courbe plane quelconque qui se déforme d'une manière donnée. Absolonne. Mathesis Série 2, IV, 256.
8. Sur une famille remarquable de courbes. G. Pirondini. Mathesis Série 2, IV, 14.
9. Sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur les deux côtés d'un angle quelconque. J. M. Mathesis Série 2, IV, 129.
10. Sur deux paraboles semicubiques. H. Brocard. Mathesis Série 2, IV, 124.
11. Propriétés de la cissoïde. Retali. Mathesis Série 2, IV, 167.
12. Sur la courbe $(x - a)y^2 = (y - b)x^2$. Morel. Mathesis Série 2, IV, 196.
13. Sur la Kreuzcurve comme lieu des centres de courbure d'hyperboles. Barisien. Mathesis Série 2, IV, 47. — Droz-Farny *ibid.* 48. — Retali *ibid.* 49.
14. Ueber eine neue geometrische Construction der Lemniskate. E. Schultz. Grun. Archiv 2. R. XII, 318.
15. Cuspidal quartics. Herb. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXVI, 5.
16. Propriétés du limaçon de Pascal. Keelhoff, Brocard, Barisien etc. Mathesis Série 2, IV, 206.
Vergl. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

17. Zu den Grundformeln der analytischen Geometrie. O. Stolz. Mathem. Annal. XLIII, 591.
18. Conditions pour qu'un système de trois axes soit trirectangle. F. Dauge. Mathesis Série 2, IV, 85.
19. On the expansion of the coordinates of a point upon a tortuous curve in terms of the arc. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXVI, 27.
20. Zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XLII, 497.
21. Ueber eine Schaar von Curven auf einer Tangentenfläche. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 354.
22. Un problème sur les courbes gauches. Balitrand. Mathesis Série 2, IV, 159.

23. Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand. E. Cesaro. *Mathesis Série 2, IV, 265.*
Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

B.**Bernoulli'sche Zahlen.**

24. Independent Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. R. Haussner. *Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 183.*

Bestimmte Integrale.

25. Sommination de deux séries. Cristesco et Decamps. *Mathesis Série 2, IV, 71.*

C.**Combinatorik.**

26. Dans une pile de boulets rectangulaire quel est le nombre des points de contact de deux boulets. Soons. *Mathesis Série 2, IV, 72.*
Vergl. Substitutionen.

Cubatur.

- Vergl. Absolute Geometrie 3. Tetraeder 254.

Cylinderfunctionen.

27. Ueber die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen nebst einer Anwendung. J. H. Graf. *Mathem. Annal. XLIII, 136.*

D.**Determinanten.**

28. Ueber eine Analogie des Laplace'schen Determinantensatzes. E. Liers. *Grun. Archiv. 2. R. XII, 352.*
29. Sur les Wronskiens. J. Neuberg. *Mathesis Série 2, IV, 165.*
30. Théorème sur les déterminants. J. Neuberg. *Mathesis Série 2, IV, 251.*
31. Ueber das Product zweier Determinanten. C. Weltzien. *Mathem. Annal. XLII, 598.*
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen.

Differentialgleichungen.

32. Ueber die Integrirbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano. Gust. Mie. *Mathem. Annal. XLIII, 553.*
33. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Ad. Kneser. *Mathem. Annal. XLII, 409.*
34. Zur Integration der Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. J. Horn. *Mathem. Annal. XLII, 215.*
35. Ueber die Darstellung der Fundamental-Invarianten eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Grünfeld. *Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 237.*
36. Ueber das Quadrat des Integrals einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. W. Heymann. *Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 314.*
37. Ueber die linearen Relationen zwischen den zu verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Riemann'schen Differentialgleichung. O. Bolza. *Mathem. Annal. XLII, 526.*
38. Bemerkung zu dem Existenzbeweis der Integrale partieller Differentialgleichungssysteme. L. Königsberger. *Mathem. Annal. XLII, 485.*
39. Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Aug. Weiler. *Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 355.*
40. On the partial differential equation $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V = 0$. Cayley. *Quart. Journ. math. XXVI, 1.*
Vergl. Invariantentheorie 154.

Dreiecksgeometrie.

41. Analytische Entwicklung von Gleichungen über drei in demselben Punkte sich schneidende Transversalen eines Dreiecks. Jos. Kiechl. *Grun. Archiv. 2. R. XII, 411.*
42. Erreur d'une conclusion tirée de l'équation d'un lieu. V. Retali. *Mathesis Série 2, IV, 39.* [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 26.]

43. Notes sur la géométrie du triangle. E. Lemoine. Mathesis Série 2, IV, 153.
44. Sur la transversale d'un triangle. J. Wasteeels. Mathesis Série 2, IV, 158.
45. Longueur de la bissectrice dans un triangle. E. Lauvernay. Mathesis Série 2, IV, 40. — L. Meurice *ibid.* 92.
46. Théorème sur les symédianes d'un triangle. Sollertinsky. Mathesis Série 2, IV, 166.
47. Dans tout triangle, le produit de la plus courte distance entre deux des cercles exinscrits par leur plus grande distance est égal au carré du côté opposé à l'angle du triangle relatif au troisième cercle exinscrit. E. Lemoine. Mathesis Série 2, IV, 148.
48. Rapport de la surface d'un triangle avec celle d'un autre construit avec l'aide des bissectrices intérieures. Listray. Mathesis Série 2, IV, 258. — Droz-Farny *ibid.* 259. — Déprez *ibid.* 260. — E. Lemoine *ibid.* 261.
49. Sur un triangle d'aire maximum. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 233.
50. Triangle construit en faisant tourner autour des sommets d'un triangle donné d'un même angle trois droites passant originellement par un même point. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 120.
51. Sur une série de triangles inscrits l'un dans l'autre. François et Déprez. Mathesis Série 2, IV, 97. — Collette *ibid.* 99. — Laisant *ibid.* 100.
52. Sur quatre triangles ayant le même point de Lemoine. Droz-Farny et Déprez. Mathesis Série 2, IV, 149.
Vergl. Ellipse 61, 62. Kreis 179.

E.**Elasticität.**

53. The strain in an infinite elastic solid with an ellipsoidal cavity, due to certain surface displacements. D. Edwardes. Quart. Journ. math. XXVI, 270.

Elektricität.

54. Ueber die durch dielektrische und magnetische Polarisierung hervorgerufenen Volum- und Formveränderungen (Elektrostriction und Magnetostriction). F. Pockels. Grun. Archiv. 2. R. XII, 57.
55. Ricerche sulla deformazione ed i fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino. C. Somigliana. Annali mat. Serie 2, XX, 61.
56. Electrification of conductors. Use of dipolar coordinates and other methods. Percival Frost. Quart. Journ. math. XXVI, 258.

Ellipsa.

57. Construction d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et en position. M. d'Ocagne. Mathesis Série 2, IV, 70.
58. Propriété des points de rencontre des axes d'une ellipse avec la tangente et la normale à un même point de l'ellipse. Retali. Mathesis Série 2, IV, 230.
59. Lieu du milieu de la droite qui joint les centres de courbure aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse. Barisien, Droz. Mathesis, Série 2, IV, 28.
60. Sur le triangle formé par les extrémités d'une corde d'une ellipse et le pôle de cette corde. Gillet, Déprez, Mandart. Mathesis Série 2, IV, 273. — Droz-Farny *ibid.* 275.
61. Sur une ellipse associée au triangle. H. Mandart. Mathesis Série 2, IV, 241.
62. Ellipse engendrée au moyen d'un triangle rectangle. Mandart, Collette, Polak, M^{me} de Haas. Mathesis Série 2, IV, 254. — Déprez. Droz-Farny *ibid.* 255.
63. Ellipse engendrée à l'aide d'une ellipse donnée. A. C. Mathesis Série 2, IV, 92, 118. — Juel *ibid.* 116. — Lemoine *ibid.* 117. — Cl. Servais *ibid.* 117. — Sollertinsky *ibid.* 118. — Déprez *ibid.* 116, 119.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 11. Quadratur 221.

Ellipsoid.

64. Zur Complianation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Coordinaten. Ferd. Jos. Obenrauch. Grun. Archiv. 2. R. XII, 155.
Vergl. Hydrodynamik 139.

Elliptische Transcendenten.

65. Neue Herleitung des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung. F. Pietzker. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 253.

66. Ein Beitrag zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen mit einer Anwendung auf Zahlentheorie. Heinr. Weber. *Mathem. Annal.* XLIII, 185.
 67. Sulla trasformazione dell' undecimo ordine delle funzioni ellittiche. Franc. Brioschi. *Annali mat. Ser. 2*, XXI, 309.
 68. Ueber die Transformation eines Integrals. T. Brodén. *Grun. Archiv.* 2. R. XII, 223.
 Vergl. Quadratur 223. Reihen 238. Thetafunctionen.

F.**Factorenfolge.**

69. Bestimmung des Näherungswerthes bez. Grenzwertes eines Productes. J. Saalschütz. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 249.
 70. Des produits $(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots$ et $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$. E. Cesaro. *Mathesis Série 2*, IV, 194.

Formen.

71. Ueber einen Satz von Hilbert. P. Gordan. *Mathem. Annal.* XLI, 132. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 61.]
 72. Ueber die Sygygante $D^2\psi = [5, 5, 2]$ zweier simultanen biquadratischen binären Formen. v. Gall. *Mathem. Annal.* XLIII, 550.
 73. Ueber ternäre bilineare Formen. P. Muth. *Mathem. Annal.* XLII, 257.
 Vergl. Invariantentheorie. Substitutionen.

Functionen.

74. On lacunary functions. Cayley. *Quart. Journ. math.* XXVI, 279.
 75. Note on the theory of orthomorphosis. Cayley. *Quart. Journ. math.* XXVI, 282.
 76. Ueber die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch specielle Thetareihen. Heinr. Burkhardt. *Mathem. Annal.* XLII, 185.
 77. Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Functionen. Rob. Fricke. *Mathem. Annal.* XLII, 564.
 78. On Noether's fundamental theorem. H. J. Baker. *Mathem. Annal.* XLII, 601.
 79. Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art. Ulf. Bigler. *Grun. Archiv.* 2. R. XII, 113, 225.
 80. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π . D. Hilbert. *Mathem. Annal.* XLIII, 216. — A. Hurwitz. *Ebenda* 220. — P. Gordan. *Ebenda* 222.
 81. Ueber Functionen von Vectorgrößen, welche selbst wieder Vectorgrößen sind. H. Burkhardt. *Mathem. Annal.* XLIII, 197.
 82. Ueber Ordinalfunctionen. A. Voigt. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 59.
 83. Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen. J. Lüroth. *Mathem. Annal.* XLII, 457.
 84. Delle funzioni regolari in un' area connessa qualsivoglia a distanza finita. Giul. Ascoli. *Annali mat. Ser. 2*, XX, 245. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 74.]
 85. Ueber symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen. Fr. Junker. *Mathem. Annal.* XLIII, 225.
 86. Neues Verfahren der Fourier'schen Entwicklung der doppelperiodischen Functionen. G. Mohrmann. *Grun. Archiv.* 2. R. XII, 1.
 87. Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. Giul. Ascoli. *Annali mat. Serie 2*, XX, 41. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 74.]
 Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Imaginäres. Invariantentheorie. Iterirung. Maxima und Minima. Mehrdimensionale Geometrie. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Unendlich gross.

G.**Geometrie (descriptive).**

88. Condition de parallélisme entre un plan et une droite. C. J. François. *Mathesis Série 2*, IV, 235.
 89. Eine räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte. Chladek Franz. *Grun. Archiv.* 2. R. XII, 109.

Geometrie (höhere).

90. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (1872). Fel. Klein. Mathem. Annal. XLIII, 65.
91. Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften. Th. Reye. Mathem. Annal. XLIII, 145.
92. Eine neue Ableitung des Satzes von Cayley-Brill über Punktsysteme auf einer algebraischen Curve. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 228.
93. Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der φ . Fel. Klein. Mathem. Annal. XLII, 1.
94. On certain factors of the c - und p -discriminants and their relation to fixed points on the family of curves. Isabel Maddison. Quart. Journ. math. XXVI, 307.
95. Einige Sätze über projective Spiegelnung. Max Bôcher. Mathem. Annal. XLIII, 598.
96. Contribuzione alla teoria delle serie irrazionale involutorie ∞^1 giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione. Fed. Amodeo. Annali mat. Serie 2, XX, 227.
97. Curve k -gonali. Fed. Amodeo. Annali mat. Serie 2, XXI, 221.
98. Ueber Kreisbogenpolygone. A. Schönflies. Mathem. Annal. XLII, 377.
99. Sur les strophoidales. G. de Longchamps. Mathesis Série 2, IV, 138. — J. Neuberg *ibid.* 141.
100. Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane. C. Segre. Annali mat. Serie 2, XX, 237.
101. Sopra due curve invariantive di una quartica piana. Edg. Ciani. Annali mat. Serie 2, XX, 257.
102. Bemerkung zur Theorie der regelmässigen Configurationen n_3 . A. Schönflies. Mathem. Annal. XLII, 595.
103. Einige metrische Eigenschaften der cubischen räumlichen Hyperbel. Heinrichs. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 213, 273.
104. Projective Lösung einer geometrischen Aufgabe. Wilh. Rulf. Grun. Archiv. 2. R. XII, 442.
- Vergl. Absolute Geometrie. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte. Kinematik. Mehrdimensionale Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

105. Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques. V. Bobynin. Biblioth. math. 1894, 55.
106. Die Kreismessung des Archimedes. Friedr. Hultsch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 121, 161.
107. Un fragment des métriques de Heron. P. Tannery. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 13.
108. Ueber den Geburtsort des Serenos. J. L. Heiberg. Biblioth. math. 1894, 97.
109. Ueber die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel. Arm. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 41, 81.
110. Ueber den Josephus sapiens oder Hispanus Gerberts. M. Curtze. Biblioth. math. 1894, 13. — H. Suter *ibid.* 84.
111. Das gläserne Sechrohr im Alterthum und Mittelalter. S. Günther. Biblioth. math. 1894, 15.
112. Zur Geschichte des Josephspiels. M. Curtze. Biblioth. math. 1894, 116.
113. Die Mathematik der Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1894, 37, 79, 99. [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 56.]
114. Intorno ad alcune edizioni dell' Algoritmo del Sacrobosco. P. Riccardi. Biblioth. math. 1894, 73.
115. Miscellen zur Geschichte der Mathematik im XIV. und XV. Jahrhundert. M. Curtze. Biblioth. math. 1894, 107.
116. Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au XVI. siècle. G. Eneström. Biblioth. math. 1894, 33.
117. Zur Geschichte der Mathematik im XVII. Jahrhundert. S. Dickstein. Biblioth. math. 1894, 24.
118. Note sur l'histoire de l'infiniment petit. G. Vivanti. Biblioth. math. 1894, 1.
119. Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat. Giov. Vacca. Biblioth. math. 1894, 46.
120. Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'Analyse des infiniments petits. G. Eneström. Biblioth. math. 1894, 65.

121. On the use of a single symbol to denote the incommensurable number 3,14159 . . . W. W. Rouse Ball. Biblioth. math. 1894, 106.
122. Ueber e als Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems. W. W. Beman. Biblioth. math. 1894, 32.
123. Georg von Vega. C. Doehlemann. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 204.
124. Geschichte der optischen und katoptrischen Anamorphosen. K. Ruoss. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 1.
125. Sur les decouvertes mathematiques de Wronski. S. Dickstein. Biblioth. math. 1894, 49, 85. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 71.]
126. Leopold Kronecker (7. XII, 1823—29. XII, 1891). Heintr. Weber. Mathem. Annal. XLIII, 1.
127. Nécrologue d'Ernest Edouard Kummer (1810—1893). Hermite. Mathesis Série 2, IV, 40.
128. Fürst Baldassarre Boncompagni Ludovisi. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 201.
129. Nécrologue d'Eugène Charles Catalan (1814—1894). P. Mansion u. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 33.

Gleichungen.

130. Sur le théorème de D'Alembert. V. Jamet. Mathesis Série 2, IV, 5.
131. Ueber Kronecker's Definition der Gruppe einer Gleichung. O. Bolza. Mathem. Annal. XLII, 253.
132. Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Heintr. Weber. Mathem. Annal. XLIII, 521.
133. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. E. Netto. Mathem. Annal. XLII, 436.
134. Die Normalform des allgemeinen Wurzelansdrucks und ihre Eigenschaften. Lipps. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 1. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 75.]
135. Die Auflösung der Gleichungen mittelst der Normalform. Lipps. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 65.
136. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 162, 193, 257, 321.
137. Résoudre l'équation $x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0$. Droz-Farny etc. Mathesis Série 2, IV, 277.
138. Résoudre le système $\sqrt{x} + \sqrt{y} = z$, $2x + 2y + p = 0$, $z^4 + pz^2 + q = 0$. Barbette, Listray, Verdeyen. Mathesis Série 2, IV, 208.

H.

Hydrodynamik.

139. Steady motion of a viscous liquid in which an ellipsoid is constrained to rotate about a principal axis. D. Edwardes. Quart. Journ. math. XXVI, 70.
140. Motion set up in viscous liquid by a rotating cylinder. D. Edwardes. Quart. Journ. math. XXVI, 157.
141. On the motions of solids in a liquid. Miss Fawcett. Quart. Journ. math. XXVI, 231.
142. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. W. Stekloff. Mathem. Annal. XLII, 273.

Hyperbel.

143. Quelques propriétés de l'hyperbole. Pirondini. Mathesis Série 2, IV, 217.
144. Engendrement de plusieurs hyperboles. Retali. Mathesis Série 2, IV, 227. — Barisien ibid. 228.
145. Hyperbole équilatère passant par les quatre points dans lesquels un cercle coupe une conique. Droz-Farny, Colette, Gillet, Déprez, Mandart. Mathesis Série 2, IV, 53. — Cl. Servais ibid. 95.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 13.

I.

Imaginäres.

146. Die Gauss'sche Darstellung komplexer Zahlen in geometrischer Beleuchtung. Adalb. Breuer. Grun. Archiv. 2. R. XII, 337.

147. Berichtigung zu dem Aufsätze über Systeme höherer complexer Zahlen. Theod. Molien. *Mathem. Annal.* XLII, 308. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 413.]
 148. Sui gruppi di sostituzioni lineari. L. Bianchi. *Mathem. Annal.* XLII, 30; XLIII, 101. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 135.]

Interpolation.

149. Zur Cauchy'schen Interpolationsaufgabe. E. Netto. *Mathem. Annal.* XLII, 453.

Invariantentheorie.

150. Ueber die vollen Invariantensysteme. D. Hilbert. *Mathem. Annal.* XLII, 313.
 151. On semiinvariants. Cayley. *Quart. Journ. math.* XXVI, 66.
 152. On reciprocants and differentialinvariants. Cayley. *Quart. Journ. math.* XXVI, 169, 289.
 153. On Pfaff-invariants. Cayley. *Quart. Journ. math.* XXVI, 195.
 154. Ueber das Formensystem eines Kreisbogenpolygons vom Geschlecht Null. G. Pick. *Mathem. Annal.* XLII, 489.
 155. Ueber die Invarianten algebraischer Functionen von Formen. E. Wölffing. *Mathem. Annal.* XLIII, 26.
 156. Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart' ordine. L. Berzolari. *Annali mat. Serie 2*, XX, 101.
 Vergl. Differentialgleichungen 35. Formen, Functionen 81. Substitutionen.

Iterirung.

157. Ueber Iterirung gebrochener Functionen. E. Netto. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 382.

K.**Kegelschnitte.**

158. Zur Construction eines Kegelschnittes aus fünf Punkten. Thomae. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 63.
 159. Ueber die Construction von Kegelschnitten aus fünf Punkten oder fünf Tangenten. O. Schlömilch. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 117.
 160. Ueber die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck. O. Schlömilch. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 245.
 161. Ueber die Projection von fünf Punkten einer Ebene in fünf Punkten eines Kreises. F. Schur. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 247.
 162. Projectiv-geometrischer Beweis des Satzes: der geometrische Ort aller Punkte, für welche die scheinbare Grösse eines Kegelschnittes dem Quadranten gleichkommt, ist ein Kreis. Thomae. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 315.
 163. Ueber die Achsenbestimmung von Kegelschnitten. O. Stoll. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 120. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 97.]
 164. Ein System monoconfocaler Kegelschnitte. Keller. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 290.
 165. Orthogonal conics. H. M. Taylor. *Quart. Journ. math.* XXVI, 148. — G. T. Bennett *ibid.* 155.
 166. Sur le cercle de Boscovich. Casey. *Mathesis Série 2*, IV, 163.
 167. Applications d'un théorème de Chasles. Balitrand. *Mathesis Série 2*, IV, 62, 81.
 168. Quelques propriétés des coniques se rattachant à la théorie des transformations. Verbessem. *Mathesis Série 2*, IV, 184.
 169. Conique lieu du sommet d'un triangle. Déprez. *Mathesis Série 2*, IV, 121.
 170. Quatre droites a, b, c, d sont coupées par une cinquième e aux points A, B, C, D ; les coniques circonscrites aux triangles bcd, dca, dab, abc et touchant a, b, c, d en A, B, C, D rencontrent e en un même point. Droz-Farny. *Mathesis Série 2*, IV, 145.
 171. Extension of a theorem in plane geometry. A. C. Dixon. *Quart. Journ. math.* XXVI, 212.
 172. Enveloppes de certaines droites. Retali, Déprez, Droz. *Mathesis Série 2*, IV, 25.
 Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Krümmung 181. Oberflächen zweiter Ordnung 202. Parabel. Winkeltheilung.

Kinematik.

173. Rapport sur l'ouvrage de Mr Mannheim: Principes et développements de Géométrie cinématique. M. d'Ocagne. *Mathesis Série 2*, IV, Supplément.

Kreis.

174. Limite de la somme algébrique de certains arcs de cercle. Vladimirescu. Mathesis Série 2, IV, 46.
 175. Sur le cercle des neuf points. Jos. Gillet. Mathesis Série 2, IV, 42. — J. Neuberg *ibid.* 183.
 176. Lieu du centre du cercle inscrit à un triangle dépendant lui même d'un autre cercle. Barisien. Mathesis Série 2, IV, 29.
 177. Quelle doit être la distance des centres de deux circonférences de rayons donnés pour qu'on puisse décrire une circonférence touchant les circonférences données, leur ligne des centres et une tangente commune? Barisien. Mathesis Série 2, IV, 101.
 178. Sur deux circonférences dont l'une passe par le centre de l'autre. Droz-Farny et Déprez. Mathesis Série 2, IV, 144. — Brocard *ibid.* 145.
 179. Sur trois circonférences ayant pour diamètres les trois côtés d'un triangle rectangle. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 207.
 180. On coaxial systems of circles. R. Lachlan. Quart Journ. math. XXVI, 129. Vergl. Rectification.

Krümmung.

181. Rayon de courbure d'une conique. A. Gob. Mathesis Série 2, IV, 133. — J. Neuberg *ibid.* 223.
 182. Ueber geodätische Krümmung. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XLII, 505. Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 13. Ellipse 59. Parabel 205, 206.

M.**Maxima und Minima.**

183. Zur Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen. V. v. Dantscher. Mathem. Annal. XLII, 89. Vergl. Dreiecksgeometrie 49.

Mechanik.

184. Aequivalenz der Linientheilsysteme. Ferd. Kraft. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 87, 129.
 185. Das Dreieck, bezogen auf seine Hauptträgheitsachsen. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 447.
 186. Ueber gewisse Gleichungen und Constanten der mechanischen Quadratur und der Mechanik ebener Figuren. Rud. Skutsch. Grun. Archiv. 2. R. XII, 111.
 187. Quelques systèmes de tiges articulées. R. Bricard. Mathesis Série 2, IV, 111.
 188. Ueber die gleitende und rollende Reibung bei der Fallmaschine. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 188.
 189. Ueber die barometrische Höhenmessungsformel. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 63. Vergl. Elasticität. Elektrizität. Hydrodynamik. Mehrdimensionale Geometrie 192. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

190. Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. L. Berzolari. Annali mat. Serie 2, XXI, 1.
 191. Osculirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n -Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 96.
 192. Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n -fachen Mannigfaltigkeit. P. Stäckel. Mathem. Annal. XLII, 537.
 193. Zur projectiven Geometrie. Wilh. Killing. Mathem. Annal. XLIII, 569.
 194. Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders. E. Liers. Grun. Archiv. 2. R. XII, 314.
 195. Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni. G. Fano. Annali mat. Serie 2, XXI, 141.

O.**Oberflächen.**

196. Sur la surface des ondes. Cayley. Annali mat. Serie 2, XX, 1.
 197. Sulle evolute delle superfici i cui raggi principali di curvatura son legati dalla relazione $r_1 - r_2 = 2T_0 \operatorname{sen} \left(\frac{r_1 + r_2}{2T_0} \right) T_0 = \operatorname{const}$ e sulle loro flessioni. Bened. Calò. Annali mat. Serie 2, XXI, 195.

198. Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni. Gemin. Pirondini. Annali mat. Serie 2, XXI, 33.
 199. Sur deux classes de surfaces qui se correspondent. S. Mangeot. Mathesis Série 2, IV, 34.
 Vergl. Functionen 82. Krümmung 182. Substitutionen.

Oberflächen zweiter Ordnung.

200. Orthogonal quadrics. H. M. Taylor. Quart. Journ. math. XXVI, 214.
 201. On the general equation of a conicoid that has double contact with two given conicoids. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXVI, 207.
 202. Ueber das Problem eine Fläche zweiten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden. M. Krewer. Grun. Archiv. 2. R. XII, 185.
 203. Lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur des quadriques concentriques et homothétiques. A. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 94.
 204. Ueber zwei Fusspunktenflächen des Achsencomplexes einer Fläche zweiter Ordnung. Ch. Bökle. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 51.
 Vergl. Ellipsoid.

P.

Parabel.

205. Osculirende Parabel. A. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 168.
 206. Sur les paraboles osculatrices à une circonférence. H. Brocard. Mathesis Série 2, IV, 197. — Cl. Servais *ibid.* 203. — Absolonne *ibid.* 204. — Déprez *ibid.* 205.
 207. Propriété de la directrice d'une parabole. Mandart, Droz-Farny, Gillet, Verdeyen, Greenstreet. Mathesis Série 2, IV, 234.
 208. Lieu d'un point de la corde des contacts d'une conique avec un des cercles qui lui sont bitangents. Gillet. Mathesis Série 2, IV, 171. — Collette, Droz, Déprez *ibid.* 172.
 209. Enveloppe d'un cercle dont le centre se meut sur une parabole donnée et qui passe par le foyer de cette parabole. Lieu du point de rencontre de ce cercle avec diverses droites. Déprez. Mathesis Série 2, IV, 24.
 Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 11.

Planimetrie.

210. Das Grundproblem der Flächen und Rauminhaltslehre. O. Rausenberger. Mathem. Annal. XLIII, 601.
 211. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn M. Réthy über endlich-gleiche Flächen. H. Dobriner. Mathem. Annal. XLII, 275. — Mor. Réthy. Ebenda 297. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 212.]
 212. Der Satz: „Congruentes von Congruentem giebt Gleiches“ in seiner Anwendung auf ebene Flächen. H. Dobriner. Mathem. Annal. XLII, 285.
 213. Sur le centre des moyennes harmoniques. Verbessem. Mathesis Série 2, IV, 251.
 214. Quelques propriétés d'une droite partagée en moyenne et extrême raison. Clém. Thiry. Mathesis Série 2, IV, 22.
 215. Triangle dont le périmètre est égal au diamètre du cercle circonscrit. M^{lle} de Haas, Cl. Thiry, Droz-Farny, Collette, Mandart, Delahaye. Mathesis Série 2, IV, 122.
 216. A Euclidean proof of Casey's extension of Ptolemy's theorem. J. H. Taylor. Quart. Journ. math. XXVI, 228.
 217. Propriétés du quadrilatère. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 252.
 218. Sur quelques quadrilatères spéciaux. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 268.
 219. Ueber das durch Construction einander ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke über den Seiten eines beliebigen Dreiecks gebildete Sechseck. Leman. Grun. Archiv. 2. R. XII, 224. — F. W. Fischer. Ebenda 335.
 Vergl. Dreiecksgeometrie. Trigonometrie. Winkeltheilung.

Potential.

220. A note on spherical harmonics. F. W. Dyson. Quart. Journ. math. XXVI, 30.

Q.

Quadratur.

221. Relation entre l'aire d'une ellipse, celle de la podaire et de l'antipodaire de son centre. Gillet, Déprez. Mathesis Série 2, IV, 257.

222. Sur l'aire de quatre courbes du sixième ordre. Droz-Farny. *Mathesis Série 2, IV, 51.*
 223. Aire comprise entre la courbe $y^2(x^2 + a^2)^3 = a^5(x^2 + b^2)$ et son asymptote réelle. Absolonne et Vladimiresen. *Mathesis Série 2, IV, 205.*
 Vergl. *Planimetrie 210, 211, 212.*

R.**Rectificator.**

224. Il concetto di lunghezza e la retta. Rod. Bettazzi. *Annali mat. Serie 2, XX, 19.*
 225. Beliebige weit angenäherte π -Construction. J. E. Böttcher. *Grün. Archiv. 2. R. XII, 444.*
 226. Valcurs approchés de π . *Mathesis Série 2, IV, 162.*
 227. Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven. P. Stäckel. *Mathem. Annal. XLIII, 171.*
 Vergl. *Functionen 80. Geschichte der Mathematik 106, 121. Kreis 174.*

Reihen.

228. Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich. Alfr. Pringsheim. *Mathem. Annal. XLII, 153.*
 229. Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile. G. Vivanti. *Annali mat. Serie 2, XXI, 25.*
 230. Sulle serie di potenze. S. Pincherle. *Annali mat. Serie 2, XXI, 138.* — G. Vivanti. *Ebenda 192.*
 231. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. Ch. Hermite. *Annali mat. Serie 2, XXI, 289.* [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 154.]
 232. Ableitungen arithmetischer Reihen. Fr. Rogel. *Grün. Archiv. 2. R. XII, 37.*
 233. Sommatton des puissances semblables des n premiers nombres entiers. E. Barbette. *Mathesis Série 2, IV, 105, 142.*
 234. Sur la relation $S_3 = S_2^2$. E. Gelin. *Mathesis Série 2, IV, 220.*
 235. Soit S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers, démontrer que $S_5 = \frac{4}{3} S_2^2 (S_1 - 1) + S_3$. H. Brocard. *Mathesis Série 2, IV, 209.*
 236. On the series $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \dots$. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math. XXVI, 48.*
 237. On a series involving inverse squares of prime numbers. J. W. L. Glaisher. *Quart. Journ. math. XXVI, 33* [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 538.]
 238. Sur l'évaluation approchée d'une série elliptique. E. Cesaro. *Mathesis Série 2, IV, 177.*
 Vergl. *Bestimmte Integrale. Functionen 76, 86.*

S.**Singularitäten.**

239. Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven mit Anwendungen auf Realitätsverhältnisse. Franz Meyer. *Mathem. Annal. XLIII, 286.*

Stereometrie.

240. Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatz. Kloss. *Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 64.* — Pützer. *Ebenda 64.* — K. Fink. *Ebenda 192.* [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 151.]
 241. Ueber einige Sätze aus der elementaren Raumgeometrie. H. Seipp. *Grün. Archiv. 2. R. XII, 16.*

Substitutionen.

242. Ueber den Zusammenhang in Reihen mit einer Anwendung auf die Theorie der Substitutionen. P. Hoyer. *Mathem. Annal. XLII, 58.*
 243. On groups of substitutions that can be formed with nine letters. E. H. Askwith. *Quart. Journ. math. XXVI, 79.*
 244. List of the substitution groups of nine letters. F. N. Cole. *Quart. Journ. math. XXVI, 372.*

245. Zur Theorie der Tripelsysteme. Eug. Netto. *Mathem. Annal.* XLII, 143.
 246. Concerning triple systems. E. Hastings Moore. *Mathem. Annal.* XLIII, 271.
 247. Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici. L. Bianchi. *Annali mat. Serie 2*, XXI, 237.
 248. Représentation géométrique des caractéristiques de genre $3e$ de genre $4e$ et de leurs groupes de substitutions. Ern. Pascal. *Annali mat. Serie 2*, XX, 163.
 249. Die Gruppen der Ordnungen p^3 , pq^2 , pqr , p^4 . O. Hölder. *Mathem. Annal.* XLIII, 301.
 250. Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3^o ordine, e sui gruppi ad esso isoformi. Ern. Pascal. *Annali mat. Serie 2*, XX, 269, XXI, 85.
 251. Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette della superficie di quarto ordine a conica doppia. Italo Pereno. *Annali mat. Serie 2*, XXI, 57.
 Vergl. Imaginäres 148.

T.**Tetraeder.**

252. Projective Form eines metrischen Satzes. P. Muth. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 116. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 155.]
 253. Gleichseitiges Tetraeder. R. Hoppe. *Grün. Archiv.* 2. R. XII, 327.
 254. Volume d'un certain tétraèdre. Appell. *Mathesis Série 2*, IV, 40.
 255. Sur le tétraèdre isoscèle. Cayley. *Mathesis Série 2*, IV, 69.

Thetafunctionen.

256. Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. A. Krazer. *Mathem. Annal.* XLIII, 413, 457.
 257. On a geometrical proof of Jacobi's ϑ -Formula. H. F. Baker. *Mathem. Annal.* XLIII, 593.
 Vergl. Functionen 76, 86.

Trigonometrie.

258. Démonstration de $tg x - x < \frac{1}{3} tg x^3$ en prenant $x < \frac{\pi}{2}$. Absolonne. *Mathesis Série 2*, IV, 73.
 259. La formule de Nicolas de Cusa. H. Brocard. *Mathesis Série 2*, IV, 183.
 260. Théorème de trigonométrie. P. Delens. *Mathesis Série 2*, IV, 68.
 261. A construction for a regular polygon of seventeen sides. Herb. W. Richmond. *Quart. Journ. math.* XXVI, 206.
 262. Calcul des longueurs de certaines cordes dans la circonférence circonscrite à un triangle donné. Delahaye et Déprez. *Mathesis Série 2*, IV, 76.

U.**Unendlichgross.**

263. Sur une proposition fondamentale du calcul asymptotique. E. Cesaro. *Mathesis Série 2*, IV, 57.
 Vergl. Geschichte der Mathematik 118.

W.**Wärmelehre.**

264. Der aus den Sätzen über Wärmegleichgewicht folgende Beweis des letzten Multiplators in seiner einfachsten Form. Ludw. Boltzmann. *Mathem. Annal.* XLII, 374.
 265. Zur Mechanik der atmosphärischen Bewegungen. Em. Oekinghaus. *Grün. Archiv.* 2. R. XII, 274.
 266. Die thermischen Capacitäten fester und tropfbar flüssiger Körper, insbesondere des Wassers. Kurz. *Zeitschr. Math. Phys.* XXXIX, 124, 192.

Winkeltheilung.

267. Ueber die Trisection des Winkels mittelst beliebiger fester Kegelschnitte. St. Glaser. *Grün. Archiv.* 2. R. XII, 367. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 524.]
 268. Theilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile mit Hilfe von Modellen. Arth. Strauss. *Grün. Archiv.* 2. R. XII, 177.

Z.**Zahlentheorie.**

269. Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre. Kraus. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 11. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 262.]
270. Zur Theorie der Functionen eines cubischen Körpers. Ludw. Baur. Mathem. Annal. XLIII, 505.
271. Ueber vollständige und complementäre Perioden und Restreihen unendlicher Decimalbrüche. Jos. Mayer. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 376.
272. Bestimmung der Anzahl aller unter einer gegebenen Zahl m liegenden Primzahlen, wenn die unter \sqrt{m} liegenden Primzahlen bekannt sind. Graefe. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 38.
273. Ueber relative Primzahlen. L. Goldschmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 203.
274. Notes on the division of the circle. F. S. Carey. Quart. Journ. math. XXVI, 322.
275. Sul teorema che ogni progressione aritmetica, nella quale il primo termine e la ragione sono primi fra loro, contiene infiniti numeri primi. Italo Zignago. Annali mat. Serie 2, XXI, 47.
276. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. G. Speckmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 439.
277. Zur Zahlentheorie. G. Speckmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 431, 445. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 556.]
278. Ueber die Factoren der Zahlen. G. Speckmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 435.
279. Le petit multiple de $1, 2, 3, \dots, 2n$ est égal à celui de $n + 1, n + 2, \dots, 2n$. Hacken, Listray, Verdeyen. Mathesis Série 2, IV, 236.
280. Sur un théorème d'arithmétique. V. Jamet. Mathesis Série 2, IV, 271.
281. On powers of numbers whose sum is the same power of some number. Artemas Martin. Quart. Journ. math. XXVI, 225.
282. Le carré de la somme de n carrés est somme de n carrés. Boutin etc. Mathesis Série 2, IV, 277.
283. Déterminer n de manière que $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$ soit un carré. Fauquembergue. Mathesis Série 2, IV, 169.
284. Pétant un nombre premier; si pN est la somme de $p + 1$ carrés, dont p soient égaux, N jouit de la même propriété. Fauquembergue, Verhelst, Spino, Verdeyen, Droz. Mathesis Série 2, IV, 173.
285. Le carré de tout nombre impair autre que 1 est la somme de deux carrés ou la somme de trois carrés. V. Jamet. Mathesis Série 2, IV, 27. — E. Catalan *ibid.* 52.
286. Sur l'identité $(n + 1)^3 - n^3 = 1 + 6 \cdot \frac{n(n + 1)}{2}$. Laurens. Mathesis Série 2, IV, 40.
287. Produit de deux facteurs dont chacun est la somme de deux nombres triangulaires. H. Mandart. Mathesis Série 2, IV, 123.
288. Déterminer n de manière que la somme des n premiers nombres triangulaires soit aussi un nombre triangulaire. C. Spino. Mathesis Série 2, IV, 171. — H. Brocard *ibid.* 171.
289. Soit $T^n = \frac{1}{2} n(n + 1)$ le n^{e} nombre triangulaire, des valeurs négatives de n étant admises. Démontrer que $(T_a + T_b + T_c)(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma)$ est une somme de trois nombres triangulaires, si $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = 0$. François. Mathesis Série 2, IV, 211.

Historisch-literarische Abtheilung.

Aus Manuscripten und einer früheren Publication.

Von

Dr. ARMIN WITTSTEIN.

1. Denjenigen, die für Johannes de Lineriis oder J. de Liveriis nicht längst alles Interesse verloren haben, — wüßte man sich freilich kaum verwundern dürfte — ist möglicherweise die Nachricht willkommen, dass ein, wie mir scheint (d. h. ohne aus Autopsie urtheilen zu können), sehr werthvoller, einst im Benedictiner-Stift „Zu St. Emmeram“ in Regensburg verwahrter Codex [14684 (Em. G68) membr. in 4° S. XIV. 100 fol.] der Münchener Hof- und Staatsbibliothek auf f. 22 bis f. 30 *Johannis de Lineriis liber de minutis a. 1356* enthält.* Bei A. Favaro, M. Steinschneider, B. Baldi (sämmtlich im XII. Bande von Boncompagni's „Bull. di Bibl. e di St. d. Sc. Mat. e Fis.“) und M. Cantor (im II. Bande seiner „Vorlesungen“), den Gelehrten, die sich in neuester Zeit mit jenem Auctor (oder sind es deren zwei?) beschäftigt haben, fand ich keinen Hinweis auf die eben angeführte Quelle und halte aus diesem Grunde meine Notiz für hinreichend gerechtfertigt.

2. Weiter verdienen zwei Codices der Leipziger Universitätsbibliothek einige Beachtung. Der erste [Cod. mscr. lat. 1469 chart. 378 Blätter in kl. 4°, von denen die 7 ersten aus Pergament bestehen. Ein Sammelband von etwa 50, wohl grösstentheils im 15. Jahrhunderte geschriebenen Tractaten**] würde vielleicht lohnen vom Mathematiker, an

* f. 1 Joannis de Sacrobosco Anglici Algorithmus. f. 8 Eiusdem tract. de sphaera. f. 79 „Tractatus de imaginibus thebet benchorat“. Inc. Aspectus autem planetarum sic potest inveniri etc. f. 81 Demonstratio quaedam (geometrica). f. 82 Messehallach Practica astrolabii. f. 99 „Notabilia de novem limitibus“.

** Abkürzungen treten darin in grosser Anzahl auf. Nicht überall findet sich das Trennungszeichen bei am Ende einer Zeile abgebrochenen Wörtern; der Diphthong æ ist meistens durch e ausgedrückt; am Ende der Wörter steht häufig ein langes s; der Punkt über dem i ist nirgends durch ein Strichelchen ersetzt. Von den Majuskeln und Minuskeln wüsste ich nichts Auffallendes zu sagen, als dass erstere manchmal recht verschnörkelt sind. Der Cod. gehört nicht zu denen, die durch Sauberkeit von Schrift und Zeichnungen oder künstlerische Behandlung der Initialen das Auge angenehm fesseln, wie beispielsweise Cod. 1399, aus dem Anfange des 15. Jahrhunderts, dem ausserdem noch einige, sehr hübsch ausgeführte Miniaturmalereien, darunter ein segnender Heiland in edler Haltung, reizvollen Schmuck verleihen.

den er sich vorwiegend wendet, durchgesehen zu werden, wenn auch die Ausbeute nicht viel mehr als wünschenswerthe Belege zur Erhärtung, resp. solideren Fundirung, der einen oder anderen These gewähren sollte. Hier sei daraus hervorgehoben: f. 69 bis f. 111 Praxis geometriae Euclidis. f. 111 und f. 207 De baculo Jacob. f. 165 Incipit arismetrica magistri Johannis de Müris. f. 184 Tractatus algorismi proportionum. f. 267 Compositio astrolabii. f. 300 Instrumentum ad explorandam altitudinem solis et stellarum. f. 313 Liber Messahallach.

Der zweite [D. C. 329. Aus der „Refa'ya.“ 74 vortrefflich conservirte Blätter eines stark glänzenden Papiers in dunkelbraunem orient. Leder einbände und im Format von 15 × 21 cm] umfasst drei Abhandlungen von Muhammed ben Maḥmūd al-Māridinī und 'Abdurrahmān ben 'Abdallāh aṭ-Ṭāgūrī über den Quadranten (rub' al-muḳantarāt und ar-rub'as'-sāmālī) und beginnt auf f. 3 r^o. mit des Ersteren Bearbeitung:

حاوی المختصرات فی العمل بربع المقنطرات تألیف الشیخ المار دینی

Zur Literatur des darin behandelten Beobachtungs-Instrumentes überhaupt möchte ich noch eine, ich glaube wenig bekannte, Druckschrift von W. H. Morley, „Description of an Arabic Quadrant“ (London, 1860; 8°. M. 4 Figuren-Tafeln) betitelt und im „Journal of the Royal Asiatic Society“ erschienen, in Kürze erwähnen. Der hierin beschriebene Quadrant ist von Messing, mit Gold, Silber und Kupfer eingelegt, und war damals in tadellosem Zustande; sein Halbmesser beträgt ungefähr 17,5 cm. Er wurde im Jahre 1334 für den obersten ^{مؤذن} mu'addin (welcher vom Minaret herab zum Gebet ruft und nicht mit dem gleichfalls amtlich angestellten ^{موقت} mowakket, dem Zeitverkündiger, zu verwechseln ist) der Haupt-Moschee in Damaskus angefertigt, deren Polhöhe dabei zu + 33° 27' angenommen. Die „Connaissance des Temps pour l'an 1892“ giebt für den „nördlichen Thurm der grossen Moschee“ + 33° 30' 31" und 33° 57' 59" für dessen östliche Länge von Paris an. Nach dem Verzeichnisse des Uluğ Beg (a. 1437) würde man Damaskus unter + 33° 15' und 70° östl. L. von den Canaren zu suchen haben, d. h. an einem Orte, dessen Lage in Br. um etwa 1/4 Grad und in L. um 15°. 8 davon abweicht.

3. Der vierte Codex, den ich mir erlaube der Aufmerksamkeit der Leser mit ein paar Begleitworten zur Begutachtung zu unterbreiten, stammt aus der überaus kostbaren Büchersammlung (von 500 sehr seltenen Druckwerken und 330 Handschriften) Joh. Albert Widmannstad's*

* Er war 1506 in Nellingen bei Ulm geboren, befand sich 1529 im Gefolge Karls V. in Bologna, lebte dann lange in Neapel und Rom, wurde 6 oder 7 Jahre vor seinem Tode Kanzler von Nieder-Oesterreich und starb 1558 als Canonicus zu Pressburg. Selbst tüchtiger Kenner des Syrischen und Arabischen, zählt er zu den ersten Förderern des Studiums dieser Sprachen in Deutschland.

(oder richtiger Widmanstadt?), die durch Ankauf in den Besitz des Herzogs Albrecht V. von Bayern kam und gegenwärtig der Hof- und Staatsbibliothek zu München einverleibt ist; dort trägt er jetzt die Signatur: Cod. arab. Nr. 853, wozu noch die speciellere im Catal. codd. mscr. hinzukommt: Cod. or. 160 bombye. 20,5 cm h. 13,5 cm br. 49 fol. 31 lin.

Es ist eine marokkanische, fast 640 Jahre alte Handschrift, die uns darin vorliegt, und aus der ich hier einige, allerdings dürftige Excerpte, auf die ich mich aber durchaus beschränken muss, mittheilen werde. Zunächst sind es die Worte ganz am Ende, die unverkürzte Wiedergabe fordern:

تم القانون لاروماثيوس اصلاح ابو اسحق النقاش المعروف
بالزرقالة وكان الفراغ منه في العشر الاوسط من شهر
ذي الحجة عام خمسة وخمسين وستماية بحمد الله وعونه

Sie sagen aus, dass wir hier an den Schluss des von Abū Ishāq annaḳḳās, genannt Az-Zarḳāle, bearbeiteten (eigentlich rectificirten) Ḳānūn des Eumathîôs(?) gelangt sind, und das Ganze eine mit dem Originale verglichene Abschrift sei, die im dū'1-ḥeġe 655 (begann 1257 December 8) vollendet wurde. „Gelobt sei Gott und seine Hilfe!“ — Wer mag dieser Eumathios gewesen sein, oder haben wir es dabei wieder mit einer gewöhnlichen arabischen Corruption fremder Eigennamen zu thun?

40 Blätter der Handschrift füllen astronomische Tafeln aus, 8 sind einer Einleitung (nicht Vorrede, مَقْدَمَةٌ gewidmet, die also beginnt:

باب معرفة الشمس من البروج والدرج والدقائق بالجدول

oder, frei übersetzt, wie der Lauf der Sonne im Thierkreis nach Graden und Minuten in einer Tafel vorgestellt werden kann. Zur allgemeinen Information über den Inhalt reicht es aus, dem Manuscript eine mässige Anzahl beliebig herausgegriffener Kapitel-Überschriften zu entnehmen.

- f. 9^v. جدول لاخراج التواريخ بعضها من بعض في السنين المجموعة.
- f. 10. جدول المبسوط في اخراج التواريخ الثلاثة
- f. 12^r. جدول لمعرفة شهور الفرس
- f. 12^v. مواضع الشمس المقومة في السنة الاولا بعد الطرح
- f. 20. مواضع حصّة القمر في الشهور العجمية وايامها
- f. 25. تمام جدول مواضع زحل المقومة
- f. 38. مواضع عطارد المقومة

Bis jetzt war die Rede von einigen Zeitrechnungen und ihrem Verhältnisse zu einander; insbesondere von den Aeren der Araber, Perser, Syrer; von den persischen Monaten; von Sonnen-Oertern; von „Hişsa-Werthen für den Mond an den einzelnen Tagen der fremden Monate“; von Saturn-Oertern; von Mercur-Oertern. Hişsa hat im Allgemeinen die Bedeutung „Grösse“ und in diesem Falle die eines Proportionaltheiles, der in der Zeitrechnung von Chaṭa und Uigür bei der Correction des mittleren Neumondes auftritt, und zwar theils positiv, theils negativ. Es dürfte Manchen interessiren, dass wir schon hier, lange vor Ulug Beg, jenes Tārîch gedacht finden.

- f. 41. جدول مطالع البروج فى الفلكى المستقيم وتعديل الايام بلباليها فى كل وقت
 „Tafel für die Rectascensionen der Zeichen des Thierkreises und Tag-Gleichung für jedes Zeitmoment.“ Letztere kommt auf unsere Zeitgleichung hinaus.
- f. 46. جدول اختلاف منظر القمر فى دائرة الارتفاع
 „Tafel für die Höhen-Parallaxe des Mondes.“
- f. 48. جدول كسوف القمر فى بعده الابعد
 „Tafel für die Verfinsterung des Mondes in seiner grössten Entfernung.“ Die Opposition ist gemeint.

Es ist zwar nebensächlich, aber immerhin mittheilenswerth, dass ich in den von Abû Naşr al-Faṭḥ Ibn Hâḳân (einem 100 Jahre vor unserem Abschreiber lebenden Schriftsteller) verfassten Lebensbeschreibungen ausgezeichneter Männer Spaniens, die vor etwa 10 Jahren zu Konstantinopel im Druck erschienen, Nichts über Zarkâlî erfahren konnte.

4. Schliesslich noch eine, mit dem Voraufgegangenen verglichen, wesentlich heterogene Bemerkung, deren Tendenz aber gleichfalls eine geschichtliche bleibt. Im 69. Theile (1883) des R. Hoppe'schen „Archiv der Mathematik und Physik“ habe ich specielle Aberrations- oder Täuschungsfläche die Gesammtheit aller optischen Täuschungen genannt, welche uns die von einem Fixstern ausgehenden Lichtstrahlen bereiten, wenn dieser im Nord- oder Südpol der Ekliptik steht und das ganze Jahr hindurch beobachtet werden kann. Ein solches Gebilde entsteht durch Bewegung einer Geraden, welche gleichzeitig einen Kreis vom Halbmesser R und eine Ellipse von den Halbachsen a und b trifft, sowie einen geraden elliptischen Kegel berührt, der die gegebene Ellipse zur Normal-Directrix und das Kreiscentrum zu seinem Mittelpunkt hat. Liegt letzterer im Anfangspunkte der Coordinaten, und ist die Leitlinie des Kegels in der Höhe h über der Ebene der XY angenommen, während der Kreis in dieser

um den Anfangspunkt beschrieben wird, so ergibt sich für die Gleichung der Fläche der Ausdruck zwölften Grades:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = \frac{R^2 \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot (x^2 + y^2) + z^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{h^2} \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) \pm 2xyz \cdot \frac{a^2 - b^2}{abh} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2}}}$$

Derselbe stellt zwei windschiefe Flächen dar, die sich nur durch den Windungsmodus von einander unterscheiden, und geht für $a = b$, d. h. für eine kreisförmige Erdbahn, in das einschalige Rotations-Hyperboloïd

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 R^2} - \frac{z^2}{a^2 h^2 R^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + R^2} - \frac{z^2}{(a^2 + R^2)^2} - 1 = 0$$

über. Ist $R = 0$, oder besteht keine Aberration, so folgt aus der ersten Gleichung der gerade elliptische Kegel $\frac{z^2}{h} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$, aus der zweiten der Rotationskegel $\frac{z^2}{h^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 0$. Damit sind alle, an bedeutende

Geschichts-Abschnitte (1543, 1609, 1728 resp. schon 1676) geknüpft Wandlungen erschöpft und präcisirt, welche der erklärte geometrische Ort, von der Geraden an, im Laufe der Jahrtausende in seiner Gestaltung durchgemacht hat, bis er endlich im Jahre 1809 dauernde Consolidation in einer Fläche äusserst complicirten Charakters finden sollte. Damals gab Gauss, aus dem grossen und verwickelten Complex Dessen, was man unter der Aberration des Lichtes begreift, den Kern herauschälend, seine allen späteren Zeiten zur Richtschnur dienende bekannte Definition des Begriffes der Fixstern-Aberration, mit der man die Fresnel'sche zusammenfallend betrachten kann, während Cauchy in der Aberration des directen Lichtes eine Drehung der Wellen-Normale erblickt.

