Double de
4 II Ti° ××

# MÉMOIRE

SUR

# L'ÉTAT PRIMITIF

ET SUR

L'ORGANISATION DE L'UNIVERS.

# MÉMOIRE

SUR

# L'ÉTAT PRIMITIF

ET SUR

## L'ORGANISATION DE L'UNIVERS,

PAR M. LENGLET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTÉCHNIQUE, CAPITAINE DU GÉNIE, EN RÉSIDENCE A BAPAUME.



SE VEND A PARIS,

Chez BACHELIER, quai des Augustins, n° 55,
Et chez TECHENER, Colonnade du Louvre, n°. 12.

JUIN 1837.

DOUAI, IMPRIMERIE DE V. ADAM, RUE DES PROCUREURS.

# PRÉFACE.

La plupart des découvertes paraissent impossibles avant qu'on y soit arrivé. C'est en être bien près que de commencer à en entrevoir la possibilité. Il y a cinquante ans, on ne savait rien en géologie, et l'on n'eut osé prévoir qu'elle deviendrait une science positive. On n'a, jusqu'à présent, aucune notion certaine en cosmologie, et l'on est porté à penser que ses mystères sont, pour toujours, impénétrables. Pourtant, j'en ai la conviction, ce mémoire contient les bases de cette science nouvelle.

Je n'ai pas la prétention d'avoir poussé, cette science jusqu'à ses dernières limites. Je sais que j'y laisse bien des choses à faire; et que, parmi celles que j'ai faites, plusieurs pourront exiger des modifications. Mon but, en publiant cet ouvrage, n'est pas seulement, de répandre des vérités nouvelles; il est, aussi, de provoquer la discussion et de m'éclairer par elle. Je recevrais donc, avec reconnaissance, les observations, imprimées ou manuscrites, auxquelles ma théorie pourrait donner lieu.

Cette théorie n'est pas fondée sur des hypothèses: Je pars de ce qu'on sait pour arriver à ce qu'on ne sait pas. M'appuyant sur l'état actuel des astres, j'établis, par les lois admises en physique, qu'ils ont été nécessairement vaporisés. En remontant plus haut dans le passé, je trouve cette vapeur de plus en plus diffuse. Antérieurement encore, elle ne formait qu'une seule masse, remplissant l'espace infini, et s'écartant de moins en moins d'une répartition uniforme. Mais l'uniformité rigoureuse ne se rencontre qu'à une époque *infiniment* éloignée de nous.

Ces premières idées, dont le développement remplit dix pages de ce mémoire, ne sont guère que la généralisation de celles qui ont été émises par Herschell et Laplace. Mais la démonstration de ces vérités m'appartient toute entière.

Pour completter la théorie, et pour contrôler la démonstration précédente ; il fallait expliquer comment, de l'état primitif reconnu, a dû nécessairement résulter l'état actuel.

L'explication, que Laplace a donnée de la formation du système solaire, quelqu'ingénieuse qu'elle soit, est inadmissible en définitive. Je consacre, à le prouver, quelques pages de calculs (ADD. XIV) ; dérogeant, en ce point, à la régle, que je m'étais imposée, de m'attacher à démontrer des vérités et non à réfuter des erreurs.

La théorie, développée dans cet ouvrage, embrasse, sans effort, les plus petites particularités de chaque phénomène : Ainsi, en expliquant pourquoi, dans chaque système, les mouvemens de rotation et de translation sont dirigés dans le même sens ; elle montre, encore, pourquoi c'est dans les planètes supérieures qu'on doit rencontrer, à la fois, la moindre densité et la rotation la plus rapide; pourquoi les satellites ont moins de densité que leur planète ,et comment le satellite inférieur de chaque planète peut être, sensiblement, ou même absolument, privé d'atmosphère. D'autres phénomènes sont encore expliqués dans ce mémoire : l'incandescence actuelle ou passée de tous les astres, l'affaiblissement graduel de certaines étoiles ; l'apparition subite de ces astres, jusqu'alors inconnus et qui bientôt s'effacent pour toujours.

Je ne prolongerai pas cette énumération. La table peut y suppléer en partie. Le lecteur n'y verrait, d'ailleurs, que des promesses ; et les hommes occupés de sciences se laissent peu séduire par de simples promesses: Avares de leur tems, ils ne lisent, le plus souvent, que des ouvrages déjà connus. Pour les engager à s'écarter de cette habitude, en faveur de ce mémoire ; je reproduis, ici, en peu de mots, l'une des solutions qui peuvent le plus aisément se détacher de l'ensemble. S'ils la trouvent exacte, ils y verront, sans doute, quelque probabilité pour retrouver la même exactitude dans les autres parties de ce travail.

### EXPLICATION DES PARADOXES COMÉTAIRES.

*Principes.*— Quelque faible que soit l'attraction centrale d'une comète, son atmosphère, en vertu de cette attraction, tendrait à prendre une forme sphérique. Par l'effet de l'attraction solaire, cette forme doit s'allonger dans le sens du rayon vecteur, mais en restant sensiblement symétrique par rapport au noyau.

L'atmosphère de la comète doit se dilater quand elle s'approche du soleil et se contracter quand elle s'en éloigne.

Ces principes étant des conséquences nécessaires des lois de la physique, toutes les apparences contraires ne peuvent être que des illusions. Ce sont ces illusions qu'il s'agit d'expliquer.

*Apperçu de l'explication.*— Les gaz et les vapeurs proprement dites sont invisibles. Une atmosphère ne peut devenir visible que dans les parties plus ou moins chargées de brouillards, ou, si l'on veut, de vapeurs vésiculaires.

Déjà l'on entrevoit que les brouillards cométaires, doivent se former, principalement, du côté qui se refroidit; c'est-à-dire, du côté opposé au soleil. On conçoit que, ces brouillards se dissipant en partie quand la comète s'approche du soleil, sa queue et sa nébulosité doivent alors diminuer en étendue et en intensité, quoique l'atmosphère entière se dilate.

*Composition atmosphérique.*— La pression atmosphérique ne dépend pas, seulement, de la masse de l'atmosphère, mais encore de l'attraction éprouvée par ses différentes couches. Cette pression a nécessairement peu d'intensité dans les comètes qui n'exercent, sur ces couches, qu'une attraction très faible. La totalité, ou la majeure partie de l'eau qu'elles contiennent, doit donc être volatilisée; et leur atmosphère doit se composer principalement de vapeur.

La pesanteur spécifique de notre atmosphère est presque double de celle de la vapeur d'eau. Les vésicules de brouillard, formés de vapeur renfermée dans des enveloppes liquides, peuvent, suivant le rapport variable des quantités de vapeur et de liquide, se trouver plus legères ou plus pesantes que l'air; et par suite, s'y élever ou s'y précipiter. C'est ce qui produit une grande complication dans nos phénomènes atmosphériques.

Au contraire, chaque vésicule acquiert, dès sa formation, un poids spécifique supérieur à celui d'une atmosphère formée principalement de vapeur. Tous les brouillards doivent donc y descendre. C'est de là que résulte, comme nous allons le voir, la simplicité et la permanence des phénomènes observés dans l'atmosphère des comètes.

*Queues des comètes.*— Le noyau de la comète s'échauffe dans l'hémisphère exposé au soleil et se refroidit dans l'hémisphère opposé. Une condensation de vapeur doit donc s'opérer dans la couche atmosphérique en contact avec ce dernier hémisphère. Le vide, qui en résulte, se remplit par l'affaissement des parties supérieures et par le rapprochement des parties lattérales.

Chaque couche descendue éprouve une pression plus forte que dans la région qu'elle vient de quitter; elle apporte, d'ailleurs, de cette région, une température inférieure à celle des parties latérales. Elle doit, donc, éprouver à son tour, une condensation de vapeurs; d'où résulte un vide nouveau et un nouvel affaissement. C'est ainsi que le brouillard se propage jusqu'à la partie supérieure de l'atmosphère.

Les globules de brouillard, ainsi formés, tendent à descendre, en vertu de leur pesanteur spécifique. Ils communiquent une partie de leur mouvement descendant à toute la colonne atmosphérique qu'ils traversent.

*Nébulosité.* — Le courant descendant, arrêté par le noyau, reflue sur toute la surface de l'hémisphère éclairé, en soulevant les couches échauffées par leur contact avec cet hémisphère et par conséquent plus légères.

Le brouillard, charrié par ce courant, se dissipe en peu de temps dans le voisinage de la surface échauffée et ne se conserve qu'à une certaine hauteur. La nébulosité forme ainsi une enveloppe sphérique séparée du noyau par une atmosphère transparante. Elle doit donc paraître plus intense, à la circonférence du disque visible, qu'auprès de son centre.

Le fluïde inférieur de ce courant horisontal, dilaté par la chaleur, refoulé par le courant descendant, tend sans cesse à soulever la nébulosité; mais en même temps les globules, qui la composent, tendent à descendre par leur excédent de densité. Elle ne peut se maintenir qu'à la hauteur où ces deux forces se font équilibre.

Les courans divergens partis de la queue, se transforment, ainsi, partiellement, en des courans ascendans, qui traversent la nébulosité et l'éclaircissent à mesure qu'elle s'avance horisontalement. Enfin, à leur point de concours, c'est à dire, au point le plus directement exposé aux rayons solaires, tout ce qu'ils ont conservé de force est employé à faire refluer verticalement le fluïde, et c'est en ce point que le mouvement ascendant est le plus prononcé. Aussi le brouillard ne peut-il y conserver qu'une très faible intensité.

*Anneaux multiples*—Si le noyau est fortement échauffé, la couche inférieure s'échauffe rapidement. Le courant descendant au lieu de la refouler simplement, pourra de nouveau faire irruption sous cette couche, soulevant à la fois sa partie transparante et sa nébulosité. Le même phénomène, en se répétant, peut former successivement plusieurs anneaux; mais il n'en peut subsister qu'un petit nombre à la fois; car les brouillards, soumis à une moindre pression à mesure qu'ils s'élevent, s'affaiblissent graduellement et finissent par se dissiper.

—La même cause doit, à plus forte raison, maintenir une transparence complète dans les points, plus élevés, de la partie ascendante de cette atmosphère. Cette partie, sans cesse poussée de bas en haut, dilatée par les brouillards qui se vaporisent, tend à s'étendre latéralement; tandis que la colonne descendante est contractée, par les condensations qui s'y opèrent, et par l'accroissement progressif de la pression qu'elle éprouve. C'est pourquoi ces deux parties de l'atmosphère, avec des bases égales, occupent, d'ailleurs, des espaces si différens.

—Le fluïde transparent, porté par son mouvement ascendant jusqu'à la limite supérieure de l'atmosphère, s'y écoule, à la manière d'un liquide, vers le point où l'affaissement s'opère; et rentre, successivement, dans le courant descendant.

— Si la pression atmosphérique est assez forte pour maintenir une certaine quantité d'eau à l'état de liquide parfait, le courant descendant en déposera continuellement à la surface de l'hémisphère obscur, d'où elle s'écoulera, vers l'hémisphère éclairé, pour y être vaporisée. Dans le cas contraire, ce sera la vaporisation seule, des globules apportés à la nébulosité, qui suppléera aux condensations de la colonne descendante.

— Pourquoi la queue incline-t-elle constamment vers la région que l'astre vient de quitter? Pourquoi présente-t-elle l'apparence d'un cône creux? Dans quelles circonstances se produisent les queues multiples? Quelle est la cause des secteurs lumineux?

Si l'on veut connaître immédiatement la solution de ces questions, on la trouvera dans le texte même (du nº 144 au nº 150 et du nº 157 au nº 161).

Mais est-il certain que les comètes contiennent de l'eau? Ne sont-elles pas composées de substances entièrement différentes de celles que nous rencontrons sur la terre? Pourquoi les substances, les plus volatiles, s'y trouvent-elles en plus grande proportion que dans les planètes? A ces dernières questions, je ne puis répondre que par l'ouvrage entier.

Quelques autres parties de ce mémoire pourraient se lire indépendamment de l'ensemble: celles qui concernent les aërolites (du nº 161 au nº 167), la formation des brouillards (du nº 48 au nº 54), le magnétisme terrestre (du nº 216 au nº 223).

Parmi les calculs, ceux qui ont rapport à la limitation des atmosphères (ADD. 1re) pourraient aussi se lire isolément.

# AVERTISSEMENT,

*à lire avant l'ouvrage.*

L'origine de ce travail est un mémoire, très-court, rédigé à la hâte pour le congrès de Douai. Revu, ensuite, pour être inséré dans le compte rendu de ce congrès, il s'est trouvé plus que décuplé. Les additions n'ont été achevées que depuis lors. Deux planches, également ajoutées, faciliteront l'intelligence des démonstrations.

On n'a pu indiquer, dans le texte, les renvois aux additions qui n'ont été imprimées qu'un an plus tard. On y a suppléé par la réimpression de la table, où l'on trouvera cette indication.

La première planche concerne les additions.

La seconde se rapporte à l'établissement des mouvemens célestes. Nous en donnons (add. XV et dernière), une explication assez détaillée pour permettre au lecteur, qui voudrait prendre une idée de l'ensemble en évitant les difficultés, de sauter, dans le texte, ce qui se rapporte à ces mouvemens, (du n° 26 au n° 47 et du n° 65 au n° 104).

## Errata.

N° 30, au lieu des mots *tournée, éclairée, obscure,* lisez : *tourné, éclairé, obscur.*

N° 35, ligne 7, au lieu de *peuvent*, lisez : *peut.*

N° 46, ligne 6, au lieu de *si force*, lisez : *si la force.*

Page 26, ligne 20, au lieu de *ait*, lisez : *eut.*

Page 30, lignes 36 et 37, au lieu de *ne doit plus voir*, lisez : *ne peut plus devoir.*

Page 30, ligne 38, au lieu de *duex*, lisez : *deux.*

N° 72, ligne 1re, au lieu de *quand une partie renversée se détache*, lisez : *quand une partie se détache.*

Page 33, ligne 11, au lieu de *elle*, lisez : *lui.*

Page 39, ligne 6, après le mot *période*, lisez : *de retardement.*

N° 150, ligne 8, au lieu de *amosphère*, lisez *atmosphère.*

# TABLE DES MATIÈRES.

# MÉMOIRE
## SUR
## L'ÉTAT PRIMITIF ET SUR L'ORGANISATION DE L'UNIVERS.

### RÉFLEXION PRÉLIMINAIRE.

L'état actuel de l'Univers est une conséquence nécessaire de son état antérieur; de même que l'état, qui doit suivre, sera la conséquence de l'état présent. Il entre dans le domaine de la science, de saisir cet enchaînement de l'effet à la cause. Elle a préparé les matériaux : Déjà elle nous dévoile en partie l'état antérieur de notre globe ; déjà Laplace et Herschel ont jeté en avant des conjectures qui, sur plusieurs points, s'approchent de la vérité. Il ne s'agit plus, pour résoudre un grand problème, que d'oser être conséquent, et d'appliquer les lois connues de la physique, sans se laisser fasciner le jugement par l'immensité des distances et des temps.

## PREMIÈRE PARTIE.

### ÉTAT PRIMITIF DE L'UNIVERS.

Chap. Ier.—*Causes qui peuvent influer sur la température des astres.*

1. *Tout astre incandescent perd du calorique.*—Tout corps éprouve une diminution de calorique, quand il en émet d'avantage qu'il n'en reçoit du dehors *. Le soleil répand une abondante chaleur ; en échange, il n'en reçoit, des étoiles et de l'espace, qu'une quantité inappréciable ; car, sur une surface donnée, cette quantité est la même que pour la terre. Donc il y a, pour le soleil, diminution de calorique. Ce que je dis ou dirai de cet astre, s'applique également à la généralité des étoiles, qui n'en diffèrent pas par leur nature.

2. Une diminution de calorique peut coïncider avec une élévation de température; et cela arrive, toutes les fois que le calorique latent, devenu sensible, dépasse le calorique perdu. Dans la combustion, par exemple, il se perd du calorique, et les composés nouveaux qui en résultent, acquièrent cependant une température

* Nous raisonnons dans l'hypothèse de l'*émission*, qui est encore la plus usuelle. La traduction dans un nouveau langage, sera facile à faire, quand il sera plus généralement répandu.

bien supérieure, à la température primitive de leurs élémens. Pour suivre la marche de la température des astres, il ne suffit donc pas de considérer les pertes que leur fait éprouver l'émission ; il faut encore avoir égard à toutes les causes qui peuvent y dégager du calorique, y transformer le calorique latent en calorique sensible.

3. *Causes de dégagement du calorique.*—Les causes de dégagement du calorique sont : L'électricité, les frottemens, la combustion ou les autres combinaisons chimiques, la condensation, les changemens d'état dans les corps.

4. *Electricité.*—L'électricité peut elle-même être développée par la plupart des causes qui dégagent directement le calorique. Mais nous pouvons alors nous dispenser de nous en occuper, et comprendre implicitement la chaleur qui peut en provenir, dans celle qui est produite par ces causes. Restera donc à considérer séparément, l'électricité développée par le simple contact.

Si les corps en contact sont disposés de telle sorte qu'un courant puisse s'établir, la chaleur se manifeste au lieu où les deux électricités se réunissent.

Le contact des parties diversement échauffées d'une même substance, ne peut produire qu'un courant, et une chaleur, très faibles. On observe un sembable courant à la surface de la terre, dont les parties sont successivement échauffées par le soleil, et refroidies par son absence. Il agit sur l'aiguille aimantée, mais il ne produit pas d'effet calorifique assez marqué pour avoir été observé jusqu'ici. Si la même cause se retrouvait dans le soleil, on ne pourrait lui attribuer qu'une faible influence sur sa température. Mais, on ne peut même concevoir cette cause, dans un astre qui ne reçoit pas sa chaleur du dehors.

Reste donc le contact de substances différentes, qui transformerait le soleil en une immense pile de volta. Mais, observons que toute pile s'use nécessairement, parce qu'elle renferme en elle-même une cause inévitable de destruction : l'affinité des substances qui la composent. L'action de la pile est d'autant plus forte que cette affinité est plus grande ; mais aussi la destruction en devient d'autant plus rapide. Si les élémens de nos piles se combinent en peu de temps, avec quelle rapidité cette union ne devrait-elle pas s'opérer entre les élémens d'une pile incandescente ?

5. *Frottemens.*—Les frottemens sont peu considérables dans les fluides élastiques et dans les liquides. Ils n'y développent

que peu ou point de calorique. Ils sont susceptibles d'en dégager davantage dans les solides ; mais ils y ont lieu plus difficilement et moins fréquemment. Un astre solidifié en totalité ou en partie, peut, sans doute, éprouver de vastes bouleversemens; de grandes masses peuvent s'y déplacer, ou même être lancées au loin; mais, dans tous ces mouvemens, on n'aperçoit que des frottemens superficiels et momentanés. On ne voit aucune cause qui puisse produire un frottement, violent et non interrompu, des plus petites parties les unes contre les autres. Or, un tel frottement serait seul capable de produire et d'entretenir l'incandescence.

Ainsi, qu'un astre soit solide, liquide ou gazeux, rien n'autorise à penser que les frottemens influent notablement sur sa température.

6. *Combinaisons chimiques.* — Les combinaisons chimiques provenant de fortes affinités, sont les seules qui dégagent une grande chaleur. Or, sous une température assez élevée pour détruire la cohésion, ou ne lui laisser que peu de force, ces combinaisons s'opèrent en général instantanément, pourvu que les molécules soient suffisamment rapprochées. On conçoit donc des combinaisons successives dans une masse de vapeur qui se condense ; il s'en opérera tout-à-coup un grand nombre si la masse vient à se liquéfier ; mais on n'en peut admettre qu'un très petit nombre, dans une masse incandescente, qui est depuis longtemps liquide ou solide. Elles ne peuvent plus guère, d'ailleurs, avoir lieu qu'entre des élémens déjà engagés dans d'autres combinaisons : Les décompositions, qui doivent s'opérer préalablement, diminuent la chaleur dégagée, et peuvent même la rendre nulle ou négative ; car un corps, en se décomposant, fait passer à l'état latent, tout le calorique dégagé par l'union de ses élémens.

Ainsi, relativement aux astres qui n'éprouvent ni condensation ni liquéfaction, nous pouvons négliger, comme peu sensible, la chaleur due aux combinaisons chimiques. Dans ceux où s'opère le premier de ces phénomènes, ou tous deux à la fois, les combinaisons chimiques viennent concourir avec eux pour élever la température ; nous pouvons donc comprendre leur effet dans celui de ces deux causes, dont elles dépendent elles-mêmes ; et, dans ce cas encore, nous n'aurons pas à nous en occuper spécialement.

7. *Condensation.*—La condensation peut produire dans les corps des dégagemens considérables de calorique. On sait qu'elle

peut y développer l'incandescence : l'air comprimé rapidement, allume l'amadou ; des parcelles incandescentes se détachent du fer comprimé par le choc d'un corps plus dur. La quantité totale du calorique dégagé, dépend du degré de rapprochement opéré dans les molécules, et non de la rapidité avec laquelle il s'opère. Néanmoins les petits corps n'arrivent pas jusqu'à l'incandescence, quand ils sont comprimés lentement, parce qu'une grande partie de la chaleur s'y perd à mesure qu'elle se dégage. Mais si les corps ont une masse et un volume, considérables, qui proportionnent la lenteur des pertes à celle du dégagement, une condensation peu rapide, peut y déterminer une grande élévation de température.

Si donc la masse entière des astres a éprouvé d'énormes condensations, cette cause seule a été capable d'y développer une vive incandescence.

8. La liquéfaction de la vapeur d'eau dégage une quantité de chaleur suffisante pour élever d'environ 550° la température du liquide produit. Le dégagement de calorique doit être vraisemblablement bien plus considérable, quand des vapeurs, beaucoup plus rares que celle de l'eau, se transforment en liquides plus denses que l'eau liquéfiée.

Si donc une grande partie de la substance des astres a éprouvé ce changement d'état, il a dû puissamment concourir avec la condensation, à élever leur température.

La solidification, quoique dégageant, en général, moins de chaleur que la liquéfaction, est une cause trop puissante encore pour être négligée, dans les astres où elle a pu se manifester.

9. En définitive nous ne trouvons d'autres causes possibles de la chaleur des astres que la condensation et les changemens d'état, ou quelques phénomènes accessoires, qui accompagnent les précédens, et ne peuvent que concourir avec eux.

## Chap. II.—*Effets des pertes de calorique, dans les différentes classes de corps.*

10. *Divers états des corps.*—Nous avons à considérer les corps sous trois états : l'état solide, l'état liquide et celui de fluide élastique.

On distingue ordinairement deux classes de fluides élastiques, les vapeurs et les gaz. Ceux qu'on appelle gaz, ne sont que des vapeurs plus difficiles à liquéfier ; nous admettrons néanmoins cette distinction, mais en la modifiant un peu : nous ne désignerons, sous le nom de *vapeurs*, que les fluides élastiques qui, sous leur température et leur pression actuelles, ont déjà commencé ou vont commencer à se liquéfier. Les vapeurs encore éloignées de la liquéfaction, suivant, dans leurs tensions, la même loi que les gaz eux-mêmes, il nous est nécessaire de les comprendre sous cette dernière dénomination.

Ainsi, nous n'attachons à cette distinction des gaz et des vapeurs aucun sens absolu ; et telle substance, appelée vapeur sur la terre, deviendrait pour nous un gaz dans le soleil.

11. *Effets des pertes de calorique.*—Toute perte de calorique amène, évidemment, un abaissement de température, dans les solides et dans les liquides. Il en est de même pour les fluides élastiques renfermés en vases clos.

L'expérience ne nous apprend pas ce qui se passe dans ces fluides, quand ils sont abandonnés dans l'espace, par masses isolées, dont la pression n'est due qu'à leur propre attraction ; mais nous pourrons le déduire de leurs propriétés connues.

12. Dans tout fluide élastique, une perte de calorique diminue la tension, sans changer immédiatement la pression. Si la masse fluide est isolée et en équilibre, elle doit donc se contracter. Chaque couche, ainsi rapprochée du centre, en est plus fortement attirée ; elle exerce, par suite, une pression plus forte sur les couches inférieures. Cette augmentation générale de pression dans la masse, tend à y produire une nouvelle contraction, d'où résulterait encore une nouvelle augmentation de pression. Cette progression ne peut s'arrêter, tant que l'équilibre se rétablisse entre la pression et la tension du fluide.

Toute contraction d'une masse fluide dégage du calorique ; par la condensation même si cette masse est à l'état de gaz, par une liquéfaction partielle si elle se compose de vapeurs, et enfin par la combinaison de ces deux causes si elle renferme à la fois des gaz et des vapeurs. Ce dégagement de calorique se prolonge tant que la masse continue à se resserrer, c'est-à-dire aussi, tant que la tension du fluide soit arrivée à égaler la pression qu'il éprouve.

13. Dans les vapeurs, la tension ne dépend que de leur température. Il faut donc nécessairement une température plus élevée, pour que cette tension puisse égaler une pression plus forte. Ainsi, la contraction, commencée par une perte de calorique, ne peut s'arrêter, dans une masse de vapeurs isolée,

qu'après y avoir développé une température supérieure à celle qui précédait cette perte.

14. Dans les gaz, la tension dépend à la fois de la température et de la densité. Pour une température donnée, la tension est précisément proportionnelle à la densité ; pour une densité donnée, la tension s'accroît beaucoup plus rapidement que la température.

Faisons d'abord abstraction du dégagement de calorique résultant, dans une masse gazeuse, de ses condensations successives ; et supposons ces condensations proportionnelles dans toutes les couches concentriques. Alors la densité, et par suite la tension de chacune, varieront en raison inverse du cube de son rayon, qui, lui-même, varie proportionnellement à celui de la sphère fluide.

Chaque couche, dans ses positions successives, est attirée en raison inverse du carré de sa distance au centre, c'est-à-dire, en raison inverse du carré du rayon de la sphère fluide. Le poids total supporté par une couche, variera donc, lui-même, en raison inverse du carré de ce rayon. La pression, rapportée à l'unité de surface, est égale à ce poids total divisé par la surface entière de la couche, surface qui est proportionnelle à ce même carré. Donc, en définitive, la pression, exercée sur chaque couche, varie en raison inverse de la quatrième puissance du rayon de la sphère fluide.

La diminution du volume tend donc, en général, à imprimer un accroissement plus rapide à la pression qu'à la tension ; et la masse ne peut devoir, le rétablissement de l'équilibre entre ces deux forces, qu'à une élévation de température. La condensation se prolongera, par conséquent, dans cette masse, jusqu'à ce qu'elle y ait développé une température supérieure à sa température primitive.

Il en serait encore évidemment de même pour un mélange de gaz et de vapeurs *.

15. Nous arrivons donc à cette conséquence générale : Dans tout fluide élastique, formant une masse isolée dont la pression n'est due qu'à sa propre attraction, une perte de calorique, par la condensation qu'elle produit, amène en définitive une éléva-

* Nous n'aurons plus guère, par la suite, à considérer séparément ces deux classes de fluides élastiques, et il pourra nous arriver souvent de les comprendre sous la dénomination générale de *vapeurs*.

tion de température. Et réciproquement, dans une telle masse, toute acquisition de calorique serait accompagnée d'une augmentation de volume, et d'un abaissement de température.

Chap. III.—*États antérieurs de l'Univers.—État primitif.*

16. *État antérieur des astres.*—Tout astre incandescent perd du calorique. Qu'on le suppose liquide ou solide, sa température baisse; elle a donc été plus élevée qu'aujourd'hui. Quelle que soit la température antérieure à laquelle notre imagination s'arrête, tant que subsiste le même état, solide ou liquide, nous sommes forcés de remonter à une température supérieure encore; car déjà, au point où nous le considérons, il éprouvait des pertes de calorique, et des pertes d'autant plus fortes qu'il était plus échauffé.

Nous serions ainsi conduits jusqu'à une température infinie, si nous n'admettions un état pour le quel les pertes de calorique imprimaient, à la température, une progression différente. Supposer à chaque astre une température infinie, serait lui accorder tout le calorique réparti dans l'Univers; conséquence évidemment absurde, à la quelle nous ne pouvons échapper qu'en admettant la vaporisation antérieure de sa substance.

Pour les astres aujourd'hui solides, l'époque de la solidification n'a fait qu'interrompre, un instant, la marche à laquelle leur température était assujettie; au-delà de ce point, et jusqu'à ce que nous arrivions à la vaporisation, nous retrouvons toujours une température d'autant plus forte que nous nous reportons vers une époque plus reculée.

Ainsi tout astre, aujourd'hui incandescent, s'est précédemment trouvé à l'état de vapeur.

17. *Température primitive.*—Tant que les masses vaporeuses étaient plus échauffées que l'espace, elles devaient perdre du calorique; donc elles en avaient précédemment possédé d'avantage, ce qui suppose à la fois, dans ces masses, un volume plus grand et une température plus basse. A mesure que nous remontons plus haut, nous trouvons leur température moins élevée; et nous la voyons arriver, dans un temps fini ou infini, à égaler celle de l'espace. Nous sommes, en même temps, conduits jusqu'à une dilatation énorme de la matière; car elle devait rendre latente, toute la chaleur perdue par les astres depuis des temps indéfinis, et toute celle qui, encore aujourd'hui, élève la température de ces astres au-dessus de celle de l'espace.

18. *États transitoires.*—Nous suivons pas à pas les modifications des masses vaporeuses, tant qu'elles sont déterminées par l'équilibre des forces qui les sollicitent ; c'est-à-dire, tant que ces masses affectent la forme de globes, s'écartant plus ou moins d'une sphéricité rigoureuse, suivant les forces qui se combinent avec leur propre attraction.

Mais, cette distribution de la matière, par globes vaporeux en équilibre, peut-elle avoir été la distribution primitive ? Peut-elle avoir coïncidé avec l'égalité de température entre la matière et l'espace ? Ici, nous sommes forcés de recourir à des considérations d'un ordre différent.

19. Toute masse de vapeur doit nécessairement former un globe, en vertu de son attraction. Mais il y a une probabilité infinie, c'est-à-dire la certitude, que les molécules ne se sont pas trouvées rangées suivant un tel ordre indépendamment de cette force. Ainsi la forme de globe est un effet. Or, ce qui a une cause ne peut être primitif ; nous sommes donc conduits à un état de l'univers, où la matière n'était pas encore rassemblée par globes. Toute autre forme régulière, supposée primitivement commune à tous les astres, aurait également contre elle une probabilité infinie. La matière vaporeuse avant de former des globes, a donc été distribuée dans l'espace, par masses de formes diverses et irrégulières.

20. L'équilibre ne pouvant exister dans des masses irrégulières, la force expansive n'y contrebalançait pas l'attraction ; et, même sans y supposer aucune perte de calorique, cette attraction devait sans cesse y rapprocher, plus ou moins directement, les molécules du centre. Chaque état que nous pouvons imaginer, nous conduit donc à un état antérieur où les masses vaporeuses occupaient un plus grand espace ; et où, par conséquent, elles laissaient entre elles moins de vides. Nous arrivons ainsi jusqu'au point où toutes les masses étaient en contact, et se confondaient en une masse universelle.

21. Si cette masse universelle avait eu une étendue finie, entourée d'un vide infini, elle n'aurait pu se diviser. La couche extérieure n'éprouvant aucune attraction du côté du vide, aurait pesé sur les couches intérieures en vertu de l'attraction exercée sur elle par la masse entière, et ces autres couches en transmettant cette pression, y auraient ajouté la force qui les portait elles-mêmes vers le centre. La matière universelle, dans cette hypothèse, se fut donc condensée sans se désunir.

Au contraire une masse infinie, non homogène, doit nécessairement se rompre. Chaque molécule entourée de tous côtés par la matière, est attirée dans tous les sens. En général, ces attractions divergentes ne doivent pas se balancer ; mais il y a nécessairement des points où cet équilibre a lieu. En effet, considérons toutes les molécules situées sur une direction quelconque, indéfinie ; et décomposons toutes les attractions qu'elles éprouvent, parallèlement à cette direction. Par suite de la distribution irrégulière de la matière, les composantes totales doivent être, pour des séries alternatives de molécules, dirigées alternativement dans un sens et dans l'autre ; et deux séries consécutives sont nécessairement séparées par un point qui tend à rester immobile. Quand les deux séries de molécules tendent à s'écarter de ce point, il s'y opère une dilatation qui doit plus tard déterminer la rupture. Quand au contraire elles se trouvent pressées vers lui, la condensation s'y accroît de plus en plus.

L'étendue infinie de la masse universelle s'accorde donc, et peut seule s'accorder, avec la division actuelle des masses. Ainsi, les masses irrégulières, détachées, ont été précédées par une masse unique, infinie, elle-même irrégulièrement condensée, et comparable au cahos, dont la Génèse et la fable s'accordent à faire sortir l'Univers.

22. *État primitif de l'Univers.*—Si nous avons l'éternité devant nous, nous trouvons encore l'infini en nous reportant en arrière. L'époque à laquelle nous venons d'arriver est à une distance immense, mais non infinie; et tant que nous ne remonterons pas jusqu'à l'infini, nous n'aurons pas reconnu l'état primitif de l'Univers.

23. La matière qui remplissait tout l'espace, y était irrégulièrement répartie, et par suite ne pouvait être en équilibre. L'état de l'Univers devait donc varier sans cesse : chaque instant resserrait les parties les plus légères autour des parties les plus denses, et augmentait ainsi les différences de densités. Chaque état auquel s'arrête notre pensée, a donc été nécessairement précédé d'un état, où ces différences étaient moindres, où la distribution de la matière s'approchait d'avantage de l'uniformité.

Dans les périodes que nous avons parcourus, les forces agissaient avec des intensités finies, et n'exigeaient que des tems finis pour accomplir leurs effets. Dans le période auquel nous sommes parvenus, les attractions opposées, agissaient sur chaque molécule, avec des intensités, généralement d'autant moins différentes, que la matière s'écartait moins d'une répartition uniforme. Les changemens opérés par ces forces, dans la répartition de la matière, étaient donc d'autant plus lents, que nous remontons à une époque plus reculée. Enfin, ces changemens exigeaient des tems infinis, quand la matière s'écartait infiniment peu de l'égale répartition. Nous trouvons ici une de ces séries dont les termes s'approchent de plus en plus d'une limite déterminée, et ne l'atteignent qu'à l'infini.

En résumé, l'état primitif de l'Univers, présente une égale répartition de la matière, dans l'espace infini ; mais nous ne rencontrons cet état qu'à une époque infiniment éloignée de nous.

24. Chaque rapprochement des molécules élevait la température, dans les parties qui se condensaient ; la dilatation l'abaissait, au contraire, aux points où se préparait la rupture. L'égalité générale de température n'a donc pu exister qu'avec l'uniformité de répartition, et remonte par conséquent aussi à une époque infiniment éloignée. Elle n'a eu lieu, en réalité, qu'entre les parties de la matière, et non entre la matière et l'espace.

25. Il nous reste à chercher comment, d'après les lois que nous connaissons, d'après les lois posées par l'auteur de la nature, cet univers primitif a pu s'organiser de lui-même, et former les mondes tels que nous les voyons.

# DEUXIÈME PARTIE.

## ORGANISATION DE L'UNIVERS DÉDUITE DE L'ÉTAT PRIMITIF.

### CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

#### § Ier.—*Définitions, exposé de quelques principes.*

26. Nous n'avons terminé qu'une partie facile de notre tâche ; celle qui nous reste sera laborieuse, au moins dans la partie qui concerne les mouvemens celestes. Cette question ne peut plus être résolue par de simples considérations physiques ; elle rentre naturellement dans le domaine de l'analyse. Mais, dans son imperfection actuelle, l'analyse ne conduirait, le plus souvent,

qu'à des équations non intégrables. Déjà dans le problème des trois corps on est arrêté par son impuissance. Nous serons forcés d'y suppléer, soit par le simple raisonnement, soit par des calculs indirects, qui, sans déterminer le quantum de chaque effet, nous aideront à démêler quelques lois aux quelles ils sont assujettis.

Si nous ne pouvons toujours atteindre ainsi la rigueur mathématique, l'enchaînement de toutes les parties entre elles, et l'accord de leur ensemble avec les faits, achèveront, je crois, de dissiper les doutes que quelques points, pris isolément, pourraient peut être laisser dans les esprits.

27. *Définitions.*—Des périphrases multipliées eussent ralenti notre marche, nous sommes forcés, pour les éviter, d'employer quelques expressions de convention. Commençons par indiquer la signification que nous y attachons.

28. Entre deux masses en présence, l'attraction est réciproque ; cependant, pour les distinguer, nous appellerons, *masse attirée,* celle dont nous nous occuperons spécialement, et sur la quelle nous voudrons suivre les effets de l'attraction. L'autre prendra le nom de *masse attirante.*

29. Que nous ayons, ou non, à considérer un mouvement de translation dans la masse attirée, nous désignerons, sous le nom de *rayon vecteur*, la ligne qui joint le centre des deux masses.

30. Dans la masse attirée, l'hémisphère tournée vers la masse attirante, s'appellera *hémisphère éclairée*, l'autre *hémisphère obscure* ; sans que nous entendions préjuger l'incandescence de la masse attirante.

31. Si la masse attirée est de forme allongée, nous conserverons le nom d'*hémisphères,* aux deux parties séparées par le plan contenant son centre de gravité, et perpendiculaire à son plus grand diamètre, que nous appellerons simplement le *grand diamètre.* Dans leurs diverses positions, ces deux hémisphères conserveront les noms d'éclairée ou d'obscure, tant que ces dénominations conviendront à leur plus grande partie.

32. On manque de mot, en Astronomie, pour désigner, en général, le point d'une orbite le plus voisin de la masse attirante. Le mot *périhélie*, que l'on emploie quelquefois dans cette acception générale, deviendrait tout-à-fait impropre quand il s'agirait du mouvement du soleil lui-même dans son orbite. Un mot nouveau nous est donc nécessaire, nous adopterons celui de *périastre ;* le point opposé de l'orbite sera désigné par le mot *apastre.*

33. *Principes.*—Les démonstrations incidentes, placées dans

le texte, eussent rendu plus difficile à saisir l'enchaînement des idées ; nous les rejetons dans les additions qui terminent ce mémoire, et nous nous contentons d'exposer succinctement, dans ce préliminaire, les plus essentiels des principes sur lesquels nous aurons besoin de nous appuyer.

34. Une masse fluide, soumise à sa seule attraction, affecte une forme sphérique. Si une attraction extérieure vient se combiner avec la première, la masse s'allonge dans le sens où cette attraction s'exerce, et se contracte dans le sens perpendiculaire.

35. Ces effets résultent des différences d'intensité et de direction, de la nouvelle force, par rapport au centre et aux autres points de la masse attirée ; ils sont plus sensibles dans l'hémisphère éclairé que dans l'hémisphère opposé. La première s'allongeant et se rétrécissant davantage, la masse attirée prend une forme analogue à celle d'un œuf, sauf quant au rapport des axes, qui peuvent varier beaucoup suivant les circonstances.

36. L'allongement est très prononcé, et la forme ovoïdale sensible, pour une masse dont le diamètre moyen est très grand relativement à la longueur du rayon vecteur. Ces deux effets diminuent avec le rapport de ces deux longueurs ; mais le second beaucoup plus rapidement que le premier, parce qu'il dépend de différences secondes. Il provient, en effet, principalement de ce que l'attraction, exercée sur le centre, ne diffère pas également des attractions exercées sur deux points symétriquement placés dans les deux hémisphères. La forme ovoïdale deviendra donc tout-à-fait inappréciable, quand l'allongement sera encore très marqué.

37. Si la masse allongée, se trouve, par une cause quelconque, écartée, dans certaines limites, de sa position primitive, elle tend à y être ramenée, en partie par un mouvement général autour de son centre, en partie par un déplacement respectif des molécules.

38. Faisons d'abord abstraction de ce dernier effet, en supposant un instant la masse solidifiée. Nommons *force accélératrice angulaire*, la force qui produit les accélérations successives de sa vitesse angulaire. On obtiendrait la valeur de cette force, en divisant, la somme des momens des forces motrices qui animent toutes les molécules, par le moment d'inertie de la masse.

Pour une longueur donnée de la masse attirée, la force accélératrice angulaire varie suivant l'angle formé, par le grand diamètre, avec le rayon vecteur ; angle que nous désignerons par le nom d'*écartement*. Cette force varie aussi suivant l'étendue de la masse ; les limites qui correspondent aux écartemens de 0° et de 180° * en sont seules indépendantes. Les autres, cependant, pourront encore être considérées comme telles ; parce que leurs variations sont très-faibles, tant que le grand diamètre n'atteint pas des longueurs inadmissibles.

Nous adopterons donc, pour les valeurs de ces limites, celles de leurs propres limites, c'est-à-dire, les valeurs dont elles s'approchent, de plus en plus, à mesure que le grand diamètre diminue ; mais qui ne sont rigoureusement exactes que lorsque sa longueur devient infiniment petite. On verra que ces valeurs sont encore très approchées, en supposant même le grand diamètre égal au tiers du rayon vecteur ; rapport énorme, si l'on juge d'après les astres d'aujourd'hui, mais qui pourra n'être pas toujours trop grand pour les masses que nous aurons à considérer.

39. Dans une masse solide, le moment d'inertie ne change pas ; la force accélératrice angulaire variera donc précisément suivant la même loi que la somme des momens des forces motrices appliquées à ses molécules. Cette force est nulle pour un écartement nul ; elle augmente successivement jusqu'à l'écartement de 45°. Elle commence ensuite à diminuer, et devient nulle de nouveau pour l'angle de 90°. Cette position est celle de l'équilibre instable : aussitôt qu'elle est dépassée, le grand diamètre, toujours rapproché du rayon vecteur, reçoit un mouvement inverse, c'est-à-dire que la force a changé de signe. Elle atteint son maximum négatif quand l'écartement arrive à 135°, et redevient nulle de nouveau pour l'angle de 180°.

Si, partant de nouveau de l'angle nul, nous écartons le grand diamètre de l'autre côté du rayon vecteur, la masse, dans toutes les positions symétriques à celles que nous venons de parcourir, sera soumise à des forces accélératrices angulaires égales et de signes contraires.

Ainsi, quand l'angle est nul ou droit, la force accélératrice angulaire se trouve aux points de transition du positif au négatif ; c'est donc, dans le voisinage de ces positions, que les variations angulaires produisent les plus grands changemens dans l'intensité de la force. Vers les angles de 45° et 135°, ces changemens deviennent au contraire insensibles.

* Nous employons pour les angles la division sexagésimale.

40. Dans chaque instant infiniment petit, la force accélératrice angulaire, prise pour l'ensemble d'une masse fluide, sera évidemment la même que si cette masse était solidifiée sous la forme qu'elle affecte en cet instant. Mais, d'un instant à l'autre, elle varie différemment, sous ces deux états ; parce que, pour la masse fluide, le changement dans la disposition des molécules fait varier le moment d'inertie, et fait varier, autrement que pour la masse solide, l'action de l'attraction extérieure.

41. Pour démêler les effets dûs à la fluidité, faisons abstraction du mouvement angulaire général, ou, en d'autres mots, appliquons, à chaque molécule, une force capable de lui imprimer une vitesse angulaire égale et contraire à la vitesse angulaire moyenne. Alors, toutes les forces à considérer, ne seront plus employées qu'à produire un changement, dans la position respective des molécules, c'est-à-dire à changer la forme de la masse.

Sans suivre pas à pas l'action de ces forces, il est évident, à priori, qu'elles auront pour effet de rapprocher successivement la forme de la surface de celle qui convient à l'équilibre, en comprimant les colonnes fluides qui la dépassent, et faisant refluer les molécules vers les colonnes qui ne s'étendent pas jusqu'à elle. Ainsi, la masse sera déformée, pour reprendre définitivement la même forme, mais dans une autre position.

On peut admettre encore, à priori, que la force qui tend à produire cette déformation, atteint son maximum quand la surface du fluide s'écarte le plus possible de la surface d'équilibre, c'est-à-dire, quand le grand diamètre est perpendiculaire au rayon vecteur. Elle est au contraire à son minimum et nulle, quand la surface du fluide se confond avec celle d'équilibre, c'est-à-dire, quand le grand diamètre fait un angle nul avec le vecteur. Par suite, elle n'acquiert pas d'intensité sensible, tant que l'écartement est peu considérable.

Nous avons vu que, dans la même position, la force accélératrice angulaire, quoique nulle aussi, loin d'être à son minimum, se trouve au point où elle change de signe, au point où de petites variations angulaires produisent les plus grandes variations dans son intensité. Cette dernière force agit donc sensiblement seule dans les petits écartemens, et l'action éprouvée par la masse est la même que si cette masse était solide. La force de déformation, quand elle commence à devenir sensible, croît d'abord beaucoup moins rapidement que la force accélératrice angulaire, elle n'atteint ses plus grandes variations que vers la position où cette dernière force atteint son maximum, et n'arrive à son maximum qu'au point où la force accélératrice angulaire devient nulle de nouveau, c'est-à-dire par un écartement de 90°.

42. Quand la masse attirée se rapproche de la masse attirante, sans que les autres circonstances soient changées, la force accélératrice angulaire en reçoit évidemment un accroissement. L'allongement de la masse tend également à s'accroître par ce rapprochement.

43. Au lieu d'une masse fluide unique, considérons un système composé d'une masse principale, et de petites masses environnantes, pour lesquelles une force contrifuge quelconque remplacerait la force expansive des molécules fluides.

Il y a, entre ces deux forces, cette différence que la dernière agit dans tous les sens ; elle empêche les molécules, non-seulement de se réunir au centre, mais aussi d'arriver jusqu'au rayon vecteur. La première, toujours directement opposée à l'attraction centrale du système, n'apporte aucun obstacle à la force accélératrice angulaire, qui tend à rapprocher les masses partielles du rayon vecteur. L'équilibre stable ne peut donc avoir lieu tant que tous leurs centres de gravité ne soient rangés sur cette ligne. Du reste, dans les diverses positions du rayon vecteur particulier, mené, du centre de chaque masse partielle, au centre de gravité du système, la force accélératrice angulaire suit la même loi de variation que dans les positions correspondantes du grand diamètre de la masse unique.

44. L'attraction qui produit cette force accélératrice angulaire, tend, généralement, à éloigner chaque masse partielle de la masse principale. Cette force d'éloignement est à son maximum, quand le rayon vecteur particulier se confond avec le rayon vecteur général ; elle devient nulle pour un écartement de 54°, 44', se change ensuite en une force de rapprochement, atteint son maximum négatif à 90°, redevient nulle à 125°, 16' et atteint un nouveau maximum positif à 180°, c'est-à-dire, quand le rayon vecteur particulier se confond de nouveau avec le rayon vecteur général du système.

Le résultat total de cette force, dans une révolution entière, étant un éloignement, nous la désignerons sous la dénomination générale de force d'éloignement, excepté quand nous nous occuperons spécialement du période pendant lequel elle devient négative.

45. La force d'éloignement, et la force accélératrice angulaire,

croissent, toutes choses égales d'ailleurs, quand le centre du système s'approche de la masse attirante.

46. Si, le centre du système ne changeant pas, l'une de ses masses secondaires s'éloigne de sa masse principale, elle éprouvera un accroissement dans la force d'éloignement, et dans le moment de la force qui tend à diminuer l'écartement; mais, son moment d'inertie, par rapport à la masse principale, augmentant en même tems, on ne voit pas à priori, si force accélératrice angulaire, qui est le quotient de ces deux momens, doit augmenter ou diminuer. C'est, au reste, ce que nous pourrons nous dispenser de chercher.

47. Nous observons, dans le satellite de la terre, une partie des effets qui viennent d'être exposés. La masse lunaire s'est allongée suivant le diamètre constamment dirigé vers la terre. Mais, sa distance à la terre étant considérable, relativement à l'étendue de ce diamètre, l'allongement est très-faible, et la forme ovoïdale tout-à-fait inappréciable. Ce grand diamètre est ramené vers la terre, quand les variations séculaires tendent à l'en écarter. Mais, la faible force qui produit cet effet, n'a pas d'influence sensible sur les librations mensuelles.

L'action du soleil, sur le même astre, en augmentant le rayon moyen de son orbite, nous donne un exemple de la force d'éloignement. Cette action doit nous offrir encore un exemple des effets de la force accélératrice angulaire. Rigoureusement parlant, cette force fait varier, à chaque instant, l'aire décrite par la lune autour de la terre; mais les alternatives, qui en résultent, se compensant, dans l'intervalle d'une révolution, sont habituellement négligées. Elles doivent d'ailleurs être peu considérables.

## § II.—*Formation des brouillards.*

48. Nous aurons fréquemment à considérer, dans la suite, les phénomènes produits par la condensation de vapeurs diverses. Ces phénomènes ont beaucoup d'analogie, avec ceux de la formation des brouillards dans notre atmosphère. Nous allons essayer d'éclaircir préalablement cette question.

49. *Phosphorescence.* — La vapeur d'eau en se liquéfiant, dégage une chaleur, suffisante pour élever d'environ 550 dégrès la température de sa masse liquide, et plus que suffisante par conséquent pour y développer l'incandescence. A l'instant où se forme un globule de brouillard, il émet donc, en tous sens, quelques rayons lumineux; mais cet éclair disparaît aussitôt:

l'eau ne pouvant, sous la pression atmosphérique, rester liquide à la température rouge, éprouve instantanément une vaporisation partielle, qui, jointe à l'émission opérée, lui enlève son incandescence. Le même phénomène se reproduit de tous côtés tant que le brouillard s'épaissit ; il en résulte une légère phosphorescence, qu'on ne doit jamais observer dans les brouillards dont la formation est achevée.

50, *Forme vésiculaire.*—La vaporisation partielle du globule, a lieu nécessairement dans la partie la moins refroidie par l'émission, c'est-à-dire, vers son centre. Elle dilate l'enveloppe liquide, jusqu'à ce que la pression atmosphérique fasse équilibre à la tension de la vapeur. Les globules prennent donc la forme vésiculaire.

51. *Suspension.*—La pesanteur spécifique de la vapeur d'eau à 100 degrés, n'étant que les 0,62 de celle de l'air, les vésicules sont plus légères que l'air tant que leur enveloppe liquide a peu d'épaisseur. Elles peuvent donc s'élever ou se soutenir dans l'atmosphère à de grandes hauteurs.

52 .*Chûte.*—Les vésicules se resserrent à mesure qu'elles perdent du calorique : une partie de la vapeur intérieure, se condense et se joint à l'enveloppe liquide. La densité moyenne étant ainsi augmentée, les globules descendent; et se resserrent encore, par l'accroissement de pression. S'ils n'arrivent au sol avant que leur condensation soit complète, ils se réunissent pour former des gouttes. Si enfin ces gouttes ont le tems d'acquérir une température inférieure à celle des couches les plus basses de l'atmosphère, elles s'y augmentent en s'appropriant la vapeur que leur contact y condense.

53. *Chaleur.* — La vapeur des vésicules, préservée par un liquide peu conducteur, perd lentement son calorique. Jusqu'à ce que cette vapeur ait entièrement disparu, elle est constamment ramenée à la température de l'ébullition, par les condensations partielles qu'elle éprouve. Ainsi le dégagement de calorique doit se prolonger bien plus long-tems que la phosphorescence.

## Chap. Ier. — *Partage de la matière universelle en masses vaporeuses.*

54. A l'origine, un équilibre général de température et de densité, existait dans la matière, excessivement rare, uniformément répandue dans l'espace infini. Cet équilibre était instable :

le moindre dérangement qu'il pût éprouver, était la cause d'un dérangement plus grand, qui tendait à s'augmenter sans cesse : si, par une cause quelconque, la densité s'est trouvée écartée de l'uniformité parfaite, les parties les plus denses ont formé des centres d'attraction, autour desquels la matière tendait à se resserrer de plus en plus, en se dilatant dans les parties dejà plus rares.

L'équilibre, quoiqu'instable, étant complet et universel, il a dû s'écouler un temps infini, avant que des différences appréciables de densité pussent s'établir entre les diverses parties de la matière. A quelque époque déterminée que nous arrêtions notre pensée, ce temps infini était déjà accompli.

55. Néanmoins, si nous voulons éviter ces considérations d'infini, nous prendrons l'univers à l'instant où ces légères différences commençaient à se manifester. Nous pouvons choisir ce point de départ, puisque, dans notre marche rétrograde, nous y étions arrivés, avant de parvenir à une répartition rigoureusement égale de la matière.

Parmi les faibles centres d'attraction, résultans des différences de densité, quelques-uns l'emportaient nécessairement sur les centres environnans, et, par cela même, ils ont dû acquérir ensuite une predominance de plus en plus marquée. Leur action prolongée a fini par rompre la continuité de la matière vaporeuse, et la partager en masses d'une immense étendue.

56. Les actions réciproques de toutes les parties d'une masse ne peuvent produire aucun déplacement dans son centre de gravité. Les centres de gravité de toutes les masses éprouvaient d'ailleurs, en tous sens, des attractions sensiblement égales, quand elles appartenaient à la masse universelle sensiblement homogène. Ne pouvant donc varier, ni par suite des attractions extérieures, ni par l'effet de leur propre action; ils ont dû rester fixes, après, comme avant la séparation.

57. Les intervalles, qui s'établirent entre les masses, furent long-temps inappréciables par rapport à l'immensité de ces masses. Ils ne purent empêcher qu'il se trouvât, dans chacune d'elles, un grand nombre de points également attirés en tous sens. En effet, la faible condensation opérée n'avait augmenté que bien peu l'attraction centrale. Cet excédant a donc pu souvent trouver des compensations dans l'irrégularité générale.

Certains points tendant ainsi à rester immobiles, tandis que les molécules intermédiaires, entre eux et le centre, tendaient à se rapprocher de ce centre, la matière se dilatait nécessairement dans cette intervalle ; ce qui devait finir par amener de nouvelles ruptures.

Ici, les centres de condensation ne sont pas rigoureusement les points immobiles ; mais les parties voisines dont l'excédant de densité neutralise pour ces points l'attraction centrale. Ces centres secondaires doivent eux-mêmes se rapprocher lentement du centre de gravité.

58. La matière a pu se subdiviser bien des fois de la même manière. Cependant cette subdivision devait avoir un terme : les intervalles qui s'établissaient, entre les masses voisines, après les ruptures successives, devenaient, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant moins négligeables, par rapport à l étendue de ces masses, que cette étendue était moindre ; l'attraction centrale de chaque masse devait donc, en général, acquérir sur les attractions extérieures, une prédominance d'autant plus prononcée que les subdivisions s'étaient plus multipliées. Il devait se trouver un terme, où les inégalités de condensation ne pouvaient plus compenser, pour aucun point, cette prédominance ; et aucun point, dans la masse, ne pouvait plus alors, rester immobile par rapport au centre de gravité. Quand enfin tous les centres accidentels de condensation se sont trouvés attirés, par le centre de gravité, avec plus de force qu'ils n'attiraient eux-mêmes les molécules qui les entouraient, ils n'ont plus déterminé de rupture ; leur influence s'est bornée à accroître les inégalités de condensation.

Déjà les irrégularités, préexistantes à la séparation des masses, s'étaient conservées, à leur intérieur, comme à leur surface. Toutes ces masses ayant été contigues, devaient d'ailleurs présenter généralement des formes anguleuses. Peut-être encore quelques phénomènes électriques ou chimiques, sont-ils venus se joindre à ces causes d'irrégularités. Nous voyons donc, la matière vaporeuse universelle, se distribuer sous ces formes si bizarres et si indéfinissables, qu'on observe encore aujourd'hui dans certaines nébuleuses.

59. L'incandescence se manifestait déjà dans toutes ces masses. La condensation, sans doute, était trop faible pour produire cet effet, tant que la matière était à l'état de gaz, c'est-à-dire, éloignée du point de la liquéfaction. Mais la plupart des substances répandues dans l'univers sont très-peu volatiles ; et celles qui le

sont le moins, jouissent encore, vraisemblablement, de cette propriété à des degrés très-différens. Les condensations successives n'ont donc pu tarder à en amener quelques-unes à l'état de vapeurs, c'est-à-dire, au point où le plus léger accroissement de pression y déterminait la formation de globules liquides.

Il est vraisemblable que, les substances les moins volatiles, doivent généralement dégager le plus de calorique, en se liquéfiant; puisqu'elles sont les moins denses à l'état de vapeur. Déjà la vapeur d'eau, en se liquéfiant, acquiert, pour un instant, l'incandescence. Les premiers brouillards formés dans la matière universelle, ont dû développer une incandescence bien plus vive. Ils ont dû d'ailleurs conserver l'incandescence, puisqu'ils étaient composés de substances susceptibles de rester liquides à des températures énormes.

Cependant, chaque globule liquide acquérait encore, à l'instant de sa formation, une température supérieure à celle de son ébullition. Il devait éprouver une vaporisation partielle, qui s'opérait nécessairement vers son centre. Enfin la forme vésiculaire qu'il acquérait ainsi, lui permettait de rester en suspension dans la masse, jusqu'à ce que le refroidissement graduel ait condensé une certaine partie de la vapeur centrale.

60. Chaque masse peut acquérir ainsi, au moins dans quelques-unes de ses parties, une température assez élevée sans éprouver, en somme, aucune perte appréciable de calorique. Car, entourée par d'autres masses, dont les interstices sont couverts par des masses plus éloignées, elle reçoit à-peu-près autant de chaleur qu'elle en émet. Il n'y a de perdu, pour les différentes masses, que les rayons en circulation de l'une à l'autre; et, vu la grande vitesse de ces rayons, ils ne forment une quantité de calorique appréciable, que quand les espaces vides sont devenus très-considérables.

Les pertes n'ont donc lieu d'abord, sensiblement, que dans les parties les plus échauffées, et au profit des parties dont la température est moins élevée que la leur.

61. Dans chaque masse, l'attraction centrale resserrait lentement le volume; elle augmentait d'intensité par chaque rapprochement qu'elle opérait, et tendait à effacer graduellement les traces de l'irrégularité antérieure. Tant que cette irrégularité subsistait, tant que la masse ne s'approchait pas de la disposition convenable à son équilibre, la force expansive de la vapeur retardait les progrès de la condensation, dans les parties les plus denses et les

plus échauffées, sans opposer d'obstacle sensible à la contraction générale de la masse autour de son centre.

Cette concentration n'était guère retardée que par les attractions extérieures, qui, peu inférieures d'abord à l'attraction centrale, s'affaiblissaient sans cesse, en même tems que cette dernière augmentait d'intensité.

Les progrès de la concentration, excessivement lents d'abord, doivent donc ensuite s'accélérer de plus en plus, jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse dans la masse entière. Alors seulement la condensation commence à prendre une marche régulière : elle ne peut plus résulter que des pertes de calorique, qui amènent une diminution dans la tension des vapeurs. Ces pertes, qui deviennent plus considérables, par l'accroissement des espaces vides, n'empêchent pas, comme nous l'avons vu, les masses de s'échauffer sans cesse, en se condensant.

Laissons maintenant ces phénomènes continuer leurs progrès, et suivons une autre série de faits.

## Chap. II.—*Premiers mouvemens.*

62. Chaque masse, provenant de la première division de la matière, a conservé, comme on l'a vu, après sa séparation, la fixité primitive de son centre de gravité. Les subdivisions successives qu'elle a éprouvées ensuite, n'ont pu changer davantage le centre de gravité du grand système qui en est résulté.

Les masses du second ordre, formées par la division de la précédente, se trouvaient déjà légèrement rapprochées entre elles, et éloignées des masses extérieures, par suite de la concentration qui avait eu lieu dans la première masse. Il en résultait une légère inégalité entre les attractions dirigées dans les différens sens. Ainsi, les centres de gravité, des systèmes du second ordre, ont dû s'éloigner un peu plus de la fixité rigoureuse, que les centres de gravité des systèmes du premier ordre.

Les subdivisions successives de la matière, l'éloignaient de plus en plus, de l'égale distribution dans l'espace. A mesure qu'on descend à des masses, ou à des systèmes, d'un ordre inférieur, on doit donc trouver moins de fixité.

63. Cependant même en arrivant au dernier ordre, c'est-à-dire, aux masses qui ne se sont pas subdivisées, on ne doit encore trouver que des mouvemens bien lents à leur origine : toutes les attractions étaient faibles, à cause du grand éloignement des

centres de gravité de ces masses immenses. D'ailleurs, les nombreuses fissures, qui divisaient la masse universelle, s'élargissaient très lentement ; et, à l'instant où les dernières se sont formées, la somme des espaces occupés par la matière, devait vraisemblablement l'emporter encore sur la somme des espaces vides. Les différences de largeur de ces fissures ne pouvaient donc apporter encore de bien grandes inégalités entre les attractions diverses éprouvées par chaque masse.

La lenteur des premiers mouvemens devait surpasser encore celle de la condensation. Car pour que la dernière division s'opérât, il fallait qu'à l'instant où elle eut lieu, la vitesse qui rapprochait les masses, fut inférieure à celle qui portait la surface de chacune d'elles vers son centre. C'est ce qui a pu permettre à ces masses si voisines, de se mouvoir long-temps l'une vers *l'autre*, sans se toucher.

64. Chaque masse, en se mouvant suivant la résultante de toutes ses attractions, s'approchait plus de l'une des masses environnantes, que de toutes les autres ; l'attraction de cette dernière, devait donc acquérir de plus en plus d'influence sur la première, et finir par exercer sur elle une action tout-à-fait prédominante.

Le mouvement de la masse considérée, ne la portait pas en général, directement sur la masse prédominante, mais l'en approchait obliquement par un mouvement accéléré. Nous ne nous occuperons pas, au moins quant à présent, du cas où les deux masses ont pu se réunir.

Le mouvement s'établissait et s'accélérait, en même tems, dans les autres masses. Leurs positions respectives variant sans cesse, elles n'exerçaient plus, sur la masse considérée, que des actions variables elles-mêmes, entre lesquelles les chances de compensation se multipliaient à mesure que les déplacemens devenaient plus rapides.

Ne voulant considérer que des effets généraux, pour lesquels nous admettons la possibilité de quelques exceptions, nous pouvons négliger toutes ces causes perturbatrices. Nous ferons également abstraction du mouvement de la masse prédominante, qui, de son côté, s'avance généralement vers la masse considérée par suite de la réciprocité d'action.

Reste donc, à la masse considérée, une vitesse acquise, généralement peu considérable, dirigée très-près de la masse prédominante, et modifiée par l'attraction sans cesse croissante de cette masse. La masse considérée, que nous appellerons désormais *masse solaire*, doit donc se mouvoir dans une orbite elliptique trés allongée, dont la masse prédominante occupe un des foyers.

65. Tandis que la masse solaire s'avance vers son *périastre*, elle s'approche de la forme réguliére convenable à son équilibre, celle d'un sphéroïde allongé vers la masse attirante, et plus effilé de son côté que du côté opposé.

66. Si, dans son mouvement de translation, la masse solaire fût restée parallèle à elle-même; ce mouvement eut porté, en avant du rayon vecteur, l'hémisphére éclairé, et laissé en arrière l'autre hémisphère. Mais, à mesure que son grand diamètre s'écarte du rayon vecteur, l'attraction extérieure tend à l'y ramener; elle imprime ainsi, à la masse solaire, autour de son centre, un mouvement de rotation, en sens inverse à celui dans lequel s'est opéré l'écartement, et, par conséquent, dans le même sens que son mouvement de translation.

Pour fixer les idées, supposons un observateur placé, au centre de la masse prédominante, perpendiculairement au plan de l'orbite solaire, et de telle sorte que le mouvement de la masse solaire ait lieu, pour lui, de droite à gauche. Cela est toujours possible, car si, dans une position, l'observateur voyait le mouvement s'opérer de sa gauche à sa droite, étant renversé il le verrait de sa droite à sa gauche.

Parallèlement au premier observateur, et dans le même sens, plaçons en un second au centre de la masse solaire. L'hémisphère éclairé, porté en avant du rayon vecteur, s'en trouvera écarté vers la droite de ce dernier observateur, et tendra à être ramené vers sa gauche. L'hémisphère obscur, laissé en arrière du rayon vecteur, s'en trouvera encore écarté sur sa droite, quand il se tournera vers lui. Le mouvement général de rotation, alors imprimé à la masse, autour de son centre, est donc, comme le mouvement de translation, dirigé de droite à gauche.

67. La vitesse angulaire de translation, de la masse solaire, s'accélére jusqu'à son périastre. Cette accélération ne suit pas une progression uniforme; elle devient de plus en plus rapide, jusqu'à une certaine distance angulaire du périastre ; distance qui, pour une orbite trés allongée, est d'environ 42°. l'accélération décroît ensuite, devient nulle au périastre, pour se changer plus loin en un retardement.

68. Supposons un instant la masse solaire solidifiée, et admettons provisoirement que l'écartement variable, de son grand diamè-

tre, ne dépasse, dans aucun cas, l'angle d'environ 45°, correspondant au maximum de force accélératrice angulaire. Alors, la vitesse angulaire de rotation, tendra toujours à se rapprocher de la vitesse angulaire de translation : en effet, quand cette dernière l'emporte sur la première, le grand diamètre s'écarte du rayon vecteur, en vertu de leur différence ; ce qui augmente la force accélératrice angulaire, et par suite les accélérations de la vitesse angulaire de rotation. Si, au contraire, celle-ci devient supérieure à l'autre, l'écartement diminue, et, avec lui, la force accélératrice angulaire ; ce qui tend, encore dans ce cas, à rapprocher les deux vitesses.

Mais, malgré cette tendance générale, l'égalité ne pourra s'établir entre ces vitesses qu'à de longs intervalles, et ne subsistera qu'un instant infiniment petit. En effet, elle ne se maintiendrait qu'autant que les accélérations des deux vitesses suivraient la même progression. Ainsi, pour que cet égalité se conservât, pendant tout le période où l'accélération de la vitesse angulaire de translation est croissante, il faudrait que l'accélération de la vitesse angulaire de rotation, le fût également. Or, cette dernière accélération dépend de l'intensité de la force accélératrice angulaire, intensité qui ne peut croître constamment sans que l'écartement s'accroisse de même. D'un autre côté, une augmentation continue de l'écartement, suppose une vitesse angulaire de rotation constamment inférieure à la vitesse angulaire de translation. L'égalité des deux vitesses, dans ce période impliquerait donc contradiction.

Cette contradiction existerait, à fortiori, si l'on supposait, la supériorité constante, à la vitesse angulaire de rotation.

Ainsi, dans ce période, on est forcé d'admettre pour cette vitesse, une infériorité générale, qui, sans exclure peut-être rigoureusement quelques alternatives de supériorité, les rend d'autant moins vraisemblables que l'accélération du mouvement est soumise à une loi continue. Dans tous les cas, elles ne pourraient avoir lieu à l'époque où la masse solaire arrive à 42° de son périastre ; car cette accélération est alors à son maximum. L'orbite solaire, d'ailleurs, devenant en ce point, déjà, peu oblique sur son rayon vecteur, la force accélératrice angulaire ne doit plus voir que de faibles accroissemens, au rapprochement des duex masses; cause d'accroissement dont nous avions fait abstraction dans le raisonnement qui précède.

La masse solaire arrivait donc à 42° de son périastre, avec une vitesse angulaire de rotation inférieure à sa vitesse angulaire de translation. Son écartement était alors considérable; car, il fallait que la première de ces vitesses reçût de fortes accélérations, pour se rapprocher de la seconde. Cet écartement a dû s'accroître encore, jusqu'à ce qu'il ait amené l'égalité des deux vitesses. Mais, dans cet intervalle, la masse solaire s'avançait toujours vers son périastre, par un mouvement de plus en plus rapide. Si donc l'égalité s'est établie, entre les deux vitesses, avant que la masse ait atteint ce point de son orbite, du moins devait-il ensuite lui rester peu d'espace à parcourir pour y arriver; elle parcourait d'ailleurs cet espace avec son maximum de vitesse; le temps, employé à ce mouvement, doit donc avoir été tout-à-fait insuffisant pour détruire l'écartement acquis depuis l'origine du mouvement.

Ainsi, nous admettrons qu'au moins dans la plupart des systèmes que nous pourrions considérer, la masse solaire a dû arriver à son périastre avec un écartement notable encore, et vraisemblablement considérable.

69. Si nous restituons à la masse sa fluidité, les mêmes raisonnemens lui seront encore applicables, avec quelques modifications. En effet, cette fluidité modifie, sans la détruire, l'action de la force accélératrice angulaire; elle y joint, comme nous l'avons dit, une tendance à la déformation, tout-à-fait négligeable pour les petits écartemens, mais qui augmente ensuite jusqu'à l'écartement de 90°.

La force de déformation, par le changement qu'elle produit dans la disposition respective des molécules, et indépendamment de tout mouvement général autour du centre, tend constamment, de son côté, à rapprocher le grand diamètre du rayon vecteur. Mais, son action n'est pas instantanée, elle ne bouleverse pas immédiatement des masses immenses. Ses effets, peu sensibles pour chaque instant, s'accumulent et deviennent considérables à la longue.

Ainsi, quand le grand diamètre se trouve écarté du rayon vecteur, il n'en est rapproché que graduellement par cette force de déformation. Il éprouve, en même temps, une diminution dans sa longueur; puisque la force n'agit plus, tout entière, suivant la direction de cette longueur. Ce raccourcissement de la masse diminue les momens que les molécules tendent à acquérir ulterieurement; mais, en même temps, il augmente considérablement, pour elles, la vitesse angulaire qui résulte des momens acquis; car, pour un moment donné, ces vitesses sont en raison inverse des carrés des distances à l'axe de rotation.

Un accroissement si rapide paraît s'opposer à ce que l'écartement dépasse 45°, et pourrait d'ailleurs encore ramener le grand diamètre, vers le rayon vecteur, qnaud même l'écartement irait bien au-delà de ce terme. Ainsi, notre hypothèse, devenue plus vraisemblable par suite de la fluïdité, n'est même plus nécessaire pour que le mouvement acquis ne s'anéantisse pas, avant l'arrivée de la masse au périastre.

Dans la masse fluide, comme dans la masse solide, les accélérations de la vitesse angulaire de rotation ne s'accroissent que par l'augmentation d'écartement. Nous pouvons donc conclure de même, que cette vitesse se trouve inférieure à la vitesse angulaire de translation, quand la masse arrive à 42° de son périastre ; et que, par conséquent, l'écartement s'accroît encore, au-delà de ce terme. Mais, par suite du raccourcissement de la masse, elle a acquis un moindre moment de rotation que si elle eut été solide. Les allongemens successifs qu'elle éprouve, quand l'écartement diminue, lui faisant perdre d'ailleurs les vitesses angulaires acquises par des raccourcissemens égaux, l'état de fluidité paraît devoir, au total, plutôt retarder qu'avancer l'époque où l'écartement deviendra nul. Nous admettrons donc encore qu'il ne sera pas entièrement détruit à l'arrivée de la masse de son périastre.

## Chap. III.—*Formation des masses secondaires et tertiaires.*

70. *Masses secondaires.*—La rotation développe, dans la masse solaire, une nouvelle force, la force centrifuge, qui diminue le raccourcissement, pendant le période où l'écartement s'accroît, et augmente l'allongement pendant le période où il décroît.

Cet allongement diminue l'intensité de l'attraction centrale de la masse, pendant ce dernier période, et donne, en même temps, à la vitesse acquise par les molécules, une composante opposée à cette attraction.

Ces causes peuvent donc finir par détacher de la masse, l'extrémité qui tend avec le plus de force à s'éloigner du centre, c'est-à-dire, l'extrémité de l'hémisphère éclairé.

71. La même cause tend à reproduire le même effet ; et, tant que l'allongement s'accroît, de nouvelles parties peuvent se détacher successivement de la masse solaire.

72. Quand une partie renversée se détache de la masse, l'extrémité opposée peut se trouver, elle-même, peu éloignée de s'en séparer. Mais, chaque perte de substance déplace le centre de

gravité de la masse, le rapproche de l'extrémité conservée, et diminue la tendance de cette extrémité à se détacher. En effet, par suite de leur rapprochement, ces deux points, s'ils étaient sans action l'un sur l'autre, tendraient à décrire, autour de la masse prédominante, des orbites moins différentes ; étant liés entre eux, ils éprouvent donc moins de tendance à se désunir.

Dans les positions successives du centre de gravité, il existe toujours, entre ce point et l'extrémité éclairée, plus de différences d'attraction et de vitesse absolue, qu'entre le même point et l'extrémité de l'hémisphère obscur. L'hémisphère éclairé tend constamment à s'allonger d'avantage, et c'est elle qui produit toutes les masses secondaires.

73. L'attraction des masses déjà détachées, augmente encore l'allongement de la masse solaire, surtout dans l'hémisphère qui leur a donné naissance. Malgré leur petitesse, elles peuvent avoir, par leur rapprochement, une influence marquée sur ce phénomène.

Ne voyons nous pas, en effet, l'attraction lunaire exercer, sur nos marées, plus d'influence que le soleil lui-même. La différence des marées n'est pas, il est vrai, sensible entre les deux hémisphères de notre terre ; mais la lune en est éloignée de 60 rayons terrestres ; chacune des masses considérées, ne s'éloignait sans doute que d'un très-petit nombre de rayons solaires, pendant que la masse suivante se disposait à se séparer. Nos marées sont d'ailleurs encore atténuées par deux causes ; d'abord la solidité du noyau terrestre ; en second lieu, son mouvement de rotation, qui empêche les effets de s'accumuler suivant un même diamètre de la masse.

74. Chaque masse partielle, avant de se détacher, participait au mouvement général de la masse solaire autour de son centre ; ce qui lui constituait un mouvement acquis, tant autour de cette dernière masse, qu'autour de son propre centre. Elle avait également acquis, la vitesse angulaire générale, autour de la masse prédominante.

Après sa séparation, la force accélératrice angulaire agit sur elle, comme sur les molécules de la masse entière, et tend à la rapprocher du rayon vecteur, à mesure que les accélérations, de la vitesse générale du système, tendent à l'en écarter. Il existe aussi, pour cette masse partielle, une force analogue à la force de déformation, et que nous avons appelée la force d'éloignement. De sorte que nous devons retrouver dans son rayon vecteur particulier, tant pour son écartement que pour sa longueur, des variations analogues à celles que subit le grand diamètre de la masse solaire fluide.

75. Si l'aire décrite par la masse partielle fût restée constante, l'éloignement, qu'elle a éprouvé en se détachant, eût diminué sa vitesse angulaire. L'aire recevant toujours de nouveaux accroissemens, l'éloignement atténue au moins, les accélérations de cette vitesse, et conserve d'abord, au rayon vecteur particulier de la planète, un écartement supérieur à celui du grand diamètre de la masse solaire.

Cette différence d'écartement s'accroît, jusqu'à ce qu'elle ait établi l'égalité des deux vitesses angulaires; elle commence à diminuer ensuite.

Nous trouvons donc, dans cette différence même, une cause qui tend à l'affaiblir; ce qui nous permet d'admettre qu'elle restera peu considérable, jusqu'à ce que les planètes aient dépassé le rayon vecteur. Nous considérons donc, jusques-là, les planètes, comme se maintenant sensiblement sur le prolongement du grand diamètre de la masse solaire, et, par suite, comme se trouvant approximativement en conjonction.

76. *Masses tertiaires.* — Les masses planétaires s'allongent elles-mêmes, de plus en plus, sous la triple influence, de la masse prédominante, de la masse solaire, et des planètes voisines. Les mêmes forces, maintenant toujours, les grands diamètres des planètes, à-peu-près dirigés sur la ligne qui comprenait tous leurs centres, leurs vitesses angulaires de rotation suivent, à-peu-près aussi, l'accélération générale de leurs vitesses autour du soleil.

La force centrifuge, et les différences des attractions éprouvées par les différens points de chaque masse, peuvent donc reproduire, dans les planètes formées les premières, le phénomène qui s'est opéré dans la masse principale. Des masses tertiaires s'en détachent; elles restent rangées, ou à-peu-près, sur la même ligne que les masses secondaires; et la force accélératrice angulaire, qui les y amène, maintient encore leurs grands diamètres dans cette même direction.

Ainsi, pour toutes ces masses, secondaires ou tertiaires, les vitesses angulaires de rotation, comme de translation, doivent éprouver, à-peu-près les mêmes accélérations, jusqu'à leur arrivee sur le rayon vecteur.

77. Il serait difficile de reconnaître de quel côté, de leur planète, se sont formées les masses tertiaires ou satellites. Peut-

être a-t-il pu, suivant les circonstances, s'en détacher des deux côtés; c'est cette hypothèse que nous admettrons, pour embrasser tous les cas.

78. Le nombre des satellites détachés, doit être, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus grand, pour une planète, qu'elle s'est formée plus tôt. Cependant une autre cause peut apporter, à cette loi, quelques exceptions : Les masses secondaires les plus fortes ont dû s'allonger davantage ; les différences d'attraction, et la force centrifuge provenant d'une même vitesse angulaire, ont dû, par suite, y acquérir plus d'intensité. Entre deux planètes consécutives, celle qui s'est détachée la dernière a donc pu, quelquesfois, produire un plus grand nombre de satellites, quand elle était de beaucoup la plus forte ; jamais, quand elle était la plus faible.

Des satellites peuvent difficilement se détacher des planètes formées les dernières, surtout si leur masse est peu considérable.

79. L'énorme inégalité de la masse solaire et des masses planétaires, devait rendre le nombre des satellites détachés de chaque planète, inférieur au nombre des planètes détachées du soleil, dans le même tems.

Cependant, cette différence n'a pas dû se proportionner à la différence des masses. En effet, l'action puissante de la masse solaire, et celle des planètes voisines, concouraient, comme nous l'avons vu, à allonger les masses planétaires, et à activer la formation de leurs satellites ; tandis que, pour la masse solaire, l'attraction des planètes venait seule se joindre à l'attraction prédominante.

80. Les satellites doivent se subdiviser bien plus rarement que les planètes, parce qu'ils sont beaucoup plus petits, et parce que, postérieurement formés, il sont moins long-tems soumis aux effets de l'accélération.

Cependant, il ne parait pas impossible que, dans certains systèmes, les premiers satellites, des premières planètes, aient eux-mêmes des satellites.

Chap. IV.—*Mouvemens définitifs de translation.*

81. Quand la masse solaire est parvenue à son périastre, les parties qui s'en étaient séparées, quoique reportées continuellement vers le rayon vecteur, par leur mouvement autour de cette masse, n'avaient cessé de précéder ce rayon vecteur, dans le mouvement général autour de la masse prédominante. Les vites-

ses angulaires qu'elles avaient acquises, autour de la masse solaire, ont continué à s'accélérer, tant que l'écartement a subsisté. Cet écartement étant encore, en général, considérable au périastre, l'accélération s'est prolongée, au-delà de ce terme, pendant un temps considérable aussi. Or, toutes choses égales d'ailleurs, la force accélératrice angulaire a d'autant plus d'intensité que la masse solaire est plus voisine de la masse prédominante et par suite de son périastre. On voit donc que la plus grande intensité de cette force a été employée à l'accélération.

Tandis que toutes ces vitesses angulaires particulières continuaient à s'accélérer, la vitesse générale du système, dans son orbite, se ralentissait de plus en plus. Les premières devaient donc avoir acquis une grande supériorité sur la dernière, quand les planètes ont rejoint le rayon vecteur ; car l'écartement n'avait pu commencer à décroître, qu'en vertu de cette supériorité, qui n'avait cessé de s'augmenter depuis lors.

82. Un période de retardement commence, pour les mouvemens des masses planétaires, dès qu'elles ont dépassé le rayon vecteur. Il se prolonge, pour chacune d'elles, jusqu'à ce qu'elle arrive sur la perpendiculaire à cette ligne ; c'est-à-dire, pendant tout le temps qu'elle employe à parcourir un cadran compté, non d'une ligne fixe, mais de la position variable du rayon vecteur.

Cette action retardatrice produit, nécessairement, une diminution, dans les aires décrites autour du soleil ; ou, ce qui revient au même, dans les momens de tous les mouvemens. Mais la force accélératrice angulaire, déjà atténuée, ne peut détruire entièrement, pendant ce premier période de retardement, les moments acquis pendant le long période d'accélération, qui a compris l'époque de la plus grande intensité de cette force. La perte éprouvée, par ces moments, paraît même devoir être accompagnée d'une augmentation de vitesse angulaire, et peut-être de vitesse absolue ; car elle se combine avec un rapprochement considérable de chaque masse par rapport au soleil.

La perte d'aire, déjà, tend à opérer ce rapprochement, en diminuant la force centrifuge. En même temps, la force d'éloignement décroît par plusieurs causes : 1°. L'écartement augmente ; 2°. Le système s'éloigne de la masse prédominante ; 3°. Enfin chaque rapprochement opéré sur une masse, diminue la différence entre l'attraction qu'elle éprouve, et celle qui est éprouvée par le soleil.

L'accroissement de vitesse angulaire, produit par ces rapprochemens successifs, abrége la durée de ce premier période, et rend d'autant moindre la perte d'aire qui en résulte pour chaque planète.

83. Le temps employé à parcourir le second cadran, offre ensuite un période d'augmentation dans les aires et les distances, et de diminution dans la vitesse angulaire.

Les mêmes alternatives se reproduisent ensuite de cadran en cadran ; chaque cadran de numéro impair, correspondant à un période de perte dans les aires, et de diminution dans les distances des planètes au soleil ; chaque cadran de numéro pair, donnant au contraire un période d'accroissement dans les aires et dans les distances.

84. Au milieu de ces variations, dépendantes de l'écartement du rayon vecteur particulier de chaque planète sur le rayon vecteur général, la force accélératrice angulaire et la force d'éloignement, éprouvent une diminution progressive d'un période à l'autre, puisque le soleil ne cesse de s'éloigner de la masse prédominante. Les oscillations, éprouvées par les vitesses et les distances des planètes, doivent donc diminuer elles-mêmes, et devenir enfin tout-à-fait inappréciables.

85. Quelles que soient alors les vitesses des diverses planètes, et les directions de leurs mouvemens, elles doivent parcourir des orbes elliptiques. Les aires décrites, dans un temps donné, par leur rayon vecteur, deviennent constantes. Enfin les carrés des temps de leurs révolutions deviennent proportionnels aux cubes des grandes axes de leurs orbites.

86. Si l'attraction extérieure eut cessé tout-à-coup, les orbites des planètes, en se conformant à ces lois, eussent pu acquérir des excentricités considérables. En effet, cette attraction concourait, avec la force centifuge, à contrebalancer l'attraction de la masse solaire. Quand la force contrifuge fût restée seule, l'attraction solaire eut brusquement rapproché la planète, en lui imprimant un mouvement très oblique. Or, une orbite ne peut avoir, en quelqu'un de ses points, une grande obliquité, sur son rayon vecteur, sans être en même temps très allongée.

Mais l'attraction extérieure, ne diminuant que graduellement, la planète est amenée peu à peu, et pour ainsi dire déposée, à la distance où la force centrifuge seule fait équilibre à l'attraction solaire. Elle y arrive par une série de rapprochemens et d'éloignemens, de moins en moins sensibles, et, par conséquent, par un mouvement presque perpendiculaire au rayon vecteur. La forme de son orbite définitive doit donc être sensiblement circulaire.

87. Toutes les planètes, pendant la durée de leur conjonction approximative, avaient aussi une influence prononcée sur la distance de chacune d'elles au soleil. Les planètes supérieures tendaient à éloigner de cet astre les planètes inférieures. Celles-ci, au contraire, tendaient à en rapprocher les planètes supérieures.

Mais toutes ces masses, s'écartant progressivement de la conjonction, pour se conformer, peu à peu, à la loi qui doit régler les durées définitives de leurs révolutions; l'attraction de chacune d'elles, sur une planète déterminée, s'affaiblit par l'augmentation de distance, en même temps que ces diverses attractions deviennent de plus en plus divergentes. Enfin, toutes ces influences isolées, passagères et souvent opposées, ne produisent plus que des perturbations négligeables.

Ces actions réciproques, s'étant affaiblies graduellement aussi, leur combinaison avec les causes déjà considérées, n'a pu empêcher les orbites d'affecter la forme circulaire.

88. L'affaiblissement de l'action réciproque des planètes, a augmenté le rapprochement éprouvé d'ailleurs, par les planètes inférieures. Il a diminué celui qui tendait à s'opérer dans les planètes supérieures; peut-être même aurait-il pu, quelquefois, déterminer pour ces dernières un éloignement définitif, qui eût augmenté la durée de leurs révolutions. Mais cette diminution de vitesse angulaire eût été peu sensible dans le premier cadran; car les planètes, au moins les plus voisines entre elles, n'ont pas dû, dans cet intervalle, s'éloigner beaucoup de la conjonction. La durée du premier période, et la perte d'aire qui en est résultée, se fussent donc trouvées peu augmentées par cette cause. Par suite, elle n'aurait pu déterminer, même dans les planètes supérieures, l'annulation des momens acquis. L'excédent de perte éprouvé par les momens eût été en partie compensé, dans le période d'accroissement qui a suivi, et dont la durée aussi, se fût accrue, par la même cause.

89. Les différences d'attraction décroissent, par l'éloignement, beaucoup plus rapidement que l'attraction elle-même. L'influence de la masse prédominante, sur la vitesse des planètes, et sur leurs distances au soleil, a dû, par conséquent, cesser d'être sensible, quand son attraction totale, puissante encore, continuait à retenir le système entier dans son orbite immense.

90. Les augmentations et les pertes, éprouvées par les aires dans les périodes successifs, tendaient à se compenser; mais, en

partie, seulement. A peu près la moitié, de l'effet produit par le premier retardement, a dû subsister en définitive. Ou autrement, l'aire décrite par une planète, dans un temps donné, est restée définitivement moindre qu'au moment où elle a atteint, pour la première fois, le rayon vecteur ; et cette différence est à peu près la moitié de la perte éprouvée dans le premier période.

91. Si quelque masse tertiaire a pu s'éloigner assez, de la masse secondaire dont elle s'est détachée, pour donner la prédominance à l'action solaire ; cette masse a dû, comme les masses secondaires, décrire sa révolution autour du soleil, et former une petite planète.

Mais la plupart des masses, tertiaires, et, vraisemblablement toutes, ont été entraînées par le mouvement de leur masse secondaire, et ont formé des satellites.

92. Tant que toutes les masses, secondaires et tertiaires, restaient à peu près en conjonction, la vitesse angulaire des satellites, autour du soleil, leur constituait, par rapport à leur propre planète, une vitesse angulaire à peu près égale ; et toujours dirigée de droite à gauche, de quelque côté de cette planète qu'ils se fussent d'ailleurs détachés.

93. Nous n'avons considéré, comme influant sur le mouvement de chaque planète, que l'attraction solaire, l'attraction prédominante, et celle des autres planètes. Pour les satellites, nous avons en outre à considérer, séparément, l'attraction de leur propre planète, comme étant principale; et nous ne pouvons négliger l'action des autres satellites de la même planète.

Quelles que fussent les actions combinées de toutes ces causes, si elles eussent entièrement cessé, les carrés des temps des révolutions fussent devenus, dans chaque système de satellites, rigoureusement proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.

L'action générale de la masse prédominante, sur la révolution des satellites, diminue graduellement; elle y produit des alternatives analogues à celles qu'éprouvent les mouvemens des planètes ; mais dont les périodes sont différens et plus compliqués, parce qu'ils dépendent de deux mouvemens combinés, celui du satellite et celui de sa planète.

L'action des planètes étrangères, sur un satellite déterminé, s'affaiblit à mesure qu'elles s'éloignent de la conjonction ; ces masses finissent ensuite par ne plus exercer, sur lui, que des influences passagères et divergentes.

Par suite du décroissement des deux actions précédentes, les satellites d'une même planète se rapprochent de la vitesse angulaire définitive, qui leur est assignée, par leurs momens, et par l'attraction de cette planète. Ils s'écartent donc aussi de la conjonction, et leurs actions réciproques deviennent elles-mêmes passagères et divergentes.

L'action même du soleil diminue. La force d'éloignement, qu'il exerçait sur le satellite, était à son maximum, tant qu'il restait, par rapport à la planète, en conjonction ou en opposition avec le satellite. Mais une fois que le satellite acquiert une vitesse angulaire supérieure à celle de sa planète, cette force ne revient plus que momentanément à son maximum, et ses effets sont d'autant plus atténués qu'elle est négative par intervalle.

94. Toutes les influences qui viennent d'être énumérées diminuent graduellement; les oscillations, qu'elles tendent à produire dans les vitesses, et dans les distances des satellites à leur planète, diminuent de même ; et diminuent d'autant plus que leurs causes multipliées se contrarient souvent mutuellement.

Chaque satellite est donc ramené, sans rapprochement brusque, et par un mouvement presque perpendiculaire à son rayon vecteur, au point où, la force centrifuge et les autres actions subsistantes, font seules équilibre à l'attraction de leur planète. Il doit par conséquent décrire, sauf encore les perturbations subsistantes, une orbite sensiblement circulaire. Ces perturbations conservent une influence permanente, sur l'étendue des orbites, et la durée des révolutions. Elles troublent même la constances des aires décrites ; mais, les pertes et les accroissemens qu'elles y produisent, se compensent après des périodes plus ou moins longs.

95. Toutes ces causes, dont dépend la distance d'un satellite à sa planète, ne sont que des différences d'attraction. Le rapprochement, produit par l'affaiblissement de l'une d'elles, amène donc une diminution dans l'action de toutes les autres.

On conçoit déjà que toutes ces diminutions combinées, peuvent amener un rapprochement considérable, et supérieur à celui qu'éprouvent les planètes par rapport au soleil. D'où doit suivre un bien plus grand accroissement dans la vitesse angulaire.

Au reste, dans toute hypothèse, il était impossible que les vitesses angulaires ne se modifiassent pas, de manière à acquérir la valeur déterminée, pour chaque masse, par l'attraction qui a subsisté pour elle, et par le moment qu'elle a conservé ; ce qui implique l'observation de la loi des durées. Ainsi, le fait d'une immense inégalité de vitesse angulaires, ne peut donner matière à aucune objection, contre la presque égalité primitive à laquelle nous avons été conduits.

Chap. V.—*Mouvemens définitifs de rotation.*

96. Jusqu'au moment où les différentes masses ont atteint le rayon vecteur, les directions de leurs grands diamètres, se sont, à-peu-près, maintenues sur la ligne des centres. Par suite, toutes ces masses ont acquis des vitesses angulaires de rotation, peu différentes de leurs vitesses angulaires de translation, et dirigées dans le même sens, c'est-à-dire, toujours de droite à gauche.

Les molécules, de chaque masse, éprouvant à-peu-près les mêmes influences que les parties détachées de ces masses; les mouvemens de rotation, nous présenteront généralement aussi des effets analogues à ceux que nous avons rencontrés, dans les mouvemens de translation. Nous nous contenterons de les indiquer succinctement.

97. *Masse solaire.*—Dès que le grand diamètre solaire a dépassé le rayon vecteur, l'action de la masse prédominante devient retardatrice, jusqu'à ce que l'écartement arrive à 90°. Mais, encore ici, la plus grande intensité de la force accélératrice angulaire a été employée à l'accélération, puisque l'écartement n'est arrivé à être nul qu'au-delà du périastre. On doit donc encore admettre que les momens acquis, depuis l'origine du mouvement, ne peuvent être entièrement détruits dans ce période de retardement. La perte d'aire éprouvée, par l'ensemble des molécules, pendant ce période, doit même coïncider avec une grande augmentation de vitesse angulaire, parce que, la masse éprouve un raccourcissement considérable, dépendant des mêmes causes qui produisent le rapprochement des planètes.

98. Quant l'écartement atteint 90°, l'action de la masse prédominante, tend à applatir tout-à-fait la masse solaire, dans le sens de son grand diamètre, déjà successivement contracté; et à allonger cette masse, dans le sens perpendiculaire. Mais, il est peu vraisemblable que les déplacemens puissent s'opérer assez rapidement, dans cette masse immense, pour lui enlever, dès-lors entièrement, l'allongement qu'elle avait acquis. Ainsi, la masse solaire devra sans doute, ultérieurement éprouver encore quelques alternatives d'accroissemens et de pertes dans les aires,

d'allongemens et de raccourcissemens. Mais ces alternatives devront au moins s'affaiblir, par l'éloignement de la masse prédominante.

Les planètes, de leur côté, cessent d'être sensiblement en conjonction ; elles opposent un moindre obstacle au raccourcissement de la masse solaire, à mesure qu'elles s'écartent du prolongement de son grand diamètre.

Enfin, l'allongement disparaît nécessairement de la masse solaire, quand toutes les actions extérieures sont devenues insensibles. Cette masse, sous l'influence de son attraction centrale et de sa rotation, prend alors la forme d'un sphéroïde applati vers ses pôles et renflé vers son équateur.

99. L'accroissement de vitesse angulaire, amené par ce changement de forme, se fait principalement sentir dans la zone équatoriale, où se répartissent, en vertu de leur force centrifuge, les molécules animées de la plus grande vitesse. Les frottemens étant d'ailleurs très-faibles, dans les fluides élastiques, cette zone peut conserver quelque tems, une vitesse angulaire bien supérieure à celle du noyau.

Du reste, la somme des aires décrites par les molécules autour du centre, est devenue invariable pour la masse ; et sa vitesse moyenne de rotation ne peut plus éprouver de changemens que par les condensations graduelles.

100. *Planètes.*—Les masses qui influent sur chaque planète, sont : ses propres satellites, les autres planètes, la masse solaire et la masse prédominante. Chacune de ces masses, considérée séparément, tendrait à produire, mais dans des périodes différens, des effets analogues à ceux qui viennent d'être décrits pour la masse solaire. Sans suivre pas à pas ces effets compliqués, il est évident qu'ils doivent diminuer graduellement, et par l'éloignement de la masse prédominante, et par la divergence qui s'établit entre les autres actions.

Enfin, ces actions, variables et divergentes, ne produisent plus, dans chaque masse, que de faibles marées. L'attraction centrale et la rotation conservant seules une influence sensible, la forme d'un sphéroïde allongé, se trouve remplacée, par celle d'un sphéroïde applati vers les pôles et renflé vers son équateur. L'aire totale de la masse, autour de son centre, est devenu invariable. Sa vitesse angulaire moyenne doit s'accroître encore par la condensation. L'accroissement que vient de recevoir cette vitesse, par le raccourcissement, n'étant pas le même pour tous les points, la zone équatoriale conservera, un certain temps encore, une vitesse angulaire supérieure à celle du noyau.

101. *Satellites.*—La diminution graduelle de toutes les attractions, qui agissent sur chaque satellite, y produit des effets analogues, en plusieurs points, aux effets observés dans les planètes. Cependant, la grande prédominance de l'action de sa planète sur toutes les autres actions, établit, entre ces effets, une différence essentielle. Nous pouvons citer un fait à l'appui de cette prédominance : Les marées lunaires l'emportent notablement sur les marées solaires ; le soleil, quant aux effets qui dépendent des différences d'attractions, n'a donc, sur les planètes, qu'une très-médiocre influence. Si l'action lunaire est déjà prédominante sur la terre, de combien plus, l'action de la terre, ne doit-elle pas être prédominante, par rapport à la lune. Du reste, quant à l'intensité, les actions mutuelles de ces deux astres, ne sont plus comparables, aujourd'hui, à ce qu'elles étaient, quand leurs masses, encore vaporisées, occupaient des espaces bien plus étendus.

Indépendamment de cet exemple, on sait que les différences d'attraction sont, en général, d'autant plus sensibles que les masses sont plus rapprochées.

Ainsi, la tendance à l'allongement et la force accélératrice angulaire, produites, dans chaque satellite, par l'action de sa propre planète, sont prédominantes sur les forces correspondantes dues aux autres masses ; et, en même temps, bien supérieures à celles qui résultent, pour chaque planète, de l'action du soleil.

Or, pour chaque satellite, l'action de sa planète subsiste, et s'accroît même par le rapprochement ; la diminution de toutes les autres causes, ne tend donc pas à opérer, dans sa longueur, une contraction comparable à celle qui a lieu dans les planètes.

D'un autre côté, la vitesse angulaire de translation du satellite, doit, pour se conformer à la loi des durées, éprouver une augmentation bien plus forte que celle des planètes. La vitesse angulaire de rotation, acquiert donc, sur la vitesse angulaire de translation, une bien moindre supériorité, dans le satellite que dans les planètes.

Ainsi, quand le grand diamètre du satellite a dépassé, dans le sens de sa rotation, son rayon vecteur particulier, il s'en écarte peu rapidement ; et la force accélératrice angulaire, dûe à l'action de sa planète, peut détruire ce faible excédant de vitesse.

102. Quand les mouvemens de translation se sont établis d'une manière invariable, les satellites conservent, en se condensant, la forme de sphéroïdes allongés. La condensation y est plus lente que dans les autres masses, parce que leur attraction centrale est moins puissante ; cette condensation tend à produire aussi des accélérations moins rapides, dans leur vitesse angulaire de rotation, et la force accélératrice angulaire peut continuer à les détruire.

Enfin, quand la condensation est arrivée à son terme, de faibles oscillations, dues aux perturbations subsistantes, viennent encore troubler l'égalité des vitesses angulaires de rotation et de translation. Mais l'allongement, conservé dans la masse, incomparablement plus faible qu'à l'état de vapeur, suffit encore pour ramener, après un certain tems, ces deux vitesses à l'égalité.

183. Au total, la condition, pour l'établissement de cette égalité, est que l'inégalité primitive n'ait pas été assez considérable, pour ne pouvoir être détruite par la force accélératrice angulaire. Les satellites présentent, en général, comme on l'a vu, beaucoup plus de chances que les planètes, pour satisfaire à cette condition ; mais il n'est pas évident, qu'ils doivent toujours nécessairement la remplir. Il ne paraît donc pas impossible, que, dans certains systèmes, les satellites les plus éloignés de leur planète, ayent acquis, définitivement, une vitesse angulaire de rotation supérieure à leur vitesse angulaire de translation. Les planètes, les plus rapprochées de leur soleil, pourraient, quelque fois aussi, présenter l'égalité de ces deux vitesses.

104. *Anneaux.*—Revenons aux astres qui ont acquis, d'abord, une rotation assez rapide pour empêcher cette égalité de s'établir.

Les molécules, en s'y rapprochant du centre, tendent à conserver leurs momens. La vitesse absolue de chaque molécule, tend donc à varier, en raison inverse de sa distance à l'axe de rotation ; et la vitesse angulaire, en raison inverse du carré de cette même distance.

La condensation donne, au mouvement de chaque molécule, une composante dirigée vers le centre ; mais la résistance, que lui oppose la force expansive du fluide, rend cette composante assez faible pour qu'on puisse en faire abstraction, et considérer le mouvement comme circulaire.

Or, dans le mouvement circulaire, pour un moment donné, la force centrifuge est en raison inverse du cube de la distance à l'axe de rotation. L'attraction, de son côté, ne croît qu'en raison inverse du carré de la distance au centre; ou de la distance à l'axe de rotation; car, en supposant que la condensation s'opère régulièrement, cette dernière distance restera, pour chaque molécule, proportionnelle à la précédente.

Dans la zone équatoriale, la force centrifuge est déjà, de beaucoup, plus considérable que dans le reste de la masse. Par la condensation, cette force s'accroît plus rapidement que l'attraction centrale; elle peut donc, quelquefois, acquérir assez d'intensité pour lui faire équilibre, malgré la perte d'aire éprouvée par la masse, dans les alternatives qu'elle a subies précédemment. Cette zone alors, se soutenant d'elle-même, est nécessairement abandonnée par les couches inférieures, quand elles éprouvent de nouvelles condensations. Elle forme un anneau, qui continue sa rotation autour de la masse condensée.

Les couches inférieures de l'anneau, animées d'une moindre vitesse angulaire que les couches supérieures, avaient, à plus forte raison, moins de force centrifuge. Cette différence de force centrifuge, se conservant, après la séparation de l'anneau, tend à l'étendre dans le plan de son équateur, et à l'aplatir dans le sens perpendiculaire. Il pourra se diviser plus tard, par l'effet de sa propre condensation.

## Chap. VI.—*Progrès ultérieurs de la condensation.*—Liquéfaction.—Solidification.

105. *Noyau liquide.* — Dans chaque masse vaporeuse, les condensations successives suivent, pendant un certain tems, une progression croissante, par suite de l'augmentation de la pression. Elles ne cessent d'accroître l'incandescence des astres, et leur vitesse angulaire de rotation.

C'est au centre que la condensation s'opère le plus rapidement. Les brouillards lumineux, formés dans les autres parties de la masse, descendent lentement vers ce point, et finissent, en s'y accumulant, par y déterminer la formation d'un noyau liquide.

106. *Changemens dans les vitesses.* — Les brouillards, venus des parties supérieures, tendent à conserver leurs momens de rotation; ou, n'en perdent, du moins, que ce qu'ils en trans-

mettent aux couches qu'ils traversent. Ils viennent donc augmenter sans cesse, la vitesse de rotation des couches inférieures et du noyau. En même tems, les substances les plus légères sont forcées, de refluer vers la surface, dont elles diminuent la vitesse.

Cet échange continuel de substances, doit donc, au bout d'un certain tems, ôter à la surface, sa supériorité primitive de vitesse angulaire; et lui donner ensuite une vitesse angulaire de plus en plus inférieure à celle du noyau.

Cette cause diminue beaucoup les chances de formation d'anneaux; et rend surtout, peu probable, la formation successive de plusieurs anneaux dans un même globe.

107. *Progrès de l'incandescence. Refroidissement.*—Le noyau liquide s'accroît successivement aux dépens de l'atmosphère. Tant que les pertes de cette atmosphère sont peu considérables, elles n'empêchent pas la pression de s'accroître à la surface du liquide; car, chaque couche, en se rapprochant du centre, en éprouve une attraction plus forte. Mais il se trouve un point où, cet accroissement de la pesanteur, quoique très-rapide, ne peut plus compenser la diminution de la masse atmosphérique. La chaleur croissante du noyau, tend d'ailleurs à ralentir les condensations ultérieures. Enfin les condensations deviennent trop faibles pour compenser les pertes de calorique, et la masse liquide commence à se refroidir.

108. Les mouvemens qui s'opèrent, dans cette masse, transmettent le refroidissement de la surface au centre. Les couches refroidies, devenues plus denses, s'enfoncent dans le liquide, et sont remplacées par des parties plus échauffées.

Ces échanges, entre les différentes couches, n'ont pas lieu instantanément. Il est d'ailleurs des différences de densité, qui ne peuvent être compensées par la différence de température; et, sauf par des causes accidentelles, les substances les plus denses ne pourront monter jusqu'à la surface, ni les plus légères descendre jusqu'au centre.

Ainsi, ces déplacemens ne suffiront pas pour conserver, à la surface, une température égale à celle du centre; mais seulement pour rendre son refroidissement très lent.

Le contact de cette surface maintiendra l'atmosphère elle-même, à une température moyenne et à une pression, à peu près constantes.

109. La masse en rotation, conserve, à l'état liquide, comme

à l'état de vapeur, la forme d'un sphéroïde, aplati vers ses pôles et renflé vers son équateur. Or, le rayonnement est d'autant plus considérable, que la courbure est plus prononcée. Le refroidissement étant, par suite, plus rapide à l'équateur qu'en tout autre point; il doit s'y opérer continuellement des condensations de vapeurs. Les globules vésiculaires s'y rassemblent en nuages, qui, après avoir été tenus quelque tems en suspension, finissent par se résoudre en pluie de feu, quand leur condensation est plus avancée.

Le vide laissé dans l'atmosphère, par la formation et la chûte des nuages, se comble, à mesure, par l'affaissement des couches supérieures, et par le rapprochement des couches latérales.

Ce mouvement se transmet, de proche en proche, jusqu'au pôle; de sorte que la pression se trouve diminuée, sur toute l'étendue de la surface liquide, dont la température moyenne ne varie sensiblement qu'à de longs intervalles. Cette pression n'est donc plus capable de contrebalancer la tension du liquide, dans les points les plus échauffés, c'est-à-dire vers les pôles. Il s'y forme des vapeurs nouvelles, qui s'élèvent dans l'atmosphère, jusqu'à ce qu'elle ait reçu une expansion suffisante, pour faire de nouveau équilibre à la tension des liquides.

L'atmosphère, ainsi élevée dans les régions polaires, s'écoule vers l'équateur, par un courant supérieur. Dans la zone équatoriale, la chûte des liquides précipite, vers la surface, une partie de l'atmosphère, et la refoule vers les pôles. L'excédant de la densité atmosphérique, dans la partie la moins échauffée, contribue encore à l'établissement de ce courant inférieur.

Ces effets sont tout-à-fait analogues à nos vents alisés, mais de direction inverse. Dans les deux cas, le courant supérieur l'emporte, sur le courant atmosphérique inférieur, de toute la substance qui retombe condensée dans la région la plus froide. Sur un noyau solide, l'échange de substances, entre les deux régions, doit être complété par des courans liquides. Dans une masse toute liquide, la surcharge occasionnée sur l'équateur, par les substances qui y tombent condensées, fait simplement refluer les molécules vers les pôles, par un déplacement général, peu sensible.

110. Les molécules qui s'élèvent, dans une atmosphère en rotation, si elles conservaient leur vitesse absolue, perdraient déjà une partie de leur vitesse angulaire. Mais, la vitesse absolue tend, elle même, à diminuer en vertu du principe de la conser-

vation des aires. Ainsi, en général, l'évaporation tend à ralentir le mouvement des couches supérieures de toute atmosphère. Les frottemens seuls, toujours très faibles dans les fluides élastiques, tendent à rétablir, dans la masse, l'égalité de vitesse angulaire.

111. La température des astres incandescens tend à y produire un énorme développement de l'atmosphère. Les couches supérieures, où la force expansive n'est plus contrebalancée que par une faible pression, y sont excessivement rares; ce qui diminue encore pour elles l'intensité du frottement. Il faut donc des temps immenses, pour que, dans de telles masses, la vitesse du noyau se transmette jusqu'aux couches supérieures de l'atmosphère.

D'un autre côté, la perte de vitesse éprouvée par les molécules, venues du noyau jusqu'à ces couches, est d'autant plus forte que la distance parcourue est plus grande par rapport au rayon du noyau liquide.

Enfin, dans les astres incandescens, les pertes éprouvées par l'atmosphère, dans la zone équatoriale, se réparent aux dépens de la région polaire, où les molécules sont animées d'une vitesse absolue beaucoup plus faible.

De toutes ces causes réunies, on peut conclure que, dans un astre incandescent, la vitesse angulaire, des couches supérieures de l'atmosphère, doit être incomparablement plus faible, que celle du noyau liquide. Et que, par conséquent, cette atmosphère peut s'étendre bien au-delà des limites, qu'elle ne pourrait atteindre, sans être dissipée par la force centrifuge, si cette différence de vitesse n'existait pas. C'est ainsi que chaque astre, dans son état d'incandescence, peut conserver ses parties les plus volatiles, qui, plus tard, doivent seules former son atmosphère.

112. *Solidification.*—Après d'immenses périodes, le refroidissement progressif des astres, les amène à une température telle, qu'une partie des substances qui les composent, ne peut plus y subsister à l'état liquide. C'est à la surface que tend à s'opérer cette congélation, puisque son refroidissement devance toujours celui des couches inférieures.

La plupart des corps ont vraisemblablement, comme l'eau, la propriété de se dilater près du terme de la congélation; ce qui tend à arrêter les échanges de substances, entre la surface et les couches inférieures. Tant que ces échanges ne sont que ralentis, le refroidissement superficiel, quoique s'accélérant toujours, suit encore une marche graduelle. Quand ces échanges sont tout-à-fait arrêtés, ce refroidissement éprouve, pendant quelques instans, un accroissement très rapide. Les couches inférieures de l'atmosphère y participent; les vapeurs s'y condensent en abondance, et le noyau s'enveloppe d'un épais brouillard.

113. Ce brouillard, aussitôt formé, arrête le rayonnement de de la surface liquide, et les progrès du refroidissement s'y trouvent de nouveau ralentis. L'incandescence se conserve, dans les couches inférieures du brouillard. Mais elle s'affaiblit de proche en proche, et disparaît entièrement dans la couche supérieure, où, rien ne met obstacle au rayonnement, et où, d'ailleurs, la chaleur du noyau peut à peine arriver.

Le refroidissement de l'atmosphère forme sans cesse de nouveau globules; ils viennent remplacer ceux qui se déposent, peu à peu, sur le noyau. Le brouillard épais, produit par le refroidissement brusque de la surface liquide, tend donc à se perpétuer, quand ce refroidissement s'est ralenti, en empêchant la chaleur du noyau d'arriver jusqu'aux couches supérieures de l'atmosphère. L'astre peut rester long-temps, ainsi, invisible à tous les yeux.

114. La surface liquide, n'éprouve, sous ses brouillards, que des variations de température très lentes et sensiblement égales sur toute son étendue. Elle se maintient, par suite, dans un repos presque absolu, et peut, avant de se solidifier, descendre, de plusieurs degrés, au-dessous du point de la congélation des substances dont elle est formée. D'un autre côté, la lenteur du refroidissement lui permet de se communiquer, par le simple contact, à de grandes profondeurs.

Quand donc la solidification commence à s'opérer en quelque point, la secousse, qui en résulte, fait congeler en masse la surface, sur une épaisseur considérable. Il en résulte un immense dégagement de calorique. La surface avait d'ailleurs conservé, jusques-là, une énorme température, puisque toutes les substances s'y étaient maintenues à l'état liquide. Tout nuage se dissipe alors dans l'atmosphère, et l'astre apparaît avec un vif éclat. Mais ce n'est qu'une lueur passagère : la surface se refroidit par une émission rapide; ses pertes ne sont plus réparées par le renouvellement de sa substance, mais seulement par le calorique qui se transmet si lentement de molécule à molécule. Un reste d'incandescence est bientôt caché par les brouillards qui se reforment, et l'astre disparaît pour toujours; à moins qu'un foyer voisin ne l'éclaire de quelques rayons.

115. Les brouillards, qui environnent l'astre solidifié, ne sont pas éternels. Ils se déposent, peu à peu, sur le noyau. Ceux qui se reforment continuellement dépouillent successivement l'atmosphère de ses parties les moins volatiles.

Plus tard, l'eau elle-même cesse d'y être un gaz permanent. Quelques parties de cette substance, si volatile, commencent à à se condenser et à tomber sur la surface solidifiée. Elles se vaporisent aussitôt qu'elles la touchent, et contribuent à hâter son refroidissement.

Enfin, sa température descend au-dessous du degré d'ébullition de l'eau ; terme très-variable, d'un astre à l'autre, et même, dans chaque astre, d'une époque à la suivante, puisqu'il dépend du développement de l'atmosphère. Alors, les eaux cessent de se vaporiser en touchant la surface.