Zur Geschichte des „Sinus“.

Von
J. RUSKA.

Die neuerdings wieder aufgeworfene Frage nach der Herkunft des Wortes sinus (M. Koppe, die Behandlung der Logarithmen und der Sinus, Programm des Andreas-Realgymnasiums. Berlin 1893. p. 32; M. Cantor, Geschichte der Mathematik I² p. 693) giebt mir zu einigen Bemerkungen Gelegenheit, die sich hauptsächlich auf den ersten Theil der Munk'schen Hypothese beziehen.

Es ist von vornherein klarzustellen, dass es sich bei der Frage um zwei von einander ganz unabhängige Dinge handelt: erstens, wann tritt das Wort zum ersten Mal in den lateinischen Schriften des Mittelalters auf, und auf welche Quelle lässt es sich zurückführen; zweitens, wie weit hinauf lässt sich das Wort *gaib* bei den Arabern verfolgen, ist es ein von ihnen selbst geprägter Ausdruck oder ein missverständlich arabisirtes Lehnwort? Es ist klar, dass die von Munk und Wülpcke aufgestellte bekannte Hypothese nicht zur „Legende“ wird, wie Koppe S. 33 behauptet, wenn sich herausstellt, dass der erste, welcher *gaib* mit sinus übersetzte, nicht Plato von Tivoli, sondern ein anderer war.

Um mit der zweiten Frage zu beginnen, so ist es vollkommen ausgeschlossen, dass ein Araber auf den Einfall kam, das Wort *gaib* „ebenso direkt zur Bezeichnung der Abschnitte der vom Durchmesser in der Mitte geschnittenen Sehne“ zu verwenden, wie es „im gewöhnlichen Leben zur Bezeichnung des Busenausschnitts eines Gewandes benutzt wurde“. Denn das Wort *gāba* bedeutet in erster Linie (vergl. Lane's Arabic-English Lexicon I p. 479) ein Loch machen, durchbohren, ein rundes Stück aus der Mitte heraus schneiden, aushöhlen, dann erst durchschneiden, vom Vogel, der die Luft durchschneidet, und in ähnlichen Bildern, die die Grundbedeutung durchblicken lassen. Dem entsprechend ist *gaib* der *tauq*, das heisst Halsring (cf. Lane I 492), die runde Oeffnung des Hemdes und dergl., dann eine Aushöhlung, also Bausch, Tasche, endlich in übertragenem Sinn Busen, Herz. Zur Bezeichnung der Hälfte einer Sehne also ein Wort, welches vielleicht zur Bezeichnung eines Kreises verwendet werden könnte, aber in keinen vernünftigen Zusammen-

hang mit der Definition „Hälfte der Sehne des Doppelten des Bogens“ (nişf watar dif elqaus, cf. Liber mafatih al-olum ed. van Vloten p. 206; Sprenger, Dictionary of the technical terms I 190) zu bringen ist! Die Verlegenheit der späteren Araber dem Wort selbst gegenüber spiegelt sich in den zahlreichen Lesarten der Handschriften, die alle auf die Consonantenverbindung حب zurückzuführen sind; da findet sich ausser جيب ġaib in dem erwähnten Liber maf. p. 205 حنب hanab, Krümmung an den Beinen eines Pferdes; حبن hibn Beule, oder haban Wassersucht; durch Einschaltung eines weiteren Zeichens entstand aus جيب mit Verschiebung der Punkte حبيب habib, Freund (p. 206); endlich liest man Ihwan es-safa ed. Dieterici p. 295 (und „Propädeutik der Araber“ p. 171 im Wörterverzeichnis) حبيب habib, Graben oder Furche im Boden.* Wer die präzise und klare Terminologie der Araber kennt, wird ihnen nicht zutrauen, dass sie zur Benennung des fraglichen Begriffs ein Wort wählten, das in gar keiner Beziehung zu demselben steht. Das lässt sich kaum schlagender beweisen, als durch den von Abû'lwafâ eingeführten Begriff der trigonometrischen Tangente, welche bei ihm den Namen „Schatten“ führt (sc. eines horizontalen Stabes in einer vertikalen Wand), eine wegen ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit trefflich gewählte Bezeichnung.

Es bleibt somit nur noch eine Möglichkeit, nämlich die, dass die arabischen Mathematiker den fertigen Begriff sammt seiner Benennung von den Indern übernahmen, durch welche im Gegensatz zur griechischen Trigonometrie die Hälfte der Sehne des verdoppelten Bogens eines Winkels in die Rechnung eingeführt wurde (Cantor, Gesch. d. Math. I² 616). Dies ist die bekannte, von Wöpcke (Journ. asiat. VI. Ser. 1. Bd., 1863, p. 478 n), Cantor (Gesch. d. Math. I¹ 632, I² 693) und Hankel (Zur Gesch. d. Math. im Alterthum und Mittelalter p. 280 n) vertretene Hypothese des Orientalisten Munk. Die Wörter جيا Sehne**, krama-jyâ gerade Sehne, utkrama-jyâ umgekehrte Sehne (Hankel l. c. p. 217; Cantor I² 612) sind die Vorbilder für die arabischen Ausdrücke ġib, ġib mustawâ, ġib ma'kûs, die Wiedergabe von جيا durch arabische Laute ist die einzig mögliche $j = \acute{g} = dsch$, das consonantische v hat als Aequivalent nicht و sondern ب (vergl. Slaven = Saqâlib, und umgekehrt in zahllosen ins Spanische übergegangenen

* Die Uebersetzung von Dieterici (Prop. p. 28) ist ohne Sinn: „Lehnt man einen Pfeil irgendwo an den Bogen, so nennt man dies den verkehrten Einschnitt; lehnt man ihn aber an die Mitte der Sehne und die Mitte des Bogens, heisst man das den gleichmässigen Einschnitt!“

** Es scheint, dass der ganze Wortcomplex Bogen, Sehne, Pfeil aus der indischen Trigonometrie herrührt, denn die Griechen helfen sich entweder durch Umschreibungen (Sehne = $\eta \epsilon\nu \tau\omega \kappa\acute{\alpha}\kappa\lambda\omega \epsilon\nu\theta\epsilon\iota\alpha$, $\epsilon\nu\theta\epsilon\iota\alpha \epsilon\nu \kappa\acute{\alpha}\kappa\lambda\omega \mu\eta \delta\iota\alpha \tau\omega \kappa\epsilon\nu\tau\rho\nu \sigma\acute{\upsilon}\sigma\alpha$, $\epsilon\nu\theta\epsilon\iota\alpha \epsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\omega\nu \tau\omega\upsilon \delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\rho\nu$; Sagitte = $\kappa\acute{\alpha}\delta\epsilon\tau\omicron\varsigma \tau\mu\eta\mu\alpha\tau\omicron\varsigma \kappa\acute{\alpha}\kappa\lambda\omicron\nu$, oder begnügen sich mit mehrdeutigen Ausdrücken (Sehne = $\nu\pi\omicron\tau\epsilon\iota\nu\omicron\sigma\alpha$) Bogen = $\pi\epsilon\rho\iota\phi\acute{\epsilon}\rho\epsilon\iota\alpha$). Vergl. Cantor l. c. p. 616. Ist diese Trias aber arabisch, so wäre sie ein weiterer Beleg für die Anschaulichkeit der Terminologie.

geographischen und Eigennamen). Ueber die Lesung der Vocale entscheiden die Sprachgesetze und der Zusammenhang; bei Fremdwörtern ist die ausdrückliche Angabe derselben erforderlich; unterbleibt sie, so muss sich diejenige Lesung einbürgern, welche dem arabischen Ohr als die natürliche erscheint: aus *gīb* wird *gāib*, aus einem unverständlichen Fremdwort ein ähnlich klingendes der eigenen Sprache; ein in der Sprachgeschichte so gewöhnlicher Vorgang, dass es überflüssig ist, Beispiele anzuführen. Damit erstarrte das Wort zu einem mathematischen Kunstausdruck, bei dem der Araber selbst so wenig an den ursprünglichen Sinn dachte, als wir es thun, wenn wir von Bogen und Sehne oder gar von Sinus und Logarithmus reden. Ein Uebersetzer aber musste *gāib* mit *sinus* wiedergeben, falls er wörtlich übersetzte; so schreibt der Syrer Severus bar Schakkō* († 1241) *ʿūbā sarīrā* = *sinus verus* oder *rectus*, *ʿūbā hafikhā* = *sinus versus*, und in des Barhebraeus *Ascensio mentalis*, einer astronomischen Schrift aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts, findet sich *ʿūbā šawjā* = *sinus aequus*, *ʿūbā pešitā* = *sinus simplex*, der Definition nach = *gāib aʿzam* = *sinus maximus* (vergl. Payne-Smith, *Thes. Syriac.* 2823).

Die Uebersetzung durch „*sinus*“ ist demnach als richtig durch die syrischen Belege gesichert. Die verständigere Uebersetzung aber, welche einen Mann voraussetzt, dem der mathematische Inhalt und dessen klarer Ausdruck wichtiger ist als pedantische Wörtlichkeit, lautet natürlich „*chorda*“ und führt so mit innerer Nothwendigkeit auf die alte Bezeichnung der Inder zurück. Beide Uebersetzungen finden sich vor: die zweite, wie Koppe nachgewiesen hat, bei Plato von Tivoli, die erste (nach Koppe) bei Gerhard von Cremona (um 1175 in Toledo). Für diesen Theil der Frage wird also Koppe Recht behalten, im Uebrigen bleibt die Munksche Erklärung unangetastet.

* Verfasser einer philosophischen Encyclopädie, deren mathematischen Theil ich herauszugeben im Begriffe stehe.

Recensionen.

Ueber einige Apparate zur Demonstration der Präcession und ihrer Folgen, sowie über einige mit der Präcession im Zusammenhange stehende historische Thatsachen. Von Dr. KARL HAAS, kaiserl. königl. Professor. Mit zwei Illustrationen im Text und zwei Sternkarten. Aus dem Jahresberichte des kaiserl. königl. Staatsgymnasiums im VI. Bezirk. 30 S. Wien 1894.

Referent ist bei Weitem zu wenig Astronom, um die von Herrn Haas ersonnenen Vorrichtungen im Vergleiche mit anderen, welche den gleichen Zweck verfolgen, die Erscheinungen der Präcession anschaulich zu machen, fach- und sachgemäss beurtheilen zu können. Wir begnügen uns in dieser Beziehung auf die kleine Programmabhandlung selbst hinzuweisen, welche, wie uns scheint, mit grosser Unparteilichkeit einen solchen Vergleich anstellt. Die geschichtlichen Thatsachen, auf welche der Verfasser sich in der Ueberschrift bezieht, betreffen die Orientirung verschiedener Tempelbauten. Bekanntlich hat Nissen zuerst die Vermuthung ausgesprochen, die Orientirung römischer Tempel habe gemäss dem Sonnenaufgang am Gründungstage stattgefunden, und darauf beruhe die einigermaßen verschiedene Richtung der Seitenwände jener Heiligthümer. Von astronomischer Seite wurden dann, auf Nissen's Vermuthung weiter bauend, genaue Messungen vorgenommen, und deren Ergebnisse sind vornehmlich von Lockyer (*The dawn of Astronomy*. London 1894) gesammelt worden. Herr Haas stützt sich wieder auf dieses und einige andere ähnliche Vorarbeiten, deren Zuverlässigkeit seiner Auffassung noch keinen Zweifel zulässt. Vielleicht ist er darin etwas vertrauensselig verfahren. Jedenfalls dürfte es zu weit gegriffen sein, die genaue Orientirung als Beweis dafür anzusehen, dass die alten Aegypter die Präcession kannten und durch die Achsenrichtung des Tempels das Datum astronomisch festlegen wollten. Will man Kenntniss der Astronomie und Tempelorientirung in Verbindung bringen, so wird die Sache wohl umgekehrt sich verhalten. Man baute den Tempel so, dass beim Sonnenaufgang am Gründungstag das Götterbild im finsternen Heiligthume von den Strahlen hell erleuchtet wurde; man fand mit Erstaunen, dass Solches nicht immer zutraf, und über die Gründe nachdenkend mag man allmählich die Präcession erkannt haben.

CANTOR.

Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri tres.

Ad codicum fidem recensuit, germanica interpretatione et commentariis instruxit CAROLUS MANITIUS. Leipzig 1894. B. G. Teubner. XXXIV, 376 p.

Hipparch aus Nicäa in Bithynien hat Beobachtungen hinterlassen, deren älteste dem Jahre 161, deren jüngste dem Jahre 126 v. Chr. angehört. Die astronomisch bedeutsamste seiner Entdeckungen ist die der Präcession der Tag- und Nachtgleichen, welche ihm in Folge einer im Jahre 134 durch ihn entworfenen Liste sämmtlicher Fixsterne nach Ort und Grösse gelang. Aelter als diese Entdeckung muss das einzige bis auf uns gekommene Werk Hipparchs sein, weil manche Stellen desselben sicherlich anders lauten würden, wenn Hipparch damals die Präcession schon gekannt hätte. Andererseits ist eine ältere Schrift über die gleichzeitigen Aufgänge erwähnt, in welcher allem Vermuthen nach trigonometrische Rechnungen vorkamen, welche folglich die Erfindung dieser Behandlungsweise bereits voraussetzt und daher, wenn man nicht mit Tannery der Trigonometrie einen beträchtlich älteren Ursprung zuweist, sondern Hipparch für den ersten Trigonometer hält, nicht gerade eine Jugendschrift gewesen sein kann. Vielleicht darf man dem entsprechend das Jahrzehnt von 150 bis 140 als dasjenige vermuthen, innerhalb dessen die Kritik verfasst wurde, durch welche Hipparch dem berühmtesten älteren Astronomen Eudoxos von Knidos (um 360) und dem Dichter der Sternkunde Aratos (um 270) entgegentrat. Eudoxos hatte nämlich eine Beschreibung der verschiedenen Sternbilder verfasst, und Aratos hatte dieselbe, ohne an der Richtigkeit eines Wortes zu zweifeln, in Hexameter gebracht. Ein gewisser Attalos, Zeitgenosse des Hipparch, verfasste Erläuterungen zu dem Lehrgedichte, angeblich auf eigene erneute Beobachtungen sich stützend, in welchen er die meisten dortigen Angaben bestätigte. Das scheint für Hipparch die äussere Veranlassung gewesen zu sein, mit theilweise recht scharfen Gegenbemerkungen an die Oeffentlichkeit zu treten, und sie sind uns eben erhalten. Sie sind sogar in zwei etwas von einander abweichenden Fassungen erhalten, einer älteren, aufbewahrt in einer Vatikanhandschrift des XIV. bis XV. Jahrhunderts, einer jüngeren, für welche eine Florentiner Handschrift des XI. Jahrhunderts zu Gebote steht. Herr Manitius, der neue Herausgeber, hat sich wesentlich an den älteren Text gehalten und daneben eine deutsche Uebersetzung zum Abdrucke bringen lassen. Ein stattliches Wörterverzeichnis fehlt nicht und ebensowenig zahlreiche Anmerkungen, für welche der mit beobachtender Sternkunde nicht vertraute Leser recht dankbar zu sein alle Ursache hat.

CANTOR.

Studien über Claudius Ptolemäus. Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astrologie von FRANZ BOLL, Dr. phil. Be-

sonderer Abdruck aus dem 21. Supplementbände der Jahrbücher für klassische Philologie. Leipzig 1894. B. G. Teubner. S. 51 bis 244.

Während bisher Claudius Ptolemäus meistens in der Geschichte der Astronomie, daneben in der Geschichte der Physik, der Geographie, der Mathematik eine Rolle spielte, in der Geschichte der Philosophie dagegen kaum genannt wurde, während seinem Auftreten in der Geschichte der Astrologie vollends, soweit eine solche überhaupt existirt, die Berechtigungsfrage im Wege stand, hat Herr Boll gerade diese Seiten seiner Thätigkeit zum Gegenstand gründlicher Studien gemacht, welche zu der von ihm geplanten Ausgabe der *Tetrabiblos* unentbehrlich waren, und deren Veröffentlichung jetzt zum Voraus Leser für dieses Werk vorbereiten und werben wird, wenn nicht soll. Herr Boll hat zunächst die Lebensgeschichte des Ptolemäus in gesicherte Grenzen einzuschliessen gesucht, indem er es von 100—178 ansetzte. Ein arabischer Schwätzer giebt ausdrücklich an, Ptolemäus sei 78 Jahre alt geworden, und Herr Boll meint, wenn auch nicht dem übrigen, was dort von ihm erzählt wird, doch dieser nüchternen Zahlenangabe vertrauen zu dürfen, und er mag darin um so eher Recht haben, als er den Ursprung des anekdotischen Beiwerkes erklärt. Im zweiten Jahrhundert war die Physiognomik ein Lieblingsgegenstand griechischer Schriftsteller, und dem, der aus den Gesichtszügen auf die ihm unbekanntem Geistesgaben ihres Trägers schliesst, liegt es sehr nahe, zu dem ihm bekannten inneren Menschen, wenn wir so sagen dürfen, den entsprechenden äusseren Menschen nach freier Erfindung zu bilden. War solches der Fall, und rückt dadurch die Entstehung der Personalbeschreibung des Ptolemäus weit hinauf, so gewinnt zwar sie natürlich nicht, aber die mit ihr verbundene Altersangabe an Glaubwürdigkeit. Die Heimath des Ptolemäus nimmt Herr Boll mit Theodoros Meliteniotes in Ptolemais an. Als die Reihenfolge seiner Schriften ergibt sich 1. der *Almagest*, 2. die *Tetrabiblos*, 3. die *Geographie*. Die anderen Schriften müssen dazwischen eingeschoben werden, so z. B. die kleine Schrift von der erkennenden Kraft und dem wichtigsten Seelenvermögen, *περὶ κριτικῆς καὶ ἡγεμονικῆς*, vermuthlich zwischen 1. und 2. Das philosophische Glaubensbekenntniss des Ptolemäus kennzeichnet ihn als einen Eklektiker von peripatetischer Grundrichtung, welche aber durch mittelstoische Einwirkung, hauptsächlich der Schriften des Posidonios von Rhodos, eine wesentliche Verschiebung erlitt. Diese Auffassung, verbunden mit der angegebenen Reihenfolge der ptolemäischen Schriften, löst alle Zweifel an der Echtheit der *Tetrabiblos* und erklärt deren Widersprüche mit der jüngeren *Geographie*. In diesen Studien, welchen wir in unserer Werthschätzung gern einen Platz neben Heiberg's Archimedestudien und Euklidstudien einräumen, hat Herr Boll überall nur griechische Texte benutzt. Wir hoffen, er werde in seiner Ausgabe der *Tetrabiblos* gleichfalls Heiberg als Muster nehmen

und durch Beigabe einer Uebersetzung denjenigen Benutzern zu Hilfe kommen, die das Griechische nicht ganz geläufig lesen. CANTOR.

Jamblichii in Nicomachi arithmeticae introductionem liber. Ad fidem codicis Florentini edidit HERMENEGILDUS PISTELLI. Leipzig 1894. B. G. Teubner. IX, 195 S.

Seit Tennulius 1668 den Commentar des Jamblichus zur Arithmetik des Nicomachus im Drucke herausgab, war man für die Kenntniss des geschichtlich wichtigen Buches einzig auf jenen Druck angewiesen. Vor seiner Schnörkelschrift, welche die verschiedensten Buchstaben-Zusammenziehungen liebte, und von welcher das XVII. Jahrhundert entzückt war, mag manchem neueren Leser ein Grauen entstanden sein, und hatte man dieses überwunden, so kam ein neues Grauen über Einen durch den Zustand des Textes, der vielfach unverständlich erschien. Herr Pistelli hat nun endlich nach einer Florentiner Handschrift eine jener handlichen, sauber gedruckten Ausgaben hergestellt, welche die *Bibliotheca Teubneriana* bilden, und welche auf dem besten Wege sind, alle anderen Ausgaben zu verdrängen. Die Florentiner Handschrift ist nun freilich selbst nicht ganz fehlerlos und bedurfte mancher Correcturen, welche, wie immer in einem solchen Falle, mehr oder weniger als Vermuthungen aufzufassen sind. Dieselben gehören theils dem Herausgeber, theils Herrn Vitelli, theils insbesondere Herrn Heiberg an, welche beide letzteren Herren das Ergebniss ihrer Untersuchungen dem Herausgeber in uneigennützigster Weise zur Verfügung stellten. Wir bedauern nur mit Herrn Pistelli, dass er diese werthvollen Beiträge erst erhielt, als der grösste Theil des Buches schon gedruckt war, so dass nahezu drei Seiten voll Verbesserungsvorschlägen der Vorrede einverleibt werden mussten. Eine lateinische Uebersetzung ist dem griechischen Texte nicht beigegeben. Ein ausführliches Wortverzeichniss findet sich am Schlusse. CANTOR.

Abhandlungen über Variationsrechnung. Erster Theil: Abhandlungen von Joh. Bernoulli (1696), Jac. Bernoulli (1697) und Leonhard Euler (1744). Zweiter Theil: Abhandlungen von Lagrange (1762, 1770), Legendre (1786) und Jacobi (1837). Herausgegeben von P. STÄCKEL. 144 und 110 S. Leipzig 1894. W. Engelmann.

Die von Herrn Stäckel ins Deutsche übersetzten, beziehungsweise in der deutschen Ursprache neuerdings zum Abdruck gebrachten Abhandlungen bilden das 46. und 47. Heft von „Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften“. Es war nicht ganz leicht, unter den grösseren und kleineren Abhandlungen, die zur Ausbildung der sogenannten Variationsrechnung führten, diejenigen auszuwählen, welche man weglassen durfte, ohne dem Bilde der Entwicklung jenes Kapitels der Infinitesimalrechnung

einen ihm wesentlichen Strich zu rauben. Andererseits würde ein Abdruck alles dessen, was in dieser Richtung vorhanden ist, allzu umfangreich geworden sein. Herr Stäckel, ein jüngerer Mathematiker, der durch Veröffentlichungen in „Crelle's Journal“ und in den „Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften“ seine doppelte Begabung zu eigentlich mathematischen wie zu geschichtlichen Arbeiten an den Tag gelegt hat, scheint das Richtige getroffen zu haben. Joh. Bernoulli's Aufgabe der Brachistochrone und das von Jac. Bernoulli als Gegenaufgabe gestellte isoperimetrische Problem durften nicht fehlen. Wichtig war Jac. Bernoulli's Auffindung der Brachistochrone, weil in ihr das Princip zuerst ausgesprochen wurde, eine Curve, welche als Ganzes gewisse Maximalbedingungen erfülle, müsse auch in ihren kleinsten Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen. Die späteren Aufsätze beider Bernoulli durften fehlen, weil neue Grundgedanken der Variationsrechnung in ihnen nicht enthalten sind. Euler's *Methodus inveniendi etc.* zeigte dann zuerst, dass das Bernoulli'sche Princip nicht ausnahmslos gelte. Lagrange gab Namen und Algorithmus der Variationsrechnung und damit die analytische Form dessen, was bis dahin eine Auflösung geometrischer Aufgaben gewesen war. Legendre suchte analytische Kriterien dafür, ob ein Maximum oder ein Minimum stattfindet und leistete dadurch innerhalb der Variationsrechnung dasjenige, was Leibniz 1684 für die gewöhnlichen Maxima und Minima geleistet hatte. Jacobi endlich lehrte die zweite Variation genauer untersuchen und ergänzte Legendre's Versuch. Das sind die Arbeiten, welche in den beiden Heften vereinigt sind.

CANTOR.

Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Facultät der Universität Bern. Vorgelegt von JOHANN EGGENBERGER aus Grabs (St. Gallen) [Separatabdruck aus den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern für das Jahr 1893]. 72 S.

Jacob Bernoulli's *Ars conjectandi* gehört auch in dem unfertigen Zustande, in welchem der Verfasser sie zurückliess, zu den glänzendsten Schöpfungen des menschlichen Geistes und übt gewiss einen tiefgehenden Eindruck auf Jeden, der sie zu studiren unternimmt. Bahnbrechend für die Lehre von der Wahrscheinlichkeit a posteriori, welcher Bernoulli ihren Namen beilegte, ist die Muthmassungskunst auch eine Fundgrube für analytische Wahrheiten, die bei den Wahrscheinlichkeits-Untersuchungen zu Tage gefördert wurden. Das haben Gelehrte, wie De Moivre, wie Stirling, wie Laplace deutlich erkannt. Ein junger Schweizer, Dr. Eggenberger, hat, aufgefordert durch seinen Lehrer, Herrn Prof. J. A. Graf in Bern, die *Ars conjectandi* wie die späteren auf ihr fortbauenden Arbeiten

genauer Durchsicht unterworfen, und das Ergebniss dieser Forschung ist die uns vorliegende Doctor-dissertation. Wir stehen nicht an, sie als eine sorgsame und empfehlenswerthe Arbeit zu bezeichnen, mit deren Hilfe ein Leser sich über das allmähliche Entstehen des Gesetzes der grossen Zahlen, über dessen Beweis, über die damit im Zusammenhang stehenden Kapitel aus der Lehre von den bestimmten Integralen, eine leichte und gründliche Kenntniss verschaffen kann.

CANTOR.

Euclidis Opera omnia ediderunt J. L. HEIBERG et H. MENGE. Vol. VII. **Euclidis Optica**, opticorum recensio Theonis, catoptrica, cum scholiis antiquis edidit J. L. HEIBERG. Leipzig 1895. B. G. Teubner. LV, 362 S.

Schon in den Euklidstudien von 1882 hat Herr Heiberg aus einem Wiener Codex den Text der Euklidischen Optik zum Abdrucke gebracht, hat er überdies die Frage nach der Echtheit dieser Schrift in Erwägung gezogen, nachdem die Thatsache, dass Euklid Optisches verfasste, durch Zeugnisse des Proklos, des Marinos, des Theodoros Metochita (um 1300) gesichert erschien. Inzwischen hat Herr Heiberg sich mit Herrn Menge zur Anfertigung einer vollständigen Euklidausgabe vereinigt. Die fünf ersten Bände enthalten bekanntlich die Elemente. Der sechste noch nicht erschienene Band wird die Daten bringen. Der siebente Band hat jenem den Rang abgelaufen und vereinigt Euklid's Optik, eine Ausgabe derselben Schrift durch Theon von Alexandria, alte Scholien und eine Katoptrik. Der Optik ist eine jedenfalls im XIV. Jahrhunderte schon vorhandene lateinische Uebersetzung beigegeben. Dieselbe stammt unmittelbar aus dem Griechischen, arabische Bearbeitungen der Optik sind überhaupt noch nicht nachgewiesen. Aber auch die Originalausgabe der Euklidischen Optik, wenn wir so sagen dürfen, war weder im Urtexte, noch in der lateinischen Uebersetzung gedruckt. Gedruckt wurde dagegen wiederholt seit dem XVI. Jahrhunderte eine spätere Bearbeitung. Es war, wie man einer Pariser Handschrift glaubhaft entnommen hat, die Niederschrift einer Vorlesung über Euklid's Optik, welche einst Theon von Alexandria hielt, und unter diesen Namen hat Herr Heiberg sie neu abdrucken lassen. Sowohl der Wiener Codex der wirklichen Optik, als die zahlreicheren Handschriften von Theon's Vorlesungsheft sind mit alten Erläuterungen versehen, und auch sie sind in den uns vorliegenden Band aufgenommen. Eine Uebersetzung ist ihnen nicht beigegeben. Die Theon'sche Bearbeitung ist am besten in einem Vaticancodex des X. Jahrhundert's erhalten, und der gleiche Codex liefert auch eine Katoptrik nebst Scholien zu derselben. Sie sind ebenfalls der neuen Ausgabe einverleibt. Gehört die Katoptrik Euklid an? Hat Euklid überhaupt eine Katoptrik verfasst? Herr Heiberg ist geneigt, beide Fragen zu verneinen. Eine Katoptrik war allerdings zu Euklid's Zeiten vorhanden, findet sie doch in der Optik S. 30 lin. 3 mit den Worten $\omega\gamma$

ἐν τοῖς Κατοπτρικοῖς λέγεται Erwähnung, aber Herr Heiberg meint, in dieser Form könne ebensogut die Schrift eines anderen Verfassers, als eine eigene genannt sein. Wir theilen diese Ansicht vollkommen und verweisen zum Vergleiche auf die von Archimed erwähnten στοιχεῖα κωνικὰ, welche von Euklid herrühren dürften. Die im erwähnten Vaticancodex, aber auch in anderen Handschriften erhaltene Katoptrik nimmt Herr Heiberg für Theon in Anspruch, der allerdings nur den Inhalt alter Schriften in eine neue Form goss. Ob Archimed, der eine Katoptrik geschrieben haben muss, ob Heron, ob noch andere Schriftsteller von Theon benutzt wurden, bleibt zweifelhaft. Dieses der Inhalt des VII. Bandes der Euklidausgabe. Ueber die Textherstellung rechten oder auch nur berichten zu wollen, wäre eine Anmassung, vor der wir uns zu hüten wissen.

CANTOR.

Die Arithmetik des Magisters Georgius de Hungaria aus dem Jahre 1499.

Herausgegeben von COLOMAN v. SZILY und AUGUST HELLER. Separat-
abdruck aus den mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichten
aus Ungarn. Bd. XII. Budapest und Berlin 1894.

Herr Árpád Hellebrant, Unterbibliothekar der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, war der Wiederauffinder des in der Ueberschrift genannten Druckwerkes. Er entdeckte dasselbe in einem Sammelbande der Hamburger Stadtbibliothek, und Herr Coloman von Szily war am 16. October 1893 in der Lage, das Original in einer Akademiesitzung in Budapest vorzulegen. Er sprach damals schon Vermuthungen über den Druckort der Arithmetik aus, und die Akademie beauftragte ihn, in Gemeinschaft mit Herrn August Heller, einen Neudruck der Arithmetik zu besorgen und der Persönlichkeit des Verfassers nachzuspüren. Ueber den Vollzug dieses Auftrages konnte am 10. Juni 1894 berichtet werden. Das Ergebniss ist im Wesentlichen folgendes. Die Arithmetik von 1499 ist mit höchster Wahrscheinlichkeit in Holland verfasst und gedruckt und zwar letzteres in der Druckerei des St. Michaelklosters bei Schoonhoven. Der Verfasser, Magister Georg von Ungarn, muss Unterricht bei einem der spanischen Sprache mächtigen Lehrer gehabt haben, und es liegt nahe, an Sanchez Ciruelo zu denken, der am Ende des XV. Jahrhunderts in Paris lehrte, und der die Wörter *cuento* und *millon* für 10^6 und 10^{12} benutzte, wie die Arithmetik von 1499 es thut. Magister Georg empfahl seine Schrift mit besonderer Wärme den Theologen, und man hat daraus geschlossen, er werde dem gleichen Stande angehört haben, vielleicht mit einem Dominicaner Georgius Hungarus identificirt werden müssen, von welchem eine handschriftliche Arbeit über die Religion der Türken in Rom aufbewahrt wird. Die Arithmetik selbst zerfällt in drei Bücher, deren erstes die damals üblichen neun Rechnungsarten mit der Feder lehrt; das zweite Buch lässt die Rechnungen mit Hilfe von Rechenmarken ausführen; das dritte Buch

löst Aufgaben der Regeldetri. Wesentlich neues findet sich in dem Werkchen nicht, aber es ist ebensowenig einer bekannten älteren Schrift vollständig nachgebildet.

CANTOR.

Georg Philipp Harsdörfer als mathematischer und naturphilosophischer Schriftsteller. Von Prof. K. RUDOL (Sonderabdruck aus der Festschrift des Pegnesischen Blumenordens S. 301—403). Nürnberg 1894. Druck von J. L. Stich.

Im X. Bande der Allgemeinen Deutschen Biographie hat Herr W. Creizenach (S. 644—646) das schriftstellerisch ungemein reich erfüllte Leben des Nürnberger Rathsherrn Georg Philipp Harsdörfer geschildert, der sich in weiteren Kreisen besonders durch acht Bände Gesprächspiele (1642 bis 1649) bekannt gemacht hat, und der 1644 den Blumenorden an der Pegnitz stiftete. Dieser Orden besteht bis auf den heutigen Tag und hat 1894 durch eine umfangreiche Festschrift die 250. Wiederkehr seiner Gründung und ihren Gründer gefeiert. Herr Rudel hat dabei die Aufgabe übernommen, Georg Philipp Harsdörfer als mathematischen und naturphilosophischen Schriftsteller zu feiern, und ehrlich gesagt, beneiden wir ihn darum nicht. Harsdörfer war ein ungemein belesener Mann. Man könnte ihn mit Wagner im Goethe'schen Faust vergleichen und ihm die Worte in den Mund legen: Zwar weiss ich viel, doch möcht' ich Alles wissen. Die Wissbegier war auch von einem entsprechenden Mittheilungsbedürfniss begleitet. Nur schade, dass ihm zur gehörigen Verdauung des unterschiedlos in sich Aufgenommenen die Zeit nicht ausreichte, beziehungsweise dass er die Zeit dazu sich nicht gönnte. Harsdörfer giebt uns, darin hat Herr Rudel in seinen Schlussworten ganz Recht, ein getreues Bild der durchschnittlich zu seiner Zeit üblich gewordenen Anschauungen, aber damit ist es auch fertig. Mathematisch zu denken scheint er nicht fähig gewesen zu sein, und mit Daniel Schwenter vollends, zu dessen Erquickstunden er einen II. und III. Band 1651 und 1653 veröffentlichte, ist er nicht entfernt gleichwerthig. Was bei Harsdörfer von mathematischen Angaben richtig ist, das hat er zweifellos abgeschrieben, und meistens können wir die benutzten Schriftsteller nachweisen, wozu er übrigens durch deren Nennung fast immer den Weg zeigt. Einmal versagt unsere Quellenkenntniss. Sei ein regelmässiges Sechseck gegeben, dessen Seiten der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 heissen sollen, wo also 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 einander parallel sind. Durchschnittspunkte bezeichnen wir durch zwei Zahlen, so dass 12 den Durchschnittspunkt von 1 mit 2 bedeutet. Wird nun über 1 ein gleichseitiges Dreieck nach aussen errichtet, und verbindet man dessen Spitze mit 34 und 45, so zerlegen diese Hilfslinien die 1 in drei gleiche Theile. Der Beweis, den Harsdörfer nicht bringt, wie es in der Gewohnheit von Büchern im Charakter der Erquickstunden lag, den aber auch Herr Rudel beizufügen unterlassen hat, ist am Einfachsten so zu führen:

Man verlängere 2, 4, 6 nach beiden Seiten, so entsteht ein grosses gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten aus je drei Sechsecksseiten bestehen, und dessen Spitze 26 zugleich die Spitze des über 1 nach aussen errichteten gleichseitigen Dreiecks ist. Die von Harsdörfer angegebenen Hilfslinien dritttheilen die Grundlinie des grossen Dreiecks, also auch die ihr parallele Sechsecksseite 1. Von wem mag die hübsche Construction sein?

CANTOR.

Ueber die **parabolische Spirale**, eine Monographie von Dr. G. D. E. WEYER, Geheimrath und Professor in Kiel. Kiel und Leipzig 1894. Verlag von Lipsius & Tischer. 36 S.

Die kleine Untersuchung hat eine doppelte Bedeutung. Einmal wendet sie die Formeln der Differential- und Integralrechnung auf eine Curve an, welche in den bekannteren Lehrbüchern kaum jemals als Beispiel gewählt ist, wo solche erforderlich sind. Zum zweiten aber will Herr Weyer eine merkwürdige Eigenschaft dieser Curve in das Gedächtniss zurückrufen, welche so sehr in Vergessenheit gerathen ist, dass sie „nicht einmal in der Geschichte der Mathematik erwähnt wird“, wie die Vorrede sich ausdrückt. Herr Weyer ist zu dieser Anklage, von welcher auch Referent sich getroffen fühlt, vollkommen berechtigt, und wir weisen auf seine Abhandlung mit dem Bewusstsein hin, dass es uns sehr nützlich gewesen wäre, sie kennen zu lernen, bevor die erste Abtheilung des III. Bandes unserer Vorles. d. Gesch. d. Mathem. im Drucke erschien. Dort fehlt gleichfalls jede Notiz über eine Entdeckung Jacob Bernoulli's, welche im Januarheft 1691 der Acta Eruditorum enthalten, von ihrem Urheber in die Worte gekleidet worden ist: *unde patet quod in curvis etiam illis, quae rectificationem nondum acceperunt, nonnunquam partes aequales dissimilares assignari possunt*. Die Eigenschaft also, dass Bogenstücke einer und derselben Curve, welche der genauen Rectificirbarkeit sich entziehen, und welche einander keineswegs ähnlich sehen, doch als genau gleich lang bewiesen werden können, gehört auch Bernoulli's parabolischer Spirale an und wurde viel früher von ihm veröffentlicht, als Fagnano die entsprechende Eigenschaft der Lemniscate bekannt machte.

CANTOR.

Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten von J. H. LAMBERT (1772). Ueber Kartenprojection. Abhandlungen von LAGRANGE (1779) und GAUSS (1822). Herausgegeben von A. WANGERIN [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 54 und 55]. Leipzig 1894 bei Wilhelm Engelmann. 96 und 102 Seiten.

Seit die Behandlung complexer Veränderlicher und solche enthaltender Ausdrücke einen besonderen Zweig der Mathematik bildet und als Functionen-

theorie benannt wird, hat auch die Lehre von den Abbildungen sich wesentlich verändert. Die praktische Aufgabe ist mehr und mehr in den Hintergrund getreten, die theoretisch-mathematische Auffassung hat sie zurückgedrängt. Wie diese Veränderung allmählich eintreten konnte, wenn nicht musste, zeigt am deutlichsten die Vergleichung der drei berühmten Arbeiten von Lambert, Lagrange, Gauss, welche Herr Wangerin in zwei aufeinander folgenden Bändchen der bekannten Sammlung von Klassikern der exacten Wissenschaften neuerdings herausgegeben und mit Anmerkungen versehen hat. Die Lagrange'sche Abhandlung — eigentlich Abhandlungen, denn formell zerfällt sie in zwei Aufsätze — musste überdies aus dem Französischen übersetzt werden. Während bei Lambert nur vorübergehend im § 73 die imaginäre Einheit auftritt, und der Verfasser sich beinahe entschuldigt, hier von einer Mittheilung Lagrange's Gebrauch zu machen, stützt sich bei Lagrange selbst die Integration der Differentialgleichung, welche Lambert durch Reihenentwicklung vollzog, wesentlich auf die Anwendung des Imaginären. Mit ihrer Hilfe gewinnt er für die Kartographie brauchbare Formeln. Gauss endlich behandelt die Aufgabe ausschliesslich als eine mathematische; es ist fast Zufall, dass die Kartographie seine Ergebnisse verwerthen kann; der in unseren ersten Worten angedeutete Uebergang hat sich vollzogen.

CANTOR.

Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunction und Euler'schen Integrale. Von Dr. HANS SCHENKEL. Uster-Zürich 1894. 67 S.

Der Verfasser hat sich in dieser Promotionsschrift die aus dem Titel mit genügender Deutlichkeit zu entnehmende Aufgabe gestellt, über die Forschungen zu berichten, welche die sogenannten Gammafunctionen zu den fast bekanntesten Transcendenten gemacht haben. Dass auf 67 Seiten eine Vollständigkeit in dieser Beziehung unmöglich erreicht werden konnte, ist klar. Andererseits fehlt aber in H. Schenkel's Zusammenstellung keine der wichtigeren Arbeiten. Die Vorarbeiten Stirling's kurz erwähnend, verweilt er bei Euler, bei Gauss, bei Legendre, welche jene Transcendente so eigertlich geschaffen haben. In einem zweiten Abschnitte sind die Schriftsteller behandelt, welche dem von Legendre gebahnten Wege folgten. Cauchy und Binet, Dirichlet und Serret, Bourguet, Saalschütz, Pochhammer treten hier auf, und ihnen beigesellt Hankel und Pringsheim, wenn auch deren Abhandlungen als an Gauss sich anschliessend unseres Dafürhaltens besser in den dritten Abschnitt gepasst hätten, welcher mit Arbeiten über Facultäten sich beschäftigt. Kramp, dann Weierstrass, sind die hier mit Recht vorkommenden Namen. Wenn Prym's wichtige Untersuchungen als Schluss der Dissertation erörtert werden wollten, so haben wir Nichts dagegen einzuwenden, nur passen sie freilich nicht in den dritten Abschnitt. Wir geben freilich gern zu, dass

es recht schwer sein mochte, den Stoff inhaltlich und chronologisch so zu gliedern, dass beiden Eintheilungsgründen ihr Recht blieb, und die Uebersichtlichkeit nicht verloren ging.

CANTOR.

Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, sein Leben und sein Wirken nach den Quellen dargestellt von Dr. K. FINK, Professor an der Realanstalt zu Tübingen. Tübingen 1894. Bei der H. Laupp'sche Buchhandlung. 128 S.

Der Verfasser, welcher 1890 mit einem verfrühten und deshalb verunglückten Versuche den mathematisch-historischen Boden betrat, hat in den fünf seitdem verflossenen Jahren ungeheuer hinzugelernt. Wir haben uns dessen schon bei den 1892 und 1893 in dem „Correspondenzblatt für Gelehrten- und Realschulen Württembergs“ erschienenen Abhandlungen über Monge und Dupin erfreuen dürfen, die neueste Arbeit über Carnot vermehrt den damals erhaltenen guten Eindruck. Es ist Schade, dass die drei Abhandlungen, die eigentlich zusammengehören, nicht auch vereinigt abgedruckt sind. Bilden doch, wenn man Verwandtschaft und Lehrverhältniss gleichsetzen darf, Monge, Carnot, Dupin eine Gelehrtenfamilie aus drei aufeinanderfolgenden Persönlichkeiten, gewissermassen Vater, Sohn, Enkel. Und wie die drei Männer zusammengehören in ihren geometrischen Leistungen, so gehören sie zusammen durch ihr Vaterland, durch die allerdings in den wechsellvollen Schicksalen ihres Vaterlandes bedingte Thatsache, dass sie alle drei Männer von grossem politischen Einflusse waren, aus der Studirstube des Geometers hinaustretend in die Wirren des öffentlichen Lebens, nicht ohne den Weg auch wieder zurückzufinden. Herr Fink hat seine Abhandlung naturgemäss in zwei Abtheilungen zerfallen lassen. In der ersten schildert er den Bürger Carnot, und man merkt es ihm an, dass eine liebevolle Hand die Feder führte, ja, man gewinnt mit ihm den Menschen lieb, der fleckenreiner dasteht, als die meisten seiner Zeit- und Landesgenossen. In der zweiten, um die Hälfte längeren Abtheilung tritt uns der Gelehrte Carnot gegenüber. Herr Fink hat namentlich die *Géometrie de position*, aber auch die anderen Werke Carnot's getreu analysirt, so dass man aus seinem Berichte ein genügendes Bild jener bedeutenden Arbeiten erhält. Eine Würdigung derselben unter dem Titel Carnot's wissenschaftliche Bedeutung beschliesst die sehr lesenswerthe Schrift, die wir deshalb unseren Lesern warm empfohlen haben wollen.

CANTOR.

Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens der Gesellschaft ehemaliger Studirender der Eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich. Den Ehrenmitgliedern und Mitgliedern der G. e. P. gewidmet

vom Vorstande. Zürich 1894. Hofer & Burger, graphische Anstalt. X, 174 S.

Das Eidgenössische Polytechnikum in Zürich wurde am 16. October 1855 eröffnet. Es hatte schon 13 Jahre bestanden, als im Herbst 1868 der Gedanke laut wurde, eine Gesellschaft ehemaliger Polytechniker (G. e. P.) zu gründen, und am 10. Juni 1869 wurde der Gedanke zur That. Die 25 Jahre ihres Bestehens, auf welche die Gesellschaft im Sommer 1894 zurückblicken durfte, sind demnach nicht identisch mit der Lebensdauer des Polytechnikums selbst, aber die Beziehungen zwischen der Anstalt und den Schülern, welche sie ausbildete, sind so eng, und der Zeitpunkt, von welchem an die Ausbildung der älteren Schüler begann, geht so weit zurück, dass die Festschrift, durch welche der Vereinsvorstand die Mitglieder erfreute, ebensowohl eine Geschichte des Polytechnikums als der G. e. P. in trefflich ausgeführten Photographien und biographischen Notizen darstellt. Viele von den abgebildeten Lehrern und Schülern der Anstalt sind noch am Leben, die Wenigsten wirken noch an derselben. Sie war für Viele nur ein Durchgangspunkt, für so Viele, dass kaum eine Hochschule in Deutschland namhaft gemacht werden kann, die sich nicht einen oder auch mehrere ihrer Lehrer unmittelbar oder mittelbar aus Zürich geholt hätte. Um so zahlreicher sind dementsprechend die Persönlichkeiten, für welche die Festschrift ein liebes Andenken sein wird. Die Ausstattung lässt keiner Bemängelung Raum und macht der ausführenden Anstalt die grösste Ehre.

CANTOR.

Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. PAUL TANNERY et CHARLES HENRY. Tome II. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils.

Ueber den Plan und den ersten Band dieser Ausgabe ist in dieser Zeitschrift bereits berichtet. Der vorliegende zweite Band giebt in chronologischer Anordnung die Correspondenz Fermat's und zwar 98 Briefe oder Auszüge aus Briefen Fermat's und 31 an Fermat direct oder durch Zwischenpersonen gerichtete Briefe von Descartes, Roberval, Pascal, Digby u. A. Von diesen Schriftstücken sind 46 aus der *Varia Opera*, 3 aus dem *Commercium Epistolicum* von Wallis, 22 aus der von Clerselier veröffentlichten *Correspondance de Descartes*, 7 aus den *Oeuvres de Pascal*, 10 aus der *Correspondance de Huygens* abgedruckt, 34 werden zum ersten Mal aus den Handschriften veröffentlicht. Von den bereits früher gedruckten sind 3 handschriftlich ergänzt, nämlich die Briefe VI, XXXVIII bis (in der neuen Numerirung) der *Varia Opera* und XXVI der *Correspondance de Descartes*.

Die Herausgeber haben auch bei diesem Bande die grösste Sorgfalt darauf verwendet, einen möglichst correcten Text zu geben. Ich habe bis jetzt nur einen Druckfehler gefunden: S. 180 in der letzten Zeile von

unten muss es $3 - \sqrt[3]{8}$ statt $3 - \sqrt[3]{18}$ heissen. Da das vorhandene handschriftliche Material nicht ausreicht, Fermat's französische Orthographie wieder herzustellen, so ist principiell die Orthographie des 18. Jahrhunderts angewandt; nur die wenigen Autographen selbst sind genau reproducirt.

Auf Grund der jetzt vorliegenden Correspondenz wird es zwar nicht möglich sein, Fermat's Beweismethoden, deren Verlust noch heute beklagt wird, im Einzelnen wieder herzustellen; aber den geistigen Entwicklungsgang dieses Mathematikers, vielleicht des grössten, den Frankreich hervorgebracht hat, werden die Briefe, dank der sorgfältigen, von den Herausgebern mehrfach corrigirten Datirung, leicht verfolgen lassen. Hoffentlich findet die Mühe, welche die Herausgeber auf die Arbeit verwendet haben, bald die einzige ihrer würdige Belohnung: eine eingehende Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen Fermat's in ihrer allmählichen Entwicklung.

Was nun die einzelnen Briefe betrifft, so fesseln natürlich die jetzt zum ersten Male veröffentlichten unsere Aufmerksamkeit am meisten. Es ist hier ganz unmöglich, sie alle zu besprechen; es sei nur gestattet, aus den wichtigeren Einiges mitzutheilen:

Die Briefe XXXVII und XXXVIII ^{bis} beziehen sich auf die Auflösung von Gleichungen und lehren (in moderner Ausdrucksweise) Folgendes: Wenn $x = a$ eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ ist, so hat man nicht die häufig unbequeme Division von $f(x)$ durch $x - a$ zu vollführen, um die Gleichung $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades zu erhalten, welche die übrigen Wurzeln von $f(x) = 0$ zu Wurzeln hat, sondern man hat $x = y + a$ zu substituiren und in dem Resultat den Factor y zu unterdrücken. Dadurch erhält man eine Gleichung $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades in y , deren Wurzeln, jede um a vermehrt, die übrigen Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Besonders Gewicht legt Fermat auf die Sache nicht; sie erleichtere blos die Rechnung.

In dem Briefe XLIII vom Jahre 1640 wird zum ersten Male der später von Euler als unrichtig erwiesene Satz, dass der Ausdruck $2^{(2^n)} + 1$ für jedes ganze positive n eine Primzahl darstelle, ausgesprochen. Fermat sagt, er sei von der Richtigkeit des Satzes „quasi persuadé“. Auch in dem Briefe XLV, der ebenso wie XLVIII durch Bemerkungen über die pythagoreischen Dreiecke von Interesse ist, spricht Fermat von diesem Satze. Er erklärt, dass seine Untersuchungen ihn nicht befriedigen, und möchte von Frenicle einen Beweis des Satzes erhalten.