Tandis que la croute solide ne cesse de se refroidir, le noyau liquide, garanti par elle, n'éprouve pas de diminution sensible dans sa température ; et conserve, par suite, un volume à-peu-près constant. Cette croute, en se contractant, doit donc nécessairement se rompre en tous sens.

116. Tant que la vaporisation était instantanée, l'atmosphère seule était agitée ; le calme régnait sur toute la surface solide. Une ère de bouleversemens commence pour elle, aussitôt que l'eau peut y séjourner. Ce liquide, s'introduisant dans les fissures, pénètre jusqu'au noyau incandescent. Sa vaporisation subite produit d'effrayantes explosions : elle soulève ou déprime les parties solides, dont elle envoye au loin des éclats ; fait jaillir des fleuves de la matière incandescente du noyau, et laisse ce noyau même, à découvert en bien des points.

117. La violence de ces révolutions commence à se calmer, quand les eaux ont refroidi la majeure partie des surfaces qui leur sont abordables. Long-temps encore, ils se reproduisent de loin en loin ; car de nouvelles fissures se forment, successivement, dans les parties récemment solidifiées, et permettent aux eaux de pénétrer encore jusqu'au foyer central. Mais, les explosions, qui en résultent, deviennent moins terribles et plus rares, à mesure que la couche solide, plus épaisse, leur oppose un plus grand obstacle.

Chp. VII. — *Parcelles abandonnées aux confins des systèmes.*

118. Quand la vapeur universelle s'est divisée en masses immenses, destinées à former les systèmes, ces masses ont aban-

donné, à leurs confins, les parcelles également attirées par deux d'entre elles. Ces parcelles, demeurées pour ainsi dire indécises, enveloppant de tous côtés les grandes masses, devaient être innombrables.

119. Leurs masses étaient très-inégales, par suite de l'irrégularité qui a présidé à la division de la matière. Toutes devaient être très-faibles ; car l'attraction des masses voisines n'était sensiblement égale que sur une très-petite épaisseur.

120. L'égalité des attractions éprouvées, par cette multitude de petites masses, eût-elle été d'abord rigoureuse, s'est trouvée nécessairement rompue par les déplacemens des systèmes. Elles se sont donc attachées à l'un d'eux, traversant en tous sens le plan de son écliptique, et rencontrant fréquemment les astres qui s'y meuvent régulièrement.

121. Leurs orbites, comme celles des systèmes eux-mêmes, devaient être très-excentriques. Les mouvemens qu'elles ont acquis, autour de leur centre, à leur premier passage au périhélie, devaient être dirigés dans le même sens que leur mouvement de translation, et encore à-peu-près dans le même plan. Les exceptions à cette loi ne pourraient provenir que de causes accidentelles.

Ces parcelles n'ont pu d'ailleurs se diviser, à leur premier périhélie, parce qu'alors, à-peu-près au même état de nébulosité que les masses solaires, elles offraient une infériorité de volume proportionnée à celle de leur masse, et par conséquent énorme.

122. Les substances qui composent toutes ces petites masses ne doivent pas différer, par leur nature, mais seulement par leur proportion, des substances dont sont formés tous les grands systèmes. En effet, il existe, dans les fluides élastiques une tendance générale à se mélanger uniformément : quand toute la matière se trouvait à cet état, et s'y trouvait depuis un temps infini, elle devait donc présenter, partout, une composition uniforme. Les premières condensations ont dérangé cette uniformité de composition : les brouillards s'accumulaient lentement, autour des centres d'attraction ; et laissaient, les substances les plus volatiles, dans les parties qui éprouvaient une dilation. Les parcelles abandonnées, dans les points où se sont opérées les ruptures, devaient donc contenir, en plus grande proportion que toutes les autres masses, les substances les plus volatiles ; et notamment l'eau et les gaz.

Néanmoins, la tension d'aucune substance n'étant absolument nulle , toutes doivent nécessairement exister dans chaque partie séparée de la matière universelle. L'état peu avancé de la condensation , et l'extrême lenteur du mouvement des brouillards , ont contribué , d'ailleurs , à diminuer l'inégalité de distribution, des diverses substances , entre les différentes masses.

123. Les parcelles abandonnées aux confins des systèmes, n'ont pu éprouver qu'une très lente condensation , puisque leur attraction centrale est excessivement faible. Cette cause tend à accroître encore l'étendue de leur atmosphère. Cette atmosphère ne peut , sans un énorme développement , contrebalancer , par sa pression , la tension des vapeurs , et ce développement même ne peut y produire qu'une pression peu considérable encore. Quand cette pression peut déterminer dans la masse la formation d'un noyau solide ou liquide , l'eau doit se maintenir encore presque constamment à l'état de vapeur , et former la majeure partie de l'atmosphère.

124. Cette atmosphère, en vertu de l'attraction du noyau, tendrait à former une sphère dont elle occuperait le centre. Elle est allongée par l'attraction solaire, à mesure que l'astre s'approche du périhélie.

Quand il y a une différence sensible , dans l'allongement des deux hémisphères, c'est celui, qui est le plus voisin de la masse centrale du système, qui doit être le plus allongé. Si cette dernière masse est incandescente , la masse vaporeuse augmente de volume à mesure qu'elle s'en approche, et diminue peu après qu'elle a commencé à s'en éloigner.

Nous poursuivons , comme on le voit , nos déductions , sans nous inquiéter, quant à présent, si elles s'accordent avec ce que nous voyons. L'examen de cette question appartient à la troisième partie. D'après les lois de la physique, les faits doivent être évidemment conformes à ces déductions ; l'apparence, qui nous la montre autrement , est donc nécessairement une illusion. Nous chercherons, nous trouverons peut-être , la cause qui peut la produire.

## TROISIÈME PARTIE.

### ÉTAT ACTUEL DE L'UNIVERS.

*Comparaison des faits observés avec les conséquences déduites de la théorie.—Faits négligés dans cette théorie.—Anomalies.*

#### *Observation.*

125. Déjà l'on a reconnu, dans les faits que nous avons dé-

duits, une partie de ceux que nous avons devant les yeux. Sans doute, en poussant la théorie jusqu'à ses dernières conséquences, on aurait pu y comprendre tous les faits, et toutes les circonstances de chaque fait. Mais la complication qui en fût résultée, et le vague qui s'attache essentiellement aux généralités auraient fatigué l'attention. Il nous a paru préférable de restreindre la théorie générale aux points les plus saillants, et d'appliquer pour le reste, nos explications, à des faits spéciaux, qui toujours fixent mieux les idées. C'est ce que nous allons faire, dans cette troisième partie, en passant en revue la série des phénomènes observés.

## Chap. Ier.—*Phénomènes extérieurs au système solaire.*

126. *Distribution des astres dans l'espace.*—Le premier fait qui s'offre à nous, l'aspect général du ciel, paraît, au premier abord, s'accorder peu avec notre théorie. Nous sommes arrivés à une répartition égale de la matière, dans l'espace infini. Les étoiles que nous apercevons sont renfermées dans un espace très-irrégulier, qui offre une immense profondeur dans le sens où nous apercevons la voie lactée, et dont les limites sont beaucoup plus rapprochées dans les autres directions.

Mais apercevons-nous les bornes de l'espace? Quelque énorme que soit la distance de la dernière étoile visible, nous pouvons encore concevoir des distances, mille fois, un million, un milliard de fois plus grandes; et, ces distances ne nous conduiront jamais à la limite de l'espace. Qu'existe-il dans ces espaces où nous n'apercevons rien? Le vide, toujours le vide?

On répugne à admettre une telle hypothèse. Cette répugnance est fondée sur le principe des causes finales; principe qui résulte de l'habitude, où nous sommes, de découvrir un but dans tout ce que nous rencontrons, et qui se présente, malgré nous, à notre esprit, toutes les fois que nous arrivons aux *bornes de nos connaissances positives.* Il peut sans doute nous induire en erreur, parce qu'il ne nous est pas toujours donné de reconnaître le véritable but; mais, plus souvent, il nous fait devancer les résultats de l'observation.

Déjà, par cette seule considération, nous devrions regarder comme peu probable, l'hypothèse d'un vide infini, enveloppant un espace limité qui renfermerait toute la matière.

Un tel état de l'Univers, n'est nullement, d'ailleurs, une conséquence nécessaire de l'aspect du ciel; Les astres ne sont pas incandescens depuis l'éternité ; quelle que soit la durée que nous accordions à cette incandescence, il est des distances telles, que la lumière n'a pu les parcourir, depuis que ses premiers rayons se sont manifestés dans l'Univers. De ce que nous ne voyons rien à ces distances, nous ne pouvons conclure qu'il n'y existe rien. Les limites que nous reconnaissons au grand système auquel se borne notre vue, se concilient donc avec les conséquences que nous avons d'ailleurs déduites rigoureusement.

L'irrégularité de ces limites ne leur est pas plus opposée ; puisque la division de la matière universelle n'a pu résulter que d'une irrégularité préétablie.

127. *Systèmes stellaires des différens ordres.* — La première division de la matière a dû produire des masses finies. Il n'est donc pas impossible que la masse qui a produit la voie lactée, soit résultée de la première division de la matière, ou d'une de ses premières sous-divisions.

Nous désignerons les systèmes de cet ordre, sous le nom de systèmes *polyastres*. Les systèmes polyastres, les plus rapprochés de nous, apparaissent sous la forme de petites nébuleuses, tout-à-fait différentes, par leur aspect, des nébuleuses qui résultent de la condensation de la matière vaporeuse. Les autres systèmes polyastres, en nombre infini, n'ont pas encore fait parvenir, jusqu'à nous, leurs premiers rayons lumineux.

128. Nous avons vu que la fixité du centre de gravité d'un système, doit s'approcher d'autant plus d'être rigoureuse, que ce système provient d'une division d'un ordre plus élevé. Cependant les grands systèmes, provenant de la première division de la matière universelle, ne sont pas eux-mêmes absolument fixes : les attractions de deux masses sphériques, composées de couches concentriques homogènes, sont les mêmes que si la masse entière de chacune d'elles était réunie à son centre de gravité ; mais ce principe n'est plus rigoureusement vrai, entre deux masses ou deux systèmes irréguliers, tant que leur distance est finie. Abstraction faite de tout déplacement dans les centres de gravité des grands systèmes, les attractions réciproques de ces systèmes ont varié, par les changemens survenus dans leur forme, et par les mouvemens établis dans leurs dernières sous-divisions. L'attraction éprouvée par chaque système, ne peut donc être restée, mathématiquement, la même dans tous les sens. Quelle que soit la faiblesse de cette cause, son effet doit finir par devenir sensible ; et, dans un temps incalculable, des

mouvemens, semblables à ceux des dernières divisions de la matière, s'établiront entre les systèmes polyastres eux-mêmes, après s'être successivement propagés aux systèmes des ordres intermédiaires. Au reste, quand ces mouvemens auraient acquis, dès à présent, toute leur intensité, les déplacemens opérés à d'aussi grandes distances, seraient encore innappréciables, depuis les premières observations humaines.

129. L'observation fait reconnaître des mouvemens, entre les parties de chaque système stellaire de l'ordre inférieur, c'est-à-dire, entre les étoiles partielles qui composent chaque étoile multiple. Déjà même, quelques-uns de ces systèmes ont montré de légers mouvemens dans leur ensemble. Mais les systèmes des ordres supérieurs, n'en laissent jusqu'à présent appercevoir aucun; soit à cause de la faiblesse réelle de ces mouvemens, soit à cause de la distance à laquelle ils s'opèrent.

130. *Étoiles doubles.*—Les élémens des étoiles doubles offrent généralement, dans leurs orbites, de grandes excentricités. Cependant nous supposions encore, aux orbites primitives, une excentricité plus grande; et elle devait être telle, sans doute, pour déterminer la formation des systèmes planétaires. *

On pourrait, je crois, démontrer que l'excentricité a dû notablement décroître, pendant les premières révolutions. Mais le temps et l'espace me manquent pour développer cette nouvelle idée; je me contenterai d'indiquer quelques élémens de la démonstration.

131. Quand une étoile achevant sa première révolution, revient pour la première fois à son apastre, elle y retrouve, non les masses voisines, mais au moins les centres de gravités des systèmes voisins, sensiblement aux mêmes lieux où elle les a laissés. De son côté, sans revenir précisément à son point de départ, elle en approche assez, pour éprouver à-peu-près les mêmes attractions qu'en ce point, et pour recevoir, par suite, une

* Si l'on observait quelque étoile double dont l'orbite fût sensiblement circulaire, on ne pourrait lui assigner la même origine : elle ne pourrait provenir que d'une nébuleuse unique, comprenant accidentellement deux centres principaux de condensation à-peu-près égaux, et qui se seraient séparés au moment du passage au périastre, par la même cause qui a séparé les planètes de leur soleil.

seconde vitesse, dont la composante perpendiculaire au rayon vecteur, soit à-peu-près égale à la première. Supposant exactement doublée l'aire décrite par cette étoile autour de son étoile conjuguée, faisant en outre abstraction du changement qu'à pu éprouver son *apastre*, on trouve, par un calcul très-simple, que sa distance *périastre* serait déjà quadruplée. L'excentricité de l'orbite serait donc notablement diminuée, dès la seconde révolution, et pourrait diminuer encore pendant quelque autres.

On verrait qu'en outre le grand axe de l'orbite s'avancerait, dans le sens du mouvement, en s'approchant des masses qui ont donné, à ce mouvement, une composante perpendiculaire à son rayon vecteur. Enfin, l'on verrait aussi, que la distance *apastre* diminuerait.

132. L'augmentation de la distance périastre a préservé les systèmes planétaires, des violentes perturbations qu'ils eussent éprouvées, sans cela, à chaque retour au périastre. En effet, la distance d'un système planétaire à son étoile conjuguée, étant supposée quadruplée, l'attraction serait réduite au seizième, et les différences d'attractions, qui seules peuvent produire des perturbations dans le système, seraient diminuées dans un bien plus grand rapport.

133. *Étoiles simples.*—Il est probable que le nombre des étoiles dédoublées s'accroîtra avec le perfectionnement de nos instrumens. Cependant, on observe aussi des étoiles que rien n'autorise à supposer doubles.

Les masses produites par la dernière subdivision de la matière, n'ont pu, sauf dans des cas tout-à-fait exceptionnels, rester immobiles et indépendantes de toute autre masse. S'il existe des étoiles simples qui aient une telle origine, elles doivent être privées de planètes et de mouvement de rotation. Mais la plupart des étoiles simples, proviennent, comme les étoiles doubles, de deux masses primitives.

On conçoit, en effet, qu'avec leurs volumes immenses et la grande excentricité de leurs orbites, les masses vaporeuses conjuguées ont dû fréquemment se heurter à leur périastre. Elles ont alors donné naissance à des systèmes d'organisations diverses, suivant les circonstances du choc. Quand les centres des deux masses se sont assez approchés pour que la majeure partie de leur substance restât confondue, il en est résulté une étoile simple.

Le centre de gravité du système, sensiblement en repos avant le choc, doit y rester encore après le choc; de sorte que les étoiles simples doivent jouir du même degré de fixité que les centres de gravité des étoiles doubles.

134. Jusqu'à ce que les deux masses fussent très voisines de leur périastre, leurs orbites, excessivement allongées, se confondaient presque avec leurs rayons vecteurs. Le grand diamètre de chaque masse était intermédiaire entre ces deux lignes. Ces deux masses se sont donc présentées l'une à l'autre la pointe en avant, de manière à se heurter, en glissant, suivant leur plus grande longueur. Chaque masse, après le contact, tendait à suivre son orbite. Un violent mouvement de rotation, dirigé dans le même sens que les deux mouvemens de translation, s'est, en conséqnence, établi, dans la partie dont la vitesse a été atténuée par le choc, ou par la pénétration des deux substances nébuleuses. En même temps, deux parties ont dû, généralement, se détacher en vertu de leur vitesse acquise. La résistance opposée à leur rupture, et l'accroissement de l'attraction centrale ont dû diminuer l'excentricité de leurs orbites, en la laissant cependant encore très considérable. Deux énormes comètes sont donc restées liées à ce système. Chaque révolution les ramène, depuis lors, au point d'où elles se sont détachées, sans cependant les mettre en contact avec la masse principale, qui s'est successivement resserrée.

Une réaction violente a nécessairement suivi la réunion des deux masses primitives : le fluide comprimé par le choc, tendait, avec d'autant plus de force, à reprendre son expansion, qu'un énorme dégagement de calorique était résulté de la compression. Cette force élastique, combinée avec une rotation rapide, a dû détacher des masses partielles, dont les orbites ont pris des inclinaisons, et des excentricités diverses ; mais dont les mouvemens ont dû, le plus souvent, conserver le même sens que la rotation.

Quand cette agitation s'est apaisée, de nouvelles parties ne se sont plus détachées que par suite de la condensation ; celles, dont la force centrifuge faisait équilibre à l'attraction, ont été successivement abandonnées. Incohérentes entre elles, tant que la masse a conservé l'état de nébulosité irrégulière, elles ont formé des planètes, à mouvemens circulaires, et dirigé dans le même sens que la rotation. Ces premières planètes ont été privées de satellites, quand elles se sont détachées tout-à-fait isolément.

Plus tard, la masse, prenant la forme de sphéroïde applati, a commencé à former des anneaux. Les premiers, encore hétérogènes, ont dû se rompre. Leurs parties, une fois séparées, n'ont pu se réunir, par l'attraction réciproque. En effet, les masses partielles, dont le mouvement était ralenti par cette attraction, se rapprochaient du soleil; celles qui recevaient une accélération s'en éloignaient au contraire; toute rencontre, entre elles, devenait donc impossible. Elles n'ont pu que tourner les unes autour des autres. Toutes ces parties d'un même anneau, doivent être inégales, sans doute; mais ne peuvent présenter l'énorme différence, observée dans notre système, entre les planètes et leurs satellites. Du reste, chose remarquable, ces débris d'un même anneau auraient encore tous leurs mouvemens de rotation et de translation, dirigés dans le même sens et dans le même plan.

La grande rapidité de la rotation a pu former ainsi de nombreux anneaux. Si leur formation s'est continuée après la régularisation de la masse nébuleuse principale, leur homogénéïté les a préservés, alors, de la rupture. Il y a, comme on le voit, bien plus de chances pour rencontrer des anneaux, autour des étoiles simples, qu'autour des étoiles partielles qui forment les étoiles multiples.

135. En résumé, les systèmes planétaires de ces deux classes de soleils, présentent dans leurs constitutions plusieurs analogies, mais aussi plusieurs differences essentielles. Notre système paraît, en tout, conforme à celui des étoiles doubles. Cependant, comment n'a-t-on pu reconnaître encore, autour de quel astre se meut notre soleil? Je ne vois que deux manières de le concevoir: ou cet astre est déjà éteint; ou la durée de la révolution solaire est très longue, et le soleil se trouve dans le voisinage de son apastre, depuis les premières observations dont on ait conservé la mémoire.

136. *Nébuleuses.*—Quand la matière était voisine encore de l'uniformité parfaite, tous les changemens étaient excessivement lents; ils sont devenus ensuite beaucoup plus rapides. De très légères différences entre les condensations premières des diverses masses, ont donc pu, plus tard, en amener d'énormes entre les états contemporains de ces masses.

En effet, au milieu d'une infinité de globes lumineux, ou déjà refroidis, nous appercevons encore quelques nébuleuses; et leurs états très divers nous représentent ceux qu'ont traversé successivement les astres plus avancés dans leur formation.

Dans les unes, la condensation ne s'est encore opérée, sensiblement, que sous l'influence des centres accidentels d'attraction, résultans de l'irrégularité préexistante. Cette irrégularité peut n'avoir pas encore cessé de s'accroître. Elle se montre, dans leurs contours, comme dans la distribution intérieure de leur substance.

D'autres nébuleuses, plus avancées, attestent l'influence de leur attraction centrale, tant par leur forme arrondie, que par leur densité, plus ou moins régulièrement croissante de la surface au centre. Quelques-unes présentent, déjà, un noyau très prononcé.

La plupart de ces nébuleuses régulières, obéissant à une attraction extérieure, sont plus ou moins allongées. Quelques-unes offrent la forme d'un long fuseau ; forme qu'elles doivent affecter dans le voisinage de leur périastre. La forme ovoïdale n'y est pas assez prononcée pour avoir été remarquée ; peut-être suffirait-il, pour la reconnaître, de fixer l'attention sur ce point. Au reste, il n'est pas nécessaire que la différence des deux hémisphères soit bien marquée, pour déterminer toutes les planètes à se former du même côté. Peut-être, dans des temps peu éloignés, pourra-t-on voir des parcelles se détacher des nébuleuses les plus allongées.

Les nébuleuses, étant très rares, doivent avoir, généralement, pour astres conjugués, des étoiles déjà condensées. La rotation, fortement accrue dans les autres astres par leur condensation, doit toujours être très lente dans les nébuleuses ; mais elle ne pourrait être absolument nulle, que si leur masse se portait directement sur l'étoile conjuguée.

137. Les nébuleuses, diversement condensées, ont déjà acquis, par le rapprochement des molécules, et surtout par la formation des brouillards, un certain degré d'incandescence. Cette incandescence est d'autant plus vive que la condensation est plus avancée ; mais elle est, le plus souvent, très éloignée de l'éclat des étoiles.

138. *Étoiles qui disparaissent.*—A côté de ces astres retardataires, nous en trouvons aussi qui ont devancé la marche générale. Déjà, nous avons été plusieurs fois témoins du rare phénomène de la solidification des soleils. Les étoiles long-temps observées, qui disparaissent après avoir éprouvé quelque temps un affaiblissement marqué, sont celles où la solidification se prépare, et qui apparaîtront encore un instant aux générations futures. Les astres inconnus, qui paraissent tout-à-coup, pour s'évanouir après avoir brillé d'un éclat passager, sont ceux où la solidification s'opère, et qui disparaissent pour toujours.

## Chap. II.—*Parties excentriques du système solaire.*—Comètes.—Aërolithes isolés.

139. Nous retrouvons, dans les comètes et dans certains aëro-

lithes, les parcelles abandonnées, par la masse vaporeuse de notre soleil, quand elle s'est séparée des masses voisines.

Celles qui ont assez de volume pour que leur marche puisse être suivie, nous montrent des orbites très excentriques et de directions très diverses. Comme les fortes masses qui ont formé les systèmes planétaires, les comètes ont dû perdre, depuis leur première révolution, une partie de cette excentricité. Mais, leur aphélie se rapprochant du soleil, elles ont fini par ne plus recevoir des systèmes voisins, que des perturbations insensibles ; et leurs orbites sont devenues constantes.

Les parcelles innombrables qui forment les aérolithes isolés, passent invisibles, quand elles ne viennent pas rencontrer notre terre. Ayant la même origine que les comètes, elles doivent décrire des orbites tout-à-fait analogues. De même que ces astres, elles ont dû acquérir, à leur premier passage au périhélie, des mouvemens de rotation dirigés dans le même sens que leurs mouvemens de translation.

## § Ier.—*Comètes.*

140. *Queues.*—L'atmosphère des comètes, répandue symétriquement autour du noyau, est transparente et invisible, partout où elle ne contient que des vapeurs et des gaz. Elle ne peut devenir visible que dans les points où quelques vapeurs se sont liquéfiées sous la forme de brouillards.

Ces brouillards, qui réfléchissent quelques rayons lumineux, sont toujours excessivement faibles ; car, ils doivent se proportionner, à la rareté de l'atmosphère qui les supporte. Ils se manifestent principalement dans la partie la plus froide, c'est-à-dire du côté opposé au soleil.

141. Les fluides élastiques ne sont pas sensiblement échauffés par le calorique rayonnant qui les traverse ; c'est seulement à la surface du noyau, que l'influence solaire peut se faire sentir immédiatement. Ce noyau solide, liquide, ou simplement formé, lui-même d'un brouillard, s'échauffe, plus ou moins du côté tourné vers le soleil ; il se refroidit sur la face opposée. Les vapeurs, en contact avec cette face, se condensent ; et le vide, qui en résulte, se remplit par l'affaissement des couches supérieures et le rapprochement des parties latérales.

142. Chaque couche descendue éprouve une pression plus forte que dans la région qu'elle vient de quitter ; elle doit donc, aussi, éprouver une condensation de vapeurs. Le vide, déjà

formé, s'en augmente, et le brouillard se propage ainsi jusqu'à la partie supérieure de l'atmosphère.

Les vésicules de brouillards, dont l'enveloppe est liquide, doivent acquérir, presque immédiatement, une densité moyenne supérieure à celle d'une atmosphère, en grande partie composée de vapeurs. Ces globules creux tendent à descendre dès le premier instant; leur vitesse descendante s'accroît ensuite par l'épaississement de leur enveloppe, ils communiquent, le mouvement descendant, à toute la colonne atmosphérique qu'ils traversent. Ce mouvement, qui tendait déjà à s'établir pour combler les vides inférieurs, peut donc acquérir une assez grande intensité.

La queue se contracte vers sa base, parce que chacune de ses couches éprouve une plus forte pression à mesure qu'elle descend.

143. Le rapprochement latéral se transmet de proche en proche, ce qui diminuerait la pression dans toute l'atmosphère, si des vapeurs ne se développaient, en même temps, à la surface de l'hémisphère échauffé.

Ces vapeurs, en s'élevant, éprouvent une moindre pression; elles tendent donc, non-seulement à conserver leur transparence, mais à dissiper peu à peu les brouillards qui peuvent leur arriver d'ailleurs.

Tandis que la colonne descendante se contracte, les couches inférieures de la masse ascendante, en soulevant les couches supérieures, les étendent latéralement. C'est pourquoi la partie transparente de l'atmosphère, avec une base égale à celle de la queue, acquiert cependant une étendue bien supérieure.

144. *Inclinaison de la queue.*—On a vu que dans toute atmosphère, où des échanges de substances s'opèrent entre les différentes couches, les couches supérieures sont nécessairement douées d'une moindre vitesse angulaire de rotation que les couches inférieures.

Les parties inférieures de la queue doivent donc devancer les parties plus élevées, dans leur mouvement de rotation autour du noyau, et rester elles-mêmes, encore en arrière, par rapport au mouvement de rotation de ce noyau.

Or, ce mouvement est dirigé dans le même sens que le mouvement de translation. Le mouvement de rotation est d'ailleurs direct pour la partie opposée au soleil. Ainsi, la queue doit incliner constamment vers la région que la comète vient de quitter.

Si l'on rencontrait une comète dont la queue présentât une inclinaison opposée, il faudrait en conclure, que, par une cause tout-à-fait exceptionnelle, cette comète aurait acquis un mouvement de rotation opposé à son mouvement de translation.

145. *Intensité relative des diverses parties de la queue.*—Les globules du brouillard, en vertu de leur excédant de pesanteur spécifique, descendent plus vite que les parties non condensées de la queue. Tendant à conserver leurs aires par rapport au centre, ils acquièrent, aussi, plus de vitesse horizontale que ces parties, elles-mêmes accélérées. Ils doivent donc s'accumuler sur la face antérieure de la colonne descendante.

Cette colonne tout entière, acquiert une vitesse de rotation bien supérieure à celle de la masse ascendante de l'atmosphère, qui, par cela même qu'elle s'élève, éprouve un ralentissement. Elle se presse contre cette masse et la partage. Les globules, accumulés sur la face antérieure de la queue, sont successivement entraînés par le frottement des parties animées d'une moindre vitesse, et, après avoir parcouru latéralement le contour de la colonne, ils sont rassemblés en arrière, par une sorte de remous. Tous n'y arrivent pas; le contact de la masse ascendante les a en partie dissipés. Cependant ils s'y trouvent, encore, en plus grand nombre que sur les côtés, où il ne font que passer.

Le brouillard rassemblé en arrière, continue à s'affaiblir. Les globules qui se conservent, descendant toujours plus vite que la masse générale de la colonne, acquièrent de nouveau une vitesse de rotation supérieure à la sienne. Ils traversent donc son intérieur, pour se porter encore à sa face antérieure. Leur nombre s'accroît, dans ce trajet, de tous les nouveaux globules qui se forment dans la masse descendante.

En résumé, les globules de brouillard ne s'arrêtent que sur les faces antérieure et postérieure de la colonne, ils ne font que parcourir les faces latérales par un mouvement rétrograde, et traverser son intérieur par un mouvement direct. Enfin leur nombre est diminué, quand ils s'arrêtent en arrière, et s'accroît au contraire, quand ils retournent vers la face antérieure.

Tous ces points sont évidemment d'accord avec les apparences observées.

146. Cette colonne, qui fend l'atmosphère, trouve, dans la résistance qu'elle y éprouve, une nouvelle cause de contraction; ce qui tend à accroître encore l'infériorité de son étendue, sur celle de la masse ascendante et transparente.

Le brouillard doit acquérir plus d'intensité vers la base, qu'à la partie supérieure de la queue ; par cela même que c'est à cette base qu'il est le plus resserré.

147. *Direction de la queue.*—Si la vitesse angulaire de rotation de la colonne descendante, est supérieure à la vitesse angulaire de translation de la comète, la queue devance le prolongement de son rayon vecteur ; elle reste en arrière dans le cas contraire. La vitesse de translation étant très variable d'un point de l'orbite à l'autre, il pourra donc arriver, que, dans une même comète, la queue s'écarte, successivement, du rayon vecteur, en avant et en arrière.

Tant que la queue n'est point entraînée, ainsi, à de trop grandes distances de la direction, suivant laquelle l'affaissement tendrait à s'opérer ; le courant descendant, en vertu des vitesses acquises par ses molécules, se maintient où il est établi. Ce courant doit avoir pour base l'hémisphère obscur, où s'opèrent les principales condensations ; la direction suivant laquelle l'affaissement tend à s'opérer, n'est pas précisément la verticale élevée au milieu de l'hémisphère obscur ; mais une certaine courbe, dépendante des effets combinés, de la pesanteur et des vitesses horizontales acquises par les différentes couches. Le courant, selon sa rapidité, pourra se maintenir encore, à des distances plus ou moins grandes de cette courbe, et continuer seul à suppléer aux condensations qui s'opèrent.

148. *Queues multiples.*—Cependant, quand le courant descendant s'écartera, au-delà de certaines limites, de la direction suivant laquelle l'affaissement tendrait à s'opérer, si ce courant n'existait pas ; l'affaissement commencera à s'établir, suivant cette direction. Il se formera un nouveau courant qui contribuera de plus en plus avec le premier, à combler les vides formés par la condensation inférieure. Ces deux courants en communication par leur base, luttent l'un contre l'autre; le premier avec les vitesses acquises par ses molécules, le second avec des forces accélératrices continuellement agissantes. Le premier doit donc s'affaiblir de plus en plus, et finir par être entraîné dans le mouvement ascendant de l'atmosphère qui l'entoure. Ses globules de brouillard ne tarderont plus ensuite à se dissiper entièrement.

Mais, dans cet intervalle, il est possible qu'un ou plusieurs autres courants se soient déjà établis. Plusieurs queues peuvent donc exister à la fois. Mais leur formation ne peut être déterminée que par un mouvement angulaire, de l'atmosphère autour du noyau, très différent du mouvement angulaire de translation; et généralement, sans doute, très supérieur.

149. Le phénomène des queues multiples, dépendant uniquement de la constitution physique de la comète et de ses mouvemens acquis, doit se reproduire à chacune de ses réapparitions successives; à moins qu'elle n'éprouve, dans l'intervalle, de violentes perturbations. Mais, il échappe à nos observations, quand la terre est placée de telle sorte que les différentes queues se projettent l'une sur l'autre. C'est ce qui a lieu quand nous sommes près du plan équatorial de la comète, plan qui diffère généralement peu de celui de son orbite.

150. *Nébulosité.*—Le courant descendant, arrêté à sa base par le noyau, reflue sur toute la surface, en soulevant les couches, déjà échauffées par leur contact avec l'hémisphère éclairé, et, par conséquent, plus légères. Le brouillard, charrié par ce courant, se dissipe, en peu de temps, dans le voisinage de la surface échauffée; mais se conserve à une certaine hauteur. La nébulosité forme donc une enveloppe sphérique, séparée du noyau par une amosphère transparente : elle doit paraître plus intense à la circonférence qu'auprès de son centre.

151. Le brouillard s'éclaircit à mesure qu'il s'approche du point le plus directement exposé aux rayons solaires; car il traverse une masse atmosphérique ascendante, et rencontre d'ailleurs, en s'avançant, une surface de plus en plus échauffée.

En arrivant au même point, les courants divergens, partis de la queue, s'entrechoquent. Cependant leur vitesse n'est pas entièrement détruite; ils contribuent, avec l'élévation de température, à activer, en ce point, le mouvement ascendant; et, par suite, à y accélérer encore la vaporisation du brouillard.

Le fluide refoulé, par le courant descendant, sur toute la surface de l'hémisphère éclairé, tend sans cesse à soulever la nébulosité; mais, en même temps, les globules, qui la composent, tendent à descendre, en vertu de leur excédant de densité. Ces deux causes opposées peuvent se contrebalancer à-peu-près, et maintenir, pendant quelque temps, la nébulosité, à une hauteur peu variable. Elle traverse ainsi, sans se mouvoir, les couches atmosphériques qui s'élèvent.

152. Cependant, la couche inférieure, s'échauffe, de plus en plus, par son contact avec le noyau. Il arrive un point où, le courant descendant, au lieu de la refouler simplement, doit de nouveau faire irruption sous cette couche; soulevant, à la fois,

sa partie transparente et sa nébulosité. Le même phénomène, se renouvellant à-peu-près périodiquement, tendrait à former un nombre indéfini d'anneaux nébuleux, séparés par des couches transparentes. Mais il n'en peut jamais subsister qu'un petit nombre à la fois ; car, les brouillards, soumis à une moindre pression à mesure qu'ils s'élèvent, s'affaiblissent graduellement et finissent par se dissiper. Quand il existe plusieurs anneaux à la fois, on doit, généralement, trouver moins d'intensité, dans les anneaux supérieurs. Je ne sais si le fait a été observé.

153. Si la pression atmosphérique est trop faible pour maintenir des liquides à la surface du noyau, aucun des gobules, formés dans la colonne descendante, ne s'y déposera. La vaporisation successive des anneaux, pourra seule suffire, alors, au renouvellement de l'atmosphère, sans cesse atténuée par les condensations. Dans le cas contraire, la vaporisation des liquides de la surface éclairée, suppléera aux globules déposés de l'autre côté.

154. *Variations dépendantes de la distance au soleil.*—Quand la comète s'approche du soleil, toute sa masse atmosphérique doit nécessairement se dilater. Tous les points de la sphère sont successivement exposés aux rayons solaires, par suite de la différence qui existe, entre les vitesses angulaires de rotation et de translation. L'hémisphère obscur, lui-même, conserve donc alors une plus haute température. La condensation s'y opère moins rapidement, et le courant descendant acquiert moins de force. La queue doit donc diminuer en largeur et en intensité, mais sa longueur doit s'accroître avec l'étendue de l'atmosphère. Il est possible cependant que cette augmentation de longueur ne soit pas perceptible, car la rareté du brouillard, à la limite supérieure de l'atmosphère, peut le faire échapper à nos observations. Une diminution générale, dans l'intensité de ce brouillard, le rendrait nécessairement insensible à une plus grande distance de cette limite; et pourrait produire, une diminution apparente, dans la longueur de la queue, malgré son augmentation réelle.

L'affaiblissement du courant descendant, entraîne nécessairement aussi, celui de la nébulosité.

155. Peu après le passage de la comète à son périhélie, on observe des phénomènes inverses : la masse atmosphérique se contracte par le refroidissement ; la condensation des vapeurs s'y accélère, la queue augmente en largeur et en intensité. L'hémisphère obscur est toujours le plus froid : Les conden-

sations qui s'y opèrent, diminuant la pression, tendent à maintenir ailleurs la transparence de l'atmosphère. Cependant, c'est à la surface du noyau que le refroidissement se fait sentir immédiatement ; c'est là, aussi, que la pression est la plus forte. La surface éclairée éprouvant un refroidissement rapide, les vapeurs qui la touchent peuvent n'être plus capables de résister à la pression atmosphérique, malgré l'affaiblissement de cette pression. Les brouillards qui envelopperont alors le noyau, élargiront son disque apparent, et lui donneront un contour moins nettement défini.

156. Ainsi disparaissent, dans les comètes, tous ces mouvemens subits, dont la rapidité effraye l'imagination. Toutes ces apparences fantastiques, sont l'effet d'un léger brouillard, qui se forme ou qui se dissipe.

157. *Secteurs lumineux.*—Le phénomène des secteurs lumineux est exceptionnel ; on doit donc lui chercher une cause accidentelle.

Si le noyau de la comète est entouré d'une croute solide, cette croute en se rompant, par le refroidissement, découvre la masse incandescente qui s'est conservée dans son intérieur. Les secteurs éclairés par les fissures, paraissent plus lumineux que les parties éclairées seulement par les rayons solaires. *

Cette lumière accidentelle s'affaiblit et disparaît rapidement. Dans ces masses, si lentement condensées, la chaleur développée ne peut être considérable ; elle doit se perdre rapidement, vu leur petitesse. Une atmosphère, depuis long-temps refroidie, se précipite d'ailleurs incessamment dans la fissure, pour en ressortir très échauffée. Peu de tems doit donc suffire pour ôter, à la surface découverte, son incandescence.

La durée de cette incandescence sera bien plus courte encore, si l'eau peut subsister liquide, à la surface de la comète. Se précipitant dans les fissures, sa vaporisation instantannée occasionnera des secousses, qui pourront brusquement fermer les fissures existantes, ou en ouvrir de nouvelles.

La lumière des secteurs doit évidemment s'affaiblir, puis

* Cette explication récemment proposée pour la queue des comètes, est inconciliable avec les circonstances de ce phénomène. Mais elle paraît la seule qui puisse rendre compte des secteurs, dont la lumière vient évidemment du centre.

disparaître bientôt, quand l'astre s'éloignant du soleil, son noyau s'entoure d'un brouillard épais.

158. *Diversité des comètes.*—Les comètes dont la masse est la plus faible, sont celles dont la condensation doit exiger le plus de tems. L'attraction peut n'y avoir pas encore déterminé la formation d'un noyau; elles n'offriront, alors, qu'une masse nébuleuse.

Quelques comètes peuvent avoir été privées, accidentellement, de leur atmosphère; par exemple, en passant très près d'une planète, ou en traversant l'atmosphère du soleil.

Peut-être quelques-unes des comètes les plus fortes, sont-elles arrivées à un degré de condensation tel, que leur atmosphère soit réduite, aux gaz qui sont permanens sur notre globe; dans ce cas encore, elles n'offriraient qu'une atmosphère inappréciable.

Toutes les comètes sans atmosphère sensible, doivent être évidemment privées de queue et de nébulosité.

Les comètes, dont le noyau récemment formé conserve encore une forte chaleur, sont peu sensibles à l'influence des rayons du soleil, à moins qu'elles ne passent très près de cet astre. Les condensations s'y opéreront, à-peu-près également de tous côtés. Elles pourront être entourées de nébulosités; mais il ne s'établira pas de courant descendant sensible, au-dessus de l'hémisphère obscur. Elles seront privées de queue, jusqu'à leur refroidissement, qui ne peut exiger un tems bien long, dans ces faibles masses.

159. Les comètes sans queue, pourvues à la fois de noyau et de nébulosité, peuvent n'être pas encore solidifiées; et, dans ce cas, elles seront nécessairement lumineuses par elles-mêmes. Celles qui n'offrent qu'une simple nébulosité, peuvent jouir, aussi, d'un certain degré d'incandescence. Les comètes dépourvues d'atmosphère, sont refroidies et solidifiées à leur surface. Le refroidissement doit avoir atteint généralement un moindre degré dans les comètes pourvues de noyau et de queue. Mais l'existence de la queue ne pourrait se concilier, avec l'incandescence, que dans les comètes qui passent très près du soleil.

Dans ces dernières, l'eau deviendrait un gaz permanent; mais les substances moins volatiles, qui entreraient comme vapeurs dans leur atmosphère, produiraient encore tous les phénomènes que nous avons attribués à la vapeur d'eau.

160. Indépendamment des portions de substances qui peuvent

être enlevées à quelques comètes, par d'autres astres; il existe, pour toutes, une cause permanente de diminution dans le volume atmosphérique : le refroidissement graduel de ces astres, s'ils ont un noyau; la condensation de leur masse nébuleuse, si le noyau n'y est pas encore formé. Les intermittences que nous observons dans cette diminution, peuvent dépendre de plusieurs causes : par exemple, les fissures formées à la surface du noyau solide; peut-être aussi la position qu'affecte la queue par rapport à notre œil.

§ II.—*Aérolithes.*

161. Les petites comètes qui viennent fréquemment choquer la terre, ont trop peu de masse pour n'avoir pas conservé leur état nébuleux.

Quand un de ces petits globes vaporeux pénètre dans notre notre atmosphère, il tend à se resserrer, déjà, par le seul effet de la pression qu'il y éprouve; mais il doit, à son mouvement, une contraction bien plus considérable. La résistance de l'air, enlève continuellement à sa surface antérieure une partie de sa vitesse; sa surface postérieure qui ne perd pas immédiatement la sienne, tend à se rapprocher des parties qui précèdent, et comprime le fluide intérieur. Le globe en fendant l'atmosphère doit d'ailleurs évidemment aussi se resserrer latéralement.

162. Sa condensation croissante développe, sans cesse, du calorique. Ce calorique se conserve vers le centre, mais il se perd rapidement à la surface; où, par suite, les substances, les moins volatiles, forment bientôt des globules liquides.

Dans cette faible masse, dont la rotation s'accroît continuellement par la contraction qu'elle éprouve, la force centrifuge doit l'emporter, de beaucoup, sur l'attraction centrale. C'est donc à la surface que doivent se porter les parties les plus denses. Les globules, qui s'y forment, y sont maintenus; ceux, qui peuvent se former au-dessous, sont refoulés vers elle. Leur formation contribue à augmenter la température centrale; mais la chaleur continue à se dissiper à la surface. Les globules, par leur refroidissement, perdent, peu à peu, la forme vésiculaire. Leur accumulation doit donc, après un certain temps, former une enveloppe liquide, continue.

163. Le refroidissement progressif de l'enveloppe, amène sa solidification. Ce changement d'état apporte, dans toute la masse, une nouvelle élévation de température. Mais, dans son nouvel état, l'enveloppe ne peut plus, comme à l'état liquide, se prêter

à l'expansion du fluide qu'elle renferme. Elle doit donc, aussitôt, se rompre avec fracas *.

164. Chaque éclat poursuit son orbite, peu modifiée, sans doute, par l'impulsion qu'il a reçue de l'explosion. Quelques parcelles du fluide mis en liberté, se logent dans l'espace que le solide tend à laisser vide derrière lui, et l'accompagnent ainsi dans le trajet qui lui reste à parcourir; mais la majeure partie de ce fluide se dissémine dans l'atmosphère. Ce qui s'en condense, ultérieurement, ne peut plus retomber qu'en poussière ou en pluie.

165. *Composition des aérolithes.*—Les petits astres, qui produisent les bolides par leur rencontre avec notre globe, ont été séparés de la masse universelle, à une époque, où les condensations partielles n'avaient pas encore fortement altéré son homogénéïté primitive. Cet astre doit donc contenir toutes les substances qui existent dans l'univers; seulement, la proportion des substances volatiles s'y sera augmentée. Mais, l'aérolithe ne peut contenir que des parties solides. Il ne peut même les contenir toutes. En effet, la tension d'aucune substance n'est absolument nulle; il doit donc rester, dans la partie non liquéfiée, une certaine quantité de toutes les substances qui composent la masse. La chaleur développée par la condensation étant d'ailleurs énorme, cette quantité, proportionnée à la tension de chacune, peut encore, même pour les substances les moins volatiles, former leur totalité, si elles sont d'ailleurs très rares dans la nature. Alors, on pourra seulement en retrouver quelques traces, sur la partie postérieure de l'aérolithe, si elles sont susceptibles de s'y attacher. Ces traces, proviennent de la petite quantité de fluide qui suit l'éclat solide. Elles doivent s'y déposer peu à peu, à mesure que son mouvement est ralenti par l'atmosphère; mais surtout quand il est brusquement arrêté par le sol.

Le reste de ce fluide se répand dans l'atmosphère, où sa présence se manifeste par une odeur très prononcée. Celle du soufre y prédomine; parce que cette substance est, à la fois, très commune dans la nature, très volatile et très odoriférante.

* Cette formation de sphères creuses ne peut avoir lieu que sous l'influence d'une pression extérieure. Toutes les fois que la condensation résulte de l'attraction de la masse où elle s'opère, c'est évidemment par le centre qu'elle doit commencer.

166. Les aérolithes, qui arrivent en grand nombre, et qui se renouvellent périodiquement, à certaines époques de l'année, peuvent, offrir la même composition, et éprouver les même effets en arrivant dans notre atmosphère ; mais ils ne peuvent plus être attribués à de petites comètes*.

Les chutes de poussières ou de substances liquides, peut-être même certains brouillards, peuvent être, quelquefois, attribués à la partie des bolides qui se dissémine dans l'atmosphère. Mais les circonstances qui accompagnent ces phénomènes, obligeront souvent, sans doute, à leur chercher d'autres causes.

Les aérolithes isolés peuvent frapper la terre suivant des directions très diverses ; mais les chances ne sont pas égales pour toutes les directions, parce que les mouvemens de rotation et de translation de la terre, se combinent, avec le mouvement propre des masses qui la rencontrent.

## Chap. III.—*Planètes et satellites.*

167. *Distances des planètes au soleil.*—L'accroissement rapide de la série qui exprime les distances des planètes au soleil, pourrait, peut-être au premier abord, paraître peu conciliable avec la cause assignée, à la formation de ces astres, dans les systèmes doubles. En effet, ces distances peuvent être représentées par les nombres suivans :

4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196.

Les variations des forces qui ont détaché les planètes, n'ont pu produire, immédiatement, d'aussi énormes différences, entre les distances des planètes consécutives. Mais rappelons-nous que les distances actuelles sont bien éloignées des distances primitives. Les planètes, avec des vitesses angulaires primitives à-peu-près égales, ont dû éprouver des rapprochemens bien différens, pour que les carrés des temps devinssent proportionnels aux cubes des grands axes. En faisant abstraction des pertes d'aires éprouvées depuis l'époque où nous considérons les vitesses angulaires comme égales, ces planètes ont dû se placer définitivement, par rapport au soleil, à des distances proportionnelles aux quatrièmes puissances de leurs distances primitives.

Réciproquement, les distances primitives devaient être proportionnelles aux racines quatrièmes de leurs distances actuelles,

* Voir l'annuaire du bureau des longitudes, du 1836.

c'est-à-dire, qu'elles peuvent être représentées par les nombres :

1.41, 1.63, 1.78, 2.00, 2.30, 2.69, 3.16, 3.74.

Ainsi, la distance de Mercure au soleil, aurait alors dépassé le tiers de celle d'Uranus ; et la terre aurait atteint presque la moitié de cette distance.

Les distances de chaque planète à la suivante seraient représentées par les différences successives des mêmes nombres :

0.22, 0.15, 0.22, 0.30, 0.39, 0.47, 0.58.

Quoique nous ayons fait, dans ces calculs, abstraction de plusieurs circonstances, ils suffisent pour montrer que les distances acquises par les planètes, sous l'influence de la masse prédominante, différaient entre elles, incomparablement moins que leurs distances actuelles, et que ces différences primitives ne supposent pas, dans la cause formatrice, des variations invraisemblables.

La série des distances actuelles est assujettie à une loi remarquable ; ses termes successifs peuvent être obtenus, en ajoutant au premier, les produits par 3, des puissances successives de 2, depuis la puissance 0 jusqu'à la puissance 6. La régularité de cette loi, suffirait seule pour assigner une cause unique et régulière, à la formation de toutes les parties du système. Mais, déjà, cette cause nous est révélée par l'uniformité générale des mouvemens, qui ne présentent que des anomalies faciles à concevoir.

168. *Anomalies des mouvemens.*—La masse solaire a dû conserver des traces de son irrégularité primitive, long-temps encore, après que l'attraction extérieure eut commencé à l'allonger. Les centres accidentels de condensation ont, nécessairement, apporté quelque trouble dans l'établissement des mouvemens. Ils devaient rendre irrégulières les surfaces de rupture des masses qui se détachaient, et éloigner plus ou moins leurs centres de gravité du plan décrit par le rayon vecteur. Les attractions du soleil et de la masse prédominante, tendaient sans cesse à ramener, vers ce plan, le centre de gravité de chaque masse partielle ; la vitesse acquise le portant au-delà, il en résultait une oscillation qui, combinée avec le mouvement de translation, déterminait une inclinaison dans l'orbite.

La plus grande longueur des masses irrégulières, au moment où elles se détachaient, ne coïncidait pas généralement avec le plan de l'orbite ; elle en était également rapprochée. Ce mouvement, entrant comme composante dans le mouvement de rotation, y déterminait aussi une inclinaison.

Pour les satellites d'une même planète, une cause générale se combinait avec les causes accidentelles, particulières à chacun d'eux : l'inclinaison de la rotation de leur planète, tendait à se communiquer à leurs orbites, et même au plan de leur rotation. Ainsi, les satellites d'une même planète doivent, en général, présenter moins de différence, entre les inclinaisons de leurs mouvemens, que les satellites appartenant à des planètes différentes. Enfin, l'inclinaison de la rotation de chaque planète variant successivement par différentes causes, les satellites formés les derniers doivent être généralement ceux dont les orbites s'approchent le plus du plan de son équateur définitif.

169. Relativement aux planètes, les causes d'anomalies dans les mouvemens, devaient être, en général, d'autant plus fortes, que, détachées plus tôt de la masse solaire, elles s'écartaient moins encore de l'irrégularité primitive. Les chances de compensations, entre ces causes, étaient d'autant plus nombreuses que la masse était plus considérable. Mais, quelle que fût l'irrégularité des fortes masses, telles que Jupiter et Saturne, il n'en pouvait résulter une grande inclinaison de leurs orbites : chacune comprenant un tronc complet de la masse solaire, et ce tronc ayant même une longueur considérable, son centre de gravité ne pouvait être, de beaucoup, écarté du rayon vecteur, par le seul effet de l'irrégularité de la section. Au contraire de très petites planètes, telles que les quatre planètes télescopiques, peuvent être entièrement formées de saillies laissées, à l'extrémité de la masse solaire, par la rupture qui en avait séparé Jupiter. Si, dans une masse aussi étendue, ces saillies se trouvaient précisément, près de la circonférence de la section, et près de son rayon perpendiculaire au plan de l'orbite solaire ; leur distance à ce plan devait être considérable, et, par suite, elles devaient acquérir une grande vitesse en s'en approchant. Sans doute ce rapprochement a commencé à s'opérer bien avant leur séparation; mais aussi, dès lors, elles commençaient à acquérir une vitesse qu'elles devaient conserver ensuite.

Une composante donnée, perpendiculaire au plan de l'orbite solaire, doit évidemment produire une inclinaison d'autant plus forte, dans le plan du mouvement, que l'autre composante de la vitesse, est plus faible. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, les chances d'inclinaison des orbites, sont plus fortes, pour les planètes inférieures, que pour les planètes supérieures. Mais, surtout, on doit rencontrer de plus grandes inclinaisons, dans les plans de rotation, et dans les orbites des satellites, que dans les orbites des planètes.

170. La comparaison de chaque cas particulier, avec ces déductions, ferait sans doute reconnaître d'autres causes, dont la combinaison, avec les précédentes, en aurait modifié les effets. La grande inclinaison de l'équateur solaire, par exemple, paraît devoir être attribuée à une cause accidentelle : on est conduit à penser, qu'antérieurement à la régularisation de la masse solaire nébuleuse, sa plus grande longueur était très inclinée, par rapport au plan de son orbite.

Nous laissons bien des questions à examiner, sur ce point, comme sur beaucoup d'autres ; mais nous ne pouvons passer sous silence l'anomalie des satellites d'Uranus, dont les mouvemens sont rétrogrades.

171. Les parties extrêmes de la masse solaire nébuleuse, moins exposées à son attraction centrale, et d'ailleurs détachées plus tôt, devaient offrir une condensation moins avancée, au moment où elles ont formé des planètes. Uranus pouvait donc, conserver encore son état de nébulosité irrégulière, quand les parties inférieures de la masse solaire, s'étaient déjà distribuées par couches à-peu-près homogènes.

Les nébuleuses irrégulières présentent, fréquemment, de longues traînées, étroites, beaucoup plus denses que les parties voisines. Supposons qu'une de ces traînées ait formé, la partie principale de la masse d'Uranus, au moment où elle s'est détachée ; supposons encore que la direction générale de cette traînée se soit trouvée à-peu-près perpendiculaire au rayon vecteur ; et cherchons d'abord ce qui serait arrivé, si, en même temps, elle eut été placée, dans le plan du mouvement solaire. Nous ferons d'ailleurs abstraction des différences existantes, entre les mouvemens angulaires de translation, du soleil et de la planète ; c'est-à-dire, que nous considérerons le centre de gravité de la planète comme se maintenant sur le rayon vecteur.

172. Le mouvement angulaire du rayon vecteur, écarte la traînée de la position perpendiculaire, où nous l'avons supposée d'abord : celle de ses extrémités, qui se trouve en arrière, se rapproche de la partie du rayon vecteur dont le mouvement absolu est le moins considérable, c'est-à-dire, de la partie du rayon vecteur dirigée vers la masse solaire.

Aussitôt que la position de la traînée a cessé d'être perpendiculaire, la force accélératrice angulaire, de son côté, tend à rapprocher, du rayon vecteur, chaque extrémité de la masse; en imprimant, à cette masse, un mouvement de rotation. Dans les planètes normales l'extrémité, la plus voisine de la masse prédominante, est en avant; elle se trouve en arrière pour Uranus. Le mouvement de rotation, reçu par cette planète, est donc de sens opposé à celui des planètes normales.

A mesure que la traînée s'approche du rayon vecteur, elle s'allonge, en se resserrant latéralement; ce qui diminue la vitesse angulaire acquise, maintient la masse d'autant plus long-temps exposée à l'action de la force retardatrice, et lui permet d'acquérir un moment de rotation d'autant plus considérable.

Dès que la traînée dépasse le rayon vecteur, la force accélératrice angulaire agit, sur elle, dans le même sens que sur les autres planètes; et, par conséquent, cette force devient, pour elle retardatrice. Mais le mouvement de cette traînée pourra-t-il être annulé, avant qu'elle soit redevenue, de nouveau, perpendiculaire au rayon vecteur? D'une part, la force accélératrice angulaire a acquis plus d'intensité. Mais, en même temps deux causes tendent à atténuer, pour la traînée, les pertes de vitesse angulaire; 1°. La vitesse angulaire du rayon vecteur s'est augmentée; ce qui tend à laisser, cette traînée, moins long-temps exposée à l'action de la force retardatrice; 2°. La diminution qu'éprouvera la longueur de la traînée dans ce second période, sera bien plus considérable que l'augmentation éprouvée dans le premier; car, dans le premier période, la tendance à la condensation progressive s'opposait à l'allongement; dans le second période, au contraire, elle concourt à opérer le raccourcissement. Ces deux motifs nous autorisent à penser que la vitesse angulaire de rotation ne pourra être entièrement détruite, avant que la traînée soit redevenue perpendiculaire au rayon vecteur. Alors, commence, un second période d'accroissement, pour ces momens de rotation.