Der Brief LVII giebt den Satz: „Jede ungerade Zahl, die keine Quadratzahl ist, lässt sich ebenso oft als Differenz zweier Quadrate wie als Product zweier Factoren darstellen“. Mit Hilfe dieses Satzes wird untersucht, ob eine ungerade Zahl eine Primzahl sei oder nicht. Als Beispiel wählt Fermat die Zahl 2027651281 und findet, dass dieselbe zusammengesetzt, nämlich gleich 46061.44021 ist.

Der Brief LVIII behandelt die interessante Aufgabe: Alle pythagoreischen Dreiecke zu ermitteln, deren Katheten eine gegebene Differenz haben. Die Lösung, die Fermat giebt, beruht auf der Identität

$$(m^2 - n^2) - 2mn = 2m_1n_1 - (m_1^2 - n_1^2),$$

wenn

$$m_1 = 2m + n, \quad n_1 = m$$

ist.

Auch die Briefe LIX, LX und LXIII enthalten Aufgaben über pythagoreische Dreiecke, u. a. die Aufgaben: Ein rechtwinkliges Dreieck zu ermitteln, dessen Hypotenuse ebenso wie die Summe der Katheten durch je eine Quadratzahl ausgedrückt wird. — Drei pythagoreische Dreiecke anzugeben, deren Flächen x , y , z der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen.

Endlich sei noch auf den Brief CII hingewiesen. Jacobus de Billy hatte die Aufgabe gestellt: drei rationale Zahlen x , y , z zu finden, für welche jeder der neun Ausdrücke

$$\begin{aligned} x - xyz, \quad y - xyz, \quad z - xyz, \quad y - x - xyz, \quad y - z - xyz, \\ z - x - xyz, \quad xy - xyz, \quad y^2 - xyz, \quad yz - xyz \end{aligned}$$

ein Quadrat sei und als (wie er glaubte, einzig mögliche) Lösung $\frac{3}{8}, 1, \frac{5}{8}$ gegeben. Fermat antwortet, die Aufgabe lasse unendlich viele Lösungen zu, und giebt als eine zweite die Zahlen

$$\frac{10416}{51865}, 1, \frac{41449}{51865}$$

Die im ersten Bande ausgesprochene Aufforderung der Herausgeber, ihnen weiteres bisher unveröffentlichtes Material zugänglich zu machen, hat insofern Erfolg gehabt, als die Correspondenz um zwei Briefe bereichert wurde, die Briefe XXXIII (Frenicle an Mersenne, zur Mittheilung an Fermat bestimmt) und LXXXI^{bis} (Boulliau an Fermat). Es steht zu hoffen, dass noch andere Briefe aufgefunden werden, so dass dem dritten Band eine Ergänzung der Correspondenz beigelegt werden kann.

G. WERTHEIM.

Sefer Ha-Mispar, das Buch der Zahl, ein hebräisch arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra. Zum ersten Male herausgegeben, übersetzt und erläutert von Dr. MORITZ SILBERBERG. Frankfurt a. M. 1895. J. Kauffmann. IX, 118 und 80 S.

Der berühmte jüdische Gelehrte Abraham ibn Esra (1092—1167) hat ausser zahlreichen religionswissenschaftlichen Werken auch eine für die damalige Zeit nach Inhalt und Form vortreffliche Arithmetik geschrieben, über welche von Terquem, Leon Rodet, Steinschneider und zuletzt vom Referenten in dessen Schrift: „Die Arithmetik des Elia Misrachi“ Mittheilungen gemacht worden sind. Dieses Werk des Abraham ibn Esra, das in mehr als zwanzig Handschriften erhalten ist, also eine grosse

Verbreitung besessen zu haben scheint, liegt jetzt zum ersten Male gedruckt vor. Der Herausgeber, Dr. Moritz Silberberg, hat fünf Handschriften, die er in der Vorrede anführt, im Originale benutzt und auf Grund derselben den Text sorgfältig festgestellt; die einzelnen Varianten sind in den Noten angegeben. Er hat eine gute deutsche Uebersetzung und zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die das Verständniss erleichtern sollen oder interessante Hinweise enthalten.

Was nun den Inhalt des (nach Steinschneider's Darlegungen) kurz vor 1160 abgefassten Werkes betrifft, so setzt Abraham ibn Esra in der Einleitung das dekadische Zahlensystem auseinander; dabei giebt er zwar die Formen der Ziffern 1 bis 9, erklärt aber, dass er sich dafür der neun ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets bedienen werde. Die Null ist bei ihm kreisrund, von der Form eines Rades. „Das Rad bedeutet so viel wie Spreu, wie Stoppeln vor dem Winde und dient nur zur Wahrung der Stellen; in der fremden Sprache heisst es sifra“. Nach diesen Vorbemerkungen wird der Gegenstand in sieben „Pforten“ behandelt, von denen die vier ersten das Rechnen mit ganzen Zahlen betreffen. In der ersten Pforte wird das Multipliciren, in der zweiten das Dividiren gelehrt. Die dritte Pforte ist der Addition gewidmet; damit ist aber nicht die Rechnungsart gemeint, die für uns die erste ist (diese wird stillschweigend vorausgesetzt), sondern die Summation der arithmetischen und der geometrischen Reihen. Die vierte Pforte handelt von der (gewöhnlichen) Subtraction. Dass dabei überall auf die Neunerprobe hingewiesen wird, braucht wohl nicht erst bemerkt zu werden. Die fünfte Pforte lehrt das Rechnen mit gemeinen und astronomischen Brüchen und übt die Regeln an zahlreichen Text-Aufgaben von zum Theil interessanten Wortlaut ein. Die sechste Pforte spricht sehr ausführlich von den arithmetischen und geometrischen Proportionen, von welchen letzteren „der grösste Theil der Astronomie und die Bestimmung der Stellung der Planeten, sowie die Lösung der meisten arithmetischen Aufgaben abhängen“. Auch die harmonische Proportion wird erläutert. Wie die vorhergehende, so ist auch diese Pforte reich an gut gewählten Aufgaben. In der letzten Pforte wird das Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen auf eine sehr gründliche Weise behandelt; die gewonnene Kenntniss wird sodann auf Lösung von Aufgaben mittels des Pythagoreischen Lehrsatzes angewendet. Eigenthümlich dabei ist, dass die Annäherung an den Werth einer Wurzel sowohl von der einen wie von der entgegengesetzten Seite erfolgt, indem durch die Formeln

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b, \quad \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$$

Zahlen ermittelt werden, welche beziehungsweise kleiner und grösser als die gesuchte Wurzel sind.

Das ist ein kurzer Ueberblick über den Inhalt des interessanten Buches, für dessen Herausgabe alle diejenigen, die sich für die Geschichte der

Mathematik interessiren, dem Dr. Silberberg und den beiden Stiftungen, welche durch Uebernahme eines Theiles der Druckkosten die Veröffentlichung ermöglicht haben, zu grösstem Danke verpflichtet sind.

G. WERTHEIM.

L. KRONECKER. **Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale.** Herausgegeben von Dr. EUGEN NETTO. Leipzig 1894. 345 S.

Kurze Zeit nach dem Hinscheiden Leopold Kronecker's entstand der Plan, nicht bloß die Abhandlungen des Verewigten gesammelt herauszugeben, sondern auch den Cyclus der an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen. Denn gerade in diesen Vorlesungen hatte Kronecker die Anregung zu stets neuem und unermüdetem Schaffen gefunden; hier gab er gerne die jüngsten Resultate seiner Forscherthätigkeit, und zahlreiche Abhandlungen seiner späteren Periode sind nur eine abgeklärtere Form der in den Vorlesungen oft viel früher vorgetragenen Entwicklungen. So konnten denn auch die Vorlesungen am besten die Wege und Wünsche bezeichnen, in denen sich die Gedanken Kronecker's mit besonderer Vorliebe bewegt hatten.

Der erste Theil dieses von der königl. preuss. Akademie durch Einsetzung einer Commission geförderten Unternehmens liegt uns vor. Herr Netto hat sich der dankenswerthen Aufgabe unterzogen, die Theorie der einfachen und mehrfachen Integrale zu bearbeiten; er ist dieser Aufgabe mit voller Hingabe nicht bloß an die Sache, sondern auch an die Persönlichkeit Kronecker's gerecht geworden und hat den Vorlesungen den frischen Ton und das kräftige Urtheil, das ihnen eigen war, erhalten; von dem Reize, den das gesprochene Wort hat, ist durch die Pietät des Herausgebers auch in der Niederschrift wenig verloren gegangen.

In der geschichtlichen Entwicklung des Integralbegriffes laufen zwei verschiedene Auffassungen neben einander, je nachdem das Integral als Lösung einer Differentialgleichung, oder als Grenzwert einer Summe definiert wird. Der Erfinder der Integralrechnung, Leibniz, legte in durchaus consequenter Begriffsbildung die Summendefinition des Integrales zu Grunde und stellte die Operation der Summenbildung der des Differenznehmens als Umkehrung gegenüber.* Euler hingegen, unter dessen Händen die Theorie der Integrale zu einer eigenen Wissenschaft anwuchs, kennt kaum einen anderen Integralbegriff, als den der Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$. So findet sich im Eingange des Calculus integralis das charakteristische Scholion 1: Caeterum hoc signum \int vocabulo summae

* Vergl. hierzu M. Cantor: „Geschichte der Mathematik“ Bd. 3 S. 159.

efferi solet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tamquam summa omnium differentialium spectatur, est natum; neque maiore iure admitti potest, quam vulgo lineae ex punctis constare concipi solent. Der Grund für diese Abweisung des Leibniz'schen Integralbegriffes ist jedenfalls dadurch gegeben, dass die von Euler erzielten Fortschritte wesentlich auf der Kenntniss gewisser unbestimmter Integrale und ihrer Verwerthung für andere Integrale basirten; so trat denn der ursprüngliche und reinere Begriff bei ihm in den Hintergrund. Mit Dirichlet und Cauchy kommt er aber wieder zur ausschliesslichen Geltung, weil er allein die Existenz des Integrales in den Fällen verbürgt, in welchen eine Entwicklung der Function $f(x)$ in Potenzreihen unmöglich ist. An ihn knüpft auch der grösste Theil der späteren Untersuchungen an, welche sich auf die Grenzen des Integralbegriffes oder den Giltigkeitsbereich gewisser, sehr allgemeiner Integralrelationen beziehen. Die Kronecker'schen Vorlesungen gehen in der präcisen Formulirung dieser Bedingungen noch einen Schritt weiter.

Demgemäss sind die ersten Betrachtungen der genauen Erörterung der Summendefinition des Integrales gewidmet. Als eine zugleich nothwendige und hinreichende Bedingung wird diejenige formulirt, welche von Riemann in seiner Abhandlung über die trigonometrische Reihe gegeben worden ist; für die Zwecke der Anwendung hingegen wird die nur hinreichende, aber nicht nothwendige Bedingung aufgestellt, dass die zu integrirende Function „im Allgemeinen gleichmässig stetig“ ist. Diese Begriffsbildungen werden so gleich, ebenso wie die sich anschliessenden Elementarsätze, von einfachen auf Doppelintegrale übertragen. Die analogen Betrachtungen, welche bei einfachen Integralen den Uebergang zum unbestimmten Integral vermittelten, führen bei Doppelintegralen unmittelbar zu dem Fundamentalsatze von Cauchy.

Hierbei erweist es sich als nöthig, diejenigen Gebiete durch eine „natürliche Begrenzung“ auszusondern, in welchen die Voraussetzungen der Stetigkeit und der Endlichkeit durchbrochen werden. Die natürlichen Begrenzungen sondern sich aber in zwei verschiedene Klassen, je nachdem die von ihnen herrührenden Integralbeiträge bei unbegrenzter Abnahme des abgesonderten Gebietes gegen eine unendlich kleine oder gegen eine endliche Grenze convergiren; die ersten werden als „scheinbare“ natürliche Begrenzung von den zweiten unterschieden und können nachträglich wieder entfernt werden. Dieser wichtige Begriff der natürlichen Begrenzung, der hier mehr gelegentlich auftritt, erwächst erst später, in der Theorie der n -fachen Integrale, zumal in den Potentialbetrachtungen, zu voller Schärfe und Bedeutung.

Diesen grundlegenden Entwicklungen, welchen die ersten drei Vorlesungen gewidmet sind, reihen sich nunmehr die beiden Mittelwerthsätze an, welche die Abschätzung der Integrale gestatten.

Der zweite, von Paul du Bois-Reymond veröffentlichte Mittelwerthsatz (der aber auch von Weierstrass gefunden und benutzt worden

ist) führt im engen Anschluss an die schönen, von du Bois-Reymond angestellten Untersuchungen sogleich zu dem Dirichlet'schen Integrale, nämlich dem Satze, dass der Grenzwert des Integrales

$$J_1(w) = \int_0^{x'} f(x) \frac{\sin wx\pi}{x} dx \quad (x' > 0)$$

für unbegrenzt zunehmendes w gleich $\frac{\pi}{2}f(0)$ ist. An dieser Stelle mag die Bemerkung gestattet sein, dass die angegebene Beweisführung nicht ganz einwandfrei zu sein scheint. Denn aus der durch den Mittelwertsatz erhaltenen Gleichung

$$J_1(w) = f(0) \int_0^{w\xi} \frac{\sin x\pi}{x} dx + f(x') \int_{w\xi}^{wx'} \frac{\sin x\pi}{x} dx \quad (0 \leq \xi \leq x')$$

folgt der obige Satz nur dann, wenn $\lim_{w=\infty} w\xi = \infty$ ist. Nun wird zwar bewiesen, dass ξ nicht gleich Null ist; da aber ξ eine Function von w ist, so könnte diese Grösse immerhin noch in der Weise gegen Null convergiren, dass die erwähnte nothwendige Bedingung nicht erfüllt ist. Diese Schwierigkeit lässt sich aber dadurch heben, dass man das Integral $J_1(w)$ in zwei Theile von 0 bis α und von α bis x' zerlegt und den Zwischenwerth α gleich $\frac{x'}{w^\kappa}$ ($0 < \kappa < 1$) setzt, so dass für unendlich grosses w $\lim \alpha = 0$, aber $\lim w\alpha = \infty$ ist. Wendet man jetzt den Mittelwertsatz auf die Theile des Integrales an, so erhält man:

$$J_1(w) = f(0) \int_0^{w\xi_1} \frac{\sin x\pi}{x} dx + \left\{ f\left(\frac{x'}{w^\kappa}\right) - f(0) \right\} \int_{w\xi}^{w\xi_1} \frac{\sin wx\pi}{x} dx \\ + f(x') \int_{w\xi_1}^{wx'} \frac{\sin x\pi}{x} dx \\ \left(0 \leq \xi < \frac{x'}{w^\kappa} < \xi_1 < x' \right),$$

und in dieser Gleichung convergirt der erste Summand sicher gegen $\frac{\pi}{2}f(0)$, weil $\lim_{w=\infty} w\xi_1 > \lim_{w=\infty} w^{1-\kappa}x'$ unendlich ist, der zweite und dritte Summand werden aber beliebig klein, der dritte, weil das Integral, der zweite, weil der Factor des Integrales unter jeden Grad der Kleinheit herabgedrückt werden kann.

Das Dirichlet'sche Integral enthält eine sehr allgemeine Eigenschaft von Functionen, welche zunächst die Voraussetzung erfüllen müssen, in der nächsten Umgebung der unteren Grenze des Integrales gleichmässig stetig und nur abnehmend oder nur zunehmend zu sein. Eine Erweiterung

des Integrales kann entweder in einer Verallgemeinerung der Bedingungen, welche der Function $f(x)$ auferlegt werden, oder aber in einer Verallgemeinerung der periodischen Function gesucht werden, mit welcher $f(x)$ unter dem Integrale multiplicirt erscheint. Die erste Erweiterung führt zu den neueren Untersuchungen über den Giltigkeitsbereich des Dirichlet'schen Integrales, die zweite zu den wenig gekannten Betrachtungen, welche W. R. Hamilton bereits im Jahre 1843 über fluctuirende Functionen angestellt hat. In demselben Umfange, in welchem der Satz über das Dirichlet'sche Integral gilt, gelten auch die zahlreichen Folgerungen, welche aus ihm gezogen werden können. Das Fourier'sche Doppelintegral, das Poisson'sche Integral, die Fourier'sche Reihe, die Dirichlet'sche Summenformel, sie alle sind unmittelbare Folgerungen des Dirichlet'schen Integrales in der hier zu Grunde gelegten Gestalt. Auch die Methoden, welche man als die der mechanischen Quadratur zu bezeichnen pflegt, treten durch die Euler-Mac-Laurin'sche Summenformel in einen innigen Zusammenhang mit den Fourier'schen Reihen, und eine merkwürdige, von Kronecker selbst gegebene Summenformel stellt die Brücke zwischen der Dirichlet'schen und der Euler-Mac-Laurin'schen Summenformel her.

Nunmehr aber werden von der zehnten Vorlesung an die Betrachtungen, welche sich um das Dirichlet'sche Integral gruppiren, noch einmal von anderer Seite her, nämlich vom Cauchy'schen Integrale aus, in Angriff genommen. Unter den zahlreichen Anwendungen des Satzes von Cauchy, welche hier eine Erörterung finden, erscheinen zum Schlusse die auf den Integral-Logarithmus bezüglichen Betrachtungen; ein specieller Fall des Integral-Logarithmus ist Dirichlet's discontinuirlicher Factor. Dieser Factor giebt hier zu einer sehr interessanten Methode der Summation allgemeiner unendlicher Reihen Veranlassung, bei welcher die Coefficienten als die Differenzen einer discontinuirlichen Function erscheinen, welche an einer unendlichen Menge bestimmter, durch die Form der Reihe gelieferten Stellen Sprünge erleidet. Bei solcher Art der Betrachtung ergeben sich die Fourier'schen Reihen und Integrale nur als ein specieller Fall der allgemeineren hier untersuchten Gattung von Reihen. So gewinnen alle diese, im Einzelnen oft sehr verschiedenartigen Entwicklungen durch das Dirichlet'sche Integral ein natürliches Centrum und einen übersichtlichen Zusammenhang.

Beschränkte sich die Untersuchung bisher auf das Gebiet der einfachen und der Doppelintegrale, so schreitet sie jetzt (von der vierzehnten Vorlesung ab) zum allgemeinen n -fachen Integrale fort und wendet hier den Hauptsatz von der Transformation auf die Berechnung einiger Integrale an, welche über „Prismatoide“ oder über solche Gebiete des n -dimensionalen Raumes erstreckt sind, die auf Prismatoide abgebildet werden können. In diesem Rahmen finden auch die wichtigsten Sätze über die Gammafunction

eine summarische Erörterung.* Der Hauptsache nach sind aber die letzten Vorlesungen einer genauen und zum Theil eigenartigen Untersuchung der Potentiale n -facher Mannigfaltigkeiten gewidmet. Es werden zunächst die Green'schen Sätze, sodann die charakteristischen Eigenschaften des Potentials, immer unter möglichster Einschränkung der für die Giltigkeit nothwendigen Bedingungen und mit durchgängiger Benutzung des im Eingange erwähnten Begriffes der natürlichen Begrenzung, auf n -fache Mannigfaltigkeiten übertragen. Auch das Integral von Poisson wird in der Art verallgemeinert, dass die partielle Differentialgleichung $\Delta \mathfrak{F} = \Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ integrirt wird, wenn der Werth der stetigen Function \mathfrak{F} auf dem Grenzgebiete einer sphärischen Mannigfaltigkeit vorgegeben ist. Den Abschluss bildet die Bestimmung des Potentials einer ellipsoidischen Mannigfaltigkeit unter Zugrundelegung der beiden von Dirichlet für den dreidimensionalen Raum gegebenen Methoden.

Die erste besteht in einer Verification der fertigen Formel mit Hilfe der als charakteristisch erkannten nothwendigen Bedingungen, die zweite in einer directen analytischen Entwicklung mit Hilfe des discontinuirlichen Factors; bei jener kann die Gleichung der ellipsoidischen Mannigfaltigkeit, bei dieser das Anziehungsgesetz in allgemeiner Gestalt zu Grunde gelegt werden. Da aber der Anwendung der zweiten Methode das Bedenken entgegensteht, ob nicht natürliche Begrenzungen, welche sich z. B. bei einfachen Integralen als scheinbare und darum entfernbare erweisen, beim Uebergange zu vielfachen Integralen zu wesentlichen natürlichen Begrenzungen werden, so wird schliesslich der interessante Versuch unternommen, alle eintretenden unendlich kleinen Grössen ihrer Grössenordnung nach abzuschätzen, sie in der Form von Modulsystemen durch die ganze Rechnung mitzuführen, und erst am Ende der Untersuchung festzustellen, ob sie in der That zum Verschwinden gebracht werden können.

Vorstehende Inhaltsangabe möge in Kürze den Charakter der Kroncker'schen Vorlesungen kennzeichnen. Sie geben ihrer Natur nach keine vollständige Uebersicht über das behandelte Gebiet; aber sie bieten eine

* Beiläufig sei hier angegeben, dass die erste Formel auf S. 243 lauten muss:

$$\frac{1}{p^n} - \frac{e^{-p}}{p \Gamma(n)} \left(1 + \frac{n-1}{p} + \frac{(n-1)(n-2)}{p^2} + \dots \right),$$

und dass der in der Schlussbemerkung der 14. Vorlesung ausgesprochenen Forderung, die Gauss-Legendre'sche Relation:

$$\prod_{\kappa=0}^{n-1} \Gamma\left(a + \frac{\kappa}{n}\right) = \Gamma(na) \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{a n - \frac{1}{2}}}$$

direct auf dem Wege der Darstellung des Productes auf der linken Seite durch ein n -faches Integral zu erweisen, wohl vollkommen durch ein von Liouville in „Journal de Mathématiques“ (2^e sér. I, 1856, p. 82—88) angegebenes Verfahren entsprechen sein dürfte.

Fülle neuer Gesichtspunkte und Zusammenhänge und neben fertigen Resultaten auch eine grosse Anzahl reizvoller Perspectivesn.

Mögen dieselben auch an ihrem Theile dazu beitragen, dass der Ideenkreis Kronecker's Verbreitung und Fortbildung finde!

GEORG LANDSBERG.

Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. Von PAUL BACHMANN. Zweiter Theil. Die analytische Zahlentheorie. Leipzig 1894. B. G. Teubner. XVIII und 494 S.

Der Verfasser führt mit dem vorliegenden zweiten Theil (vergl. die Besprechung des ersten Theiles in dieser Zeitschrift, Histor.-liter. Abthlg. 38. Jahrg., S. 108—112) sein grosses Unternehmen um einen wichtigen Schritt weiter. Gerade die analytische Zahlentheorie, das heisst, die Anwendungen analytischer Methoden auf die Lehre von den Zahlen und ganzzahligen Formen, ist wohl der Theil des Ganzen, der noch am meisten gekannt und gewürdigt wird.

Denn diese Disciplin, welche bis auf Euler zurückgeht, von Dirichlet aber eigentlich erst begründet, und dann von Kummer, Kronecker, Dedekind, Lipschitz u. A. weitergeführt worden ist, ist eines der merkwürdigsten Beispiele für den inneren Zusammenhang scheinbar ganz getrennter Gebiete; schlägt sie doch eine Brücke zwischen den beiden HAUPTERSCHEINUNGSFORMEN des mathematischen Denkens, dem Stetigen und dem Unstetigen.

Es war nicht leicht, das so verschiedenartige Material zu einem Ganzen zu verarbeiten, es ist das dem Verfasser dadurch gelungen, dass er die Theorie der Dirichlet'schen Reihen in den Mittelpunkt stellte, um die sich alles Weitere gruppirt. Freilich sah er sich dadurch genöthigt, Untersuchungsreihen anderen Charakters, wie Hermite's Einführung des Stetigen in die Zahlentheorie, die Anwendungen der elliptischen Functionen u. A. in einen späteren Band zu verweisen.

Ein einleitender Abschnitt recapitulirt einige Hauptsätze über unendliche Reihen und Producte. Als unmittelbare Anwendung erscheint einmal die unbedingte Convergenz der Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$, sowie der ähnlichen Reihe

$$Z(s) = \sum_n \left(\frac{D}{n} \right) \frac{1}{n^s},$$

wo $\left(\frac{D}{n} \right)$ das Jacobi'sche Symbol bedeutet; andererseits die von Euler eingeführte Gleichheit der Reihe $\zeta(s)$ mit dem unendlichen Producte:

$$\prod_q \left(1 - \frac{1}{q^s} \right),$$

wo q alle Primzahlen durchläuft.

Ein zweiter Abschnitt macht den Leser mit der zweiten, hier in Frage kommenden Euler'schen Forschungsrichtung bekannt, nämlich mit den berühmten Euler'schen Sätzen über die Zerfällung der Zahlen in Summanden, welche auf der Entwicklung des Productes

$$(1 + x_1 z)(1 + x_2 z)(1 + x_3 z) \dots$$

beruhen. Der Verfasser hätte hier auf die merkwürdigen Anwendungen dieser Sätze auf die Anzahl von Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen hinweisen können, wie sie die abzählende Invariantentheorie lehrt.

Hieran schliessen sich einige Verallgemeinerungen von Gauss, Jacobi u. A., die hier sämmtlich direct und auf die einfachste Weise abgeleitet werden.

Der dritte, als Mittelpunkt des Ganzen anzusehende Abschnitt handelt von den Dirichlet'schen Reihen, den Verallgemeinerungen der Reihe $Z(s)$, nämlich Reihen von der Form:

$$S(s) = \sum \frac{a_n}{c_n^s},$$

wo c_n eine positive, mit n unendlich wachsende Grösse bedeutet, die a_n dagegen im Uebrigen beliebige complexe Grössen sind, von denen nur verlangt wird, dass die Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ auch bei unendlich wachsendem n endlich bleibt. Nach einem berühmten Princip von Abel ist eine solche Dirichlet'sche Reihe $S(s)$ für alle positiven Werthe von s nicht nur gleichmässig convergent, sondern auch eine stetige Function von S , woraus sich u. A. die wichtige Folgerung $\lim_{\rho=0} Z(1 + \rho) = Z(1)$ ergibt.

Die wichtigste Anwendung der Reihen S hat Dirichlet schon selbst gemacht. Bedeuten $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n \dots$ positive, mit n beliebig wachsende und der Grösse nach geordnete Constanten, so ist die Reihe

$$K = \sum_n \frac{1}{k_n + \rho}$$

für jedes positive ρ convergent, und $\lim_{\rho=0} (\rho K)$ ist ein gewisser Grenzwert ω , der z. B. in dem bedeutungsvollen Specialfall, wo k_n die Form $b + na$ besitzt, den Werth $\frac{1}{a}$ hat.

Hierauf hat Dirichlet seinen Beweis für den berühmten Satz gegründet, wonach eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied und deren Differenz zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Bekanntlich hatte Legendre aus diesem Satze, den er ohne Beweis, nur auf Induction gestützt, annahm, das quadratische Reciprocitätsgesetz hergeleitet.

In Anlehnung an einen Euler'schen Gedankengang wird eine gewisse Dirichlet'sche Reihe, die für alle positiven Werthe der Variablen s convergirt, für $s = 0$ dagegen divergirt, in ein Product umgewandelt, welches sich über alle in der Progression enthaltenen Primzahlen erstreckt. Wäre nun die Anzahl dieser Primzahlen eine endliche, so würde sich, indem man s gegen Null convergiren lässt, der Widerspruch ergeben, dass eine endliche Grösse gleich einer anderen wäre, welche über alle Grenzen hinauswächst.

Diese Dirichlet'schen Principien erweisen sich nun als grundlegend für die ganze analytische Zahlentheorie; beispielsweise hat Kronecker nachgewiesen, wie die ganze Theorie der binären quadratischen Formen, etwa von den ersten Elementen abgesehen, aus jenen Principien hergeleitet werden kann.

Hier werden aus der genannten Theorie zwei klassische Hauptprobleme herausgegriffen, die Bestimmung der Klassenanzahl und der Geschlechteranzahl.

Besonders beim ersteren Probleme tritt der Grundgedanke deutlich hervor, eine Mannigfaltigkeit von (positiven) ganzen Zahlen doppelt abzuzählen, nämlich die von den Zahlen m , welche durch die primitiven Formen von einer gegebenen Determinante Δ eigentlich darstellbar sind. Analytisch drückt sich das aus durch die Gleichheit zweier Summen, deren eine sich über alle dargestellten Zahlen m , deren andere sich über alle relativ primen Werthe der Unbestimmten x, y erstreckt.

Diese Grundformel wird einer Reihe von läuternden analytischen Processen unterworfen, wobei besonders die Gauss'schen Summen eine Rolle spielen, und führt so schliesslich zu einem überraschend einfachen Resultat, wonach z. B. bei negativer Determinante Δ das Doppelte der gewünschten Klassenanzahl gleich wird der — zwischen den Grenzen 0 und 2Δ enthaltenen — quadratischen Reste *mod* Δ , vermindert um die entsprechende Anzahl der Nichtreste.

Bisher ist noch keine Aussicht vorhanden, diese und ähnliche Resultate auf rein arithmetischem Wege zu gewinnen.

Als einer der interessantesten Abschnitte ist noch der zu erwähnen, in dem das Problem der Häufigkeit der Primzahlen, wohl das schwierigste der ganzen Zahlentheorie, behandelt wird.

Es wirkt geradezu packend, wenn geschildert wird, wie die Lösung einen ungeahnten Aufschwung nimmt, wo Riemann (die oben erwähnte) Function $\xi(s)$ analytisch durchforscht.

Sehr dankenswerth ist endlich ein Schlusskapitel über zahlentheoretische Functionen und deren mittlere Werthe, die noch eine grosse Zukunft zu haben scheinen. Es wird wohl wenige Fachgenossen geben, die bisher in der Lage waren, eine einzelne der bez. Abhandlungen von Mertens, Césaro, Gegenbauer u. A. zu lesen.

Vermisst hat Referent eine Reihe zahlentheoretischer Functionen, die die neuere Theorie der Modulfunctionen zu Tage gefördert hat.

Im Ganzen kann der Referent nur sagen, dass er selten ein so anregendes mathematisches Buch in der Hand gehabt hat. Möchte der Verfasser in der Fortführung seines schönen Unternehmens nicht erlahmen!

W. FRANZ MEYER.

Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker, par J. de SEQUIER, S. J., Professeur à l'université d'Angers. Berlin 1894. F. L. Dames. VIII und 339 S.

Der Zusammenhang, welcher zwischen der Theorie der elliptischen Functionen und der Zahlentheorie besteht, ist wegen seiner Tiefe von jeher als ein besonders würdiger Untersuchungsgegenstand angesehen worden. Um nur an neuere Autoren zu erinnern, so haben auf diesem Gebiete mit grossem Erfolge gearbeitet u. A. Dedekind, Gierster, Hurwitz, Klein, Pick, Weber, sowie neuestens auch Greenhill und Kiepert. Jedoch hat keiner an der Klärung des fraglichen Grenzgebietes zwischen den elliptischen Functionen und der Arithmetik so hervorragenden Antheil als Kronecker. Letzterer hat diesem Gegenstande eine grosse Reihe von Notizen (in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie) gewidmet, die sich durch mehrere Jahrzehnte hindurchziehen und die leider durch den Tod Kronecker's unvollendet geblieben sind. Bei der Auffassung Kronecker's kommen einige untergeordnete Gesichtspunkte zur Geltung, wie z. B. eine Abweichung von Gauss und Dirichlet in der Schreibweise der quadratischen Formen, wie ferner der vom sonstigen modernen Brauch abweichende Rückgang auf die Jacobi'sche Theorie der elliptischen Functionen an der Stelle der Weierstrass'schen. Von principieller Bedeutung jedoch ist es, dass Kronecker jener mit der Geometrie mittelbar oder unmittelbar in Zusammenhang stehenden Auffassung durchaus abgeneigt war, welche durch Klein in den Grenzgebieten der elliptischen Functionen und der Zahlentheorie mit Erfolg zur Geltung gebracht ist. Nach Meinung des Referenten ist nicht zweifelhaft, dass erst durch innere Verschmelzung der beiden hiermit angedeuteten Richtungen eine durchaus reife Durchbildung unseres Gegenstandes gewonnen werden kann. Einstweilen sind die fraglichen Forschungen noch so neu und unvollständig, dass jede auch einseitige Behandlung derselben willkommen sein muss; und in diesem Sinne ist es sehr freudig zu begrüßen, dass Herr J. de Segquier in dem in der Ueberschrift genannten Werke eine zusammenhängende Darstellung der Kronecker'schen Schöpfungen sammt allen Zwischenentwickelungen geliefert hat. In der neueren deutschen Literatur ist durch das bekannte Werk von Weber: „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“ das fragliche Gebiet gleichfalls allgemeineren Kreisen zugänglich gemacht. Den wesentlichen Unterschied beider Werke muss man darin

sehen, dass Seguiet in unmittelbarem Anschluss an Kronecker wö-
 möglich nichts von dessen Entwicklungen auslässt, dafür aber den durch
 die oft unterbrochene Kronecker'sche Publicationsweise gegebenen Mangel
 an reifer und abgeklärter Disposition in Kauf nimmt, während Weber
 sich auf das Wesentlichere beschränkend, seine eigenen und Dedekind's
 Auffassungen der Sache entschieden weit conciser zur Geltung bringt.
 Uebrigens sind beide Werke auch in der Anlage von einander verschieden;
 so nimmt Seguiet z. B. jene Entwicklungen Kronecker's auf, welche
 sich unmittelbar an die ursprünglichen Dirichlet'schen Untersuchungen
 über die Klassenanzahlen anschliessen und theils Vereinfachungen, theils
 Erweiterungen der Dirichlet'schen Ergebnisse enthalten. Herr Weber
 ist auf diese Gegenstände in mehreren Noten zurückgekommen, die er An-
 fang 1893 der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorlegte.

Seguiet hat in den Mittelpunkt seiner Darstellung zwei Formeln
 Kronecker's gestellt, auf die er auch bereits im Titel seines Buches
 hinweist. Mit der ersten dieser beiden Formeln hat sich Kronecker
 noch innerhalb der von Dirichlet selbst bereits gegebenen Gedanken-
 entwicklung gehalten. Es gilt, wenn

$$(ax^2 + bxy + cy^2)$$

eine ganzzahlige quadratische Form ist, Summen von der Gestalt:

$$\sum_{m, n} F(am^2 + bmn + cn^2)$$

in eine einfachere Form umzusetzen. Es bezieht sich dabei die Summe auf
 alle Paare relativer Primzahlen m, n , jedoch für den Fall positiver Deter-
 minante $b^2 - 4ac$ unter Einhaltung einer gewissen Ungleichung für m
 und n ; und es ist weiter F irgend eine Function, für welche die angezeigte
 Reihe absolut convergent ist. Bei stehendem Werthe $D = b^2 - 4ac$ soll sich
 die zweite Summirung:

$$\sum_{a, b, c} \sum_{m, n} F(am^2 + bmn + cn^2)$$

auf ein System repräsentirender Formen der zu dieser Determinante ge-
 hörenden Klassen beziehen. Auf Summen dieser oder ganz nahe verwandter
 Art bezieht sich die „erste Kronecker'sche Fundamentalformel“.

Mit der zweiten der beiden gedachten Formeln that Kronecker einen
 entschiedenen Schritt über Dirichlet hinaus; doch gilt diese Entwicklung
 einzig für negative Determinanten. Die Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m, n} \left(-am^2 + \frac{V-D}{b} mn + cn^2 \right)^{1+\varrho}$$

bezeichnet man für gewöhnlich im engeren Sinne als Dirichlet'sche
 Reihe; der Werth dieser Summe ist von (a, b, c) nur noch insofern ab-
 hängig, dass er einzig durch die Klasse bestimmt erscheint, das heisst,

dass er unabhängig von der besonderen repräsentirenden Form ist. Die Reihe ist für beliebiges, von Null verschiedenes, positives ϱ absolut convergent und giebt Anlass zu dem folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m, n} \left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2 + bmn + cn^2} \right)^{1+\varrho} = \frac{1}{\varrho} + A_0 + A_1 \varrho + A_2 \varrho^2 + \dots$$

Von Dirichlet ist bewiesen worden, dass das Anfangsglied der nach Potenzen von ϱ angeordneten Reihe $\frac{1}{\varrho}$ ist, und hierauf beruht die Anwendung der fraglichen Reihe auf die Bestimmung der Klassenanzahlen. Die höheren Coefficienten A_0, A_1, \dots sind durchaus noch von der Form (a, b, c) abhängig, und man muss es als die Hauptleistung Kronecker's in diesem Gebiete ansehen, dass er diese Abhängigkeit für A_0 in Erfahrung gebracht hat. Dieselbe ist ausgesprochen in der „zweiten Kronecker'schen Fundamentalformel“:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m, n} \left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2 + bmn + cn^2} \right)^{1+\varrho} \right]$$

$$= -2\Gamma'(1) + \log \frac{c}{\sqrt{-D}} + \frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - 2 \log \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - e^{2\nu\omega\pi i})(1 - e^{-2\nu\bar{\omega}\pi i});$$

hierbei sind ω und $\bar{\omega}$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0,$$

die für den vorliegenden Fall negativer Determinante conjugirt imaginär ausfallen. Kronecker ist auf diese Formel oft wiederholt zurückgekommen und hat ihre Gültigkeit schliesslich auch noch für den Fall beliebiger complexer a, b, c bewiesen, die nur der einen Bedingung genügen, dass ω und $-\bar{\omega}$ positiven imaginären Bestandtheil haben.

Es muss nun hier sehr betont werden, dass auf die Kronecker'sche Formel von Seiten der Klein'schen Theorie der Modulfunctionen ein neues Licht geworfen wird. Die Sachlage ist folgende: Geht man von der Form (a, b, c) zu einer äquivalenten Form über, so erfahren ω und $\bar{\omega}$ zugleich eine lineare ganzzahlige Substitution der Determinante 1. Schreibt man homogen $\omega = \omega_1 : \omega_2$ und $-\bar{\omega} = \eta_1 : \eta_2$, so stellt sich der bezeichnete Uebergang in der Gestalt dar:

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \eta'_1 = \alpha\eta_1 - \beta\eta_2,$$

$$\omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad \eta'_2 = -\gamma\eta_1 + \delta\eta_2;$$

es ist demzufolge $\omega'_1\eta_2 + \omega'_2\eta_1 = \omega_1\eta_2 + \omega_2\eta_1$, und man nennt in diesem Sinne ω_1, ω_2 und η_2, η_1 contragrediente Variabele. Es entspricht nun den einfachsten Grundsätzen der Theorie der Modulfunctionen und zugleich der Invarianz der Coefficienten A_0, A_1, \dots , nach Formen $\Phi(\omega_1, \omega_2 | \eta_1, \eta_2)$ der beiden Variablenreihen zu suchen, welche gegenüber der angegebenen

Gruppe der contragredienten Substitutionen invariant sind. Producte von Modulformen $\varphi(\omega_1, \omega_2) \cdot \psi(\eta_1, \eta_2)$ zeigen diese Eigenschaft bereits und hier steht als einfachstes Product:

$$\sqrt[12]{\mathcal{A}}(\omega_1, \omega_2) \cdot \sqrt[12]{\mathcal{A}}(\eta_1, \eta_2)$$

voran, wobei unter $\sqrt[12]{\mathcal{A}}$ eine bekannte Modulform $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension verstanden ist. Von ω und $\eta = \eta_1 : \eta_2$ allein abhängig erweist sich die Function:

$$F(\omega, \eta) = (\omega_1 \eta_2 + \omega_2 \eta_1) \cdot \sqrt[12]{\mathcal{A}}(\omega_1, \omega_2) \cdot \sqrt[12]{\mathcal{A}}(\eta_1, \eta_2),$$

deren Invarianz aus ihrem Bildungsgesetz unmittelbar klar ist. Auch der Logarithmus dieser Function ist noch eindeutig, wie man durch einfache Grundsätze der Theorie der Modulfunctionen zeigt; und nun ist es gerade der Sinn der Kronecker'schen Formel (in ihrer allgemeinsten Auffassung mit complexen a, b, c), dass

$$A_0 = -2F'(1) - 2 \log[(\omega_1 \eta_2 + \omega_2 \eta_1) \cdot \sqrt[12]{\mathcal{A}}(\omega_1, \omega_2) \sqrt[12]{\mathcal{A}}(\eta_1, \eta_2)]$$

ist, dass also A_0 bis auf eine additive und eine multiplicative Constante gerade mit $\log F(\omega, \eta)$ identisch ist. Man muss in diesem Sinne vom Standpunkte der Modulfunctionen die Kronecker'sche Leistung als den ersten Schritt in eine Theorie der Modulformen zweier contragredienten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, cogredienten Variablenreihen ansehen.

Das Segurier'sche Buch gruppirt sich um die beiden Kronecker'schen Formeln in der Art, dass es einmal Vorbereitungen zum Beweise derselben entwickelt, wobei spezifische Vorkenntnisse aus der Zahlentheorie in möglichst geringem Umfange vorausgesetzt werden; vornehmlich aber gilt die Darstellung Segurier's den Anwendungen der Kronecker'schen Formeln auf das Problem der Klassenanzahlen, sowie auf die Theorie der singulären Moduln, welche bei der complexen Multiplication der elliptischen Functionen auftreten. Der erste Theil des Buches zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Summen von Gauss, die Principien der Theorie der quadratischen Formen und die Composition der Formen behandelt, der zweite aber die erste Fundamentalformel von Kronecker, die Eintheilung der Klassen quadratischer Formen in Geschlechter und die verallgemeinerten Gauss'schen Summen. Mit der letzteren Bezeichnung werden gewisse Doppelsummen belegt, welche eine den gewöhnlichen Gauss'schen Summen verwandte Bauart zeigen, wobei übrigens die Exponentialgrösse der gewöhnlichen Gauss'schen Summen durch die Thetafunction ersetzt erscheint. Der zweite Theil des Buches ist der zweiten Kronecker'schen Formel gewidmet und entwickelt zugleich einige Sätze über Transformation und complexen Multiplication der elliptischen Functionen.

Der dritte Theil enthält endlich Anwendungen der beiden Kronecker'schen Formeln; und zwar steht hier im Mittelpunkte die Berechnung der singulären Moduln, für welche die complexen Multiplication der elliptischen Functionen stattfindet. Man hat für jeden besonderen Fall der complexen

Multiplication die Auswahl zwischen einer grossen Zahl singulärer Moduln, welche schliesslich alle im Wesentlichen dasselbe leisten; und man hat es wieder als einen Vorzug der Klein'schen Theorie anzusehen, dass sie in jedem Falle ein Urtheil an die Hand giebt, welches die einfachsten singulären Moduln sind. Der Gebrauch der Kronecker'schen Formel führt zu denselben singulären Moduln, auf welche Herr Weber von den Schläfli'schen Modulargleichungen aus geführt wird. Die letzteren liefern die sogenannten „Gleichungen der complexen Multiplication“, deren Wurzeln die singulären Moduln sind. Die Methode, mit welcher Herr Segurier operirt, führt durch eine eigenthümliche Verknüpfung der beiden Kronecker'schen Formeln direct auf die singulären Moduln. Es ergibt sich dabei zugleich eine sehr interessante Auflösung der Pell'schen Gleichung durch elliptische Functionen, welche sich der bekannten Auflösung dieser Gleichung durch Kreisfunctionen an die Seite stellt. Die Berechnung der singulären Moduln wird thatsächlich durchgeführt für einige von jenen 65 durch 4 theilbaren Determinanten, welche nach einem von Euler und Gauss als wahrscheinlich hingestellten Satze die einzigen Determinanten mit nur ambigen Klassen sind. Die Lösung der Pell'schen Gleichung durch elliptische Functionen wird für den Fall $t^2 - 53u^2 = 4$ durchgeführt. Die numerische Berechnung der singulären Moduln darf man bei der grossen Bedeutung, welche die Gleichungen der complexen Multiplication für die moderne Gleichungstheorie haben, als eine wichtige Aufgabe ansehen. Es sei bemerkt, dass Herr Weber die Berechnung für die sämtlichen 65 oben gemeinten Determinanten durchgeführt und die Resultate am Schlusse seines mehrfach genannten Werkes zusammengestellt hat.

ROBERT FRICKE.

P. MOLENBROEK. **Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie.**
Leiden 1893. Brill. 253 S.

Im Anschluss an die „Theorie der Quaternionen“ (vergl. Ref. im 36. Bd. S. 73, 74) lässt Verfasser hier eine systematisch geordnete Darstellung von Anwendungen folgen, in sechs Abschnitten:

1. Deutung einiger Formeln. Vermischte Aufgaben aus der Trigonometrie und Geometrie.
2. Der Punkt, die Ebene, die Gerade und die Kugel.
3. Die Flächen zweiter Ordnung.
4. Allgemeine Theorie der Flächen.
5. Allgemeine Theorie der Curven. Krümmung.
6. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.

Anhang: Das Princip der Dualität.

Wie man sieht, sind es keine neuen Probleme, die hier mit Hilfe des Quaternionencalculs gelöst bzw. in Angriff genommen werden, der grösste Theil findet sich schon in Hamilton's Elementen behandelt.

Hervorzuheben ist, dass auch die Theorie der Polaren beliebiger Ordnung eines Punktes in Bezug auf eine Fläche der Behandlung mittelst Quaternionen zugänglich gemacht wird. Doch bekennt Verfasser selbst, dass sein Verfahren hinter dem Joachimsthal'schen an Einfachheit zurückbleibt. Neu unter den Anwendungen ist der Versuch, die partiellen linearen Differentialgleichungen mittelst Quaternionen zu integrieren. Es werden zwei Methoden entwickelt, um Integrale der partiellen linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu finden.

Den Schluss des Bandes bildet ein Bogen Berichtigungen und Zusätze zu der „Theorie der Quaternionen“.

E. JAHNKE.

P. MOLENBROEK. *Over de toepassing der quaternionen op de mechanica en de natuurkunde.* Amsterdamer Bericht. 1893. S. 1—38.

Hamilton hatte die Absicht, in seinen „Elementen“ die Brauchbarkeit des Operators ∇ für physikalische Anwendungen nachzuweisen; doch kam diese Absicht nicht zur Ausführung. Nun entwickelte Tait in seinem „elementary treatise on quaternions“ eine diesbezügliche Methode, von der er indessen selbst zugiebt, dass sie keine directe ist. Diese Lücke sucht Verfasser auszufüllen, indem er von Gesichtspunkten ausgeht, die in seiner „Theorie der Quaternionen“ und in seiner „Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie“ eine ausführliche Darlegung gefunden haben. Die Gegenstände der einzelnen Kapitel sind: Laplace-Poisson'sche Differentialgleichung, Green'sches Theorem, Elasticitätstheorie, die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen, Wirbelbewegung und stationäre Potentialbewegung.

E. JAHNKE.

A. SICKENBERGER. *Leitfaden der elementaren Mathematik.* Zweiter Theil. Planimetrie. 2. Aufl. München 1893. Ackermann. 123 S.

Es ist eine knappe Darstellung des gewöhnlichen planimetrischen Pensums, welches hier und da noch eingeschränkt worden ist. So fehlt u. A. gänzlich der Begriff der harmonischen Theilung und mit ihm die Gruppe von Aufgaben, deren elegante Lösung auf dem Apollonischen Halbkreis beruht. Mit Recht ist der Ptolemäische Lehrsatz unter die Übungsaufgaben verwiesen.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dass den einzelnen Abschnitten Übungsbeispiele beigegeben sind. Hierbei verdient hervorgehoben zu werden, dass unter die algebraisch-geometrischen Aufgaben auch Maximum- und Minimum-Aufgaben leichtester Art aufgenommen worden sind, deren Lösung sich durch Discussion der Discriminante einer quadratischen Gleichung ergibt.

E. JAHNKE.

Bibliographie

vom 1. Mai bis 15. Juli 1895.

Periodische Schriften.

- Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1894, III und 1895, I. Leipzig, Hirzel. à 1Mk.
- Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem. Classe. 1895, I. München, Franz. 1 Mk, 20 Pf.
- Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe. Jahrgang 1894. Prag, Rivnac. 20 Mk.
- Verhandlungen der vom 5.—12. September 1894 in Innsbruck abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Redigirt von A. HINSCH. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.
- Landesvermessung d. Grossherzogthums Mecklenburg. 5. Theil. Die conforme Kegelprojection, angewandt auf das trigonom. Netz erster Ordnung. Schwerin, Stillner. 4 Mk.
- Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. 66. Versammlung in Wien, 24.—28. Sept. 1894. 2. Theil. Leipzig, Vogel. 15 Mk.
- Das Präcisionsnivellement der Rheinpfalz, ausgef. u. bearb. von C. OERTEL. Veröffentlichung der königl. bayer. Commission für internationale Erdmessung. München, Franz. 1 Mk, 50 Pf.
- Publicationen des astrophysikal. Observatoriums in Potsdam. Nr. 26. Spectra der helleren Sterne. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.
- Nr. 33. Meteorologische Beobachtungen in den Jahren 1888 u. 1889. Ebendasselbst. 8 Mk.
- Veröffentlichungen der königl. preuss. geodätischen Instituts. Telegraphische Längenbestimmungen i. d. J. 1890—1893. Berlin, Stankiewicz. 15 Mk.
- Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Gewitterbeobachtungen im Jahre 1891. Berlin, Asher. 3 Mk.
- Beobachtungen an Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1891. Zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1891. 3. Heft. Ebendas. 9 Mk.
- im Jahre 1894. 2. Heft. Ebendasselbst. 2 Mk, 50 Pf.
- Meteorologische Beobachtungen zu Potsdam i. J. 1893. Ebendas. 9 Mk.
- Deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1894. Von der Station I. Ordnung in Bremen. 5. Jahrg. Herausgeg. von P. BERGHOLZ. Bremen, Nüssler. 3 Mk.

- Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Herausgeg. von der Direction.
XVII. Jahrg. 1894. Hamburg, Friedrichsen. 15 Mk.
- Gezeitentafeln für das Jahr 1896. Herausgegeben vom Reichs-Marineamt.
Berlin, Mittler & Sohn. 1 Mk, 50 Pf.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 24. Bd. 1892. Heraus-
gegeben von E. LAMPE. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.
- Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften. Herausgeg. von
R. SCHWALBE u. F. PIETZKER. 1. Jahrgang. 1895. Nr. 1. Braunschweig,
Salle. 3 Mk.
- Jahresverzeichnis der an den deutschen Schulanstalten erschienenen Abhand-
lungen. VI, 1894. Berlin, Asher. 2 Mk. 20 Pf.
- Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der kaiserl. Akademie der
Wissenschaften in Petersburg. 17. Bd. Redigirt von H. WILD. Eben-
dasselbst. 43 Mk. 50 Pf.
- 6. Supplementband. Ebendasselbst. 25 Mk.
- Bulletin de l'académie des sc. de St. Pétersbourg. 5 série, tome I, No. 3 et 4.
Leipzig, Voss. 2 Mk. 50 Pf.
- tome II, No. 1 et 2. Ebendasselbst. 2 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

- WOHLWILL, E., Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadt-
bibliothek. Hamburg, Gräfe & Sillem. 2 Mk.
- DÜHRING, E., Rob. Mayer, der Galilei des 19. Jahrhunderts. 2. Theil.
Leipzig, Naumann. 2 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

- WEIERSTRASS, K., Mathematische Werke. Unter Mitwirkung der königl.
preuss. Akademie herausgegeben. 2. Bd. Berlin, Mayer & Müller. 21 Mk.
- BIERMANN, O., Elemente der höheren Mathematik zur Vorbereitung auf
Differentialrechnung, Algebra und Functionentheorie. Leipzig, B. G.
Teubner. 10 Mk.
- GROHMANN, E., Zur Auflösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades.
Wien, Hölder. 1 Mk.
- SCHÜLKE, A., Vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physi-
kalischen und astronomischen Tabellen. Leipzig, B. G. Teubner. 60 Pf.
- FISCHER, E., Reihenentwickelungen mit Hilfe arithmetischer Progressionen
höherer Ordnung (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.
- GLASER, St., Ueber einige nach Binomialcoefficienten fortschreitende Reihen
(Programm). Ebendasselbst. 1 Mk.
- SCHAFHEITLIN, P., Ueber die Producte der Lösungen homogener linearer
Differentialgleichungen (Programm). Ebendasselbst. 1 Mk.
- LINSENBARTH, H., Ueber Unicursalcurven dritter Ordnung (Programm).
Ebendasselbst. 1 Mk.

- MARGGRAFF, B., Primitive Gruppen, welche eine transitive Gruppe geringeren Grades enthalten (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.
- STEINER, J., Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Herausgeg. von A. v. OETTINGEN (Ostwald's Klassiker Nr. 60). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.
- GYSEL, J., Zur Construction einer ebenen Vielecksfläche (Programm). Schaffhausen, Schoch. 1 Mk.
- GILLE, A., Lehrbuch der Geometrie für höhere Schulen. 2. Theil. Trigonometrie und Stereometrie. Halle, Buchhandlung d. Waisenh. 40 Pf.
- LÄNGST, H., Kegelschnitte, vorbereitet. Curs. Stuttgart, Kohlhammer. 1 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

- WÜLFING, A., Uebersicht der einfachen Formen der 32 krystallographischen Symmetriegruppen. Stuttgart, Schweizerbart. 5 Mk.
- Die königl. preuss. Landestriangulation. 7. Theil. Berlin, Mittler & Sohn. 15 Mk.
- RÜMKER, G., Positionsbestimmungen von Nebelflecken und Sternhaufen. Ausgeführt auf der Hamburger Sternwarte in den Jahren 1871 bis 1880. Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk. 50 Pf.
- STECHELT, C., Bahnbestimmung des Planeten Tyche (258). Ebendasselbst. 1 Mk. 50 Pf.
- FAUTH, P., Astronomische Beobachtungen aus den Jahren 1893 und 1894. Theil II. Mondbeobachtungen. Kaiserslautern, Gotthold. 15 Mk.

Physik und Meteorologie.

- TESLA'S Untersuchungen über Mehrphasen- und Wechselströme hoher Spannung und Frequenz. Von COMMERFORD MARTIN; deutsch von H. MASER. Halle, Knapp. 15 Mk.
- EXLER, K., Grundzüge der Elektrotechnik. Wien, Spielhagen & Schurig. 10 Mk.
- BEDELL, F. und CREHORE, C., Theorie der Wechselströme, analytisch und graphisch. Deutsch von H. BUCHERER. München, Oldenbourg. 7 Mk.
- ROBEL, E., Die Sirenen. 3. Theil. Der Streit um die Definition des Tones (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.
- SCHNEIDER, E., Entstehung und Prognose der Wirbelstürme. Regensburg, Nationale Verlagsanstalt. 2 Mk. 40 Pf.
- JELINEK, Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen, nebst Hilfstabeln. 2. Theil. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.

Historisch-literarische Abtheilung.

Anonyme Abhandlung über das Quadratum Geometricum.

Herausgegeben von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

Hierzu Tafel XII Figur 1—8.

Die folgende Abhandlung findet sich im Codex Latinus Monacensis 14908, Blatt 308—311. Sie lehrt die Herstellung des Quadratum Geometricum nicht ganz übereinstimmend mit Georg Peurbach, jedoch auch zu etwas anderem Zwecke bestimmt. Der ungenannte Verfasser lehrt nach der Beschreibung desselben seine Anwendung zum Tiefen-, Längen- und Höhenmessen. Von den Vorschriften, welche sich in der Geometria Gerberti finden, und welche mit einem bei weitem unvollkommeneren Instrumente gemacht werden, haben die hier gelehrten vor allem das voraus, dass sie auch den Grund angeben, auf welchem die ganze Anwendung desselben beruht, dass nämlich stets zwei ähnliche Dreiecke vorhanden sind, man von der daraus folgenden Proportion stets drei Glieder kennt, und dass man also auch leicht das vierte unbekanntere berechnen kann. Der Verfasser nimmt dabei auf Euklid Buch 6, Prop. 4 Bezug und beruft sich an einer anderen Stelle auf den Algorismus de minutiis. Es ist darunter, wie mit Sicherheit nachgewiesen werden kann, der Algorismus de minutiis des Johannes de Lineriis* gemeint, der sowohl im Originale, wie in einer weiter ausgeführten Bearbeitung als zweiter Theil einer um-

* In den gedachten Ausgaben dieses Algorismus so wenig als in den meisten Handschriften findet sich die Widmung des Joh. de Lineriis, welche er seinem Werke voraussendet. Diese Widmung ist erhalten in der Handschrift der Amploniana in Erfurt Qu. 3497, wo sie Blatt 11 folgendermassen beginnt:

Multiplacis philosophiae variis radiis illustrato domino
Roberto de Bardis de Florencia Glacunenensis ecclesiae inclito
decano Johannes de Lineriis Anbianensis diocesis astronomi-
cae veritatis amator...

Daraus dürfte wohl absolut sicher hervorgehen, dass Joh. de Lineriis kein Sicilianer gewesen ist, und also Johannes Siculus eine andere Persönlichkeit sein muss.

fassenderen Schrift mit dem Gesamttitel *Algorismus Ratisponensis* in derselben Handschrift, sowie in noch einigen anderen der Münchener Hof- und Staatsbibliothek sich findet, und am Schlusse genau das enthält, was unser Verfasser als darin enthalten angiebt.

Von ganz erheblichem Interesse dürfte die am Schlusse des ganzen Aufsatzes hinzugefügte Tabelle sein, welche dazu bestimmt ist, dem Messenden die Rechnung abzunehmen. Wenn man dieselbe nach der gegebenen Anweisung nachrechnet, so sieht man leicht, dass die beiden ersten Columnen nach dem ersten Theile der Regel, die beiden letzten nach dem letzten Theile derselben berechnet sind. Es sind dabei immer die *Cubiti* auf Ganze, theils mit plus, theils mit minus, abgerundet; ebenso im zweiten Theile die *Gradus* und *minuta* auf ganze *minuta*. So ist z. B. bei 52' statt $69\frac{3}{15}$ rund 69, bei 44' statt $81\frac{9}{11}$ das zu Grosse 82 gesetzt. Ebenso ist bei 46 cubiti *ec* um etwa 16" zu klein, bei 22 cubiti um fast 22" zu gross angegeben. Es ist daraus jedenfalls ersichtlich, wie wenig es damals noch auf wirkliche Genauigkeit ankam. Dass die Tabelle sich nur auf die in Figur 2, 3 und 4 dargestellten Messungen bezieht, ist einleuchtend.

|| De quadrato geometrico componendo.

| 308

Disponatur quadratum aereum seu ligneum aequilaterum undique planum, ut nusquam declinet, quod sit verbi gracia *abcd*; et quanto maior fuerit, tanto cereius. Ducanturque in lateribus quadrati praedicti lineae 5 rectae et aequales constituentes undique angulos rectos, qui sint *ab*, *bc*, *cd* et *da*, quarum duae, scilicet *cb* et *dc*, dividantur in 60 partes vel lineas praedictas aequaliter, quas partes vocabo gradus, quin per ipsos regula graditur. Quos gradus iterum subdividam in 60 partes, et vocabo eas minuta, scilicet si instrumentum fuerit magnum, vel subdividam in 10 alias partes grossiores, ut in 12 etc., et hoc, si instrumentum fuerit parvum. Deinde in unoquoque angulorum quadrati, scilicet *a*, *b* et *d*, *c* praecise in concursu linearum ordinetur clavus unus, qui tres clavi sint sibi omnino coaequales; per quas ordinetur regula seu volvella directa et plana, quae vocetur *de* seu *ac*, cuius longitudo fiat secundum longitudinem 15 diametri quadrati. In cuius volvellae medio ducatur linea recta, super quam lineam rectam circa punctum *d* fiat foramen, per quod volvella clavo *d* seu *a* competenter inmitti possit. In alio vero extremitate regulae, scilicet circa punctum *e*, infigatur scioterus, prioribus scioteris omnino aequalis ac eiusdem altitudinis inaequando *a* stilo vel clavo *e* versus 20 stilum *d*, qui per medium longitudinis regulae abscindatur medietas latitudinis ipsius regulae secundum longitudinem lineae in *ec* factae, ita tamen, ut praecise medietas lineae praedictae secundum | longitudinem | 308
moveat intacta, ut contactus medietatis volvellae et linearum *cb* et *dc* undique videri possit. Dividatur deinde volvella secundum divisiones et 25 subdivisiones omnino aequaliter illis, quae sunt in lateribus quadrati factae,

quas ipsa volvella capere possit. Ultimo ordinetur perpendicularum, quod in lateribus quadrati ab et ad aptum sit suspendi, quo possit cognosci, quando ipsum quadratum steterit perpendiculariter orizonti (Fig. 1).

Constructo quadrato praedicto ad eius usum enudum est. Sciendum autem est, quod hoc instrumentum est de geometria, id est de triangulorum mensura, qui triplex est, scilicet profundi, quae dicitur bassimetria; plani, quae dicitur planimetria; e talti, quae dicitur altimetria.

Primus modus.

De prima specie, scilicet bassimetria. Si igitur profundum mensurare volueris, exempli gracia fontem sive puteum, suspende quadratum in ore putei perpendiculariter, et per duos stilos, scilicet a et b , ymum profundi respiciens punctum ymum, in quo visus terminatur, nota, et vocetur punctus ille super f . Deinde volvellam ed clavo d inmissam volve hincinde tandiu, donec iterum punctum ymum prius notatum, scilicet f , per duos stilos d et e videris, et immota volvella diligenter nota, ubi ipsa cum sui medio secat latus bc , et hic punctus semper vocetur sectionis e . Unde sicut se habet latus bc ad ce , sic se habet, scilicet fa , quae est profunditas putei, ad latus ad . Unde supposito, quod latus quadrati sit cubiti, tunc quociens bc vel de continetur ce , tot cubitorum erit profunditas putei praecedentis (Fig. 2).

Secundus modus.

De secunda specie, scilicet planimetria. Unde si planum metiri volueris, pone quadratum in terra aut in alio sic, ut terminum plani mensurandi, scilicet punctum f , per duos stilos a , b videre possis. Quo sic viso move volvellam super d positam, ut iterum per eius stilos punctum f videas. Deinde ubi volvella secat latus bc , scilicet punctum e , diligenter nota. Tunc quociens dc continet ce , tociens distancia spacia mensurandi, scilicet af , continet latus ad (Fig. 3).

Tercius modus.

De tertia specie geometriae, scilicet altimetria. Unde, dum altum metiri volueris, considera, an ipsius alti basis sit accessibilis, an non, quae basis vocatur g . Si ergo accessibilis basis fuerit, tunc affige quadratum parieti iuxta basim, id est punctum g , et per duos stilos a , b aliquod signum in extremitate altitudinis considera. Deinde idem signum per stilos, volvella ed stilo d infixam, vide, et procede praecise et omnino, sicut fecisti in planimetria (Fig. 4). *Aut sic:* Affige volvellam super stilum a et eam volve super punctum c , et quadrato perpendiculariter tento accide ad basim vel recede tandiu, donec per stilos regulae cacumen rei videtur, quia tunc distancia, quae est inter te et basim rei, est aequalis altitudini rei eiusdem addita ipsi distancia tua statura (Fig. 5).

Si vero basis rei altae mensurandae non accessibilis fuerit, aut aliquid, ut praedicto modo mensurare non possis, impediatur, tunc in loco tibi competenti stando secutam longitudinem, quae est inter te et cacumen rei altae mensura omnino eo modo, qui dictus est in planimetria, et vocetur longi-

tudo illa af . Qua habita sita quadratum perpendiculariter orizzonti, et volvellam a stilo infingendo per eius stilos cacumen rei praedictae respice. Quo viso, ubi volvella secat quadratum, scilicet punctum e , diligenter nota. Scias autem, si regula ceciderit ultra c versus b , tunc distancia inter te et basim est minor altitudine rei, et tunc, sicut se habet ea ad ab , sic se habet af ad fg , scilicet ad altitudinem rei. Sed quia tibi tria, ea , ab et fa , sunt nota, igitur fg quartum, quae est altitudo rei, est nota (Fig. 6). Si vero regula ceciderit ultra c versus d , tunc distancia inter te et basim rei est maior altitudine rei eiusdem. Et tunc, sicut se habet ae ad ed , sic se habet af ad fg , quae est altitudo quaesita. Sed quia iterum tibi tria, scilicet ae , cd et af , sunt nota, igitur quartum, scilicet fg , quae est altitudo rei, est notum. Haec autem regulae, scilicet inveniendi ignotum per nota, ponuntur in fine algorismi de minuciis (Fig. 7).

Si vero fueris in cacumine montis, et altitudinem eius in eo stans scire 15 *volueris*, tunc scias longitudinem | a cacumine montis eiusdem, in quo stas, |³¹⁰ usque ad pedem eius per modum dictum in secunda specie artis huius. Deinde sita quadratum perpendiculariter ipsi terra cum latere dc versus terram et affiges regulam stilo a , et per eius stilos punctum f in pede montis prius visum nota. Deinde considera punctum e , in quo scilicet 20 regula secat latus quadrati. Unde, sicut se habet ae ad ad aut cb , sic se habebit af ad ag , quae est montis altitudo quaesita, posito monte verbi gracia hdk (Fig. 8).

Fundatur autem haec tota practica super quartum sexti Euclidis, quae est: Omnium duorum triangulorum, quorum anguli unius angulis alterius sunt aequales, latera aequos angulos respiciencia sunt proporcionalia.

Sed propter faciliorem modum in quadrato isto volo ponere certos numeros cubitorum et aliarum quantitatum, cuius quantitatis latus fuerit quadrati, certis gradibus et minutis in latere quadrati notatis correspondentes. 30

Unde quando regula unum minutum, quod est sexagesima pars gradus, a c versus b eundo resecuerit, tunc longitudo mensurandi 3600 cubitorum est, supposito, quod latus quadrati unius cubiti fuerit. Si vero regula a c versus b per duo minuta distiterit, longitudo praedicta 1800 cubitorum 35 erit; si vero per tria minuta regula a c | versus b elongaverit, longitudo |³¹⁰ mensuranda 1200 cubitorum erit, et sic omnes istos numeros notando usque ad 60 gradus in latere quadrati positos ponuntur in tabula praescripta.

Inveniuntur autem hii numeri sic. Vide per quot minuta distat e a c , et quociens ipsa continetur in latere quadrati, quod scire potes dividendo 40 per ea 60 gradus: tot cubiti correspondent minutis praedictis. Vel quod sit dc scilicet primus, ce verbi gracia secundus, fa , scilicet ignotus, tercius, ad , scilicet unitas, est quartus. Duc igitur etc. Vel e converso si habes cubitos, et quot ipsis gradus et minuta correspondent, scire volueris, tunc

pone cubitos, scilicet lineam fa primum; et ab , scilicet latus quadrati, secundum, id est unitatem; et dc , scilicet 60 tertium; et duc secundum in tertium et divide per primum, et quot proveniunt, sunt gradus et minuta, 311] aut minuta tantum praedictis cubitis correspondencia.]

Sequitur tabula.

Gra- dus	Minuta	Cubiti	Gra- dus	Minuta	Cubiti	Gra- dus	Minuta	Cubiti	Gra- dus	Minuta	Cubiti
0	1	3600	0	31	116	1	0	60	2	0	30
0	2	1800	0	32	112	1	1	59	2	4	29
0	3	1200	0	33	109	1	2	58	2	9	28
0	4	900	0	34	106	1	3	57	2	13	27
0	5	720	0	35	103	1	4	56	2	18	26
0	6	600	0	36	100	1	6	55	2	24	25
0	7	514	0	37	97	1	7	54	2	30	24
0	8	450	0	38	95	1	8	53	2	37	23
0	9	400	0	39	92	1	9	52	2	44	22
0	10	360	0	40	90	1	11	51	2	51	21
0	11	327	0	41	88	1	12	50	3	0	20
0	12	300	0	42	86	1	14	49	3	9	19
0	13	277	0	43	84	1	15	48	3	20	18
0	14	257	0	44	82	1	17	47	3	32	17
0	15	240	0	45	80	1	18	46	3	45	16
0	16	224	0	46	78	1	20	45	4	0	15
0	17	212	0	47	77	1	22	44	4	17	14
0	18	200	0	48	75	1	24	43	4	37	13
0	19	189	0	49	73	1	26	42	5	0	12
0	20	180	0	50	72	1	28	41	5	27	11
0	21	171	0	51	71	1	30	40	6	0	10
0	22	164	0	52	69	1	32	39	6	40	9
0	23	157	0	53	68	1	35	38	7	30	8
0	24	150	0	54	67	1	38	37	8	34	7
0	25	144	0	55	65	1	40	36	10	0	6
0	26	138	0	56	64	1	43	35	12	0	5
0	27	133	0	57	63	1	46	34	15	0	4
0	28	129	0	58	62	1	49	33	20	0	3
0	29	124	0	59	61	1	52	32	30	0	2
0	30	120	0	60	60	1	56	31	60	0	1

Recensionen.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. LUDWIG SCHLESINGER. I. Bd. Leipzig 1895. B. G. Teubner. XX und 486 S.

In dem Werk, dessen erster Band uns vorliegt, soll der gewaltige Stoff, der sich in den dreissig Jahren seit Begründung der modernen Theorie der linearen Differentialgleichungen angehäuft hat, einem zweifellos vorhandenen Bedürfniss entsprechend „zu einem einheitlichen Lehrgebäude zusammengefasst werden, um ein möglichst getreues und vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Stande dieser Theorie zu liefern“. Das ist keine geringe Aufgabe, und es durfte daher mit Freuden begrüsst werden, als die Anzeige erschien, dass zwei Männer sich mit derselben befassen wollten, die sich durch ihre Arbeiten bereits als in hohem Maasse hierfür befähigt erwiesen hatten. Paul Günther aber wurde schon wenige Monate nach Beginn der gemeinsamen Arbeit von einem vorzeitigen Tode dahingerafft. Die Lectüre der nach dem Vorwort wesentlich von ihm herührenden, geradezu vorzüglich geschriebenen historischen Einleitung* über die Entwicklung der Functionentheorie im Allgemeinen und der Theorie der Differentialgleichungen im Besonderen, lässt uns seinen Hingang aufs Neue beklagen.

So sah sich Herr Schlesinger allein vor dem grossen Unternehmen; aber er hat sich demselben auch ohne den Mitarbeiter völlig gewachsen gezeigt. Wir wollen schon an der Schwelle des Berichtes folgende Hauptvorzüge seiner Arbeit erwähnen. Der Verfasser steht allenthalben merklich über dem äusserst reichhaltigen und vielseitigen Stoff, den er selbst in manchen Punkten wesentlich bereichert. Indem er aber auch die von Anderen geschaffenen Theorien zunächst gründlich in sich aufgenommen und verarbeitet hat, um sie dann erst in Anpassung an das Ganze zu reproduciren, ist er eigentlich überall originell. Die Behandlung dringt stets in die Tiefe und sucht auch bei schwierigeren Fragen den Kern der Sache zu treffen. Die Anordnung und Darstellung ist fast durchweg klar und

* S. 2 Zeile 15 von oben lies „nur“ statt „nicht“; Zeile 14 von unten lies „hier“ statt „wieder“.

naturgemäss. Dadurch, dass der Verfasser „sich nicht den beengenden Zwang einer starren Systematik auferlegen, sondern die Darstellung in der Form möglichst frei und im Aufbau wesentlich der historischen Entwicklung folgend gestalten“ wollte, ist es ihm in der That gelungen, den Eindruck der Langweiligkeit glücklich zu vermeiden, der wohl gelegentlich nicht mit Unrecht dem Begriff „Handbuch“ anhaftet.

Eine kurze Wanderung durch das Buch selbst möge dazu dienen, ein so günstiges Urtheil zu begründen, und zugleich Gelegenheit bieten, diejenigen Punkte hervorzuheben, in denen — nach Ansicht des Referenten — Ausstellungen gemacht werden müssen.

Auf die schon erwähnte historische folgt eine theoretische Einleitung*, welche u. A. auf die zuerst von Fuchs hervorgehobenen verschiedenartigen Singularitäten einer monogenen Function hinweist, die linearen Differentialgleichungen als solche charakterisirt, die keine mit den Anfangswerthen verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, und endlich die Nothwendigkeit darlegt, für die linearen Differentialgleichungen einen besonderen Existenzbeweis zu liefern, der mehr leistet wie der allgemeine Cauchy'sche für beliebige Differentialgleichungen.

I. Allgemeine Grundlagen der Theorie.

In der Umgebung einer regulären Stelle besitzt die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ein Integral in Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe mit n -willkürlichen ersten Coefficienten (Anfangswerthen), convergent mindestens in dem Kreis, der bis zur nächsten singulären Stelle reicht. Durch Fortsetzung kann der Giltigkeitsbereich dieses Integrals über das ganze von den regulären Stellen erfüllte Gebiet ausgedehnt werden.** Der nun folgende Begriff des particulären Integrals — so wird ein Integral genannt, wenn alle n -Anfangswerthe bestimmte sind — scheint uns etwas zu eng gefasst, da so in der Bezeichnung für die Integrale mit ν willkürlichen Constanten ($0 < \nu < n$) eine Lücke bleibt. — Ein Fundamentalsystem ist ein solches System von n Integralen, dessen Determinante nicht identisch verschwindet; das allgemeine Integral ist die lineare homogene Verbindung der Elemente eines Fundamentalsystems mit n willkürlichen Coefficienten. Aus der Definitionseigenschaft des Fundamentalsystems folgt die lineare Unabhängigkeit seiner Elemente und umgekehrt. Die Elemente eines Fundamentalsystems erfahren eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante, wenn die unabhängige Variable einen Umlauf beschreibt, der die Coefficienten nicht ändert.

* S. 15 Zeile 1 lies „(2)“ statt „(3)“, S. 17 Zeile 1 der Ausdruck „in deren jeder Nähe“ dürfte auch in „mathematischem Deutsch“ nicht zulässig sein! — S. 17 Z. 14, 15 die Worte „unendlich vielen positiven und“ sind als überflüssig und daher vielleicht verwirrend zu streichen.

** S. 27 am Kopf lies „10“ statt „11“.

II. Formale Theorien.

Nachdem im I. Abschnitt mit dem Existenzbeweis eine Operationsbasis gewonnen ist, wird diese zunächst für das eigentliche Integrationsgeschäft noch nicht weiter ausgenützt, sondern es folgt erst eine Art „Intermezzo“. Die linearen Differentialgleichungen zeigen mannigfache Analogieen mit algebraischen Gleichungen; z. B. „eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, die mehr linear unabhängige Integrale besitzt, als ihre Ordnungszahl beträgt, muss identisch verschwinden“ — der Appell'sche Satz, der ein Gegenstück zu dem Satz von der rationalen Ausdrückbarkeit der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch die Coefficienten darstellt — die Theorie der gemeinsamen Lösungen mehrerer Differentialgleichungen — die Zusammensetzung von Differentialausdrücken (Frobenius) u. A. — Wie der Grad einer algebraischen Gleichung bei Kenntniss einer Wurzel um 1 zu erniedrigen ist, so auch hier die Ordnung der Differentialgleichung bei Kenntniss eines Integrals.* Die alsdann folgende Theorie der Multiplicatoren und adjungirten Differentialgleichungen gipfelt in dem Satz: „Die sämtlichen Multiplicatoren einer Differentialgleichung sind Lösungen der adjungirten und umgekehrt.“ Die Multiplicatoren lassen sich noch mittelst Determinantenquotienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems ausdrücken. Dies führt zu Beziehungen zwischen adjungirten Fundamentalsystemen. Uebt man auf die Elemente eines Fundamentalsystems eine lineare Substitution aus, so ergibt sich: Dieses Fundamentalsystem und sein adjungirtes sind contragredient. Sätze über sich selbst adjungirte und ihren adjungirten entgegengesetzt gleiche Differentialausdrücke beschliessen diese Betrachtungen, die sodann eine Anwendung finden in der Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen.

Die Kenntniss der Integration einer solchen gestattet nun die weitere Ausführung der Untersuchung über gemeinsame Lösungen mehrerer Differentialgleichungen und die Einführung des Begriffs der Irreductibilität. Der Verfasser stellt sogleich die folgende sehr allgemeine Definition auf „eine lineare homogene Differentialgleichung heisst irreductibel, wenn sie mit keiner ebensolchen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten von derselben Beschaffenheit sind (dies entspricht der Berücksichtigung des Rationalitätsbereichs bei der algebraischen Irreductibilität) „eine Lösung gemein hat.“ Hierbei kommt es natürlich wesentlich auf den Bereich an, in welchem die beiden Differentialgleichungen gleiche Beschaffenheit haben; dies wird auch vom Verfasser streng hervorgehoben und wird im Folgenden sehr bald praktisch. Eben deshalb aber scheint es uns wünschenswerth, ja nothwendig, dies in die

* S. 48 Zeile 9 von unten würden wir statt „Werth“ lieber „Zweig“ lesen.

Definition mit aufzunehmen und von vornherein nur von „Irreductibilität in einem gewissen Bereich“ zu sprechen. Es tritt dann deutlich zu Tage, wie z. B. die beiden Arten von Irreductibilität, welche Frobenius eingeführt hat, sich lediglich durch den Bereich, in dem diese Eigenschaft besteht, unterscheiden. Umfasst der Bereich die ganze x -Ebene, so kann man ja übereinkommen, in diesem Falle, gerade wie z. B. von „eindeutigen Functionen“ schlechthin, auch von „Irreductibilität“ schlechthin zu sprechen. — Die Bedeutung der Reductibilität einer linearen Differentialgleichung wird treffend darin erkannt, dass diejenigen Integrale derselben, die einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung genügen, nur so viel linear unabhängige Zweige (in dem betreffenden Bereich!) besitzen, als die Ordnung der letzteren Differentialgleichung beträgt.

III. Theorie der Fundamentalgleichung.

Diese wichtige Gleichung wird für irgend ein zweifach zusammenhängendes (ringförmiges) Gebiet E , das keinen singulären Punkt enthält, und einen darin vollzogenen Umlauf U in bekannter Weise nach Fuchs aufgestellt und liefert, falls sie lauter verschiedene Wurzeln besitzt, die Existenz eines canonischen Fundamentalsystems, dessen Elemente sich beim Umlauf U nur mit Constanten multipliciren.

Eine durchaus originelle Behandlung erledigt in elegantester Weise auch den Fall mehrfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung und basirt auf dem bemerkenswerthen Ergebniss, dass die Coefficienten der Fundamentalgleichung übereinstimmen mit denen der Relation

$$c_n \Theta^n v + c_{n-1} \Theta^{n-1} v + \dots + c_1 v = 0,$$

welche das allgemeine Integral v mit den n -Integralen $\Theta v, \Theta^2 v, \dots, \Theta^n v$ verknüpft, die bezw. durch 1, 2, ... n -maligen Umlauf U aus v hervorgehen.* Hieraus folgt u. A.: „Wird die vorgelegte Differentialgleichung $P=0$ durch alle Integrale einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $R=0$ befriedigt, so ist die linke Seite ihrer Fundamentalgleichung durch die linke Seite der Fundamentalgleichung von $R=0$ theilbar.“ Da dieser Satz, wie einige andere ihm ähnliche, leicht zu beweisen ist, falls E ein Kreisring und die analytische Gestalt der Integrale in E schon ermittelt ist, muss besonders hervorgehoben werden, dass die Ableitung hier ohne diese Voraussetzung erfolgt. Die Anwendung dieser Theoreme auf die mehrfachen Wurzeln der Fundamentalgleichung ergibt die Existenz eines in (Fuchs'sche) Gruppen eingetheilten Fundamentalsystems, dessen Elemente sich nur innerhalb der Gruppen verzweigen (wenn dieser kurze Ausdruck

* Der S. 109 Zeile 3 gebrauchte Ausdruck „specielles Integral“ ist nicht erklärt worden.

hier gestattet ist). Statt der Theorie der Elementartheiler führt alsdann diejenige des Ranges linearer Gleichungssysteme noch zur Eintheilung der Gruppen in die (Hamburger'schen) Untergruppen*, so dass die Integrale sich nur noch innerhalb der letzteren verzweigen, das heisst zu einem canonischen Fundamentalsystem auch im Falle mehrfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung. Wir vermessen bei der Wichtigkeit des Begriffs eines canonischen Fundamentalsystems, mit dem im Folgenden häufig operirt wird, an der Stelle, wo dieser Name eingeführt wird (S. 127), die ausdrückliche Definition, das heisst die Angabe der charakteristischen Eigenschaften eines solchen Fundamentalsystems.

Endlich wird nun aus dem Vorhergehenden für ganz beliebige Gestalt des Ringgebietes E die analytische Form des canonischen Fundamentalsystems abgeleitet und dann für den Fall specialisirt, dass E ein Kreisring ist, dessen innerer Kreis beliebig klein ist und eine isolirte singuläre Stelle einschliesst. Dabei wird auch ausdrücklich auf den Fall eingegangen, in welchem die betreffende Stelle eine Verzweigungsstelle der Coefficienten der Differentialgleichung ist. Rein äusserlich ist die Berichtigung, dass hierbei auf S. 133 und 135 statt „ q -fach“ nach Riemann'schem Sprachgebrauch „ $(q-1)$ -fach“ gesetzt werden muss (entsprechend später S. 209 „ $(\lambda-1)$ -fach“ statt „ λ -fach“). Ferner dürften in dem Satz S. 135 die Worte (Zeile 19, 20) „und durch die zu $x=a$ gehörige Fundamentalgleichung“ zu streichen sein, und endlich ist S. 136 Zeile 17 von unten entweder „im Allgemeinen“ zu streichen oder aber „können“ durch „werden“ zu ersetzen.

IV. Die singulären Stellen, an denen sich die Integrale bestimmt verhalten.

Während nach den bis jetzt gewonnenen Resultaten ein singulärer Punkt der Differentialgleichung im Allgemeinen eine Stelle der Unbestimmtheit für die Integrale ist, wird nun gefragt: „wie müssen die Coefficienten in der Umgebung eines Punktes, wo sie den Charakter von rationalen Functionen haben (noch des Weiteren) beschaffen sein, damit alle Integrale sich in dieser Umgebung bestimmt verhalten?“ Dass bei dieser Fragestellung über die Coefficienten überhaupt schon eine Annahme gemacht wird, berührt etwas fremdartig. Die Voraussetzung wird zwar in der That S. 152 zunächst durch die weniger enge ersetzt, die Coefficienten sollen eindeutig in der betreffenden Umgebung sein, und in Nr. 59 wird dann auch der Fall einer beliebigen singulären Stelle, wo die Coefficienten algebraisch mehrdeutig sind, auf den Fall der Eindeutig-

* S. 125 Zeile 17 von unten flg. dürften die Worte „sind die ... so“ als überflüssig zu streichen sein.

keit zurückgeführt. Thatsächlich ist aber jede Voraussetzung über die Coefficienten überflüssig, da lediglich aus dem Ansatz der Integrale in der Form

$$u = x^r(\psi_0 + \psi_1 \log x + \dots + \psi_m \log^m x),$$

wo die ψ gewöhnliche Potenzreihen sind, im Kapitel I des Abschnittes die Form (D) [S. 152] der Coefficienten folgt. Auf diesen Ansatz der Integrale lässt sich der andere, wenn man annimmt, dass die ψ nach gebrochenen positiven Potenzen fortschreiten, von vornherein sofort zurückführen, so dass man auch für diesen Fall die nothwendige Gestalt der Coefficienten besitzt. Da aber andererseits beide Ansätze durch die vorangehende allgemeine Theorie gegeben werden, falls man von den Coefficienten voraussetzt, sie seien in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nur algebraisch mehrdeutig, so würde das bei dieser Fragestellung erzielte Resultat zugleich das geben, was hier für S. 136 zusammen mit den später folgenden Erweiterungen erreicht wird, und noch darüber hinausreichen. — Bei Satz 1 S. 141, der zweifellos richtig, aber (im allgemeinen Falle) keineswegs evident ist, wünschten wir wenigstens die Andeutung eines Beweises. In Satz 2 möchten wir die modificirte Fassung vorschlagen: „... so gehört die Ableitung von $F(x)$ zu einem Exponenten $\geq r - 1$, und zwar ist dieser Exponent nur dann $> r - 1$, wenn u. s. w.“*

Umgekehrt wird nun gezeigt, dass, wenn die Coefficienten die vorher gefundenen Bedingungen erfüllen, ein sich bestimmt verhaltendes Fundamentalsystem existirt. Eine wichtige Rolle spielt dabei die determinirende Gleichung, die für die linearen Differentialgleichungen dasselbe leistet, wie das Newton-Puiseux'sche Polygon für die algebraischen Gleichungen zwischen zwei Variablen, indem sie die Anfangsexponenten der Reihen, bezw. den Exponenten, „zu dem ein mit Logarithmen behaftetes Integral gehört“, bestimmt. Dass das Handbuch für diese Gleichung wieder den doch gar zu lang hindonnernden Namen „determinirende Fundamentalgleichung“ beibehält, bedauern wir um so mehr, als die hierfür theils S. 158, 159, theils S. 162 angegebene ausdrückliche Motivirung thatsächlich nur das Attribut „determinirend“ rechtfertigt. Eine Pietätsverletzung aber gegen den Entdecker dieser Gleichung (dessen Verdienste wahrlich über derartige Aeusserlichkeiten erhaben sind) kann unseres Erachtens in einer solchen liebevollen Abkürzung des ihr von ihm gegebenen Namens gewiss nicht erblickt werden!

Was die Methode selbst betrifft, nach der die jetzt in Rede stehende Umkehrung zu beweisen ist, wobei es namentlich auf die Gewinnung der mit Logarithmen behafteten Integrale ankommt, so stehen dafür mehrere verschiedene Wege offen, von denen jeder seine besonderen Vorzüge hat.

* S. 140 Zeile 12 von unten lies „keine negativen“ statt „nur positive“; S. 141 Zeile 7 von unten statt „kann... eintreten“ lies „tritt... ein“.

Die Frobenius'sche Methode, welche durch Differentiation des Integrals in Reihenform nach dem zunächst unbestimmt bleibenden Anfangsexponenten die logarithmischen Integrale erzeugt, zeichnet sich jedenfalls durch ausserordentliche Eleganz der Ableitung aus. Sie giebt Beziehungen zwischen den einzelnen Reihen in demselben Integral, die vorher nicht bekannt waren, und wir würden eine Darstellung, die heutigen Tages jene Beziehungen ausser Acht liesse, für unvollständig erachten. Sie bedarf aber eines Convergencebeweises, der complicirter ist als derjenige der Fuchs'schen Methode, die sich der Reduction der Differentialgleichung durch das Integral in Reihenform und wiederholter Integration bedient, dafür aber an sich jene Beziehungen noch nicht giebt. Benutzt man aber die durch die Fuchs'sche Methode (oder durch die Fundamentalgleichung) gegebene Kenntniss der Form der Integrale und leitet die einzelnen Integrale durch formale Integration in Bezug auf den Logarithmus aus dem logarithmenfreien Integral ab, so liefern die Recursionsformeln der gewissermassen als „Integrationsconstanten“ neu auftretenden Reihen die Frobenius'schen Beziehungen und zugleich die Vertheilung der willkürlich bleibenden Constanten auf die einzelnen Reihen. Da jeder dieser Wege also seine eigenartigen, sich etwa ausgleichenden Vorzüge besitzt, ist es augenscheinlich Geschmacksache, welchen man einschlagen will: Der Verfasser des Handbuches hat sich für die Frobenius'sche Methode entschieden. Sobald dann hiermit der Beweis geliefert ist, dass die Form (D) der Coefficienten nothwendig und hinreichend für das bestimmte Verhalten der Integrale ist (S. 177), wünschten wir auch die Bezeichnung „Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung“ eingeführt zu sehen, die erst S. 272 bedeutend nachhinkt.

Um die Gruppen des gewonnenen Fundamentalsystems in Untergruppen zu sondern,* wird die Frage untersucht, zu welchen Wurzeln der determinirenden Gleichung ein logarithmenfreies Integral gehört. Die Entscheidung, ob dies bei einer bestimmten Wurzel der Fall ist oder nicht, wird in eigenartiger Weise auf die Untersuchung zurückgeführt, ob der Rang zweier gewisser linearer Gleichungssysteme derselbe ist oder nicht. Die explicite Form dieses Kriteriums liefert (vergl. die in der Berichtigungstabelle als erforderlich bezeichneten Correcturen) nicht mehr die allgemeine Lösung der Frage, sondern eine solche nur für einen Specialfall. Dieser letztere umfasst den noch besonders erwähnten Fall, dass die ganze Integralgruppe logarithmenfrei ist; nebenbei bemerkt trifft die Behauptung (S. 196), dass die für das Eintreten dieses Falles angegebenen Bedingungen mit den von Fuchs (Crelle 68) gegebenen übereinstimmen, nur für einen Theil derselben zu.

* S. 181 Zeile 8 von unten der Ausdruck „die kennen gelehrte Eintheilung“ und ebenso später S. 427 Zeile 1 „kennen gelehrte“ ist unmöglich.

Bilden alle n -Integrale eine einzige logarithmenfreie Gruppe, so nennt der Verfasser mit Poincaré diesen Punkt einen „scheinbar singulären Punkt“; sind insbesondere noch alle n -Anfangsexponenten ganzzahlig und keiner negativ, so wird der Punkt mit Weierstrass als „ausserwesentlich singulär“ bezeichnet.* Wir können auch hier unsern Widerspruch gegen diese Terminologie nicht zurückhalten. Die ersteren Punkte sind thatsächlich nicht scheinbar, sondern wirklich singuläre Punkte der Coefficienten sowohl, wie der Integrale; der Name „ausserwesentlich singulär“ aber hat sich zu sehr in dem von Weierstrass später bei den eindeutigen Functionen eingeführten Sinn eingebürgert, als dass er hier in so ganz anderer Bedeutung wieder verwandt werden sollte. Gerade auf die letzteren Punkte passt nun ausgezeichnet der Name „scheinbar singulär“, da bei ihnen zwar die Coefficienten, aber nicht, wie es dann sonst im Allgemeinen der Fall ist, auch die Integrale singulär sind. Auf die ersteren aber passt der Name „ausserwesentlich singulär“ (oder allenfalls „aufhebbar singulär“), da man die Singularität der Integrale bei diesen Punkten durch Multiplication mit einer endlichen bestimmten Potenz beseitigen kann. Wir plaidiren daher aufs Entschiedenste geradezu für eine Vertauschung der beiden Bezeichnungen und sind der Ansicht, dass das Handbuch sich diese klärende That getrost hätte gestatten dürfen und sollen.

Ein besonderes Verdienst erwirbt sich der Verfasser durch das wiederholte ausdrückliche Eingehen auf das Verhalten der Integrale in der Umgebung eines algebraischen Windungspunktes der Coefficienten, so auch am Schlusse des gegenwärtigen Abschnittes.** Lediglich vom pädagogischen Standpunkte aus ist es vielleicht zu bemängeln, dass solche Punkte hier gemeinsam mit $x = \infty$, wenn dies Stelle der Bestimmtheit ist, abgemacht werden; die Beziehung zwischen beiden Fällen ist nämlich insofern ziemlich äusserlich, als nur beide Male $x = \xi^\lambda$ gesetzt wird und dann für $\lambda > 0$ der eine, für $\lambda < 0$ der andere Fall eintritt. Die Wichtigkeit der Stelle $x = \infty$ und des Verhaltens der Integrale daselbst ist auf diese Weise ein wenig verhüllt.

V. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.

Die Differentialgleichungen, deren Integrale in der ganzen Ebene bestimmt sind, spielen historisch und für zahlreiche Theile der Theorie eine ausgezeichnete Rolle. Sie wurden von Fuchs schon bei Begründung seiner

* S. 202 Zeile 3 von unten ist hinter „beginnen“ hinzuzufügen: „worauf dann bei allen frühestens gleich das Glied mit x^n folgt“, da sonst das unmittelbar Folgende nicht ganz correct ist.

** S. 206 Zeile 7, 8 des Textes sind die Worte „und dass . . . verhalten“ zu streichen, da dies bereits in dem Begriff „Normalform“ enthalten ist. — S. 207 Gleichung 3) fehlt „= 0“.

Theorie hervorgehoben und führen daher mit Recht seinen Namen. — In vorzüglicher Weise wird die Frage der Convergenz von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise im Anschluss an Thomé entwickelt* und auf die Integrale der jetzt in Rede stehenden Klasse von Differentialgleichungen angewandt. — Die Herstellung einer Differentialgleichung dieser Klasse mit vorgeschriebenen singulären Stellen und Wurzeln der zugehörigen determinirenden Gleichungen führt zur Besprechung der Differentialgleichungen mit einem singulären Punkt — von da durch Transformation zu den Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten —, zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse und speciell zu einer solchen mit zwei endlichen singulären Stellen, der Riemann'schen und Gauss'schen Differentialgleichung, deren Theorie hier theils als Anwendung des Vorangehenden, theils als Vorbereitung für Späteres dient.

VI. Die Entwicklungen der Integrale innerhalb eines Kreisringes.

Während die beiden vorangehenden Abschnitte sich nur mit Stellen der Bestimmtheit befassten und in der Umgebung einer solchen für die Integrale die Entwicklungen selbst wirklich geben konnten, steht nach dem III. Abschnitt in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit oder überhaupt in einem Kreisring, in welchem die Coefficienten nach Laurent'schen Reihen entwickelbar sind, bisher lediglich die Form der Entwicklung der Integrale fest:

$$y = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} g_{\nu}(\rho) x^{\rho + \nu}.$$

Hier greift nun die auf den Begriff der unendlichen Determinanten begründete Theorie von II. von Koch ein.** Die Recursionsformel der Differentialgleichung kann so transformirt werden, dass die aus ihren Coefficienten gebildete unendliche Determinante $D(\rho)$ convergirt und die „Normalform“ hat. Sie ist eine ganze transcendente Function von ρ mit der Eigenschaft:

$$D(\rho + 1) = (-1)^n D(\rho).$$

Der Gleichung $D(\rho) = 0$ genügen folglich sämmtliche Exponenten eines in Reihenform darstellbaren Integrals. Sie ver-

* S. 230 Zeile 14 lies „ $R\alpha$ “ statt „ R “. — Zeile 10 von unten lies einfacher „ $x = R'e^{\theta i}$ “.

** S. 278 Zeile 12. Statt „unbedingt“ wäre correcter „absolut“, weil darauf folgt „d. h. die Reihe der absoluten Beträge convergirt ebenfalls“; aus der absoluten folgt dann erst die unbedingte Convergenz. — S. 288 Zeile 10 lies „fehlt“ statt „verschwindet“.

tritt also die Stelle der determinirenden Gleichung bei Stellen der Unbestimmtheit, folglich zugleich auch die der Fundamentalgleichung, von deren linker Seite sich $D(\varrho)$ in der That nach der Substitution $\omega = e^{2\pi i t}$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Die Coefficienten g , der Integralreihen, sowie die Integralgruppen und Untergruppen, Sätze über die Fundamentalgleichungen componirter und adjungirter Differentialgleichungen fließen aus der Koch'schen Theorie.

Ihr folgt die Hamburger'sche Methode zur wirklichen Darstellung der Integrale in einem Kreisring, womit dann stets die Berechnung der Coefficienten der zugehörigen Fundamentalgleichung aufs Engste zusammenhängt.

Ein Kreisring ist auch das Giltigkeitsgebiet eines Fundamentalsystems, von dessen Elementen sich nur ein Theil bestimmt verhält; daher finden die Stellen, bei denen der charakteristische Index (nach Thomé) > 0 ist, hier ihre Besprechung. Dass die Koch'sche Theorie auch dabei sich bewährt, wird sehr interessanter Weise kurz gezeigt. Die über diesen Gegenstand handelnde Arbeit von Koch's (Acta math. 18) kann übrigens dem Verfasser noch nicht vorgelegen haben.

Ein Kreisring ist ferner die Umgebung von $x = \infty$, wenn dies ein Punkt der Unbestimmtheit ist. Die Integrale sind also in diesem Fall darstellbar mittelst Reihen, die nach Absonderung einer Potenz von x als Factor unendlich viele positive Potenzen von x enthalten. Es werden nun die Fälle herausgehoben, wo diese unendlich vielen positiven Potenzen von einem Exponentialfactor, dessen Exponent eine ganze rationale Function von x ist („fundamentaler determinirender Factor“ nach Thomé), aufgesaugt sind, während der andere Factor der Reihe keine positiven Potenzen von x mehr enthält. Ein solches Integral heisst nach Thomé „Normalintegral“. Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten stellt also den allereinfachsten Fall einer Differentialgleichung mit solchen Integralen dar. Wie bei ihr spielt auch in dem allgemeinen Fall eine „charakteristische Gleichung“ eine wesentliche Rolle und wie bei ihr der Umstand, ob alle Wurzeln dieser Gleichung verschieden sind oder nicht. In letzterem Falle können auch die von Poincaré als „anormale“ bezeichneten Reihen auftreten.

Bei den Entwicklungen über die Normalintegrale sind — worauf der Verfasser selbst den Referenten aufmerksam machte — in den Nr. 95, 96 einige ergänzende Bemerkungen* erforderlich. Der Schluss auf S. 341, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v}{x^k}$ ein bestimmter endlicher Werth sei, beruht auf der Annahme der Convergenz der für w angesetzten Reihe, das heisst auf der Annahme der

* S. 340 in Formel 10) lies „ $v D_r$ “ statt „ $r D_r$ “, — in Gleichung 4) „ x^{2k} “ statt „ x^2 “.

Existenz eines Normalintegrals der Differentialgleichung (A). In der That sind die durch 14) [S. 342] bestimmten Grössen z_i , falls sie die Differentialgleichung (A) wirklich befriedigen, Normalintegrale. Im Allgemeinen dagegen genügen die z_i der Differentialgleichung (A) nicht und spielen für (A) ebensowohl wie für die Differentialgleichung (A) nur die Rolle von fundamentalen determinirenden Factoren. In diesem Falle ist dann auch v_1 keine wirkliche Lösung von 11), so dass also im Allgemeinen in Gleichung 15) [desgleichen in der Gleichung S. 344 oben] gewisse fortgelassene Glieder wieder hinzugefügt werden müssen, die eben nur dann verschwinden, wenn v_1 die Gleichung 11), das heisst z_i die Gleichung (A) erfüllt. Das Gleiche gilt von dem Schluss S. 346, dass $\lim_{x=\infty} \frac{Y}{x^k}$ ein endlicher bestimmter Werth sei, woraus folgen würde, dass x ein Normalintegral ist. Demgemäss ist endlich der Satz S. 347 dahin einzuschränken: „Ein Normalintegral hat die Eigenschaft, nicht in jeder Nähe von $x = \infty$ zu verschwinden, und umgekehrt, wenn ein bei $x = \infty$ in Reihenform darstellbares Integral diese Eigenschaft hat und überdies seine logarithmische Ableitung für $x = \infty$ von endlicher Ordnung unendlich wird, so ist es ein Normalintegral.“

VII. Allgemein giltige Darstellungen der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Da alle bisher gegebenen Darstellungen der Integrale im Allgemeinen immer nur ein beschränktes Giltigkeitsgebiet besitzen, die Kreisfortsetzung aber praktisch so gut wie unausführbar ist, erhebt sich nun die Aufgabe, auf andere Art den Werth eines durch seine Anfangswerthe für irgend eine reguläre Stelle definirten Integrals an irgend einer anderen regulären Stelle zu berechnen, falls der Weg gegeben ist, auf dem x von jener nach dieser Stelle gelangt. Am einfachsten wird diese Aufgabe gelöst, wenn ein analytischer Ausdruck der Integrale sich finden lässt, der für die ganze x -Ebene gilt, abgesehen höchstens von den singulären Punkten selbst, gerade wie z. B. die Darstellung der elliptischen Functionen durch den Quotienten zweier Θ -Functionen. Dies gelingt in der That mittelst einer Methode von Fuchs, welche die Integrale in Reihen entwickelt, deren Glieder durch iterirte Integration rationaler Ausdrücke entstehen. Dadurch besteht auch die Möglichkeit, die zu irgend einem Umlauf gehörige Fundamentalgleichung wirklich aufzustellen (Günther) und einen Einblick in die Abhängigkeit der Integrale von den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Parametern zu gewinnen.

Im Mittelpunkt der folgenden, wesentlich von Poincaré stammenden Untersuchungen steht die sogenannte „Laplace'sche Transformirte“ (Differentialgleichung) einer vorgelegten Differentialgleichung. Sie gehört insofern hierher, als die Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung dar-

stellbar sind durch bestimmte Integrale auf gewissem Weg erstreckt über die Lösungen ihrer Laplace'schen Transformirten. Sie giebt auch Kriterien für die Convergenz der Normalreihen und führt zu „asymptotischen“ Darstellungen der Integrale durch divergente Reihen, ähnlich wie dies bei der Stirling'schen Reihe der Fall ist. — Einige der Entwicklungen, die zur Einführung der Laplace'schen Transformirten dienen (Nr. 108, 109 und zum Theil 112), würden wir ihres Charakters wegen lieber an früheren Stellen des Buches eingeordnet sehen.

VIII. Berechnung der Fundamentalsubstitutionen für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Zur Lösung der zu Beginn des vorigen Abschnittes gestellten Aufgabe werden noch andere Hilfsmittel gelehrt, welche nur die Entwicklung der Integrale in der Umgebung der einzelnen Stellen, bezw. in einem Kreisring voraussetzen. Dahin gehört zunächst der Ausdruck zweier Fundamentalsysteme (die in der Umgebung von regulären Stellen giltig sind) durcheinander, eine Aufgabe, die durch Abbildung auf den Fall zurückgeführt wird, dass beide Convergenzkreise in einander greifen.* Des Weiteren bedarf es sodann noch der Kenntniss der „Fundamentalsubstitutionen“, das heisst derjenigen Substitutionen, welche irgend ein bestimmtes Fundamentalsystem bei einfachen Umläufen um die einzelnen („wesentlich“ oder — wie wir sagen würden — „wirklich“) singulären Punkte erleidet. Ausser den für deren Berechnung bereits gelehrteten Methoden wird noch die im Allgemeinen mehrdeutige Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen durch eine hinreichende Zahl von „Fundamentalinvarianten“ gegeben. Dies sind die Coefficienten der Fundamentalgleichungen. Sie hängen lediglich von den Parametern der Coefficienten der Differentialgleichung, nicht wie die Fundamentalsubstitutionen auch noch von den Anfangswerthen des zu Grunde gelegten Fundamentalsystems ab. Da bei einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse die zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalgleichungen, also auch die aus ihnen entspringenden Fundamentalinvarianten leicht zu bilden sind, ihre Zahl aber (im Allgemeinen) zur Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen noch nicht hinreicht, kommt hier noch die Berechnung einer Anzahl sogenannter „Uebergangssubstitutionen“ in Frage, das heisst der Coefficientensysteme, die ein zu einem singulären Punkt gehöriges Fundamentalsystem durch das zu einem anderen gehörige bei bestimmtem Uebergangsweg ausdrücken. Dies geschieht zum Theil mit Hilfe einer Abbildung, die sich des sogenannten Fuchs'schen „Grenzkreises“ bedient. Endlich wird die Aufstellung der Fundamentalinvarianten und Fundament-

* S. 430 Z. 16 ist hinter „Ableitungen“ hinzuzufügen „mit beliebiger Genauigkeit“.

substitutionen bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die der Uebergangssubstitutionen speciell bei der Gauss'schen Differentialgleichung durchgeführt.

Durch die vorstehende kurze Skizzirung hoffen wir eine angenäherte Vorstellung von dem reichen Inhalt des Werkes gegeben zu haben. Die Uebersicht über diesen Inhalt wird erleichtert durch die Eintheilung des Ganzen in fortlaufende, mit Ueberschriften versehene Artikel und das aus jenen zusammengesetzte Inhaltsverzeichniss. Dasselbe giebt gleichzeitig in ausserordentlich sorgfältiger und eingehender Weise die einschlägige Literatur bei jedem einzelnen Artikel.* Diese recht zweckmässige Einrichtung ist aber noch einer erheblichen Verbesserung fähig, die ebensowohl im Interesse des Autors als in dem des Lesers läge. Es ist mitunter — falls man das nicht zufällig anders woher weiss — gänzlich unmöglich zu erkennen, auf welchen Theil des Inhaltes eines Artikels sich die einzelnen Literaturangaben beziehen. Wir möchten deshalb dem Verfasser nahe legen, womöglich schon im zweiten Band seines Werkes, die Stellen im Text, an welche eine Literaturangabe anschliesst, mit kleinen Ziffern zu versehen, die dann im Literaturverzeichniss an entsprechender Stelle wiederkehren. Wo dies bei der älteren Literatur Schwierigkeiten machen sollte, weil sie sich nicht auf einen einzelnen angebbaren Punkt bezieht, könnte diese ja im Anschluss an die Ueberschrift des Artikels gemeinsam citirt werden. Es würde auf diese Weise auch noch deutlicher hervortreten, was als des Verfassers geistiges Eigenthum zu betrachten ist.

Endlich muss noch bemerkt werden, dass das Buch für jeden, der über eine gewisse Gewandtheit in der Functionentheorie verfügt, fast überall ohne Schwierigkeit zu lesen ist. Alle nur einigermaßen nicht alltäglichen, ausserhalb liegenden Hilfsmittel werden in sehr ansprechender Form vor ihrer Verwendung mitgetheilt. Ja, mitunter hat der Verfasser eine allzu geringe Meinung vom Leser: die Bemerkung unter den Berichtigungen zu Seite 143—145 stellt geradezu eine Injurie für denselben dar!

Für den vorgeschrittenen Leser wird das Buch eine Quelle reichster Anregung bilden.

Auf Grund aller dieser Vorzüge dürfen wir dem Erscheinen des zweiten Bandes, der nach der hier entwickelten allgemeinen Theorie im Wesentlichen lineare Differentialgleichungen unter speciellen Voraussetzungen, sei es über die Coefficienten, sei es über die Integrale, behandeln soll, mit freudigster Spannung entgegenblicken, inzwischen aber das Studium des vorliegenden ersten Bandes auf das Eindringlichste empfehlen!

* Bei den Citaten zu Nr. 42 ist noch hinzuzufügen: „Koehler, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 33. Bd. S. 231 flg.“

Lehrbuch der Algebra. Von HEINRICH WEBER, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. In zwei Bänden. Erster Band. Braunschweig 1895. Vieweg. XV und 653 S.

In der neueren algebraischen Lehrbuchliteratur hat die Theorie der algebraischen Gleichungen nicht gleichen Schritt gehalten mit anderen Theilen, wie der Theorie der Determinanten, der linearen Substitutionen etc. Die Entstehungszeit der Bücher, auf welche man für die Theorie der algebraischen Gleichungen bis vor Kurzem der Hauptsache nach angewiesen war, vor allem der Werke von Serret, C. Jordan u. A., liegt gegenwärtig schon ein wenig zurück. Die Gleichungstheorie ist inzwischen nicht nur in vielen Einzelheiten weiter ausgereift, sondern es haben auch principielle Auffassungen durch Hereinnahme neuer Gesichtspunkte ein stark verändertes Aussehen gewonnen. Zwar giebt natürlich die Theorie der Permutationsgruppen, welche zumal auch schon in dem Jordan'schen Werke mit grosser Ausführlichkeit behandelt ist, die wesentlichste Grundlage der Gleichungstheorie ab. Aber daneben haben die arithmetischen Schöpfungen Dedekind's und Kronecker's auch in der Algebra mehr und mehr Boden gewonnen und müssen in einer erschöpfenden Darstellung vom gegenwärtigen Stande der Theorie der Gleichungen entsprechend zur Wirkung kommen.

In diesem Sinne ist es freudig zu begrüßen, dass Herr H. Weber, der nicht nur einer der ersten Kenner der modernen Arithmetik und Algebra ist, sondern auch als selbständiger Forscher an der Fortentwicklung dieser Disciplinen den lebhaftesten Antheil genommen hat, eine moderne Darstellung der Theorie der Gleichungen zu liefern unternommen hat. Das auf zwei Bände geplante Werk soll möglichst von den Elementen ab und, ohne eingehende Einzelkenntnisse nach irgend einer Richtung voranzusetzen, zu dem jetzt erreichten Stande der Entwicklung hinführen. Der vor Kurzem erschienene erste Band enthält folgende Theile des gesammten Stoffes:

In einer Einleitung bespricht Weber zunächst den Zahlbegriff und speciell den Begriff der irrationalen Zahlen in der von Herrn Dedekind begründeten Auffassungsweise, wie sie von letzterem in der bekannten Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ dargestellt ist. Die Einleitung hat den Sinn, das Fundament der späteren Entwicklungen in abstracter, begrifflicher Weise zu legen. Doch wird auf die Möglichkeit geometrischer Interpretationen schon hier hingewiesen und solche werden auch in der Folge des öfteren verwendet.

Die Eintheilung ist nun so getroffen, dass der ganze erste Band in drei Bücher zerfällt, welche „Die Grundlagen“, „Die Wurzeln“ und „Die algebraischen Grössen“ überschrieben sind. Jedes Buch zerfällt seinerseits wieder in sechs Abschnitte.

Die ersten Abschnitte enthalten wesentlich einleitende Betrachtungen. Es gilt zuvörderst eine einfache Theorie der ganzen rationalen Functionen zu entwerfen. Die Coefficienten sind dabei für gewöhnlich unbestimmte

Größen, werden jedoch vielfach als rationale oder ganze Zahlen angenommen. So z. B. wird gleich anfangs der bekannte Satz von Gauss über Multiplication sogenannter primitiver Functionen abgeleitet. Um für minder vorgerückte Leser das Heranziehen sonstiger Lehrbücher möglichst zu ersparen, hat Herr Weber in einem besonderen Abschnitte diejenigen Sätze aus der Determinantentheorie zusammengefasst, welche später zur Verwendung kommen sollen.

Der dritte Abschnitt ist dem Fundamentalsatz über Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen gewidmet. Nach einigen einführenden Paragraphen wird vorab von Gleichungen ungeraden Grades mit reellen Coefficienten, sowie von reinen Gleichungen gehandelt; und im Anschluss daran wird die Lösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen dazwischen gefügt. Sodann wird der Fundamentalsatz in voller Allgemeinheit durch die bekannte Deduction bewiesen, welche sich im Wesentlichen auf die Stetigkeit der ganzen Functionen und auf die Existenz einer unteren Grenze bei einem System reeller Zahlen stützt, die alle grösser als eine angebbare Zahl sind. Hier vor allem bewähren sich die Entwicklungen der Einleitung zum Zwecke einer völlig scharfen Beweisführung. Ein zweiter, in der Hauptsache von Lipschitz herrührender Beweis des Fundamentalsatzes, sowie der Beweis der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln von den Coefficienten beschliessen den Abschnitt.

Die drei folgenden Abschnitte gipfeln in der Darstellung von Hermite's Behandlung der Tschirnhausen-Transformation. Es sind freilich, zumal da Hermite's Theorie auf invarianten-theoretischen Principien beruht, vorab erst noch mehrfache Vorbereitungen zu treffen, die auch ohnehin nicht fehlen dürfen. Einmal nämlich werden die Principien der Theorie der symmetrischen Functionen, sowie das Eliminationstheorem von Bezout entwickelt. Sodann gilt es vor allen Dingen, Anschluss an die lineare Invariantentheorie zu gewinnen. Die Entwicklung zeigt hierbei insofern einen arithmetischen Charakter, als zumeist auch auf Rationalität bez. Ganz-zahligkeit der Coefficienten Nachdruck gelegt wird. Den Auffassungen der Invariantentheorie gemäss tritt nun an Stelle der Gleichung $f(x) = 0$ bez. der Function $f(x)$ die Form f ; und es ist dann der im Mittelpunkt von Hermite's Behandlung der Tschirnhausen-Transformation stehende Satz, dass die Coefficienten der transformirten Form Simultan-Invarianten der ursprünglichen Form n^{ten} Grades und einer gewissen Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades T sind. Dieser Hermite'sche Satz erweist sich für die Tschirnhausen-Transformation der cubischen und biquadratischen Gleichungen bereits als ausreichend. Für den allgemeinen Fall ist die Untersuchung formal erst noch weiter zu entwickeln, wobei die von Sylvester als Bezoutiante bezeichnete Covariante zur Verwendung kommt. Die Theorie wird am Beispiel der Gleichungen fünften Grades vollständig durchgeführt; dabei wird die Gleichung fünften Grades sogleich als Hauptgleichung (nach

Klein) angenommen, und letztere wird durch eine Transformation, die als einzige Irrationalität die Quadratwurzel aus der Discriminante besitzt, auf eine Normalform mit nur einem Parameter übergeführt.

Im folgenden Buche „Die Wurzeln“ stehen die Gleichungen mit reellen Coefficienten voran. Es wird zuvörderst eine Realitätsdiscussion der Wurzeln durchgeführt, wobei für den allgemeinen Fall eine erneute Anwendung der Bezoutiante stattfindet. Speciell im Falle der biquadratischen Gleichungen wird eine interessante geometrische Betrachtung gegeben auf Grundlage der hier eintretenden Discriminantenfläche, auf welche zuerst Kronecker hinwies.

Besonders inhaltreich ist der den Sturm'schen Functionenketten gewidmete Abschnitt, vermöge deren das Problem behandelt wird, die Anzahl der Wurzeln zwischen gegebenen Grenzen anzugeben. Der allgemeinen Theorie werden zwei specielle Beispiele Sturm'scher Ketten vorausgesandt; einmal sind es die Kugelfunctionen erster Art, welche hierher gehören, sodann eine Kette, welche in der Theorie der säcularen Störungen der Planeten eine Rolle spielt. Für die allgemeine Behandlung des Sturm'schen Problems sind wieder die Schöpfungen Hermite's leitend gewesen. Es ist aber besonders dankenswerth, dass Herr Weber an dieser Stelle die Kronecker'sche Charakteristikentheorie wenigstens in einem einfachen Falle durchführt und auf das Problem der Einschliessung der complexen Wurzeln, sowie auf den ersten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes anwendet. Die Charakteristikentheorie verfolgt für Gleichungssysteme mit beliebig vielen Variablen dasselbe Ziel, wie der Sturm'sche Satz für Gleichungen mit einer Unbekannten. Die Durchführung bezieht sich auf den Fall zweier Veränderlichen und damit auf den Schnitt ebener Curven.

Die folgenden Abschnitte sind den bekannten älteren Theoremen von Budan-Fourier, Newton, Descartes u. s. w., sowie den Regeln zur angenäherten Berechnung der Wurzeln gewidmet. Erwähnt sei eine von Klein herrührende geometrische Abzählung der reellen Wurzeln, welche zu einer Vergleichung der erstgenannten Theoreme benutzt wird.

Einen wesentlich neuen Charakter gewinnt die Darstellung durch Heranziehung der Kettenbrüche zur angenäherten Berechnung der Wurzeln. Herr Weber ergreift hier die Gelegenheit, um etwas principieller auf die Theorie der Kettenbrüche einzugehen. Dieselbe wird in der That ausgestaltet zu einer Theorie der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinanten ± 1 , an welche sich in verkappter Form eine Theorie der Aequivalenz und Reduction der ganzzahligen binären quadratischen Formen schliesst. Doch wird dabei zumeist nicht explicit von den Formen gesprochen, sondern nur von äquivalenten Zahlen, welche letztere als Wurzeln der den Formen entsprechenden Gleichungen anzusehen sind. Eine über das Formale hinausgehende Umgestaltung gewinnt hierdurch die Theorie der Aequivalenz und Reduction nicht. Die Anwendung der Theorie der Kettenbrüche zur

numerischen Auflösung der Gleichungen wird in den beiden letzten Paragraphen des elften Abschnitts behandelt.

Auch im letzten Abschnitt des zweiten Buches, „Theorie der Einheitswurzeln“ überschrieben, bleibt zumeist der arithmetische Charakter der Darstellung erhalten. Es kommen hier nur erst einige einführende Definitionen, sowie die Irreducibilität und die Discriminante der Kreistheilungsgleichung zur Behandlung. Gegen Ende des Abschnitts folgen Entwicklungen über Multiplication der Kreisfunctionen. Zwischendurch sind zahlen-theoretische Entwicklungen eingeschaltet (über Lösung von Congruenzen höheren Grades, Potenzreste, primitive Wurzeln, Indices, quadratische Reste und dergl.), welche nur mittelbar mit der Ueberschrift des Abschnittes zusammenhängen, die aber doch später gebraucht werden und an anderer Stelle nicht gut untergebracht werden konnten.

Im dritten Buche „Die algebraischen Grössen“ liefert Herr Weber auf Grundlage der Dedekind'schen Körpertheorie, sowie der Theorie der Permutationsgruppen, eine interessante Darstellung der Galois'schen Gleichungstheorie; und hier ist es eben, wo durch die Hereinnahme der Körpertheorie ein neues und wichtiges Fundament gegenüber den früheren Darstellungen gewonnen wird.

Ein erster Abschnitt des dritten Buches trägt die Ueberschrift „Die Galois'sche Theorie“. Jedoch handelt es sich hier noch keineswegs um endgiltigen theoretischen Einblick in den Auflösungsprocess einer Gleichung, den man als den Haupterfolg der von Galois ergriffenen gruppentheoretischen Wendung und demnach als den Hauptinhalt der Galois'schen Theorie anzusehen pflegt. Es erfordert dieser Gegenstand vielmehr erst mannigfache Vorbereitungen. Demgegenüber gilt es hier zunächst, den Körperbegriff in Allgemeinheit, sowie sodann in seinem engeren für die Algebra in Betracht kommenden Umfange zu discutiren. Dabei rückt dann vor allem der Begriff des Normalkörpers in den Mittelpunkt der Betrachtung. Die Gewinnung der Galois'schen Resolvente einer Gleichung gestaltet sich nun einfach und durchsichtig. In den früheren Darstellungen, welche zumeist unmittelbar an die Theorie der Permutationsgruppen anknüpfen, ist die Aufstellung der Galois'schen Resolvente bei allen solchen Gleichungen, die einen Affect haben, umständlicher, da die Prämissen betreffs des Rationalitätsbereiches weniger in den Vordergrund gerückt erscheinen als hier. Der Anschluss an die Gruppentheorie wird im zweiten Theile des in Rede stehenden Abschnitts genommen. Für weitergehendes Studium der Körpertheorie ist übrigens Dedekind's eigene, durch Schärfe und Allgemeinheit gleichermaßen bewunderungswürdige Darstellung in der vierten Auflage von „Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie“ S. 452 flg. zu empfehlen.

Im folgenden (vierzehnten) Abschnitt wird nunmehr auf Grundlage einer allgemeinen Theorie der Permutationsgruppen die Galois'sche Auf-

fassung vom Auflösungsprocess der Gleichungen entwickelt. Die hier be-
fürwortete Bezeichnungsweise ist einheitlich und zweckmässig gewählt,
weicht übrigens von der sonst üblichen Terminologie in einigen Punkten
ab: statt Ordnung einer Gruppe wird Grad gesagt, die Untergruppen
heissen Theiler, gleichberechtigte und ausgezeichnete Untergruppen werden
conjugirte Theiler und Normaltheiler. Der ganze Abschnitt gipfelt natürlich
in dem grossen Theorem über Reduction der Galois'schen Gruppe durch
Adjunction natürlicher Irrationalitäten und damit über die Auflösung der
Gleichung durch Lösung einer Kette zugehöriger Resolventen.

Die cubischen und biquadratischen Gleichungen ordnen sich nun leicht
ein. Darüber hinaus werden die Abel'schen Gleichungen, das heisst die
irreducibeln Gleichungen mit commutativer Gruppe behandelt. Sie werden
in bekannter Weise auf cyklische Gleichungen reducirt, während die Lösung
der letzteren durch die Resolventen von Lagrange auf die Auflösung reiner
Gleichungen zurückgeführt wird.

Nun folgt die Besprechung des classischen Beispiels der Kreistheilungs-
gleichungen. Bei Gelegenheit der $\frac{1}{3}(n-1)$ - und $\frac{1}{4}(n-1)$ -gliedrigen Perioden
fügt Herr Weber Excurse über die Körper ganzer complexer Zahlen der
Gestalten $a + b\varrho$ und $a + bi$ an.

Im siebzehnten Abschnitt wird das Hauptproblem der überkommenen
Algebra, die Frage nach der Auflösbarkeit der Gleichungen durch Wurzel-
zeichen behandelt. Die allgemeine Galois'sche Theorie, sowie die voran-
gegangene Behandlung der Abel'schen Gleichungen, geben die Lösung des
Problems in der bekannten Gestalt durch Eigenschaften der Galois'schen
Gruppe der Gleichung. Herr Weber schlägt bei dieser Gelegenheit für die
durch Wurzelziehungen lösbaren Gleichungen in Erweiterung einer Kron-
ecker'schen Benennung den Namen der metacyklischen Gleichungen vor.
Aus der Einfachheit der alternirenden Gruppe für $n > 4$ folgt sodann
Abel's bekannter Satz über Nichtauflösbarkeit der „allgemeinen“ Gleich-
ungen vom fünften und höheren Grade. Doch verdient sehr bemerkt zu
werden, dass die Allgemeinheit der Coefficienten hier näher erörtert wird,
indem nämlich der sehr interessante Satz bewiesen wird, dass es bei jedem
Primzahlgrade unendlich viele affectlose Gleichungen mit rationalen Coeffi-
cienten giebt. Eine weitere Durchbildung findet die Theorie der meta-
cyclischen Gleichungen vom Primzahlgrad n , worauf sich Galois' eigene
Untersuchungen beziehen. Die Substitutionen der Galois'schen Gruppe
kann man dadurch bewerkstelligen, dass man auf die unteren Indices z
der Wurzeln x_z der Gleichung alle $\text{mod } n$ incongruenten Substitutionen
($z, az + b$) mit ganzzahligen Coefficienten a und b ausübt. Diese besonders
zugängliche Gestalt der Gruppe gestattet ohne Schwierigkeit die Durch-
bildung einer eingehenden Theorie für den Fall eines Primzahlgrades;
Specialausführungen werden für $n = 5$ gegeben.

Den Beschluss des ersten Bandes bildet die Besprechung des Problems, alle metacyklischen Gleichungen vom Primzahlgrad wirklich aufzustellen. Bekanntlich ist dies Problem von Kronecker in der Weise gelöst, dass er die Gestalt der Wurzeln aller Gleichungen vom Primzahlgrad charakterisirt, welche in einem gegebenen Körper metacyklisch werden. Auf Grundlage der Structur der metacyklischen Gruppe lassen sich die fraglichen Wurzeln ohne besondere Schwierigkeit in einem geschlossenen Ausdrücke angeben. Am Beispiel $n = 5$ werden auch hier wieder die allgemeinen Sätze illustriert.

Das erneute Eingreifen der Arithmetik an dieser Stelle führt zu weiteren wichtigen Fragestellungen, die jedoch für den zweiten Band vorbehalten bleiben. Die Frage nach Eigenart und Umfang der metacyklischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten, mit Coefficienten aus einem quadratischen Körper u. s. w. treten nun auf. Auch hier sind es wieder die bewunderungswürdigen Schöpfungen Kronecker's, denen wir eine wenigstens theilweise Klärung dieser Probleme danken. Die Behandlung der metacyklischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten nimmt Herr Weber für den zweiten Band bestimmt in Aussicht. Auch über das gleiche Problem in quadratischen Körpern, welches mit der complexen Multiplication der elliptischen Functionen aufs Innigste zusammenhängt, besass Kronecker ein Theorem, analog demjenigen des rationalen Falles, wie aus einem erst neuestens publicirten Briefe Kronecker's an Dedekind hervorgeht. Vielleicht gelangt auch dieser Gegenstand im Verlaufe des zweiten Bandes zur Untersuchung.

R. FRICKE.

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von
S. GUNDELFINGER. Herausgegeben von F. DINGELDEY. Leipzig 1895.
B. G. Teubner. VIII und 434 S. Mit Figuren im Texte.

An Werken über die analytische Geometrie der Kegelschnitte haben wir keinen Mangel, indessen behandeln sie meist nur die elementaren Theile der Kegelschnittlehre. Von nicht elementaren Werken, wie Hesse's sieben Vorlesungen, Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie und Salmon-Fiedler's Kegelschnitte, ist es nur das letztgenannte, welches es sich zur Aufgabe macht, die Theorie der Kegelschnitte ausschliesslich und umfassend zu behandeln. Bei einem Vergleiche des zu besprechenden Buches, welches die Elemente der analytischen Geometrie übrigens als bekannt voraussetzt, mit der vorhandenen Literatur, kommen von den angeführten Werken nur die beiden letztgenannten in Betracht. Der hervorstechendste Unterschied zwischen ihnen und den Gundelfinger'schen Vorlesungen besteht nun darin, dass bei Herrn Gundelfinger sämmtliche Probleme, projective sowohl als metrische, unter Zugrundelegung von Dreiecks-Coordinaten (projectiven Coordinaten), also mit Benutzung der allgemeinsten linearen Coordinaten behandelt werden, während bei metrischen

Problemen von Clebsch-Lindemann ausschliesslich Parallel-Coordinationen, von Salmon-Fiedler bald Parallel-Coordinationen, bald specielle Dreiecks-Coordinationen benutzt werden. Ausserdem wird von Herrn Gundelfinger die Rechnung so geführt, dass in jedem Augenblicke die Specialisirung von den allgemeinen Dreiecks-Coordinationen zu besonderen oder zu Parallel-Coordinationen erfolgen kann, was bei Salmon nicht der Fall ist. So einleuchtend nun auch das Vorgehen des Herrn Gundelfinger vom rein theoretischen Standpunkte aus erscheint, so wird man doch sofort die Frage aufwerfen, wie sich nun diese durchgängige Anwendung projectiver Coordinationen praktisch gestalten wird? Wir sind ja gewohnt, bei analytischer Behandlung eines vorgelegten geometrischen Problems das passendste Coordinatensystem zu wählen. So werden wir mitunter auch bei metrischen Problemen mit grossem Vortheile Dreiecks-Coordinationen gebrauchen, da uns hier mehr Anfangsdaten zur Verfügung stehen, oder da die Dreiecks-Coordinationen, wie sich Herr F. Klein gelegentlich sehr zutreffend ausdrückt, grössere Schmiegsamkeit als die Parallel-Coordinationen besitzen. Wie aber ist es, wenn hier bei metrischen Problemen durchweg projective Coordinationen verwandt werden? Werden z. B. nicht schon die Ausdrücke für die Entfernung zweier Punkte, den Winkel zweier Geraden u. s. w. ungewöhnlich complicirt ausfallen? Schon eine flüchtige Durchsicht des Gundelfinger'schen Werkes belehrt uns vom Gegentheile. Herr Gundelfinger hat es verstanden, den analytischen Apparat überall so einzurichten, dass die Entwicklungen einfach und übersichtlich werden, dabei sein bedeutendes formalistisches Talent auf Beste bewährend; derselbe weiss ausserdem den Formeln durchweg eine solche Gestalt zu geben, dass die Beziehung der metrischen Begriffe zu den unendlich fernen Elementen der Ebene, speciel zum imaginären Kreispunktepaar, besonders deutlich hervortreten. Es wird sich Alles dieses noch klarer zeigen, wenn wir nunmehr auf den Inhalt unseres Buches näher eingehen.

Im ersten Abschnitte desselben werden die fundamentalen Eigenschaften des einzelnen Kegelschnittes entwickelt. Die beiden ersten Paragraphen enthalten einleitende Betrachtungen, und zwar werden zunächst (§ 1) in der Ebene Dreiecks-Coordinationen in einer für die Folge besonders geeigneten und daher von der üblichen etwas abweichenden Weise eingeführt; als vorthellhaft erweist es sich hierbei, die Höhen des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Bei der Einführung der Linien-Coordinationen tritt ein Ausdruck $\omega(u_1, u_2, u_3) = \omega(u, u)$ auf, der in der Folge eine grosse Rolle spielen wird; $\omega(u, u)$ ist eine definite quadratische Form mit verschwindender Determinante, und zwar stellt, wie sich später zeigt, $\omega(u, u) = 0$ die Gleichung des imaginären Kreispunktepaares in Linien-Coordinationen vor.

Von speciellen Dreiecks-Coordinationen werden barycentrische und Parallel-Coordinationen betrachtet.

Ersichtlich handelt es sich in § 1 mehr um rasche Einführung in den Gegenstand, als um strenge Begründung desselben. Ohne dass man von vornherein ein Coordinatensystem, am einfachsten ein rechtwinkliges, zu Grunde legt, wird man über gewisse Schwierigkeiten hinsichtlich der unendlich fernen Elemente nicht hinauskommen; es sei dies besonders in Bezug auf die Specialisirung von allgemeinen Dreiecks-Coordinaten zu Parallel-Coordinaten gesagt. Dieser Uebergang muss analytisch ausgeführt werden, da für uns die unendlich ferne Gerade nur analytisch existirt; so kann z. B. von dem Abstände eines Punktes von der unendlich fernen Geraden nicht ohne Weiteres gesprochen werden, sondern dies kann erst auf Grund der unten für q gegebenen Formel geschehen. Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand würde indessen hier zu weit führen. Legt man ferner von vornherein ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das im Texte ja doch gelegentlich herangezogen wird, zu Grunde, so gestaltet sich die Transformation der Dreiecks-Coordinaten bedeutend einfacher, als dies in § 3 der Fall ist. Der zweite Paragraph bringt die Ausdrücke für den Abstand q eines Punktes $y = y_1, y_2, y_3$ von einer Geraden $u = u_1, u_2, u_3$ und den Winkel uv zweier Geraden u und v . Um einen Einblick in die Structur der Formeln zu geben, mögen die betreffenden Ausdrücke hierher gesetzt werden; es wird

$$q^2 = \frac{u_y^2}{\omega(u, u) p_y^2}, \quad \cos(uv) = \frac{\omega(u, v)}{\sqrt{\omega(u, u)} \sqrt{\omega(v, v)}},$$

wo

$$2\omega(u, v) = -\frac{\partial \omega(u, u)}{\partial u_1} \cdot v_1 + \dots$$

ist, und

$$p_y = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 = 0$$

die unendlich ferne Gerade vorstellt. Wichtig für die Folge ist hier noch die Einführung des Normalencentrum's einer Geraden u , worunter Herr Gundelfinger den gemeinsamen Punkt aller Normalen von u versteht; seine Gleichung ist offenbar $\omega(u, v) = 0$ in Linien-Coordinaten v .

Nach diesen Vorbereitungen treten wir in die Untersuchung des durch eine homogene quadratische Gleichung $f(x, x) = 0$ in Punkt-Coordinaten x_1, x_2, x_3 gegebenen Gebildes ein (§ 4); dass dieses Gebilde stets einen ebenen Schnitt eines Kegels zweiter Ordnung vorstellt, muss als aus der Raumgeometrie bekannt vorausgesetzt werden. Die Begriffe „Polare“, „Tangente“, „Mittelpunkt“ und „Durchmesser“ werden eingeführt, worauf eine vorläufige Eintheilung der Curven zweiter Ordnung hinsichtlich ihres Mittelpunktes erfolgt. Hierauf wird die Kegelschnittgleichung in Linien-Coordinaten abgeleitet, das Poldreieck eingeführt, und das Zerfallen des Kegelschnitts in ein Geradenpaar besprochen. Interessant ist hier für den Determinanten-Theoretiker die Anwendung der geänderten

Determinanten zur Darstellung der Gleichung der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve zweiter Ordnung nach Methoden von Herren Gundelfinger und Aronhold.

Es folgen (§ 5) zu den vorhergehenden dualistischen Betrachtungen und (§ 6) eine Klassification der Kegelschnitte nach einer Methode, die Herr Dingeldey in der Einleitung wohl mit Recht als neu bezeichnet: Die Curve zweiter Ordnung $f(x, x) = 0$, deren Linien-Coordinatengleichung $F(u, u) = 0$ lautet, wird mit der unendlich fernen Geraden $p_x = 0$ geschnitten. Auf Grund der erwähnten Aronhold'schen Untersuchungen hängt alsdann der Charakter unserer Curve zweiter Ordnung wesentlich von dem Ausdrucke $F(p, p)$ ab. Ist bei nicht zerfallender $f(x, x) = 0$, z. B. $F(p, p) > 0$, so stellt $f(x, x) = 0$ eine Ellipse, ist $F(p, p) < 0$, eine Hyperbel, ist $F(p, p) = 0$, eine Parabel vor. Die Kriterien für die Curven zweiter Ordnung, ebenso diejenigen für die Curven zweiter Klasse, sind dann in Tabellen zusammengestellt, die an Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen.

Der folgende Paragraph (§ 7) behandelt den Kreis, die imaginären Kreispunkte und ihre Beziehungen zum Winkel zweier Geraden in sehr eleganter Ausführung. Er enthält somit auch den Ausdruck für die Entfernung r zweier Punkte x, y , und zwar ist

$$r^2 = \frac{\begin{pmatrix} y & x \\ y & x \end{pmatrix} \omega_{ik}}{\tau \cdot p_x^2 p_y^2},$$

wo rechts τ eine Constante und der Zähler eine doppelt geränderte Determinante vorstellt, welch' letztere gleich Null gesetzt, die Gleichung der von einem Punkte y nach den imaginären Kreispunkten gehenden Geraden (des durch y gehenden circularen Geradenpaares bei Herrn Gundelfinger) in Punkt-Coordinaten x liefert.

Nachdem in den beiden folgenden Paragraphen gewisse Gleichungen mit nur reellen Wurzeln untersucht (§ 8) und der Invariantenbegriff für ternäre Formen dargelegt und an wichtigen Beispielen (Discriminante, Hesse'sche Covariante u. s. w.) verdeutlicht worden ist (§ 9), gelangen wir zu dem Hauptachsenprobleme, welches hier in eigenartiger, interessanter Weise erledigt wird (§ 10). Diese Behandlung wird indessen nur ermöglicht durch die vorerwähnten Untersuchungen des § 8, welch' letztere, ganz abgesehen von ihrer Anwendung an dieser und späterer Stelle (§ 15, § 18), an und für sich von hervorragendem Interesse sind und als eine glänzende Leistung auf algebraischem Gebiete bezeichnet werden müssen. Hauptachse einer Curve zweiter Ordnung ist eine im Endlichen gelegene Gerade, welche mit der Polaren ihres Normalencentrum zusammenfällt; diese Heranziehung des Normalencen-

trums ist für die Behandlung des Hauptachsenproblems bei Herrn Gundelfinger eben das Charakteristische. Ein weiteres Eingehen auf die elegante Methode muss sich Referent leider versagen. Rein algebraisch wird dabei, was noch besonders hervorgehoben werden möge, das Problem erledigt, zwei quadratische ternäre Formen $f(x, x)$ und $\omega(u, u)$ mit contragredienten Veränderlichen gleichzeitig in eine Summe von Quadraten (bez. auf eine canonische Form) linear zu transformiren, allerdings aber nur für den Fall, dass $\omega(u, u)$ eine singuläre quadratische Form ist; indessen ist doch der Weg für die Behandlung des allgemeinen Falles vorgezeichnet. In diesem Paragraphen wird schliesslich eine nochmalige Klassifikation der Kegelschnitte mittelst der Hauptachsen-Transformation vorgenommen.

Von den beiden Schlussparagraphen des ersten Abschnittes beschäftigt sich noch der erste (§ 11) mit den wichtigsten metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte, der zweite (§ 12) mit der Erzeugung der Kegelschnitte durch projective Strahlenbüschel und Punktreihen. Hier findet sich unter Anderem ein hübscher Beweis des Pascalschen Lehrsatzes durch eine einfache Determinanten-Rechnung.

Der zweite Abschnitt unseres Buches entwickelt die Theorie des Kegelschnittbüschels und Kegelschnittnetzes und der zu diesen dualen Gebilde. Nach einleitenden Bemerkungen (§ 13) werden die gemeinsamen Punkte und Tangenten zweier Curven zweiter Ordnung $f=0$, $g=0$ untersucht, wobei gleichzeitig das Verhalten des durch die beiden Kegelschnitte bestimmten Büschels in Betracht gezogen wird (§ 14), und zwar wird der Ausnahmefall, dass $\det(\rho f + \sigma g)$ identisch Null ist, eingehend berücksichtigt. Dieser Paragraph bringt noch die Transformation zweier Kegelschnitte auf das gemeinsame Poldreieck als Coordinatendreieck, der nächste (§ 15) die allgemeinen Eigenschaften des Kegelschnittbüschels und zu dem Vorhergehenden Dualistisches. Es werden dann die Haupteigenschaften der speciellen Schaar

$$\rho \varphi(u, u) + \sigma \omega(u, u) = 0$$

von confocalen Kegelschnitten aus den allgemeinen Eigenschaften abgeleitet.

Der folgende Paragraph (§ 16) erledigt mittelst Partialbruchzerlegung die Transformation zweier Curven zweiter Ordnung auf eine besonders einfache Form auch für die Specialfälle, in welchen einfache oder doppelte Berührung u. s. w. stattfindet.

Es folgt (§ 17) die geometrische Deutung der Fundamentalinvarianten des Kegelschnittbüschels, wobei auch die ausartenden Kegelschnitte genügend berücksichtigt werden.

Im folgenden Paragraphen (§ 18) wird die Schaar confocaler Kegelschnitte erneuter Betrachtung unterzogen. Der Charakter der confocalen Schaar hängt, wie gezeigt wird, von den Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\det [\lambda \varphi(u, u) + \omega(u, u)] = 0$$

für λ ab; im allgemeinen Falle dreier verschiedener Wurzeln bestehen die Curven der Schaar aus Ellipsen und Hyperbeln, im Falle einer von Null verschiedenen Doppelwurzel aus concentrischen Kreisen, im Falle einer Doppelwurzel Null aus confocalen Parabeln. Enthält die confocale Schaar auch nur einen Kreis oder eine Parabel, so enthält sie nur Kreise bez. Parabeln. Die Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte werden im nächsten Paragraphen (§ 19) noch näher untersucht; besonders interessiren hier die Sätze über doppelt berührende Kreise eines Kegelschnitts und ihre Beziehung zu den Brennpunkten. Der folgende Paragraph (§ 20) beschäftigt sich mit einigen Curven, welche zu einem Kegelschnittbüschel bez. zu einer Kegelschnittschaar in invarianter Beziehung stehen und zwar zunächst mit dem Polkegelschnitt N einer Geraden in Bezug auf ein Büschel (Kegelschnitt der neun Punkte), und bringt dann als Specialfall von N den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels. Dem Polkegelschnitte entspricht dualistisch eine Curve zweiter Klasse N , welche umhüllt wird von den Polaren eines Punktes y in Bezug auf eine Kegelschnittschaar; ist diese Schaar speciell eine confocale

$$\lambda \varphi(u, u) + \omega(u, u) = 0,$$

so ist N eine Parabel, die Herr Gundelfinger als Steiner'sche Parabel des Punktes y in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi(u, u) = 0$ bezeichnet; die Pole der Tangenten der Steiner'schen Parabel in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi(u, u) = 0$ erfüllen eine gleichseitige Hyperbel. — Am Schlusse dieser Paragraphen wird noch der Combinantenbegriff erklärt, und die später noch eingehender zu besprechende Combinante

$$\psi(x, x) = \frac{3}{2} \sum_1^3 \sum_1^3 k \frac{\partial^2 N}{\partial x_i \partial u_k} \frac{\partial^2 N}{\partial x_k \partial u_i}$$

eines Kegelschnittbüschels eingeführt.

Die Untersuchungen über die Steiner'sche Parabel leiten uns zu solchen über Krümmungskreis und Evolute eines Kegelschnitts über (§ 21). Liegt nämlich y auf $\varphi(u, u) = 0$, so berührt die Steiner'sche Parabel von y in Bezug $\varphi(u, u) = 0$ die Normale im Punkte y in dem zu y gehörigen Krümmungsmittelpunkte. Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkt werden zuerst allgemein für Curven n^{ter} Ordnung oder k^{ter} Klasse bestimmt, und die Resultate dann auf die Kegelschnitte angewandt. Die Evolute eines Kegelschnitts ist im Allgemeinen eine Curve sechster Ordnung und vierter Klasse.

Die Schlussparagraphen des zweiten Abschnittes beschäftigen sich in der Hauptsache mit den Netzen und Geweben von Kegelschnitten. Zunächst werden die Hesse'sche und Cayley'sche (Hermite'sche) Curve eines Netzes eingeführt und ihre geometrischen Eigenschaften entwickelt (§§ 22—24). Dass die Hesse'sche Curve (Hessiane) eines Netzes auch als Jacobi'sche Curve desselben bezeichnet wird, hätte doch mindestens erwähnt werden müssen. Zwischen einem Kegelschnittnetze und einem gewissen Kegelschnittgewebe findet, wie dann gezeigt wird (§ 25), eine bemerkenswerthe Reciprocität statt, die insbesondere ihren Ausdruck darin findet, dass die Hessiane des Netzes zugleich die Cayley'sche Curve des Gewebes und die Cayley'sche Curve des Netzes die Hessiane des Gewebes vorstellt. Wir kommen sogleich auf diesen Gegenstand zurück, indem wir auf den Inhalt des folgenden Paragraphen (§ 26) eingehen, in welchem die conjugirten linearen Kegelschnittsysteme behandelt werden. In diesen Schlussparagraphen handelt es sich im Wesentlichen darum, die betreffenden Theorien in ihren Grundzügen soweit zu entwickeln, als es für den Anhang, von welchem wir unten sprechen werden, erforderlich ist. Referent bedauert aber, dass gerade auf die conjugirten linearen Kegelschnittsysteme, die in analytischen Lehrbüchern nicht oder doch nur ungenügend behandelt sind, nicht näher eingegangen worden ist. Es wäre auch vortheilhaft gewesen, den Begriff „ n -gliedriges lineares System“ oder „ n -gliedrige Gruppe von Kegelschnitten“ einzuführen, dann hätten die Hauptresultate des § 26 folgende einfache Gestalt angenommen: Jeder r -gliedrigen Gruppe von Curven zweiter Ordnung ist eine $(6 - r)$ -gliedrige Gruppe von Curven zweiter Classe zugeordnet der Art, dass jeder Kegelschnitt der einen Gruppe, und nur ein solcher, conjugirt ist zu sämtlichen Kegelschnitten der anderen Gruppe ($r = 1, 2 \dots 5$). Im Specialfalle $r = 3$ erhält man ein Netz und ein zu ihm conjugirtes Gewebe; zwischen beiden findet die oben bemerkte Reciprocität statt.

Es folgt nunmehr ein Anhang, welcher fast die Hälfte unseres Buches einnimmt. Derselbe enthält zunächst eine grosse Anzahl von Aufgaben und Lehrsätzen, meistens von Herrn Gundelfinger herrührend, welche grösstentheils mittelst der im Haupttheile entwickelten Theorien gelöst bzw. bewiesen werden können. Die Lösungen und Beweise sind meist ausführlich angegeben, wenn nicht, wenigstens angedeutet. Unter den Lehrsätzen finden sich viele, welche Steiner (oft ohne Beweis) aufgestellt hat, und die hier eine elegante Behandlung erfahren. Ueberhaupt findet sich hier des Interessanten und Anregenden eine grosse Menge.

Weiterhin bildet dieser Anhang eine Ergänzung des Haupttheils, indem Manches, was dort unterdrückt werden musste, darin zur Sprache kommt. So enthält derselbe einen Excurs über binäre quadratische und cubische Formen, um dann die (sechs) Curven von gegebenen Doppelverhältnissen in einen Kegelschnittbüschel bestimmen zu können. Die

Beziehungen der drei harmonischen und der zwei äquianharmonischen Curven des Büschels zu der schon erwähnten Combinante ψ derselben sind von besonderem Interesse. Der von Herrn Gundelfinger über ψ entwickelte Satz, wonach jeder der drei harmonischen Kegelschnitte mit ψ eine doppelte Berührung hat, erinnert sofort an einen analogen Satz über eine gewisse von Brioschi eingeführte Combinante ψ des syzygetischen Büschels einer ebenen Curve dritter Ordnung. In der That sind beide Combinanten nach demselben Gesetze gebildet. Weiterhin verwendet Herr Gundelfinger ψ noch bei der Aufstellung der Realitätskriterien für die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte; die folgenden Untersuchungen über Polviereck und conjugirte Kegelschnitte hätte Referent gern breiter ausgeführt und mit den damit im Zusammenhange stehenden Untersuchungen des Haupttheils verschmolzen gesehen, worauf schon oben hingedeutet wurde. Von den grösseren Entwicklungen des Anhangs seien noch erwähnt diejenigen über die Steiner'sche Curve dritter Klasse und vierter Ordnung, welche von den Achsen aller Parabeln umhüllt wird, die ein gegebenes Dreiseit zum Poldreiseit haben, ferner die Behandlung eines Aronhold'schen Integrals mittelst der Theorie der Poldreiecke und die Verallgemeinerung der Weierstrass'schen Methode, elliptische Integrale auf die Normalform zu reduciren unter Benutzung der Theorie der Kegelschnittbüschel.

Wie aus der vorstehend gegebenen Inhaltsübersicht hervorgeht, unterscheidet sich das Gundelfinger'sche Werk von den im Eingange erwähnten Werken vielfach durch die in ihm angewandten Methoden; es ist eben die principielle Benutzung projectiver Coordinaten, welche in vielen Fällen eine Umgestaltung der alten Methoden veranlasst, indem sie dazu nöthigt, den algebraischen Operationen eine allgemeinere Gestalt zu geben. Als Beispiel hierfür sei nochmals auf die Behandlung des Hauptachsenproblems bei Herrn Gundelfinger hingewiesen. — Stofflich deckt sich der Inhalt unserer Vorlesungen (im Haupttheile) ungefähr mit dem, was in denen von Clebsch-Lindemann über Kegelschnitte gebracht wird. Ueber das Salmon'sche Werk greift das Gundelfinger'sche in einzelnen Punkten hinaus (vergl. z. B. § 26), in anderen bleibt es hinter jenem zurück. Es ist aber auch offenbar nicht die Absicht des Herrn Gundelfinger, in seinem Werke alle Theile des weitverzweigten Gebietes der Kegelschnitttheorie gleichmässig und im Einzelnen in Betracht zu ziehen. Seine Absicht dürfte vielmehr, worauf schon die Wahl des Titels schliessen lässt, dahin gehen, diejenigen Methoden aus jener Theorie, welche er in einer Reihe von Jahren in den verschiedensten Zeitschriften entwickelt, als Universitätslehrer vorgetragen und praktisch erprobt hat, nunmehr auch weiteren Kreisen des mathematischen Publikums in bequemer Weise zugänglich zu machen. Niemand, der auf dem behandelten Gebiete thätig ist, wird dem Studium dieser Methoden sich entziehen können.

Herr Dingeldey hat die Herausgabe dieser Vorlesungen mit anerkennenswerther Sorgfalt ausgeführt. Die Diction ist fließend, der Stoff sehr übersichtlich angeordnet und die Rechnung so gestaltet, dass sie ohne Schwierigkeit verfolgt werden kann. Das Studium des Buches wird sonach auch keinem Studirenden, welcher die nöthigen Vorkenntnisse besitzt, besondere Schwierigkeiten bereiten. Die benutzte Literatur ist durch Citate hinreichend kenntlich gemacht. Bei den Citaten ist das Erscheinungsjahr der betreffenden Abhandlung stets zugefügt, was sehr zu billigen und allgemein zu empfehlen ist. Ein ausführliches Sachregister macht das Werk zu einem werthvollen Nachschlagebuch. Indessen sollten im Register nicht zu viele Dinge fortlaufend ohne Gliederung unter denselben Begriff gestellt sein. Von sonstigen kleinen Ausstellungen nur noch die, dass die Bezeichnung p_z für

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3$$

schon Seite 25, nicht erst Seite 33 hätte erklärt werden müssen. — Schliesslich werde noch hervorgehoben, dass unter den Aufgaben und Sätzen sich solche befinden, welche theils von Herrn Dingeldey herkommen, theils von ihm auf Anregung des Herrn Gundelfinger bearbeitet worden sind.

P. MUTH.

G. HOLZMÜLLER. **Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.**

Erster Theil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. VIII u. 212 S. 2 Mk. 40 Pf.
Zweiter Theil, für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. Leipzig 1894. B. G. Teubner. VII u. 273 S. 3 Mk.

Der Verfasser, ein bekanntes Mitglied der Schulreform-Conferenz, giebt in dem vor uns liegenden Lehrbuche eine erste Darstellung von dem mathematischen Pensum der höheren Lehranstalten im Sinne jener Conferenz. Referent hat das Buch mit eingehendstem Interesse gelesen, und es erscheint ihm geboten, auf die Besonderheiten des neuen Lehrbuches genauer einzugehen.

Im Vorwort spricht es Verfasser als seine Grundanschauung aus, dass bei einem Lehrbuche eine einfache und naturgemässe Entwicklung einer lückenlosen systematischen Darstellung vorzuziehen sei. Weiter heisst es in dem Begleitwort zu dem ersten Theile, dass „es eigentlich nicht tadelnswerth ist, wenn ein Lehrbuch einmal etwas Neues bringt und aus dem altgewohnten Geleise austritt“. Sicher nicht, so lange die unabweisbare Forderung nach mathematischer Strenge überall befriedigt wird. Sehen wir von einzelnen Kapiteln ab, so bietet das Lehrbuch in der That vieles Gelungene. Allerdings, manches von dem, was Verfasser vielleicht als seinem Lehrbuche eigenthümlich bezeichnet wissen will, findet sich schon anderswo. So der auf S. 32 mitgetheilte kinematische Beweis für den Satz

von der Winkelsumme des Dreiecks, z. B. in „H. Müller, Die Elemente der Planimetrie“, 5. Aufl., Metz 1892, Scriba, S. 7; der auf S. 57 gegebene elegante Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes in „Kunze, Lehrbuch der Geometrie“ I, 3. Aufl., Jena 1873, Frommann, S. 86, 87. Auch der Gedanke, auf welchen Verfasser besonderen Werth legt, den Congruenzsätzen die Construction aus den betreffenden Stücken vorzuschicken, ist schon anderswo, z. B. von Herrn H. Müller in dem citirten Lehrbuch, sowie in seinem „Leitfaden der ebenen Geometrie“ I, 3. Aufl., Leipzig 1889, B. G. Teubner, S. 20 zur Ausführung gebracht. Nicht recht ersichtlich ist es, weshalb die vier Aehnlichkeitssätze in üblicher Breite vorgetragen werden; zwei oder drei wären passender unter die Uebungsaufgaben zu verweisen.

In dem Begleitwort zur Stereometrie des ersten Theiles erhebt Verfasser nachdrücklichst die Forderung nach correctem stereometrischen Zeichnen und stimmt hierin mit Herrn Martus überein (vergl. dessen „Raumlehre für höhere Schulen“ II, Bielefeld und Leipzig 1892, Velhagen und Klasing). Gerade das Kapitel über Stereometrie aber scheint dem Referenten nicht durchaus einwandfrei zu sein. So möchte sich Referent erlauben, gegen die alleinige Anwendung der Parallelprojection Bedenken zu erheben, Bedenken, welche auch in dem Vorwort zu dem „Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre von H. Martus“, II, Bielefeld und Leipzig 1893, Velhagen und Klasing, einen Ausdruck gefunden haben.