173. Nous voyons donc se succéder pour Uranus, des périodes analogues, sauf pour la durée, à ceux qu'ont éprouvé les autres planètes. Cette durée doit-être beaucoup plus courte; car, le mouvement angulaire du rayon vecteur concourt, ici, avec celui du grand diamètre de la planète, à opérer les rapprochemens et les écartemens alternatifs de ces deux lignes, tandis que pour les planètes normales, ces rapprochemens et écartemens n'ont

lieu qu'en vertu de la différence des deux mêmes vitesses angulaires.

Les condensations progressives empêcheront, chaque période de retardement, de détruire la vitesse angulaire acquise pendant le période qui le précédait immédiatement ; de sorte qu'au total, la vitesse angulaire s'accroîtra dans ces alternatives. Mais elle devra, définitivement, se trouver bien inférieure à ce qu'elle eût été, si, pour cette planète, comme pour les autres, le premier période d'accroissement dans les aires, se fût prolongé bien au-delà du périastre.

174. Une grande inclinaison peut d'ailleurs se combiner, avec le mouvement rétrograde d'Uranus autour de son centre, comme avec les mouvemens directs des autres planètes. Il suffit, pour cela, de supposer la longueur de sa partie la plus condensée, inclinée au plan de l'orbite, au lieu de la supposer perpendiculaire à ce plan.

Cette direction inverse dans la rotation d'Uranus, n'a pu évidemment influer en rien sur son mouvement de translation, qui se trouve, en effet, dirigé dans le même sens que celui des autres planètes.

175. Les accroissemens des aires et des momens, ont amené, dans cette planète, comme dans les autres, des parcelles à se détacher. Ces parcelles avaient acquis, avant leur séparation, des vitesses angulaires dirigées, dans le même sens et dans le même plan, que la rotation de la planète. Leurs mouvemens de translation, étant d'ailleurs ensuite soumis aux mêmes alternatives que ce mouvement de rotation, ont dû, comme lui, conserver une direction opposée à celle de tous les autres mouvemens.

Je ne sais si l'on a pu constater par l'observation le sens de la rotation d'Uranus ; mais il paraît indiqué par la direction des mouvemens de ses satellites.

176. Ici notre explication est fondée sur une hypothèse ; mais il doit en être de même pour tous les faits exceptionnels. Les effets généraux tiennent à des lois générales, dont nous pouvons démontrer l'existence à priori. L'anomalie des satellites d'Uranus est bien, sans doute aussi, une conséquence nécessaire de ce qui existait primitivement, mais non de ce que nous en pouvons connaître à priori : tout ce que nous pouvons faire, c'est de remonter du fait même à la cause qui l'a produit.

Or, dans cette sorte de déduction, on ne marche pas toujours avec la même certitude, qu'en descendant de la cause à l'effet : Une cause déterminée, a, nécessairement un effet déterminé ; tandis que des causes différentes sont, quelque fois, susceptibles de produire des effets indentiques. Relativement à l'anomalie considérée, on pourrait supposer, par exemple, qu'elle n'a pas existé dès l'origine, et qu'elle a été produite par des perturbations ultérieures. Il y aurait plus d'une présomption à alléguer contre cette hypothèse ; mais peut-être ne pourrait-on pas démontrer son impossibilité absolue.

Il suffit, au reste, d'indiquer une cause possible de l'anomalie, pour qu'elle ne devienne pas une objection, contre la théorie générale, établie d'ailleurs.

177. *Masses relatives.*—Les masses des planètes dépendent de plusieurs élémens: La longueur du tronc solaire qui les a formées, son diamètre, et sa densité.

Dans la masse solaire nébuleuse, la densité croissait comme la pression, du centre à la surface. La vapeur, proprement dite, acquérait une densité précisément proportionnelle à cette pression ; mais les globules vésiculaires, en descendant lentement, augmentaient encore la masse des couches inférieures. Les parties successivement détachées, devaient donc contenir, sous un volume donné, une quantité de substance de plus en plus considérable.

Les différences de la force centrifuge et les différences de l'attraction extérieure, acquéraient plus d'intensité, par rapport aux différens points de la masse solaire, à mesure qu'elle s'approchait de son périastre. Or, la rupture, qui produit une planète, dépend à la fois, de cette intensité et de l'allongement de la masse. Un moindre allongement suffisait donc pour la déterminer, quand l'intensité des deux différences devenait plus considérable. Un nouveau tronc devait donc se détacher bien avant que la masse ait repris sa longueur précédente. Les surfaces de rupture, plus voisines du centre, pouvaient acquérir un plus grand diamètre ; mais la longueur des troncs devait généralement diminuer.

178. *Uranus* détaché de l'extrémité du sphéroïde, à l'état si diffus de nébulosité irrégulière, n'a formé qu'une masse médiocre, avec un volume immense.

*Saturne* emporte, avec lui, une moins grande longueur de la masse ; mais, bien plus voisin du centre, sa condensation est déjà beaucoup plus avancée, ce qui donne, à sa masse, une grande supériorité, sur la précédente.

Le tronc qui forme *Jupiter* est encore de moindre longueur, mais la supériorité de son diamètre peut lui donner un volume égal ou supérieur. Sa densité est d'ailleurs bien plus grande : non seulement la pression y est plus forte; mais les brouillards, qu'il a transmis aux couches inférieures, ont été en partie remplacés par les brouillards venus des couches supérieures; tandis que la masse destinée à former Saturne n'avait reçu que très peu de substances, en compensation des pertes qu'elle avait éprouvées. On conçoit donc encore, pour Jupiter, une masse très supérieure à celle de Saturne.

179. Cependant, la masse solaire doit s'approcher du point où les forces, qui tendent à opérer la rupture, s'accroissent avec le plus de rapidité. Or, la rupture ne dépend pas seulement du degré l'allongement, qui tend a être produit dans la masse solaire, mais la rapidité avec laquelle cette masse tend à l'acquérir. Une plus grande rapidité d'allongement accroît la vitesse qui éloigne les molécules du centre ; elle ne laisse plus, aux parties latérales, le temps de se resserrer, pour maintenir la continuité dans la masse ; elle doit donc déterminer des ruptures plus fréquentes, et diminuer encore la longueur des parties qui se détachent.

180. La large surface de rupture laissée après Jupiter, présentait nécessairement de nombreuses irrégularités. Car les couches nébuleuses, moins irrégulières que dans les parties déjà séparées, étaient loin d'offrir encore une homogénéité complète.

Toutes les parties saillantes de cette surface devaient s'allonger. Elles tendaient, aussi, à se rapprocher du grand diamètre, pour y former une extrémité arrondie ; mais il leur fallait un temps assez considérable, pour y arriver, de la circonférence d'une surface aussi étendue. A l'époque du plus rapide accroissement des forces de rupture, les saillies les plus prononcées ont donc pu se détacher, avant la réunion vers laquelle elles tendaient. Elles ont formé *les quatre planètes télescopiques*.

Les saillies moins considérables, réunies ensuite, sont restées, un peu plus long-temps, attachées à la masse principale, et ont donné naissance à *Mars*.

181. Les accroissemens de la force de rupture, commençant à devenir moins rapides, *la terre* a pu comprendre une masse plus forte. Mais, la masse principale avait été atténuée par la formation des trois premières planètes ; elle avait été privée,

surtout, de ses parties diffuses qui augmentaient immensément son volume. Ainsi réduite, elle ne pouvait plus donner naissance à des masses comparables aux premières.

Les différences d'attraction et de force centrifuge ont pris, ensuite, des accroissemens moins rapides encore ; cause qui tendait à faire croître, de nouveau, la longueur des troncs détachés. Mais ces accroissemens mêmes, indépendamment de la rapidité avec laquelle ils ont lieu, sont une cause qui tend à diminuer cette longueur des troncs. La séparation de la terre, a d'ailleurs encore diminué l'étendue de la masse solaire. Les causes opposées ont donc pu se compenser à-peu-près, et donner à *Vénus* une masse peu inférieure à celle de la terre.

Enfin, les dernières causes l'emportant tout-à-fait, l'infériorité de masse s'est trouvée beaucoup plus prononcée dans *Mercure*.

Cet aperçu montre, au moins, que, dans notre théorie, les rapports observés entre les masses des planètes, n'offrent rien qui ne soit vraisemblable.

182. *Loi des densités relatives.*—Nous avons déjà reconnu, que toutes les substances d'une masse nébuleuse doivent se retrouver, dans chacune des parties qui s'en séparent ; mais, en proportion différente. Il existe toujours, en effet, pour les globules vésiculaires, un degré de condensation qui les rend, spécifiquement, plus pesans que le fluide qui les supporte : Arrivés à ce point, ils doivent s'avancer vers le centre de la masse.

Les brouillards, qui s'accumulaient ainsi dans la partie centrale de la masse solaire, y portaient des substances peu volatiles ; et forçaient, les plus volatiles, à refluer en partie vers la surface.

183. On doit penser que les substances, dont les molécules éprouvent par la condensation un plus grand rapprochement, sont ainsi resserrées par une force plus grande et, par suite, plus capable de résister à la force expansive. Ainsi, les substances les plus denses, à l'état solide ou liquide, doivent être généralement les moins volatiles ; c'est-à-dire, celles dont la vapeur conserve le moins de densité sous une pression donnée : la vapeur du Mercure est incomparablement moins dense que celle de l'eau, et cette dernière l'est moins que celle de l'alcool. Il est possible que cette loi présente des exceptions assez nombreuses ; mais on peut l'admettre, au moins, pour la plupart des cas.

Les masses, le plus abondamment pourvues des premiers brouillards formés, devaient donc, non-seulement avoir la plus forte densité actuelle, mais encore être susceptibles d'acquérir une plus forte densité définitive.

184. Ainsi, nous devons généralement observer, aujourd'hui, une densité décroissante du soleil aux planètes supérieures. Par la même raison, les planètes doivent être plus denses que leurs satellites; et, parmi les satellites d'une même planète, les plus éloignés doivent avoir la moindre densité.

La lune a moins de densité que la terre. Je ne sais si l'on a pu évaluer les densités des autres satellites.

L'observation fait reconnaître une densité généralement décroissante, des planètes inférieures, aux planètes supérieures. Nous ne trouvons d'exceptions à cette loi que dans *Vénus* et *Uranus*.

185. Vénus a sensiblement la même densité que la terre. Voici comment je puis concevoir cette légère anomalie :

Dans un astre à noyau solide, qui serait en quelque point privé de son atmosphère, la masse fluide se précipiterait pour combler le vide. Dans la masse solaire, toute fluide, les couches supérieures, les moins denses, tendaient à produire un effet analogue, mais beaucoup plus lent. Chaque fois qu'une planète s'en détachait, ces couches s'étendaient pour recouvrir le vide, et ce mouvement se propageait, de proche en proche, jusqu'au point diamétralement opposé. La séparation de Mars et des quatre planètes télescopiques, avait peu diminué la longueur du sphéroïde solaire ; un faible intervalle ayant dû, par conséquent, s'écouler, entre leur formation et celle de la terre, l'équilibre n'avait pu se rétablir dans la couche superficielle de la masse solaire. Un tems plus considérable a dû s'écouler ensuite avant la formation de Vénus. Les substances légères de cette couche, sont arrivées en plus grande abondance vers l'extrémité éclairée, et sont entrées en plus grande proportion dans la formation de la nouvelle planète ; ce qui a pu compenser la plus grande densité des autres substances qui ont concouru à cette formation.

186. L'anomalie du mouvement des satellites d'Uranus, nous a fait conclure, qu'au moment où cette planète a été séparée du soleil, elle se trouvait encore, à l'état de nébulosité irrégulière. L'anomalie présentée par sa densité, nous conduit encore à la même conséquence. Dans cet état de condensation peu avancée, une faible partie de sa substance était passée à l'état de brouillard; et sa masse, à peine identifiée avec la masse solaire, ne

pouvait lui transmettre encore qu'une faible partie des brouillards formés.

La masse de Saturne, plus condensée quand elle s'est détachée, avait formé et perdu plus de brouillards, et par conséquent, plus de substances susceptibles d'acquérir, à l'état solide, une grande densité.

Jupiter, au moment de sa formation, était encore plus condensé que Saturne. Mais, en échange des brouillards qu'il avait perdus, il en avait reçus qui s'étaient formés dans la masse supérieure. Aussi sa densité définitive surpasse-t-elle de beaucoup celle de Saturne, sans cependant égaler encore celle d'Uranus.

187. Le soleil qui a conservé, en plus grande proportion que toutes les planètes, les substances les moins volatiles, était, toutes choses égales d'ailleurs, destiné à acquérir une densité plus forte. Mais, d'une part, à la température énorme dont il jouit, il est bien loin encore de sa densité définitive. D'un autre côté, nous lui attribuons, vraisemblablement, une densité inférieure, à la densité réelle de son noyau liquide. Car nous jugeons, de son diamètre, par celui de sa partie lumineuse, et l'incandescence doit s'étendre très loin, dans l'atmosphère qui entoure un tel foyer de chaleur.

188. *Atmosphères.*—Les gaz encore aujourd'hui permanens sur notre globe, doivent, ainsi que l'eau, se trouver le plus abondamment répandus, dans les masses qui ont conservé le plus de substances volatiles. C'est donc, généralement, dans les planètes supérieures, qu'on doit rencontrer la plus vaste atmosphère. Les courans observés, dans Saturne et Jupiter, y indiquent, en effet, des atmosphères considérables. Je ne sais si l'on a pu reconnaître la supériorité de celle de Saturne. Mais elle paraît devoir résulter de la même cause qui a rendu sa densité inférieure à celle de Jupiter.

L'atmosphère d'Uranus, doit être, au contraire, relativement, moins étendue que les deux précédentes.

189. L'atmosphère considérable de Pallas, s'explique par la même cause qui a déterminé, la grande inclinaison de son orbite, et la petitesse de sa masse. Cette planète formée, dans la surface de rupture laissée par Jupiter, et loin du plan de l'orbite solaire, venait, par conséquent, d'un point éloigné du centre de cette surface. Elle doit donc contenir, en grande proportion, les substances volatiles qui composaient, en grande partie, la couche superficielle de la masse solaire.

*Cérès*, quoique beaucoup plus rapprochée du plan de l'orbite solaire, pouvait se trouver encore à la circonférence de la surface de rupture, et conserver une atmosphère relative, à-peu-près égale à celle de Pallas.

L'atmosphère de *Vesta* est très-faible, puisqu'on n'a pu la reconnaître par l'observation. Des quatre planètes télescopiques, elle est celle dont l'orbite est le moins inclinée, à l'écliptique, et vraisemblablement aussi, au plan primitif de l'orbite solaire. Il est donc possible que cette planète ait été formée, non loin du centre de la section, et par suite dans un point où les substances volatiles entraient en petite proportion.

*Junon*, dont l'orbite est médiocrement inclinée, peut n'avoir qu'une médiocre atmosphère.

Au total, dans les planètes télescopiques, une grande inclinaison de l'orbite entraîne, nécessairement, une atmosphère considérable. Mais une vaste atmosphère n'exige pas nécessairement que l'orbite soit très inclinée.

Une cause générale, la faiblesse de l'attraction centrale, tend à augmenter, dans ces quatre planètes, l'étendue de la masse atmosphérique ; l'eau, en effet, doit y entrer, en totalité ou en grande partie. Cette substance, doit être très abondante, dans les atmosphères de Cérès et de Pallas, et il doit s'y passer, en petit, quelques phénomènes analogues à ceux des comètes. Peut-être ne sera-t-il pas impossible d'en reconnaître des traces.

190. *Mars*, ayant moins de densité que la terre, présente, vraisemblablement dans son atmosphère, une étendue relative supérieure, mais une moindre étendue absolue. Sa masse est assez faible, pour que celle de son atmosphère le soit aussi, mais pas assez, pour que l'eau ne puisse rester liquide à la température ordinaire. Cette planète doit avoir, d'ailleurs, une température peu élevée ; ce qui doit y diminuer la quantité d'eau vaporisée.

Les compensations, qui ont amené la densité moyenne de Vénus à égaler à-peu-près celle de la terre, n'ont pu néanmoins donner à ces deux planètes la même composition. Vénus doit contenir, en plus grande proportion que la terre, les substances très denses et les substances très légères ; mais, en moindre proportion, les substances de densité moyenne. Son atmosphère doit donc être, au total, plus considérable que la nôtre ; ce que paraît confirmer l'observation.

Mercure ne pourait devoir une atmosphère étendue, qu'à la vaporisation de substances restées liquides ou solides, dans les autres planètes.

191. Les satellites doivent avoir entraîné, au moment de leur formation, une grande quantité de substances volatiles, et doivent avoir, généralement, une atmosphère considérable. Dans chaque système de satellites, le plus voisin de sa planète, peut seul faire exception à cette loi.

On a vu que l'affaiblissement graduel de l'attraction extérieure au système, a rapproché successivement les satellites de leur planète, et que leur rapprochement total a été très considérable. Il a donc pu arriver souvent, que la masse nébuleuse du satellite inférieur, s'étendit encore, au-delà des limites où son attraction centrale pouvait contrebalancer l'attraction croissante de sa planète. Alors il a dû abandonner son extrémité la plus voisine de cette planète. La partie détachée, n'ayant qu'une faible vitesse angulaire, est allée se confondre dans la masse également nébuleuse de la planète. Le même phénomène a pu se répéter un certain nombre de fois, par les rapprochemens progressifs.

Mais, depuis sa séparation, le satellite avait rassemblé vers son centre ses substances les moins volatiles et repoussé les autres à sa surface. Chaque partie, qui se détachait, lui enlevait donc principalement des substances très volatiles. Le vide qui en résultait se remplissait toujours, aux dépens de la couche supérieure qui reprenait son équilibre. Si les pertes se sont multipliées, le satellite a pu se trouver presque entièrement dépouillé des substances susceptibles de lui former, par la suite, une atmosphère. C'est ce qui paraît avoir eu lieu pour notre satellite.

La même cause explique pourquoi, il n'y a pas plus de différence, entre la densité de la lune et celle de la terre. On ne concevrait pas, autrement, que la densité de ce satellite dépassât la densité de Mars.

192. *Loi des vitesses derotation.*—La même cause, qui a rendu, la vitesse angulaire de rotation des satellites, si inférieure à celle des planètes, tendait à rendre aussi la vitesse angulaire des planètes inférieures, moindre que celle des planètes supérieures. Cependant, quand la force accélératrice angulaire n'a pas été capable d'amener les deux vitesses à l'égalité, elle n'a pas eu, en définitive, une influence bien considérable. En effet, si elle diminuait davantage les momens, dans un période, elle les augmen-

tait, davantage aussi, dans le suivant; ce qui établissait une sorte de compensation.

Nous trouvons, dans la différence des condensations éprouvées par les diverses planètes, une autre cause qui a concouru, généralement, avec la précédente; et qui a, vraisemblablement, exercé plus d'influence. Elle paraîtrait seule pouvoir expliquer, comment, avec des vitesses angulaires primitives sensiblement égales, elles ont pu acquérir leurs rotations actuelles.

193. La condensation éprouvée, se mesure par le rapport, de la densité actuelle à la densité primitive. La densité primitive d'une planète dépend, principalement, de la pression éprouvée au point où elle s'est formée; et cette pression allait en décroissant, du centre aux extrémités de la masse solaire. La densité actuelle, ne dépend que de la proportion des diverses natures de substances, entrées dans sa composition. L'on a vu que, plus une planète contenait, en grande proportion, les premiers brouillards formés, plus elle était susceptible d'atteindre un haut degré de densité. La proportion des brouillards décroissait, aussi, du centre aux extrémités.

L'affaiblissement de la pression et, par suite, de la densité, suivait, dans la masse nébuleuse du soleil, une progression très rapide, du centre aux extrémités. Cette grande rapidité d'affaiblissement, provient de la combinaison de plusieurs causes. Elle est, d'ailleurs, observée dans les nébuleuses existantes. On conçoit que généralement, elle ne peut-être compensée, par la nature moins condensable des substances. Ainsi, la contraction des volumes, et la vitesse angulaire définitive, ont dû, en général, être d'autant plus fortes, dans les planètes consécutives, qu'elles provenaient de points plus éloignés du centre solaire.

194. La vitesse angulaire de rotation, se trouve, en effet, bien plus grande, dans Saturne et Jupiter, que dans les quatre planètes inférieures, et, surtout, que dans le soleil.

Mais, pourquoi l'égalité sensible des rotations de Jupiter et de Saturne? Pourquoi trouve-t-on encore dans les quatre autres planètes des vitesses angulaires de rotation sensiblement égales entre elles? Pourquoi, enfin, observe-t-on dans le soleil une infériorité de vitesse angulaire, qui paraît au premier abord si disproportionnée?

Nous avons déjà fait observer, que Saturne n'avait pu recevoir que très peu de brouillards de la planète supérieure, dont la masse est faible par rapport à la sienne, et dont la condensation se trouvait d'ailleurs peu avancée. Au contraire, la masse de Saturne, paraît avoir pu égaler, ou dépasser même, celle de Jupiter, avant de s'être dépouillée de ses brouillards. Elle a donc pu lui en transmettre une assez grande quantité, pour que cette dernière planète éprouvât encore, ultérieurement, une condensation égale à celle de Saturne, malgré la supériorité déjà existante dans sa densité.

Si la loi des densités primitives et des compositions, eut été régulièrement observée, dans les quatre dernières planètes; ces densités primitives eussent été croissantes vers le centre du système; les quantités de substances, susceptibles d'acquérir une grande densité, se seraient accrues en même temps, mais avec moins de rapidité; Les contractions éprouvées, et, par suite, les vitesses angulaires définitives eussent été moindres pour les planètes inférieures. Mais ces quatre petites planètes, se trouvant très rapprochées dans la masse solaire, les différences des deux tendances contraires n'y étaient pas assez prononcées, pour ne pouvoir être compensées par des causes accidentelles; et l'on conçoit qu'elles aient pu acquérir des vitesses à-peu-près égales.

195. Le soleil formé des parties, déjà les plus condensées, de sa masse primitive, a dû éprouver, dans son volume, une bien moindre contraction que les planètes. Son énorme température maintient encore sa densité bien au-dessous de ce qu'elle doit devenir. Par ces deux causes, sa vitesse angulaire doit être bien inférieure à celle de toutes les planètes. Nous verrons, cependant plus loin, que la vitesse réelle de son noyau est supérieure à celle que nous lui attribuons.

196. *Anneaux.*—Pour qu'un anneau puisse se former, il faut que la force centrifuge de la couche supérieure, équatoriale, fasse équilibre à l'attraction. Je trouve, par le calcul, que la force centrifuge, à l'équateur de Saturne, est, aujourd'hui, les 0,165 de l'attraction. Supposons, un instant, que la masse vaporeuse de cette planète, dans ses condensations successives, ait conservé constamment à chaque instant donné, une vitesse angulaire égale pour tous ses points. Dans cette hypothèse, la force centrifuge n'eut égalé que les 0.09 de l'attraction, à l'époque, où l'équateur atteignait la circonférence moyenne des anneaux. Mais on a vu que chaque masse vaporeuse, en passant de la forme de sphéroïde allongé à celle de sphéroïde aplati, a dû acquérir, dans sa zone équatoriale, une vitesse angulaire très

supérieure à celle des autres couches. Pour que la force centrifuge devînt égale à l'attraction, dans cette zone, il lui suffisait d'avoir une vitesse angulaire, un peu plus que triple de la vitesse angulaire moyenne. Un allongement considérable de la masse planétaire n'était même pas nécessaire, pour que le raccourcissement imprimât, à la zone équatoriale, cet excédant de vitesse angulaire; car, pour une même molécule, cette vitesse tendait à croître en raison inverse des carrés des distances successives, de cette molécule au centre.

197. A l'équateur de Jupiter, la force centrifuge n'est que les 0,087 de l'attraction. Pour qu'un anneau pût se former dans cette planète, il eût fallu que la vitesse angulaire de la zone équatoriale, y acquît sur celle du noyau, une supériorité, notablement plus grande que dans Saturne. Il est donc peu vraisemblable que Jupiter ait pu jamais former des anneaux.

Leur formation deviendrait encore plus difficile à concevoir dans les autres planètes. Déjà, pour Mars, le rapport de la force centrifuge à l'attraction est de 0,0049; et ce rapport est moindre encore dans les planètes inférieures.

Enfin, pour le soleil, ce rapport est inférieur à 0,00002. Il est donc tout-à-fait invraisemblable que la force centrifuge, d'aucune zone équatoriale, ait jamais pu faire équilibre à l'attraction. Il ne paraît donc pas possible d'attribuer la formation des planètes à des anneaux abandonnés par le soleil.

## Chap. IV.—*Soleil.*

198. Les apparences observées à la surface du soleil, ne sont que la manifestation du refroidissement inégal de sa surface, et des phénomènes qui en résultent.

199. *Taches et facules.*—C'est dans la région équatoriale que s'opère la condensation. Ce changement d'état, dans des vapeurs déjà si échauffées, développe une vive incandescence; il se forme de petits nuages, plus lumineux que le noyau lui-même, et que l'on nomme *facules.*

200. Le rayonnement, et le contact d'une atmosphère moins échauffée, leur enlèvent peu à peu leur éclat. De nouveaux brouillards venant continuellement s'y joindre, finissent par les transformer en énormes nuages, qui, malgré l'excessive chaleur dont ils jouissent encore, forment des taches sur la surface plus lumineuse du noyau. C'est ainsi que tout corps en ignition, nous paraît noir, si nous l'interposons entre notre œil et le soleil.

201. On voit des taches se former, non-seulement aux lieux mêmes précédemment occupés par des facules, mais encore dans le voisinage : c'est que ces facules attenaient à des nuages, qui, déjà plus refroidis, n'avaient conservé qu'une incandescence égale à celle du noyau. En effet, il doit exister des nuages à cet état, puisque les facules, pour se transformer en taches, doivent nécessairement passer par tous les degrés intermédiaires d'incandescence.

Ces nuages invisibles se rencontrent, plus fréquemment, auprès des facules ou des taches, que partout ailleurs ; parce qu'il est dans la nature de tous les nuages, de tendre à s'agglomérer.

202. Les nuages nouveaux, qui viennent s'adjoindre à ce nuage principal, l'entourent d'une bordure moins obscure que l'on appelle pénombre. Les limites de la pénombre paraissent bien tranchées, parce qu'à d'aussi grandes distances, les petites irrégularités disparaissent. Nous voyons aussi, dans notre atmosphère, les nuages épais, qui amènent les orages, précédés et suivis de nuages plus légers ; et, les limites qui les séparent, nous paraîtraient également tranchées, si nous les observions d'une plus grande distance.

203. Les nuages du soleil ont peu d'épaisseur, relativement à leur étendue ; car chacun, en revenant sur le bord du disque lumineux, nous apparaît comme un trait délié. Nous voyons aussi nos nuages n'occuper qu'une couche très mince de l'atmosphère, quoique recouvrant souvent des régions assez étendues.

204. Les facules affectent fréquemment des formes régulières. C'est ce que nous observons encore, sur la terre, pour les nuages très légers. Ils forment souvent, entre autres, de longues traînées rectilignes, et quelquefois plusieurs traînées parallèles. *

205. Les nuages, tenus un certain tems en suspension dans l'atmosphère solaire, finissent par tomber en pluie ; et la pé-

* On ne supposera pas, sans doute, qu'en comparant les vapeurs et les nuages formés dans le soleil, à ceux que nous voyons sur la terre, nous veuillions attribuer leur formation à la même substance. Si les élémens de l'eau peuvent être unis à la température qui existe dans le soleil, cette substance y forme un gaz permanent. Mais des substances incomparablement moins volatiles, vaporisées sous une température incomparablement plus élevée que celle de la terre, doivent produire des effets analogues à ceux qui résultent,

nombre, formée des nuages les plus légers, disparaît nécessairement la dernière. Mais le courant descendant, établi par la chûte de la partie centrale, finit par entraîner la totalité de chaque nuage.

206. La surface liquide est refroidie par le contact de ces nouvelles substances; elle s'enfonce dans la masse, et se trouve remplacée par un liquide plus échauffé. Si la chute des nuages s'est opérée, à-peu-près en même tems, sur toute la zone équatoriale, l'égalité de température se trouve rétablie, momentanément, sur toute la surface solaire; et cet astre reste quelque tems sans taches. Mais, le plus souvent, son atmosphère ne se dégage que partiellement.

207. *Lumière zodiacale.*—Le vide laissé, dans la partie inférieure de l'atmosphère, par la formation et la chute des nuages, se comble à mesure, par l'affaissement des couches supérieures, et le rapprochement des parties latérales. La vapeur descendue, éprouve une pression supérieure à celle qu'elle avait à supporter dans une région plus élevée; elle apporte, d'ailleurs, avec elle une température plus basse que celle des parties latérales qui ne se sont pas affaissées. Elle doit donc laisser déposer quelques globules liquides, dont la légèreté est proportionnée au peu de densité de l'atmosphère qui les supporte.

Le brouillard qui en résulte, réfléchissant les rayons lumineux envoyés par le noyau, rend visible cette partie de la vaste atmosphère du soleil, et produit autour de son équateur, une auréole de forme lenticulaire.

L'amincissement qu'éprouve la nébulosité, dans sa partie supérieure, provient de ce que les deux courans polaires, qui la compriment, augmentent d'impétuosité à mesure qu'ils s'élèvent. La même cause peut empêcher l'intensité du brouillard, de décroître notablement vers son sommet.

208, Quand l'atmosphère équatoriale reste quelque temps sans produire de nouveaux nuages, l'affaissement des couches supérieures se trouve arrêté; elles s'échauffent peu à peu, et le brouillard doit s'atténuer graduellement. Alors, en effet, nous voyons la lumière zodiacale diminuer d'intensité.

sur notre globe, de la vaporisation et de la condensation de l'eau. Cependant les formes spontanées offertes par l'agglomération des vésicules, pourraient être spécifiques; de même que les formes cristallines affectées par les solides.

209. *Phénomènes polaires.*—La surface liquide du soleil nous est cachée par une couche d'atmosphère incandescente, et les vapeurs qui s'y forment dans la région polaire, sont, par suite, elles mêmes incandescentes. Les courans ascendans qui résultent de leur formation, doivent donc s'élever, comme des colonnes de feu, au-dessus de la surface lumineuse que nous prenons pour le noyau. Ils entraînent de ce foyer des substances non susceptibles de rester vaporisées à la température plus basse des couches qu'elles traversent. Ces substances doivent donc s'y condenser. Elles retombent en vastes flocons et produisent une apparence, que Jonh Herschel compare à celle d'une précipitation chimique floconneuse. Je ne comprends pas du reste, assez complétement la description qu'il donne de ce phénomène pour en suivre ici les détails. Je puis dire seulement encore que les apparences qu'il produit doivent s'affaiblir sensiblement, quand l'équateur solaire est resté quelque temps sans taches. Car, alors la pression augmentant dans toute l'atmosphère, l'évaporisation doit se ralentir. Je ne sais si le fait a été observé.

210. Chose remarquable, la limite qui sépare la région où se produit ce phénomène, de la région des taches, se trouve à 30° de l'équateur solaire. De sorte que la surface d'évaporation, est précisément égale à la surface de condensation. *

211. *Vitesse de rotation.*—Les nuages du soleil, déjà supérieurs à sa surface lumineuse, sont encore séparés du noyau liquide, par l'épaisseur de la couche atmosphérique incandescente. Cette épaisseur inconnue, est vraisemblablement considérable; car la densité attribuée au soleil, d'après son diamètre apparent, est bien inférieure à ce qu'elle doit être réellement. La diminution progressive de la vitesse angulaire de l'atmosphère, doit donc être déjà considérable à la hauteur où se trouvent les nuages. Par suite, en prenant la vitesse de rotation des nuages pour celle du noyau, nous évaluons cette dernière beaucoup trop bas.

Rigoureusement, les premiers nuages observés dans une atmosphère qui en a été long-temps privée, doivent avoir une

* Le sinus de 30° est égal à 1/2. La calotte polaire et le tronc compris entre elle et l'équateur, ont donc des hauteurs égales. Or, on sait que les surfaces des troncs d'une sphère, sont proportionnelles aux hauteurs de ces troncs.

plus grande vitesse, que les nuages d'une atmosphère depuis long-temps orageuse. Car, dans les intervalles de calme, l'évaporation se ralentit, les courans venus des pôles s'affaiblissent, et l'atmosphère acquiert une vitesse de moins en moins différente de celle du noyau. Mais je ne sais si les frottemens atmosphériques ont assez d'intensité, pour produire des effets appréciables, dans d'aussi courts intervales.

212. *Atmosphère.*—L'énorme distance à laquelle s'étend la lumière zodiacale, indique dans l'atmosphère solaire une immense étendue.

Une atmosphère aussi vaste, attirée par une masse aussi forte, produit une énorme pression sur les couches inférieures ; et peut leur imprimer une grande densité, malgré l'élévation de température. Mais les couches supérieures, de moins en moins comprimées, doivent devenir excessivement rares à une certaine distance. Leur résistance peut donc ne produire qu'un ralentissement inappréciable, dans les mouvemens de Mercure et de Vénus, dont les orbites paraissent comprises dans l'atmosphère solaire. Il est possible, d'ailleurs, que la vitesse de chacune de ces planètes, soit peu supérieure, à celle de la couche qu'elle traverse.

213. Les couches supérieures de l'atmosphère solaire, par suite de leur faible densité, ne produisent qu'une déviation peu sensible dans les rayons lumineux qui viennent à les traverser. Or, quand on commence à appercevoir les astres, le soleil, déjà assez bas sous l'horizon, ne peut plus interposer, entre eux et notre œil, que ces couches supérieures. La réfraction solaire, a donc pu être confondue, avec les anomalies de la réfraction produite par l'atmosphère terrestre.

## Chap. V.—*La terre.*

214. Le globe sur lequel nous vivons, refroidi à sa surface, conserve, encore, sous sa croute solide, un vaste foyer, reste de son incandescence antérieure. Ce feu souterrain, s'agitant sous le sol, ébranle des contrées ; ou, rompant ses entraves, vient embraser les villes, inonder les campagnes. Il a laissé partout des traces des bouleversemens, plus terribles, qu'il occasionnait, quand la couche refroidie, moins épaisse, lui opposait un moindre obstacle.

Nous trouvons donc encore, dans les faits géologiques, une concordance complète avec la théorie.

215. Les différences de température ne produisent, sur la terre,

rien d'analogue aux queues et aux nébulosités des comètes ; parce que la constitution de son atmosphère, diffère, en un point essentiel, de celle de ces astres. Elle est, en grande partie, composée de gaz permanens, dont la densité surpasse, de beaucoup, celle de la vapeur d'eau ; ce qui permet aux vésicules de brouillard de s'elever, au moment même de leur formation, pour ne redescendre que dans un état de condensation plus avancé. Ce double mouvement, auquel sont assujettis les vésicules, complique beaucoup tous les mouvemens de notre atmosphère ; et empêche des courans descendans de s'établir en permanence, aux points les plus froids du globe ; c'est-à-dire, aux deux pôles.

Nous pourrions suivre, ici, tous les phénomènes qui se passent dans l'atmosphère et à la surface du globe. Mais la plupart d'entr'eux ont une explication connue : nous nous restreindrons aux seuls phénomènes généraux que nous croyons encore inexpliqués.

216. *Magnétisme terrestre.*—Le globe terrestre produit sur l'aiguille aimantée, la même action que produirait un courant électrique dirigé de l'est à l'ouest, à-peu-près parallèlement à son équateur. Il est peu probable que les substances de différentes natures soient disposées, à la surface du sol, précisément de manière à former une pile. Mais on sait que des substances de même nature, inégalement échauffées, produisent aussi, par leur contact, un dégagement d'électricité ; et l'on est d'autant plus porté à attribuer, à cette cause, l'aimentation du globe, que le mouvement apparent du soleil a lieu, dans le même sens que le courant présumé, et à-peu-près parallélement.

Analisons donc les effets électriques qui doivent résulter, sur le globe terrestre, de l'action des rayons solaires.

217. Considérons une zone comprise entre deux parallèles très voisins. Chaque zone est partagée en tranches par les méridiens successifs. Deux tranches contigues, différemment échauffées, opèrent la décomposition du fluide électrique. L'ensemble des tranches comprises, depuis le point le plus chaud jusqu'au point le plus froid, forme donc une sorte de pile; et la zone entière contient deux piles semblables, qui sont opposées par les pôles du même nom. Mais, dans chaque pile, les élémens ne sont pas séparés ; il doit donc se produire un effet analogue à celui qu'on observe, quand on place, les unes sur les autres, différentes plaques de métal, sans interposition de drap mouillé. Or, on sait qu'alors les deux plaques extrêmes prennent le même état électrique que si elles étaient en contact immédiat. De même la force de chacune des

deux piles considérées, ne doit dépendre que de la différence de température, entre la tranche la plus froide et la tranche la plus échauffée ; et, par conséquent, les deux piles doivent être de force égale, quoique leurs longueurs puissent être différentes.

218. Deux piles de force égale, se touchant par les pôles du même nom, ne peuvent déterminer un courant voltaïque ordinaire. Il est impossible cependant qu'elles n'exercent pas une action sur la distribution de l'electricité à la surface du globe. Elles tendent à refouler, des deux côtés, l'un des deux fluides vers le le point le plus froid, et l'autre fluide, vers le point le plus chaud. La répulsion réciproque des molécules d'un même fluide, l'empêche, d'ailleurs, de s'accumuler au point vers lequel il est poussé. La lutte de ces deux forces opposées détermine, pour chaque tranche, dans un instant donné, un état électrique particulier ; état qui dépend de la position de cette tranche, par rapport aux points le plus chaud et le plus froid. Or ces deux points suivent, sans cesse, sur la zone, le mouvement apparent du soleil. L'état électrique de chaque tranche, varie donc, aussi, à chaque instant ; c'est-à-dire, que l'électricité, qui appartenait à une tranche, se transporte sans cesse à la tranche voisine.

219. Les effets que nous venons de suivre pour une zone, ont lieu également dans toutes les autres. Il y a donc, à la surface du globe, un mouvement général de l'électricité, dirigé de l'est à l'ouest ; et ce fluide accomplit sa révolution autour de la terre, dans l'espace de 24 heures.

220. Ce courant peut différer, sans doute, du courant voltaïque. Mais, nous voyons, d'une part, qu'il doit nécessairement exister ; d'autre part, le globe terrestre produit, sur l'aiguille aimantée, le même effet que s'il recélait un courant voltaïque ordinaire, dirigé dans le même sens que le précédent. Une forte induction nous porte donc à penser que ces deux sortes de courans agissent, de la même manière, dans tous les phénomènes d'attraction et de répulsion.

221. On conçoit que le courant terrestre ne soit pas exactement parallèle à l'équateur. Sa direction doit dépendre, évidemment, de la configuration des continens et des mers, de la nature du sol, et peut-être même de la végétation qui le recouvre. Elle peut être influencée, d'un moment à l'autre, par les variations accidentelles de température, par le degré d'humidité du sol, par l'état électrique ou hygrométrique de l'atmosphère, et par d'autres circonstances encore.

222. Peut-être une expérience facile pourrait-elle confirmer cette explication.

Il faudrait opposer, par les pôles de même nom, deux piles égales, formant chacune un demi-cercle, et imprimer, à leur système, un mouvement rapide autour de la perpendiculaire élevée, par son centre, sur son plan.

Le courant qu'on obtiendrait ainsi, aurait toujours une rapidité bien inférieure à celle du courant terrestre. Il en différerait encore, en ce que le fluide s'y mouvrait avec le système des deux piles, tandis que, dans le courant terrestre, il passe d'un point à l'autre de la substance qui forme les piles. Cette dernière circonstance ne parait pas susceptible d'influer sur le résultat. Mais il est possible qu'une grande rapidité soit une condition essentielle pour la production du phénomène, et l'on ne pourrait approcher de la vitesse de la terre, dont la surface décrit près de 500 mètres par seconde. Il est possible, aussi, qu'on puisse suppléer à la vitesse, par l'intensité du courant ; c'est ce que l'expérience seule pourrait décider.

223. *Aurores boréales.*—Les aurores boréales offrent une circonstance, qui ne paraît pas avoir été remarquée d'une manière particulière, et qui renferme, pourtant, la clef de l'explication future du phénomène : c'est la couronne de feu, qui se forme au *zénith de l'observateur*, et « qui est le point central dans lequel tous les mouvemens d'alentour viennent concourir. » (Physique de Haüi.)

Il résulte de ce fait, que le phénomène n'a pas de position déterminée, par rapport à notre globe. C'est un jeu de lumière dont l'apparence reste la même, pour le spectateur, quel que soit le lieu qu'il occupe. Le phénomène ne peut, par conséquent, s'opérer que dans un milieu, toujours disposé de même aussi par rapport au spectateur, quel que soit sa position, ou, en d'autres mots, le phénomène a lieu dans notre atmosphère.

Je ne m'arrête pas à l'objection qu'on pourrait tirer de la prétendue distance à laquelle se passe le phénomène. Quelle distance, en effet, n'assignerait-on pas, au siège de l'arc-en-ciel, si on voulait la déterminer au moyen de sa parallaxe ? Un fait, d'ailleurs, prouve encore que le phénomène est tout-à-fait local : une aurore boréale, qui s'étend jusqu'au zénith d'un observateur placé en Suède ou en Norwège, est invisible à 10 ou 15° en arrière.

224. Les traînées lumineuses, qui partent du segment obscur

et vont converger vers le zénith, sont, à-peu-près, dans des plans verticaux passant par l'œil de l'observateur. Mais, observées d'un autre lieu, elles seraient vues encore, dans des plans sensiblement verticaux. Leur direction réelle est donc à-peu-près verticale.

Nous sommes donc conduits à admettre, sur une portion du globe, une série de traînées à-peu-près verticales, ascendantes ou descendantes, soit lumineuses par elles-mêmes, soit réfractant ou réfléchissant une lumière étrangère.

A quelle cause attribuer ces traînées? Trop de notions me manquent, pour que j'essaye de le trouver. Il faut, pour espérer une solution, connaître, non-seulement, toutes les données qui tiennent à la position et au tems; mais, toutes celles aussi que peuvent fournir les expériences de polarisation.

225. *Aérolithes multiples et périodiques.*—Nous avons déjà parlé des aérolithes isolés, qui viennent fréquemment frapper la terre, après avoir parcouru d'immenses orbites. Les aérolithes qui se montrent, par groupes souvent innombrables, et à des époques fixes de l'année, paraissent, conformément à l'opinion de M. Arago, n'être que des *astéroïdes*, qui circulent, par milliards, autour du soleil. Leur origine est intimement liée à celle de la terre.

226. La matière, même à l'état de gaz ou de brouillard, n'est pas dépourvue de toute adhérence. Les planètes n'ont donc pu se séparer, du soleil, par une rupture nettement tranchée. Cette rupture a dû présenter quelque chose d'analogue à ce qu'on observe dans la rupture des substances visqueuses : une légère traînée de matière nébuleuse devait lier, chaque planète qui se détachait, d'abord à la masse solaire elle-même, puis à la planète suivante quand elle s'est à son tour détachée.

Tant que les planètes, sensiblement en conjonction, s'éloignaient l'une de l'autre, toutes ces traînées se sont allongées à-peu-près en ligne droite; soit en restant continues, soit en se divisant. Continue ou divisée, la traînée qui liait, par exemple, *la terre* à *Vénus*, s'est étendue en spirale, quand ces deux planètes ont acquis des vitesses angulaires différentes. La force d'agglomération étant presque insensible, dans cette masse légère, chacune de ses molécules acquérait, à-peu-près le mouvement qui devait résulter, de sa vitesse acquise et de l'attraction solaire. Ce mouvement, intermédiaire entre celui des deux planètes, s'approchait, davantage, du mouvement de la plus voisine.

La traînée unique, ou les traînées partielles tendaient donc à s'étirer de plus en plus.

On pourrait admettre, pour la première rupture de la traînée, une époque plus ou moins éloignée ; mais on ne peut supposer cette masse nébuleuse susceptible d'une extension indéfinie. Il y a donc eu, définitivement, division dans la traînée générale. Il en est résulté une multitude d'astéroïdes nébuleux, étroits et allongés, circulant dans les intervalles des planètes ; mais plus nombreux dans leur voisinage, où les traînées primitives devaient avoir plus de diamètre et de densité.

227. La faible attraction centrale de chaque astéroïde a fini par y détruire les différences de vitesses des molécules. Alors, il a cessé de s'allonger. L'attraction solaire, agissant plus fortement sur son extrémité inférieure, a amené sa grande longueur dans la direction du rayon vecteur. Mais, la condensation éprouvée par ces masses étant inappréciable, ce commencement de rotation n'en recevait point d'augmentation sensible. Le grand diamètre n'a donc pu arriver, ensuite, jusqu'à la perpendiculaire au rayon vecteur; et il s'est établi un mouvement oscillatoire, qui le ramenait, toujours, vers cette dernière ligne. Ce mouvement s'est perdu, plus tard, dans les perturbations diverses qui le contrariaient. Il n'est resté, définitivement, qu'une vitesse angulaire de rotation égale à la vitesse angulaire de translation,

228. Les astéroïdes, dont les orbites primitives étaient peu éloignées de celle de la terre, éprouvent de violentes perturbations, chaque fois qu'ils se trouvent en conjonction avec elle. Des perturbations successives peuvent amener, ces orbites à passer très près de celle de la terre, et enfin, ces masses elles-mêmes à rencontrer notre globe.

229. Les astéroïdes provenant de la traînée laissée de *Mars* à la *terre*, restent supérieurs à cette dernière planète ; et ne peuvent la frapper que dans l'hémisphère opposé au soleil, et, par conséquent, pendant la nuit.

Leur vitesse angulaire, autour du soleil, est moindre que celle de la terre. Leur rencontre, avec elle, ne peut donc s'opérer, qu'autant qu'ils la précèdent.

L'extrémité inférieure de l'astéroïde, étant la plus voisine de la terre, en est aussi la plus attirée. Elle est donc portée en arrière. Le mouvement de rotation, déjà existant dans cette masse, est, pour cette partie inférieure, rétrograde par rapport au mouvement de translation. L'attraction de la terre, dans ce premier instant, accélère donc le mouvement de rotation acquis, par la masse allongée, autour du milieu de sa longueur. Mais ce mouvement concourt, avec le mouvement de translation de la terre, à porter, en peu de temps, l'extrémité inférieure de l'astéroïde, au-delà de la ligne qui joint les centres de ces deux masses. L'attraction terrestre tend alors à imprimer, au fuseau nébuleux, une rotation inverse à la rotation établie, qui ne peut tarder à être entièrement détruite, par l'accroissement continuel de cette attraction. Le mouvement de rotation qui s'établit ensuite, inverse par rapport à la rotation primitive de l'astéroïde, l'est aussi par rapport à celle de la terre.

La rotation tendra encore à changer de direction, après que le grand diamètre sera, de nouveau, arrivé sur la direction de la ligne des centres. Il s'établira donc ainsi une série d'oscillations.

Les demi-oscillations, pendant lesquelles l'extrémité inférieure est en avant de la ligne des centres, sont les plus courtes; parce que, dans cette position, la ligne des centres se rapproche du grand diamètre, en vertu du mouvement de la terre, tandis qu'elle fuit devant lui, dans la position opposée. Il y a donc plus de chances pour que l'astéroïde rencontre la terre dans cette dernière position. Occupons nous, d'abord, de ce cas.

230. Quand l'astéroïde vient toucher l'hémisphère obscure, il a donc sa partie supérieure dirigée vers l'est. Si l'oscillation descendante n'avait pas commencé antérieurement, elle ne pourrait tarder à s'établir. La partie inférieure tend donc à suivre le mouvement de rotation de la terre; tandis que la partie supérieure se trouve portée en arrière, tant par la direction actuelle du mouvement oscillatoire, que par l'infériorité du mouvement général de translation de la masse nébuleuse. Le rapprochement, qu'à éprouvé l'astéroïde par rapport au soleil, tendait à rendre, sa vitesse angulaire de translation, un peu supérieure à celle de la terre; mais cette masse, qui le suivait, lui a fait éprouver une perte d'aire considérable, qui a dû laisser, au total, sa vitesse angulaire inférieure.

Si le point, où le météore pénètre dans notre atmosphère, restait, constamment, sur la ligne menée du centre de la terre à une étoile déterminée; ce point de pénétration devancerait l'étoile, dans son mouvement apparent vers l'occident; car les déplacemens apparens, qui résultent du déplacement de l'observateur, sont d'autant plus considérables que les objets observés sont plus rapprochés. Mais, ce point de pénétration est bien éloigné, de l'extrémité supérieure et même du centre de l'astéroïde. Il participe, dans sa rotation, au mouvement de l'extrémité inférieure ; et tend aussi, quoique moins rapidement, à devancer le centre. Ce mouvement réel, qui diminue sa vitesse apparente vers l'ouest, peut la rendre égale à celle de la sphère céleste, et montrer, constamment vers la même étoile, l'origine du météore.

Ce point de pénétration ne change, que graduellement, par rapport à la surface supérieure de l'atmosphère. La nouvelle substance nébuleuse qui y arrive, tend à rentrer dans le courant descendant, établi par la partie qui la précédait. Cette cause se joint au mouvement rotatoire de l'astéroïde, pour empêcher sa base de s'écarter beaucoup d'une même contrée.

231. Si l'extrémité inférieure de l'astéroïde, est en avant de la ligne des centres, quand elle arrive à la terre ; le mouvement de rotation, qu'il reçoit, tend à porter cette extrémité inférieure vers l'ouest ; tandis que la surface de la terre s'avance, au contraire, de l'ouest à l'est. Le météore devra donc, alors, frapper successivement différentes contrées du globe, et laisser sur chacune d'elles des aérolithes peu nombreux.

232. Dans tous les cas, si l'astéroïde a une longueur assez grande, il ne tombera pas en entier sur la terre. Sa partie supérieure, restant en arrière, finira par se séparer de l'extrémité inférieure qu'il abandonne à la terre. Elle continuera à parcourir son orbite, modifiée par l'énorme perturbation qu'elle a éprouvée. Elle devra ultérieurement rencontrer la terre vers le même point de l'orbite, et par suite à la même époque de l'année ; mais il paraît difficile de reconnaître, sans le secours du calcul, si, par suite des perturbations qu'elle a éprouvée, elle devra précisément s'y retrouver après la première révolution.

233. Les astéroïdes provenus de la nébulosité qui joignait la terre à Vénus, ont continué à décrire des orbites inférieures à celle de la terre ; ils ne peuvent la rencontrer que dans son hémisphère éclairé, et par suite pendant le jour. Cette rencontre ne peut avoir lieu qu'autant qu'ils sont devancés par elle, car ils ont une vitesse angulaire supérieure à la sienne. Du reste, ils recevront encore des oscillations semblables, et produiront des effets entièrement analogues.

234. Ces masses nébuleuses irrégulières, qui traversent notre atmosphère suivant une direction oblique à leur plus grande longueur, doivent s'y diviser, par la résistance et la pression qu'elles y éprouvent. Peut-être même leurs diverses parties

laissaient-elles, déjà, quelque intervalle, avant d'y pénétrer; Quoiqu'il en soit, ces parties sont animées de la même vitesse angulaire de rotation que la masse entière. Cette vitesse s'accroît, par la condensation qu'elles éprouvent; et l'on voit se reproduire tous les effets déjà décrits pour les aérolithes cométaires.

Ces derniers ne paraissent qu'isolément, tandis que les aérolithes planétaires, apparaissent en grand nombre, soit dans une même région, soit en se dispersant sur une grande partie de la surface terrestre.

## QUATRIÈME PARTIE.

### ÉTAT FUTUR DE L'UNIVERS.

### Chap. Ier.—*Changemens dans la température et la clarté universelle.*

235. *Refroidissement des soleils.*—Tous les astres aujourd'hui à l'état d'ignition, envoient, sans cesse, du calorique et de la lumière, aux astres déjà refroidis qui les entourent. Des rayons, en nombre incomparablement plus grand, sont par eux lancés dans l'espace, où leur route rectiligne n'aurait pas de terme, s'ils ne finissaient par y rencontrer quelque corps. Après des temps immenses, ces pertes réitérées refroidiront donc enfin la surface des soleils eux-mêmes.

L'univers ne sera-t-il plus alors qu'un vaste désert, où, les ténèbres et un froid perpétuel, auront tari, pour toujours, les sources de la vie ? Quand tout ce que nous rencontrons sur chacun de nos pas, nous paraît fait dans un but ; nous répugnons à penser qu'une mort éternelle soit la destinée future de l'univers. Nous verrons que, loin de là, la vie ne fera que s'étendre, et que les soleils refroidis deviendront eux-mêmes habitables.

236. *Clarté croissante du ciel.*—Pour simplifier nos raisonnemens, supposons, toutes les étoiles, également lumineuses et uniformément réparties dans l'espace. Supposons encore qu'elles doivent perdre, à la fois, leur incandescence. La pensée pourrait facilement restituer, dans le résultat, les différences que doit y apporter, la non conformité de l'état réel, avec ces hypothèses ; différences d'ailleurs peu importantes.

Nous choisirons la terre pour point central de la plupart des phénomènes que nous aurons à considérer. Mais les résultats obtenus seront évidemment appliquables à tous les astres.

237. Les astres trop éloignés pour que leur lumière nous soit encore parvenue, apparaîtront, successivement, par couches sphériques ayant pour centre la terre. La lumière, reçue de chacun d'eux, est en raison inverse du carré de sa distance; et, le nombre d'astres, contenus dans chaque couche d'une épaisseur donnée, est en raison directe de ce même carré. Chacune de ces couches, en se découvrant, ajoutera donc un même éclat à la voute céleste; et l'éclat total s'accroîtra proportionnellement au temps.

238. *Permanence sensible.* — Quand tous les astres seront éteints, la progression de la clarté céleste ne sera pas immédiatement arrêtée. Chacun sera visible encore, jusqu'à ce que ses derniers rayons émis aient dépassé la terre. Mais, aussitôt que la couche intérieure de la sphère visible aura disparu, les couches, qui apparaîtront à l'extérieur, en feront plus que remplacer celles qui s'effaceront successivement; et la clarté totale du ciel deviendra, sensiblement constante, pour des temps indéfinis. En effet, cette clarté ne sera diminuée que de la différence, des rayons interceptés par les astres disparus, à ceux que ces mêmes astres enverront par réflexion. Or, toutes les étoiles aujourd'hui visibles auraient cessé de briller, elles ne cacheraient encore qu'une partie inappréciable de la voute céleste.

239. Pendant ce période de permanence pour la clarté totale, l'apparence lumineuse du ciel s'approchera progressivement de l'uniformité. Car des multitudes d'étoiles indiscernables remplaceront les étoiles brillantes qui disparaîtront. Ces dernières, absorbant alors une partie des rayons qu'elles recevront elles-mêmes de la voute céleste, brilleront, il est vrai, d'un éclat moins vif que les parties voisines; mais cette nuance dérangera peu l'uniformité apparente du ciel. Les étoiles, qui se détachent, aujourd'hui, sur une surface non lumineuse, par la grande intensité de leur incandescence, ne pourront plus être distinguées, de cette surface devenue lumineuse, quand elles n'en différeront que par l'infériorité de leur éclat. On sait, en effet, qu'une vive lumière amplifie, sur la rétine, les objets qui la produisent; tandis que l'obscurité les rétrécit. Les astres, qui se montrent sous un angle visuel considérable, pourront seuls être apperçus : la lune et le soleil paraîtront, sur la voute lumineuse, comme des disques, relativement, obscurs; et leurs révolutions marqueront encore la division du temps.