Was die Ausdrucksweise anbetrifft, so lässt deren Correctheit zu wünschen übrig. Indessen möchte die anerkennenswerthe Schnelligkeit, mit welcher das Lehrbuch zur Ausführung gekommen ist, als Entschuldigung gelten. Damit die zweite Auflage hierin Wandel schaffe, seien einige Belege mitgetheilt. Auf S. 14 schreibt der Verfasser: Die Ebene ist eine Fläche, bei der jeder Punkt gleichen Abstand von zwei gegebenen Raumpunkten hat; und auf S. 47 wird sie als die Gesamtheit aller Punkte bezeichnet, deren jeder von zwei gegebenen Raumpunkten dieselbe Entfernung hat. Auf S. 135 wird π ein Decimalbruch mit unendlich langer Periode genannt. Die auf S. 186 angeführte trigonometrische Aufgabe 25) dürfte in der Wirklichkeit wohl unausführbar sein. Dem Referenten fiel ferner (besonders bei der Aufgabe auf S. 30) auf, dass die Meilenbezeichnung statt der jetzt üblichen km-Bezeichnung angewendet wird, sowie dass Verfasser vermeidet, neben senkrecht die Bezeichnungen lothrecht und rechtwinklig zu unterscheiden. Noch eine mehr subjective Bemerkung bezieht sich auf die Stellung der Zahl π : die unbenannte Zahl gehört doch vor die benannte. Auch ein Druckfehler sei hier mitgetheilt: Auf S. 113, 124, 159 ist die Null durch den Buchstaben o dargestellt.

Ein Wort noch über die arithmetische Abtheilung des ersten Theiles. Das Begleitwort liefert hierzu eine längere treffende Auseinandersetzung. Wer noch weitere Belehrung wünscht, sei auf „O. Reichel, Darstellung der Grundbegriffe der Arithmetik“, Programm-Abhandlung, Kaiserin Aug-

Gymnasium, Charlottenburg 1882, aufmerksam gemacht. Bei den quadratischen Gleichungen fiel dem Referenten die unbequeme Normalform $x^2 - ax + b = 0$ statt $x^2 - 2ax + b = 0$ auf. Soviel über den ersten Theil!

Der zweite Band, dessen Redaction eine sehr sorgfältige zu nennen ist, beginnt mit dem Satz des Ptolemäus, aus welchem die Heron'sche Inhaltsformel hergeleitet wird, und mit Constructionen regelmässiger Kreisvierecke, wobei Mascheronis elegante Constructionen eines Fünf- und Zehneckes eine Stelle finden. Verfasser hätte hier auch die Construction erwähnen können, welche viele der bisher bekannt gewordenen an Eleganz und Einfachheit übertragt: Referent meint die Construction des Herzogs Carl Bernhard von Sachsen-Weimar, welche für die regelmässigen Polygone mit überraschender Annäherung gilt (vergl. Kunze a. a. O. S. 246, sowie H. Martus, Raumlehre II S. 36). Hieran reihen sich Uebungen am Dreieck, welche durch ihre Auswahl und Anordnung bemerkenswerth sind: eine Reihe von Relationen zwischen den Seiten und den Radien der Um-, In- und Ankreise einerseits, den Höhen, Mittellinien und Winkelhalbirenden andererseits werden vorgeführt und u. A. eine Aufgabe behandelt, die sich als ein Specialfall des Steiner'schen Schliessungsproblems darstellt. Es folgen allgemeine Bemerkungen über Constructionsaufgaben: Lösungen mit Hilfe von Lehrsätzen, Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder, Methode der Parallelverschiebungen, Methode der Aehnlichkeit, Methode der Umkehrung der Aufgabe, Methode der Drehung, Methode des geometrischen Ortes, Methode der algebraischen Analysis. Dieses Kapitel verdient besondere Hervorhebung, da es eine grosse Zahl hübscher Aufgaben bietet, deren Lösungen durch ihre Eleganz ausgezeichnet sind. Verfasser geht hiernach zur neueren Geometrie über, die hier erheblich stärker berücksichtigt wird, als es in der Regel geschieht. Es kommen zur Behandlung: Satz des Ceva, Satz des Menelaus, Anwendungen auf vollständiges Vierseit, Pascal'scher Satz und Aehnlichkeitsachsen dreier Kreise; harmonische Punkte und Strahlen; Aehnlichkeitspunkte und Pascal'scher Satz; harmonische Punkte und Strahlen am Kreise, Pol und Polare; die Inversion oder Spiegelung mittels reciproker Radien; Potenz und Potenzlinien; einige Berührungsaufgaben. Diese Betrachtungen dienen dem Verfasser zum Theil als Vorbereitung für kartographische Anwendungen, welche er mehr als bisher in den mathematischen Unterricht hineingezogen wissen will, in Uebereinstimmung mit Herrn Martus, der in seinem Buche über „Astronomische Geographie“ ein Kapitel der Darstellung des Kugel-Gradnetzes auf Karten gewidmet hat. Um den Zusammenhang der verschiedenen Gradnetze klarzulegen, entwickelt Verfasser in höchst einfacher und elementarer Weise die Grundzüge der conformen Abbildung, eines Gebietes, in welchem der Verfasser auch wissenschaftlich thätig gewesen ist.

Erst die Trigonometrie dieses Theiles bringt die Additionstheoreme, welche auf zwei Weisen hergeleitet werden. Die so schwerfällige und den identischen Charakter der Additionstheoreme verdeckende Herleitung mit Hilfe des Ptolemäischen Satzes hätte vielleicht wegbleiben können. Es sei auf eine andere Herleitung verwiesen, vielleicht die einfachste unter den bekannten, welche Referent u. A. in „J. Diekmann, Anwendung der Determinanten und Elemente der neueren Algebra“, Leipzig 1889, B. G. Teubner, S. 99 gefunden hat.

Die stereometrische Abtheilung bringt ausser den üblichen Betrachtungen noch Kapitel über den Schwerpunkt, die Guldin'schen Regeln, die Sätze über abgeschrägte Körper, die Newton-Simpson'sche Regel und die Summenformel, sowie Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen. Auch im zweiten Bande spricht Verfasser noch von einem „Satze“ des Cavalieri. Eine folgende Abtheilung enthält die „Grundlehren von den Kegelschnitten“, doch soll auch hier, wie es in der Vorbemerkung heisst, nur ein „Einblick“ gegeben werden. Der arithmetische Theil behandelt geometrische und arithmetische Reihen, den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten, die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen, den Moivre'schen Satz, die geometrische Darstellung der complexen Zahlen und der n^{ten} Wurzeln aus der Einheit und reciproke Gleichungen.

Ein Anhang bringt eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie, einige Bemerkungen über Maxima und Minima, sowie die Quadrateintheilung der Ebene mittelst der Polarcoordinaten.

Schon dieser kurze Auszug lässt erkennen, dass das vorliegende Lehrbuch unstreitig zu den bedeutendsten Erscheinungen auf dem Gebiete der pädagogischen Literatur zu zählen ist.

E. JAHNKE.

B. FÉAUX. Buchstabenrechnung und Algebra nebst Übungsaufgaben.

9. Aufl. von F. BUSCH. Paderborn 1894. Schöningh. 316 S. Mk. 2,40.

Diese Auflage unterscheidet sich nur äusserlich von der vorhergehenden, über welche schon Herr Schwering im XXXIII. Bande dieser Zeitschrift referirt hat. In Rücksicht auf die neuen Lehrpläne sind die Kapitel der Determinanten und Combinatorik gestrichen und andere, wie die Lehre von den Kettenbrüchen und diophantischen Gleichungen gekürzt worden. Auch erfuhr die Aufgabensammlung eine Revision, so zwar, dass die alten Nummern der Aufgaben hinter die neuen gesetzt worden sind.

E. JAHNKE.

S. EPSTEIN. Die vier Rechnungsoperationen mit Bessel'schen Functionen nebst einer geschichtlichen Einleitung. Bern 1894. Wyss. 56 S.

Es ist eine unter Leitung des Herrn Graf entstandene Inaugural-Dissertation, deren Redaction an manchen Stellen zu wünschen übrig lässt.

Sie giebt eine Zusammenstellung von Resultaten aus den einschlägigen Arbeiten der Herren Gegenbauer, Graf, Lommel, C. Neumann, Nicolas, Schläfli, Schlömilch u. A. Nach einer kurzen historischen Einleitung werden im ersten und zweiten Theile die Entwicklungen angegeben, welche sich auf die Addition, Multiplication und Division der Bessel'schen Functionen beziehen; der dritte Theil bringt die Formeln für die Producte und Quotienten von Bessel'schen Functionen.

In dem angehängten Literatur-Nachweis fiel dem Referenten ein Versehen auf. Die citirte Arbeit von Herrn Haentzschel ist nicht im 43. Bande der „Mathematischen Annalen“, sondern im XXXI. Bande der Schlömilch'schen „Zeitschrift“ erschienen.

E. JAHNKE.

B. KÄMPFE. Tafel des Integrals $\Phi_{(\gamma)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$. Leipzig 1893. Engelmann.

In der Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeiten spielt das Gauss'sche Fehlerintegral $\Phi_{(\gamma)}$ eine Rolle als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler seinem absoluten Werthe nach zwischen 0 und D ($\gamma = hD$) liege. Schon Fechner hatte eine Tafel für dieses Integral berechnet. Vollständiger ist die hier vorliegende, welche aus der entsprechenden in A. Meyers, Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleitet ist. Sie giebt die Werthe von $\Phi_{(\gamma)}$ auf vier Stellen genau, wie es für psychophysische Zwecke genügt, von $\gamma = 0,000$ bis $\gamma = 1,509$ und von $\gamma = 1,51$ bis $\gamma = 2,89$.

E. JAHNKE.

Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. Von EMANUEL PUCHBERGER. 1. Heft. Wien 1894. Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

Der Verfasser sagt in seiner Vorrede von dieser Methode: „Dieselbe integrirt alle Differentialgleichungen, ist theoretisch auf alle anwendbar, ihre Ausführung unterliegt, wie jedes Verfahren, nur den äusserlichen Rücksichten auf Raum und Zeit; sie ist die einzige bekannte Methode, von der man dies sagen kann.“ Einen Beweis für diese Behauptung wird man allerdings vergebens suchen. Das ist eine Folge der Ansicht des Verfassers über das mathematische Beweisverfahren. Nach seiner Meinung nämlich genügt es, wenn die Methode an einzelnen Zahlenbeispielen zum Ziele führt, um ihre Allgemeingiltigkeit zu behaupten, und diese Behauptung so lange aufrecht zu erhalten, bis ihm ein Beispiel vorgeführt wird, auf welche sie nicht anwendbar ist. Er befindet sich dabei mit seinen eigenen Worten in Widerspruch, indem er ausführt: „Es wäre eine gewagte Behauptung, die allgemeinste Methode gefunden zu haben. Eine solche giebt es nicht, und insofern will das Streben nach einer solchen Unmögliches oder ist — wenn man sich weniger höflich ausdrücken will — ungereimt.“

Was die Methode selbst anbetrifft, so beruht sie auf folgendem Princip: „Die Integrale sind Functionen der Coefficienten und ihrer 1., 2., 3. ... n^{ten} Ableitungen und zwar unendliche oder endliche Reihen, deren Glieder die Producte der mit unbestimmten Constanten - Coefficienten und Exponenten — versehenen Gleichungscoefficienten und ihrer 1., 2., 3. ... n^{ten} Ableitungen sind.“ In den einzelnen Beispielen wird nicht genau nach dieser Methode verfahren. In vielen derselben sind die Coefficienten Functionen von x und lx ; in allen diesen Fällen wird

$$y = a_m \cdot x^{b_m} \cdot (lx)^{c_m} \dots$$

gesetzt. b_m und c_m werden so bestimmt, dass möglichst viele Glieder der Gleichung verschwinden. Diese Werthe, von denen wir z. B. bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung im Allgemeinen zwei erhalten, werden mit $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ bezeichnet; $b_3 b_4$, $c_3 c_4$ werden dadurch erhalten, dass man das erste Glied der Gleichung für b_3 dem niedrigsten in der Gleichung für b_1 noch vorhandenen gleich setzt und ebenso mit b_4 und b_2 verfährt. Auf dieselbe Weise bestimmt man die weiteren Exponenten; die Zahlen mit ungeradem Index sind die Exponenten der Reihe für y_1 , die geraden diejenigen von y_2 . Der Nachweis der Convergenz der betreffenden Reihen wird niemals erbracht. Diese Aufgabe wird einfach als nicht in den Rahmen der Untersuchung fallend bezeichnet, obgleich doch gerade die Convergenz die nothwendige Bedingung für die Verwendung der Reihe bildet. Die Methode soll übrigens bei partiellen Differentialgleichungen zu viel allgemeineren Resultaten führen als die bisher bekannten.

Als Beispiel hierfür benutzt der Verfasser die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = 0$$

und erhält als Resultat:

$$z = \varphi \left[\frac{y^{c_1}}{0!} + \frac{c_1 x y^{c_1-1}}{1!} + \frac{c_1(c_1-1)}{2!} x^2 y^{c_1-2} \right. \\ \left. + \frac{c_1(c_1-1)(c_1-2)}{3!} x^3 y^{c_1-3} + \frac{c_1(c_1-1)(c_1-2)(c_1-3)}{4!} x^4 y^{c_1-4} + \dots \right. \\ \left. + \frac{c_1(c_1-1)(c_1-2) \dots (c_1-m+2)}{(m-1)!} x^{m-1} \cdot y^{c_1-m+1} \right] \dots$$

Hierzu macht er folgende Bemerkung: „In der That ein überraschendes Resultat und eine glänzende Leistung der angewandten Methode, wenn man bedenkt, dass die bisher bekannten Methoden für die Gleichung $z' - z_1 = 0$ nur das Integral: $z = \varphi(x + y)$ bestimmen konnten, welches an Eleganz, Allgemeinheit und Reichthum der Gestaltung weit von dem hier entwickelten Integrale übertroffen wird.“ Er scheint also ganz zu übersehen, dass diese Reihe, falls sie convergirt, $= (y + x)^{c_1}$ ist. Das ist in der That ein überraschendes Resultat!

MAX MEYER.

Vierstellige Logarithmentafel. Von TH. ALBRECHT. Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann.

Die vorliegende Tafel zeichnet sich durch Klarheit und Uebersichtlichkeit der Anordnung aus. Sie enthält:

- I. Logarithmen der Zahlen.
- II. Länge der Kreisbögen für den Halbmesser 1.
- III. Logarithmen der trigonometrischen Functionen.
- IV. Additions- und Subtractions-Logarithmen.
- V. Quadrate der Zahlen von 1 bis 1000.
- VI. Numerische Werthe der trigonometrischen Functionen.
- VII. Constanten.

Es ist also alles für den praktischen Gebrauch Nothwendige darin vorhanden und in allen Fällen, in denen eine Rechnung mit vierstelligen Logarithmen genügt, der Gebrauch derselben zu empfehlen.

MAX MEYER.

Bibliographie

vom 16. Juli bis 31. August 1895.

Periodische Schriften.

- Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1894. Berlin, G. Reimer. Mathematische Abhandlungen. 4 Mk. 50 Pf.
Physikalische Abhandlungen. 13 Mk.
- Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Instituts. Zenitdistanzen von Helgoland, Neuwerk und Wangerooß u. s. w. Berlin, Stankiewicz. 20 Mk.
- Astronomische Mittheilungen der königl. Sternwarte zu Göttingen. Herausgegeben von W. SCHUR. 4. Theil. Göttingen, Peppmüller. 30 Mk.
- Katalog der Astronomischen Gesellschaft. I. Abtheilung 10. Stück. Leipzig, Engelmann. 18 Mk.
- Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 14. Jahrgang. 1895. Nr. 1 und 2. Leipzig, Barth. 4 Mk.
- Nautisches Jahrbuch für 1898 zur Bestimmung der Zeit, der Länge und Breite zur See. Herausgegeben vom Reichsamt des Innern unter Redaction von TIETJEN. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.
- Kleines nautisches Jahrbuch für 1896. 35. Jahrgang. Herausgegeben von W. LUDOLPH. Bremen, Heinsius. 75 Pf.
- Jahresbericht für 1894 des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.
- Beobachtungen der kaiserl. meteorologischen Marinstation in Wilhelmshaven, ausgeführt unter Leitung von C. BÖRGEN. 1. Theil. Berlin, Mittler. 1 Mk. 75 Pf.

Geschichte der Mathematik.

- STRÄCKEL, P. und ENGEL, F., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss; eine Urkundensammlung. Leipzig, B. G. Teubner. 9 Mk.

Reine Mathematik.

- PLÜCKER's gesammelte Abhandlungen, im Auftrag der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Herausgegeben von A. SCHÖNFLIES und F. POCKELS. 1. Bd. Mathem. Abhandlung. Leipzig, B. G. Teubner. 20 Mk.

- KRONECKER'S Werke, auf Veranlassung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. HENSEL. 1. Band. Leipzig, B. G. Teubner. 28 Mk.
- KLEIN, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. TÄGERT. Ebendasselbst. 2 Mk.
- GRASSMANN, R., Die Formenlehre der Mathematik. Stettin, Grassmann. 10 Mk.
- SIEVERT, H., Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen. II. Theil. (Progr.) Bayreuth, Giesel. 75 Pf.
- CHISHOLM, G., Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie (Dissertation). Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.
- JACOTTE, C., Ueber die allgemeine Reihenentwicklung der Potentialfunction nach Lamé'schen Producten (Dissertation). Ebendasselbst. 1 Mk. 20 Pf.
- SAYDER, V., Ueber die linearen Complexe der Lie'schen Kugelgeometrie (Dissertation). Ebendasselbst. 1 Mk. 20 Pf.
- WOODS, F., Ueber Pseudominimalflächen (Dissertation). Ebendas. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

- KLEIN, F., Die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen. Antrittsrede. Leipzig, B. G. Teubner. 60 Pf.
- Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen, ausgeführt in den Jahren 1892—1894 durch die kaiserl. königl. Kriegsmarine. Wien, Gerold. 18 Mk. 40 Pf.
- VODUSEK, M., Die astronomische Strahlenbrechung (Programm). Laibach, Fischer. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

- TESLA'S Licht der Zukunft. Populärer Experimentalvortrag von P. SPIES. Berlin, Pötel. 50 Pf.
- LEHMANN, O., Elektrizität und Licht. Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.
- SCHMIDT, F., Moderne Anschauungen über die Kräfte der Elektrizität. Halle, Pfeffer. 50 Pf.
- KAPP, G., Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom. Theorie und Construction. Berlin, Springer. 7 Mk.
- FRÖLICH, O., Ueber Isolations- und Fehlerbestimmungen an elektrischen Anlagen. Halle, Knapp. 8 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

F. KLEIN. **Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen.**

Ausgearbeitet und vervollständigt von R. FRICKE. Zweiter Band. Fortbildung und Anwendung der Theorie. Leipzig 1892. B. G. Teubner. XV und 712 S.

Die Verspätung der Besprechung des vorliegenden Bandes — vergl. wegen des vorausgegangenen Bandes diese Zeitschrift Bd. 36 S. 201—212, Bd. 37 S. 82—84 — finde ihre Rechtfertigung in einem durch den früheren Referenten gewünschten nachträglichen Wechsel.

Die im Jahre 1884 erschienenen Vorlesungen von F. Klein über das Ikosaeder bildeten das erste Stadium, die 1890 und 1892 erschienenen, von R. Fricke bearbeiteten und verschiedentlich ergänzten Vorlesungen von Klein über elliptische Modulfunctionen das zweite Stadium eines grösseren Unternehmens, die Gesammtheit der neueren Untersuchungen über eindeutige Functionen mit unendlich vielen linearen Transformationen in sich zu einem abgerundeten Ganzen zu gestalten.

Schon das „Ikosaeder“, aber recht eigentlich die „elliptischen Modulfunctionen“ sollen als Vorstufen zu der allgemeinen Theorie dienen, die in mehreren zu erwartenden Bänden ihre Darstellung finden soll.

Das Wort „Vorstufe“ ist hier in weiterem Umfange zu verstehen, indem wenigstens bei den „elliptischen Modulfunctionen“ bereits alle die Methoden und Gesichtspunkte ausgeprägt erscheinen, welche den Verfassern auch für die allgemeine Theorie massgebend sein werden.

Der Charakter dieser Methodik lässt sich füglich in zwei Worten bezeichnen: möglichst unmittelbare, geometrische Anschaulichkeit, insofern es sich um die Erfassung der leitenden Gedanken handelt, und andererseits in historischem Sinne, möglichst allseitige Beleuchtung und Durchdringung des Stoffes.

Kein Zweifel, dass sich bei rein analytischer Verfolgung des Gegenstandes der äussere Umfang der „Modulfunctionen“ hätte bedeutend reduciren lassen, aber dann würde eben das Wesen der ganzen Darstellung und Denkweise der Verfasser verloren gegangen sein.

Die Vorzüge, aber auch die (pädagogischen) Gefahren einer derartigen universellen Stoffdurchbildung fallen zu sehr ins Auge, als dass dabei lange

zu verweilen wäre. Bedenkt man aber, dass es bisher nur wenige Werke in der mathematischen Literatur gab, in denen das gemeinte Princip consequent durchgeführt ist, so wird man mit der Kritik doppelt vorsichtig sein müssen, und wird vielmehr die Verfasser beglückwünschen, dass sie den Muth gefunden haben, trotz der vielen so zu sagen zünftlerischen Vorurtheile unbeirrt ihren Weg zu gehen.

Eines soll allerdings ohne Weiteres zugestanden werden, dass an einen Durchschnitts-Leser nicht gewöhnliche Anforderungen gestellt werden. Trotzdem, oder vielmehr weil ihm spezifische Vorkenntnisse nicht eigentlich zugemuthet werden, muss er eine um so grössere Elasticität des Geistes besitzen, um sich abwechselnd in den so ganz verschiedenartigen Gedankengängen mit Freiheit und Umsicht bewegen zu können.

Dass nur ein mit dem ersten Bande eingehend vertrauter Leser an den vorliegenden zweiten Band herantreten darf, bedarf wohl kaum der Bemerkung; immerhin sind in dieser Hinsicht die Fingerzeige, welche Herr Fricke in der Vorrede zum zweiten Bande gegeben hat, sowie das von demselben am Schlusse beigefügte Sachregister, für ein zweckmässiges Studium des ganzen Werkes von grossem Nutzen. Man vergleiche übrigens unsere Schlussbemerkung.

Wir erinnern zur Orientirung an das im ersten Bande (§§ 14, 15) formulierte Doppelprogramm. Der gruppentheoretische Theil desselben verlangte, von der „Modulgruppe“, das ist, der Gesamtheit der linearen ganzzahligen Substitutionen:

$$\omega'_1 = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \quad \omega'_2 = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 \quad (\alpha \delta - \beta \gamma = 1),$$

die Untergruppen aufzustellen und sachgemäss zu classificiren — der functionentheoretische Theil dagegen, die zugehörigen Invarianten, das ist, die einer solchen Untergruppe gegenüber invarianten Functionen von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ resp. Formen von ω_1, ω_2 zu bilden und deren gegenseitige Beziehungen zu ermitteln.

Beide Seiten des Programms ergänzen und vereinigen sich zur Lösung des Fundamentalproblems, die Resolventen der Modulgleichung $J(\omega) = \text{const}$ zu finden, wo nunmehr ω den Periodenquotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des elliptischen Integrals erster Gattung (in der Weierstrass'schen) Normalform:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

bedeutet, und $J = \frac{g_2^3}{g_3^2 - 27g_3^2}$ dessen rationale absolute Invariante.

Das gruppentheoretische Problem wurde in Beschränkung auf Congruenzgruppen, das sind solche, welche sich durch Congruenzen der Substitutionscoefficienten *mod n* definiren lassen, zu einem gewissen Abschluss gebracht.

Die Lösung des functionentheoretischen Problems dagegen wurde nur erst auf Grund der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen unter Benützung gewisser Existenztheoreme als möglich nachgewiesen und in einigen einfachen Fällen explicite durchgeführt.

Um das Problem für Congruenzgruppen allgemein zu lösen, bedarf es nunmehr des durch die geschichtliche Entwicklung der Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere der Theilung und Transformation derselben, gelieferten Materiales. Darüber hinaus erscheint aber jetzt eben dieses Gebiet der elliptischen Functionen unter neuen und wesentlich allgemeineren Gesichtspunkten; ja, man kann füglich behaupten, dass dieses bisher multis sed variis singulis modis bearbeitete Gebiet auf Grund des einheitlichen Klein'schen Programms erst zum Range einer wissenschaftlichen Disciplin erhoben wird.

Die Weierstrass'sche Function

$$p = p(u, \omega_1, \omega_2)$$

bleibt nicht nur der Modulgruppe gegenüber ungeändert, sondern auch bei Vermehrung von u um ganzzahlige Vielfache von ω_1, ω_2 , oder zusammengefasst, p ist eine Invariante der ternären Gruppe „ $\Gamma^{(3)}$ “:

$$(\Gamma^{(3)}) \quad u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2; \quad \omega'_1 = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2, \quad \omega'_2 = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2.$$

Die Gruppe des u für sich bildet eine in $\Gamma^{(3)}$ ausgezeichnete, unäre Untergruppe $\Gamma^{(1)}$; die der ω_1, ω_2 für sich, das ist eben die Modulgruppe, eine (nicht ausgezeichnete) binäre Untergruppe $\Gamma^{(2)}$ von $\Gamma^{(3)}$.

Der allgemeinste Ansatz wäre wiederum, sämtliche Untergruppen von $\Gamma^{(3)}$ und die zu einer jeden solchen gehörigen Functionen resp. Formen zu suchen, sowie deren gegenseitigen Zusammenhang zu ergründen.

In dieser Allgemeinheit wäre das Problem indessen viel zu schwierig, und auch unzweckmässig gestellt.

Man wird sich einmal auf Congruenzgruppen *mod* n beschränken, und andererseits den zugehörigen Functionen bez. der Art der Singularitäten gewisse einschränkende Forderungen auferlegen. Die Zahl n heisst die Stufe der Gruppe resp. der Functionen. Wir erwähnen hier nur die zwei nächstliegenden Congruenzgruppen. Nennt man zwei Substitutionen der $\Gamma^{(3)}$ „*mod* n congruent“, wenn alle Differenzen (oder auch alle Summen) von je zwei homologen Coefficienten durch n theilbar sind, so haben wir einmal die „ternäre Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $H^{(3)}$ “, welche alle *mod* n zur Identität congruenten Substitutionen der $\Gamma^{(3)}$ umfasst, und andererseits die aus der $\Gamma^{(1)}$ entsprechend gebildete unäre Gruppe $H^{(1)}$. Dieser letzteren Gruppe gehört in der u -Ebene, als Inbegriff aller nicht äquivalenten Werthe von u , ein „Fundamentalparallelogramm“ zu, das aus n^2 der gewöhnlichen Elementarparallelogramme besteht.

Nunmehr lässt sich der Begriff der „elliptischen Function n^{ter} Stufe“ verständlich machen. Das ist eine solche eindeutige, homogene Function

der u ; ω_1, ω_2 , die eine Invariante der $H^{(3)}$ ist, die als Function von u im Fundamentalparallelogramm der $H^{(1)}$ wesentlich singuläre Stellen nicht aufweist, die endlich als Function der ω_1, ω_2 , von den rationalen Invarianten

$$g_2(\omega_1, \omega_2), g_3(\omega_1, \omega_2)$$

algebraisch abhängt.

Für $n = 1$ liegt das Weierstrass'sche System ausgebildet vor; p und $p' = \frac{dp}{du}$ nebst g_2, g_3 sind Functionen erster Stufe, und jede weitere solche Function lässt sich rational durch p, p', g_2, g_3 ausdrücken.

Der nächste Fall $n = 2$ deckt sich mit der Jacobi'schen Theorie; snu, cnu, dnu nebst dem Doppelverhältniss λ sind Functionen zweiter Stufe (von der Dimension Null) und jede weitere solche hängt wiederum rational von jenen vier ab.

Hier gewährt bereits die gruppentheoretische Auffassung einen tieferen Einblick. Sieht man nämlich in der $I^{(3)}$ jeweils die *mod 2* congruenten Substitutionen als nicht wesentlich verschieden von einander an, so reducirt sich die $I^{(3)}$ dadurch auf eine endliche Gruppe G_{24} (von der Ordnung 24), und diese G_{24} erweist sich als holoeidrisch isomorph zur „Oktaedergruppe“, das ist, der Gruppe der Drehungen, welche ein Octaeder mit sich zur Deckung bringen. In Folge dessen giebt es in der G_{24} drei gleichberechtigte Untergruppen G_2 , und snu, cnu, dnu sind eben Invarianten derselben. Die G_{24} beherrscht thatsächlich die ganze Jacobi'sche Theorie.

Man übersieht somit deutlicher das Verhältniss der Jacobi'schen Theorie zur Weierstrass'schen, und wie beide wiederum in eine all-gemeinere Theorie eingeordnet erscheinen.

Die historische Entwicklung hat zwei Methoden ausgebildet, um indirect aus elliptischen Functionen niederer Stufe solche von höherer Stufe herzustellen, die „Theilung“ und die „Transformation.“

Ihnen ist der vierte Abschnitt (der erste des vorliegenden Bandes) gewidmet. Mit der Theilung beschäftigt sich das erste Kapitel, während die folgenden ausführlicher die Transformation erörtern, insbesondere die dadurch involvirten Modulargleichungen erster und höherer Stufe, und deren Anwendung auf die sogenannten Klassenanzahlrelationen der binären quadratischen Formen.

Sei $f(u; \omega_1, \omega_2)$ eine elliptische Function erster Stufe, so versteht man unter n -Theilung den Uebergang von f zu

$$f\left(\frac{u + \lambda \omega_1 + \mu \omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right),$$

wo λ, μ alle $n^2 \bmod n$ incongruenten Paare ganzer Zahlen durchlaufen können.

Für $u = 0$ entsteht die „specielle n -Theilung“, auf die man sich im Wesentlichen beschränken kann.

Die „ n^{ten} Theilwerthe“

$$f_{\lambda\mu} = f\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

werden — und das ist, hier wie durchgehends, der charakteristische Zug der Untersuchung — wechselseitig gruppentheoretisch und functionentheoretisch untersucht.

Das Hauptergebniss ist, dass $f_{\lambda\mu}$ einer irreducibeln „Theilungsgleichung“ vom Grade $\varphi(n)\psi(n)$ genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind; $f_{\lambda\mu}$ ist also eine algebraische Function der g_2, g_3 . Hierbei sind $\varphi(n), \psi(n)$ die bekannten zahlentheoretischen Functionen

$$\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad \psi(n) = n \prod \left(1 + \frac{1}{q}\right),$$

wo sich die Producte \prod über alle Primfactoren q von n erstrecken; $\varphi(n)\psi(n)$ selbst bedeutet die Anzahl der *mod* n incongruenten Paare von Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler prim gegen n ist.

Die Weierstrass'schen Theilwerthe $p_{\lambda\mu}, p'_{\lambda\mu}$ erfreuen sich noch einer besonderen Eigenschaft: da sie innerhalb des „Polygons n^{ter} Stufe“ überall endlich sind, sind sie ganze algebraische Functionen (Formen) der g_2, g_3 .

Auf diese Weise hat man eine ganze Klasse von Modulformen n^{ter} Stufe gewonnen.

Eine ähnliche Entwicklung gilt übrigens für die σ -Theilwerthe $\sigma_{\lambda\mu}$, nur dass dieselben erst nach Multiplication mit einer geeigneten Exponentialgrösse zu algebraischen Modulformen werden.

Wir gehen zur „Transformation n^{ter} Ordnung“ über. Man versteht darunter den Uebergang von $F(\omega_1, \omega_2)$ zu

$$F' = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right),$$

wo $F(\omega_1, \omega_2)$ wiederum eine Function (Form, Modul) der ersten Stufe sei, die übrigens auch noch von u abhängen darf. Auch F' ist eine (algebraische) Function der n^{ten} Stufe.

Zunächst soll es sich darum handeln, die überlieferte Transformationstheorie ihrem Wesen nach mit den Hilfsmitteln des ersten Bandes zur Darstellung zu bringen. Es erweist sich als zweckmässig, mit der Transformation n^{ter} Ordnung eine lineare Transformation der ω_1, ω_2 zu verbinden und allgemeiner alle Formen

$$F\left(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n}\right) = F(\omega'_1, \omega'_2)$$

als transformirte einzuführen. Man wird dann immer solche ω'_1, ω'_2 , die bez. der Modulgruppe äquivalent sind, in eine „Klasse“ vereinigen; solcher Klassen giebt es dann $\psi(n)$. Dies ist der innere Grund, weshalb

zwischen F' und F eine irreducible Gleichung vom Grade $\varphi(n)$ mit in g_2, g_3 rationalen Coefficienten herrscht: das ist die zur Ordnung n gehörige „Transformationsgleichung“.

Auch hier wird, wie bei der Theilung, von der functionentheoretischen und arithmetischen Behandlung in gleicher Weise Gebrauch gemacht. Unter arithmetischer Transformation n^{ter} Ordnung ist nach Dedekind (in nicht homogener Schreibweise) der Uebergang von ω zu

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \quad (ad - bc = n)$$

zu definiren. Die Gesamtheit dieser Transformationen zerlegt sich wiederum in „Klassen“, deren Anzahl $\Phi(n)$ gleich der Summe aller Theiler von n ist.

Jede der $\psi(n)$ functionentheoretischen, wie der $\Phi(n)$ arithmetischen Klassen lässt sich durch einen geeigneten „Repräsentanten“ ersetzen, und zwischen diesen beiden Arten von Repräsentanten besteht eine durchsichtige Zuordnung, die gestattet, von der einen Darstellung zur anderen überzugehen.

Im Uebrigen sei der Leser auf das wichtige Kapitel 3 verwiesen, worin die allgemeinen gruppentheoretischen Grundlagen für die Transformation n^{ter} Ordnung beliebiger Modulfunctionen (wesentlich vom Herausgeber herrührend) gegeben werden.

Die Form $F(\omega_1, \omega_2)$ wird nunmehr als Modul einer Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe (q prim gegen n) angenommen. Da tritt nun ein wesentlicher Unterschied ein, je nachdem die gemeinte Gruppe das Geschlecht Null hat oder nicht, d. h. je nachdem alle Moduln (Invarianten) der Gruppe von nur einem „Hauptmodul“ F rational abhängen, oder aber von einem „vollen System von Moduln“ M_1, M_2, \dots , die dann unter sich wieder algebraisch verknüpft sind.

Da der letztere Fall den Hauptinhalt des letzten Abschnittes bildet, so kommt hier nur der erstere in Betracht; die Transformationsgleichung wird jetzt zur „Modulargleichung“ n^{ter} Ordnung, q^{ter} Stufe.

Der einfachste und wichtigste Unterfall ist wiederum der der ersten Stufe, wo der fragliche Modul durch die absolute Invariante J gebildet wird, und wo zwischen J und J' die Modulargleichung n^{ter} Ordnung

$$f_n(J, J') = 0$$

besteht. Andererseits ist aber wohl zu beachten, dass gerade die gleichzeitige Berücksichtigung der Modulargleichungen verschiedener Stufen der ganzen Theorie erst ihre verhältnissmässige Durchsichtigkeit verleiht, und auch zu neuen Anwendungen geführt hat.

Die Gleichung $f_n(J, J') = 0$ lässt sich in verschiedene Gestalten bringen. Von Vortheil ist namentlich die Einführung von Parametern. So hat man für $n = 2$ das elegante Resultat:

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (4\tau + 1)^3 : (\tau + 1)(8\tau - 1)^2 : 27\tau \\ J' : J' - 1 : 1 &= (4\tau' + 1)^3 : (\tau' + 1)(8\tau' - 1)^2 : 27\tau' \quad (\tau\tau' = 1). \end{aligned}$$

In dieser Richtung haben neben Klein auch Gierster und Kiepert erfolgreich gearbeitet.

Von historischem Interesse ist, dass die Jacobi'schen Modulargleichungen für $\sqrt[4]{k}$ sich erst als solche von der 16. Stufe erweisen. Neben dieser wird noch die fünfte Stufe eingehend untersucht („Ikosaedermodulargleichungen“).

Am fruchtbarsten ist das „Stufenprincip“ für die Aufstellung der sogenannten „Klassenanzahlrelationen“, welche merkwürdige Zusammenhänge zwischen einfachen zahlentheoretischen Functionen von Klassenanzahlen quadratischer Formen negativer Determinante wiedergeben. Um etwa die einfachste anzuführen, sei $H(\mathcal{A})$ die Klassenanzahl (das ist die Anzahl aller reducirten Formen) für die Determinante $-\mathcal{A}$; die Zahl K durchlaufe alle positiven und negativen ganzen Zahlen des Intervalls zwischen $-2\sqrt{n}$ und $+2\sqrt{n}$; endlich bedeute $\mathcal{P}(n)$ den Ueberschuss der Summe derjenigen Theiler von n , die $>\sqrt{n}$ sind, über die Summe derer, die $<\sqrt{n}$ sind. Dann hat man:

$$\sum_K H(4n - K^2) = \Phi(n) + \mathcal{P}(n),$$

wodurch die Klassenanzahlen zu Theilersummen in Connex treten. Das ist eine der berühmten acht Relationen, die Kronecker 1857 mitgetheilt hat, und die zuerst von St. Smith bewiesen worden sind.

Eben die aufgeführte Relation nimmt hier die einfachste Stelle, nämlich als Klassenzahlrelation n^{ter} Ordnung erster Stufe ein. Bei ihrer Ableitung tritt schon die allgemeine Methode deutlich hervor. Aus der Modulargleichung $f_n(J, J') = 0$ entsteht für $J' = J$ die Gleichung $g_n(J) = 0$ für die sogenannten „singulären“ Moduln (erster Stufe).

Die Anzahl der Nullstellen von $g_n(J)$ im Fundamentalbereiche führt auf arithmetischem Wege zu der obigen Summe von Klassenanzahlen; die ihr gleiche Zahl von Unendlichkeitsstellen führt auf functionentheoretischem Wege zu den obigen Theilersummen.

Auf Grund des Stufenbegriffes ist so Gierster über den Umfang der Kronecker'schen Relationen wesentlich hinausgegangen; die algebraischen Schwierigkeiten, welche ihm bei weiterem Verfolge die Modularcorrespondenzen boten, sind später von Hurwitz (siehe unten) principiell überwunden worden.

Im Texte wird als besonders instructives Beispiel die fünfte Stufe („Ikosaedermodulargleichungen“) ausführlich entwickelt.

Mancher Leser wird wohl eine Angabe über die Stufeneinordnung sämtlicher Kronecker'scher Relationen vermissen.

Im nächstfolgenden Abschnitte kann nun an die wichtige Aufgabe herangegangen werden, die zu den Congruenzgruppen gehörigen Moduln aufzustellen.

Zu dem Behuf erweist sich eine Hilfsvorstellung als fruchtbar, die nicht nur die Theilung und Transformation verschiedener Stufen unter ein-

heitlichem Gesichtspunkte erfasst, sondern noch tiefer liegende Eigenschaften der elliptischen Modulfunctionen sozusagen im Keime vorgebildet enthält.

Diese Hilfsvorstellung ist die der „elliptischen“ Curve (das ist einer solchen vom Geschlechte Eins) niedrigster, nämlich n^{ter} Ordnung im Raume von $(n-1)$ Dimensionen, über die das elliptische Integral erster Gattung u hinerstreckt wird.

Wählen wir als Typus den einfachsten Fall $n = 3$, also den der ebenen Curve dritter Ordnung C_3 , aus dem durch geeignete Verallgemeinerung die Vorkommnisse in den höheren Räumen hervorgehen.

Diese Normalcurve geht, den $2 \cdot 3^2$ Substitutionen

$$u' = \pm u + \frac{\lambda \omega_1 + \mu \omega_2}{3}$$

entsprechend, durch $2 \cdot 3^2$ Collineationen der Ebene in sich über. Die Curve besitzt 3^2 „singuläre“ (Wende-)Punkte mit den Argumenten:

$$\frac{\lambda \omega_1 + \mu \omega_2}{3}.$$

Man hat zwei Coordinatensysteme, die zu den elliptischen Functionen in engster Beziehung stehen, das „canonische“ und das „singuläre“. Setzt man einmal die Coordinaten eines Curvenpunktes:

$$\frac{x_1}{x_0} = p(u), \quad \frac{x_2}{x_0} = p'(u),$$

so hat man

$$x_0 x_2^2 = 4 x_1^3 - g_2 x_0^2 x_1 - g_3 x_0^3$$

als „canonische“ Gleichung der Curve; solcher Darstellungen giebt es eben $2 \cdot 3^2$, jenen $2 \cdot 3^2$ Collineationen gemäss.

Bei einem gegebenen Coordinatensysteme der Art ist somit die Aufsuchung der „singulären“ Punkte äquivalent mit dem Problem der speciellen Theilung dritter Ordnung. — Das singuläre Coordinatensystem stützt sich unmittelbar auf die Configuration der neun Wendepunkte. Die Geraden, auf denen je drei dieser Punkte liegen, gruppieren sich zu vier = $\psi(3)$ Wendedreiecken. Wählt man ein solches als „singuläres“ Coordinatendreieck, so hat man die Hesse'sche Gleichung der Curve:

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 6a X_0 X_1 X_2 = 0.$$

Dann ist der Uebergang vom canonischen Coordinatensysteme der x zum singulären der X wiederum äquivalent mit der Lösung der zur Ordnung 3 gehörigen „Transformationsgleichung“ vom Grade $\psi(3)$. Die Seiten eines singulären Coordinatendreiecks werden dargestellt durch Nullsetzen von drei Ausdrücken $X(x_0 x_1 x_2)$, die, in transcendenten Form geschrieben, zu Ausdrücken $X(u; \omega_1, \omega_2)$ werden, welche die Grundlage für die weitere Entwicklung abgeben.

Eine erste Klasse von Modulformen dritter Stufe, und zwar von sehr einfachem Aufbau, wird unmittelbar durch die Coefficienten der nach Potenzen von u geordneten X geliefert; mit anderen Worten sind es die

Nullwerthe der $X(u)$ und ihrer Ableitungen nach u , die mit den früher betrachteten Theilwerthen in engstem Connex stehen.

Bei Ausübung einer beliebigen homogenen Modulsstitution erfahren die Grössen X selbst eine homogene lineare Substitution mit von u unabhängigen Coefficienten.

Die so entstehende „Gruppe“ der X kann nach dem Vorgange von Kronecker holoedrisch isomorph auf sich bezogen werden, wenn man die in den Coefficienten auftretende dritte Einheitswurzel durch eine andere (bei beliebigem n primitive) dritte Einheitswurzel ersetzt.

Ebenso, wie die X selbst, kann man auch gewisse bilineare Verbindungen der X für $n > 3$ zur Bildung von Modulformen n^{ter} Stufe verwenden. Zu gewissen Verbindungen der Art leitet die Geometrie von selber hin. Die elliptische C_4 im Raume von drei Dimensionen ist der vollständige Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung F_2 . Desgleichen die C_5 im nächst höheren Raume der vollständige Durchschnitt von fünf F_2 (für die der Referent gelegentlich eine explicite Darstellung gegeben hat), und allgemein die C_n der Schnitt von $\frac{1}{2}n(n-3)F_2$. Die linken Seiten der Gleichungen jener F_2 sind dann specielle bilineare Verbindungen der X von der gemeinten Art. Wegen der allgemeineren bilinearen Verbindungen muss auf den Text (Kapitel 3) selbst verwiesen werden.

Die aus diesen bilinearen Verbindungen der X entspringenden neuen Grössen n^{ter} Stufe, für die durchsichtige analytische Bildungsgesetze (Entwickelungen nach Potenzen von $e^{2i\pi\omega}$) angegeben werden, stehen in merkwürdiger Beziehung zu den binären quadratischen Formen, die ihren Ausdruck in gewissen Darstellungen von Zahlen durch jene Formen findet.

Auf Grund des so gewonnenen Materiales, der Theilwerthe, der transformirten Moduln und der aus den Grössen X hervorgehenden neuen Modulformen sind die Verfasser in der Lage, das functionentheoretische Grundproblem für Congruenzgruppen zu einem gewissen Abschluss zu bringen. War nämlich im ersten Bande die Bildung der zugehörigen Functionen mittelst Riemann'scher Schlussreihen explicite nur bis zur Stufe $n = 7$ ausführbar gewesen, so bieten sich jetzt allgemeine Ansätze dar, und die von Herrn Fricke durchgeführten Fälle ($n = 2, 4, 5, 7, 11, 31, 35, 47, 71$) lassen — namentlich auch im Gegensatze zu bisher derart, z. B. von Herrn Kiepert ausgeführten Rechnungen — erkennen, bis zu welchem Grade die Einfachheit und Schönheit im Gange der mechanischen Operationen durch die systematische Auffassung des Ganzen beeinflusst wird.

Der letzte Abschnitt, der von den „Modularcorrespondenzen“ handelt, dehnt die Entwickelungen des vierten Abschnittes über Modulargleichungen auf den Fall aus, dass das Geschlecht p der bez. Congruenzgruppe von Null verschieden ist, wo also ein volles System von Moduln vorhanden ist, durch die sich alle übrigen rational ausdrücken.

Zwischen den Moduln eines solchen Systemes und ihren Transformirten besteht eine algebraische Abhängigkeit, die sich eben als Correspondenz auf einer in einem höheren Raume gelegenen Curve vom Geschlechte p darstellen lässt. Es handelt sich in erster Linie darum, die Transformation n^{ter} Ordnung, welche in transcendenten Gestalt die höchst einfache Form $\omega' = n\omega$ besitzt, in geeigneter Weise ins Algebraische zu übersetzen.

Nun gehört nach Klein'schen Principien zu jeder Congruenzgruppe als Repräsentant (bez. der Gruppe nichtäquivalenter Werthe von ω) ein „Fundamentalpolygon“, welches sich wiederum durch Zusammenbiegen entsprechender Ränder zu einer Riemann'schen Fläche F umgestaltet. Einem Punkte ω resp. ω' entspreche ein Punkt x resp. y der Fläche. Dann sind vermöge der Transformation n^{ter} Ordnung, wie wir von früher her wissen, jedem Punkte x $\psi(n)$ Punkte y zugeordnet und umgekehrt, das heisst, es besteht zwischen beiden eine (ψ, ψ) -deutige Correspondenz.

Die algebraische Darstellung dieser Correspondenz ersetzt vollkommen den algebraischen Zusammenhang zwischen dem oben erwähnten Systeme voller Moduln und ihrer Transformirten.

Der algebraischen Darstellung der gemeinten Correspondenz lassen sich sehr verschiedene Formen geben; eine der bemerkenswerthesten unter ihnen ist diejenige, die seit Legendre und Jacobi als „irrationale Modulargleichung“ aufgetreten ist, die hier erst die ihr zukommende Stellung innerhalb der Theorie angewiesen erhält.

Mit ähnlichen Correspondenzen $(x, y) = 0$ (auf ebenen, algebraischen Curven vom Geschlechte p) hatten sich schon seit Chasles die Geometer eingehend beschäftigt, immer aber unter der Voraussetzung, dass die fragliche Correspondenz auf der Curve durch eine einzige algebraische Gleichung vermittelt wird. Die Hauptfrage ist dann die nach den Stellen, wo ein Punkt x mit einem Punkte y „coincidirt“; sie findet ihre Lösung durch eine einfache Formel, welche für $p = 0$ von Chasles gegeben, für beliebiges p von Cayley aufgestellt, und bald darauf von Brill bewiesen wurde. Herr Brill hat erst neuerdings einen auf rein algebraischer Grundlage beruhenden Beweis veröffentlicht.

Die Wichtigkeit der „Coincidenz-Formel“ erhellt aus zahllosen geometrischen Anwendungen: insbesondere gelingt mit ihrer Hilfe eine einwandfreie Herleitung der sogenannten „Plücker'schen“ Formeln.

Die Cayley-Brill'sche Formel ist aber gerade auf den in Rede stehenden Fall der Modularcorrespondenzen nicht anwendbar, da sich eine solche eben nicht durch eine einzige Gleichung zwischen x und y darstellen lässt.

Hurwitz sah sich daher veranlasst, die Correspondenzen, die es auf einer Riemann'schen Fläche im Sinne der Theorie der analytischen Functionen überhaupt geben kann, functionentheoretisch zu untersuchen.

Dabei stellte sich das merkwürdige Ergebniss heraus, dass es zwei wesentlich verschiedene Arten von Correspondenzen giebt: einmal die, für

welche die Cayley-Brill'sche Formel, mit noch einer gewissen Erweiterung ausgestattet, gilt, sodann aber die sogenannten „singulären“ Correspondenzen, welche nur auf besondern „singulären“ Riemann'schen Flächen (oder Curven) möglich und durch ein System arithmetischer Bedingungen definierbar sind. Für diese singulären Correspondenzen, zu denen auch die Modularcorrespondenzen gehören, existirt eine weniger einfache Coincidenzformel.

Die Coincidenzformel wird in beiden Fällen auf Grund der zur Fläche gehörigen Integrale erster Gattung abgeleitet, indem die Null- und Unendlichkeitspunkte eines Quotienten von Θ -Producten auf verschiedene Weise abgezählt werden.

Dem Charakter des ganzen Werkes entsprechend wird die Hurwitz'sche Correspondenztheorie auf formentheoretische Anschauungen gegründet, wobei sich zugleich Gelegenheit findet, die im ersten Band entworfenen Grundzüge einer Theorie der algebraischen Functionen auf beliebigen Riemann'schen Flächen F in einer Reihe wesentlicher Punkte zu ergänzen und zu einem gewissen Abschluss zu bringen.

Irgend eine zu F gehörige algebraische Function z wird gleich $z_1 : z_2$ gesetzt, und auf diese homogenen Variablen z_1, z_2 gründet sich die Darstellung der übrigen Grössen des Gebildes, insbesondere auch solcher homogener Functionen der z_1, z_2 , deren Dimension nicht Null ist.

Ist w eine algebraische Function des Gebildes, so heisst $w.z^v$ eine zu F gehörige „algebraische Form der Dimension v “, wo v eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Unter all' diesen Formen sind die wichtigsten die „ganzen“, welche auf F nirgends unendlich werden.

Der Fundamentalsatz der weiteren Entwicklung ist dann der, dass es, in gewisser Analogie zu der Weierstrass'schen Primfunction, eine „Primform“ giebt, durch die sich alle algebraischen Functionen von F , sowie die zugehörigen Integrale der drei Gattungen in einfacher Weise darstellen lassen.

Dieses Princip findet seine Anwendung einmal auf die Riemann'schen Flächen, welche zu Congruenzgruppen (von Primzahlstufe) gehören, und hier wiederum insbesondere auf die Integrale erster Gattung j , andererseits auf eine explicite algebraische Darstellung der Modularcorrespondenzen, mit Ausführung des Beispiels der siebenten Stufe. Die Integrale j führen bei dieser Behandlung nach Hurwitz zu merkwürdigen arithmetischen „Entwicklungsfunktionen“.