240. Déjà le période, du refroidissement des soleils et de l'accroissement général de l'éclat céleste, est, pour nous, comparable à l'éternité. La durée de la permanence sensible de cet éclat nous offre, encore, une seconde éternité.

241. *Décroissance.*—Quand enfin la diminution de clarté sera devenue appréciable, un temps égal à celui qui l'aura produite, sera nécessaire pour amener une seconde diminution égale ; et, il faudra un nombre inexprimable de ces périodes immenses, pour que la voute céleste soit entièrement cachée par les astres dont la terre ne recevra plus de rayons directs. L'univers ne sera plus, alors, éclairé que par des rayons réfléchis. Nous nommerons, période *polychrone,* l'ensemble des périodes écoulés jusqu'à cette époque.

242. Au bout d'un certain tems, les derniers rayons qu'avaient reçu directement les étoiles les plus voisines, auront dépassé la terre; et elles commenceront à ne plus lui envoyer que les rayons, déjà une fois réfléchis, qui les éclairent elles-mêmes. Il en sera successivement de même pour toutes les étoiles. Enfin, après un second période polychrone égal au premier, l'univers ne sera plus éclairé que par des rayons réfléchis au moins deux fois.

Après un troisième période polychrone, la clarté universelle ne proviendrait plus que de rayons, au moins trois fois réfléchis ; et ainsi de suite, pendant une infinité de périodes polychrones.

La perte, qui doit accompagner les réflexions successives, diminuera, progressivement, la quantité de lumière en circulation dans l'univers.

243. *Permanence absolue et définitive.*— Les périodes polychrones, en se succédant, amèneront-ils donc, une diminution indéfinie, dans la clarté universelle ?

Nous avons fait abstraction, jusqu'à présent, de la faible lumière dégagée, à la surface des astres refroidis, par différentes causes physiques ; telles que les phénomènes électriques, la phosphorescence naturelle de certains corps, mais surtout, celle qui accompagne la formation des brouillards.

La phosphorescence naturelle ne paraît pas devoir décroître. Les deux autres phénomènes, qui dépendent aujourd'hui de plusieurs causes, ne proviendront plus, après l'entier refroidissement des soleils, que de l'agitation produite, dans l'atmosphère de chaque globe, par l'attraction des masses voisines. Cette cause continuera à y produire des dilatations et des compressions alternatives, des formations et des condensations de vapeurs, et, par suite, aussi des phénomènes électriques. La quantité de lumière, qu'elle produit dans l'univers, deviendra constante comme elle. Or, la lumière universelle doit, elle-même, cesser de décroître, lorsque la portion, de cette lumière, absorbée par la surface des astres, cessera de dépasser la lumière qui y est developpée. La décroissance de la clarté générale doit donc avoir un terme.

Les brouillards et les nuages formés sur notre globe, ne sont pas, d'ailleurs, comparables à ceux que laisseront déposer, les vastes atmosphères des soleils refroidis. Les causes qui les produisent deviendront, il est vrai, moins puissantes ; mais, par cela même, toutes les atmosphères se maintiendront dans un état hygrométrique, plus voisin de la saturation ; de plus faibles causes suffiront donc pour y déterminer la formation de globules vésiculaires ; ce qui produira une compensation partielle.

D'un autre côté, la lumière a une grande influence, sur la colorisation en général, et particulièrement, sur celle des végétaux. Une diminution dans la clarté universelle, donnera donc, des teintes moins foncées, aux surfaces de tous les astres, qui absorberont, par suite, une moins grande quotité de la lumière reçue.

Ainsi, la clarté définitive, plus faible, sans doute, que la clarté moyenne dont nous jouissons, sera loin, cependant, de devenir insensible. Elle pourra peut-être égaler, par exemple, la clarté moyenne de Jupiter, ou de Saturne.

244. *Chaleur*.—La chaleur, émise par les astres, ne peut se perdre dans l'univers. La quantité de ce fluide, en circulation dans l'espace, s'accroîtra sans cesse par le refroidissement, d'abord superficiel, de tous les soleils, mais, qui finira par se propager jusqu'à leur centre.

Tant que la clarté de la voûte céleste s'accroîtra, son rayonnement calorifique augmentera par cela seul. Il augmentera encore, pendant que la clarté restera constante ; parce que les masses, quoique descendues au-dessous de l'incandescence, continueront, néanmoins, à émettre du calorique jusqu'au refroidissement central.

Dans le second période polychrone, et dans les suivans, la chaleur rayonnante, qui accompagnera la lumière, diminuera avec elle. Mais, soit qu'on suppose l'espace vide, ou rempli d'un éther quelconque, sa capacité pour le calorique doit être très faible. Son contact si prolongé avec les corps échauffés, aura donc élevé sa température, et son propre rayonnement suppléera, plus ou moins, à la diminution du rayonnement des astres. Enfin, il arrivera un point, où l'espace et les astres refroidis jusqu'à leur centre, jouiront exactement de la même température. Dès-lors plus de changemens possibles, au moins, par les causes, aujourd'hui connues. La quantité de Calorique, en circulation dans l'univers, aura atteint, à la fois, son maximum et son point de permanence.

En résumé, nous trouvons, pour l'état définitif de l'univers, une température et une clarté, uniformes et permanentes.

Chap. II. — *Vie animale et végétale.*

245. *Soleils actuels.* — Les soleils solidifiés à la surface éprouveront, et pendant des temps bien plus longs, tous les bouleversemens dont nous retrouvons des traces si évidentes sur notre globe. Quand la température y sera compatible avec l'existence d'êtres organisés, les conditions de la vie se trouveront successivement changées par le refroidissement graduel. Mais le règne animal et le règne végétal, n'y périront pas, lentement, par cette cause. Ils seront, comme ils l'ont été sur la terre, ensevelis ensemble, par de grandes catastrophes; et des races, toutes nouvelles, les remplaceront chaque fois.

Enfin, la croûte solide, acquérant de plus en plus d'épaisseur, finira par rendre, ces bouleversemens, plus rares et moins universels. En même temps, elle ralentira la transmission de la chaleur centrale, et finira par la rendre insensible. La température moyenne de l'astre n'éprouvera plus, alors, que les changemens, si lents, qui s'opèrent dans l'univers entier. Les règnes organiques y acquéreront de la stabilité; et se trouveront dans les mêmes conditions que sur les astres, dès aujourd'hui, refroidis.

246. *Astres déjà refroidis.* — Dans toutes les vicissitudes que doit éprouver l'univers, la température des globes, aujourd'hui refroidis, ne paraît pas devoir sortir des limites où la vie est possible. La diminution du rayonnement des soleils, sera compensée, par le rayonnement de la voûte céleste et par l'élévation graduelle de la température de l'espace.

Tous les changemens doivent s'opérer, d'ailleurs, avec tant de lenteur, que la température et la clarté, peuvent être considérées, comme constantes, pendant de longues séries de siècles; ce qui permettrait, aux générations successives, d'y adapter leur organisation.

247. Cependant, au milieu de cette permanence générale, les

phénomènes atmosphériques produiront encore quelques variations locales de température. Ces variations, moins violentes et plus rares qu'aujourd'hui, produiront, dans les plantes, des dilatations moins grandes, mais suffisantes encore aux mouvemens de la sève dans une végétation moins active.

Des pluies, moins abondantes, suffiront pour entretenir l'humidité d'un sol qui sera moins rapidement desséché.

La vie des animaux, promptement usée aujourd'hui par les brusques et fréquens changemens de température, acquèrera une durée plus longue. La diminution de l'intensité moyenne de la lumière, doit avoir sur eux bien peu d'influence. Déjà, dans un même individu, un séjour prolongé, dans l'obscurité, exalte, à un bien haut degré, la sensibilité de l'organe visuel. Des organes, graduellement modifiés, dans une longue suite de générations, recevront, de la clarté future, une impression égale à l'impression produite, sur nos yeux, par la clarté moyenne actuelle.

La lumière exerce, sur la vie des végétaux, une influence beaucoup plus prononcée. Les parties vertes, exposées à de faibles rayons, décomposeront bien plus lentement l'acide carbonique; mais, en compensation, il n'y aura plus, pour eux, de période pendant lequel ce gaz sera reformé. Le carbone, qu'ils se seront approprié, leur sera définitivement acquis. La maturation des fruits devra se faire avec lenteur. Tout paraît donc devoir se coordonner pour une végétation peu active.

248. En définitive, nous ne voyons, dans les changemens à venir, aucune catastrophe qui doive ensevelir les races aujourd'hui existantes.

Si cependant l'organisation des végétaux actuels, ne pouvait se plier, aux divers états météorologiques, qui doivent se succéder si lentement; le renouvellement du règne végétal, pourrait entraîner celui d'une partie des espèces animales. Mais, le genre humain, dont l'organisation peut se prêter à des climats et à des nourritures si diverses, dont l'industrie d'ailleurs sait remédier à tant d'inconvénients physiques, paraît devoir être témoin de toutes les vicissitudes futures de l'univers, et arriver à cette époque, où une température et une clarté peu variables règneront sur les globes, alors tous habités.

# ADDITIONS,

COMPRENANT

## QUELQUES DÉVELOPPEMENS,

### ET DES CALCULS A L'APPUI DE CE QUI PRÉCÈDE.

#### ADD. I. — *Limites des atmosphères.* (N° 11).

249. Dans le second chapitre, et dans plusieurs chapitres suivans, nous considérons des masses de vapeurs isolées dans l'espace. Il convient d'examiner comment de telles massses peuvent se limiter.

La question est évidemment la même, pour une masse entièrement formée de fluïdes élastiques, ou pour une atmosphère qui enveloppe une masse solide. Afin de fixer les idées, nous nous occuperons de l'atmosphère terrestre, dont nous déterminerons approximativement la limite.

250. La loi de la dilatation des fluïdes élastiques paraît inconciliable avec la limitation des atmosphères; et le serait, en effet, si ces atmosphères étaient composées de molécules infiniment petites.

Mais il est maintenant admis, par les physiciens et, surtout, par les chimistes, que la matière n'est, qu'idéalement, divisible à l'infini; qu'elle se compose, en réalité, de molécules, d'une extrême ténuïté, et, néanmoins, d'une masse finie. Ainsi, le poids de chaque molécule atmosphérique, et, par conséquent, celui de chaque couche d'une seule molécule d'épaisseur, sont des quantités finies.

Le poids de la couche supérieure de l'atmosphère, tend à la rapprocher de la couche qui lui est immédiatement inférieure. La répulsion de cette dernière couche tend à l'en écarter. Les deux couches doivent, évidemment, se maintenir à une distance telle que ces deux forces se fassent équilibre. Or, le poids de la couche supérieure étant une quantité finie, une distance finie suffira pour que cet équilibre s'établisse.

Les intervalles des couches inférieures seront finis, a fortiori. Le nombre des couches étant d'ailleurs fini, la somme de tous ces intervalles formera une hauteur finie.

Ainsi, déjà nous voyons que la limite de notre atmosphère ne doit pas être à l'infini. Nous reconnaîtrons, par le calcul, qu'elle n'est même pas à une hauteur excessive.

251. On connaît une formule qui détermine la hauteur d'une couche quelconque atmosphérique, en fonction de la pression qu'elle éprouve. Mais cette formule conduit à un résultat absurde, quand on veut en faire usage pour déterminer la hauteur de l'atmosphère. Il faut donc qu'elle soit basée sur quelque hypothèse qui devienne absurde à la limite. C'est ce que nous allons reconnaître en effet.

Pour arriver à la formule, on s'appuie sur ce principe, que la densité d'une couche quelconque est proportionnelle à la pression *qu'elle supporte*. Cependant, le poids de la couche elle-même fait partie de la force qui résiste à la répulsion de la couche inférieure. Il est indifférent, sans doute, de négliger ce poids, tant qu'il n'est qu'une fraction inappréciable de la pression. Mais, quand on s'approche de la limite supérieure, on commet, en le négligeant, une erreur de plus en plus grande. Enfin, la suppression de ce poids devient tout-à-fait absurde, pour la dernière couche ; car on ne la suppose plus attachée, par aucune force, à la masse dont elle fait partie, tandis qu'elle en est écartée par une répulsion qui ne devient jamais rigoureusement nulle. L'équilibre devient donc impossible, pour cette couche, dans cette hypothèse. La formule d'équilibre, déduite de cette même hypothèse, devra donc, nécessairement, donner, elle-même, un résultat absurde, quand on voudra l'étendre jusqu'à la limite de l'atmosphère.

252. Nous allons chercher à rectifier le principe qui doit servir de base au calcul, de manière à le rendre rigoureux dans tous les cas.

Il résulte de l'observation, que les densités des fluides élastiques sont proportionnelles aux forces comprimantes. Or, la condensation s'arrête, évidemment, au point où la force répulsive des molécules fait équilibre à la force comprimante. La force répulsive varie donc, aussi, dans le même rapport que la densité ; et, par conséquent, en raison inverse des cubes des distances, qui séparent les molécules de la masse.

253. Ce principe reconnu, appliquons-le au cas où nous ne pouvons plus négliger le poids de chaque couche, d'une seule molécule d'épaisseur.

La force, qui tend à faire descendre une couche, se compose de la pression qu'elle supporte et de son propre poids. Cette somme, qui forme la pression exercée, par la couche considérée, sur la couche immédiatement inférieure, doit faire équilibre à la répulsion de cette dernière. Elle doit donc être en raison inverse du cube de la distance de ces deux couches.

L'équilibre ne peut avoir lieu, dans un fluide, sans que chaque molécule soit sollicitée, suivant toutes les directions, par des forces égales. Latéralement, chaque molécule est sollicitée par les répulsions des molécules opposées. Ces répulsions doivent être égales, non-seulement entre elles, mais aux deux forces qui agissent verticalement ; et, par conséquent, à la répulsion de la molécule inférieure. Chaque molécule est donc à la même distance des molécules latérales et de la couche immédiatement inférieure.

Mais ces distances sont moindres que la distance à la couche supérieure, parce que le poids de la molécule même se joint à la répulsion de cette couche pour faire équilibre à la répulsion inférieure.

Les répulsions des couches successives, étant ainsi, depuis la couche supérieure, successivement augmentées de quantités égales à leurs poids ; il s'ensuit, qu'en définitive, les répulsions sont égales aux sommes des poids. Ainsi, la pression, supportée par une couche, n'est autre chose que la répulsion qu'elle éprouve de la part de la couche supérieure.

254. Si l'on voulait faire entrer, dans le calcul, la considération des densités, il faudrait mesurer la hauteur occupée par une molécule, non entre les milieux des intervalles qui la séparent des molécules supérieure et inférieure, mais de cette molécule même à la molécule inférieure. Le volume de la molécule considérée serait ainsi le cube de cette distance ; et la densité de cette molécule serait égale à sa masse, divisée par ce volume. On dirait alors que la densité d'une couche est proportionnelle, non à la

pression qu'elle supporte, mais à la pression qu'elle exerce. Car la densité, ainsi entendue, serait en raison inverse du cube de la distance de la couche considérée, à la couche inférieure.

Au reste, il sera plus clair de conserver, dans le calcul, les distances des molécules ; en considérant ces molécules elles-mêmes comme des points matériels.

255. Nous ferons abstraction de la variation de la température, sur toute la hauteur de l'atmosphère ; et nous supposerons cette température partout à zéro.

Soit P la pression exercée, sur l'unité de surface, par une colonne de mercure de $0^m,76$ de hauteur, aussi à zéro de température. C'est cette pression que nous supposerons avoir lieu à la surface de la terre, ou, si l'on veut, au point de cette surface que nous considérerons.

Nous prendrons pour unité de longueur le mètre, pour unité de surface le mètre carré, pour unité de volume le mètre cube.

Nous prendrons, pour unité de pesanteur, celle de la surface de la terre ; et, pour unité de poids, celui d'un mètre cube d'air soumis à la pression P.

A la température et sous la pression considérée, le rapport de la densité du mercure à celle de l'air, est exprimé par 10366. La pression de $0^m,76$ de mercure équivaut donc à 10366 fois la pression d'une colonne d'air de même hauteur. Or, le poids du mètre cube d'air étant pris par unité, la pression, sur l'unité de surface, d'une colonne d'air de $0^m,76$, sera elle-même exprimée par 0,76. On aura donc $P=10366\times 0,76$ ou $P=7878,16...$ (1).

256. Soit D, la distance qui sépare les molécules d'air, à la surface de la terre. Nous pouvons, sans erreur sensible, supposer cette distance constante sur un mètre de hauteur. $\frac{1}{D^3}$ exprimera donc le nombre des molécules contenues dans un mètre cube. $D^3$ sera le volume d'une de ces molécules ; et représentera aussi son poids ; puisqu'on a pris pour unité le poids du mètre cube.

257. Nous supposerons, et nous avons déjà implicitement supposé, les molécules d'air rangées sur une série de surfaces horizontales que nous appelons couches.

Soit $D_1$, la distance qui sépare, la couche supérieure, de celle qui lui est immédiatement inférieure ; $D_2$, la distance de la seconde couche à la suivante, et ainsi de suite ; $D_n$ représentant la distance de la couche de n° *n*, à la suivante. Les distances qui séparent entr'elles les molécules d'une couche, sont, comme nous l'avons vu, les mêmes qui séparent cette couche de la suivante.

Nous appellerons de même $P_1$, $P_2$, $P_3$,.... $P_n$, les pressions exercées par les couches successives, à partir de la couche supérieure.

Nous représenterons, par R, le rayon terrestre ; par H, la hauteur totale de l'atmosphère ; par *h*, la hauteur d'une couche quelconque au-dessus de la surface de la terre ; par Z, la différence $H-h$, qui exprime la distance d'une couche quelconque à la couche supérieure de l'atmosphère. Nous désignerons par $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$,.... $Z_n$, les valeurs de Z qui correspondent aux couches successives de même numéro ; de sorte qu'on aura $Z_1=0$, $Z_2=D_1$, $Z_3=D_1+D_2$, $Z_4=D_1+D_2+D_3$, ......................

$$Z_n=D_1+D_2+\ldots\ D_{n-1} \quad (2).$$

$$\text{Et } \Delta Z_1=D_1,\ \Delta Z_2=D_2,\ \Delta Z_3=D_3, \ldots\ \Delta Z_n=D_n \quad (3).$$

$\Delta P_n$ représentera l'accroissement de la pression $P_n$ ou la différence $P_{n+1}-P_n$.

Le poids de la couche inférieure de l'atmosphère, n'est qu'une partie inappréciable de la pression qu'elle exerce; nous pourrons donc, pour cette couche, confondre la pression exercée et la pression supportée; et considérer, indifféremment, la quantité P, comme représentant l'une ou l'autre de ces deux pressions.

258. La pression exercée par une couche étant en raison inverse du cube de sa distance à la suivante, on a la proportion

$$\frac{P}{P_n}=\frac{D_n^3}{D^3} \quad (4);$$

$$\text{d'où } P_n=\frac{P\,D^3}{D_n^3} \quad (5).$$

La portion, de cette pression $P_n$, due au poids de la couche considérée, sera exprimé par $\Delta P_{n-1}$ ; et sera égale au poids, d'une molécule de cette couche, multiplié par le nombre des molécules qu'elle contient sur l'unité de surface.

Le poids d'une molécule est égal à $D^3 \frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2}$ ; car $D^3$ est le poids qu'aurait la molécule à la surface de la terre, (n° 256), et $\frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2}$ exprime l'intensité de la pesanteur pour la couche considérée.

Le nombre des molécules compris dans cette couche, sur l'unité de surface, sera $\frac{1}{D_n^2}$.

On aura donc $\Delta P_{n-1} = \frac{D^3}{D_n^2} \cdot \frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2}$ (6).

Eliminant $D^3$ entre cette équation et l'équation (4), on trouve

$$P . \frac{\Delta P_{n-1}}{P_n} = \frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2} D_n \quad (7).$$

Equation dans laquelle $P_{n-1}$ représente la pression supportée par la couche considerée ; et $P_n$ celle qu'elle exerce.

Mettant pour $P_n$ sa valeur $P_{n-1} + \Delta P_{n-1}$, l'équation (7) devient $P \frac{\Delta P_{n-1}}{P_{n-1} + \Delta P_{n-1}} = \frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2} D_n$ (8).

259. Si nous fesons $n=1$, on aura

$Z_n = Z_1 = 0$, $P_{n-1} = 0$ ; et l'équation (8) donnera

$$D_1 = P \frac{(R+H)^2}{R^2} \quad (9).$$

Fesant de même $n=1$ dans l'équation (5), on a

$$P_1 = \frac{P\,D^3}{D_1^3} \quad (10), \text{ d'où } P_1 = \frac{D^3}{P^2} \cdot \frac{R^6}{(R+H)^6} \quad (11).$$

260. L'équation (7) peut se mettre sous la forme

$$P\frac{(P_n - P_{n-1})}{P_n} = \frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2} D_n \quad (12);$$

Et en y substituant les valeurs $P_n = \frac{P\,D^3}{D_n^3}$,

$P_{n-1} = \frac{P\,D^3}{P_{n-1}^3}$, on en déduira

$$D_n^3 + \frac{R^2}{(R+H-Z_n)^2} \frac{D_{n-1}^3}{P} D_n - D_{n-1}^3 = 0 \quad (13).$$

Equation qui détermine la distance de deux couches quelconques, en fonction de la somme des distances précédentes et de la dernière de ces distances.

Pour déterminer rigoureusement la valeur de H, il faudrait sommer la série $Z_n = D_1 + D_2 + D_3 \ldots + D_{n-1}$, jusqu'à $Z_n = H$, $D_{n-1} = D$; en prenant, pour la valeur du premier terme, celle qui est donnée par l'équation (9), et en déduisant successivement les suivants au moyen de l'équation (15).

Cette sommation paraît difficile, et nous n'essayerons pas d'y arriver directement.

261. Si nous remplaçons $Z_n$ par $Z$, $D_n$ deviendra $\Delta Z$.

$P_{n-1}$ est la pression *exercée* par la couche supérieure à celle que nous considérons, et par conséquent la pression *supportée* par la couche considérée elle-même. Représentons, par $p$, cette pression *supportée* par une couche quelconque; et l'équation (8) deviendra $P.\frac{\Delta p}{p+\Delta p} = \frac{R^2}{(R+H-Z)^2}.\ \Delta Z.$ (14);

équation dans laquelle $\Delta p$ représente la portion de pression due au poids de la couche considérée.

Négliger $\Delta p$, auprès de $p$, c'est introduire dans le calcul la supposition que la pression supportée par chaque couche est proportionnelle au cube de sa distance à la couche suivante. Car, si dans l'équation (4) on remplaçait $P_n$ par $P_{n-1}$, on arriverait directement à l'équation $P\frac{\Delta p}{p}=\frac{R_1^2}{(R+H-Z)^2}\Delta Z$ (15); qui résulte de l'équation (14), quand on y supprime $\Delta p$ auprès de $p$.

Cette suppression n'entraîne pas d'erreur sensible tant que la pression, due au poids d'une seule couche, est très faible par rapport à la pression qu'elle supporte. Mais l'erreur augmente à mesure que $p$ diminue, c'est-à-dire, à mesure que l'on considère une couche plus élevée. Enfin, l'on tombe tout-à-fait dans l'absurde, quand on arrive à la couche supérieure, pour laquelle $p=0$. En effet l'équation (15), donne dans ce cas $\Delta Z=\frac{1}{0}$, tandis qu'on doit avoir d'après l'équation (14), $\Delta Z=P\frac{(R+H)^2}{R^2}$.

262. Il ne paraît pas plus facile de trouver l'intégrale aux différences de l'équation (15) que celle de l'équation (14). Mais, tant que les accroissemens $\Delta p$ et $\Delta Z$ sont très petits, c'est-à-dire, pour la partie inférieure de l'atmosphère, on pourra, sans erreur appréciable, considérer ces accroissemens comme infiniment petits; et substituer à l'équation (15), l'équation

$$P\frac{dp}{p}=\frac{R^2}{(R+H-Z)^2}dZ \quad (16).$$

Cette substitution sera une nouvelle cause d'erreur, quand on voudra étendre, les résultats obtenus, jusqu'aux couches supérieures de l'atmosphère.

Nous ne chercherons pas, maintenant, si ces nouvelles erreurs sont, dans le même sens que les premières, ou en sens opposé. Mais, dans tous les cas, elles ne peuvent empêcher d'arriver à un résultat absurde, quand on fera $Z=0$, $p=0$. En effet l'équation (16) donne alors $dZ=\frac{dp}{0}$; tandis que l'on devrait avoir encore $dZ=P\frac{(R+H)^2}{R^2}$; car cette expression, qui vient d'être trouvée pour $\Delta Z$, étant indépendante de la valeur de $\Delta p$, doit rester la même quand $\Delta p$ devient infiniment petit.

263. L'intégration de l'équation (16) donne

$\frac{P}{\log.e}\log.p=\frac{R^2}{R+H-Z}+C$ (17) ; $e$ représentant la base des logarithmes népériens.

Pour $Z=H$, $p$ devient P, ce qui donne $\frac{P}{\log e}\log.P=R+C$ (18).

Retranchons, de cette équation, l'équation (17), afin d'éliminer la constante et nous aurons $\frac{P}{\log.e}\log\frac{P}{p}=\frac{R(H-Z)}{R+H-Z}$ (19).

264. Si l'on voulait prendre cette intégrale jusqu'à $Z=0$, $p=0$, on aurait $\frac{H}{R+H}=\frac{1}{0}$ résultat absurde, absurde, ainsi qu'on l'avait prévu ; car H et R sont essentiellement positifs ; et la fraction $\frac{H}{R+H}$, toujours plus petite que l'unité, ne peut jamais devenir infinie.

Nous éviterions cette absurdité en prenant l'intégrale jusqu'à $Z=D_1$, $p=P_1$ ; limites qui correspondent à la couche qui suit immédiatement la couche supérieure. L'équation (19) nous donne, ainsi, $\frac{P}{\log e}\log\frac{P}{P_1}=\frac{R(H-D_1)}{R+H-D_1}$ (20)

En employant cette formule on resterait conséquent à l'hypothèse admise pour opérer l'intégration ; hypothèse qui consistait à supposer les cubes des distances des molécules proportionnelles aux pressions supportées. Mais aussi, par cela même, on conserverait, toute entière, dans le résultat, l'erreur qui doit en résulter.

On atténuera cette erreur, en revenant à la vérité, pour la détermination de la limite ; c'est-à-dire, en rétablissant, dans l'intégrale une fois trouvée, la pression exercée, au lieu de la pression supportée. De cette manière on aura $p=P_1$, pour $Z=o$ ; et l'on arrivera à l'équation $\frac{P}{\log e}\log\frac{P}{P_1}=\frac{RH}{R+H}$ (21).

265. Cette combinaison de deux hypothèses différentes admises, successivement, sur les mêmes quantités, dans un même cal-

cul, pourrait laisser dans l'esprit quelque obscurité. Mais on peut, comme on va le voir, arriver directement à la formule (21). Il suffit, pour cela, d'éliminer la quantité $\Delta P_{n-1}$, de l'équation (7), au lieu d'en éliminer la quantité $P_n$.

Nous avons $\Delta P_{n-1} = \Delta P_n - \Delta^2 P_{n-1}$ (22). L'équation (7) deviendra donc

$$P.\frac{\Delta P_n - \Delta^2 P_{n-1}}{P_n} = \frac{R^2}{R+H-Z_n} \Delta Z_n \quad (23).$$

$\Delta P_{n-1}$ est l'accroissement de pression dû au poids de la couche considérée. Supprimer, dans la formule précédente, le terme de $\Delta^2 P_{n-1}$, c'est substituer, à cet accroissement, l'accroissement $\Delta P_n$, qui est dû au poids de la couche immédiatement inférieure.

L'erreur, que l'on commet ainsi, est insensible, pour les parties inférieures de l'atmosphère, où la densité et la pesanteur varient très peu d'une couche à la suivante. Elle augmente à mesure qu'on s'approche de la couche supérieure ; mais au moins l'erreur n'arrive jamais, ici, jusqu'à l'absurde. La suppression de $\Delta^2 P_{n-1}$ réduit la formule à $P\frac{\Delta P_n}{P_n} = \frac{R^2}{R+H-Z_n} \Delta Z_n$.... (24), qui peut encore s'écrire sous la forme (15), pourvu qu'on représente, maintenant, par $p$, la pression *exercée* par la couche considérée. La pression *exercée* n'étant nulle pour aucune couche, $\Delta Z$ ne peut jamais devenir infini.

Passant, comme au n° 262, des différences aux différentielles, nous arriverons encore aux équations (16) et (17).

Pour la détermination de la limite inférieure, on n'a pas à tenir compte du changement qu'a éprouvé la signification de la lettre $p$. Car on a vu, (n° 257), qu'on peut confondre, pour la couche inférieure, les pressions supportée ou exercée. On arrivera donc toujours à l'équation (19).

Mais ici $p = P_1$, quand $Z = 0$ ; ce qui donne l'équation (21), au lieu de l'équation (20).

266. En remplaçant $P_1$ par sa valeur (11), l'équation (21) devient :

$$\frac{RH}{R+H}=\frac{3P}{\log e}[\log P+\log\frac{1}{D}+\log\frac{(R+H)^2}{R^2}] \quad (25).$$

Représentant, par G, le second membre de cette équation, on en déduit :

$$H=\frac{GR}{R-G} \quad (26).$$

Pour déterminer la valeur de G, nous remarquerons que le nombre D, qui exprime en fraction du mètre, la distance des molécules d'air, prises à la surface de la terre, est excessivement petit. On peut admettre qu'il est inférieur à un millionième ; $\log.\frac{1}{D}$ sera donc supérieur à 6. La valeur de P, donnée par l'équation (1), n'est guère inférieure à 10000 ; log. P diffère donc peu de 4.

Or, même en supposant $H=2R$, la fraction $\frac{(R+H)^2}{R^2}$ serait plus petite que 10, et son logarithme plus petit que l'unité.

Donc, en négligeant ce logarithme, on ne commettra pas, une erreur d'un dixième, sur la valeur de G.

Nous pourrons donc, pour trouver une première approximation de la valeur de H, supposer

$$G=\frac{3P}{\log.e}(\log P+\log\frac{1}{D})\ldots.(27).$$

On sait que $e=2,7182818$ (28), d'où l'on tire $\log e=0.4342945$ (29). Nous avons d'ailleurs $P=7878,16$ (1).

Si nous fesons $\frac{3P}{\log e}=K$ (30), nous aurons $K=54420,4$ (31).

En fesant, $K\log P=A$ (32), on trouve $A=212043$ (33), et l'on arrive à l'équation $G=A+K\log\frac{1}{D}$ (34).

Il n'y a d'inconnue, dans cette formule, que la quantité D, sur laquelle nous serons réduits à faire des hypothèses.

267. Posons $D=\frac{1}{10^s}$ (35). Nous aurons $\log\frac{1}{D}=s$ (36).

D'où $G=A+Ks$ (37), et $H=\frac{R(A+Ks)}{R-A-Ks}$ (38).

Je divise, par R, les deux termes de la fraction (38) et je fais $1-\frac{A}{R}=a'$ (39), $\frac{K}{R}=k$ (40). Ce qui donne $H=\frac{A+Ks}{a'-ks}$ (41).

On sait que R=6366198 mètres (42), d'où l'on déduit $a'=0,966692$ (43), $k=0,00854834$ (44).

268. Nous considérons, un millionième du mètre, comme la plus grande valeur qu'on puisse supposer à D. Il est même présumable, d'après les expériences qui ont été faites sur la divisibilité effective de la matière, que cette distance est beaucoup plus petite.

Supposons donc d'abord $s=6$. On trouvera $H=\frac{538567}{0,915402}$ (45)

ou $H=588339^{m}$ (46).

Si D était mille fois plus petit, c'est-à-dire s'il était le bilionième du mètre, $s$ serait augmenté de 3 unités, et l'on obtiendrait la valeur de H, en ajoutant 3K, ou 163261 au numérateur de la fraction (45), et en retranchant $3k$ ou 0,025645 de son dénominateur. Ce qui donnerait

$H=\frac{701828}{0,889757}$ (47) ou $H=788786^{m}$ (48).

Si D est le trillionième du mètre, on a $s=12$, et l'on trouve $H=\frac{865090}{0,864112}$ (49), ou $H=1001130^{m}$ (50).

Si l'on supposait D égal au quatrillionnième du mètre, ou $s=15$, on aurait $H=\frac{1028351}{0,838467}$ (51), ou $H=1226466^{m}$ (52) *.

* La densité de l'air devient inappréciable à des hauteurs bien faibles en comparaison de celles qui viennent d'être trouvées. Si, par exemple, on cherchait, au moyen de la formule (21), à quelle hauteur la densité de l'air est réduite au millième de ce qu'elle est à la surface de la terre, on aurait :

$P_1=\frac{1}{1000}P$, d'où $\log\frac{P}{P_1}=3$ et $\frac{H}{R+H}=\frac{3P}{\log e}$.

Cette dernière valeur n'est autre chose que celle de K (équations 30 et 31). On en déduit, pour H, une valeur d'environ 55000 mètres.

269. Il paraît peu vraisemblable que la petitesse des molécules d'air puisse dépasser, ou même atteindre, celle qui résulterait de la dernière hypothèse.

En effet, dans cette hypothèse, un mètre cube d'air contiendrait un nombre de molécules exprimé par la quarante cinquième puissance de 10 ; un millimètre cube, en contiendrait un nombre exprimé par $10^{36}$ ; enfin un cube ayant pour côte le millionième du mètre, cube absolument imperceptible à la vue, contiendrait encore un nombre de molécules exprimé par $10^{27}$. Et cela pour un gaz, où les espaces vides sont, déjà, si supérieurs à ceux qui sont, réellement, occupés par la matière.

En choisissant cette dernière hypothèse, nous pensons donc dépasser de beaucoup la vérité ; et trouver pour la hauteur de l'atmosphère une limite à laquelle elle est inférieure.

Voyons, au reste, quelle devrait être, la petitesse des molécules, pour que la valeur de H fût double de ce que nous la supposons.

Les différences successives des valeurs trouvées pour H sont, 200447, 212344, 225336. Ces différences sont presque égales entre elles. Les suivantes continueront à l'être, tant que les dénominateurs seront très grands par rapport à la quantité $3k$, qui doit en être retranchée, pour passer d'une valeur de H à la suivante. Ces différences sont, d'ailleurs, inférieures au cinquième de la dernière valeur trouvée. Pour que cette valeur fût doublée, il faudrait donc qu'elle éprouvât, environ, cinq augmentations semblables ; et que, par conséquent, le nombre $s$ fût augmenté de 15 unités.

Ainsi, pour que notre hypothèse nous conduisît à une erreur de moitié sur la valeur de H, il faudrait que l'on eût $D = \frac{1}{10^{30}}$. Ce qui supposerait, dans un mètre cube d'air, un nombre de molécules exprimé par $10^{90}$. Ce qui en supposerait un nombre exprimé par $10^{45}$, dans l'espace qui, d'après notre hypothèse, ne contient qu'une seule molécule !

270. Une première approximation de la hauteur atmosphérique peut servir à en trouver une valeur plus approchée, en tenant

compte du terme, $\log \frac{(R+H)^2}{R^2}$, négligé dans la formule (27).

Il faudra, pour cela, changer la formule (41) en celle-ci :

$H = \frac{A+Ks+Km}{a'-ks-km}$ (53) ; dans laquelle on suppose

$m = \log \frac{(R+H)^2}{R^2}$ (54).

En nous arrêtant à l'hypothèse $s = 15$, les deux termes de la fraction (51), nous donnent, déjà, tout calculé, les premières parties des deux termes de la formule (53). En substituant dans $m$, la valeur de H (52) ; on trouve $m = 0,1530279$ (55), d'où $km = 0,001308$ (56), $Km = 8328$ (57) ; et enfin $H = 1238330$ mètres (58).

Nous pouvons employer, cette seconde approximation de la valeur de H, à calculer une valeur de $m$ plus approchée que la précédente ; et qui donnera une nouvelle approximation de la valeur H. On trouve ainsi $H = 1238433^m$ (59).

Enfin en se servant encore de cette valeur, pour obtenir une approximation plus grande, on trouve $H = 1238434$ mètres (60). Cette dernière valeur de H est, à moins d'un mètre près, celle qui satisfait à l'équation (25), dans l'hypothèse $s = 15$.

271. Il nous reste à reconnaître qu'elle peut être l'importance de l'erreur qu'on a commise, en substituant, la méthode de l'ingration aux différentielles, à celle de l'intégration aux différences.

272. Les formules trouvées nous permettront de calculer quelques-unes des premières valeurs de $D_n$.

En admettant, comme exacte, la valeur (60) ; on déduit, immédiatement, de l'équation (9), $D_1 = 11241^m, 41$ (61).

En fesant $n = 2$ dans l'équation (13), on a :

$D_2^3 + \frac{R^2}{(R+H-D_1)} \cdot \frac{D_1^3}{P} D_2 - D_1^3 = 0$ (62). D'où l'on déduit, au moyen des valeurs trouvées de H, $D_1$ et P,

$D_2^3 + 126743700\ D_2 - 1420570000000 = 0$ (63).

La seule racine réelle et positive de cette équation est comprise entre 7660 et 7661, mais beaucoup plus voisine de ce dernier nombre. Nous prendrons donc $D_2 = 7661$ mètres (64).

Pour $n=3$, l'équation (13) donne :

$$D_3^3 + \frac{R^2}{(R+H-D_1-D_2)^2}\frac{D_2^3}{P} D_3 - D_2^3 = 0 \quad (65), \text{ ou}$$

$D_3^3 + 40197340\, D_3 - 449631200000 = 0$ (66) ; équation dont la racine est comprise entre 5948 et 5949 ; mais plus près de cette dernière valeur. Nous prendrons $D_3 = 5949^m$ (67).

On aura, pour $n=4$,

$$D_4^3 + \frac{R^2}{(R+H-D_1-D_2-D_3)^2}\frac{D_3^3}{P} D_4 - D_3^3 = 0 \quad (68)$$

ou $D_4^3 + 18851860\ D_4 - 210538700000 = 0$ (69).

D'où l'on tire $D_4 = 4906$ mètres (70).

273. En substituant, dans la formule (5), les diverses valeurs qui viennent d'être trouvées pour $D_n$, et observant que, dans notre hypothèse, $D = \frac{1}{10^{15}}$ ; on trouvera

$$P_2 = \frac{P}{10^{45}(7661)^3} \quad (71), \quad P_3 = \frac{P}{10^{45}(5949)^3} \quad (72).$$

$$P_4 = \frac{P}{10^{45}(4906)^3} \quad (73), \ldots P_n = \frac{P}{10^{45}.D_n^3} \quad (74).$$

274. Il résulte rigoureusement des hypothèses admises, sur les valeurs de D et de H, qu'il faudrait descendre de $D_1$, ou de 11241 mètres, à partir de la couche supérieure, pour passer de la pression $P_1$ à la pression $P_2$, il faudrait descendre, ensuite, de $D_2$ ou $7661^m$, pour passer de la pression $P_2$ à la pression $P_3$ ; et de $D_3$, ou 5949 mètres, pour passer de la pression $P_3$ à la pression $P_4$.

Nous nous formerons une idée de l'erreur commise par l'emploi de la méthode d'intégration ordinaire, en cherchant, par cette méthode, de combien il faudrait descendre, pour obtenir les mêmes variations dans la pression.

275. Représentons, par $h_n$, la valeur de H—Z, qui, d'après l'équation (19), doit correspondre à la pression $P_n$.

Cette formule (19) donnera $\frac{P}{\log.e}\log\frac{P}{P_n}=\frac{Rh_n}{R+h_n}$ (75); ou, en mettant pour $P_n$ sa valeur (74),

$$\frac{3P}{\log.e}\log 10^{15}D_n=\frac{Rh_n}{R+h_n} \quad (76).$$ D'où

$$h_n=\frac{15\,K+K\log D_n}{(1-15\,k)-k\log D_n} \quad (77),$$ ou enfin

$$h_n=\frac{816306+K\log D_n}{0.871775-k\log D_n} \quad (78);$$ les quantités $K$ et $k$ conservant toujours les mêmes valeurs qu'aux nos. 266 et 267.

276. En donnant, successivement, à $n$, les valeurs 1, 2, 3 et 4, on trouve : $h_1=1238433$ mètres (79), $h_2=1225527^m$ (80), $h_3=1217035^m$ (81), $h_4=1210577^m$ (82).

La valeur de $h_1$ diffère, d'une unité, de la dernière valeur trouvée pour H. Cette différence ne peut tenir qu'à une erreur, provenue des fractions négligées ou ajoutées dans les calculs.

277. Si l'emploi de la méthode d'intégration ne produisait pas d'erreur, les différences, $h_1-h_2$, $h_2-h_3$, $h_3-h_4$, devraient reproduire, exactement, les distances $D_1$, $D_2$, $D_3$.

On trouve $h_1-h_2=12906^m$ (83), $h_2-h_3=8492^m$ (84), $h_3-h_4=6458^m$ (85).

D'où $\frac{h_1-h_2}{D_1}=1.148$ (86), $\frac{h_2-h_3}{D_2}=1.108$ (87) $\frac{h_3-h_4}{D_3}=1.086$ (88).

On a aussi $h_1 - h_4 = 27856^m$ (89),
$D_1 + D_2 + D_3 = 24851^m$ (90),
$(h_1 - h_4) - (D_1 + D_2 + D_3) = 3005^m$ (91).

Les trois premières équations font voir que les distances des couches, données par la méthode d'intégration, surpassent celles que l'on obtient directement. L'emploi de cette méthode conduit donc, à une valeur trop grande, pour la hauteur H.

On reconnaît, par les trois équations suivantes, que les résultats des deux méthodes se rapprochent à mesure qu'on descend; ainsi qu'on l'avait prévu.

Enfin l'on voit, par l'équation (91), que, pour les trois intervalles considérés, la différence totale de ces résultats est de $3005^m$.

Si l'on ajoutait, à ce nombre, et les différences que l'on trouverait encore pour les intervalles suivans, et les corrections qu'on aurait à faire aux valeurs de $D_1$, $D_2$, $D_3$ etc, calculées pour une trop grande valeur de H; on aurait l'erreur totale commise sur cette valeur de H.

Mais la progression rapide suivant laquelle les rapports (86), (87) et (88), se rapprochent de l'unité, doit faire penser qu'en définitive, on ne trouverait pour cette erreur qu'une faible fraction de la valeur de H.

278. On pourrait, au reste, s'approcher, aussi près que l'on voudrait, de la valeur de H qui convient, rigoureusement, à l'hypothèse admise sur la valeur de D.

Pour cela, on commencerait par rectifier la valeur de H, (60), en en retranchant les $3005^m$ d'erreur, déjà trouvés. On prendrait donc $H = 1235429^m$ (92). On employerait cette valeur à calculer, avec une plus grande approximation, les valeurs de $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$, et à calculer encore un certain nombre des intervalles suivans.

La formule $H = h_{n+1} + D_1 + D_2 + \ldots + D_n$ (93) donnerait une valeur de H, plus approchée que la précédente, et que l'on employerait, tant à rectifier les valeurs de $D_n$ déjà trouvées qu'à en calculer de nouvelles.

En continuant ainsi jusqu'à ce que, d'une part, les dernières valeurs de $D_n$ ne diffèrent plus sensiblement des différences $h_n - h_{n+1}$, et jusqu'à ce que, d'autre part, la dernière rectification opérée sur la valeur de H ne change plus sensiblement, les valeurs de $D_1$, $D_2$, etc. ; on aura une valeur de H sensiblement exacte.

279. Nous trouvons, à la limite de notre atmosphère, d'énormes distances entre les molécules.

Les corrections, à opérer sur les valeurs trouvées pour ces distances, résultent de l'augmentation qu'éprouve, la pesanteur, par la diminution de H ; augmentation qui produit, à son tour, une diminution dans ces valeurs, et, par suite, dans la valeur de H elle-même. On obtiendra des limites inférieures de ces distances, en fesant abstraction de la variation de la pesanteur, dans toute l'étendue de l'atmosphère ; et en la supposant, partout, la même qu'à la surface de la terre.

Si l'on supprime dans l'équation (9) le facteur $\frac{(R+H)^2}{R^2}$, qui a été introduit dans le calcul pour tenir compte de cette variation, on aura $D_1 = P$ (94) ou $D = 7878$ mètres (95) ; valeur encore énorme, et qui, par ce motif, pourrait inspirer quelque doute. L'égalité de $D_1$ et de P est d'ailleurs un résultat remarquable en lui-même. Bien qu'il résulte du calcul, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration directe, qui le fasse concevoir.

280 Soit $p$ la pression exercée par une couche quelconque de l'atmosphère. Soit $p'$ le poids d'un mètre cube d'air de même densité que cette couche ; en comptant, ici, la densité, comme il a été dit au nº 254.

On a vu que la densité, ainsi entendue, est, pour chaque molécule, et, par suite, pour chaque couche, rigoureusement proportionnelle à la pression *qu'elle exerce*. Ainsi, le rapport, de cette pression, à la densité, est une quantité constante pour toutes les couches.

Or $p'$ n'est autre chose que la densité de la couche considérée ;

puisque c'est son poids, sous l'unité de volume. On a donc $\frac{p}{p'} = C$ ; C représentant une quantité constante.

Pour la couche inférieure, $p$ devient P: $p'$ devient l'unité, puisque nous avons pris, pour unité, le poids d'un mètre cube d'air ayant la densité de cette couche. Donc $\frac{p}{p'} = P$.

Or $\frac{p}{p'}$ exprime, évidemment, le nombre de mètres cubes, de densité $p'$, qu'il faudrait placer, les uns au-dessus des autres, pour produire la pression $p$. Ou, simplement, c'est le nombre de mètres de hauteur que devrait avoir, une colonne de densité uniforme $p'$, pour produire la pression $p$. Cette hauteur doit donc, aussi, être constante. Représentons la, par $h'$, et nous aurons $h' = \frac{p}{p'}$.

Mais la pression, exercée par la couche supérieure, est due à son seul poids. L'épaisseur, $D_1$, de cette couche forme donc, elle seule, la hauteur de la colonne qui produit cette pression. La densité de la colonne n'est, d'ailleurs, que celle de la couche dont elle est formée. On a donc $D_1 = h'$, ou $D_1 = \frac{p}{p'}$, ou enfin $D_1 = P$. (94).

281. On voit, par ce résultat, que, dans tout astre, ayant un rayon assez grand et une atmosphère assez peu élevée pour qu'on puisse négliger la variation de la pesanteur dans l'étendue de cette atmosphère, la distance, de la dernière couche atmosphérique à celle qui la suit, exprimée en mètres, sera égale à la pression, exercée par la couche inférieure, exprimée par son rapport au poids d'un mètre cube d'air de cette couche.

Il est à remarquer que cette distance des molécules de la couche supérieure est indépendante de la distance des molécules de la couche inférieure; et, par conséquent, du poids d'une molécule. Les intervalles successifs des autres couches en sont également indépendants ; car la valeur de $D_n$ est donné par l'équation $D_n^3 + \frac{D_{n-1}^3}{P} D_n - D_{n-1}^3 = 0$ (96), que l'on déduit de l'équation

(15), en y négligeant la hauteur atmosphèrique auprès du rayon du globe.

Mais quand on tient compte de la variation de la pesanteur, ces intervalles successifs dépendent indirectement de la distance des molécules à la surface du globe ; parce qu'ils deviennent alors des fonctions de H, qui elle-même dépend de D.

282. On a vu, (nº 279), que, si l'on connaissait la distance qu'ont, entre elles, les molécules d'air, à la surface de la terre ; on pourrait approcher,aussi près que l'on voudrait,de la véritable hauteur de l'atmosphère.

Réciproquement, si, par un moyen quelconque, on parvenait à connaitre exactement la limite de notre atmosphère, on en déduirait la distance qui sépare les molécules, à la surface de la terre ; soit par une méthode directe, soit, au moins, si l'on n'en peut trouver, par une série d'essais successifs.

Cette distance donnerait le nombre des molécules contenues dans un mètre cube.On connaît, d'ailleurs, et le rapport des poids des molécules d'oxigène et d'azote, et le rapport des nombres de molécules de chaque espèce contenues dans l'air. On détermine, directement, le poids d'un mètre cube d'air. On aurait donc toutes les données nécessaires pour calculer les poids absolu des atomes d'oxigène et d'azote ; d'où l'on conclurait les poids absolus de tous les atomes, puisque leurs poids relatifs sont, déjà, déterminés, par des inductions très vraisemblables. Nouvel exemple de la liaison qui existe entre toutes les parties des sciences. Ce ne sera pas, vraisemblablement, par la hauteur de l'atmosphère, qu'on déterminera, en effet, le poids des atomes. Mais on trouvera, sans doute, d'autres quantités, qui soient des fonctions du poids des atomes ou de leur distance ; et quelqu'une de ces quantités sera, peut être, susceptible d'être déterminée, directement, par l'expérience. On ne doit donc nullement désespérer d'arriver à la connaissance du poids absolu des atomes.

283. Après cette digression, résumons-nous.

Nous avons négligé, dans nos calculs, l'influence de la température sur la densité. Or la température, si basse, qui règne dans les régions supérieures de notre atmosphère, y diminue la force répulsive, et, par la suite, la distance des couches successives.

La méthode de l'intégration aux différentielles, substituée à la méthode de l'intégration aux différences, tend aussi, comme nous l'avons vu, à nous donner une valeur trop grande, pour la hauteur de l'atmosphère.

Enfin, l'hypothèse que nous avons admise, sur la petitesse des molécules, est vraisemblablement exagérée.

Tout doit donc nous faire présumer que la véritable hauteur de notre atmosphère est inférieure à 1240000 mètres, (équation 60) ; et, par conséquent, au cinquième du rayon terrestre.

Cette hauteur ne paraît guère pouvoir être moindre que le dixième du rayon terrestre ; valeur qui supposerait la distance des molécules supérieure au dix millionième du mètre.

Dans tous les cas, on voit que l'atmosphère terrestre ne peut s'étendre, jusqu'à une énorme distance, au-dessus du sol.

On voit, aussi, que les atmosphères de tous les globes, et toutes les masses vaporeuses répandues dans l'espace, peuvent et doivent se limiter.

284. Nous avons raisonné, jusqu'ici, d'après la supposition que les molécules indivisibles de la matière ont un poids fini.

Si l'on admettait l'hypothèse, très peu vraisemblable, de la divisibilité effective de la matière à l'infini ; le poids de chaque molécule deviendrait infiniment petit. La distance, qui sépare les molécules, deviendrait elle même, infiniment petite, c'est-à-dire, nulle.

Or $D = o$ donne $\log. \frac{1}{D} = \frac{1}{o}$. La formule (23) donne donc

$\frac{RH}{R+H} = \frac{1}{o}$. Ainsi l'on arrive, dans cette hypothèse, au même résultat absurde qu'en négligeant, le poids de chaque couche, dans l'expression de la force qui tend à la rapprocher de la couche inférieure.

L'intégration aux différences finies, ne conduirait pas à cette absurdité, d'une quantité, essentiellement plus petite que l'unité, devenant égale à l'infini. Mais elle donnerait pour H, une valeur infinie ; proposition que nous nous contenterons d'énoncer.

Soit, au reste, qu'on trouve, pour l'atmosphère, une hauteur infinie, ou qu'on arrive à l'absurde, dans la détermination de sa limite. On voit que l'hypothèse, de la divisibilité de la matière à l'infini, est incompatible avec la limitation des atmosphères.

Conséquemment à cette hypothèse, il n'y aurait pas de vide absolu dans l'espace. Mais le gaz universel, ou, si l'on veut, l'éther, qui le remplirait, n'acquerrait une densité appréciable, que dans le voisinage des globes attirans, dont il formerait, ainsi, les atmosphères.

Mais, comme nous l'avons dit, cette hypothèse est peu probable, et les corps célestes se meuvent, vraisemblablement, dans le vide absolu.

Add. II.—*Des astres aujourd'hui refroidis.* (No 16, page 13).

285. Le raisonnement, employé pour prouver la vaporisation antérieure des astres, ne s'applique, immédiatement, qu'à ceux qui émettent, ou ont émis, plus de chaleur qu'ils n'en reçoivent.

Mais le foyer central de la terre offre, déjà, une forte induction, qui porte à penser que cette planète et toutes les autres ont été incandescentes à leur surface. Il est évident d'ailleurs, que, si ces petits astres se fussent trouvés, seuls condensés, au milieu de la vapeur universelle, ils fussent devenus les centres autour desquels elle se fût agglomérée.

Ils étaient donc, eux-mêmes, originairement vaporisés.

Add. III*. — *Forme d'équilibre d'une masse fluide, soumise à l'attraction d'une masse voisine.* (Nos. 34, 35 et 36).

§ Ier. *Position de la question.*

286. Dans les calculs astronomiques, où l'on considère des masses très éloignées par rapport à l'étendue de leur diamètre, on suppose, parallèles, les directions des attractions éprouvées par les molécules de chaque masse. Cette hypothèse nous conduirait à des résultats très éloignés de la vérité, si nous l'appliquions à des masses vaporeuses, immenses, très rapprochées relativement à leur étendue.

* Cette addition et les cinq suivantes ont pour but d'établir les principes, posés dans le chapitre préliminaire de la 2e partie, principes nécessaires à l'intelligence des chapitres suivans, quoiqu'ils n'y soient pas tous explicitement cités.

Nous essayerons donc de déterminer, la surface d'équilibre d'une masse fluïde soumise à une attraction extérieure, en tenant compte de la différence des directions suivant lesquelles cette attraction agit sur ses différens points.

287. On suppose, encore, dans les calculs astronomiques, que l'attraction exercée, par chaque masse, sur des points situés à son extérieur ou à sa surface, est la même que si cette masse, toute entière, était réunie à son centre de gravité.

Cette hypothèse est rigoureuse pour des masses, sphériques, formées des couches concentriques homogènes; elle peut être admise, sans erreur appréciable, pour des masses quelconques très éloignées. Nous serons forcés d'adopter, la même hypothèse, pour les masses que nous aurons à considérer.

De plus, nous supposerons que l'attraction de ces masses, sur des points situés à leur intérieur, est dirigée vers leur centre de gravité. Mais nous nous réservons de discuter, ensuite, l'erreur qui peut résulter de ces hypothèses.

288. Il est évident que la surface d'équilibre, de la masse fluïde considérée, est une surface de révolution ayant, pour axe, la ligne qui joint les centres de gravité des masses attirante et attirée. Il nous suffira donc de déterminer sa courbe méridienne.

Cette courbe, ainsi que la surface elle-même, doit-être normale à la résultante des forces qui agissent sur un quelconque de ses points. Nous aurons donc à déterminer la direction de cette résultante.

Mais commençons par poser des équations générales qui puissent nous servir, à la fois, pour les points de cette surface et pour tout autre point.

## §. 2. *Équations générales.*

289. Soyent, O le centre de gravité de la masse fluïde attirée (fig. 1), A celui de la masse attirante. Soit N un point quelconque situé, soit à l'intérieur de la masse, soit sur sa surface, soit à son extérieur.

Je prendrai, pour axe des $x$ positifs, OX, prolongement de AO; et pour axe des $y$ positifs, OY perpendiculaire à OX.