Vermöge einer so vielseitigen Begründung der Modularcorrespondenzen hält es nun im Princip nicht schwer, die zu einer beliebigen Primzahlstufe gehörigen Systeme von Klassenanzahlrelationen wie früher anzusetzen. Ein solches System, bei gegebener Stufe und Transformationsordnung, hat die Eigenschaft, dass jede weitere mögliche Klassenanzahlrelation als lineare

Combination der Relationen des Systems erscheint. Als Beispiele dienen die Stufen 7 und 11.

Referent ist der Meinung, dass ein nicht ganz unbewandelter Leser, ehe er an das Einzelstudium dieses so ungemein inhaltsreichen Bandes geht, um über die Hauptziele der Untersuchung schneller orientirt zu werden, vorab einige der Originalabhandlungen mit Nutzen zu Rathe ziehen wird. Es seien als solche etwa angeführt die von Klein (*Mathem. Ann.* 14, 17; Leipzig. Abhandl. 1885); Gierster (*Mathem. Ann.* 17); Dedekind (*Journal f. Mathem.* 1883); Hurwitz (*Dissertation und Leipz. Ber.* 1886).

Im Uebrigen sei betont, dass wir auf ganze Partien des Buches (über complexe Multiplication, über die Smith'schen Methoden u. A.), die namentlich für den Arithmetiker von Interesse sind, gar nicht haben eingehen können.

W. FRANZ MEYER.

CH. MÉRAY. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques.* Première partie. Principes généraux. Paris 1894. Gauthier-Villars. XXXIII und 405 S.

Man könnte in Deutschland fast neidisch sein auf die französischen Lehrbücher der Analysis. Denn bei der fortwährenden Concurrenz auf diesem Gebiete, an der sich die ersten Namen betheiligen, ist jeder Verfasser eines neuen Werkes genöthigt, sei es durch eigene Forschungen, sei es durch eigenartige Anordnung und Verarbeitung des Stoffes, die Vorgänger zu übertreffen.

Herr Méray hat sich durch eine ansehnliche Reihe von grössten Theils analytischen Arbeiten — deren Verzeichniss gleich in der Vorrede dem Leser vorgeführt wird — so vortheilhaft bekannt gemacht, dass man auch hier etwas Besonderes von ihm erwarten kann. Man kann bald erkennen, dass der Verfasser von der Weierstrass'schen Schule stark beeinflusst worden ist, dass er aber sein berühmtes Vorbild an Abstraction noch zu überbieten sucht.

Referent muss von vornherein bekennen, dass er einen principiell anderen Standpunkt einnimmt; wenn der Verfasser ausdrücklich betont, dass er stolz darauf sei, dem Anfänger die allgemeinen Eigenschaften der Functionen rein, das heisst unbeirrt von irgend welchen Einzelheiten vorzutragen, so ist dieser Standpunkt doch sehr anfechtbar. Referent hat seiner Zeit nebst ca. 200 Zuhörern die „einleitende“ Vorlesung von Herrn Weierstrass über „analytische Functionen“ gehört, kann aber auf Grund seiner persönlichen Erfahrungen nur gestehen, dass der bildende Erfolg, im Verhältniss zu der starken Höreranzahl, nicht der entsprechende war.

Gerade die bedeutendsten der französischen Mathematiker sind aus der praktischen Schule der Ingenieure hervorgegangen, und eben hierin dürfte

der Grund liegen, dass jene sich eines so klaren und anschaulichen Styles befeissigen.

Ueberdies scheint es für die heutige Mathematik weit nothwendiger, sich den Naturwissenschaften und der Technik wieder zu nähern, anstatt einem scholastischen Dogmatismus zu verfallen. Referent möchte indess nicht missverstanden werden: er will gern zugeben, dass ein Buch, wie das vorliegende, einem Studirenden gegen Ende seiner Studienzeit, oder noch besser, nach bestandener Staatsprüfung, wo er das Bedürfniss hat, das Gelernte von einem höheren Standpunkt aus zu revidiren, die besten Dienste leisten wird. Ein Lehrer wird vollends Vieles daraus lernen können. Und damit seien auch gleich die grossen Vorzüge des Buches hervorgehoben: die Diction ist, in Anbetracht des schwierigen Stoffes, eine tadellos klare, und der Leser wird auf gedrängtem Raume mit einer Reihe der schwierigsten Partien der Analysis vertraut gemacht. Seine bekannte Neigung, für bekannte Begriffe neue Namen einzuführen, hätte der Verfasser füglich etwas einschränken können.

Der Inhalt des Bandes zerlegt sich, abgesehen von einigen einleitenden Abschnitten, in 13 Kapitel.

Nach Erörterung der verschiedenen Modificationen, welche der Begriff der „Grösse“ durchlaufen kann, ist der erste, sehr knapp gefasste Hauptabschnitt den Reihen, insbesondere den Potenzreihen gewidmet, auf denen das Folgende ausschliesslich aufgebaut ist.

Das über Convergenz Vorgebrachte scheint für feinere Untersuchungen nicht ganz hinreichend zu sein.

Es folgt die Erörterung der Haupteigenschaften der (in gegebenen Bereichen) holotropen Functionen, ihrer Differentiation und Integration.

Zwei weitere Abschnitte beschäftigen sich mit den totalen und partiellen Differentialgleichungen und Systemen solcher, in der Hauptsache nur mit dem Existenzbeweise für deren Integrale.

Es wird dem Leser schwer, zu erkennen, welches die Stellung dieser Beweise zu den sonst bekannten ist: überhaupt sind die historischen Bezugnahmen des ganzen Bandes äusserst dürftige; man erhält beinahe den Eindruck, als ob die ganze Functionentheorie ein Erzeugniss des Verfassers sei.

Immerhin ist das Buch als ein höchst eigenartiges und fesselndes zu bezeichnen: die Einwände des Referenten sind ja auch nur pädagogischer Natur. Richtiger freilich hätte der Titel heissen sollen: „*Reflexions nouvelles sur les principes de l'Analyse inf.*“ Man darf gespannt sein, wie die Methode des Verfassers, immer nur die ganz allgemeinen Gesichtspunkte hervorzukehren, in den folgenden Bänden Stich halten wird, in denen die besonderen Functionen zur Darstellung kommen sollen. Bis dahin möge die Beurtheilung des Referenten auch nur als eine vorläufige angesehen werden.

W. FRANZ MEYER.

G. ARNOUX. *Arithmétique graphique*. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris 1894. Gauthier-Villars. XXIII und 175 S.

Das Buch ist für Solche geschrieben, die sich für mathematische Absonderlichkeiten — denn als das möchte doch die Theorie der namentlich in früheren Jahrhunderten mit Vorliebe studirten magischen Quadrate, und ähnlicher Erscheinungen aufzufassen sein — interessiren.

Um den Leser zu orientiren, sei erwähnt, dass unter einem magischen Quadrat zu verstehen ist eine schachbretartige Figur von n^2 Feldern, die mit den n^2 ersten natürlichen Zahlen so bedeckt sind, dass die Summe aller Felder je einer Horizontal-, oder Vertical-, oder Diagonalreihe einen und denselben Werth s besitzt.

Hierüber lässt sich noch hinausgehen: denkt man sich etwa die Figur als Determinante entwickelt, so repräsentirt jedes Glied der Determinante eine „Richtung“, und man kann verlangen, dass die Summe s insbesondere für ein Maximum von Richtungen constant ist. Das sind dann die hypermagischen Quadrate.

Der Verfasser verfehlt nicht, gleich die n -dimensionalen Verallgemeinerungen (mittelst der sogenannten Gitter) hinzuzufügen. Hierdurch erscheint die ganze Frage als eine specielle Anwendung der Diophantischen Gleichungen resp. linearen Congruenzen. Schon daraus z. B., dass man die Zahlen $1, 2, \dots, n^2$ durch ein äquivalentes Restsystem $\text{mod } m$ ersetzt, kann man interessante Folgerungen ziehen.

Der Verfasser begnügt sich, die mathematischen Grundlagen der hier in Betracht kommenden Aufgaben zu erörtern und einzelne Fälle auszuführen. Eine allgemeine und vollständige Lösung der Aufgaben wird nicht gegeben.

W. FRANZ MEYER.

Differential- und Integral-Kalkylens. Användning vid Undersökning of Linier i Rymden och Bugtiga Ytor of H. T. DAUG. Professor vid Upsala Universitet. Upsala. W. Schultz.

Der erste Theil des vorliegenden Werkes ist bereits im Jahre 1877 erschienen. Derselbe enthält zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Raumcurven, sowie die Darstellung einer Curve durch verschiedene Coordinatensysteme, Ableitung der Gleichung der Tangente, Osculations-Ebene und Kugel und Bestimmung des Krümmungskreises. Sodann folgt eine Untersuchung der krummen Flächen. Hier wird zunächst die Darstellung der Flächen durch ein Netz von Curven gegeben und dann die Bedeutung der Indicatrix für eine Fläche ausführlich auseinander gesetzt; es folgen die Theoreme von Euler und Meusnier und schliesslich die Krümmung der Flächen und die Krümmungslinien.

Der zweite Theil des Werkes ist aus dem handschriftlichen Nachlass des Verfassers von Herrn M. Falk, der bereits bei der Herausgabe des

ersten Theiles mitgewirkt hat, der Oeffentlichkeit übergeben worden. Er enthält eine specielle, sehr eingehende Behandlung der gradlinigen Flächen. Weiter auf Einzelheiten einzugehen ist wohl nicht erforderlich, da die Kenntniss der schwedischen Sprache verhältnissmässig wenig verbreitet ist und da ja auch gründliche deutsche Arbeiten über dieses Gebiet vorhanden sind.

MAX MEYER.

Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Bearbeitet von Oberlehrer Dr. HUGO FENKNER. Pensum der Untertertia, Obertertia und Untersekunda der neunstufigen, bezw. der Tertia, Sekunda und Prima der sechsstufigen Anstalten. Zweite, auf Grund der preussischen Lehrpläne vom Januar 1892 ausgearbeitete Auflage. Braunschweig 1894. Verlag von Otto Salle.

Diese Sammlung arithmetischer Aufgaben stützt sich bei ihrer Anlage auf die Ausführungen Krumme's über den algebraischen Unterricht. Der Schüler soll von vornherein zum selbstständigen Denken angeregt werden, und daher nehmen die rein mechanischen Rechenaufgaben einen verhältnissmässig geringen Theil des Werkes ein; deshalb sind auch übermässig complicirte Rechnungen, welche einen zu grossen Zeitaufwand erfordern, vermieden. Der Nachdruck ist auf die Anwendungen gelegt, welche häufig aus anderen Unterrichtsgebieten, wie aus der Physik, Geometrie und Chemie, gewählt worden sind. Hierdurch wird dem Schüler Gelegenheit geboten, seine Kenntnisse in diesen Gebieten zu befestigen. Den Aufgaben gehen die zu ihrer Lösung nöthigen Lehrsätze voraus; indessen werden dieselben nicht immer streng bewiesen, sondern häufig nur an einzelnen Zahlenbeispielen erläutert, so dass das Werk ein Lehrbuch der Algebra nicht ersetzen kann. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass in Folge der neuen Lehrpläne die Abschnitte über Reihen und Zinseszinsrechnung weggelassen sind, wogegen die Anzahl der Uebungsbeispiele vermehrt wurde.

MAX MEYER.

Ableitung der verschiedenen Formen der Curven dritter Ordnung durch Projection und Klassification derselben. I. Von Professor Dr. FRIEDRICH KÖHNEL. Beilage zu dem Programm des Realprogymnasiums Ettenheim für das Schuljahr 1893/94. Ettenheim 1894. Druck von F. H. Leibold.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, eine Klassification der Curven dritter Ordnung durch perspective Collineation aus divergirenden Parabeln abzuleiten. Den Ausgangspunkt bildet die Gleichung derselben in homogenen Coordinaten. Die Parabeln werden nach den Werthen gewisser

Invarianten in Gruppen eingetheilt und aus diesen durch lineare Transformationen die Curven dritter Ordnung abgeleitet. Die geometrischen Eigenschaften der Curven werden nur als Resultate der Untersuchung angegeben, während auf eine Ableitung derselben verzichtet wird. Der vorliegende Theil behandelt übrigens nur die Curven mit Oval; die übrigen sind einer späteren Abhandlung vorbehalten.

MAX MEYER.

Geometrische Analysis und Synthesis. Eine Sammlung von 636 planimetrischen Constructions-Aufgaben mit rein geometrischer Lösung. Für höhere Lehranstalten, sowie zum Gebrauch beim Selbstunterricht systematisch geordnet und bearbeitet von W. ADAM. Zweite Auflage. Potsdam 1893. Verlag von Aug. Stein.

Nach einer kurzen Auseinandersetzung über das Wesen der Construction bringt das vorliegende Werk eine Sammlung geometrischer Aufgaben, bei denen theils die Lösung vollständig ausgeführt, theils nur die Construction angegeben ist. Hauptsächlich dürfte dasselbe für Diejenigen geeignet sein, welche auf Selbstunterricht angewiesen sind, denen es zur Lösung geometrischer Aufgaben eine gute Anleitung geben wird. Zur Einführung an Lehranstalten ist dasselbe wohl weniger geeignet, da der Lehrer es vorziehen wird, den Schülern selbst diejenigen Andeutungen zu geben, die er zur Lösung der Aufgaben für erforderlich hält.

MAX MEYER.

Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope. Von Dr. MAX BRÜCKNER, Realgymnasialoberlehrer. Sonderabdruck aus dem Jahresberichte des Vereins für Naturkunde zu Zwickau. 1893.

Die nichteuklidische Geometrie ist in den letzten Jahrzehnten zu einem ausgedehnten Gebiet der Mathematik herangewachsen, so dass es wohl angebracht erscheint, dem Nichtfachmanne einen Einblick in dieselbe zu verschaffen. Speciell diese Aufgabe hat sich der Verfasser für die Theorie des vierdimensionalen Raumes gestellt. In einer Einleitung giebt er zunächst einen Abriss der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie und erörtert hierbei auch die Frage nach ihrer Berechtigung. Den Hauptmangel derselben erkennt er richtig in dem Fehlen der Anschaulichkeit, und er weist treffend alle Versuche zurück, unseren Raum durch einen vierdimensionalen ersetzen zu wollen. Die nichteuklidische Geometrie ist eine rein logische Wissenschaft und nur als solche hat sie eine Berechtigung. Trotzdem kann der Verfasser der Versuchung nicht widerstehen, dieselbe gelegentlich zu doch sehr zweifelhaften metaphysischen Speculationen zu benutzen, indem er sein Werk mit dem Satze Schlegel's schliesst: „Wenn hiernach der Geist durch rein logische Operationen mit Nothwendigkeit

dazu geführt wird, die Schranken der Anschauung zu durchbrechen und die Existenz (dies Wort in demselben Sinne gebraucht, wie man von der Existenz von Punkten, Geraden und Ebenen spricht) von Gebilden anzuerkennen, von denen er sich, gefangen mittelst des Leibes in den Fesseln der dreidimensionalen Anschauung, zwar keine Vorstellung machen kann, deren genaue Abbildungen aber im dreidimensionalen Raume er ebenso gut wahrnimmt wie andere Erscheinungen der Körperwelt, so scheint hieraus zu folgen, erstens, dass uns nur die Verbindung unseres Geistes mit der dreidimensionalen (oder, was genau dasselbe ist, materiellen) Körperwelt an der sinnlichen Wahrnehmung und geistigen Vorstellung höher dimensionirter Gebilde hindert, zweitens, dass unser Geist, da er eben vermöge innerer, von der Körperwelt unabhängiger Thätigkeit sich von den Fesseln des Dreidimensionalen emancipiren kann, seiner Natur nach wesentlich immateriell sein muss, und, für sich allein ohne den Leib gedacht, an kein Gebiet von bestimmter Dimensionenzahl gebunden ist.“

In den ersten beiden Abschnitten werden in synthetischer und analytischer Weise die Elemente des vierdimensionalen Raumes abgeleitet, während in den übrigen (dritten bis fünften) die Eigenschaften der Polytope dargelegt werden. Zunächst die Projection der Polytope, der erweiterte Euler'sche Satz, sodann die Eintheilung der allgemeinen und singulären Polytope, sowie schliesslich die Klassification der regulären Polytope. Ganz dürfte die Arbeit ihren Zweck nicht erfüllen, denn wenn man ein so schwieriges Gebiet in allgemein verständlicher Weise darstellen will, so müssen die Beweise möglichst ausführlich und klar gegeben werden, während wir uns hier doch häufig mit Andeutungen begnügen müssen. Zum Theil wird diesem Mangel allerdings dadurch abgeholfen, dass durch ausführliche Literaturangabe Demjenigen, der sich dafür interessirt, ein eingehendes Studium dieses Gebietes ermöglicht wird.

MAX MEYER.

1. Professor Dr. TH. SPIEKER. **Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Übungsaufgaben** für höhere Lehranstalten. Ausgabe A, welche in dem Theil über die Congruenz der Dreiecke einige Abänderungen erfahren hat;
Ausgabe B, für mittlere Klassen, welche die beiden ersten Curse des Hauptwerkes enthält;
Ausgabe C, abgekürzter Cursus für Gymnasien.
2. Derselbe, **Kurze Anleitung zum Lösen der Übungsaufgaben** des vorgenannten Lehrbuchs.
3. Derselbe, **Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Übungsaufgaben** für höhere Lehranstalten.
4. Dr. HERMANN SCHUBERT. **Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben**, verbunden mit einem systematischen

Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen. Erstes Heft: Für mittlere Klassen.

5. Dr. HERMANN SCHUBERT, **Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra** für Real- und Bürgerschulen. Heft I und II.

6. Derselbe, **Ausgewählte Resultate** zu beiden Heften.

Da die hier genannten, in neuen Auflagen erschienenen Werke sich seit einer Reihe von Jahren in der Praxis bewährt haben, so bedürfen sie wohl keiner eingehenderen Besprechung. MAX MEYER.

Le scienze esatte nell' antica Grecia di GINO LORIA, Prof. di geometria superiore nell' università di Genova. Libro II. **Il periodo aureo della geometria greca.** Modena 1895 coi tipi della Società tipografica, antica tipografia Soliani, 236 p. Estratto dal Vol. XI, Serie II delle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Sezione di Scienze, p. 3 — 237.

Wir verweisen für den ersten Abschnitt des Werkes unseres italienischen Fachgenossen auf Band 39 dieser Zeitschrift, wo wir, Hist.-lit. Abth. S. 184—185, darüber berichtet haben. Wir müssten eigentlich auch auf Band 36, Hist.-lit. Abth. S. 29—30, verweisen, wo Herr Loria's Abhandlung über das goldne Zeitalter der griechischen Geometrie besprochen ist, welche zu dreifacher Ausdehnung angewachsen, heute unter gleicher Ueberschrift als Fortsetzung des umfangreicheren Werkes vor uns liegt. Wir haben bei dem ersten Abschnitte ein erfolgreiches Streben nach Vollständigkeit hervorheben dürfen. Des gleichen Lobes ist auch der zweite Abschnitt würdig. Herr Loria kennt Alles, was nur über den Gegenstand seiner Forschung geschrieben worden ist, und hat es nach Maassgabe seiner übereinstimmenden oder nicht übereinstimmenden Ansichten zu verwerthen gewusst. Zu den Schriftstellern, welchen Herr Loria eine grosse Sympathie entgegenbringt, gehört Herr Zeuthen. Allerdings hindert ihn dieses Wohlwollen nicht, auf S. 218 zuzugeben, dass Herr Zeuthen, ausser Stande, seine geometrische Phantasie zu zügeln, vielfach Eigenes gab, um die nur allzu zahlreichen Lücken in unserem Wissen von den Methoden der Griechen (dass sie solche besessen haben müssen, leugnet Niemand) auszufüllen. Dass geschichtliche Stützen für diese Ausfüllungen fehlen, erklärt Herr Loria damit, dass der geistreiche Kopenhagner Geometer entweder sich nicht bemühte, eine gesicherte geschichtliche Grundlage aufzusuchen, oder keine solche aufzufinden im Stande war. Wir sind der Meinung, das Entweder sei hier zu streichen und nur das Oder zu lassen. Wir persönlich verlangen aber geschichtliche Begründung für geschichtliche Vermuthungen und können uns daher mit der zu weit getriebenen Modernisirung des Apollonius nach wie vor nicht befreunden. Glücklicherweise beeinflusst diese ziemlich ver-

schiedene Werthschätzung eines unserer Zeit angehörenden Werkes nur wenige Stellen von Herrn Loria's Buch. Meistens sind Auszüge, und zwar vortrefflich angefertigte Auszüge aus den alten Schriftstellern, also insbesondere aus den vier Mathematikern des goldenen Zeitalters: Euklid, Archimed, Eratosthenes, Apollonius, gegeben. Wo blossе Vermuthungen ausgesprochen sind, kennzeichnet Herr Loria dieselben als solche, und der Leser ist dadurch in den Stand gesetzt, selbst zu prüfen und sich für oder gegen das Vorgeschlagene zu entscheiden. Wir halten deshalb auch den zweiten Theil der grossen Arbeit für einen entschiedenen Fortschritt gegen frühere Arbeiten und freuen uns auf die Fortsetzung.

CANTOR.

Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek. Von Dr. EMIL WOHLWILL (aus dem Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. XII). Hamburg 1895. Commissions-Verlag von Lucas Gräfe & Sillem. 77 S.

Mathias Bernegger (1582—1640) stand zu den bedeutendsten Gelehrten seiner Zeit in Beziehungen, mit vielen in eifrigem Briefwechsel, und die Entwürfe von nahezu 500 seiner Briefe haben sich in zwei Quartbänden erhalten. Diese kamen zuerst in den Besitz des Frankfurter Sammler's Zacharias Konrad von Uffenbach (1683—1734); dann, als er um 1731 sich aus Geldverlegenheit seiner Bücher mit Ausnahme der Francofurtensien entäussern musste, kaufte der Hamburger Philologe Johann Christoph Wolf die hebräischen Handschriften und etwa 20000 Briefe, darunter Bernegger's Entwürfe. So kamen diese nach Hamburg, wo sie gegenwärtig der Stadtbibliothek angehören. Wir haben von Bernegger's Beziehungen gesprochen. Zu Galilei waren es die eines Uebersetzers. Schon 1612 machte Bernegger Galilei's Proportionalzirkel in lateinischer Sprache bekannt, dann gab er 1635 in der Elzevir'schen Buchhandlung die lateinische Uebersetzung von Galilei's Gesprächen über die Weltsysteme heraus. Der recht schlechte Druck fand in Strassburg, wo Bernegger wohnte, durch David Hautt statt. Ueber diese letztere Uebersetzung wusste man, dass Elia Diodati Bernegger zur Anfertigung derselben aufgefordert hatte und zwar im Namen und Auftrage Galilei's. Man wusste, dass das zu übersetzende Buch am 1. August 1633 in Strassburg ankam. Wann aber hat Galilei die Uebersetzung veranlasst? War es vor oder nach dem 22. Juni 1633, vor oder nach Galilei's Abschwörung der Copernikanischen Ansichten? Diese Frage zu beantworten dienen Briefe aus dem Bernegger'schen Briefwechsel. Herr Wohlwill, dessen Betheiligung an der Erforschung aller zum Galilei-Process gehörenden Umstände jedem Fachgenossen rühmlichst bekannt ist, hat die beiden Bände der Hamburger Stadtbibliothek gründlich untersucht und alle Stellen, welche irgend mit Galilei und dessen Schriften sich befassen, gesammelt und im

Drucke herausgegeben. Vieles davon ist schon gedruckt, aber so zerstückelt und unvollständig, dass eine Vereinigung des ganzen Materials nur mit Dank begrüsst werden kann. Noch dankenswerther ist die dem Abdrucke der im Ganzen 101 Nummern vorausgeschickte Einleitung. Herr Wohlwill sucht darin nachzuweisen, dass die Aufforderung Galilei's, Bernegger möge die Gespräche über die Weltsysteme übersetzen, spätestens Ende Juni 1633 von Rom aus erfolgt sein könnte, was aber aus inneren Gründen höchst unwahrscheinlich ist, dass unter Abweisung dieses letzten möglichen Zeitpunktes die Wahrscheinlichkeit dafür spricht, Galilei habe Mitte Januar 1633 den Wunsch nach einer Uebersetzung geäußert, mithin zu einer Zeit, als er noch nicht versprochen hatte, jede weitere Veröffentlichung über die Weltsysteme zu unterlassen, und alle späteren Schritte habe Diodati selbstständig gethan, ohne auch nur von der in Rom eingetretenen Katastrophe Kenntniss zu haben. Als die Verurtheilung Galilei's bekannt wurde, war sie dann für Diodati wie für Bernegger nur ein Grund mehr, die Uebersetzung des jetzt verbotenen Buches zu beschleunigen. Diese Auffassung schliesst nicht aus, dass, als Galilei um die Jahreswende von 1633 auf 1634 durch Engelke erfuhr, dass die Uebersetzung stattfinde, er sich darüber freute (vergl. den Brief Nr. 33 S. 40 von Engelke vom 1. Mai 1634). Geht doch auch das Gleiche aus dem längst bekannten Briefe Galilei's an Bernegger hervor (Brief Nr. 46 S. 46 — 47), in welchem Galilei die kirchliche Verurtheilung seiner Ansichten erwähnt, offenbar mehr in der Absicht, zur Ausgabe der Uebersetzung anzueifern als sie zurückzuhalten.

CANTOR.

A History of Mathematics by FLORIAN CAJORI, Ph. D., formerly Professor of applied mathematics in the Tulane University of Louisiana, now Professor of physics in Colorado College. New-York and London 1895. Macmillan and Co. XIV, 422 p. (Set up and electrotyped January 1894. Reprinted March 1895.)

Wenn ein im Januar 1894 erstmalig gedrucktes Buch bereits im März 1895 neu gedruckt werden muss, so zeugt dieses von einer Aufnahme des Werkes, wie sie wissenschaftlichen Schriften nur selten zu Theil wird, und die ihren Grund in der Vortrefflichkeit des Buches oder auch in seiner Zeitgemässheit besitzen kann. Wenn wir Herrn Cajori's Geschichte der Mathematik nach diesem Maassstabe beurtheilen, so haben wir allerdings das Wort Vortrefflichkeit etwas herabzumindern. Schon im Maiheft 1894 des *Bulletin of the New-York Mathematical Society* hat Herr David Eugene Smith in einer ausführlichen Besprechung auf Irrthümer hingewiesen, welche alsdann in einem von der Macmillan'schen Verlags-handlung verbreiteten Fehlerverzeichnisse verbessert wurden und aus dem Neudrucke verschwunden sind. Aber auch der Neudruck hat in Herrn Eneström (*Bibliotheca mathematica* 1895 p. 55 — 60) einen Berichterstatter

gefunden, der Irrthümer aufzudecken fand. Vielleicht macht uns persönlich das Bewusstsein, wie leicht und oft bei grösseren geschichtlichen Werken Fehler sich einschleichen, die der Verfasser hätte vermeiden können, wenn es ihm möglich gewesen wäre, eben so rasch zu schreiben als Andere lesen und dadurch stets Alles vor seinem geistigen Auge vereinigt zu sehen, vielleicht, sagen wir, macht uns dieses Bewusstsein milder, aber uns scheinen die Vorzüge des Buches die Mängel so sehr zu übersteigen, dass wir sagen möchten, es sei heute schon ein gutes Buch und könne ein vortreffliches werden, wenn der Verfasser fortfährt, alle ihm zugehenden Berichtigungen gewissenhaft einzutragen, zugleich aber die Frische der Schreibart, die Hervorhebung der Beziehung der Geschichte der Mathematik zur Allgemeingeschichte (für welche wir ihn möglicherweise als unseren Schüler bezeichnen dürfen) sich bewahrt. Auch Herr Smith und Herr Eneström haben diese guten Eigenschaften bemerkt und betont. Einen ferneren Wunsch knüpfen wir an die Darstellung der neuesten Geschichte, in welcher Herr Cajori selbstständiger als in den anderen Theilen gearbeitet hat. Er möge bei einer abermaligen Uebersetzung etwas schärfer auf die Zeitfolge aufpassen. Wir ersparen es uns, einzelne Beispiele hervorzuheben, aber Herr Cajori wird nur selbst mit der Feder in der Hand die einzelnen Kapitel zu durchlesen haben, um zu finden, dass eine Umordnung einzelner Schriftsteller, oder einzelner Werke derselben wünschenswerth erscheint.

CANTOR.

Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Akustik, Theil III.

Der Streit über die Definition des Tones. Von Dr. ERNST ROBEL, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Louisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1895 [Programm Nr. 98]. Berlin 1895. R. Gaertner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 32 S.

Für den II. Theil der Untersuchungen verweisen wir auf Band 40 dieser Zeitschrift, Historisch-literarische Abtheilung S. 61. Der III. Theil giebt seinen Inhalt durch die Ueberschrift mit hinreichender Deutlichkeit zu erkennen. Der Streit über die Definition des Tones, wie er zwischen Ohm und Seebeck geführt wurde, über den beide grosse Physiker wegstarben, wird unter eingehendem Berichte über die beiderseitigen Streitschriften erzählt. Es handelte sich darum, ob, wie Ohm wollte, jede Tonempfindung nach Gliedern einer Sinusreihe in Tonbestandtheile zerlegbar sei, ob, wie Seebeck behauptete, auch andere Formen von Tonempfindungen nachweisbar seien, die eine Zerlegung nach Art der Fourier'schen Reihe nicht zulassen. Seebeck schien aus dem lebhaft, wenn auch leidenschaftslos geführten Kampfe als Sieger hervorzugehen. Von 1845 bis 1855 bildeten seine Ansichten die allgemein für richtig gehaltene Lehre. Da trat A. Brandt und dann ausführlicher H. von Helmholtz für die Ohm'sche Auffassung in

die Schranken. Helmholtz insbesondere wusste *Klang* und *Ton* zu unterscheiden und zu zeigen, dass mittels dieser Unterscheidung man beiden Gegnern Recht geben könne. Seebeck's Behauptungen sind richtig beim Klang, Ohm's Behauptungen beim Ton. Dann wird noch die Helmholtz'sche erstmalige Erzeugung einfacher Töne geschildert und ein rascher Blick auf die physiologisch-psychologischen Folgerungen des letzterwähnten Forschers geworfen.

CANTOR.

Annuaire du Bureau des longitudes avec des Notices scientifiques. Paris 1895. Gauthier-Villars et fils.

Die wissenschaftlichen Mittheilungen des Jahrganges 1895 sind fünf an der Zahl. Herr Bouquet de la Grye berichtet über durch Diagramme versinnlichte Einwirkungen des Mondes auf die Erdatmosphäre, zu deren genauen Erforschung er systematische, an vielen Orten angestellte Beobachtungen verlangt. Herr Tisserand erzählt von den Verhandlungen der Geodätenversammlung in Innsbruck, von den dort behandelten vergleichenden Pendelbeobachtungen und Veränderungen der geographischen Breite, zwei Gegenständen, welche, dem Geologen und dem Astronomen gleich interessant, ihnen gestatten, gegenseitig Fragen an einander zu richten. Herr Janssen spricht in einer ersten Mittheilung von einigen Apparaten des Observatoriums auf dem Montblanc, in einer zweiten von Messungen der Lichtstärke mittelst der Photographie. Herr Poincaré endlich kussert sich im Namen des *Bureau des longitudes* über den Vorschlag der Akademie von Canada und der astronomischen Gesellschaft von Toronto, künftighin und beginnend mit dem 1. Januar 1901 den astronomischen Tag um Mitternacht beginnen zu lassen. Das Bureau ist dem Grundgedanken des Vorschlages günstig, befürwortet aber dessen Durchführung nur unter der doppelten Voraussetzung, dass die Regierungen der Staaten, in welchen die wichtigsten Ephemeriden gedruckt werden, zu Gunsten der Aenderung gewonnen werden, und dass auch die bürgerliche Zeit, von demselben Tage an, die Tagesstunden von 1 bis 24, und nicht mehr zweimal von 1 bis 12, benenne.

CANTOR.

La géométrie analytique d'Auguste Comte, nouvelle édition précédée de la Géométrie de Descartes. Paris 1894 chez Louis Bahl. 111, VIII, 598 p.

Die Verlagshandlung hat in einem stattlichen Bande von nahezu 45 Druckbogen den Neudruck von zwei Schriften sehr verschiedener Natur vereinigt. Die Geometrie von Descartes gehört längst zu den klassischen Werken, welche den Grundstock mathematischen Wissens bilden. Der französische Urtext, die lateinische Uebersetzung, eine deutsche Uebersetzung sind leicht zugänglich, und diese Zugänglichkeit hat zur Verbreitung beigetragen, wie sie selbst, beziehungsweise die Herstellung neuer

Abdrücke und Uebersetzungen, auf dem schon vorhandenen Interesse an dem Werke beruht. Die Geometrie von Auguste Comte aus dem Jahre 1843 mag ja, wir wissen es nicht, in Frankreich gleichfalls zu den Büchern gehören, von denen jeder Mathematiker weiss, wenn er sie auch nicht selbst gelesen hat, in Deutschland ist dem entschieden nicht so. Die positive Philosophie Comte's ist bei unseren Fachphilosophen und über deren Kreis hinaus bekannt geworden. Dass Comte thatsächlich Mathematiker war, dass er die Stellung eines Eintrittsexaminators an der Pariser polytechnischen Schule, eines Repetenten für höhere Analysis und Mechanik an derselben Anstalt inne hatte, dass er eine analytische Geometrie verfasste, Alles das dürfte mancher Fachgenosse erst aus dieser Anzeige erfahren. Und dennoch ist gerade diese analytische Geometrie in hohem Grade lesenswerth. Neue Thatsachen wird der Leser ihr heute gewiss nicht entnehmen, muthmasslich war das schon für den Leser von 1843 nicht der Fall, aber ein grosser Reichthum an didaktisch verwerthbaren Gedanken bildet den Reiz des Werkes, würde ihn noch mehr bilden, wenn Comte nicht allzu überzeugt von seinem philosophischen Uebergewichte über die anderen Mathematiker, die sich damit begnügen, Mathematiker zu sein, wäre und dieser Ueberzeugung zu oft und zu deutlich Worte verliehe. Der Mathematiker wird sich daher beim Lesen nicht selten ärgern, aber der Lehrer wird entschieden Nutzen aus der Kenntnissnahme des Werkes ziehen können, die wir deshalb dringend anempfehlen. An einige Spracheigen thümlichkeiten Comte's, wie den fortwährenden Gebrauch von *envers* statt *pour*, gewöhnt man sich rasch.

CANTOR.

Berichtigung.

Im 4. Heft dieser Zeitschrift Seite 125 Zeile 9 von oben muss es heissen:
 „so folgt aus der ersten Gleichung der gerade elliptische Kegel $\frac{z^2}{h^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$,“

Bibliographie

vom 1. September bis 15. October 1895.

Periodische Schriften.

- Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Klasse. 1895, II und III. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.
- Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Abth. IIa. 104. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien, Tempsky. 3 Mk. 30 Pf.
- Abth. IIb. 3. und 4. Heft. Ebendasselbst. 2 Mk. 10 Pf.
- Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 30. Jahrgang. 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 24. Bd., 3. Heft (Schluss). Herausgegeben von E. LAMPE. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.
- Fortschritte der Physik im Jahre 1893. Dargestellt von der physik. Gesellschaft in Berlin. 49. Jahrgang. Nr. 2 und 3. Braunschweig, Vieweg. 55 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

- ZEUTHEN, G., Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Kopenhagen, Höst & Sohn. 6 Mk.
- HAHN, W., Die Entstehung der Weltkörper, im Sinne Leo's XIII. untersucht und beleuchtet. München, nationale Verlagsanstalt. 4 Mk.

Reine Mathematik.

- JACOBI, C. G. J., Ueber vierfach periodische Functionen zweier Variablen. Aus dem Lateinischen (Crelle's Journal 13) übersetzt von A. WITTING. Herausgegeben von H. WEBER (aus Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften). Leipzig, Engelmann. 70 Pf.
- ROSENHAIN, G., Ueber Functionen zweier Variablen mit vier Perioden. Aus dem Französischen übersetzt von A. WITTING. Herausgegeben von H. WEBER (aus Ostwald's Klassiker etc.). Ebendasselbst. 1 Mk. 50 Pf.
- SPIEKER, Th., Lehrbuch der Stereometrie für höhere Lehranstalten. Potsdam, Stein. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

- HAMMER, E., Tafeln zur Berechnung des Höhenunterschieds. Für Entfernungen bis 400 Meter und Höhenwinkel bis 25°. Stuttgart, Metzler. 1 Mk.

- NERNST, W. und SCHÖNFLIES, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. München, Wolff. 8 Mk. 60 Pf.
- FRANCKE, A., Die elastische Linie des Balkens. Berlin, Ernst & Korn. 1 Mk. 60 Pf.
- GÖLLER, A., Lehrbuch der Schattenconstructionen und Beleuchtungskunde. Stuttgart, Neff. 12 Mk.
- ENGELHARDT, B. de, Observations astronomiques, faites dans son observatoire. 3. partie. Dresden, Bänsch. 18 Mk.

Physik und Meteorologie.

- Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. Abhandlungen von OERSTED und SEEBECK (1820—21). Herausgegeben von J. v. OERTINGEN (aus Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 40 Pf.
- Handbuch der Physik. 25. u. 26. Lieferung. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.
- FAVARGER, A., Die Elektrizität und ihre Verwerthung zur Zeitmessung. Uebersetzt von M. LOESKE. Bautzen, Hübner. 7 Mk.
- HAMMERL, H., Die elektrische Anlage in der Oberrealschule zu Innsbruck nebst Beschreibung verschiedener Apparate. Programm. Innsbruck, Wagner. 1 Mk. 20 Pf.
- WEYER, E., Die magnetische Declination und ihre säculäre Veränderung an 48 Beobachtungsorten (aus der Leopoldina). Leipzig, Engelmann. 8 Mk.
- GIBERNE, A., Das Luftmeer. Uebersetzt von KIRCHNER. Berlin, Cronbach. 4 Mk. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1894.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abel'sche Transcendenten.

290. Sur les intégrales abéliennes qui s'expriment par des logarithmes. E. Goursat. *Compt. Rend.* CXVIII, 515.

Additionstheorem.

291. Sur une forme explicite des formules d'addition des fonctions hyperelliptiques les plus générales. F. de Salvert. *Compt. Rend.* CXVI, 304.

Aerodynamik.

292. Sur les déformations successives de la tête d'une onde aérienne isolée, durant la propagation de cette onde le long d'un tuyau de conduite sans eau, de longueur indéfinie. J. Boussinesq. *Compt. Rend.* CXVII, 12.
293. Vibrations propres d'un milieu indéfiniment étendu extérieurement à un corps solide. Marc Brillouin. *Compt. Rend.* CXVII, 94.
294. Sur les lois de la résistance de l'air. E. Vallier. *Compt. Rend.* CXIX, 885.

Akustik.

295. Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions, quand il ya diverses résistances au mouvement. J. Boussinesq. *Compt. Rend.* CXVIII, 162, 223, 271.
296. Émission des sons. H. Gilbault. *Compt. Rend.* CXVIII, 135, 1037.
297. Transmission des sons. H. Gilbault. *Compt. Rend.* CXVIII, 1244.
298. Réception des sons. H. Gilbault. *Compt. Rend.* CXIX, 53.
299. Sur un système de gammes nouvelles. Alex de Bertha. *Compt. Rend.* CXVIII, 1137; CXIX, 56. — Edm. de Polignac *ibid.* CXVIII, 1412.

Analytische Geometrie der Ebene.

300. Sur le droite passant par les centres de deux des n^2 petits carrés en les quels on a divisé un grand carré par des lignes horizontales et verticales. Moret-Blanc. *N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 28.*
301. Relation entre des segments d'une droite coupée par deux cubiques. J. Destoux. *N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 15.*
302. Propriétés des courbes du troisième degré et de la troisième classe. Moret-Blanc. *N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 52.*
303. Sur la strophoïde. Ew. Valdès. *N. ann. math. Série 3, XIII, 243.* [Vergl. Bd XXXIX Nr. 184.]
304. Sur la strophoïde. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3, XIII, 264.*
305. Génération d'une hypocycloïde à trois rebroussements. G. Caffin. *N. ann. math. Série 3, XIII, 498.*
306. Sur les courbes planes du quatrième ordre. Mod. Postnicoff. *N. ann. math. Série 3, XIII, 348.*
307. Courbe du sixième degré lieu du point de contact d'une droite mobile avec un cercle tangent aussi un cercle fixe. H. Brocard. *N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 18.*
308. Sur les spirales sinusoides. E. Cesaro. *N. ann. math. Série 3, XIII, 102.*

309. Sur les trajectoires orthogonales de courbes, dont l'équation est donné en coordonnées bipolaires. G. Dariès. N. ann. math. Série 3, XIII, 283.
 310. Sur les rayons de courbure successifs de certaines courbes. R. Godefroy. Compt. Rend. CXVII, 1062.
 Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere). Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Normalen. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

311. Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle. P. Appell. N. ann. math. Série 3, XIII, 41.
 312. Théorème sur les systèmes triplement orthogonaux. Luc. Lévy. Compt. Rend. CXVII, 477.
 313. Sur une propriété métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes. Alph. Demoulin. Compt. Rend. CXVIII, 242.
 314. Sur des congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour. E. Cosserat. Compt. Rend. CXVIII, 335.
 315. Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes. Em. Waelsch. Compt. Rend. CXVIII, 736.
 316. Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand. Alph. Demoulin. Compt. Rend. CXVI, 246.
 317. Sur des propriétés géométriques qui ne dépendent que de la représentation sphérique. C. Guichard. Compt. Rend. CXVI, 1238.
 318. Discussion de la courbe passant par le point x, y, z et y faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement x, y, z . Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, 44.
 319. Par cinq points donnés dans l'espace, faire passer un cylindre droit à base circulaire. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 37.
 Vergl. Geometrie (höhere). Hyperboloid. Krümmungslinien. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

320. Sur un problème de mécanique. J. Bertrand. Compt. Rend. CXVIII, 13.
 321. Sur un problème de mécanique. A. Potier. Compt. Rend. CXVIII, 102.
 322. Sur le calcul des orbites des planètes. F. Tisserand. Compt. Rend. CXIX, 881.
 323. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. M. Hamy. Compt. Rend. CXVII, 1050; CXVIII, 88, 698.
 324. Sur les expressions approchées destermes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. N. Coculesco. Compt. Rend. CXVIII, 59.
 325. Sur les formules de l'aberration annuelle. Gaillot. Compt. Rend. CXVI, 563.
 326. Sur les termes du second ordre provenant de la combinaison de l'aberration et de la réfraction. Folie. Compt. Rend. CXVI, 359, 732, 1105.
 327. Sur les lacunes dans la zone des petites planètes. O. Callandreau. Compt. Rend. CXVIII, 751.
 328. Sur la distribution des planètes entre Mars et Jupiter. E. Roger. Compt. Rend. CXIX, 895, 943.
 Vergl. Geodäsie. Nautik 557—562.

B.**Bestimmte Integrale.**

329. Sur un point de doctrine relatif à la théorie des intégrales multiples. J. Andrade. Compt. Rend. CXIX, 1192.
 330. Valeurs de lacets. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, 22.
 331. Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms. Dav. Hilbert. Acta Math. XVIII, 155.
 332. Angenäherte Darstellung der Quadratwurzel einer Veränderlichen mittelst einfacher Brüche. P. Tehebychew. Acta Math. XVIII, 113.
 333. Calcul d'une intégrale définie. M. d'Ocagne. N. ann. math. Série 3, XIII, 198.

C.**Capillarität.**

334. Sur la dépression capillaire barométrique. C. Maltézos. Compt. Rend. CXVIII, 583.

Combinatorik.

335. Sur certaines permutations spéciales. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 16.
 336. Sur le triangle des séquences. Dés. André. Compt. Rend. CXVIII, 575, 726. — G. Darboux ibid. 1026.
 337. Sur les permutations quasi alternées. Dés. André. Compt. Rend. CXIX, 947.
 338. Sur le nombre des valeurs que prend une fonction rationnelle de n lettres par l'ensemble des substitutions effectuées sur ces n lettres. Cartan. Compt. Rend. CXIX, 902.

Cylinderfunctionen.

339. Sur certains développements en séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 383.

D.

Differentialgleichungen.

340. Équations pour lesquelles $\frac{1}{P^2+Q^2}$ ou $\frac{1}{P^2-Q^2}$ sont des facteurs d'intégrabilité. C. Harkema. N. ann. math. Série 3, XIII, 502.
 341. Sur le problème général de l'intégration. Riquier. Compt. Rend. CXVI, 426.
 342. Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre. Riquier. Compt. Rend. CXVI, 866.
 343. Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable. Riquier. Compt. Rend. CXIX, 267. — Em. Picard ibid. 1250.
 344. Sur les équations différentielles ordinaires qui possèdent un système fondamental d'intégrales. A. Guldberg. Compt. Rend. CXVI, 964; CXVII, 215, 614.
 345. Sur les équations différentielles ordinaires, qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales. Soph. Lie. Compt. Rend. CXVI, 1233.
 346. Sur la limitation du degré pour l'intégrale générale algébrique de l'équation différentielle du premier ordre. Autonne. Compt. Rend. CXVI, 132, 1015.
 347. Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. Autonne. Compt. Rend. CXVIII, 1184.
 348. Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre. Em. Lindelöf. Compt. Rend. CXVIII, 454. — Em. Picard ibid. 457.
 349. Sur un exemple d'approximations successives divergentes. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII 899.
 350. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. Em. Picard. Journ. Mathem. Série 4, IX, 217.
 351. Sur une hypothèse négligeable pour le développement des intégrales d'un système d'équations. Bendixon. Compt. Rend. CXVIII. 971.
 352. Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. Em. Picard. Compt. Rend. CXVII, 603. [Vergl. Nr. 436.]
 353. Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII, 760.
 354. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. H. von Koch. Compt. Rend. CXVI, 91.
 355. Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre. H. von Koch. Compt. Rend. CXVI, 179.
 356. Sur les intégrales uniformes des équations linéaires. H. von Koch. Compt. Rend. CXVI, 365.
 357. Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires. H. von Koch. Acta Math. XVIII, 337.
 358. Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. J. Cels. Compt. Rend. CXVI, 176.
 359. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Auric. N. ann. math. Série 3, XIII, 47.
 360. Sur les équations aux dérivées partielles linéaires et à caractéristiques réelles. Delassus. Compt. Rend. CXIX, 40.
 361. Sur certaines équations différentielles du premier ordre. Vessiot. Compt. Rend. CXVI, 427.
 362. Sur une classe d'équations différentielles Vessiot. Compt. Rend. CXVI, 959.

363. Sur une classe de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Vessiot. *Compt. Rend.* CXVI, 1112.
364. Sur une équation différentielle du second ordre. G. Mittag-Leffler. *Compt. Rend.* CXVII, 92.
365. Sur l'intégration de l'équation différentielle $y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$. G. Mittag-Leffler. *Acta Math.* XVIII, 233.
366. Sur les transcendentes définies par les équations différentielles du second ordre. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXVI, 566.
367. Sur les équations du second ordre à points critiques fixes et sur la correspondance univoque entre deux surfaces. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXVII, 611, 686.
368. Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. P. Vernier. *Compt. Rend.* CXVIII, 1317. — P. Painlevé *ibid.* CXIX, 37.
369. Sur les équations linéaires du second ordre renfermant un paramètre arbitraire. Em. Picard. *Compt. Rend.* CXVIII, 379.
370. Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genre zéro. Petrovitch. *Compt. Rend.* CXVIII, 1190.
371. Sur les équations du second degré dont l'intégrale générale est uniforme. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXVII, 211.
372. Sur une expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyper-elliptique de la forme la plus générale. F. de Salvert. *Compt. Rend.* CXVI, 243.
373. Sur une extension aux équations d'ordre quelconque d'une méthode de Riemann relative aux équations du second ordre. Delassus. *Compt. Rend.* CXVII, 510.
374. Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXVI, 362. — Em. Picard *ibid.* 365.
375. Sur les intégrales analytiques des équations de la forme
- $$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(z), F(z) = \sum a_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}, \quad i+k < n$$
- Delassus. *Compt. Rend.* CXVIII, 968.
376. Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXVI, 88.
377. Sur les équations différentielles d'ordre supérieur, dont l'intégrale n'admet qu'un nombre donné de déterminations. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXVI, 173.
378. Sur l'intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre impliquant plusieurs fonctions inconnues. Riquier. *Compt. Rend.* CXIX, 324.
379. Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVI, 491.
380. Sur l'équation $\Delta u = ke^u$. Em. Picard. *Compt. Rend.* CXVI, 454, 1015.
381. De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée, Em. Picard. *Journ. Mathem. Série 4*, IX, 273.
382. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. X. Stouff. *Compt. Rend.* CXVIII, 1320.
383. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. A. Petot. *Compt. Rend.* CXIX, 510.
384. Sur le problème de Pfaff. A. J. Stodolkievitz. *Compt. Rend.* CXIX, 489. *Vergl. Elasticität* 393, 394. *Elektricität* 401. *Mechanik. Oberflächen* 571, 574, 603. *Transformationsgruppen.*

Differentialinvarianten.

385. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. Ar. Tresse. *Acta Math.* XVIII, 1. *Vergl. Analytische Geometrie des Raumes* 315.

Differentialquotient.

386. Sur les changements de variables. L. Lévy. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 5-
 387. Sur la théorie des formes différentielles quadratiques. Wlad. de Tannenberg. *Compt. Rend.* CXIX, 321.

Dreiecksgeometrie.

388. Règles d'analogie dans le triangle ou transformation continue et transformation analytique correspondante. E. Lemoine. Compt. Rend. CXVI, 31.
 389. Théorème sur les bissectrices. Rom. Blazejevski. N. ann. math. Série 3, XIII, 31.
 390. Relations entre les distances d'un point du plan aux sommets d'un triangle. Rom. Blazejevski. N. ann. math. Série 3, XIII, 28.
 391. Sur trois droites se rencontrant en un même point du cercle circonscrit à un triangle. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 19. — H. Lez ibid. 20. — A. Droz-Farny ibid. 23.

E.

Elasticität.

392. Sur une simplification des formules de résistance vive des solides. J. Boussinesq. Compt. Rend. XVI, 1418.
 393. Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la vibration des membranes. Em. Picard. Compt. Rend. CXVII, 502.
 394. Sur l'équation des vibrations d'une membrane. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 447.
 395. Sur les vibrations des corps élastiques isotropes. V. Volterra. Acta Math. XVIII, 161.

Elektricität.

396. Essai d'une nouvelle théorie de l'électrostatique. Vaschy. Compt. Rend. CXVI, 1286.
 397. Force agissant à la surface de séparation de deux diélectriques. H. Pellat. Compt. Rend. CXIX, 675.
 398. Sur la valeur de l'ohm théorique. A. Leduc. Compt. Rend. CXVIII, 1246.
 399. Sur la capacité électrostatique d'une ligne parcourue par un courant. Vaschy. Compt. Rend. CXIX, 1198.
 400. Sur la propagation de l'électricité. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVII, 1027.
 401. Sur l'équation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII, 16.
 402. Sur la propagation du courant dans un cas particulier. A. Potier. Compt. Rend. CXVIII, 227.
 403. Sur la propagation des ondes électromagnétiques. Mascart. Compt. Rend. CXVIII, 277.
 404. Sur la nature de la conductibilité électrique. Vaschy. Compt. Rend. CXVIII, 1324.
 405. Sur la mesure de la puissance dans les courants polyphasés. Blondel. Compt. Rend. CXVI, 54.
 406. Nouvelle méthode simplifiée pour le calcul des courants alternatifs polyphasés. A. Blondel. Compt. Rend. CXVIII, 404, 633.
 407. Multiplication du nombre des périodes des courants sinusoïdaux. Dés. Korda. Compt. Rend. CXVI, 806.
 408. Transformateur de courant monophasé en courants triphasés. Dés. Korda. Compt. Rend. CXIX, 61.
 409. Sur les courants alternatifs et le pont de Wheatstone. H. Abraham. Compt. Rend. CXVIII, 1251.
 410. Sur la forme générale de la loi du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope. E. Mercadier. Compt. Rend. CXVI, 26.
 411. Sur les ondes électriques dans les fils; la force électrique dans le voisinage du conducteur. Birkeland. Compt. Rend. CXVI, 499.
 412. Sur la nature de la réflexion des ondes électriques au bout d'un fil conducteur. Kr. Birke land et Ed. Sarasin. Compt. Rend. CXVII, 618. — H. Poincaré ibid. CXVII, 622.
 413. Détermination de la forme des courants périodiques en fonction du temps au moyen de la méthode d'inscription électrochimique. P. Janet. Compt. Rend. CXIX, 58.
 414. Sur l'équation des décharges. R. Swyngedauw. Compt. Rend. CXIX, 221.
 415. Sur les interférences électriques produites dans une lame liquide. R. Colson. Compt. Rend. CXVI, 1052.
 416. Sur les relations générales qui existent entre les coefficients des lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme. E. Mercadier. Compt. Rend. CXVI, 800.

417. Sur le calcul des coefficients de self-induction dans un cas particulier. A. Potier. Compt. Rend. CXVIII, 166.
 418. Sur la moyenne distance géométrique des éléments d'un ensemble de surfaces et son application au calcul des coefficients d'induction. Ch. Eug. Guye. Compt. Rend. CXVIII, 1321.
 419. Sur la théorie de la pyro-électricité et de la piézo-électricité. Lord Kelvin. Compt. Rend. CXVII, 463.
 Vergl. Magnetismus. Potential.

Ellipse.

420. Inscrire dans un triangle donné une ellipse dont la surface soit égale à celle d'un cercle donné. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 38.
 421. Hyperboles passant chacune par quatre points donnés au moyen de deux diamètres quelconques conjugués d'une ellipse. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 6.
 Vergl. Maxima und Minima 516. Normalen 564.

Elliptische Transcendenten.

422. Sur la réduction des intégrales elliptiques. J. C. Kluyver. Compt. Rend. CXVI, 48.
 423. Sur quatre solutions connexes du problème de la transformation relatif à la fonction elliptique de deuxième espèce. F. de Salvert. Compt. Rend. CXVIII, 1181.
 424. Sur quatre solutions connexes du problème de la transformation relatif à la fonction elliptique de troisième espèce. F. de Salvert. Compt. Rend. CXVIII, 1403.
 Vergl. Zahlentheorie 665.

F.

Formen.

425. Sur la composition des formes linéaires et les groupes à congruences. X. Stouff. Compt. Rend. CXIX, 993.

Functionen.

426. Théorie des fonctions algébriques d'une variable. K. Hensel. Acta Math. XVIII, 247.
 427. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. J. Hadamard. Journ. Mathem. Série 4, IX, 171.
 428. Sur la partie entière de $(x^2-1)^n$. $\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right]$. O. Callandreau. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 50.
 429. Théorèmes relatifs aux fonctions analytiques à n dimensions. G. Scheffers. Compt. Rend. CXVI, 1242.
 430. Sur la généralisation des fonctions analytiques. G. Scheffers. Compt. Rend. CXVI, 1114.
 431. Sur la représentation approchée des fonctions expérimentales entre des limites données. Vallier. Compt. Rend. CXVI, 712.
 432. Nombre des valeurs différentes de $z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ les lettres x_1, x_2, \dots, x_n prenant respectivement m_1, m_2, \dots, m_n valeurs. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 42.
 433. Démonstration de la transcendance du nombre e . Ad. Hurwitz. Compt. Rend. CXVI, 788.
 434. Sur la transcendance du nombre e . Gordan. Compt. Rend. CXVI, 1040.
 435. Sur la fonction modulaire $\gamma\omega$. A. Cayley. Compt. Rend. CXVI, 1339.
 436. Sur une classe de transcendentes nouvelles. Em. Picard. Compt. Rend. CXVII, 472. [Vergl. Nr. 352.]
 437. Sur une classe de transcendentes nouvelles. Em. Picard. Acta Math. XVIII, 133.
 438. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVIII, 845.
 439. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Em. Borel. Compt. Rend. CXVIII, 340.
 440. Sur les équations et les fonctions implicites. Pellet. Compt. Rend. CXVII, 719.
 441. Sur les équations aux fonctions mêlées et un problème de lignes géodésiques. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVII, 683.

442. Sur les équations fonctionelles. Leau. *Compt. Rend.* CXIX, 901.
 443. Sur les zéros de certaines fonctions discontinues. Principe de la méthode pour trouver les zéros de certaines fonctions. Desaint. *Compt. Rend.* CXIX, 364.
 Vergl. Abel'sche Transcendenten. Additionstheorem. Bestimmte Integrale. Combinatorik 338. Cylinderfunctionen. Differentialgleichungen. Differentialinvarianten. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Reihen. Substitutionen. Transformationsgruppen.

G.**Geodäsie.**

444. Sur la cause des variations périodiques des latitudes terrestres. H. Gyldén. *Compt. Rend.* CXVI, 476, 605.

Geometrie (höhere).

445. Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques. Simart. *Compt. Rend.* CXVI, 1047.
 446. Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques. H. Poincaré. *Compt. Rend.* CXVII, 18.
 447. Sur le rapport conique et la relation conique. Mozat. *Compt. Rend.* CXVIII, 790.
 448. Sur la possibilité de remplacer, par un problème déterminé, le problème indéterminé que comporte la généralisation du théorème de Pascal. P. Serret. *Compt. Rend.* CXIX, 454.
 449. Sur une dégénérescence du groupe projectif général. F. Engel. *Compt. Rend.* CXVIII, 397.
 450. Sur les figures affines. G. Tarry. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 242.
 451. Trouver une courbe qui représente les trois folioles du Trifolium pratense. H. Brocard. *N. ann. math. Série 3*, XIII, Exerc. 58.
 452. Sur quelques propriétés de cubiques unicursales. A. Astor. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 184.
 453. Sur quelques cubiques unicursales. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 384.
 454. Application de la méthode de transformation par polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 300. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 377.]
 455. Sur une génération des courbes planes unicursales du troisième et du quatrième ordre. And. Bienaymé. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 144.
 456. Étant donnés 7 points sur une droite et 7 plans dans l'espace, couper les plans par une transversale en 7 points homographiques aux points donnés. J. Franel. *N. ann. math. Série 3*, XIII, Exerc. 54.
 457. Sur la représentations des courbes gauches algébriques et sur une formale d'Halphen. L. Autonne. *Compt. Rend.* CXIX, 845.
 458. Sur certaines familles de cubiques gauches. Lelievre. *Compt. Rend.* CXVII, 537, 616.
 459. Recherche des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. E. Carvallo. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 429.
 Vergl. Analytische Geometrie der Ebene. Analytische Geometrie des Raumes. Kreis 502, 503. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Geschichte der Mathematik.

460. Auguste Comte examinateur d'admission à l'École Polytechnique. P. Laffitte. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 65, 113, 405, 462, 473.
 461. Sur la vie et les travaux de Pierre-Ossian Bonnet (22/XII. 1819—22/VI. 1892). P. Appell. *Compt. Rend.* CXVII, 1014.
 462. Sur les travaux de M. Kummer. Hermite. *Compt. Rend.* CXVI, 1163.

Gleichungen.

463. Sur une classe de polynomes décomposables en facteurs linéaires. Moutard. *Compt. Rend.* CXIX, 42.
 464. Sur les équations et les fonctions implicites. A. Pellet. *Compt. Rend.* CXVIII, 182.

465. Relations des polynomes V_1, V_2, \dots, V_m de Sturm avec les racines de l'équation $V=0$. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 27.
466. Sur la résolution algébrique des équations. E. Jaggi. N. ann. math. Série 3, XIII, 126.
467. Sur les équations réciproques et les équations du quatrième degré. A. E. Pellet. N. ann. math. Série 3, XIII, 108.
468. Une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles, trouver le nombre précis de racines comprises entre deux limites données. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 42.
469. Sur la résolution des équations numériques au moyen des suites récurrentes. R. Perrin. Compt. Rend. CXIX, 990, 1257, 1190.
470. Sur une méthode nomographique applicable à des équations pouvant contenir jusqu'à dix variables. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXVII, 216, 277.
471. Sur des abaques à 16 et 18 variables. A. Lafay. Compt. Rend. CXIX, 1195.
472. Sur l'élimination. Hadamard. Compt. Rend. CXIX, 995.
473. Sur la détermination du nombre des racines communes à un système d'équations simultanées et sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction en ces points. W. Dyck. Compt. Rend. CXIX, 1254.
Vergl. Functionen 440, 441, 442. Kegelschnitte 495.

H.**Hydrodynamik.**

474. Réduction de l'équation de continuité en Hydraulique à la forme

$$\frac{d\varrho}{dt} + v_1 \frac{d\varrho}{ds} + \varrho \frac{dv_1}{ds} - 2\varrho v_1 \frac{d'\alpha}{ds''} = 0.$$

P. E. Touche. Compt. Rend. CXIX, 721.

475. Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide. H. Willotte. Journ. Math. Série 4, IX, 5.
[Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 403.]
476. Sur les équations du mouvement d'un corps solide se mouvant dans un liquide indéfini. C. Maltézos. Compt. Rend. CXVII, 337.
477. Théorie des déversoirs. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXVI, 1327, 1415, 1487. CXIX, 589, 618, 663, 707, 771.
478. Sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses à leur intérieur. Compt. Rend. CXVIII, 1031. — J. Boussinesq. ibid. 1239.
479. Sur l'équilibre des mers. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 948.
480. Variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec un port à marée. A. de Saint-Germain. Compt. Rend. CXIX, 673.
481. Sur le clapotis. E. Guyon. Compt. Rend. CXVII, 722.

Hyperbel.

482. Propriété de l'hyperbole équilatère. J. Réveille. N. ann. math. Série 3, XIII, 100.
483. Sur l'hyperbole équilatère et sur ses inverses. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 265.
Vergl. Ellipse 421.

Hyperboloid.

484. Sur l'hyperboloïde à une nappe. Genty. N. ann. math. Série 3, XIII, 399.
485. Tétraèdre ayant pour hauteurs quatre génératrices d'un hyperboloïde. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 33. — Moret-Blanc ibid. 36.
486. Les plans qui découpent dans un cône du second degré des volumes limités de grandeur constante sont tangents à un hyperboloïde à deux nappes, asymptote à ce cône. P. Barbarin. N. ann. math. Série 3, XIII, 99

K.**Kegelschnitte.**

487. Construire une conique connaissant trois tangentes et une directrice. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 43.
488. Sur quelques théorèmes de la géométrie des coniques. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 218.
489. Sur un théorème de M. Faure. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 324.

490. Sur les points d'une conique situés sur un même cercle. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 386.
491. Courbes autopolaires. P. Appell. N. ann. math. Série 3, XIII, 206.
492. Corrélation entre les hexagones de Pascal et de Brianchon. P. Sondat. N. ann. math. Série 3, XIII, 121.
493. Formules relatives aux foyers des coniques. A. Tissot. N. ann. math. Série 3, XIII, 97.
494. Sur un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 24.
495. Intersection de deux coniques. Amigues. N. ann. math. Série 3, XIII, 81.
496. Des quatre coniques passant par un point quelconque P d'une conique S étant circonscrites à un triangle ABC et touchant S chacune dans un autre point que P . And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 92. Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

497. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. Padé. Compt. Rend. CXVIII, 848.
498. Sur une application des fractions continues. Stieltjes. Compt. Rend. CXVIII, 1315.
499. Recherches sur les fractions continues. Stieltjes. Compt. Rend. CXVIII, 1401. — H. Poincaré ibid. CXIX, 630. Vergl. Reihen 627.

Kinematik.

500. Un théorème concernant des aires décrites dans le mouvement d'une figure plane. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVIII, 965. Vergl. Mechanik 537, 550.

Kreis.

501. Rayons d'une suite de cercles consécutifs et somme de leurs aires. S. Hott. N. ann. math. Série 3, XIII, 488.
502. Des cercles ou des sphères dérivés d'une enveloppe, plane ou solide, de classe quelconque. P. Serret. Compt. Rend. CXVII, 400, 435, 480.
503. Sur la construction du cercle dérivé de 7 droites, ou défini par l'équation $0 = \Sigma^2, 4, T^3, \equiv X^2 + Y^2 - R^2$. P. Serret. Compt. Rend. CXIX, 474, 493
504. Sur le problème du billard circulaire. Auric. N. ann. math. Série 3, XIII, 215

Krümmungslinien.

505. Sur les surfaces qui admettent un système de lignes de courbure sphériques et qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. Blutel. Compt. Rend. CXVI, 249.
506. Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes. P. Adam. Compt. Rend. CXVI, 1036.
507. Sur les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et isothermes. Th. Caronnet. Compt. Rend. CXVI, 1240.
508. Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales. Th. Caronnet. Compt. Rend. CXVII, 842.
509. Sur les lignes de courbure des surfaces cerclées. Lelievre. Compt. Rend. CXVIII, 967.

Kugelfunctionen.

510. Sur la théorie des fonctions sphériques. E. Beltrami. Compt. Rend. CXVI, 181.
511. Sur la série de Laplace. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 497.

M.**Magnetismus.**

512. Sur la relation qui existe entre les coefficients des formules de Coulomb, de Laplace et d'Ampère. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXVII, 86, 150.
513. Sur les variations de l'effet Peltier produites par l'aimantation. L. Houlléviqve. Compt. Rend. CXVIII, 629.
514. Problème général des transformateurs à circuit magnétique fermé. Dés. Korda. Compt. Rend. CXVIII, 864.

515. Sur l'hystérésis et les déformations permanentes. P. Duhem, Compt. Rend. CXVIII, 974.
Vergl. Elektrizität. Potential.

Maxima und Minima.

516. Circonscire à une ellipse le triangle équilatéral dont le côté soit: 1. un maximum
2. un minimum. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 45.
517. Entre tous les prismes de même base et de même hauteur c'est le prisme droit qui a la plus petite aire. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 32.
518. Minimum de matière pour construire un vase cylindrique droit de certaines propriétés données. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 44.
519. Minimum du rapport du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre au rayon de la sphère inscrite. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 25.
Vergl. Ellipse 420.

Mechanik.

520. Sur la dynamique du point. Andoyer. N. ann. math. Série 3 XIII, 52.
521. Sur les cas d'intégrabilité du mouvement d'un point dans un plan. Elliot. Compt. Rend. CXVI, 1117.
522. Sur un cas général où le problème de la rotation d'un corps solide admet des intégrales uniformes. H. Gylden. Compt. Rend. CXVI, 942, 1028.
523. Sur les équations de la Mécanique. Wlad. de Tannenbergl. Compt. Rend. CXVIII, 1092; CXIX, 487. — R. Liouville ibid. CXIX, 367.
524. Condition pour que trois forces non situées deux à deux dans le même plan se réduisent à une seule force. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 41.
525. Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. P. Appell. Compt. Rend. CXVI, 1483.
526. Sur la réduction du problème des tautochrones à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVI, 966.
527. Sur un théorème reliant la théorie de la synchronisation et celle des résonances. A. Cornu. Compt. Rend. CXVIII, 313.
528. Sur un classe de problèmes de Dynamique. P. Staekel. Compt. Rend. CXVI, 485, 1284.
529. Sur une classe de problèmes de Dynamique. Goursat. Compt. Rend. CXVI, 1050.
530. Sur un théorème nouveau de Mécanique. N. Seiliger. Compt. Rend. CXVII, 578.
531. Généralisation de quelques théorèmes de Mécanique. A. Kotelnikoff. Compt. Rend. CXVIII, 129.
532. Sur le mouvement d'un corps solide. G. Koenigs. Compt. Rend. CXIX, 897.
533. Sur les mouvements des systèmes dont les trajectoires admettent une transformation infinitésimale. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVI, 21.
534. Sur la transformation des équations canoniques du problème des trois corps. P. Vernier. Compt. Rend. CXIX, 451.
535. Sur le mouvement d'un solide pesant homogène de révolution fixé par un point de son axe et assujéti à s'appuyer sur un cercle fixe. A. Astor. N. ann. math. Série 2, XIII, 442.
536. Sur le mouvement d'un système de forme variable. L. Picart. Compt. Rend. CXVIII, 733.
537. Sur un moyen d'obtenir un mouvement circulaire uniforme au moyen de deux mouvements vibratoires. Marc Deprez. Compt. Rend. CXVIII, 451.
538. Le principe du travail maximum et l'entropie. Berthelot. Compt. Rend. CXVIII, 1378.
539. Sur le frottement. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Série 3, XIII, 230.
540. Sur les mouvements de roulement. Hadamard. Compt. Rend. CXVIII, 911.
541. Théorie mathématique de l'indicateur de Watt. L. Lecornu. Compt. Rend. CXVIII, 1034.
542. Sur la denture de l'engrenage hyperboloïdal. H. Resal. Compt. Rend. CXVII, 391.
543. Sur la stabilité de l'équilibre de l'axe de la toupie gyroscopique. H. Resal. Compt. Rend. CXVII, 499.

544. Sur le joint Goubet et son application à l'hélice des navires. H. Resal. *Compt. Rend.* CXVII, 599.
545. Sur l'absorption de l'énergie par un fil élastique. Luc. de la Rive. *Compt. Rend.* CXVIII, 522.
546. Des mouvements de natation de la Raie. Marey. *Compt. Rend.* CXVI, 77.
547. Étude chronophotographique des différents genres de locomotion chez les animaux. Marey. *Compt. Rend.* CXVII, 555.
548. Sur la méthode chronostylographique et ses applications à l'étude de la transmission des ondes dans les tuyaux. A. Chauveau. *Compt. Rend.* CXVIII, 115.
549. Le mouvement des liquides étudié par la chronophotographie. Marey. *Compt. Rend.* CXVI, 913.
550. Sur un appareil relatif à la question de la marche horizontale de l'homme. H. Resal. *Compt. Rend.* CXVIII, 620.
551. Les mouvements articulaires étudiés par la photographie. Marey. *Compt. Rend.* CXVIII, 1019.
552. Des mouvements que certains animaux exécutent pour retomber sur leurs pieds, lorsqu'ils sont précipités d'un lieu élevé. Marey. *Compt. Rend.* CXIX, 714.
553. Théorie de la chute du chat vivant comparée avec le théorème des aires. Guyon. *Compt. Rend.* CXIX, 717. — M. Lévy *ibid.* 718. — Marc. Deprez *ibid.* 767. — P. Appell *ibid.* 770. — L. Lecornu *ibid.* 899.
- Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Capillarität. Elasticität. Elektrizität. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Nautik 555, 556, Optik. Pendel. Potential. Transformationsgruppen 641. Wärmelehre.
- Mehrdimensionale Geometrie.**
554. Généralisation du théorème d'Euler relatif aux polyèdres. H. Poincaré. *Compt. Rend.* CXVII, 144.

N.**Nautik.**

555. Sur les calculs de stabilité des navires. E. Gouyou. *Compt. Rend.* CXVI, 496.
556. Sur le calcul de stabilité des navires. Ch. Doyère. *Compt. Rend.* CXVI, 1360.
557. Sur les termes d'ordre supérieur de la déviation des compas. E. Gouyou. *Compt. Rend.* CXVI, 1357.
558. Nouvelles applications des Tables de latitudes croissantes à la navigation. E. Gouyou. *Compt. Rend.* CXVII, 1059.
559. Détermination graphique du point à la mer. L. Favé et Rollet de l'Isle. *Compt. Rend.* CXVIII, 24.
560. Éphémérides graphiques donnant les coordonnées des astres pour les usages de la navigation. L. Favé. *Compt. Rend.* CXVIII, 1089.
561. Régulation des compas par des observations de force horizontale. E. Caspari. *Compt. Rend.* CXVIII, 27.
562. Azimut, latitude et longitude par des hauteurs égales, sans le secours du chronomètre. E. Caspari. *Compt. Rend.* CXVIII, 1028.

Normalen.

563. Sur les distances d'un point à des courbes sous des angles constants M. d'Ocagne. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 501.
564. Sur les quatre normales et les deux tangentes menées d'un point donné à une ellipse. L. Bosi. *N. ann. math. Série 3*, XIII, Exerc. 10.

O.**Oberflächen.**

565. Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. *Compt. Rend.* CXVI, 285.
566. Sur deux nombres invariants dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. *Compt. Rend.* CXIX, 1169.
567. Théorème sur les points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre. G. Koenigs. *Compt. Rend.* CXVI, 596.
568. Sur la correspondance par orthogonalité des éléments. Alph. Demoulin. *Compt. Rend.* CXVI, 682.

569. Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces spirales. Alph. Demoulin. *Compt. Rend. CXVIII*, 337.
570. Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante. E. Waelsch. *Compt. Rend. CXVI*, 1435.
571. Sur une équation aux différences partielles du second ordre. J. Weingarten. *Compt. Rend. CXVI*, 493.
572. Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles. G. Humbert. *Compt. Rend. CXVI*, 1350.
573. Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques. G. Humbert. *Compt. Rend. CXVII*, 361.
574. Théorie générale des surfaces hyperelliptiques. G. Humbert. *Journ. Mathem. Série 4, IX*, 29, 361.
575. Sur quelques surfaces avec plusieurs modes de génération. G. Scheffers. *Compt. Rend. CXVI*, 1352.
576. Quelques remarques sur les surfaces réglées et leur étude intrinsèque. E. Cesaro. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 106. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 316.]
577. Sur les droites qu'on peut placer sur une surface de troisième classe ou de troisième ordre. E. G. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 138.
578. Surface algébrique sur laquelle on ne peut tracer qu'une seule et unique circonférence. Moret-Blanc. *N. ann. math. Série 3, XIII*, Exerc. 31.
579. Sur les surfaces admettant des cubiques gauches pour lignes asymptotiques. Blutel. *Compt. Rend. CXVII*, 722.
580. Sur les surfaces dont les plans principaux sont équidistants d'un point fixe, Guichard. *Compt. Rend. CXVI*, 487.
581. Sur les surfaces susceptibles d'engendrer par un déplacement hélicoïdal une famille de Lamé. Alb. Petot. *Compt. Rend. CXVIII*, 1409.
582. Nouvel emploi du conoïde de Plücker. A. Mannheim. *Compt. Rend. CXIX*, 394.
- Vergl. Differentialgleichungen 367. Krümmungslinien.

Oberflächen zweiter Ordnung.

583. Théorèmes sur les quadriques. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 378.
584. Sur les quadriques autopolaires. V. Hioux. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 211.
585. Sur les quadriques inscrites dans la même développable. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 395.
586. Condition pour que deux quadriques aient une génératrice commune. C. Bourlet. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 434.
587. Génération de quelques surfaces du second degré au moyen d'une sphère et d'une droite. Audibert. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 491. — Ancien élève *ibid.* 493.
588. Sur les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes sont tangentes à une autre quadrique. H. Vogt. *Compt. Rend. CXVIII*, 395.
589. Discussion par la géométrie vectorielle d'une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné. Genty. *N. ann. math. Série 3, XIII*, 235.
- Vergl. Hyperboloid.

Optik.

590. Sur des franges d'interférences semi-circulaires. G. Meslin. *Compt. Rend. CXVI*, 250, 379, 570. *CXVII*, 225. — A. Cornu *ibid.* *CXVII*, 228.
591. Achromatisme et chromatisme des franges d'interférence. J. Macé de Lépinay. *Compt. Rend. CXVIII*, 585, 856.
592. Sur les interférences à moyenne différence de marche. G. Meslin. *Compt. Rend. CXIX*, 214.
593. Études sur les réseaux diffringents. Anomalies focales. A. Cornu. *Compt. Rend. CXVI*, 1215, 1421.
594. Introduction naturelle de termes proportionnels aux déplacements de l'éther (ou termes de Briot) dans les équations de mouvement des ondes lumineuses. J. Boussinesq. *Compt. Rend. CXVII*, 80.
595. Expression de la résistance opposée par chaque molécule pondérable au mouvement vibratoire de l'éther ambiant. J. Boussinesq. *Compt. Rend. CXVII*, 138.
596. Considérations diverses sur la théorie des ondes lumineuses. J. Boussinesq. *Compt. Rend. CXVII*, 193.

597. Sur la marche de la lumière à travers un système de lentilles sphériques. C. L. V. Charlier. *Compt. Rend.* CXVII, 580.
598. Sur la théorie de la photographie des couleurs simples et composées par la méthode interférentielle. G. Lippmann. *Compt. Rend.* CXVIII, 92.
599. L'objectif aplanétique symétrique. Ch. V. Zenger. *Compt. Rend.* CXVIII, 407.
600. Études sur les actions centrales. Lois générales relatives à l'effet des milieux. F. P. Le Roux. *Compt. Rend.* CXIX, 211.
601. De l'absorption de la lumière dans les milieux isotropes et cristallisés. G. Moreau. *Compt. Rend.* CXIX, 327.
602. De la périodicité des raies d'absorption des corps isotropes. G. Moreau. *Compt. Rend.* CXIX, 422.
603. Intégration des équations de la lumière dans les milieux transparents et isotropes. E. Carvallo. *Compt. Rend.* CXIX, 1008.

P.**Parabel.**

604. Parabole enveloppe d'une corde de strophoïde. E. N. Barisien. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 8.
605. Sur quelques propriétés de la parabole et de ses inverses. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 281.
606. Propriétés de deux paraboles. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 308.
607. Propriétés de la parabole. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 316.
608. Remarques sur le théorème de Frégier. And. Cazamian. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 322.
609. Sur une parabole intimement liée à une conique donnée et à un point donné de son plan. G. Leinekugel. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 482.

Pendel.

610. Sur la pendule à tige variable. L. Lecornu. *Compt. Rend.* CXVIII, 132.
611. Sur le mouvement de deux points reliés par un ressort. L. Lecornu. *Compt. Rend.* CXVIII, 398.
612. Sur un système de deux pendules reliés par un fil élastique. Luc. de la Rive. *Compt. Rend.* CXVIII, 401.

Planimetrie.

613. Considérations sur la géométrie. E. Lemoine. *N. ann. math. Série 3*, XIII, 155.
614. Sur trois droites serapportant à un quadrilatère donné et passant par un même point. Moret-Blanc. *N. ann. math. Série 3*, XIII, Exerc. 24.
Vergl. Dreiecksgeometrie. Kreis.

Potential.

615. Sur une propriété générale des champs admettant un potentiel. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVI, 1244.
616. Propriété générale d'un champ quelconque n'admettant pas de potentiel. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVI, 1355.
617. Sur une propriété générale des champs électriques et magnétiques. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVI, 1437.
618. Calcul des forces auxquelles sont soumis les corps placés dans un champ électromagnétique. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVII, 126.
619. Calcul des forces électromagnétiques suivant la théorie de Maxwell. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVII, 1065.
620. Sur le mode de transformation du travail en énergie électrique. Vaschy. *Compt. Rend.* CXVIII, 1249.
621. Sur un théorème relatif aux fonctions harmoniques de plusieurs variables réelles. G. D. d'Arone. *Compt. Rend.* CXVIII, 342.
Vergl. Differentialgleichungen 380, 381. Elektrizität. Magnetismus.

R.**Reihen.**

622. Sur les caractères de convergence des séries. Hadamard. *Compt. Rend.* CXVII, 844.
623. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions croissantes. J. Hadamard. *Acta Math.* XVIII, 319, 421.

624. Sur la différentiation des séries trigonométriques. M. Lerch. *Compt. Rend.* CXIX, 725.
625. Sur le développement en série des fonctions implicites. Worontzoff *N. ann. math. Série 3*, XIII, 167.
626. Sur la possibilité de définir une fonction par une série entière divergente. H. Padé. *Compt. Rend.* CXVI, 686.
627. Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles. H. Padé. *Acta Math.* XVIII, 97.
628. Généralisation de la série de Lagrange. E. Amigues. *Compt. Rend.* CXVI, 368, 429.
629. Sur une nouvelle méthode d'approximation. E. Jablonski. *Compt. Rend.* CXVI, 19.
630. Sur la sommation rapide de certaines séries peu convergentes (séries harmoniques alternées). A. Janet. *Compt. Rend.* CXVIII, 239.
Vergl. *Astronomie* 323, 324. *Cylinderfunctionen. Gleichungen* 469. *Kugel-functionen.*

S.**Stereometrie.**

631. Sur le produit d'asymétrie. Ph. A. Guye. *Compt. Rend.* CXVI, 1378, 1451.
Vergl. *Mehrdimensionale Geometrie.*

Substitutionen.

632. Sur les propriétés des groupes de substitution dont l'ordre est égal à un nombre donné. E. Maillet. *Compt. Rend.* XVIII, 1187.
633. Sur les groupes de substitutions isomorphes aux groupes symétriques ou alternés. Maillet. *Compt. Rend.* CXIX, 362.

T.**Transformationsgruppen.**

634. Sur les lois de réciprocités et les sous-groupes de groupe arithmétique. X. Stouff. *Compt. Rend.* CXVI, 308.
635. Sur la structure des groupes simples finis et continus. Cartan. *Compt. Rend.* CXVI, 784.
636. Sur la structure des groupes finis et continus. Cartan. *Compt. Rend.* CXVI, 962.
637. Sur la réduction de la structure d'un groupe à sa forme canonique. E. Cartan. *Compt. Rend.* CXIX, 639.
638. Sur un groupe simple à quatorze paramètres. F. Engel. *Compt. Rend.* CXVI, 766.
639. Sur une application de la théorie des groupes de Lie. Drach. *Compt. Rend.* CXVI, 1041.
640. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. J. Bendo. *Compt. Rend.* CXVIII, 1188.
641. Sur les problèmes de Dynamique dont les équations différentielles admettent une transformation infinitésimale. P. Stäckel. *Compt. Rend.* CXIX, 508, 723, 1189. — O. Staude *ibid.* 903.
642. Sur les transformations infinitésimales des trajectoires des systèmes. P. Painlevé. *Compt. Rend.* CXIX, 637.
643. Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. Em. Picard. *Compt. Rend.* CXIX, 584.
Vergl. *Differentialinvarianten. Functionen* 438.

W.**Wärmelehre.**

644. Sur l'équation de Van der Waals et la démonstration du théorème des états correspondants. G. Meslin. *Compt. Rend.* CXVI, 135.
645. Sur le troisième principe de l'énergétique. H. Le Chatelier. *Compt. Rend.* CXVI, 1504. CXVII, 513.
646. Sur le troisième principe de l'énergétique. W. Meyerhoffer. *Compt. Rend.* CXVII, 363.
647. Sur la théorie cinétique du gaz. H. Poincaré. *Compt. Rend.* CXVI, 1017, 1165.
648. Sur l'interprétation cinétique de la fonction de dissipation. Ladisl. Nathanson. *Compt. Rend.* CXVII, 539.

649. Commentaire aux principes de la Thermodynamique. P. Duhem. Journ. Mathem. Série 4, IX, 293. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 526.]
650. Sur la loi générale et les formules de l'écoulement de la vapeur d'eau saturée. H. Parenty. Compt. Rend. CXVI, 1120.
651. Thermodynamique des gaz; approximations composées de la loi de Joule et des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. J. Andrade. Compt. Rend. CXVIII, 64.
652. La loi de Joule et la loi de Mariotte dans les gaz réels. J. Andrade. Compt. Rend. CXVIII, 244.
653. Sur la pression intérieure dans les gaz. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXVIII, 326.
654. Sur la pression interne dans les fluides et la forme de la fonction $\varphi(p, v, t) = 0$. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXVIII, 566.
655. Variation de la tension superficielle avec la température. H. Pellat. Compt. Rend. CXVIII, 1193.
656. Détermination expérimentale directe de la chaleur spécifique de vapeur saturée et de la chaleur de vaporisation interne. E. Mathias. Compt. Rend. CXIX, 849.
- Vergl. Cylinderfunctionen.

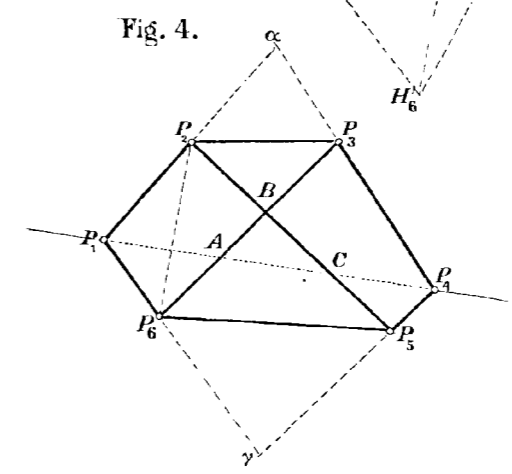
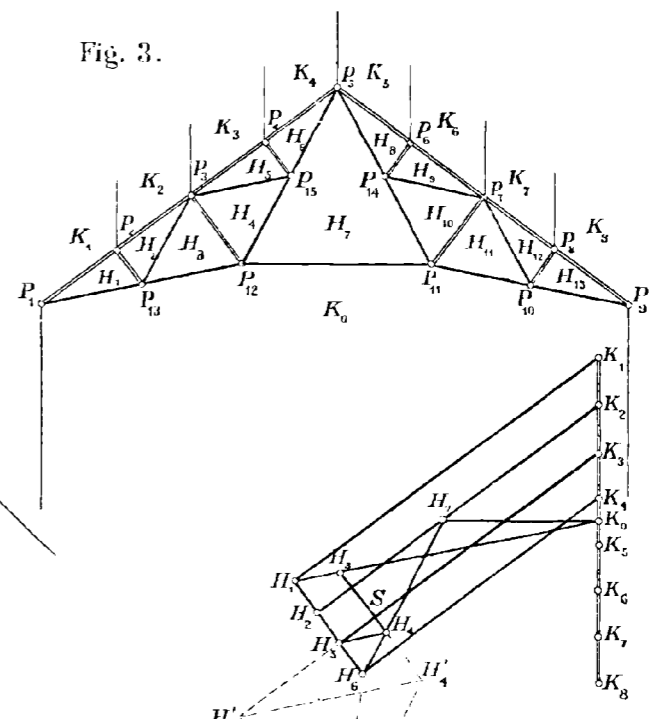
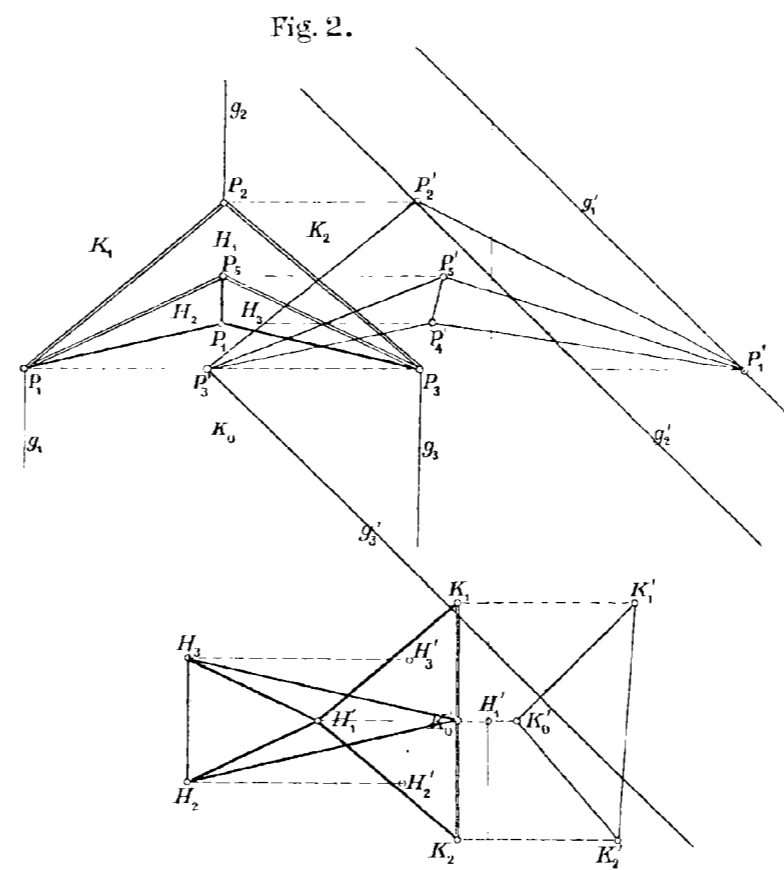
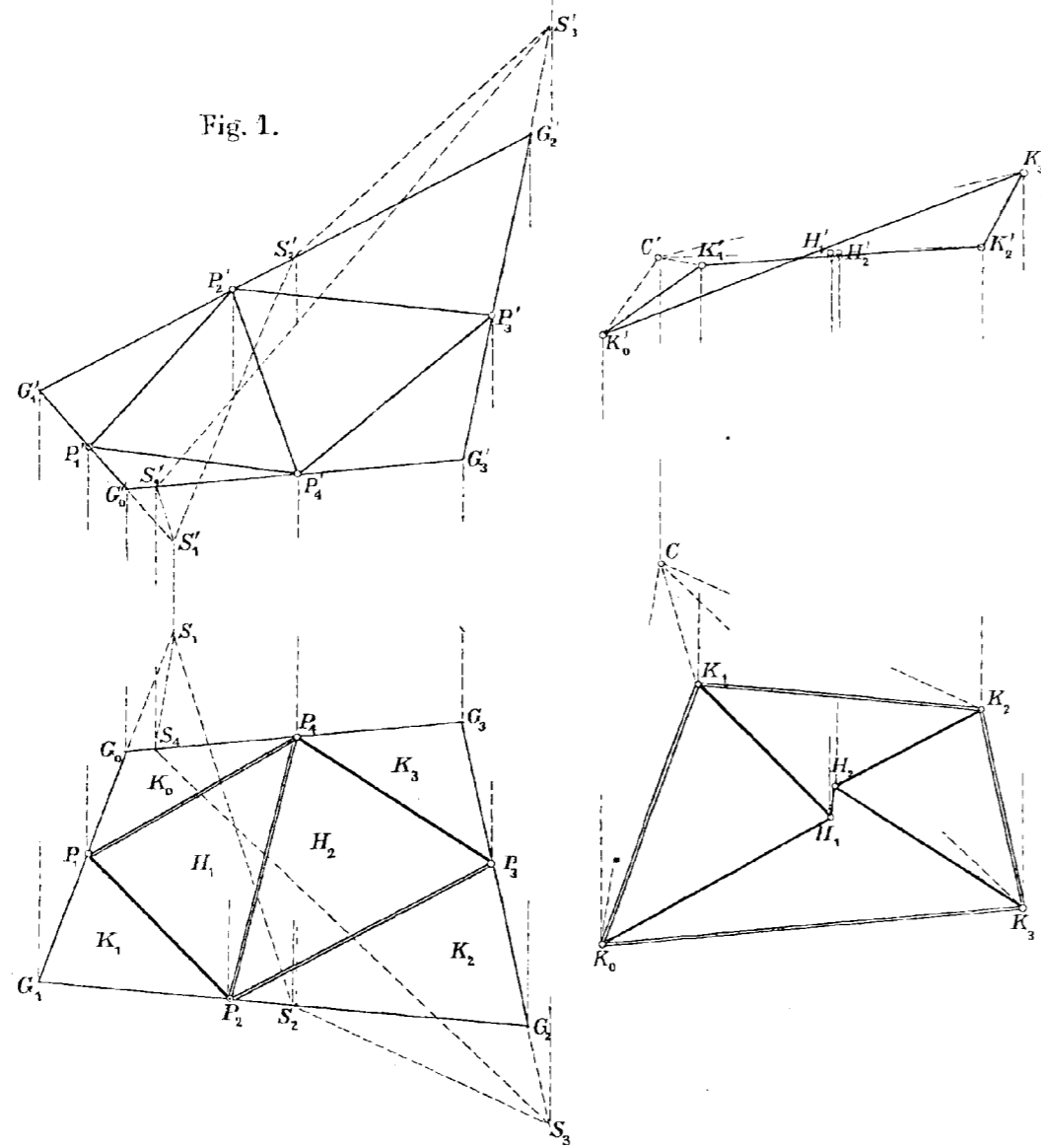
Wahrscheinlichkeitsrechnung.

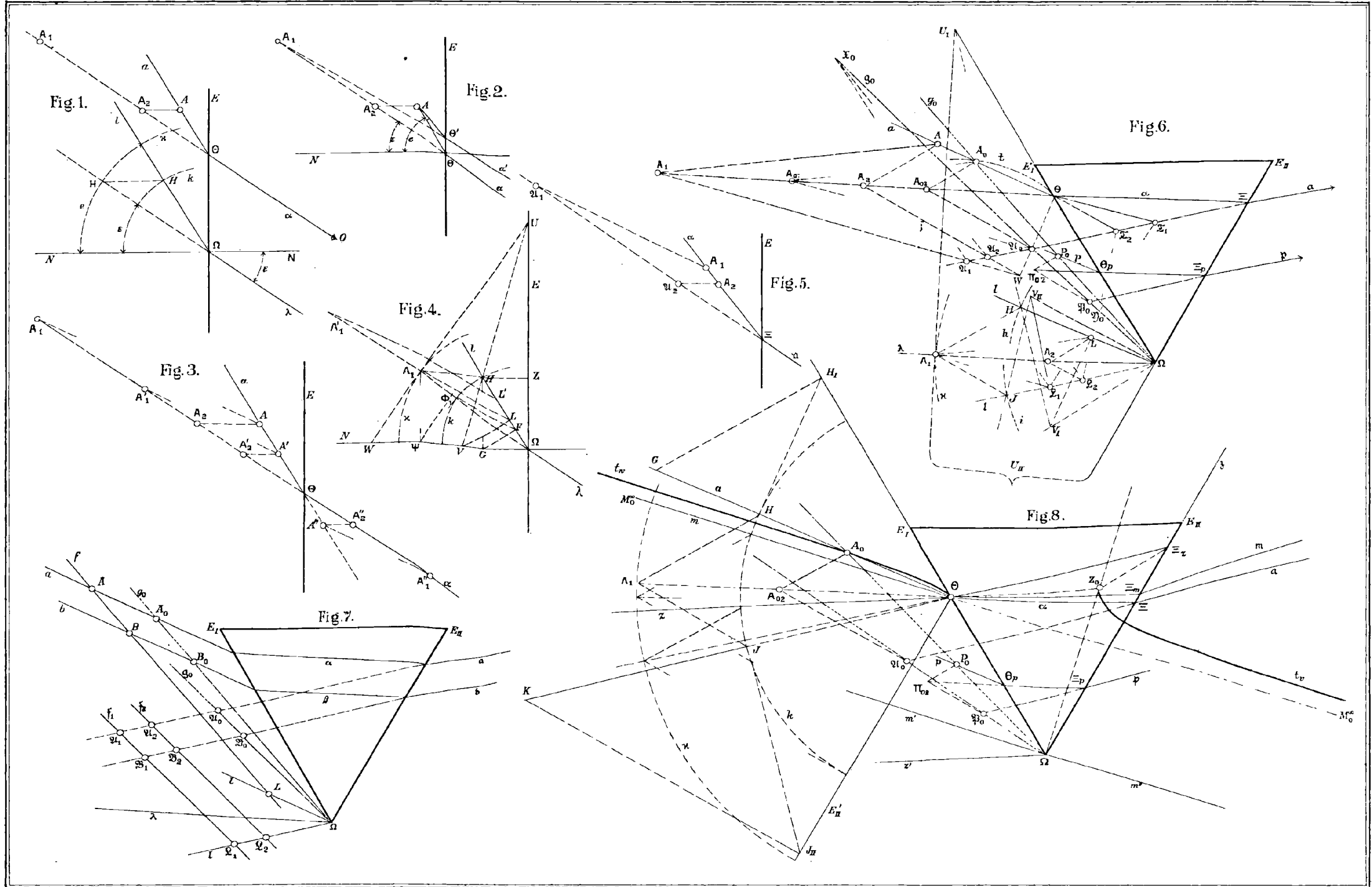
657. Sur la théorie des caisses de pension. L. Lindelöf. Acta Math. XVIII, 89.
658. Sur l'application répétée du théorème de Bernoulli. J. Andrade. Compt. Rend. CXVI, 1281.
659. Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXVIII, 517.
660. Problème de probabilité. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 13.

Z.

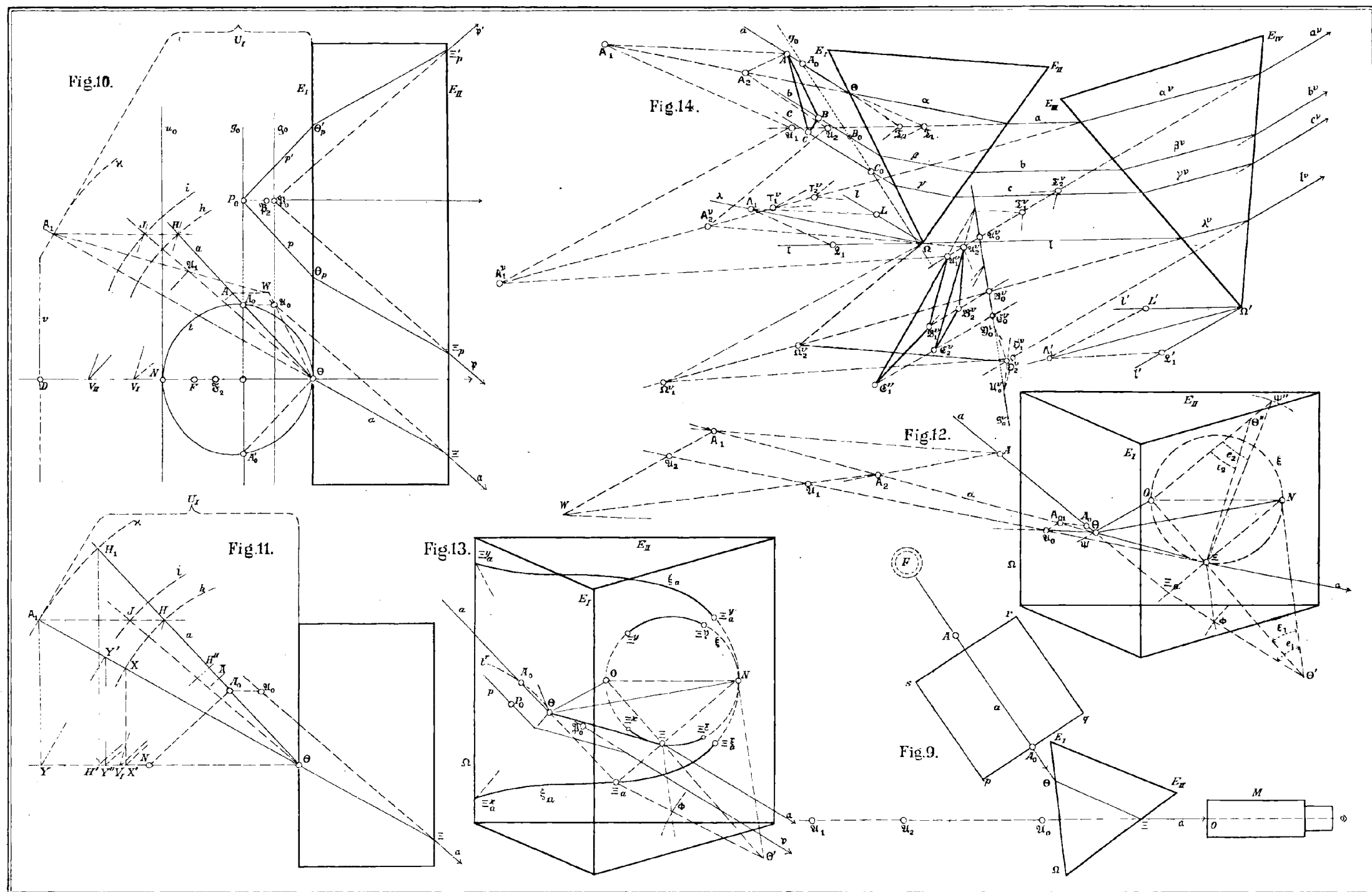
Zahlentheorie.

661. Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x . Cahen. Compt. Rend. CXVI, 85.
662. Sur le nombre allant indéfiniment croissant avec x des nombres premiers entre x et $(1+h)x$, quelque petite que soit la constante h . Cahen. Compt. Rend. CXVI, 490.
663. Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. H. v. Koch. Compt. Rend. CXVIII, 850.
664. Sur une formule empirique pour le $n^{\text{ième}}$ nombre premier donnée par Mr. Pervouchine. E. Cesàro. Compt. Rend. CXIX, 848.
665. L'expression du nombre des classes déduite de la transformation des fonctions elliptiques. P. de Segurier. Compt. Rend. CXVIII, 1407.
666. Sur les intégrales définies suivant les diviseurs. N. Bougaïeff. Compt. Rend. CXIX, 1259.
667. Nouveaux théorèmes d'arithmétique. P. Pepin. Compt. Rend. CXIX, 397.
668. Sur une erreur relevée dans la Théorie des nombres de Legendre. Dujardin. Compt. Rend. CXIX, 843.
669. Démonstration inexacte du théorème de Fermat sur l'impossibilité de $x^n + y^n = z^n$. G. Korneck. Compt. Rend. CXVIII, 841.





Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 40. Jahrg. 1895. 2. Heft.



Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. 40. Jahrg. 1895. 2. Heft.