J'appelle, $u$ l'angle NAX; $v$ l'angle NOX; $r$ la longueur, AO, du rayon vecteur; $c$ la distance ON; $d$ la distance AN.

On a, évidemment, entre ces cinq dernières quantités et les coordonnées du point N, les relations suivantes :

$$c^2 = x^2 + y^2 \quad (1), \quad d^2 = y^2 + (r+x)^2 \quad (2),$$
$$c \cos v = x \quad (3), \quad c \sin v = y \quad (4),$$
$$d \cos u = (r+x) \quad (5), \quad d \sin u = y \quad (6).$$

290. De ces équations on déduit :

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}} \quad (7), \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}} \quad (8),$$

$$\cos u = \frac{x+r}{\sqrt{y^2+(r+x)^2}} \quad (9), \quad \sin u = \frac{y}{\sqrt{y^2+(r+x)^2}} \quad (10)$$

Ces sinus et cossinus doivent, évidemment, avoir le même signe que leurs numérateurs. Les radicaux, qu'ils ont en dénominateurs, doivent donc toujours être pris avec le signe $+$. Il doit donc être entendu, pour la suite, que, dans toutes les équations qui se déduiront des précédentes, ces deux radicaux n'emporteront pas, avec eux, le double signe.

291. Je désigne, par $m$, la masse du corps attirant ; et, par $m'$, celle du corps attiré.

L'attraction de la masse $m$, sur le point O, sera exprimée par $\frac{m}{r^2}$ ; celle de cette masse, sur le point N, par $\frac{m}{d^2}$.

Nous représenterons, par $G$, celle de la masse $m'$ sur ce dernier point.

L'attraction de la masse $m$ tendrait à déplacer toute la masse $m'$. Voulant faire abstraction de ce mouvement de translation, pour nous occuper, seulement, de la forme que tend à prendre la masse attirée ; nous devrons supposer, appliquée à toutes ses molécules, une force accélératrice égale et contraire à la force $\frac{m}{r^2}$ qui sollicite le centre de gravité.

Le point N doit donc être considéré comme sollicité par trois forces : 1° $\frac{m}{r^2}$, agissant suivant NQ, parallèlement à OX ;

2° $\frac{m}{d^2}$, agissant suivant NA, 3° $G$, agissant suivant NO.

Je décompose ces forces parallèlement aux axes des coordonnées. J'appelle, $X$, la somme des composantes parallèles à l'axe des $x$, en, considérant, comme positives, celles qui sont dirigées de O vers X. J'appelle, $Y$, la somme des composantes parallèles à l'axe des $y$, en considérant, comme positives, celles qui sont dirigées de O vers Y.

J'aurai les équations :

$$X=\frac{m}{r^2}-\frac{m}{d^2}\cos u-G\cos v \quad (11).$$

$$Y=-\frac{m}{d^2}\sin u-G\sin v \quad (12).$$

En substituant, dans ces deux équations, les valeurs données par les équations (2), (7), (8), (9) et (10); on trouve :

$$X=\frac{m}{r^2}-\frac{m(r+x)}{\left[y^2+(r+x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{Gx}{(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (13).$$

$$Y=-\frac{my}{\left[y^2+(r+x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{Gy}{(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (14).$$

292. Si nous supposons le point N sur la surface de la masse attirée, ou à son extérieur ; l'attraction exercée, sur ce point, par le point O, sera proportionnelle à la masse $m'$ et en raison inverse de la distance NO. La force $G$ sera donc, alors, exprimée par $\frac{m}{c^2}$; et les équations (13) et (14) deviendront :

$$X=\frac{m}{r^2}-\frac{m(r+x)}{\left[y^2+(r+x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{m'x}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15),$$

$$Y=-\frac{my}{\left[y^2+(r+x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{m'y}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (16).$$

## § 3. *Équation différentielle de la courbe méridienne.*

293. L'équation de la résultante des deux forces $X$ et $Y$ sera

de la forme $y = \frac{Y}{X} x + b$ (17).

Nous supposerons, maintenant, le point N, situé sur la courbe méridienne cherchée que nous représentons en BCDE, (fig. 2).

Pour que l'équilibre ait lieu dans la masse, il faut que sa surface, et, par suite, sa courbe méridienne, soyent normales à la résultante dont la direction vient d'être déterminée.

L'équation de cette courbe sera donc : $\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y}$ ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{m}{r^2} - \frac{m(r+x)}{\left[y^2 + (r+x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'x}{\left(y^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{my}{\left[y^2 + (r+x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'y}{\left(y^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}} \quad (18).$$

$y = 0$ donne $\frac{dx}{dy} = 0$; ce qui montre que les tangentes à la courbe, aux points où elle coupe l'axe des $x$, sont parallèles à l'axe des $y$.

Pour $x = 0$, le dénominateur de $\frac{dy}{dx}$ ne devient pas infini, et son numérateur devient $\frac{m}{r^2} - \frac{mr}{\left(y^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Ce numérateur ne pourrait, devenir nul, qu'autant que $y$ le serait lui-même. Ce qui supposerait que la courbe méridienne passât par le centre de la gravité de sa surface ; hypothèse évidemment absurde. $\frac{dy}{dx}$ n'est donc pas nul, pour le point où la courbe rencontre l'axe des $y$ ; et, par suite, la tangente, en ce point, n'est pas parallèle à l'axe des $x$. La courbe n'est donc pas symétrique par rapport à l'axe des $y$.

294. L'équation de la courbe n'étant pas intégrable, (au moins par les méthodes générales), nous aurons recours, à d'autres considérations, pour reconnaître encore quelques-unes de ses propriétés.

## § IV. *Forme ovoïdale.*

295. La masse considérée, soumise à sa seule attraction, prendrait une forme sphérique, BCDE (fig. 3). Voyons quelles modifications, doit apporter à cette forme, l'attraction du point A.

Pour que l'équilibre ait lieu dans une masse fluïde, il faut que, en supposant, renfermées dans des tubes solides, toutes les colonnes fluïdes qui viennent converger en un point quelconque, toutes ces colonnes exercent sur ce point des pressions égales.

Prenons, le centre O de la masse, pour le point de convergence de tous ces tubes.

296. Nous désignerons, par les mêmes lettres que précédemment, les points et les quantités analogues ; et nous représenterons par H, I, L, des molécules situées dans les colonnes fluïdes dirigées suivant les axes des coordonnées.

On obtiendra, la force qui agit, sur le point H, dans la direction de sa colonne, en fesant $y=0$ dans la valeur de $X$ donnée par l'équation (13). Cette équation devient ainsi :

$X=\frac{m}{r^2}-\frac{m}{(r+x)^2}-G$ (19), $x$ représentant ici la distance OH.

$G$ exprime l'attraction du point O. L'ensemble des deux autres termes exprime la force qui résulte de l'attraction du point A, quand on veut faire abstraction du déplacement général de la masse.

$x$ étant positif, pour le point considéré ; on a $\frac{m}{r^2}>\frac{m}{(r+x)^2}$.

La différence de ces deux forces est donc positive. Leur résultante agira, par conséquent, dans un sens opposé à celui de l'attraction $G$, qui entre avec le signe — dans l'expression de X. L'effet de l'attraction du point O se trouvant ainsi atténué, pour tous les points de la colonne OB ; la pression totale de cette colonne, sur le point O, se trouve ; en définitive, diminuée par l'action de la masse extérieure, A.

Pour le point L, on a encore $y=0$ ; mais la valeur de $x$ devient négative. Représentons la par $-x_1$, et l'équation (13) deviendra $X=\frac{m}{r^2}-\frac{m}{(r-x_1)^2}+G$ (20).

On a, évidemment, $\frac{m}{r^2} < \frac{m}{(r-x_1)}2$. La résultante de ces deux forces est donc encore de direction contraire à celle de l'attraction du point O ; et, par suite, l'attraction extérieure diminue toujours la pression exercée, sur ce point, par la colonne OD.

297. Si les deux points H et L sont supposés à égales distances du point O ; la valeur de $x$, dans l'équation (19), deviendra $x_1$ ; et $\frac{m}{r^2} - \frac{m}{(r+x_1)^2}$ représentera, pour le point H, la force opposée à l'attraction du point O.

Cette force est représentée, pour le point L, par $\frac{m}{(r-x_1)^2} - \frac{m}{r^2}$.

Or, on a $\frac{m}{(r-x_1)^2} - \frac{m}{r^2} > \frac{m}{r^2} - \frac{m}{(r+x_1)^2}$ (21) ; car cette inégalité, par des transformations successives, se réduit à $3r^2 > x_1^2$ ; ce qui a, évidemment, lieu pour tous les les points de la masse BCDE.

Donc, pour des points également éloignés du point O, la force, opposée à l'attraction de ce point, a plus d'intensité sur la colonne OD que sur la colonne OB.

La diminution totale de la pression, exercée sur le point O, sera donc, aussi, plus considérable pour la colonne OD que pour la colonne OB.

298. Pour le point I, on a $x=0$. En substituant cette valeur de $x$, dans l'équation (14), on a

$Y = -\frac{my}{(y^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - G$ (22). Cette valeur de $Y$ donne la résultante de toutes les forces dirigées suivant la colonne OC. Le premier terme exprime la composante dûe à l'attraction du point A. Cette composante ayant le même signe que $G$, son action s'ajoute à celle de cette force ; et, par conséquent, l'attraction extérieure augmente la pression de la colonne OC, sur le point O.

299. Pour que l'équilibre se rétablisse, dans une masse primi-

tivement sphérique, quand une force extérieure est venue se combiner avec sa propre attraction ; il faut, évidemment, que les colonnes, dont la pression se trouve augmentée par cette nouvelle force, se raccourcissent; afin de compenser, par la diminution du nombre des molécules, l'augmentation de la force dont chacune d'elles est animée. Les colonnes, dont la pression est diminuée, doivent, au contraire, s'allonger ; et s'allonger d'autant plus que la diminution de pression y est plus considérable.

Ainsi, dans la masse fluïde considérée, la colonne OD prendra plus de longueur que la colonne OB, et cette dernière plus que la colonne OC (fig. 2).

300. Soit C (fig. 4), le point où la courbe méridienne coupe l'axe des $y$ positifs. La distance AG étant supérieure à la distance AO, l'attraction du point A sur le point C, ou $\frac{m}{d^2}$, sera inférieure à celle du même point A sur le point O, et, par conséquent, à la force $\frac{m}{r^2}$, dirigée suivant CQ (nº 291).

La résultante des deux forces, qui sollicitent le point C, s'approchera donc plus de la direction CQ que de la direction CA. Elle sera, a fortiori, comprise dans l'angle OCQ, où elle prendra une certaine direction CP. La résultante, de cette première résultante et de l'attraction dirigée suivant CO, prendra une certaine direction CS comprise, dans l'angle OCP, et, par conséquent, dans l'angle droit OCQ.

Or, la courbe doit être normale, en C, à la résultante totale dirigée suivant CS. La tangente, au même point, représentée en RT, (fig. 4 et 2), doit donc, à partir du point C, s'éloigner de l'axe des $x$ du côté des $x$ positifs, et s'en rapprocher du côté des $x$ négatifs.

301. Cette direction de la tangente nous fait voir que le sphéroïde, formé par la masse attirée, se resserre dans l'hémisphère tourné vers la masse attirante (fig. 2) ; et qu'au contraire, il est renflé dans l'hémisphère opposé. Il fallait, en effet, que l'hémisphère qui a le moins de longueur, à partir du centre de gravité, eut, en compensation, plus de largeur.

302. Comme, d'ailleurs, on peut admettre, a priori, que la

courbe méridienne ne contient, ni point de rebroussement, ni point d'inflexion ; nous conclurons, définitivement, comme nous l'avons posé, (nº 35), que *la masse attirée prend une forme analogue à celle d'un œuf.*

## § V. *Variations dans la forme.*

303. En supposant, données, les deux masses $m$ et $m'$, ainsi que le volume de la dernière ; il est évident que l'allongement et la forme ovoïdale seront d'autant plus prononcées que la masse attirante sera plus voisine de la masse attirée ; car le rapprochement des deux masses augmente la force qui tend à écarter la dernière de la forme sphérique, sans changer la force qui tend à la lui imprimer.

304. Si, en même tems que la masse attirante s'approche de la masse attirée, toutes les molécules de cette dernière, par une augmentation dans sa densité, s'approchaient porportionnellement de son centre; les deux attractions, qui les sollicitent varieraient dans un même rapport ; sans changer, angulairement, de direction. Or, en définitive, toutes les forces, qui agissent sur la masse, résultent de ces attractions. L'égalité existante, pour chaque molécule, entre les forces opposées qui la sollicitent, ne pourrait donc être troublée par ces changemens simultanés de distances ; et l'équilibre, supposé établi sous la forme primitive, se conserverait, sous toutes formes semblables que la masse prendrait, successivement, dans notre hypothèse.

305. Réciproquement, la masse attirée affecterait, toujours, des formes semblables ; si, seulement, son volume variait proportionnellement au cube de sa distance au centre attirant. Car, évidemment, pour une masse liquide, de volume et de densité données, soumise à une attraction extérieure, aussi donnée ; il n'y a qu'une seule forme d'équilibre. Et, il faudrait qu'il y en eut plusieurs pour que la masse attirée pût, dans notre hypothèse, affecter, quelquefois, des formes dissemblables ; puisqu'il y a déjà une série de formes semblables, qui satisfont à la condition de l'équilibre.

306. Ainsi, en supposant, données, les masses des corps attirant et attiré, la forme du corps attiré ne dépend pas de sa distance absolue au corps attiré.

Si la longueur du rayon vecteur est donnée, le corps attiré s'écartera d'autant plus de la forme sphérique que sa masse sera plus dilatée. En effet, à mesure que les molécules s'écartent de son centre, l'attraction de ce point, qui tend à imprimer au corps la forme sphérique, perd de son influence ; tandis qu'au contraire les attractions exercées, par le corps attirant, sur les diverses molécules du corps attiré, ne font qu'acquérir de plus grandes différences d'intensité et de direction.

Si c'est le volume du corps attiré qui est donné, ce corps s'écarte d'autant plus, de la forme sphérique, qu'il s'approche plus du corps attirant ; ainsi qu'on l'a vu (nº 303).

307. Nous arrivons donc, enfin, à cette conclusion (nº 36) : *L'allongement et la forme ovoïdale sont d'autant plus prononcés, dans la masse attirée, que son diamètre moyen est plus grand, par rapport à la longueur du rayon vecteur*. Nous entendons ici, par diamètre moyen, non une moyenne entre certains diamètres, mais le diamètre d'une sphère de même volume que le corps attiré.

308. Nous avons encore avancé (nº 36), que, par l'éloignement des deux masses, la forme ovoïdale devenait inappréciable quand l'allongement était encore très prononcé.

Nous n'insisterons pas sur cette proposition, confirmée par l'observation (nº 47); et qui, d'ailleurs, ne nous est pas essentielle.

## § 6. *Discussion*.

309. Nous avons supposé que l'attraction exercée, sur la molécule C, par la masse à laquelle elle appartient, reste, après le changement de forme de cette masse, dirigée vers le point O.

Cette hypothèse ne cesse d'être vraie, qu'après un commencement d'altération dans la forme sphérique, primitive. Cette première altération, infiniment petite, imprimera donc, déjà, à la masse, un commencement de forme ovoïdale. Voyons si la déviation, qui en résultera dans l'attraction éprouvée par le point C, peut s'opposer aux progrès ultérieurs de cette forme.

L'hémisphère ECD (fig. 3), s'allongeant plus que l'hémisphère opposé, son attraction sur le point C diminuera davantage.

De plus, nous avons vu (nº 300), que la résultante des for-

12.

ces appliquées au point C vient couper l'axe des $x$, du côté des $x$ positifs ; elle a donc une composante dirigée dans le sens des $x$ positifs. Il en est, évidemment, de même pour tous les autres points de la ligne EOC, le point O seul excepté. Il en est encore de même, dans certaines limites, pour les points voisins de cette ligne. On voit donc qu'un certain nombre de molécules devra passer, de l'hémisphère ECD, dans l'hémisphère opposé dont elles augmenteront la masse. Nouvelle cause, qui tend à rendre l'attraction, de ce dernier hémisphère, supérieure à celle du premier.

La résultante des attractions des deux hémisphères, sur le point C, doit donc être comprise dans l'angle OCQ (fig. 4) ; et, par suite, la résultante totale doit s'approcher plus, de la direction CQ, que si l'attraction de la masse considérée était dirigée suivant CO, comme nous l'avons supposé. Par suite, encore, la partie CT de la tangente tend à faire un angle plus petit avec la ligne CO.

Ainsi chacun des changemens, opérés dans la masse pour rendre, plus prononcée, sa forme ovoïdale, loin de s'opposer à un changement nouveau, ne fait que le favoriser.

On voit donc que les conséquences, auxquelles nous sommes arrivées, loin d'être détruites par l'inexactitude de notre hypothèse, deviennent des a fortiori quand on substitue la réalité à cette hypothèse.

On voit encore, par ce qui précède, que, si l'attraction du point A venait ensuite à disparaître, la masse considérée ne reviendrait, qu'avec lenteur, à la forme sphérique. Car, de la forme allongée, une fois acquise, résulte une force, qui tend à la conservation de cette forme, comme elle a concouru à son établissement.

310. La molécule O, qui se trouvait au centre de gravité de la masse sphérique, est restée immobile au milieu du déplacement, général, qui a produit le changement de forme. Nous ne savons pas, si le centre de gravité de la masse allongée, est resté lui-même au lieu qu'occupe cette molécule. Mais il n'en est pas moins démontré que la distance OD a dû devenir supérieure à la distance OB (fig. 2) ; et que, néanmoins, la tangente RCT est inclinée de manière à rencontrer l'axe des $x$ du côté du point A.

Or, que le point O soit ou non, le centre de gravité de la masse allongée, la forme ovoïdale résulte toujours de ces deux conditions.

311. Nous avons considéré, jusqu'à présent, une masse fluïde, quelconque, liquide ou élastique. La seule difficulté, que pût présenter la confusion, de ces deux espèces de fluïdes, dans la détermination de la forme d'équilibre, était de savoir si les masses élastiques peuvent se limiter, c'est-à-dire, si elles ont réellement une forme. Cette difficulté a été résolue dans l'addition première.

Les mêmes raisonnemens et les mêmes calculs s'appliquent donc, également, aux deux espèces de fluïdes; qui sont, par conséquent, soumis aux mêmes conditions générales d'équilibre. La différence de leur nature pourra seulement, influer, comme nous allons le voir, sur les circonstances qui accompagneront l'établissement de cet équilibre.

Dans les fluïdes élastiques, la densité varie proportionnellement à la pression.

Quand, donc, il y survient quelque changement dans les conditions d'équilibre; les colonnes, dont la pression se trouve diminuée, doivent s'allonger, non-seulement, par les mêmes causes qui agissent sur la masse liquide, mais encore par la dilatation qui tend, immédiatement, à s'opérer dans le fluïde. La condensation des colonnes, où la pression s'accroît, contribue, en même tems, à les raccourcir.

D'où il suit que la force élastique tend à accélérer les changemens qui portent la masse vers sa forme d'équilibre; et, par conséquent, à augmenter les vitesses acquises, tant par les molécules qui s'approchent du centre que par celles qui s'en éloignent.

Les oscillations, qui, dans tous les cas, doivent précéder l'établissement de l'équilibre, seront donc plus considérables dans les masses élastiques que dans les masses incompressibles. Elles y rendront, toutes choses égales d'ailleurs, les ruptures plus fréquentes.

## Add. IV. — *Variations de la force accélératrice angulaire, dans une masse solide et allongée* (nos 38 et 39).

### § I. — *Moment des forces accélératrices.*

312. Nous avons défini (no 38), les expressions *force accé-*

*lératrice angulaire* et *écartement*. Il s'agit de déterminer *quels sont, pour une masse solide allongée, soumise à une attraction extérieure, les écartements auxquels correspondent, les maxima de la force accélératrice angulaire, et les valeurs nulles de cette force.*

Nous avons désigné, dans le texte (no 39), ces maxima et ces valeurs nulles, sous la dénomination commune de limites. Les maxima sont des limites d'accroissement. Il n'est pas mathématiquement exact de considérer, comme limites de décroissement, les valeurs nulles, qui ne sont pas des minima, mais des valeurs transitoires, du positif au négatif. Néanmoins, cette expression étant expliquée, nous pourrons continuer à en faire usage.

313. La force accélératrice angulaire est le quotient, de la somme des momens des forces motrices qui tendent à faire tourner la masse autour de son centre de gravité, par le moment d'inertie de cette masse. Ce moment d'inertie est, d'ailleurs, constant dans une masse solide. Ainsi, pour une masse solide, le problème se réduit à déterminer les écartemens auxquels correspondent les maxima et les valeurs nulles de la somme des momens.

314. Il doit être entendu, d'après la définition même de la force accélératrice angulaire, que, dans chaque position, et à chaque instant, nous fesons abstraction des vitesses qui pourraient être antérieurement acquises ; pour ne nous occuper que des forces accélératrices agissantes à l'instant considéré. Les effets, dépendants des vitesses acquises, sont traités, dans le texte même, aux chapitres qui ont pour objet l'établissement des mouvemens célestes.

315. Commençons par considérer, séparément, une molécule quelconque, N, de la masse attirée (fig. 1re).

Puisque cette masse est supposée solide, la distance NO est invariable pour une molécule donnée. Nous supposerons aussi donnée la distance AO, et nous ne ferons varier, ici, que l'angle NOX. Ainsi, en conservant les notations du no 289, nous dirons que les distances $c$ et $r$ sont constantes et que l'angle $v$ est seul variable.

316. Appelons $M$ le moment de la force accélératrice qui,

dans un instant donné, tend à imprimer au point N, un mouvement de rotation autour du point O. Considérons ce moment, comme positif, quand il est dirigé de droite à gauche. Nous devrons faire entrer, avec le signe $+$, dans son expression, les composantes, qui, lorsqu'elles sont, elles-mêmes, positives, tendent à faire tourner le point N dans ce même sens. Nous devrons, au contraire, prendre avec le signe —, celles qui, dans le même cas, tendent à le faire tourner en sens opposé.

Nous trouvons ainsi : $M = c\,(X \sin v - Y \cos v)$ (23).

Substituons, dans cette équation, les valeurs, de $X$ et de $Y$, données par les équations (13) et (14) ; valeurs dans lesquelles on peut, si l'on veut, négliger d'avance les termes de $G$, qui doivent disparaître du résultat, puisque, évidemment, le moment cherché doit être indépendant de l'attraction du point O.

Mettant ensuite, pour $x$ et $y$, leurs valeurs, (3) et (4), et opérant la réduction, on trouve :

$$M = mc \sin v \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{r}{\left(c^2 + r^2 + 2cr \cos v\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (24).$$

§ 2. *Signe du moment, pour une molécule.—Courbe des momens nuls.*

317. On peut reconnaître, à la seule inspection de l'équation (24), que $M$ prend des valeurs égales et de signes contraires, pour des points symétriquement placés par rapport à l'axe des $x$. Car pour une valeur donnée de $\cos v$, la valeur de $M$ ne fait que changer de signe, quand on change de signe de $\sin v$. C'est d'ailleurs ce que l'on savait a priori.

Nous pouvons donc ne nous occuper que de ce qui a lieu du côté des $x$ positifs ; et supposer, par conséquent, $\sin v$, positif.

Les quantités $m$ et $c$ étant, d'ailleurs, essentiellement positives, le signe de $M$ sera le même que celui de son facteur binome.

Dans la détermination de ce signe, on devra se rappeler que la puissance fractionnaire doit toujours être prise avec le signe $+$, conformément à ce qui a été vu au nº 290.

318. Quand $\cos v$ est positif, c'est-à-dire, quand le point N

est situé du côté des $x$ positifs, on a

$$r^2+c^2+2rc\cos v > r^2 \text{ ou } (r^2+c^2+2rc\cos v)^{\frac{3}{2}} > r^3;$$

d'où l'on déduit $\dfrac{r}{(r^2+c^2+2rc\cos v)^{\frac{3}{2}}} < \dfrac{r}{r^3}$ ou $< \dfrac{1}{r^2}$. La valeur de $M$ est donc, alors, positive.

Toutes ces inégalités ne cessent pas d'être vraies quand on a $\cos v = 0$. $M$ est donc, encore, dans ce cas, positive.

319. Quand $\cos v$ est négatif, on ne peut reconnaître le signe de $M$, indépendamment de toute valeur de l'angle $v$; mais nous pourrons le faire pour le cas où cet angle est infiniment petit.

Alors, $\sin v$ est un infiniment petit du 1er ordre, et la différence, de $\cos v$ à l'unité, est un infiniment petit du second ordre. Nous pourrons donc faire, dans la formule, $\cos v = -1$; et elle deviendra : $M = mc \sin v \left\{ \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{r}{(r-c)^3} \right\}$.

Or on a évidemment $\dfrac{r}{(r-c)^3} > \dfrac{1}{r^2}$. Cette valeur de $M$ est donc négative.

Nous prenons, pour le dénominateur du second terme de la valeur de $M$, $(r-c)^3$, plutôt que $(c-r)^3$; parce que $c$ étant plus petit que $r$, c'est la première expression qui donne la valeur positive de la puissance fractionnaire.

320. Une quantité variable peut, quelquefois, passer par zéro ou par l'infini, sans changer de signe. Mais elle ne peut, changer de signe, sans passer par zéro ou par l'infini.

Les quantités $m$ et $c$ ayant des valeurs finies, $M$ ne pourrait devenir infini que dans deux cas dont nous n'avons pas à nous occuper : celui de $r=0$, et celui où l'on aurait $c=r$ et $\cos v = 1$. Ainsi, pour chaque valeur de $c$, il existe, nécessairement, entre l'axe des $y$, pour lequel $M$ est positive, et l'axe des $x$, dans le voisinage duquel $M$ est négative, une certaine position du point N pour laquelle $M$ est nulle.

321. L'ensemble de tous les points qui ont un moment nul, est, évidemment, déterminé par l'équation $M=0$.

Cette équation se décomposerait en quatre autres. Mais nous n'avons pas à nous occuper, et nous ne pourrons avoir à nous occuper par la suite, des cas où les quantités, $m$, ou $c$, seraient nulles. Nous n'aurons donc à considérer que les deux équations $\sin v = 0$ (25), $\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(c^2 + r^2 + 2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}} = 0$ (26).

322. L'équation (25) est l'équation polaire de l'axe des $x$. On a vu en effet (nº 317), que le moment change de signe quand le point N traverse cet axe. Le moment devait donc, nécessairement, être nul sur cet axe.

L'équation (26) peut se mettre sous la forme

$$(c^2 + r^2 + 2cr\cos v)^{\frac{3}{2}} = r^3 \quad (27); \text{ ou}$$

$$c^2 + r^2 + 2cr\cos v = r^2\sqrt[3]{1} \quad (28).$$

Cette dernière se décompense en trois autres correspondantes aux trois racines cubiques de l'unité. Mais, n'ayant à nous occuper que des courbes réelles, nous ne devons considérer que l'équation $c^2 + r^2 + 2cr\cos v = r^2$ (29), qui devient

$y^2 + (x+r)^2 = r^2$ (30, par la substitution des coordonnées rectangulaires, aux coordonnées polaires.

La courbe considérée est donc un cercle dont le centre est en A et dont le rayon est égal à AO. Ce cercle, représenté en UOV, (fig. 1 et 5), est évidemment tangent à l'axe des $y$. Nous le désignerons sous le nom de cercle des momens nuls *.

323. En résumé, le moment, positif du côté des $x$ positifs, l'est encore du côté des $x$ négatifs, jusqu'au cercle des momens nuls. Mais il devient négatif, dans l'intervalle compris entre ce cercle et l'axe des $x$ négatifs.

Dans l'un et l'autre cas, le point N tend évidemment à être

* Nous pouvons, maintenant, reconnaître une nouvelle propriété de la courbe méridienne considérée dans l'ADD. III. Cette courbe, au point où elle est coupée par le cercle des momens nuls, est normale à la droite qui joint ce point au point O. On voit encore que, si la distance de ces deux points est très-petite, par rapport au rayon de ce cercle, cette courbe devient sensiblement normale à l'axe des $y$.

éloigné du cercle des moments nuls, et rapproché de l'axe des $x$. Car ce point tend à tourner de droite à gauche quand le moment est positif, et de gauche à droite quand il est négatif (nº 316). Le point N se trouvera donc en équilibre instable sur le cercle des momens nuls, et en équilibre stable sur l'axe des $x$.

324. On peut arriver aux mêmes résultats, sans le secours du calcul.

D'abord, évidemment, il n'y a pas de raison pour que les points de la ligne AOX (fig. 1re), tendent à tourner dans un sens plutôt que dans l'autre ; donc, ils ne tendent à tourner dans aucun sens.

Soit, maintenant, N' (fig. 1re), un point quelconque de la circonférence UOV. Il est évident que le moment de ce point est indépendant de l'attraction du point O. Il ne dépend que de deux forces : l'attraction du point A dirigée suivant N'A ; et la force appliquée à tous les points pour annuler le mouvement général de la masse. Cette dernière force, égale et contraire à l'attraction qui sollicite le centre de gravité, est représentée par $\frac{m}{r^2}$. Elle est dirigée suivant N'Q' parallèle à OX.

Or, la distance N'A étant égale à $r$, l'attraction, de A sur N', sera aussi exprimée par $\frac{m}{r^2}$. Les deux forces, appliquées au point N', étant égales, leur résultante partage, en deux parties égales, l'angle formé par leurs directions.

Il est facile de voir que la droite N'O est précisément celle qui partage en deux parties égales l'angle AN'Q'. En effet, soit $N'Q_1$, le prolongement de N'Q' ; on aura :

$AN'Q' + AN'Q_1 = ON'A + AON' + OAN'$, puisque chacune de ces deux sommes est égale à deux angles droits. Les deux angles $AN'Q_1$, OAN', disparaissent de l'équation, qui donne

$AN'Q' = ON'A + AON' = 2ON'A.$

La ligne N'O partage donc, en deux parties égales, l'angle des deux forces considérées ; et la résultante de ces deux forces passant, en conséquence, par le point O, son moment est nul par rapport à ce point.

325. Soit un point, N', situé dans l'intérieur du cercle. Pour ce point, l'attraction du point A l'emportera sur la force $\frac{m}{r^2}$ dirigée suivant N'Q'. La résultante, N'O, de ces deux forces, sera donc plus rapprochée de la direction N'A que de la direction N'Q'. Donc, a fortiori, cette résultante, N'P', coupera le rayon vecteur AOX, entre le point O et le point A.

Au contraire, pour un point N, situé hors du cercle, la force $\frac{m}{r^2}$, dirigée suivant NQ, est supérieure à l'attraction du point A. La résultante, NP, est plus rapprochée de la direction NQ que de la direction NA; et va, par conséquent, couper le rayon vecteur au-delà du point O.

Ainsi, dans les deux cas, la rotation qui tend à s'établir, autour du point O, rapprocherait la molécule considérée du rayon vecteur AOX, en l'écartant de la circonférence UOV. D'où l'on conclut (comme au nº 323), que cette molécule sera en équilibre stable sur la droite AOX, et en équilibre instable sur la circonférence UOV.

326. Le cercle des momens nuls étant tangent à l'axe des $y$, il s'ensuit que, pour une valeur infiniment petite de la distance $c$, l'écartement $v$, qui correspond au moment nul, serait rigoureusement égal à 90°.

La valeur que prend cet écartement, pour une valeur quelconque de $c$, s'obtient immédiatement, en observant que l'angle N'OY, qui est égal à $v-90°$, est la moitié de l'angle N'AO. Ce qui donne $v=90°+\text{arc}\left(\sin=\frac{1}{2}\frac{c}{r}\right)$ (31).

Si l'on avait $c=\frac{1}{6}r$, on trouverait :

$v=90°+\text{arc}\left(\sin=\frac{1}{12}\right)=94°47'$ (32).

Si l'on supposait $c=\frac{1}{2}r$, on aurait $v=104°29'$ (33).

## § 3. — *Courbe des momens maxima.*

327. Proposons-nous de déterminer, pour chaque valeur

de $c$, la valeur de l'angle $v$, à laquelle correspond le maximum du moment $M$.

Cette valeur s'obtiendra, évidemment, en égalant à zéro, la valeur de $\frac{dM}{dv}$, déduite de l'équation (24). Ce qui donne

$$\frac{mc\cos v}{r^2}-\frac{mcr\cos v}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3mr^2c^2\sin^2 v}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}=0 \quad (34).$$

Si, maintenant, on considère $c$ comme variable, cette équation représentera une courbe, que nous désignerons sous le nom de courbe des momens maxima.

On obtiendra l'équation de cette courbe, rapportée à des coordonnées rectangulaires, en éliminant, de la précédente, les valeurs de $c$ et de $v$, au moyen des équations (1), (3) et (4), du nº 289. Si l'on chasse ensuite les dénominateurs, et qu'on supprime le facteur constant $m$, on arrive à l'équation

$$x(y^2+x^2+2rx+r^2)^{\frac{5}{2}}-r^3x(y^2+x^2+2rx+r^2)-3r^4y^2=0$$

(35), qui, si l'on prend $r$ pour unité, deviendra :

$$x(y^2+x^2+2x+1)^{\frac{5}{2}}-x(y^2+x^2+2x+1)-3y^2=0 \quad (36).$$

328. On voit, d'abord, que la courbe considérée passe par l'origine des coordonnées ; car son équation contient, à tous ses termes, $x$ ou $y$ en facteur. De plus, cette courbe est symétrique, par rapport à l'axe des $x$, puisque l'équation n'est fonction que de la seconde puissance de $y$.

L'équation (35) ne renfermant que la seule constante $r$, représentera toujours des courbes semblables, quelle que soit la valeur que l'on attribue à cette constante.

329. Cherchons la tangente, à l'origine des coordonnées.

Pour simplifier les calculs, nous ferons $y^2+x^2+2x+1=n^2$ (37) ; et l'équation (36) prendra la forme

$$x(n^5-n^2)-3y^2=0 \quad (38).$$

La différentiation de cette équation donne

$$\left\{x\frac{d(n^5-n^2)}{dy}-6y\right\}dy+\left\{n^5-n^2+x\frac{d(n^5-n^2)}{dx}\right\}dx=0 \quad (39).$$

Pour obtenir la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondante à l'origine des coordonnées, il faut faire, dans l'équation (39), $x=0$, $y=0$; ce qui rend nul, évidemment, le coëfficient de $dy$; et réduit, celui de $dx$, à $n^5-n^2$. Or il est évident, à l'inspection de l'équation (37), que $n^2$, et par conséquent $n^5$, se réduisent à l'unité, par la substitution des valeurs $x=0, y=0$. Le coëfficient de $dx$ devient donc nul, aussi, par la même substitution; et l'on a : $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Ce résultat doit faire présumer que l'origine est un point multiple de la courbe.

330. Cette présomption se trouve confirmée, par ce que nous pouvons connaître, a priori, de la courbe. En effet, le système de tous les points, pour lesquels les momens sont nuls, est donné par l'ensemble de la droite AOX et du cercle UOV; qui forment, en se coupant au point O, quatre angles mixtilignes (fig. 5). Or, pour chaque valeur donnée de $c$, on doit évidemment trouver, entre deux points dont les momens sont nuls, au moins un point pour lequel la valeur absolue du moment est à son maximum. Chaque angle mixtiligne doit donc comprendre, au moins, une branche de la courbe des momens maxima. Et, toutes ces branches partant du point O, ce point est un point multiple.

331. Essayons si la différentielle seconde de l'équation nous donnera des valeurs déterminées pour $\frac{dy}{dx}$.

Remarquons, d'abord, que le terme de $dy\,dx$, devra conserver, $y$, en facteur; puisque cette quantité n'entre, dans l'équation, qu'à la seconde puissance. Ce terme disparaîtra donc, pour $y=0$. Les termes de $d^2y$ et $d^2x$ disparaîtront, d'ailleurs, nécessairement, aussi, de la différentielle seconde; puisque leurs coëfficiens y seront les mêmes que ceux de $dy$ et $dx$ dans la différentielle première. Nous n'avons donc à nous occuper que de la détermination des termes de $dy^2$ et $dx^2$

Si nous différencions, de nouveau, par rapport à $y$, le coëfficient de $dy$ dans l'équation (39); la différentielle du premier terme de ce coëfficient conservera le facteur $x$, elle disparaîtra donc du résultat quand on y fera $x=0$. Nous pouvons donc, d'avance, négliger ce premier terme; ce qui réduira le terme de $dy^2$ à $-6\,dy^2$.

En différenciant par rapport à $x$ le terme de d$x$, on trouve $\left\{2\frac{d(n^5-n^2)}{dx}+x\frac{d^2(n^5-n^2)}{dx^2}\right\}dx^2$. Négligeant le terme de $x$ qui doit disparaître du résultat, et effectuant la différenciation indiquée sur le premier terme, nous avons $2\left\{5n^4-2n\right\}\frac{dn}{dx}dx^2$. Mais on déduit de l'équation (37), $\frac{dn}{dx}=\frac{x+1}{n}$ (40). Substituant cette valeur, après y avoir fait $x=0$; le terme de $dx^2$ devient $2\left\{5n^3-2\right\}dx^2$, ou $6\,dx^2$, puisque $n^3$ se réduit à l'unité quand on y fait $x=0$, $y=0$.

La différentielle seconde se réduit donc, par les mêmes substitutions, à $6\,dx^2-6\,dy^2=0$, qui donne $\frac{dy}{dx}=\pm 1$ (41).

La courbe a donc deux tangentes à l'origine; et elles font avec l'axe des $x$ des angles de 45 et de 135 degrès. Elles sont figurées en $LOL'_1$, $L'OL_1$, (fig. 5).

332. Le moyen qui se présente, naturellement, pour déterminer la courbe par points, est de substituer successivement dans l'équation (36) diverses valeurs de $x$; et de résoudre ensuite les équations en $y$, par les méthodes données, en algèbre, pour la solution des équations numériques. Mais on serait conduit, ainsi, à des calculs, d'une excessive longueur, qu'il faut chercher à éviter, par quelque artifice.

333. Prenons l'équation de la courbe sous la forme (38), $x(n^5-n^2)-3y^2=0$, et éliminons $y^2$, au moyen de l'équation (37); nous trouvons $3x^2+(n^5-n^2+6)x-3(n^2-1)=0$ (42) d'où $x=\frac{1}{6}\left\{-(6+n^5-n^2)\pm\sqrt{(6+n^5-n^2)^2+36(n^2-1)}\right\}$ (43.) On aura donc deux valeurs de $x$ correspondantes à chaque valeur qu'on se donnera pour $n$. Substituant, ces systèmes de valeurs de $x$ et de $n$, dans l'équation (37), on déduira, pour chaque système, deux valeurs $y$.

334. L'équation (37) étant celle d'un cercle de rayon, $n$, et dont le centre est en A; Cette méthode revient à chercher les

intersections, de la courbe considérée, par une série de cercles, ayant leur centre en A. La méthode indiquée au n° 332 revenait à chercher les intersections de la même courbe par des droites parallèles à l'axe des $y$.

335. Si nous prenons $n > 1$, nous aurons $n^5 > n^2$ et $6 + n^5 - n^2 > 6$. Si $n$ est $< 1$, $n^2 - n^5$ est à fortiori $< 1$; donc $6 - (n^2 - n^5)$ est $> 5$.

Ainsi, en supposant, dans l'équation (43), le radical réel, la valeur négative de ce radical donnera, toujours, pour $x$, des valeurs négatives $> \frac{5}{6}$. N'ayant pas besoin, pour les conséquences que nous voulons déduire, de suivre la courbe jusqu'à une si grande distance de l'origine, nous ne considérerons que la valeur positive du radical.

336. L'expression des $y$, déduite de l'équation (37), est

$y = \pm\sqrt{n^2 - (1+x)^2}$ (44), qu'on peut mettre sous la forme

$y = \pm\sqrt{\{n-(1+x)\}\{n+(1+x)\}}$ (45); afin de faciliter l'emploi des logarithmes dans le calcul.

Pour déterminer, en même temps, les coordonnées polaires des points considérés, on emploiera les formules :

$v = \text{arc}\,(\text{tang} = \frac{y}{x})$ (46), et $c = \frac{x}{\cos v}$ (47).

337. C'est au moyen des équations (43), (45), (46) et (47), que nous avons calculé le tableau suivant :

| N$^{os}$ | $n=$ | $x=$ | $y=\pm$ | $\frac{y}{x}=$ | $v=$ | $c=$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,01 | 0,00995 | 0,01012 | 1,0176 | 45°30′ | 0,0142 |
| 2 | 1,05 | 0,04866 | 0,05309 | 1,0911 | 47°30′ | 0,0720 |
| 3 | 1,10 | 0,09426 | 0,11219 | 1,1902 | 49°59′ | 0,1465 |
| 4 | 1,11 | 0,10297 | 0,12468 | 1,2108 | 50°27′ | 0,1617 |
| 5 | 1,33 | 0,25212 | 0,44842 | 1,7786 | 60°39′ | 0,5144 |
| 6 | 0,99 | —0,01005 | 0,00987 | 0,9826 | 44°30′ | 0,0141 |
| 7 | 0,95 | —0,05116 | 0,04685 | 0,9158 | 42°29′ | 0,0694 |
| 8 | 0,90 | —0,10425 | 0,08734 | 0,8378 | 39°57′ | 0,1360 |
| 9 | 0,88 | —0,12590 | 0,10174 | 0,8081 | 38°57′ | 0,1619 |
| 10 | 0 60 | —0,43514 | 0,20233 | 0,4650 | 24°56′ | 0,4799 |

Dans ce tableau, on a pris, l'axe des $x$ négatifs, pour origine des angles correspondans aux valeurs négatives de $x$. De sorte qu'il faudrait retrancher, ces angles, de 180°, pour les rapporter à la même origine que les cinq premiers.

Au moyen des coordonnées qui viennent d'être déterminées, nous avons construit, par points (fig. 5)*, les deux branches de la courbe, $KOK'_1$, $K'OK_1$, dont les tangentes à l'origine étaient déjà tracées (nº 331).

338. Pour les cinq premiers points du tableau, c'est-à-dire, pour ceux qui sont situés du côté des $x$ positifs, les valeurs de $\frac{y}{x}$ sont plus grandes que l'unité. Ces points sont donc compris entre l'axe des $y$, et la tangente à l'origine; puisque, pour cette tangente, le rapport $\frac{y}{x}$ est égal à l'unité. On voit, de plus, que la courbe tourne sa convexité du côté de l'axe des $x$, puisque $\frac{y}{x}$ va en croissant, à mesure que $x$ augmente.

Du côté des $x$ négatifs, toutes les valeurs de $\frac{y}{x}$ sont plus petites que l'unité; les points de la courbe sont donc situés entre la tangente à l'origine et l'axe des $x$. De plus, ce rapport allant en diminuant à mesure que $x$ augmente, la concavité de la courbe est tournée vers l'axe des $x$.

Il est facile de reconnaître, encore, d'après les valeurs trouvées, que chacune des deux branches $KOK_1'$, $K'OK_1$, est comprise, toute entière, du même côté de sa tangente à l'origine; c'est-à-dire, que la courbe ne s'infléchit pas à l'origine.

On pourrait demander si, entre les points consécutifs déterminés, il n'existe ni point d'inflexion ni point de rebroussement. Les calculs, nécessaires pour le prouver, seraient vraisemblablement compliqués. Mais l'inspection seule de la figure, suffirait, déjà, pour le rendre peu vraisemblable; et il est, d'ailleurs,

* Dans les figures 5 et 6, nous représentons l'unité, ou $r$, par 1 décimètre.

évident, a priori, que, l'attraction variant suivant une loi continue, la courbe des momens maxima doit, elle-même, être assujettie à la loi de continuité, et n'offrir aucun changement brusque.

## § 4. *Moment et force accélératrice angulaire, dans la masse entière.*

339. Nous avons déterminé, dans les paragraphes précédens, les positions que doivent occuper des molécules isolées, pour que l'attraction du point A leur imprime, par rapport au point O, des momens nuls ou maxima.

Pour résoudre les mêmes problêmes relativement à la masse entière, il faudrait commencer par déterminer la somme des momens de toutes les molécules de cette masse. Ce qui ne paraît pas possible, dans l'état actuel de l'analyse.

Mais on doit admettre que, la masse entière sera peu éloignée de son moment nul au maximum, quand son grand diamètre s'approchera, le plus possible, des lignes où les molécules éprouvent des momens nuls ou maxima. Or, pour les conclusions que nous avons à tirer, nous n'avons pas besoin de connaître rigoureusement, mais seulement par approximation, les positions de la masse attirée qui correspondent aux momens nuls ou maxima.

Nous allons discuter, successivement, chacune de ces positions.

340. Quand le grand diamètre fait un angle nul avec le rayon vecteur, il se confond avec la droite de moment nul et d'équilibre stable.

La masse attirée éprouve, dans ce cas, un moment rigoureusement nul ; car, cette masse étant alors symétrique par rapport au rayon vecteur, l'attraction du point A ne peut tendre à la faire tourner plutôt d'un côté que de l'autre.

341. Quand le grand diamètre fait avec le rayon vecteur un angle de 45°, il se confond avec la tangente, $LOL'_1$ (fig. 5), à la courbe des momens maxima; qui est située, toute entière, d'un même côté de cette tangente.

Supposons, pour fixer les idées, que le grand diamètre soit le tiers de la longueur du rayon vecteur. La distance de ses extrémités au point O, sera le sixième de cette longueur ; c'est-à-dire, qu'elle égalera, à peu près, les valeurs de $c$ trouvées pour les points nos 4 et 9 du tableau du no 337. Le point extrême de ce grand diamètre, du côté des $x$ positifs, atteindra son moment maximum quand l'écartement sera de 50° 27', (voir le tableau). Mais tous les points intermédiaires, entre cette extrémité et le centre, atteindront, leur moment maximum, pour un écartement moins différent de 45°; et qui en différera d'autant moins qu'ils seront plus voisins de ce centre. L'écartement, qui donne le moment maximum, pour la totalité de ce demi-diamètre, sera donc, lui-même, intermédiaire entre 45° et 50° 27'. Il serait de 47° 44', en le supposant une moyenne arithmétique entre ces deux angles.

De même l'écartement qui correspond au moment maximum, pour le demi-diamètre situé du côté des $x$ négatifs est intermédiaire entre 45° et 38° 57'. Il serait de 41° 39', en le supposant aussi une moyenne arithmétique entre ces deux angles.

L'écartement, qui donne le moment maximum pour la totalité du grand diamètre, est lui-même intermédiaire entre les écartemens qui donnent des momens maxima pour chacune de ses deux parties. Supposons encore qu'il soit la moyenne arithmétique entre ces deux écartemens; on le trouvera de 44° 52'.

Ce calcul, que nous sommes loin de donner comme rigoureux, suffit, néanmoins, pour montrer que, même en attribuant, au grand diamètre de la masse attirée, une valeur égale au tiers de la distance qui sépare les centres des deux masses, l'écartement, qui correspond au moment maximum, diffère peu de 45°. Il en différera, d'ailleurs, d'autant moins que le grand diamètre aura moins de longueur. Enfin il deviendra rigoureusement égal à 45°, quand cette longueur atteindra sa limite inférieure; c'est à dire, quand le grand diamètre sera nul.

342. Il n'est pas impossible que quelques-unes des masses, que nous aurons à considérer, arrivent près du contact, au moment du périastre. Alors, la limite supérieure, que nous devrions assigner au grand diamètre, ne serait plus, comme nous l'avons supposé dans le texte, le tiers de la longueur du rayon vecteur, mais cette longueur entière. Ce qui donnerait, 0,50, pour la distance de ses extrémités au centre, ou à peu près les valeurs de $c$ trouvées pour les points nos 5 et 10 du tableau.

Un calcul approximatif, semblable à celui du no précédent, donnerait 43° 34', pour l'écartement correspondant au moment maximum du grand diamètre total, supposé égal au rayon vecteur. Ainsi, même dans cette hypothèse extrême, l'écartement correspondant au moment maximum, paraît devoir peu différer de l'angle de 45°, que nous pouvons, par suite, adopter comme approximatif.

343. Quand l'écartement est de 90°, le grand diamètre est tangent au cercle de moment nul et d'équibre instable (fig. 5). Le moment de la masse attirée serait, alors, rigoureusement nul, si les deux hémisphères étaient symétriques. Mais, s'il s'agit d'un corps, qui s'est solidifié sous sa forme d'équilibre, et dont le grand diamètre a pris depuis lors une position perpendiculaire à sa position primitive ; ce ne sera plus qu'approximativement parlant, que l'on pourra considérer, l'écartement de 90°, comme celui qui donne le moment nul.

344. Pour l'écartement de 135°, le grand diamètre devient tangent, de nouveau, à la courbe des momens maxima (nº 331) ; et la masse entière atteint (approximativement) un nouveau maximum. Mais le moment, en passant par zéro, a changé de signe (nº 323). Il arrive donc à son maximum négatif, ou, si l'on veut, à son minimum.

345. Enfin l'écartement de 180°, ramène le grand diamètre sur la droite de moment nul et d'équilibre stable. La masse entière éprouve elle même un moment rigoureusement nul, et se trouve en équilibre stable.

346. D'après ce qui a été dit au nº 313, la force accélératrice angulaire est nulle ou à son maximum, quand le moment est nul ou à son maximum. Nous arrivons donc aux conclusions posées au premier alinéa du nº 39. (Les deux autres alinéa n'exigent pas de développemens).

Add. Vº. — *Effets d'une attraction extérieure sur une masse fluïde écartée de sa position d'équilibre* (nºs 37, 40, 41 et 42).

347. Nous avons traité cette question dans le texte ; mais peut-être pourrons nous rendre plus claire la démonstration du nº 41.

348. Partageons, par la pensée, la masse fluide en une infinité de colonnes aboutissant au centre, supposons toutes ces colonnes renfermées dans des tubes, à parois inflexibles et sans

épaisseur. Supposons encore que ces tubes ne communiquent entre eux que par le centre, où ils aboutissent tous.

Appliquons à ce système de tubes, supposés adhérens entre eux, une force capable de contrebalancer le moment total de la masse, et qui maintiendrait par conséquent le système en repos. Il est évident que le fluïde montera ou descendra, dans chaque tube, de manière à rétablir l'équilibre sans le concours d'aucun mouvement de rotation.

349. Si nous supprimons la force que nous avons appliquée, au système de tubes, pour le maintenir immobile ; ce système, dans une position donnée, recevra le même mouvement de rotation, que si la masse était solidifiée sous la forme qu'elle affecte en cet instant. Ce mouvement rapprochera la masse de la position d'équilibre; en même tems que l'équilibre tendra à s'y rétablir, aussi, par les mouvemens ascendans et descendans qui auront toujours lieu dans chaque tube.

350. Si enfin nous supprimons les tubes qui astreignaient les molécules à se mouvoir, toutes, avec la même vitesse angulaire ; chaque molécule acquerra, dans un instant donné, une vitesse angulaire particulière. Mais le moment total imprimé, dans cet instant, à la masse ; et la vitesse verticale moyenne imprimée, en cet instant, à chaque colonne, seront, évidemment, les mêmes que si les tubes subsistaient ; et tendront, par conséquent, encore, à porter la masse vers sa position et sa forme d'équilibre.

Ainsi, toutes les forces accélératrices, qui agissent, dans un instant donné, tendent à ramener la masse, vers sa forme et sa position d'équilibre, *par le concours d'un mouvement général de rotation et d'un changement de disposition entre les molécules* (nº 37).

Il est entendu que nous fesons toujours abstraction des vitesses acquises, qui finiront par porter la masse à dépasser, cette forme et cette position ; pour y être de nouveau ramenée.

351. L'attraction extérieure s'augmentant quand la masse attirée s'en rapproche, la force accélératrice angulaire doit, toutes choses égales d'ailleurs, s'accroître dans la même proportion (nº 42). *

* Cet accroissement de la force accélératrice angulaire est, d'ailleurs, établi par le calcul (ADD. VIIe), relativement à une masse détachée. Ces mêmes calculs étant

On a vu (nº 303), que l'allongement doit s'accroître aussi par ce rapprochement.

ADD. VIº. — *Action d'une masse attirante extérieure, sur les parties d'un système composé d'une masse principale et de masses secondaires détachées, quand on suppose l'écartement seul variable* (nºs 43 et 44).

§ 1. *Force accélatrice angulaire.*

352. Pour les parties du système considéré, comme pour les molécules de la masse unique, ce ne sont pas des mouvemens que nous nous proposons de suivre.

Prenant les masses, en repos, dans les positions successives qu'elles peuvent occuper; nous chercherons seulement les effets que tendent à produire les forces accélératrices, qui agissent dans l'instant considéré. Si donc il nous arrive de parler de mouvemens, il s'agira de ceux que ces forces, tendent à imprimer.

Ainsi, nous faisons toujours abstraction des vitesses acquises. Cependant nous n'en avons pas moins considéré (nº 43), une force centrifuge idéale, contrebalançant, pour chacune des masses secondaires, l'attraction de la masse principale. Peut-être serait-il plus clair de dire que nous faisons abstraction de cette attraction, ce qui reviendrait absolument au même.

Quand nous suivrons les mouvemens des masses, nous aurons à tenir compte de cette attraction; mais aussi, elle se trouvera contrebalancée, par une force centrifuge réelle, résultante des vitesses acquises, que nous ne pourrons plus négliger alors.

353. Soit A (fig. 1re.), la masse attirante, O le centre de masse principale du système attiré, N celui d'une quelconque

applicables, aussi, à chaque molécule de la masse fluïde actuellement considérée; il en résulte que la force accélératrice angulaire, s'accroit, aussi, dans cette masse entière, quand elle se rapproche de la masse attirante.

On démontre également (même ADD.) que les forces d'éloignement et de rapprochement s'accroissent quand la distance des deux masses diminue. Ces forces doivent donc déterminer, alors, un allongement plus considérable.

des masses secondaires de ce système. Appelons, la ligne ON, le *rayon vecteur particulier* de la masse N; en conservant toujours le nom de *rayon vecteur* à la ligne AO, qui est le rayon vecteur général du système attiré. Le mot *écartement*, qui désignait, précédemment, l'angle du grand diamètre avec le rayon vecteur, désignera, ici, l'angle du rayon vecteur particulier, ON, avec le rayon vecteur général, AOX, dont la partie OX est prise pour l'origine des angles.

354. Voulant faire abstraction du mouvement général que peut prendre le système entier, pour ne considérer que les déplacemens respectifs de ses parties; nous devons toujours supposer appliquée, à chaque masse, une force accélératrice, $\frac{m}{r^2}$, égale et contraire à celle qui sollicite le centre de gravité du système. Nous supposerons ce centre de gravité, au point O, centre de la masse principale; ce qui s'écartera peu de la vérité tant que les masses secondaires seront très petites par rapport à la masse principale.

355. Les calculs des nos 289, 290 et 291, ont été faits pour un point, quelconque, intérieur ou extérieur à la masse attirée. Dans les paragraphes 2 et 3 de l'add. IVe, nous avions en vue un point situé à l'intérieur de cette masse. Mais il est aisé de reconnaître que nous n'avons pas fait entrer, dans le calcul, la condition qu'il lui appartînt réellement. Et, en effet, la force $G$, la seule qui n'eût pas la même expression, pour les points extérieurs et pour les points intérieurs, a disparu des résultats.

Tous ces calculs et les conséquences que nous en avons déduites, seront donc appliquables à la masse détachée que nous considérons, pourvu que nous la supposions concentrée à son centre de gravité.

356. Ainsi cette masse éprouve un moment rigoureusement nul et se trouve en équilibre stable, quand elle est située sur le rayon vecteur AOX. Son moment est nul encore, mais elle est en équilibre instable, quand elle est située sur la circonférence du cercle de rayon AO, ayant son centre en A, (no 323).

Enfin, pour une valeur donnée de la distance ON, le moment de cette masse est à son maximum, quand elle se trouve sur la courbe des momens maxima, (no 327).

357. Tant que $c$ ne sera pas trop grand, les écartemens de 90 et 45° correspondront encore, approximativement, aux momens nuls ou maxima.

On voit, en effet, par le tableau du n° 337, que, même en supposant à $c$ une valeur égale au sixième du grand diamètre, l'écartement qui donne le moment maximum, ne diffère que de 5 à 6° en plus ou en moins, de l'angle de 45°, adopté comme approximatif.

Pour cette même valeur de $c$, l'écartement qui donne le moment nul et l'equilibre instable, diffère encore moins de l'angle de 90°, (n° 326).

358. Pour une valeur donnée de $c$, le moment d'inertie de la masse condérée, par rapport au centre du système, est une quantité constante; et la force accélératrice angulaire devient nulle ou maxima, quand le moment, lui-même, est nul ou maximum.

Ainsi, en prenant le sixième du rayon vecteur pour la limite de $c$, *la force accélératrice angulaire, dans les diverses positions du rayon vecteur particulier. suit*, approximativement, *la même loi de variation que dans les positions correspendantes du grand diamètre de la masse unique*, (n° 43).

359. Mais cette proposition s'écarterait beaucoup de la vérité, si la distance ON, (ou $c$), atteignait la moitié de la longueur du rayon vecteur AO, (ou $r$).

Alors, en effet, l'écartement qui donne le moment nul et l'équilibre instable, surpasse, de 14° 29', l'angle de 90°, (n° 326).

Les écartemens qui donnent le moment maximum, sont de 60° 39' et 24° 56' (n° 337). Le premier dépasse 45° de 15° 39'; le second lui est inférieur de 20° 4'

Au reste, ces grandes différences ne pourraient, au plus, exister, qu'à l'instant du plus grand rapprochement de la masse attirante et du système attiré (au moment du périastre). Avant et après cette époque, les écartemens de 45 et 90°, indiqués au n° 43 pour fixer les idées, seront beaucoup plus approchés de ceux qui correspondent aux momens maximum ou nul.

## § 2. *Force d'éloignement.*

360. La force d'éloignement (nº 44), résulte des composantes, dirigées suivant NO, de l'attraction extérieure et de la force $\frac{m}{r^2}$ appliquée à toutes les masses pour détruire le mouvement général du système.

Supposons ces deux dernières forces décomposées parallèlement aux axes. Appelons $X'$ la somme de leurs composantes parallèles à l'axe des $x$; $Y'$ la somme de leurs composantes parallèles à l'axe des $y$. Désignons par $E$ la force d'éloignement. Nous aurons évidemment : $E = X' \cos v + Y' \sin v$ (48).

On obtiendra les valeurs de $X'$, $Y'$, en supprimant, dans les expressions de $X$ et de $Y$ (équations (13) et (14) du nº 291), les termes où entre $G$, qui représente l'attraction du point O.

Substituant ces valeurs dans l'expression de $E$; éliminant ensuite $x$ et $y$ au moyen des équations (3) et (4); et réduisant, on trouve $E = m\left\{\frac{\cos v}{r^2} - \frac{c + r\cos v}{(c^2 + r^2 + 2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}\right\}$ (49).

361. Les hypothèses adoptées, ( nº 291 ), sur les signes de $X$ et $Y$, sont telles, évidemment, que la valeur de $E$, donnée par la dernière équation, sera positive quand la force qu'elle représente tendra réellement à produire un éloignement, et négative quand cette force tendra à produire un rapprochement.

362. Si l'on fait $\cos v = 0$, dans l'équation (49), on trouve $E = -\frac{mc}{r^2 + c^2}$; valeur négative, puisque $m$ et $c$ sont essentiellement positifs.

$\cos v = 1$ donne $E = m\left\{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+c)^2}\right\}$; valeur évidemment positive.

Quand $\cos v = -1$, on trouve $E = m\left\{-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r-c)^2}\right\}$: en observant qu'on doit prendre, pour $(c^2 - 2cr + r^2)^{\frac{3}{2}}$, la vajeur $(r-c)^3$ ; car la valeur $(c-r)^3$ serait négative, et l'on a vu (nº 290), que tous les radicaux doivent être pris avec le signe $+$.

La dernière valeur de $E$, est encore évidemment positive.

On voit donc, en définitive, que la force d'éloignement est, positive, pour tous les points de l'axe des $x$, et négative, pour ceux de l'axe des $y$.

363. La force $E$, ne pouvant devenir infinie pour les valeurs de $c$ que nous avons à considérer, ne peut changer de signe qu'en passant par zéro.

Ainsi les espaces, pour lesquels la force est positive, sont nécessairement séparés, de ceux pour lesquels elle est négative, par une courbe dont les points éprouvent une force, d'éloignement, nulle. Nous allons nous occuper de cette courbe, que, pour abréger, nous désignerons sous le nom de courbe d'éloignement nul.

## § 3. *Courbe d'éloignement nul.*

364. On obtiendra, l'équation polaire de la courbe d'éloignement nul, en égalant à zéro, la valeur de $E$ donnée par l'équation (49). Ce qui donne

$$\frac{\cos v}{r^2} - \frac{c + r\cos v}{(c^2 + r^2 + 2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (50).$$

On en déduit l'équation de la même courbe, en coordonnées rectangulaires, en multipliant, par $c$, les deux numérateurs, et substituant les valeurs (1) et (3) du nº 289.

Faisant ensuite $r=1$ et chassant les dénominateurs, on trouve :

$$x(y^2 + x^2 + 2x + 1)^{\frac{3}{2}} - (y^2 + x^2 + x) = 0 \quad (51).$$

A la seule inspection de cette équation, on peut déduire, relativement à la courbe qu'elle représente, toutes les conséquences énoncées, au nº 328, relativement à la courbe des momens maxima. C'est-à-dire, que la courbe passe par l'origine ; qu'elle est symétrique par rapport à l'axe des $x$ ; et enfin que si l'on fait varier la quantité $r$, qui a été prise pour unité, les différentes courbes qui en résulteront seront toutes semblables.

Ces mêmes observations seront, encore, appliquables à plusieurs courbes que nous aurons à considérer par la suite. Nous pourrons nous dispenser de les répéter.

365. Cherchons la tangente, à la courbe, à l'origine des coordonnées.

Pour faciliter les calculs, nous ferons encore : $y^2+x^2+2x+1=n^2$ (37); ce qui transformera l'équation (51) en celle-ci : $xn^3-n^2+x+1=0$ (52). On trouvera, pour la différentielle de cette équation :

$$\left\{(n^3+1)+(3n^2x-2n)\frac{dn}{dx}\right\}dx+(3n^2x-2n)\frac{dn}{dy}dy=0 \quad (53).$$

On déduit, de l'équation (37), $\frac{dn}{dy}=\frac{y}{n}$ (54), $\frac{dn}{dx}=\frac{x+1}{n}$ (40).

L'équation (53) deviendra donc :

$$\left\{(n^3+1)+(3nx-2)(x+1)\right\}dx+(3nx-2)\,y\,dy=0 \quad (55).$$

Le coëfficient de $dy$, contenant $y$ en facteur, se réduit à 0, quand on y fait $y=0$. Toutes les puissances de $n$ se réduisent à l'unité, quand on y fait $y=0$, et $x=0$. Le coëfficient de $dx$ se réduira donc à 2—2. Ainsi, $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$.

366. Essayons si l'on trouvera une valeur déterminée de $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la différentielle seconde de l'équation (52).

Observons, d'abord, que $d^2x$ et $d^2y$ auraient, dans la différentielle seconde, les mêmes coëfficiens que $dx$ et $dy$ dans la différentielle première ; ils disparaîtraient donc, aussi, de l'équation, par les substitutions $x=0$, $y=0$. Le terme de $dy$, $dx$, conserverait $y$ en facteur, puisque cette quantité n'entre qu'au second degré dans l'équation (51), de la courbe. Il disparaîtrait, encore, par les mêmes substitutions.

Les seuls termes que nous ayons à chercher, sont donc ceux de $dy^2$ et de $dx^2$. Nous déduirons leurs coëfficiens de l'équation (55), en y différentiant, par rapport à $y$, le coëfficient de $dy$, et, par rapport à $x$, le coëfficient de $dx$.

Le terme de $dy^2$ sera donc :

$\left\{y\frac{d(3nx-2)}{dy}+(3nx-2)\right\}dy^2$, qui se réduit à $-2dy^2$, par les substitutions $x=0$, $y=0$.

On trouve, pour le terme de $dx^2$ :

$\left\{3n^2\frac{dn}{dx}+(3nx-2)+(x+1)(3n+3x\frac{dn}{dx})\right\}dx^2$. Quand on fait $x=0$, $y=0$, les valeurs de $n$ et de $n^2$ se réduisent à l'unité. Il en est de même de la valeur de $\frac{dn}{dx}$, donnée par l'équation (40). Ce terme de $dx^2$ devient donc, immédiatement, $(3-2+3)\,dx^2$, qui se réduit à $4\,dx^2$.

Ainsi, pour l'origine des coordonnées, la différentielle seconde de l'équation de la courbe se réduit à

$4dx^2-2dy^2=0$. Ce qui donne $\frac{dy^2}{dx^2}=2$ ou $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2}$ (56),

D'où l'on déduit que la courbe a deux tangentes à l'origine des coordonnées ; que les angles, formés par ces tangentes, avec l'axe des $x$, sont supplémens l'un de l'autre ; et, enfin, que les valeurs de ces angles, en y négligeant les secondes, sont de 54° 44′ et 125° 16′.

367. On déduit, des équations (52) et (37), $x=\frac{n^2-1}{n^3+1}$ (57), et $y=\pm\sqrt{(n-x-1)(n+x+1)}$ (45). Nous aurons toujours, pour déterminer $v$ et $c$, les formules (46) et (47), du nº 336.

Au moyen de ces quatre formules, on peut calculer le tableau suivant :

| Nos | $n=$ | $x=$ | $y=\pm$ | $\frac{y}{x}=$ | $v=$ | $c=$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,01 | 0,00990 | 0,01421 | 1,4355 | 55° 8′ | 0,0173 |
| 2 | 1,05 | 0,04751 | 0,07233 | 1,5228 | 56°42′ | 0,0865 |
| 3 | 1,10 | 0,09009 | 0,14732 | 1,6353 | 58°33′ | 0,1727 |
| 4 | 1,20 | 0,16129 | 0,30233 | 1,8745 | 61°55′ | 0,3427 |
| 5 | 1,30 | 0,21583 | 0,46018 | 2,1322 | 64°52′ | 0,5083 |
| 6 | 0,99 | —0,01010 | 0,01407 | 1,3931 | 54°20′ | 0,0173 |
| 7 | 0,95 | —0,05249 | 0,06878 | 1,3103 | 52°39′ | 0,0865 |
| 8 | 0,90 | —0,10989 | 0,13306 | 1,2108 | 50°27′ | 0,1726 |
| 9 | 0,80 | —0,23810 | 0,24393 | 1,0245 | 45°42′ | 0,3409 |
| 10 | 0,70 | —0,37975 | 0,32448 | 0,8545 | 40°31′ | 0,4995 |

Nous avons indiqué, dans ce tableau, les angles tels que nous les avons obtenus par le calcul. Il faut prendre les supplémens des cinq derniers, pour les rapporter à la même origine que les premiers.

Nous avons construit, d'après les coordonnées, qui viennent d'être déterminées, les deux branches de la courbe, représentées (fig. 6) en $HOH'_1$, $H'OH_1$. Leurs tangentes sont figurées en $GOG'_1$, $G'OG_1$.

368. La force d'éloignement étant, positive, sur l'axe des $x$, et négative, sur l'axe des $y$ (nº 362) ; elle sera positive, pour tous les points compris dans les deux angles curvilignes $HOH'$, $H_1OH'_1$; et négative dans les deux angles $HOH_1$, $H'OH'_1$, où elle se change, par conséquent, en une force de rapprochement.

369. Nous considérons la force d'éloignement comme nulle (nº 44), quand l'écartement est, dans l'un ou l'autre sens, de 54° 44′. Ce qui revient à supposer cette force nulle pour les points situés sur la tangente à la courbe d'éloignement nul.

Cette hypothèse s'écarte d'autant moins de la vérité, que la distance $c$ est plus petite. On voit, par le tableau précédent (points nos 3 et 8), que, lors même que cette distance dépasse un peu $\frac{1}{6}$ du rayon vecteur, les écartemens, $v$, qui donnent une force d'éloignement nulle, ne diffèrent que d'environ 4° de l'angle, adopté, de 54° 44'.

Cette différence devient beaucoup plus considérable, surtout quand la masse est située du côté des $x$ négatifs, si la valeur de $c$ atteint la moitié de la longueur du rayon vecteur.

## § 4. — *Maxima ou minima de la force d'éloignement.*

370. Proposons-nous de déterminer, pour chaque valeur donnée de $c$, l'écartement, $v$, qui donne une force d'éloignement maxima ou minima.

La valeur cherchée de $v$ sera donnée par l'équation $\frac{dE}{dv}=0$ (58), qui, en y fesant varier $c$, représentera une courbe.

Egalant, à zéro, la valeur de $\frac{dE}{dv}$, déduite de l'équation (49), on a :

$$m \sin v \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{r}{(r^2+c^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3rc(c+r\cos v)}{(r^2+c^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}} \right\} = 0 \quad (59).$$

371. Nous pouvons supprimer, dans cette équation, le facteur constant $m$. Elle se décomposera, ensuite, en deux autres. La première, $\sin v=0$ (60), est l'équation polaire de l'axe des $x$; la seconde, en y fesant $r=1$, peut se mettre sous la forme :

$$-(1+c^2+2c\cos v)^{\frac{5}{2}} + (1+c^2+2c\cos v) - 3c(c+\cos v) = 0 \quad (61).$$

Pour discuter la courbe représentée par cette équation, nous y substituerons les coordonnées rectangulaires, aux coordonnées polaires, au moyen des équations (1) et (3). Ce qui donne :

$$-(y^2+x^2+2x+1)^{\frac{5}{2}} + (y^2+x^2+2x+1) - 3(y^2+x^2+x) = 0$$
(62).

372. L'équation (62) peut se remplacer par les suivantes :
$(y^2+x^2+2x+1)^{\frac{5}{2}}+2(y^2+x^2+2x+1)-3(x+1)=0$ (63) ;
ou $n^5+2n^2-3(x+1)=0$ (64), en conservant toujours à $n$ la valeur indiquée par l'équation (37).

La différentiation de l'équation (64) donne :
$(5n^4+4n)\,dn-3\,dx=0$ (65). Mais on déduit, de l'équation (37),
$ndn=ydy+(x+1)dx$ (66).

L'équation (65) deviendra donc
$(5n^3+4)\{ydy+(x+1)dx\}-3\,dx=0$ (67).

Pour $x=0$, $y=0$, la valeur de $n^3$ se réduit à l'unité, et l'équation (67), à $9dx-3\,dx=0$, ou à $dx=0$ (68).

Ce qui fait voir que la tangente à la courbe, à l'origine des coordonnées, est perpendiculaire à l'axe des $x$ ; ou n'est autre chose que l'axe des $y$.

373. De l'équation (64) on déduit $x=\frac{1}{3}(n^5+2n^2)-1$ (69) ; qui donnera une valeur de $x$ pour chaque valeur de $n$ qu'on y substituera.

Les valeurs correspondantes de $y$, $v$ et $c$, se détermineront toujours, au moyen des formules (45), (46) et (47) du nº 336.

Nous pourrons nous dispenser de substituer, dans l'équation (69), aucune valeur de $n$ plus grande que l'unité.

En effet, $n>1$ donne $n^2>n$, $n^5>n$ et $n^5+2n^2>3n$ (70).

L'équation (64) peut s'écrire sous la forme,
$n^5+2n^2=3(x+1)$ (71). De l'équation (71) et l'inégalité (70), on déduit $3(x+1)>3n$ ou $(x+1)>n$. Or cette condition est incompatible avec l'équation (37) qui ne peut admettre de valeurs de $x+1$ plus grandes que $n$, puisque $y^2$ ne peut jamais être négatif.

Les valeurs de $n$ supérieures à l'unité ne peuvent donc conduire à aucune solution commune aux équations (64) et (37). Nous n'aurons donc à essayer que les valeurs de $n<1$.

Nous pouvons reconnaître que, par suite, tous les points de la courbe, sauf l'origine, sont situés du côté des $x$ négatifs. Car $n < 1$ donne, a fortiori, $n^3 + 2n^2 < 3$ ou $3(x+1) < 3$, ce qui suppose $x$ négatif.

374. Les formules (69), (45), (46) et (47), conduisent aux systèmes de valeurs indiquées au tableau suivant.

| Nos | $n=$ | $x=-$ | $y=\pm$ | $\frac{y}{x}=$ | $v=$ | $c=$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,999 | 0,00300 | 0,06312 | 21,068 | 87°17′ | 0,0632 |
| 2 | 0,995 | 0,01490 | 0,14001 | 9,397 | 83°56′ | 0,1408 |
| 3 | 0,993 | 0,02081 | 0,16500 | 7,931 | 82°49′ | 0,1663 |
| 4 | 0,990 | 0,02960 | 0,19604 | 6,622 | 81°25′ | 0,1983 |
| 5 | 0,960 | 0,11381 | 0,36914 | 3,244 | 72°52′ | 0,3863 |
| 6 | 0,930 | 0,19150 | 0 45960 | 2,400 | 67°23′ | 0,4979 |

Les coordonnées, indiquées à ce tableau, ont servi à construire par points la courbe représentée en U′OV′ (fig. 6).

375. Maintenant qu'il est établi que la droite AOX et la courbe U′OV′ (fig. 6), forment l'ensemble de tous les points qui éprouvent une force d'éloignement maxima ou minima. Il s'agit de reconnaître, entre ces deux lignes, celle qui correspond au maximum de la force et celle qui correspond à son minimum.

Il est évident, qu'abstraction faite du signe, une quantité variable, a, nécessairement, au moins un maximum, entre deux valeurs nulles. Or chacune des branches OV′, OU′, OX, OA, (fig. 6), est comprise entre deux branches de la courbe d'éloignement nul, $HOH'_1$, $H_1OH'$.

La force d'éloignement est donc à son maximum de valeur absolue sur la droite AX et sur la courbe U′OV′.

Nous avons vu, d'ailleurs (no 362) que cette force est positive, pour tous les points de l'axe des $x$; et (no 368), négative dans les deux angles $HOH_1$, $H'OH'_1$, qui comprennent la courbe U′OV′. Ainsi, la force d'éloignement est à son maximum positif, sur l'axe des $x$, que nous pourrons appeler la ligne d'éloignement maximum; et la même force est à son maximum négatif, sur la courbe U'OV'. Nous pourrons, indifféremment, nommer cette courbe, courbe de rapprochement maximum, ou courbe d'éloignement minimum ; puisqu'un maximum négatif peut être considéré comme un minimum.

376. Il est donc démontré, comme nous l'avons avancé (nº 44), que la force d'éloignement est à son maximum, quand l'écartement est de 0, ou de 180°.

Nous avons considéré (nº 44), la force de rapprochement, comme atteignant son maximum, quand l'écartement arrive à 90°. Dans ce cas encore, pour fixer les idées, nous avons substitué, un écartement constant, à un écartement variable en réalité: à la courbe, nous avons substitué sa tangente à l'origine des cordonnées.

On voit, par le tableau du nº 374, que les écartemens, qui correspondent réellement au maximum de la force de rapprochement, diffèrent d'autant plus de 90° que la valeur de $c$ est plus grande. Cette différence est d'un peu plus de 7°, quand $c$ est environ le sixième du rayon vecteur, $r$. Elle est d'environ 23°, quand la distance $c$ atteint la moitié de la distance $r$.

**Add. VII^e.**—*Effets de l'éloignement ou du rapprochement de la masse attirante* (nº 45).

### § 1. *Force accélératrice angulaire.*

377. Jusqu'à présent nous avons supposé données les distances $c$ et $r$, pour ne considérer que les effets résultans des variations de l'écartement $v$. Nous considérerons, dans cette addition, $r$, comme variable, en supposant $c$ et $v$ constans.

Dans ce premier paragraphe, nous nous occuperons du moment et de la force accélératrice angulaire.

378. *Le moment diminue en général, quand* r *augmente.*

Cette proposition sera démontrée, si l'on fait voir que, en donnant à $r$ un accroissement infiniment petit, l'accroissement, qui en résultera pour le moment $M$, aura un signe contraire à celui de ce moment lui-même : ou, autrement, si l'on fait voir que les quantités, $M$ et $\frac{dM}{dr}$, sont généralement de signes opposés.

379. Reprenons la valeur de $M$ donnée par l'équation (24) du nº 316.

En la différentiant par rapport à $r$ on trouve :

$$\frac{dM}{dr}=mc\sin v\left\{-\frac{2}{r^3}-\frac{1}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3(r^2+rc\cos v)}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}\right\}\quad(72).$$

Equation dans laquelle les quantités, $m$, $c$, $r$, sont essentiellement positives ; et dans laquelle les radicaux doivent toujours être pris avec le signe $+$ (n° 290).

380. La valeur négative de $\sin v$, correspond aux points situés du côté des $y$ négatifs. Tout étant symétrique par rapport à l'axe des $x$, il suffit de nous occuper de ce qui se passe d'un côté de cet axe. Nous supposerons donc $\sin v$ positif.

Par suite, le facteur $mc\sin v$ sera, lui-même, positif ; et $\frac{dM}{dr}$ sera de même signe que son facteur trinome.

381. Quand $\cos v$ est positif, on a :

$r^2+cr\cos v<r^2+c^2+2cr\cos v$ ; donc,

$$\frac{r^2+cr\cos v}{(r^2+c^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}<\frac{1}{(r^2+c^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}},\ \text{et a fortiori}$$

$$<\frac{1}{r^3}.$$

Le terme positif du facteur trinome étant, ainsi, plus petit que la somme de ses deux termes négatifs ; ce facteur, et, par suite, $\frac{dM}{dr}$, seront négatifs. Cette proposition ne cesse pas d'être vraie quand $\cos v=0$.

382. Quand $\cos v$ est négatif, il ne s'en suit pas que $\frac{dM}{dr}$ soit toujours positif ; mais nous pouvons voir, au moins, que cette quantité est positive, dans le voisinage de l'axe des $x$ négatifs. En effet, si l'on suppose $v$ infiniment petit, on au-

ra cos $v=-1$, et le facteur trinome de $\frac{dM}{dr}$ deviendra :

$-\frac{2}{r^3}-\frac{1}{(r-c)^3}-3\frac{r^2-cr}{(r-c)^5}$ ; or, on a : $r>c$ ; d'où

$cr-c^2>0$, $r^2-cr>r^2-cr-(cr-c^2)$, ou $r^2-cr>(r-c)^2$ ; d'où

encore, $\frac{r^2-cr}{(r-c)^2}>1$, $\frac{r^2-cr}{(r-c)^5}>\frac{1}{(r-c)^3}$, et a fortiori $>\frac{1}{r^3}$. Donc, enfin, $3\frac{r^2-cr}{(r-c)^5}>\frac{1}{(r-c)^3}+\frac{2}{r^3}$, et, par conséquent, $\frac{dM}{dr}>0$.

383. $\frac{dM}{dr}$ étant positif près de l'axe des $x$ négatifs, et négatif du côté des $x$ positifs et sur l'axe des $y$ lui-même ; il doit exister entre l'axe des $y$ et l'axe des $x$ négatifs, une certaine courbe pour laquelle $\frac{dM}{dr}$ soit nul. Elle aura pour équation $\frac{dM}{dr}=0$ ou

$$\frac{2}{r^3}+\frac{1}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3(r^2+cr\cos v)}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}=0 \quad (73).$$

384. Cette équation donnerait, pour chaque système de valeurs de $c$ et de $v$, la valeur de $r$ qui rend, nul, la fonction $\frac{dM}{dr}$.

Mais si, maintenant, nous attribuons une valeur déterminée à la quantité $r$ que nous avons considérée, comme variable, pour opérer la différenciation ; et si, en même tems, nous faisons varier $c$ et $v$ ; la même équation donnera, évidemment, pour ces deux dernières quantités, des systèmes de valeurs qui rendent, nulle, la fonction $\frac{dM}{dr}$.

Alors, cette équation représentera une courbe dont $c$ et $v$ seront les coordonnées polaires. Chaque point de cette courbe sera tel, que si, sans changer ses coordonnées $c$ et $v$, on augmentait, d'une quantité infiniment petite, la valeur considérée de $r$, il n'en résulterait aucun changement dans la valeur du moment $M$. Cette courbe, ou au moins l'une de ses branches si elle en a plusieurs, formera donc, la limite cherchée entre les espaces où cette augmentation produit un accroissement du moment et ceux où elle produit une diminution de ce moment; ou, autrement, entre les espaces où l'accroissement du moment est positif et ceux où il est négatif.

385. Nous pouvons encore prendre pour unité la valeur, déterminée, que nous supposons à $r$.

Si en même tems nous substituons les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires, l'équation de la courbe deviendra :

$$2(y^2+x^2+2x+1)^{\frac{5}{2}}+(y^2+x^2+2x+1)-3(x+1)=0 \quad (74).$$

ou $2\,n^5+n^2-3(x+1)=0$ (75).

386, La différentiation de cette équation donne

$$(10\,n^4+2\,n)\frac{dn}{dy}\,dy+\left\{(10\,n^4+2n)\frac{dn}{dx}-3\right\}dx=0 \quad (76).$$

Les équations (54 et (40), du n° 365, font voir que pour $x=0$, $y=0$, on a $\frac{dn}{dy}=0$ et $\frac{dn}{dx}=1$. Ces mêmes valeurs de $x$ et de $y$, réduiront donc, à zéro, le coëfficient de $dy$, et à $(12-3)$ le coëfficient de $dx$, ce qui donne $dx=0$.

La tangente à la courbe à l'origine des coordonnées, est donc perpendiculaire à l'axe des $x$.

387. De l'équation (75) on déduit $x+1=\frac{2\,n^5+n^2}{3}$ (77).

La valeur de $y$ est toujours donnée par l'équation (45) du n° 336.

Au moyen de ces deux formules, on arrive aux systèmes de valeurs, indiqués ci-dessous.

N° 1, $n=0{,}999$, $x=-0{,}00733$, $y=\pm\,0{,}11225$.

N° 2, $n=0{,}995$, $x=-0{,}01983$, $y=\pm\,0{,}17112$.

N° 3, $n=0{,}99$, $x=-0{,}03931$, $y=\pm\,0{,}23910$.

N° 4, $n=0{,}96$, $x=-0{,}1492$, $y=\pm\,0{,}4447$, $c=0.4691$.

388. Cherchons quels sont, pour le cercle des momens nuls, les abscisses correspondantes aux ordonnées qui viennent d'être trouvées pour la courbe.

En appellant $q$, l'angle dont le sinus est égal à l'ordonnée, $y$, de ce cercle, on aura $x+1=\cos q$. (78.) D'où l'on déduit les systèmes suivans de coordonnées :

N° 1, $y=\pm 0{,}11225$, $x=-0{,}00632$.
N° 2, $y=\pm 0{,}17112$, $x=-0{,}01475$.
N° 3, $y=\pm 0{,}23910$, $x=-0{,}02901$.
N° 4, $y=\pm 0{,}4447$, $x=-0{,}1043$.

389. Il résulte, des nos 386 et 322, que la tangente, à l'origine, est la même pour la courbe et pour le cercle.

En comparant les valeurs absolues des abscisses correspondantes, on voit que toutes celles du cercle sont plus petites que celles de la courbe. D'où l'on conclut que le cercle est compris entre la courbe et l'axe des $y$, ou autrement, que la courbe est, toute entière, intérieure au cercle.

Cette conclusion ne serait pas rigoureuse, s'il s'agissait de deux courbes qui pussent offrir des points de rebroussement. Mais il est évident que les effets de l'attraction doivent, comme cette force elle-même, être assujettis à la loi de continuïté. Toutes les courbes considérées et toutes celles du même genre, dont nous aurons à nous occuper encore, ne peuvent donc admettre aucun changement brusque. Par leur nature même, elles doivent offrir une courbure régulière.

La courbe, qui vient d'être déterminée, est indiquée en U'OV', à la fig. 5, où le cercle des momens nuls est déjà tracé en UOV.

390. $\frac{dm}{dr}$, qui est négatif du côté des $x$ positifs, reste négatif, de l'autre côté de l'axe des $y$, jusqu'à la courbe pour laquelle $\frac{dm}{dr}=0$. Cette quantité, positive auprès de l'axe des $x$ négatifs, reste positive jusqu'à la même courbe (OV').

On a vu (n° 323), que le moment, $M$, est positif depuis l'axe des $x$ positifs, jusqu'au cercle des momens nuls, OV; et négatif, depuis ce cercle, jusqu'à l'axe des $x$ négatifs.

Les deux quantités, $M$ et $\frac{dM}{dr}$, sont donc de signes contraires, pour tous les points situés en dehors de l'angle curviligne VOV'. Elles sont de même signe, et toutes deux négatives dans l'intérieur de cet angle.

Ainsi, l'augmentation de la distance *r* augmente la valeur absolue du moment, dans l'intervalle des courbes OV, OV'; mais la diminue partout ailleurs.

391. Cet intervalle est très-faible, en comparaison de l'espace qui existe en dehors. C'est ce qu'on peut reconnaître, tant par l'inspection de la figure, que par les faibles différences qui existent entre les abscisses correspondantes données, par le calcul, pour les deux courbes.

Ainsi, pour la grande généralité des cas, l'éloignement, des centres du système attiré et de la masse attirante, détermine une diminution du moment qui sollicite la masse secondaire considérée.

392. On doit observer, encore, que le faible intervalle VOV', pour lequel le contraire a lieu, est limité, d'un côté, par la courbe des momens nuls. Tous les points qu'il comprend, très-voisins de cette courbe, conservent donc, dans tous les cas, des momens très-voisins de zéro. Les accroissemens de ces momens, ne peuvent donc avoir, eux-mêmes, qu'une très-faible valeur absolue. C'est une raison, encore, pour qu'ils aient peu d'influence sur les résultats généraux dont nous aurons à nous occuper.

393. Ainsi, plus tard, quand nous ne ferons plus abstraction des vitesses acquises, et quand nous en viendrons à nous occuper des effets définitifs qui doivent résulter des actions éprouvées, par la masse secondaire considérée, dans une série de positions successives; nous pourrons négliger ces faibles accroissemens d'un instant, et considérer les momens, comme, généralement, décroissans par l'éloignement des deux centres.

394. Réciproquement, nous devrons considérer les momens comme s'accroissant, en général, par le rapprochement des deux centres.

395. La distance *c* étant constante, le moment d'inertie de la masse secondaire, par rapport à la masse principale, est aussi constant. La force accélératrice angulaire varie donc, pour cette masse secondaire, dans le même rapport que le moment; c'est-

à-dire, que cette force s'accroît aussi par le rapprochement des deux centres, et diminue par leur éloignement (nº 45).

§ 2. — *Force d'éloignement.*

396. Il s'agit, maintenant, d'établir que, toutes choses égales d'ailleurs, la force d'éloignement, dans les positions où elle est positive, comme dans celles où elle est négative, diminue de valeur absolue, par l'accroissement de $r$.

Nous démontrerons cette proposition, par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour le moment; en fesant voir que les quantités $E$ et $\frac{dE}{dr}$ sont, généralement, de signes contraires.

397. La valeur de $E$ est donnée par l'équation (49) du nº 360. En la différentiant par rapport à $r$, on trouve :

$$\frac{dE}{dr}=m\left\{-2\frac{\cos v}{r^3}-\frac{\cos v}{(r^2+c^2+2\,cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}+3\frac{(rc+(r^2+c^2)\cos v+rc\cos^2 v)}{(r^2+c^2+2\,c\,r\cos v)^{\frac{5}{2}}}\right\} \quad (79).$$

Si l'on fait, dans cette équation, $\cos v=0$. Elle se réduit à

$$\frac{dE}{dr}=m\frac{rc}{(r^2+c^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (80).$$

Les quantités $m$, $r$ et $c$, sont essentiellement positives; il en est de même du radical (nº290). Cette valeur de $\frac{dE}{dr}$ est donc positive.

Si $\cos v=1$, l'équation (79) devient

$$\frac{dE}{dr}=m\left\{-\frac{2}{r^3}+\frac{2}{(r+c)^3}\right\} \quad (81).$$ Or, on a évidemment

$$\frac{2}{(r+c)^3}<\frac{2}{r^3}.$$ Cette valeur est donc négative.

Si $\cos v=-1$, on a $\frac{dE}{dr}=m\left\{\frac{2}{r^3}-\frac{2}{(r-c)^3}\right\}$ (82); valeur encore négative.

398. Ainsi, $\frac{dE}{dr}$ est positif, pour tous les points de l'axe des $y$, et négatif pour tous de l'axe ceux des $x$. Il doit donc exister, dans chacun des 4 angles formés par ces deux axes, une branche de courbe pour laquelle $\frac{dE}{dr}$ soit nul, et qui serve de limite entre les points pour lesquels cette quantité est négative et ceux pour lesquels elle est positive.

Toutes ces branches de courbes seront comprises dans l'équation $\frac{dE}{dr}=0$ ou $2\frac{\cos v}{r^3}+\frac{\cos v}{(r^2+c^2+cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}$

$$-3\,\frac{(r^2+c^2)\cos v+rc+rc\cos^2 v}{(r^2+c^2+2\,cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}=0 \quad (83).$$ Ou enfin

$$2x(y^2+x^2+2x+1)^{\frac{5}{2}}+x(y^2+x^2+2x+1)$$
$$-3\{x(y^2+x^2+1)+(y^2+x^2)+x^2\}=0 \qquad (84).$$

399. Nous ferons encore $y^2+x^2+2x+1=n^2$ (37), ce qui nous permettra d'éliminer $y^2$ de tous les termes de l'équation (84), et elle prendra la forme $3x^2+2x(n^5-n^2+3)-3(n^2-1)=0$ (85).

En différentiant cette équation, nous trouvons :

$$\left\{6x+2(n^5-n^2+3)+[2x(5n^4-2n)-6n]\frac{dn}{dx}\right\}dx$$
$$+\left\{2x(5n^4-2n)-6n\right\}\frac{dn}{dy}\,dy=0 \qquad (86).$$

Les valeurs $x=0$, $y=0$, donneront toujours $\frac{dn}{dy}=0$ (87), $n$ 1 (88) et $\frac{dn}{dx}=1$ (89.)

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation (86), elle se réduit à $0=0$.

Nous devrons donc avoir recours à la différentielle seconde pour déterminer la tangente à l'origine des coordonnées.

400. Il faut toujours observer qu'il est inutile de nous occuper

des termes de $d^2x$, $d^2y$ et $dx\,dy$, dont les coëfficiens doivent se réduire à zéro, quand on y substituera les coordonnées de l'origine.

On déduit des équations (40) et (54) du nº 365,

$n\dfrac{d^2n}{dx^2}+\dfrac{dn^2}{dx^2}=1$, $n\dfrac{d^2n}{dy^2}+\dfrac{dn^2}{dy^2}=1$. Ces deux équations se réduisent à $\dfrac{d^2n}{dx^2}=0$ (90), et $\dfrac{d^2n}{dy^2}=1$ (91), en y substituant les valeurs (87), (88) et (89).

Nous pourrons, en opérant les différenciations, négliger les termes de $\dfrac{d^2n}{dx^2}$ et de $\dfrac{dn^2}{dy^2}$ qui doivent devenir nuls (équations 87 et 90).

On trouvera, ainsi, pour le terme de $dx^2$,

$$\left\{6+(20n^4-8n)\frac{dn}{dx}+(2x(20n^3-2)-6)\frac{dn^2}{dx^2}\right\}dx^2,$$

et, pour le terme de $dy^2$, $\left\{2x(5n^4-2n)-6n\right\}\dfrac{d^2n}{dy^2}\,dy^2$.

Enfin, par la substitution des valeurs (88), (89), et (91), on trouvera, pour l'équation différentielle seconde :

$12\,dx^2-6\,dy^2=0$. D'où l'on déduit $\dfrac{dy^2}{dx^2}=2$, ou

$\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2}$ (92).

La courbe considérée et la courbe d'éloignement nul ont donc les mêmes tangentes à l'origine (nº 366). Ces tangentes sont représentées en $GOG'_1$, $G'OG_1$ (fig. 6).

401. L'équation (85) donne la formule,

$$x=\frac{1}{3}\left\{-(3+n^5-n^2)\pm\sqrt{(3+n^5-n^2)^2+9(n^2-1)}\right\} \quad (93);$$

dans laquelle nous devrons prendre le radical avec le signe $+$.

car on pourrait voir, par un raisonnement analogue à celui du nº 335, que toute valeur négative du radical donnerait, pour $x$, une valeur négative plus grande que $\frac{2}{3}$; et nous n'avons pas besoin de suivre la courbe à une aussi grande distance de l'origine.

Nous aurons toujours, pour déterminer $y$, la formule (45), du nº 336; et nous trouverons les systèmes de valeurs :

$$n=1,1,\ x=0,0891,\quad y=\pm 0,1543;$$
$$n=1,3,\ x=0,1947,\quad y=\pm 0,5125;$$
$$n=0,9,\ x=-0,1089,\ y=\pm 0,1263;$$
$$n=0,7,\ x=-0,3671,\ y=\pm 0,2768.$$

402. Les valeurs de $n$, pour ces points, sont les mêmes que pour les points nºs 3, 5, 8 et 10, de la courbe d'éloignement nul. Les points correspondans des deux courbes se trouvent, par conséquent, situés sur des cercles de mêmes rayons ; et ayant, tous, leurs centres en A. On voit que les différences, qui existent entre les coordonnées des points correspondans des deux courbes, sont peu considérables, même pour les points extrêmes. Au reste, on pourra mieux juger, de l'intervalle des deux courbes, par la fig. 6, ou la courbe d'éloignement nul, et représentée en $HOH'_1$, $H'OH_1$, et où la courbe pour laquelle $\frac{dE}{dr}=0$, est représentée en $IOI'_1$, $I'OI_1$.

403. Du côté des $x$ positifs, cette dernière courbe est intermédiaire entre la courbe d'éloignement nul et l'axe des $y$. Du côté des $x$ négatifs, au contraire, elle est intermédiaire entre cette même courbe et l'axe $x$.

Dans les angles curvilignes HOI, H'OI', les quantités $E$ et $\frac{dE}{dr}$ sont toutes deux négatives (nºs 368 et 398). Elles sont toutes deux positives, dans les angles $H_1OI_1$, $H'_1OI'_1$, dans l'un et l'autre cas, l'accroissement de $r$ augmente la valeur absolue de $E$.

Pour tous les points situés en dehors de ces quatre angles, $E$ et $\frac{dE}{dr}$ sont de signes contraires, et par conséquent la valeur absolue de $E$ diminue quand $r$ augmente.

404. Nous avons déjà fait observer que les espaces, compris dans ces angles, sont peu considérables. On doit remarquer encore que ces espaces sont limités par la courbe d'éloignement nul ; et que, par conséquent, la force d'éloignement y est, dans tous les cas, très faible. Par ce double motif, les variations que son intensité peut y éprouver, influeront peu sur l'éloignement définitif, résultant de son action prolongée dans une série de positions successives. Nous pouvons donc négliger ces cas exceptionnels, et considérer, la force d'éloignement, comme généralement décroissante, par l'augmentation de la distance qui sépare le centre du système attiré de celui de la masse attirante.

405. Réciproquement, la force d'éloignement doit être considérée, comme généralement croissante, quand le centre du système s'approche de la masse (nº 45).

### Add. VIIIe.—*Effets dépendans de la distance de la masse secondaire à la masse principale.* (nº 46).

### § 1. *Force d'éloignement.*

406. Supposons maintenant $r$ et $v$ constant, et $c$ variable.

Différentiant, par rapport à $c$, la valeur, de la force d'éloignement $E$, donnée par l'équation (49) du nº. 360, on trouve :

$$\frac{dE}{dc}=\frac{m}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}\left\{3.\frac{(c+r\cos v)^2}{c^2+r^2+2cr\cos v}-1\right\} \quad (94.)$$

La force $E$ s'accroîtra par l'augmentation de $c$, si $\frac{dE}{dc}$ est de même signe que $E$.

407. Le facteur monome, du second membre de l'équation (94), est toujours positif. $\frac{dE}{dc}$ sera donc de même signe que son facteur binome.

Quand $\cos v=1$, ce dernier facteur se réduit à $3-1$. $\frac{dE}{dc}$ est donc alors positif.

$\cos v=-1$ donne la même valeur pour ce facteur binome ; $\frac{dE}{dc}$ est donc positif pour tous les points de l'axe des $x$.

Si cos $v=0$, le facteur binome devient $\frac{3c^2}{c^2+r^2}-1$. Quantité qui est négative tant que l'on a $3c^2<c^2+r^2$, ou $c<\frac{r}{\sqrt{2}}$, ou enfin $c<0{,}7071\ r$. Or, nous ne considérons jamais la masse secondaire à une distance qui dépasse la moitié de $r$. $\frac{dE}{dc}$ est donc négatif sur l'axe des $y$, pour tous les cas dont nous avons à nous occuper.

408. La courbe qui sépare les espaces où $\frac{dE}{dc}$ est positif, de ceux où il est négatif, sera donnée par l'équation $\frac{dE}{dc}=0$,

ou $3\frac{(c+r\cos v)^2}{c^2+r^2+2cr\cos v}-1=0$ (95).

Multipliant par $c^2$ l'équation (95), et y opérant ensuite les substitutions, transformations et réductions employées pour les autres courbes, elle devient

$$3x^2+(6-4n^2)x+2n^4-5n^2+3=0 \quad (96).$$

409. Cherchons les points où la courbe coupe l'axe des $y$, en fesant $x=0$.

L'équation (98) devient alors :

$2n^4-5n^2+3=0$ (97), d'où $n^2=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{3}{2}}$ (98), ou, $n^2=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$ (99).

Or, l'équation (37) $n^2=y^2+(x+1)^2$, donne $n^2=y^2+1$, quand on y fait $x=0$.

On a donc $y^2+1=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$ (100) ; d'où l'on déduit les deux valeurs $y^2=0$ (101), et $y^2=\frac{1}{2}$ (102). La première fait voir que l'origine est un point multiple de la courbe. La seconde donne $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm 0,7071$ (103) ; valeurs qui sortent des limites où nous nous renfermons ; mais qui, n'en étant pas très-éloignées, contribueront à nous faire connaître la forme générale de la courbe, dans la partie même que nous avons à considérer. Nous représentons, en $M$ (fig. 6), l'un des points correspondans à ces deux dernières valeurs.

410. Si nous cherchons les tangentes à l'origine, nous trouvons, en employant toujours les mêmes artifices que pour les courbes précédentes, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2}$ (104).

Cette courbe a donc les mêmes tangentes à l'origine, que la courbe d'éloignement nul (nº 366.)

411. De l'équation (96), on déduit la formule :

$x=\frac{1}{3}\left\{-(3-2n^2)\pm n\sqrt{3-2n^2}\right\}$ (105). $y$ est toujours déterminé par la formule (45).

412. Observons que toute valeur de $n$ supérieure à $\sqrt{\frac{3}{2}}$ donnerait pour $x$ des valeurs imaginaires. La courbe est donc renfermée, toute entière, dans le cercle $MM'M'$ (fig. 6, dont le centre est en A, et dont le rayon $=\sqrt{\frac{3}{2}}$, ou 1,22469.

Nous voyons, encore, que, pour cette valeur de $n$, les deux valeurs de $x$ se réduisent en une seule ; la courbe est donc tangente au cercle, au point correspondant à cette valeur.

Cette double valeur de $x$, étant nulle, il en résulte que le point de tangance, de la courbe et du cercle, n'est autre chose que le point $M$, où la courbe coupe l'axe des $y$.

413. La courbe, étant renfermée dans un cercle qui coupe l'axe des $x$ positifs à une distance de l'origine exprimée par 0,22469, ne peut s'étendre, elle-même, de ce côté qu'à une moindre distance de l'origine.

Nous trouverons les points extrêmes de la courbe dans le sens de l'axe des $x$, en posant $dx=0$ ; ou en égalant, à zéro, le coëfficient de $dy$ dans la différentielle première de l'équation (96) ; ce qui nous donne $\left(-8xn+8n^3-10n\right)\frac{dn}{dy}=0$ (106).

Mais on a $\frac{dn}{dy}=\frac{y}{n}$ (54), ce qui réduit l'équation précédente à $\left(4n^2-4x-5\right)y=0$ (107). Cette équation se décompose en deux autres : $y=0$ (108) et $4n^2-4x-5=0$ (109.)

414. La valeur (108) étant substituée dans l'équation (96), la réduit à $x^4+2x^3+2x^2=0$ (110), équation qui donne deux valeurs nulles et deux valeurs égales à $-1$.

Ces doubles valeurs nous font voir que les points auxquels elles appartiennent sont des points multiples de la courbe. Ces solutions, quoique étrangères à la question actuelle, devaient nécessairement être comprises dans l'équation (107) ; car $dx$ est nul, non seulement pour les points dont la tangente est perpendiculaire à l'axe des $x$, mais encore pour les points multiples.

415. C'est l'équation (109) qui doit nous conduire à la solution cherchée.

Elle donne $n^2=x+\frac{5}{4}$ (111). Cette valeur substituée dans l'équation (96) la réduit à $x^2+x-\frac{1}{8}=0$ (112). D'où l'on déduit $x=\frac{1}{2}\left\{-1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$ (113).

La valeur négative de $x$ dépasse de beaucoup les limites dans lesquelles nous nous renfermons. On trouve pour sa valeur positive $x=0{,}11234$ (114.)

La tangente à la courbe, déterminée par cette équation, est représentée en B'B (fig. 6).

En substituant la valeur (111) dans l'expression de $y$ donnée par l'équation (44) du nº 336, on trouve

$y=\pm\sqrt{\frac{1}{4}-x-x^2}$ (115), d'où $y=\pm0{,}35361$ (116).

Les points de contact de la tangente B'B avec la courbe sont donnés par l'ensemble des équations (114) et (116). Nous les avons figurés en C′,C.

Leur distance à l'origine se déduit de l'équation (1), $c^2 = y^2 + x^2$, qui donne $c = 0,37102$ (117).

416. Les points de la courbe, où la tangente est parallèle à l'axe des $x$, s'obtiendront en faisant $dy = 0$ ; c'est-à-dire, en égalant à zéro le coëfficient de $dx$ déduit de l'équation (96). On arrive ainsi à l'équation : $(2x+1)n^2 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$ (118).

Si l'on élimine $n^2$ entre cette équation et l'équation (96), on trouve $4x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x = 0$ (119) ; qui peut se mettre sous la forme $x(x+1)(x+\frac{1}{2})^2 = 0$ (120).

Les valeurs de $x$, obtenues en égalant à zéro les deux premiers facteurs, correspondent aux points multiples que nous avons déjà reconnus.

Le troisième facteur égalé à zéro, donne deux valeurs, $x = -\frac{1}{2}$ (121).

Ces deux valeurs égales n'indiquent plus ici un point multiple; car elles ne correspondent plus, comme au n° 414, à une valeur donnée de $y$ ; mais à deux des valeurs de $n^2$ qui se déduiraient des équations (96) et (118).

La valeur (121), substituée dans l'équation (37), donne $n^2 = y^2 + \frac{1}{4}$ (122).

Enfin éliminant $n$ et $x$, de l'équation (96), par la substitution de leurs valeurs (121) et (122), on trouve :

$y^4 - y^2 + \frac{1}{16} = 0$ (123) d'où $y^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Nous aurons donc quatre points, correspondans à une même abscisse $x = -\frac{1}{2}$, dont les ordonnées seront des maxima. Mais la valeur positive, du radical de la dernière équation, donnerait une valeur trop grande de $y^2$, pour que nous ayons à nous en occuper. La valeur négative donne $y^2 = 0.06699$ d'où $y = \pm 0.2588$ (124).

Nous figurons en $S_1F$, $S'_1F'$, les tangentes, à la courbe, déterminées par l'équation (124). $S_1$ et $S'_1$ représentent ses points de contact, dont l'abscisse commune est égale à $-\frac{1}{2}$.

On pourrait, aisément, reconnaître plusieurs autres propriétés de la courbe. Mais elles seraient étrangères à notre objet ; et nous nous sommes déjà laissé entraîner, dans cette discussion, au-delà du strict nécessaire. Il nous suffira de déterminer encore quelques points de la courbe.

417. Si l'on combine l'équation (37) et l'équation (1), on trouve : $n^2 = c^2 + 2x + 1$ (125).

En substituant cette valeur de $n^2$, dans l'équation (96), elle prend la forme suivante : $3x^2 + 4c^2x + 2c^4 - c^2 = 0$ (126), d'où l'on déduit : $x = \frac{1}{3}\left\{-2c^2 \pm c\sqrt{3 - 2c^2}\right\}$ (127).

Cette formule est un peu plus simple que la formule (105). Mais le principal avantage que l'on trouve à l'employer, c'est de déterminer, à la fois, pour $x$, deux valeurs utiles ; tandis que, toujours, l'une des deux valeurs, données par l'équation (105), sort des limites entre lesquelles nous voulons suivre la courbe.

La valeur de $y$ sera donnée par la formule $y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$ (128), qui se déduit des équations (125) et (44). On peut la mettre sous la forme $y = \pm\sqrt{(c-x)(c-x)}$ (129), afin de faciliter l'emploi des logarithmes.

418. Au moyen de ces formules, nous avons déterminé les systèmes suivans de coordonnées, en nous donnant les valeurs de $c$.

*Pour le côté des $x$ positifs.*

No 1, $c = 0{,}1$, $x = 0{,}0509$, $y = \pm 0{,}0861$ ;
No 2, $c = 0{,}1727$, $x = 0{,}0788$, $y = \pm 0{,}1537$ ;
No 3, $c = 0{,}5$, $x = 0{,}0967$, $y = \pm 0{,}4905$.

*Pour le côté des $x$ négatifs.*

No 4, $c = 0{,}1$, $x = -0{,}0642$, $y = \pm 0{,}0767$ ;
No 5, $c = 0{,}1727$, $x = -0{,}1186$, $y = \pm 0{,}1255$ ;
No 6, $c = 0{,}5$, $x = -0{,}4302$, $y = \pm 0{,}2548$.

Ces points, et ceux pour lesquels nous avons déterminé les tangentes, suffisent pour tracer la courbe d'une manière très approximative. Nous l'avons représentée $MSOS'_1$, $S'OS_1$ (fig. 6).

419. Le point n° 2 ci-dessus est à la même distance du point O que le point n° 3 de la courbe d'éloignement nul, (tableau du n° 367). Il a une abscisse plus petite et une ordonnée plus grande.

Les mêmes observations s'appliquent au point n° 3 ci-dessus, comparé au point n° 5 de la courbe d'éloignement nul.

D'où nous conclurons que la branche positive, de la courbe considérée, est comprise entre l'axe des $y$ et la branche correspondante de la courbe d'éloignement nul.

420. Du côté des $x$ négatifs, les points n$^{os}$ 5 et 6, situés, sensiblement, à la même distance de l'origine, que les points 8 et 10 de la courbe d'éloignement nul, ont des abscisses d'une plus grande valeur absolue et des ordonnées plus petites. La branche négative, de la courbe considérée, est donc comprise entre l'axe des $x$ et la branche négative de la courbe d'éloignement nul.

421. Nous avons vu (n° 407), que $\frac{dE}{dc}$ est positif pour tous les points de l'axe des $x$ et négatif pour tous ceux de l'axe des $y$.

Or, cette quantité ne peut changer de signe sans que le point, auquel elle appartient, traverse la courbe sur laquelle elle est nulle. Elle sera donc positive dans les deux angles curvilignes $SOS'$, $S_1OS'_1$, et négative dans les deux angles $SOS_1$, $S'OS'_1$.

La force d'éloignement (n° 368) est positive dans les angles $HOH'$, $H_1OH_1'$ ; et négative dans les angles $HOH_1$, $H'OH'_1$.

Ces quatre angles différant peu des quatre précédens, nous avons pu dire (n° 46), pour la généralité des cas, que la force d'éloignement s'accroît, quand la masse secondaire considérée s'éloigne de la masse principale*.

## § 2. *Momens.*

422. Cherchons quels changemens éprouve le moment $M$,

* Nous abrégeons ici le raisonnement, qui serait le même qu'aux n$^{os}$ 391 et 392 ; ou au n° 401.

quand on fait varier la distance $c$, en laissant, constantes, les quantités $r$ et $v$.

La valeur de $M$ est donnée par l'équation (24) du nº 316.

En la différentiant, par rapport à $c$, nous trouvons :

$$\frac{dM}{dc}=m\sin v\left\{\frac{1}{r^2}-\frac{r}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}+3\frac{r(c^2+cr\cos v)}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}\right\} \quad (130).$$

423. Nous pouvons, comme au nº 317, supposer $\sin v$ positif.

Si $\cos v$ est positif, la différence, $\frac{1}{r^2}-\frac{r}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}$, est positive, (nº 318). Or le dernier terme du facteur trinome est évidemment positif. Ce facteur, et, par suite, $\frac{dM}{dc}$, seront donc eux mêmes positifs.

Cette proposition ne cesse pas d'être vraie quand $\cos v=0$.

Si $\cos v$ est négatif et égal à $-1$, $\sin v$ étant supposé infiniment petit (comme au nº 319 ; l'équation (130) deviendra :

$$\frac{dM}{dc}=m\sin v\left\{\frac{1}{r^2}-\frac{r}{(r-c)^3}-\frac{3rc}{(r-c)^4}\right\} \quad (131).$$

Déjà la différence $\frac{1}{r^2}-\frac{r}{(c-r)^3}$ est négative, (nº 319). Donc, a fortiori, on obtiendra un résultat négatif, en en retranchant la quantité $\frac{3rc}{(c-r)^4}$, qui est positive.

Ainsi $\frac{dM}{dc}$ est négatif pour les points infiniment voisins de l'axe des $x$ négatifs.

424. En prenant toujours $r$ pour l'unité, l'équation $\frac{dM}{dc}=0$ conduit précisément aux équations (60) et (61) du nº 371.

Ainsi $\frac{dM}{dc}$ devient nul, sur les mêmes lignes où la force d'éloignement est à son maximum où à son minimum, c'est-à-dire, sur l'axe des $x$ et sur la courbe d'éloignement minimum.

Cette courbe est déjà représentée en U'OV', (fig. 6). Nous la traçons aussi, à la fig. 5, où le cercle des momens nuls est représenté en UOV.

425. Nous avons vu (nº 372), que cette courbe, de même que le cercle, a, pour tangente à l'origine, l'axe des $y$.

Nous avons indiqué, au tableau du nº 374, plusieurs systèmes de coordonnées de la courbe U'OV'.

Si au moyen de la formule (78) du nº. 388, nous cherchons pour le cercle, les abscisses correspondantes aux ordonnées calculées pour la courbe, nous trouvons :

Nº 1, $y=0{,}06312$, $x=-0{,}00199$;
Nº 2, $y=0{,}14001$, $x=-0{,}00985$;
Nº 3, $y=0{,}16500$, $x=-0{,}01371$;
Nº 4, $y=0{,}19604$, $x=-0{,}01940$;
Nº 5, $y=0{,}36914$, $x=-0{,}07063$;
Nº 6, $y=0{,}45960$, $x=-0{,}11187$;

La comparaison, de ce tableau, avec celui du nº 374, fait reconnaître, que, pour les mêmes ordonnées, toutes les abscisses du cercle sont inférieures à celles de la courbe. Ce cercle est donc intermédiaire entre la courbe et l'axe des $y$; ou, autrement, la courbe est intérieure au cercle.

426. La quantité $\frac{dM}{dc}$ ne peut changer de signe sans que le point, auquel elle appartient, traverse l'axe des $x$ ou la courbe U'OV'; puisque ces deux lignes sont les seules pour lesquelles cette quantité soit nulle.

Nous avons vu, d'ailleurs (nº 423), que $\frac{dM}{dc}$ est positif dans l'angle YOX, il le sera donc dans tout l'espace V'OX. Nous avons vu, aussi, que cette quantité est négative, pour le côté des $y$ positifs, dans le voisinage de l'axe des $x$ négatifs; elle sera donc négative dans tout l'espace V'OA.

Le moment $M$ (nº 323), est positif, depuis l'axe des $x$ positifs, jusqu'au cercle des momens nuls, OV ; et négatif, depuis ce cercle, jusqu'à l'axe des $x$ négatifs.

Les espaces VOV', UOU', sont donc les seuls où les quantités $M$ et $\frac{dM}{dc}$ ne soyent pas de même signe.

427. Ainsi un accroissement de $c$ fera croître la valeur absolue du moment, sauf, dans l'intervalle des deux courbes UOV, U'OV', qui ont même tangente à l'origine.

Nous pouvons, négliger ce faible intervalle, où les momens, toujours peu considérables, ont peu d'influence sur les mouvemens définitifs ; et regarder (nº 46), le moment comme s'accroissant, en général, par l'éloignement de la masse secondaire considérée.

Réciproquement le moment décroît, en général, quand la distance, $c$, diminue.

## § 3. *Force accélératrice angulaire.*

428. Nous voulions (nº 46), nous dispenser de chercher quel changement, apporte à la force accélératrice angulaire, l'accroissement de la distance $c$. Mais, la solution de cette question pouvant contribuer à éclaircir quelques parties de cet ouvrage, nous nous déterminons, pour y arriver, à ajouter, encore, de nouveaux calculs, à ceux que nous avons déjà faits.

429. Soit $z$ la vitesse angulaire de la masse secondaire considérée ; $dz$ l'accroissement que reçoit, cette vitesse, pendant un instant infiniment petit $dt$ ; $\frac{dz}{dt}$ exprime la quantité, que nous avons désignée sous le nom de force accélératrice angulaire, et que, pour abréger, nous représenterons par $F$.

Cette force est le quotient, du moment de la force motrice totale qui agit sur la masse secondaire considérée, par le moment d'inertie de cette masse ; le moment, et le moment d'inertie, étant pris l'un et l'autre par rapport au point O.

Soit $m'$ la masse du corps secondaire considéré.

En supposant toujours cette masse réunie à son centre de gravité, son moment d'inertie sera exprimé par $m'c^2$. Le moment, que nous avons représenté par $M$, est le moment de la force accélératrice qui sollicite cette masse. Le moment de sa force motrice sera $Mm'$. On aura donc

$$F=\frac{Mm'}{c^2m'}, \text{ ou } F=\frac{M}{c^2} \quad (132).$$

430. La différentiation de l'équation (132) donne :

$$\frac{dF}{dc}=\frac{1}{c^2}\left\{\frac{dM}{dc}-2\frac{M}{c}\right\} \quad (133).$$

En substituant, dans cette dernière équation, les valeurs de $M$ et de $\frac{dM}{dc}$, données par l'équation (24), du n° 316, et par l'équation (130), du n° 422, elle devient :

$$\frac{dF}{dc}=\frac{m\sin v}{c^2}\left\{-\frac{1}{r^2}+\frac{r}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3r\,(c^2+cr\cos v)}{(c^2+r^2+2cr\cos v)^{\frac{5}{2}}}\right\} \quad (134).$$

431. Ne considérons, d'abord, que le côté des $y$ positifs, ce qui suppose $\sin v$ positif.

Si l'on suppose, en même temps, $\sin v$ infiniment petit, on aura $\cos v=\pm 1$.

$\cos v=1$ donne : $\frac{dF}{dc}=\frac{m\sin v}{c^2}\cdot\frac{r^4+4r^3c-(r+c)^4}{r^2(r+c)^4}$ (135),

expression évidemment négative.

$\cos v=-1$ donne : $\frac{dF}{dc}=\frac{m\sin v}{c^2}\cdot\frac{r^4-4r^3c-(r-c)^4}{r^2(r-c)^4}$, qui se

réduit à : $\frac{dF}{dc}=\frac{m\sin v}{c^2}\cdot\frac{-6r^2c^2+4rc^3-c^4}{r^2(r-c)^4}$ (136.)

$c$ étant toujours plus petit que $r$, cette expression est encore évidemment négative.

Pour $\sin v=1$, $\cos v=0$, l'équation (134) se réduit à

$$\frac{dF}{dc}=\frac{m}{c^2}\frac{r^5+4r^3c^2-(r^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}{r^2(r^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}$$ (137) ; équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{dF}{dc}=\frac{m}{c^2}\cdot\frac{(r^5+4r^3c^2)^2-(r^2+c^2)^5}{r^2(r^2+c^2)^{\frac{5}{2}}\left[r^5+4r^3c^2+(r^2+c^2)^{\frac{5}{2}}\right]} \quad (138.)$$

Dans cette dernière équation, le premier facteur du second membre et le dénominateur du second facteur, sont, évidemment positifs. Le signe de $\frac{dF}{dc}$ sera donc le même que celui du numérateur de ce second facteur. Ce numérateur se réduit à $c^2(3r^8+6c^2r^6-10c^4r^4-5c^6r^2-c^8)$, On a toujours $6c^2r^6>5c^6r^2+c^8$, puisque $r$ est plus grand que $c$. Le numérateur considéré sera donc positif si l'on a $3r^8>10c^4r^4$ ou $c<\sqrt[4]{0,3}\,r$ ou enfin $c<0,74\,r$. Or, dans tous les cas dont nous avons à nous occuper, $c$ est plus petit que $\frac{1}{2}\,r$. Donc ce numérateur, et, par suite, $\frac{dF}{dc}$, seront positifs.

En résumé $\frac{dF}{dc}$ est positif, pour l'axe des $y$ positifs, et négatif, pour tous les points, voisins de l'axe des $x$, qui sont situés du côté des $y$ positifs.

Le contraire aurait lieu, évidemment, du côté des $y$ négatifs ; puisque sin $v$ prendrait le signe —, tandis que le facteur trinome resterait le même.

432. Dans chacun des 4 angles formés par les axes des coordonnées, il doit donc exister une branche de courbe, pour laquelle $\frac{dF}{dc}$ soit nul, et qui serve de limite, entre les espaces pour lesquels cette quantité est positive et ceux pour lesquels elle est négative. Toutes ces branches seront comprises dans l'équation $\frac{dF}{dc}=0$.

Cette équation se décompense en deux autres, la première, sin $v=0$ (139) est l'équation de l'axe des $x$.

La seconde se réduit à $n^5-4n^2+3(x+1)=0$ (140).

433. Différentiant cette équation par rapport à $x$ et à $y$, nous trouvons pour l'origine des coordonnées $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$.

La différentielle seconde de cette équation donne, pour le même point, $\frac{dy}{dx}=\pm 2$ (141).

Ainsi l'origine est un point multiple de la courbe ; et les tangentes, en ce point, font, avec l'axe des $x$, des angles de 63° 26′.

434. Cherchons la limite de la courbe, dans le sens de l'axe des $x$, en posant $dx=0$. Nous arrivons à l'équation $(5n^3-8)y=0$ (142), qui se décompose en deux autres.

La valeur $y=0$, substituée dans l'équation (140), la réduit à $(x+1)^5-4(x+1)^2+3(x+1)=0$ (143). Cette équation donne, pour $x$, une valeur égale à $-1$, deux valeurs nulles, et deux valeurs imaginaires.

Les deux valeurs nulles correspondent à l'origine, qui est, comme nous l'avons vu, un point multiple de la courbe. La valeur $x=-1$ donnerait un point dont la tangente est perpendiculaire à l'axe des $x$, mais qui est trop éloigné du point O pour que nous ayons à nous en occuper.

L'équation $5n^3-8=0$ (144) donne $n=1,1696$ ; valeur qui, substituée dans l'équation (140), donne $x=0,09438$ (145). Enfin, en substituant, dans l'équation (37), ces valeurs de $x$ et de $n$, on trouve $y=\pm 0,41268$ (146).

Les deux points, déterminés par ces valeurs de $y$ et de $x$, limitent la courbe dans le sens de l'axe des $x$, et ont leur tangente commune perpendiculaire à cet axe.

435. Des équations (140) et (37), on déduit les systèmes suivans :

N° 1, $n=1,07$, $x=0,0590$, $y=\pm 0,1529$, $c=0,1639$ ;

N° 2, $n=1,1$, $x=0,0765$, $y=\pm 0,2262$ ;

N° 3, $n=1,2$, $x=0,0906$, $y=\pm 0,5007$, $c=0,3088$ ;

No 4, $n=0{,}92$, $x=-0{,}0912$, $y=\pm 0{,}1429$, $c=0{,}1695$;
No 5, $n=0{,}9$, $x=-0{,}1168$, $y=\pm 0{,}1713$;
No 6, $n=0{,}8$, $x=-0{,}2559$, $y=\pm 0{,}2938$;
No 7, $n=0{,}74$, $x=-0{,}3438$, $y=\pm 0{,}3421$, $c=0{,}5156$;

Au moyen de ces points, et de celui dont nous avons, plus haut, déterminé la tangente, nous avons tracé la courbe en $ROR'_1$, $R'OR_1$ (fig. 5). Ses tangentes à l'origine sont représentées en $TT'_1$, $T'T_1$ ; la tangente parallèle à l'axe des $y$, en D'D ; et enfin les points de contact de cette tangente avec la courbe en E', E.

436. Nous avons vu (no 431), que, du côté des $y$ positifs, $\frac{dF}{dc}$ est positif pour tous les points de l'axe des $y$, et négatif pour tous les points voisins de l'axe des $x$. Nous avons vu (no 432), que la courbe, qui vient d'être déterminée, est la limite sur laquelle $\frac{dF}{dc}$ change de signe. Cette quantité sera donc, négative, dans l'angle mixtiligne XOR (fig. 5) ; positive dans l'angle curviligne $ROR_1$ ; et enfin négative, dans l'angle $R_1OA$.

On voit, par l'équation (132), que le signe de $F$ est, dans tous les cas, le même que celui de $M$. $F$ est donc positif dans l'angle XOV, et négatif dans l'angle VOA. (fig. 5.)

$F$ diminuera, par l'accroissement de $c$, pour tous les points compris dans l'angle XOR ; puisque, pour ces points, $F$ et $\frac{dF}{dc}$ sont de signes contraires. $F$ augmentera, au contraire, par l'accroissement de $c$, dans l'angle ROV. Il diminuera, de nouveau, dans l'angle $VOR_1$ ; et enfin augmentera dans l'angle $R_1OA$.

La valeur absolue de la force variera, évidemment, suivant la même loi, du côté des $y$ négatifs.

437. L'angle XOR forme la plus grande partie de l'angle XOY ; il renferme la courbe OK sur laquelle le moment et la force accélératrice angulaire atteignent leur maximum. C'est, évidemment, sur cette courbe et dans son voisinage, que les variations, de la force accélératrice angulaire, ont le plus d'in-

fluence sur les mouvemens définitifs, puisque c'est là que la force a sa plus grande intensité.

Quand, donc, il s'agira d'une masse secondaire, qui devra, successivement, occuper toutes les positions angulaires, dans l'espace XOY ; nous pourrons, négliger l'augmentation éprouvée, par la force, dans la partie, la plus petite, qui est aussi celle où cette force a le moins d'intensité ; et considérer cette même force, comme diminuant, généralement, du côté des $x$ positifs, par l'accroissement $c$.

L'angle $R_1OA$ comprend aussi la courbe des momens maxima, $OK_1$ ; cet angle forme aussi la plus grande partie de l'angle YOA, surtout quand $c$ n'est pas trop grand. Nous pourrons donc, pour le côté des $x$ négatifs, considérer la force, comme généralement croissante, par l'accroissement de $c$. Nous n'aurions à tenir compte, de la diminution qu'elle éprouve dans l'angle $VOR_1$, que dans le cas où la masse considérée s'y maintiendrait la plupart du tems.

438. Réciproquement la diminution de la distance $c$, ferait le plus généralement croître, la force accélératrice angulaire, du côté des $x$ positifs, et la ferait décroître du côté des $x$ négatifs.

**Add. IX°.**—***Point de l'orbite elliptique, correspondant à la plus grande accélération de la vitesse angulaire de translation*** (n° 67).

439. Considérons un astre qui décrit, autour d'un autre, une orbite elliptique, par l'effet de l'attraction de ce dernier et d'une vitesse précédemment acquise.

Proposons-nous de déterminer le point de cette orbite où, la vitesse angulaire de la masse attirante, reçoit les plus grandes accélérations.

D'après l'une des lois de Képler, le rayon vecteur décrit, autour de la masse attirante, des aires proportionnelles au tems. Si donc on représente par $C$ l'aire que décrit, ce rayon vecteur, dans l'unité de tems ; cette quantité $C$ sera constante, et l'aire décrite, dans un instant infiniment petit $dt$, sera exprimée par $C\,dt$.

Représentons, par $r$, la longueur du rayon vecteur, à l'instant considéré ; par $v$, l'angle de ce rayon vecteur avec la ligne menée, du centre de la masse attirante, au point de l'orbite qui en est le plus rapproché, $dv$ exprimera l'accroissement de cet angle pendant l'instant infiniment petit $dt$. L'aire décrite dans cet instant pourra être considérée comme un triangle ayant pour base l'arc $r\,dv$, et pour hauteur le rayon vecteur $r$. L'expression de cette aire sera donc $\frac{1}{2} r^2\,dv$ ; et l'on aura l'équation

$$\frac{1}{2} r^2\,dv = C\,dt, \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{2C}{r^2} \quad (1).$$

$\frac{dv}{dt}$ exprime, évidemment, la vitesse angulaire. Nous représenterons cette vitesse angulaire par $z$ et nous aurons

$$z = \frac{2C}{r^2} \quad (2).$$

440. Si nous appelons $a$ le demi-grand axe de l'orbite considérée, $e$ son excentricité ; nous aurons, pour l'équation polaire de cette orbite, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$ (3) ; d'où

$$z = \frac{2C}{a^2(1-e)^2}(1+e\cos v)^2 = K(1+e\cos v)^2 \quad (4);$$

$K$ représentant le coëfficient constant.

De l'équation (4) on déduit :

$$\frac{dz}{dt} = -2Ke(1+e\cos v)\sin v\,\frac{dv}{dt} \quad (5).$$

$\frac{dz}{dt}$ représente l'accroissement de la vitesse angulaire dans un instant infiniment petit $dt$. On obtiendra, la valeur de $v$ à laquelle correspondent les maxima ou minima de cet accroissement, en égalant à zéro la différentielle, du second membre de l'équation (5), prise encore par rapport à $t$. On arrive ainsi à l'équation :

$$\left\{(1+e\cos v)\cos v - e\sin^2 v\right\}\frac{dv^2}{dt^2} + (1+e\cos v)\sin v\,\frac{d^2v}{dt^2} = 0 \quad (6)$$

Mais $\frac{d^2v}{dt^2}$ n'est autre chose que $\frac{dz}{dt}$, dont la valeur est donnée par l'équation (5). Substituant cette valeur, dans l'équation (6), le facteur $\frac{dv}{dt}$ deviendra commun à tous les termes. Nous pourrons supprimer ce facteur qui exprime la vitesse angulaire ; car nous ne nous occupons pas du cas où elle serait nulle.

Mettant, ensuite, pour $\frac{dv}{dt}$, la valeur de $z$ donnée par l'équation (4) ; supprimant le facteur constant $K$ et opérant les réductions ; l'équation (6) devient :

$$(1+e\cos v)^2 \left\{(1+e\cos v)\cos v - 3e\sin^2 v\right\} = 0 \quad (7).$$

441. Cette équation se décompose en deux autres :

$$(1+e\cos v)^2 = 0 \quad (8) \quad \text{et} \quad (1+e\cos v)\cos v - 3e\sin^2 v = 0 \quad (9.)$$

L'équation (8) donne, une valeur de $\cos v$ plus grande que l'unité, tant qu'on suppose $e < 1$. Cette solution est donc étrangère à la question actuelle puisque nous ne considérons que le cas où l'orbite est elliptique.

L'équation (9) peut se mettre sous la forme :

$$4e\cos^2 v + \cos v - 3e = 0 \text{ ; d'où } \cos v = \frac{1}{8e}\left\{-1 \pm \sqrt{1+48e^2}\right\}$$

(10). Il est facile de voir que la valeur négative du radical ne peut convenir à la question. Car $e < 1$ donne $\sqrt{1+48e^2} > 7e$ et par suite $1+\sqrt{1+48e^2} < 8e$. La valeur négative du radical donnerait donc, pour $\cos v$, une valeur absolue supérieure à l'unité. Nous devrons donc prendre

$$\cos v = \frac{1}{8e}\left\{-1+\sqrt{1+48e^2}\right\} \quad (11).$$

442. En ne considérant que les angles inférieurs à 180°, ce cossinus correspond à deux angles égaux et de signes contraires. Il déterminera donc deux points situés l'un avant et l'autre après le périastre. Mais on sait, a priori, que la vitesse angulaire s'accroît jusqu'au périastre, où elle devient un instant constante, pour diminuer ensuite. Le maximum d'accélération ne peut donc correspondre qu'au point qui précède le périastre. L'autre point correspond au maximum de retardement. Après cette observa-

tion, nous n'avons plus à nous occuper que de la valeur absolue de l'angle $v$.

443. Les orbites que nous considérons sont très allongées et s'approchent beaucoup de la forme parabolique. Pour la parabole, on aurait $e=1$; d'où $\cos v = \frac{3}{4}$ et $v=41° \, 24' \, 35''$ (12).

Si l'on suppose $e=0$, hypothèse qui se rapporte à l'orbite circulaire; on trouve $\cos v = \frac{0}{0}$. Dans le cercle, en effet, où la vitesse angulaire est constante, et où l'accroissement de cette vitesse est nulle ; cet accroissement peut, pour tous les points, être considéré comme à son maximum ou à son minimum. Cependant il doit y avoir une valeur dont s'approche, de plus en plus l'angle $v$, à mesure que l'excentricité diminue. Pour trouver cette limite, il faut mettre en évidence le facteur $e$, commun aux deux termes de la valeur de $\cos v$. C'est ce que nous ferons en multipliant ces deux termes par $1+\sqrt{1+48e^2}$. L'équation (11) devient ainsi : $\cos v = \frac{-1+1+48e^2}{8e\left\{1+\sqrt{1+48e^2}\right\}}$, qui se réduit à $\cos v = \frac{6e}{1+\sqrt{1+48e^2}}$. Cette dernière valeur donne $\cos v=0$ quand on y fait $e=0$.

Ainsi, pour des excentricités très faibles, le maximum d'accélération correspond, à très peu près, à l'angle de 90°.

L'angle que nous cherchons est donc compris entre 90° et 41° 24' 35". Mais il est beaucoup plus voisin de cette dernière valeur que de la première ; puisque l'orbite, considérée, est très allongée.

Si l'on supposait $e=0{,}99$, on trouverait $v=41° \, 30' \, 11''$. Si l'on prenait $e=0{,}9$ on aurait $v=42° \, 25' \, 17''$.

Nous avons donc pu (nº 67), adopter, pour les orbites très excentriques, l'angle de 42°, comme correspondant, approximativement au maximum d'accélération de la vitesse angulaire.

Add. X.—*Changement qu'éprouve la distance périastre, par l'augmentation de l'aire, décrite dans un tems donné,* (nº 131).

444. Nous supposons qu'un astre, se mouvant dans une orbite très-allongée, ait reçu, près de son apastre, une accélération qui n'ait pas changé la direction de son grand axe; et nous cherchons quel changement doit en éprouver sa distance périastre.

Appelons $a$ le demi grand axe, $b$ le demi petit axe; l'aire totale de l'orbite sera exprimée par $\pi ab$.

Si nous nommons $q$ l'aire décrite dans l'unité de tems, et $t$ la durée totale de la révolution, nous aurons $t = \frac{\pi ab}{q}$ (1).

Dans toutes les variations que peut éprouver l'orbite, les carrés des tems des révolutions restent proportionnels aux cubes des grands axes. Nous aurons donc $t^2 = Ca^3$ (2); $C$ représentant une quantité constante.

Des équations (1) et (2), on déduit $Caq^2 = \pi^2 b^2$ (3).

Mais on sait que, dans l'ellipse, le demi petit axe est une moyenne proportionnelle entre les distances d'un foyer aux deux extrémités du grand axe. Nommant $D$ la distance apastre, et $d$ la distance périastre, nous aurons donc $b^2 = D\,d$. On a d'ailleurs $2\,a = D + d$.

En substituant ces deux valeurs dans l'équation (3), on trouve

$$d = \frac{C}{2\,\pi^2} \cdot \frac{D+d}{D} q^2 \quad (4).$$

Or, dans une orbite très-allongée $d$ est toujours très-petit par rapport à $D$. Le rapport $\frac{D+d}{D}$ diffère donc toujours peu de l'unité; et peut, par suite, être regardé comme constant. La distance périastre est donc, sensiblement, proportionnelle au carré de l'aire décrite dans un tems donné.

Cette proposition, comme on le voit, ne suppose même pas que la distance apastre ne change pas; mais, seulement, que le grand axe conserve toujours la même direction.

**Add. XI.**—*Distances primitives des planètes au soleil.* (nº 167.)

445. On a vu que toutes les planètes, après s'être détachées du soleil, ont été, pendant un certain tems, assujetties, par l'attraction extérieure au système, à se mouvoir avec des vitesses angulaires sensiblement égales. Cette même attraction extérieure tendait à les éloigner du soleil. Considérons les, à l'époque où leur éloignement avait atteint son maximum; fesons abstraction du changement que l'aire décrite, par chacune d'elles, autour du soleil, a pu éprouver depuis lors; et calculons quels rapports devaient exister, entre ces distances maxima, pour que les distances définitives prissent, entre elles, les rapports observés aujourd'hui.

446. Soit $r$ la distance actuelle d'une planète quelconque au soleil. $\pi r^2$ représentera l'aire de son orbite actuelle que nous considérons comme circulaire. Nous appellerons $t$ la durée de sa révolution.

Au moment où la planète se trouvait à sa distance maxima que nous désignerons par $R$, la portion d'orbite, qu'elle décrivait autour du soleil, se confondait, sensiblement, avec le cercle dont l'aire totale est exprimée par $\pi R^2$. Nous représenterons, par $T$, le tems qu'elle eut employé, à décrire son orbite entière, en vertu de la vitesse angulaire qu'elle avait alors.

Les aires décrites étant supposées les mêmes aujourd'hui qu'à cette époque; les durées $t$ et $T$ sont proportionnelles aux aires totales des deux orbites. Ce qui donne $t = T\dfrac{r^2}{R^2}$ (1).

Nous savons qu'aujourd'hui, les carrés des tems des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites. On aura donc $t^2 = Cr^3$ (2); la quantité $C$ conservant la même valeur pour toutes les planètes.

447. Les équations (1) et (2) donnent

$$T^2\frac{r^4}{R^4} = Cr^3, \text{ ou } \frac{r}{R^4} = \frac{C}{T^2} \quad (3).$$

Or $T$ a la même valeur pour toutes les planètes, puisqu'elles avaient la même vitesse angulaire à l'époque antérieure considérée. Le rapport $\frac{r}{R^4}$ est donc aussi le même pour toutes les planètes.

Ainsi, d'après les hypothèses admises, les distances actuelles des planètes sont proportionnelles aux quatrièmes puissances de leurs distances, antérieures, prises à l'époque où elles avaient atteint leur maximum. Ce qui nous a permis de calculer (nº 167), une série de nombres proportionnels à ces distances antérieures.

Pour rapporter ces nombres à la même unité que ceux par lesquels nous exprimons les distances actuelles, il faudrait les multiplier par un coëfficient inconnu, puisqu'il dépend de $T$, mais qui serait évidemment très-grand.

### Add. XII.—*Masses relatives.* (nº 181).

448. La masse de Jupiter étant exprimée par un billion, les masses de ses satellites successifs, en commençant par le plus éloigné, sont exprimées par les nombres 42659, 88497, 23235, 17328. (Ast. d'Herschell).

Ces masses suivent, comme on le voit, une progression, tout-à-fait analogue à celle des masses planétaires, et qui se conçoit de la même manière.

Une première masse se détache avec un grand volume, mais une faible densité. La seconde, quoique formant une partie moins étendue de la masse vaporeuse de Jupiter, produit au total une masse plus forte. Enfin, cette planète, dépouillée de ses parties les plus excentriques, ne peut plus abandonner que des parcelles, dont l'excédent de densité ne compense plus la grande infériorité des volumes, et qui donnent des masses de plus en plus faibles.

Les masses des Satellites de Saturne doivent être assujetties à une loi analogue.

### Add. XIII.—*Densité de Mercure.* (nº 187).

449. La cause générale, qui tend à faire croître la densité des planètes à mesure qu'elles sont plus voisines du soleil, ne paraît pas suffisante pour expliquer la grande supériorité de la

densité de Mercure sur celle de Vénus et de la Terre. On doit attribuer, cette supériorité, à la même cause qui a privé notre satellite de son atmosphère (nº 191). C'est-à-dire, qu'à l'époque où la masse vaporeuse de Mercure s'est rapprochée du soleil (nº 82), cette masse était encore assez étendue, pour que son attraction centrale, sur ses parties extrêmes, fut inférieure à l'attraction que le soleil exerçait sur ces mêmes parties. Par suite, la masse de Mercure a dû restituer à celle du Soleil, ses parties les plus volatiles. Ce qui tendait, à la fois, à la priver de la totalité ou d'une partie de son atmosphère, et à augmenter sa densité définitive (183).

### Add. XIV.—*Anneaux* (nº 196).

### § I.

450. Si des anneaux se sont formés autour d'un astre nébuleux en rotation, et s'ils se sont rompus, ils ont dû former, autour de cet astre, des planètes ou des satellites. Peut être même la rupture d'un même anneau aurait-elle pu former, à la fois, une planète, de sa partie principale, et des satellites, de ses plus petites parties.

On pourrait aisément démontrer, et Laplace a démontré sans doute, que cette formation, attribuée à notre système solaire, conduirait, aussi, à des mouvemens de rotation et de translation dirigés tous dans le même sens, comme ils le seraient évidemment dans le même plan, ou du moins à peu près.

451. Mais cette explication suppose un mouvement de rotation préexistant, soit dans le soleil, soit dans la planète autour de laquelle un anneau se serait formé.

Ce mouvement admis, on ne voit pas pourquoi ces anneaux, une fois formés, se seraient rompus : La condensation accroît la vitesse angulaire de rotation, suivant une progression très rapide ; et, sauf des cas exceptionnels, une grande vitesse angulaire de rotation, ne doit coïncider, dans un astre, qu'avec une condensation déjà très avancée. Cet astre, alors soumis à une puissante attraction centrale, s'il ne s'est déjà en grande partie liquéfié, doit au moins ne plus conserver les traces de son irrégularité primitive : Sa substance doit s'être distribuée par couches concentriques sensiblement homogènes. Les anneaux, abandonnés à leur équateur, doivent, eux-mêmes, être homogènes. Leur rupture ne pourrait donc se concevoir que par des causes accidentelles, des chocs, par exemple; et l'explication deviendrait tout-à-fait hypothétique.

Si, néanmoins, on admettait la possibilité de cette rupture, une question resterait encore à examiner. Les vitesses actuelles de rotation, du soleil et des planètes, peuvent-elles se concilier avec l'hypothèse d'une vitesse antérieure assez grande pour que la formation des anneaux devînt possible? C'est cette question que nous nous efforcerons d'éclaircir dans les paragraphes suivans.

## § 2. *Calcul du rapport actuel de la force centrifuge à l'attraction à l'équateur des planètes et du soleil.*

452. Pour simplifier les calculs, nous supposerons, sphériques, les astres considérés; hypothèse qui s'écarte peu de la vérité.

Soyent, pour un quelconque de ces astres, $f$ la force centrifuge à l'équateur, $v$ la vitesse absolue de cet équateur, $z$ la vitesse angulaire générale, $m$ la masse de l'astre, $a$ l'attraction qu'elle exerce sur un point de sa surface, $d$ sa densité, $r$ le rayon du globe, et, enfin, $t$ la durée de sa rotation autour de son axe.

453. Nous ferons d'abord abstraction, dans les calculs, de tous les coëfficiens constans; de sorte que nous égalerons, entre elles, les quantités proportionnelles. Mais nous restituerons, ensuite, dans le résultat, un coëfficient constant, qui remplacera le produit des coëfficiens négligés.

Nous aurons, ainsi, pour un point situé à l'équateur d'un astre quelconque, les équations suivantes.

$$f = \frac{v^2}{r}, \quad v = rz, \quad \text{d'où} \quad f = rz^2 \quad (1).$$

$$z = \frac{1}{t}, \quad \text{d'où} \quad f = \frac{r}{t^2} \quad (2).$$

$$a = \frac{m}{r^2} \quad (3), \quad m = r^3 d, \quad \text{d'où} \quad a = rd \quad (4).$$

et $\dfrac{f}{a} = \dfrac{1}{dt^2}$ (5).

Enfin, si nous appelons $C$ le coëfficient constant qui doit multiplier la valeur du rapport $\dfrac{f}{a}$, nous aurons $\dfrac{f}{a} = \dfrac{C}{dt^2}$ (6).

454. Si nous prenons, pour unité de densité, celle de la terre, et, pour unité de tems, la durée de la rotation terrestre, c'est-à-dire, 0,997 du jour; la valeur numérique de $C$, deviendra celle que prend, le rapport $\dfrac{f}{a}$, à l'équateur terrestre; que l'on sait être égale à $\dfrac{1}{289}$.

Ainsi, la formule $\dfrac{f}{a} = \dfrac{1}{289\,dt^2}$ exprime, le rapport de la force centrifuge à l'attraction à l'équateur de chaque planète, en fonction de sa densité et de la durée de sa rotation; quantités que nous connaissons pour toutes les planètes.

## § 3. *Variation du rapport de la force centrifuge à l'attraction dans une masse qui se condense.*

455. Nous supposons, dans le calcul suivant, qu'aucune force extérieure ne vienne plus faire varier la somme des aires décrites par les molécules de la masse considérée, autour de son axe de rotation.

Nous ferons, en même tems, abstraction de toute cause par laquelle une partie des momens acquis pourrait se transmettre de molécule à molécule. Ainsi, l'aire décrite par chaque molécule restera, elle-même, constante, dans les condensations successives de la masse.

456. Soit $q$ l'aire constante décrite, dans l'unité de tems, par une molécule équatoriale de l'astre considéré.

Nous conservons, du reste, les notations du paragraphe précédent; mais les quantités $r$, $z$, $f$ et $a$ sont devenues, variables, pour un même globe.

$rz$ exprime la vitesse absolue de la molécule considérée, ou l'espace qu'elle parcourt dans l'unité de tems. On aura donc

$r^2 z = 2q$. (8), d'où $z = \frac{2q}{r^2}$ (9).

En substituant cette valeur dans l'équation (1),

on a $f = \frac{4q^2}{r^3}$ (10).

Les équations (10) et (5) donnent $\frac{f}{a} = \frac{4q^2}{m} \frac{1}{r}$, ou, en représentant par $k$ le coëfficient constant, $\frac{f}{a} = \frac{k}{r}$ (11).

Ainsi, dans une masse donnée, qui se condense, le rapport de la force centrifuge à l'attraction, pour les molécules de l'équateur, varie en raison inverse du rayon de cette masse.

§ 4. *Rapport de la vitesse angulaire antérieure, à celle qui eut été nécessaire pour la formation des anneaux.*

457. Considérons les masses vaporeuses du soleil et des planètes à l'époque où chacune d'elles s'étendait jusqu'à la masse la plus voisine ; c'est-à-dire, le soleil jusqu'à Mercure, Saturne jusqu'à son anneau, et les autres planètes jusqu'à leur satellite inférieur.

458. Pour abréger, nommons A la masse considérée, et B sa masse la plus voisine.

Nous désignerons, par R, la distance des centres de ces deux masses ; et, pour Saturne, la distance de son centre à la circonsférence moyenne de son anneau.

En considérant, comme circulaire, l'orbite de la masse B ; sa vitesse angulaire actuelle, que nous nommons $Z$, sera, évidemment, celle qui convient pour que la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction que la masse A exerce à la distance $R$. Cette vitesse angulaire est donc, aussi, celle dont aurait dûe être animée, la zone équatoriale de la masse A, pour se détacher sous la forme d'un anneau. Nous connaissons cette vitesse angulaire, par la durée de la révolution de B ; durée qui est une donnée d'observation et que nous représenterons par T.

459. Soit $z_1$, la vitesse angulaire qu'aurait eue, à l'époque considérée, en vertu de son moment actuel, une molécule de l'équateur de la masse A ; et soit $t_1$, le tems qu'elle eut employé à accomplir sa rotation autour de l'axe de cette masse. $q$ représentant l'aire constante décrite par cette molécule ; nous aurons $R^2 z_1 = 2q$ (12 ; puisque $R$ représente le rayon qu'avait alors la masse A.

L'équation 8), $r^2 z = 2q$, conviendra à l'état actuel, en réservant pour cet état, les notations des § précédens. Des équations (8) et (12), on déduit $\frac{z_1}{z} = \frac{r^2}{R^2}$ (13).

Or, les durées des rotations sont en raison inverse des vitesses angulaires ; on aura donc $\frac{t_1}{t} = \frac{R^2}{r^2}$, d'où $t_1 = \frac{R^2}{r^2} t$ (14.

On aura, par la même raison, $\frac{Z}{z_1} = \frac{t_1}{T}$ (15.) ; ce qui détermine le rapport cherché, puisque $t_1$ et $T$ sont connus.

§ 5. *Conclusion.*

460. On trouvera réunis, dans les tableaux suivans, tous les élémens qui peuvent avoir rapport à la question proposée. Nous y exprimons par $V$, les volumes actuels des planètes et du soleil, celui de la terre étant pris pour unité. Les lettres $r$, $m$, $d$, $t$, $f$ et $a$, se rapportent, aussi, à l'état actuel, et ont la même signification qu'au § 2. $R$, $T$, $t_1$, $Z$ et $z_1$, ont la signification que nous leur assignons au § 4.

Les quantités $\frac{f}{a}$ et $t_1$ sont calculées au moyen des formules (7) et (14). Les autres quantités, ou se trouvent dans les ouvrages d'astronomie, ou se déduisent, par de simples opérations d'arithmétique, des données qu'on peut y puiser.

| | $r$ | $V$ | $m$ | $d$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Le Soleil . . | 110 | 1328460 | 354936 | 0,267 | 25,58 |
| Mercure. . . | 0,39 | 0,059 | 0,175 | 2,954 | 1,003 |
| Venus. . . . | 0,97 | 0,913 | 0,883 | 0,968 | 0,976 |
| La Terre . . | 1,00 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| Mars. . . . . | 0,56 | 0,177 | 0,132 | 0,754 | 1,030 |
| Jupiter . . . | 11,6 | 1470 | 337,9 | 0,230 | 0,415 |
| Saturne. . . | 9,61 | 887,2 | 101,1 | 0,114 | 0,429 |
| Uranus . . . | 4,26 | 77,50 | 19,81 | 0,256 | » |
| La lune. . . | 0,27 | $\frac{1}{49}$ | 0,01537 | 0,753 | 27,40 |

| | $\frac{f}{a}$ | $\frac{R}{r}$ | $T$ | $t_1$ | $\frac{t_1}{T}$ ou $\frac{Z}{z_1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Le Soleil . . | 0,00002 | 83,30 | 88,25 | 177476 | 2012 |
| Mercure. . . | 0,0012 | » | » | » | » |
| Venus. . . . | 0,0038 | » | » | » | » |
| La Terre . . | 0,0035 | 59,96 | 27,40 | 3595 | 131,2 |
| Mars . . . . | 0,0046 | » | » | » | » |
| Jupiter . . . | 0,0874 | 6,049 | 1,774 | 15,19 | 8,560 |
| Saturne. . . | 0,1651 | 1,855 | 0,437 | 1,477 | 3,380 |
| Uranus . . . | » | 13,120 | 5,910 | » | » |

461. On voit, par le tableau qui précède, que le rapport de la force centrifuge à l'attraction, $\frac{f}{a}$, est aujourd'hui bien faible à l'équateur de la plupart des planètes et surtout du soleil. On voit que, même pour Saturne, il n'est que d'environ un sixième.

L'équation (11), du n° 456, nous montre que, en supposant les momens antérieurs égaux aux momens actuels, le rapport $\frac{f}{a}$ aurait varié, dans chaque globe, en raison inverse de son rayon. D'où il résulterait que, dans les astres où la force centrifuge est aujourd'hui inférieure à l'attraction, elle n'aurait pu, a fortiori, lui faire équilibre, quand leur masse était plus dilatée.

La formation des anneaux eût donc été impossible dans le soleil et dans toutes les planètes.

462. L'existence de l'anneau de Saturne prouve donc', à postériori, que la vitesse angulaire, de la zone dont il s'est formé, était, notablement supérieure, à la vitesse angulaire moyenne des molécules qui ont constitué la planète ; molécules dont le moment total n'a pu varier depuis la formation de l'anneau, puisque la masse avait alors, nécessairement, déjà perdu sa forme allongée.

Nous avons vu, a priori nº 99), qu'un excédent de vitesse angulaire avait dû se manifester, en effet, dans la zone équatoriale, non-seulement de Saturne, mais des autres planètes et du soleil ; à l'époque où ces astres ont passé, de la forme de sphéroïdes allongés, à celle de sphéroïdes applatis vers les pôles.

463. La formation des anneaux, possible par cette cause, devient, cependant, invraisemblable, quand elle suppose, à la vitesse angulaire de la zone équatoriale, une trop grande supériorité sur la vitesse angulaire moyenne du reste de la masse.

On trouve, au tableau précédent, le rapport $\frac{Z}{z_1}$, qui aurait dû exister, entre ces deux vitesses, pour que les masses nébuleuses du soleil et des planètes pussent abandonner, sous forme d'anneau la masse la plus voisine. Nous y voyons qu'il devait être, de 3,38 pour que Saturne abandonnât son anneau ; qu'il aurait dû être de 8,56 pour que Jupiter abandonnât, sous forme d'anneau, son satellite inférieur ; de 131 pour que la Lune fût, de même, abandonnée par la Terre ; et enfin de 2012 pour que Mercure fût abandonné par le Soleil.

464. La vitesse angulaire de chaque molécule variant en raison inverse du carré de sa distance au centre ; on conçoit, aisément, que le raccourcissement des masses vaporeuses allongées ait triplé ou quadruplé la vitesse angulaire des molécules qui provenaient de ses extrémités. Ainsi la formation de l'anneau de Saturne, prouvée par le fait, est, en même tems, tout-à-fait, vraisemblable.

On pourrait, encore, sans trop d'invraisemblance, supposer que la masse de Jupiter eût été assez allongée pour que son raccourcissement eût rendu, 8 à 9 fois plus grande, la vitesse angulaire de ses molécules extrêmes.

Mais il est tout-à-fait invraisemblable que la vitesse angulaire de la zone équatoriale ait jamais égalé, pour la Terre, 131 fois, et pour le Soleil, 2012 fois, la vitesse angulaire moyenne du reste masse. On ne peut donc admettre que la Lune ou Mercure ayent été originairement des anneaux. On trouverait, encore, un bien plus haut degré d'invraisemblance, si l'on voulait appliquer, l'hypothèse des anneaux, à la formation des planètes ou des satellites supérieurs.

465. Au contraire, on conçoit parfaitement que des parties se soyent détachées des différentes masses allongées, parce que les différences d'attraction concouraient avec la force centrifuge pour étirer ces masses de plus en plus.

Add. XV. — *Explication de la planche 2e relative à l'établissement des mouvemens célestes* (no 64).

§ Ier. *Rotation de la masse principale.*

La planche 2e représente les positions et les états successifs d'un système planètaire en formation.

A—centre de la masse prédominante placée à l'un des foyers de l'orbite décrite par la masse solaire.

On a tracé, en lignes ponctuées, les rayons vecteurs menés du point A aux centres successifs de cette masse, et les directions successives de son grand diamètre. Nous nommons, *écartement*, l'angle formé par ces deux droites.

1 —Masse solaire, encore à l'état de nébulosité irrégulière, mais déjà en mouvement dans son orbite elliptique (no 64).

2 —Cette masse commence, à se régulariser, sous l'influence de son attraction centrale ; et, à s'allonger, vers A, par l'effet de l'attraction de ce point.

3 —Son grand diamètre, écarté du rayon vecteur par le mouvement de translation, tend à en être rapproché par l'attraction de la masse prédominante, A. Ce qui imprime à la masse solaire un commencement de mouvement autour de son centre. Ce mouvement a évidemment lieu dans le même sens que le mouvement de translation. Ils ont lieu l'un et l'autre de droite à gauche, par rapport à deux observateurs placés, au-desus du plan de la figure,

l'un au point A, et l'autre au centre de la masse solaire. Ces mouvemens auraient lieu, tous les deux, de gauche à droite, si ces observateurs étaient renversés.

Dans les positions suivantes, la masse solaire continue à s'allonger ; tout en se condensant, par l'effet combiné de son attraction et de ses pertes de calorique. Ces pertes n'empêchent pas sa température de s'accroître. (nº 15.)

En même tems, l'écartement s'accroît, par l'accélération de la vitesse de translation, malgré l'accélération que reçoit elle-même la vitesse de rotation ; parce que la force, qui détermine cette rotation, est très-faible tant que l'écartement est lui-même peu considérable.

7.—point de l'orbite, le plus rapproché de A, et que nous nommons *périastre*.

La vitesse angulaire de rotation continuant à s'accroître au-delà du périastre ; tandis que la vitesse absolue, et, à fortiori la vitesse angulaire de translation vont en diminuant, l'écartement ne tarde pas à décroître. Il devient nul en une certaine position, 9 ; et commence, ensuite, à avoir lieu en sens opposé.

10 —L'attraction du point A, qui tend toujours à rapprocher le grand diamètre du rayon vecteur, fait perdre à la rotation une partie de son moment. Mais cette attraction, déjà affaiblie par l'éloignement, ne peut détruire la totalité de ce moment, acquis depuis l'origine du mouvement. Elle n'empêchera donc pas le grand diamètre d'arriver à la position perpendiculaire au rayon vecteur, 11.

A mesure qu'il s'en approche, l'attraction du point A, qui tend à allonger la masse solaire suivant le rayon vecteur, diminuera la longueur de ce grand diamètre. Si la forme allongée disparaissait, dès lors, tout-à-fait, la rotation de la masse solaire conserverait ensuite son moment acquis. Mais il doit falloir des tems considérables pour changer, entièrement, la forme d'une masse immense, telle que le Soleil à l'état nébuleux. Il est donc vraisemblable que l'allongement subsistera, encore, dans un certain nombre des positions suivantes.

Dès que le grand diamètre a dépassé la position perpendiculaire au rayon vecteur, son moment de rotation reçoit de nouveaux accroissemens pour décroître, plus tard, de nouveau.

Enfin, après un certain nombre d'accroissemens et de décroissemens alternatifs et de moins en moins sensibles ; les différences des attractions exercées, par la masse A, sur les différens points de la masse solaire, deviennent tout-à-fait négligeables. La masse solaire prend, alors, la forme d'un sphéroïde aplati vers ses pôles et renflé vers son équateur, 13.

On a figuré, dans les positions 12 et 13, un noyau liquide commençant à se former.

§ 2. *Uranus.*

1.—Traînée, accidentelle, semblable à celles qu'on observe dans plusieurs nébuleuses irrégulières, et dont l'existence, dans la masse solaire, nous est révélée par le mouvement rétrograde des satellites d'Uranus ; mouvement qui suppose, dans la planète elle-même, un mouvement de rotation contraire à celui du Soleil.

Cette traînée se trouve du côté le plus voisin de A, et à droite du rayon vecteur par rapport à l'observateur placé en ce point. Sa direction est à-peu-près perpendiculaire à ce rayon vecteur. Elle se prolonge, d'ailleurs, dans l'intérieur de la masse, suivant une direction quelconque.

2 —La direction de cette traînée se rapproche du rayon vecteur, par le concours du mouvement général de translation et de l'attraction du point A. Ce qui commence, pour elle, le mouvement inverse dont nous venons de parler.

3.—Son mouvement a continué dans le même sens. Elle commence à se détacher de la masse solaire ; par suite de l'attraction de ce point qui agit plus fortement sur elle que sur le centre de la masse solaire.

Cette traînée se divise, par cette même différence d'attraction, et par la force centrifuge qui résulte de sa rotation. Les parties, qu'elle abandonne et qui doivent former ses satellites, ont acquis des mouvemens de translation et de rotation dirigés dans le même sens que la rotation de cette masse elle-même ; et, par conséquent, en sens inverse de celui du soleil.

Nous ne figurons plus ces satellites dans les positions suivantes.

4 —La direction de cette traînée est devenue à peu près per-

pendiculaire au rayon vecteur. Elle a éprouvé un raccourcissement considérable, tant, par l'effet de sa propre attraction qui tendait à lui imprimer la forme sphérique, que par les attractions combinées, du soleil et de la masse A, qui tendaient à l'allonger suivant une autre direction.

Ces forces ont concouru à la condenser et à la régulariser. Son raccourcissement qui tendait augmenter sa vitesse angulaire, l'a au moins empêché de perdre entièrement, le moment de rotation qu'elle avait primitivement acquis.

On la voit, dans les positions suivantes, continuant à se raccourcir pour prendre définitivement la forme d'un sphéroïde de révolution autour de son axe.

### § 3. *Planètes normales.*

4.—Une nouvelle portion de la masse solaire commence à se détacher, par le concours, 1º De la force centrifuge ; 2º De la différence des attractions que le point A exerce sur elle et sur le centre de la masse ; 3º Enfin de la vitesse d'éloignement que cette partie a déjà acquise, par l'allongement progressif de la masse solaire.

5 —La nouvelle masse se régularise, par l'effet de son attraction ; et commence à s'allonger par les mêmes causes qui l'ont détachée.

Déjà, avant sa séparation, elle avait acquis un mouvement de rotation autour du centre de la masse solaire ; ce qui lui constitue, ensuite, un mouvement de translation autour du même point, et un mouvement de rotation autour de son propre centre.

Les attractions combinées, du point A et de la masse solaire, tendent à rapprocher, du rayon vecteur, la nouvelle masse, ce qui augmente sa vitesse de translation.

Ces accélérations continueront jusqu'à une certaine position, 9.

10.—Les momens de rotation et de translation sont diminués sans pouvoir être complètement annulés ; parce que l'attraction de A est déjà en pleine décroissance. La nouvelle masse se raccourcit. Son allongement devient, ensuite, de moins en moins prononcé, et finit par disparaître tout-à-fait.

Les autres planètes, qui se détachent, sont soumises aux mêmes influences, et acquièrent les mêmes mouvemens.

Enfin, quand l'attraction de la masse A devient insensible ; les aires décrites, par chaque planète, deviennent constantes ; et quel que soit le moment conservé, par chacune d'elles, elles doivent se placer à des distances telles que les carrés des tems de leurs révolutions soyent proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites,

N'arrivant pas à ces distances, par un rapprochement brusque, mais après une série de rapprochemens et d'éloignemens de plus en plus faibles, elles doivent décrire des orbites peu allongées.

### § 4. *Planètes télescopiques.*

Dans une masse nébuleuse, la rupture ne peut présenter une surface régulière. Si la masse détachée est très forte, la rupture s'opérera, nécessairement, assez loin de l'extrémité pour que la surface de rupture ait un grand diamètre ; et cette large surface pourra présenter plusieurs saillies considérables comme on l'a figuré à la position 4.

Ces saillies se détachant, ensuite, à peu près en même tems, formeront de très petites planètes dont les orbites auront ensuite des diamètres peu différens. Nous les représentons au nombre de quatre à partir de la position 5.

### § 5. *Trainées intermédiaires entre les planètes.*

La rupture ne pouvait même pas s'opérer, complètement, dans la masse vaporeuse. Des parties, intermédiaires entre la masse principale et la planète qui se formait, soumises à des forces intermédiaires aussi, s'étiraient à la manière des substances visqueuses. D'où sont résultées de légères traînées, liant chaque planète, d'abord au Soleil, puis à la planète qui la suivait. Ces traînées sont représentées dans les diverses positions du système planétaire. On verra plus tard (nos 225 et suivans), ce qu'elles sont devenues.

### § 6. *Satellites.*

Chaque planète, par son allongement progressif, peut finir par abandonner, elle-même, à ses extrémités, plusieurs parties qui formeront ensuite des satellites.

Ces satellites acquierrent, encore, des mouvemens de translation et de rotation dirigés dans le même sens que ceux de la masse solaire. Éprouvant, ensuite, une plus grande accélération que les planètes, dans leurs vitesses angulaires de translation ; éprouvant, d'ailleurs, une moins grande accélération dans leurs vitesses de rotation ; ils peuvent conserver l'égalité de ces deux vitesses.

(L'étendue de la figure n'a pas permis d'y représenter les satellites.)

### § 7. *Anneaux.*

10 et 11.—Les extrémités du sphéroïde allongé devancent, dans leur mouvement de rotation, les parties centrales de la masse solaire, par suite de l'accélération qu'elles éprouvent en se rapprochant du centre. Leurs molécules, devront, nécessairement se répartir, ensuite, sur l'équateur ; et la zone équatoriale pourra conserver, pendant un certain tems, une vitesse très-supérieure à celle du reste de la masse.

Si, par les progrès de la condensation, cette zone acquiert une force centrifuge suffisante pour faire équilibre à l'attraction, elle cessera de suivre le reste de la masse dans ses condensations ultérieures, et sera abandonnée sous forme d'anneau.

Le même phénomène peut également se produire dans la masse principale et dans les masses secondaires.

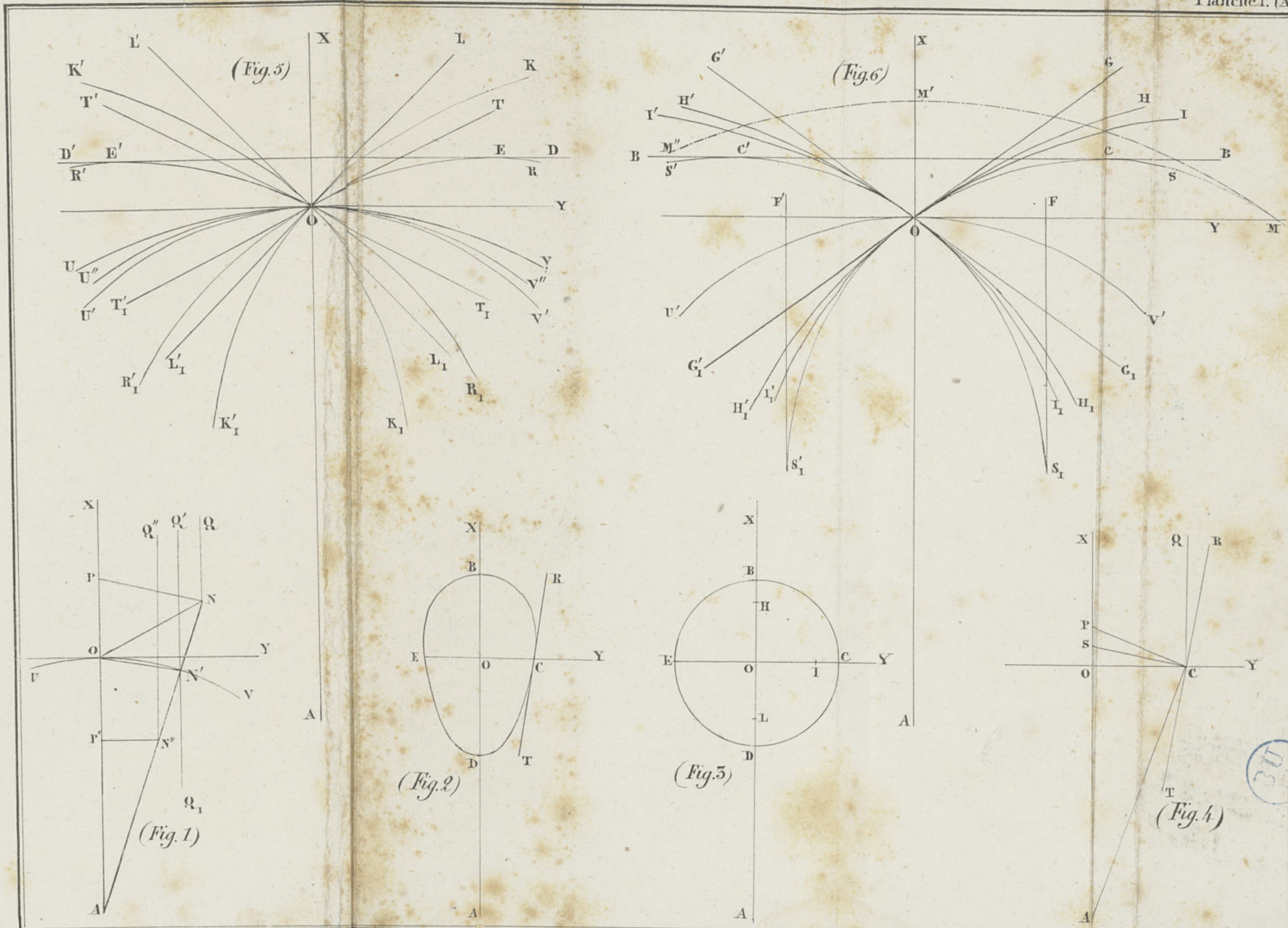
Nota. *Les propositions, qui ne sont ici qu'énoncées, se trouvent démontrées dans le texte, ou dans les additions précédentes. Mais l'intelligence des démonstrations se trouvera facilitée, par la notion préalable qu'on acquerra de l'ensemble, en continuant, d'abord, la lecture, du n°. 105 jusqu'aux additions.*

*Si l'on veut, ensuite, approfondir cette théorie par une lecture complette, il conviendra de voir, chaque addition, en même tems que les parties du texte auxquelles elle se rapporte.*

FIN.

Douai.—Imprimerie de V. Adam.

Planche 1.re (ADD)




Lith. V. Adam, Douai

*Etats & positions successives d'un système planétaire en formation.*

Planche II